

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В.И.УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

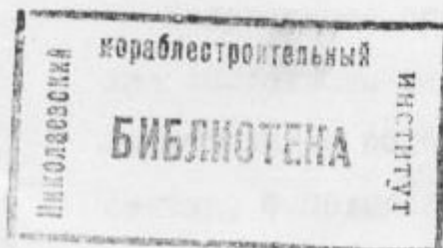
На правах рукописи

АВETИCЯН АРТАВАЗД ГЕГАМОВИЧ

ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ КРАЯ ПОВЕРХНОСТИ
КОНТАКТА СОСТАВНОГО ТЕЛА В НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ
ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(01.02.04 - механика деформируемого твердого тела)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Казань - 1978

Работа выполнена в Ереванском политехническом институте им. К.Маркса.

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент К.С. ЧОБАНЯН

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук, профессор Л.А.ФИЛЬШТИНСКИЙ, кандидат физико-математических наук, доцент Ю.П.ЖИГАЛКО.

Ведущее предприятие – указано в решении Специализированного совета.

Автореферат разослан "20" февраля 1978 г.

Защита диссертации состоится "30" марта 1978 г. на заседании Специализированного совета К.053.29.03 по присуждению ученых степеней кандидата физико-математических наук по механике Казанского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени В.И.Ульянова-Ленина, 420008, г.Казань-8, ул.Ленина, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке университета.

Ученый секретарь
Специализированного совета
канд.физ.-мат.наук, старший
научный сотрудник

АРТЮХИН Ю.П.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Элементы современных инженерных конструкций и машин часто изготавливаются из материалов с различными физико-механическими свойствами и соединяются между собой сваркой, пайкой или склеиванием. При конструировании этих элементов весьма важно иметь представление о тех напряжениях, которые возникают около стыка составного элемента вследствие внешних воздействий. Поскольку усталостное разрушение элементов конструкции и машин главным образом начинается с поверхности этих элементов, исследование напряжений около края поверхности контакта является весьма актуальным для оценки долговечности неразъемных соединений. Необходимо исследовать влияние ряда факторов на напряженное состояние зоны стыка составного элемента. В число таких определяющих факторов входят физико-механические свойства соединенных материалов, геометрическая форма соединения, а также вид внешних воздействий, в зависимости от которых вблизи края поверхности контакта напряжения могут неограниченно возрастать или затухать.

В настоящее время достаточно хорошо изучено явление концентрации напряжений в однородных телах около отверстий, вырезов и трещин. Различные вопросы явления концентраций напряжений в однородных телах исследованы в работах Н.И.Мусхелишвили, Нейбера Г., Савина Г.Н., Л.Г.Магнарадзе, М.Л.Вильямса, С.М.Белоносова, Я.С.Уфлянда и других авторов.

Напряженное состояние в окрестности края поверхности соединения составного тела еще недостаточно полно исследовано. Такие исследования содержатся в работах М.Л.Вильямса и А.Зака, О.К.Аксентян, Ф.Эрдогана и В.Л.Хейна, Д.Боджи, А.К.Рао, К.С.Чобаняна,

С.Х.Геворкяна, Р.А.Алексяна и других авторов.

В представленной работе решены новые задачи об исследовании характера местных напряжений (возрастание или уменьшение) вблизи края поверхности контакта упругого составного тела, находящегося в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния, при различных контурных условиях.

Цель работы. Определение влияния степени стеснения на условия, обеспечивающие отсутствие концентрации напряжений вблизи края поверхности соединения в нагруженных составных телах в зависимости от упругих свойств материалов и геометрии соединения, когда составные тела находятся в условиях плоской задачи теории упругости.

Общая методика исследований. Решения рассматриваемых задач при помощи функции напряжений Эри приводятся к отысканию собственных значений трехточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Порядок особенности напряжений или условия отсутствия этой особенности вблизи края контакта определяется при помощи корня с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения для собственных значений соответствующей краевой задачи. Общее исследование этого корня проведено для случая полностью заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела. Характер местных напряжений в окрестности края поверхности соединения исследован численным методом, при контурных условиях, определяющих различные степени стеснения.

Вычисление искомых корней трансцендентных уравнений с точностью 10^{-4} проведено на ЭВМ "Раздан-3" обобщенным методом половинного деления для нахождения комплексных корней.

Научная новизна. Получены новые результаты, относящиеся к общим закономерностям зависимости характера напряжений вблизи края поверхности контакта нагруженного составного тела при трех различных степенях стеснения его внешней поверхности в окрестности этого края.

Доказано, что существуют интервалы изменения параметров задачи α , β , μ , ν_1 и ν_2 (α , β - углы между поверхностью контакта и внешней поверхностью составного тела, $\mu = \frac{E_1}{E_2}$, E_1 , E_2 и ν_1 , ν_2 - модули упругости и коэффициенты Пуассона соответствующих материалов), когда в заделанной окрестности края поверхности составного тела, в отличие от однородного тела, напряжения могут затухать или неограниченно возрастать при $\alpha + \beta = \pi$, затухать при $\alpha + \beta > \pi$ и иметь особенность при $\alpha + \beta < \pi$.

Установлено, что вблизи частично заделанного края поверхности контакта предельное значение суммы углов α и β , при котором малонапряженность сменяется при увеличении этих углов на особенность напряжений, может достигать значения π для составного тела. Для однородного тела значение этого угла не может превышать $\pi/2$.

Показано, что в случае выполнения условий гладкого контакта на поверхности составного тела около края поверхности контакта малонапряженность вблизи этого края невозможна, а порядок особенности напряжений независимо от углов и упругих постоянных материалов может достигать единицы, т.е. порядка особенности напряжений под сосредоточенной силой.

Выявлены принципиальные отличия полей напряжений вблизи вершины составного и однородного клиньев.

Практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при проектировании и разработке

технологии изготовления составных элементов конструкций и машин так, чтобы эксплуатационные напряжения в опасной для трещинообразования зоне края поверхности контакта затухали.

Составленные по результатам вычислений графики и таблицы могут быть непосредственно использованы для практических расчетов.

Апробация. Основные результаты диссертационной работы обсуждались на семинарах сектора теории упругости и пластичности Института механики АН Арм.ССР (Ереван, 1970, 1971 гг.), на ежегодных научных конференциях Ереванского политехнического института им. К.Маркса (1971, 1974), на совместных заседаниях кафедр теоретической механики и сопротивления материалов ЕрПИ, на семинаре кафедры теоретической механики Казанского государственного университета (1974, 1976), в летней научной школе по проблемам прочности конструкций из стекла и керамики (1-10 июля 1976 г., Обнинск), а также на семинаре СФХПИ имени В.И.Ленина "Прикладные методы математики в инженерном деле" (Сумы, 1977 г.).

Публикации. Результаты выполненных исследований опубликованы в виде 3-х статей в журнале "Изв.АН Арм.ССР, серия механика", т.ХХУ, № 5,6, 1972 и в сборнике "Исследования по теории пластин и оболочек", вып.12, Казань, изд-во КГУ, 1976 г.

Объем работы. Диссертационная работа изложена на 138 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав, выводов, трех приложений, библиографии (59 наименований), содержит 15 рисунков, 41 таблицу.

Содержание работы

Во введении приводятся краткий обзор работ, в которых в какой-то мере затрагиваются рассмотренные в реферируемой работе вопросы, и краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена исследованию поведения поля напряжений около края поверхности соединения составного тела, изготовленного из разных материалов и находящегося в условиях плоской задачи теории упругости, когда внешняя поверхность в окрестности этого края заделана, а нагрузка приложена к телу на некотором удалении от рассматриваемого края.

При исследовании напряжений в малой окрестности края поверхности соединения составного тела криволинейные элементы внешней поверхности и поверхности соединения вблизи этого края рассматриваются как плоские. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к той же задаче для составного клина с прямолинейными сторонами. Принятое упрощение не влияет на результаты исследования.

В первом параграфе работы сформулирована постановка задачи и приведены основные соотношения.

Функция напряжений Эри ищется в виде

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 = z^{\lambda+1} \theta_1(\lambda, \varphi) & 0 < \tau < \infty, \quad 0 < \varphi < \alpha \\ \Phi_2 = z^{\lambda+1} \theta_2(\lambda, \varphi) & 0 < \tau < \infty, \quad -\beta < \varphi < 0 \end{cases} \quad (I)$$

где τ и φ - полярные координаты точки в системе с полюсом на вершине клина;

$$\theta_k = A_k \sin(\lambda+1)\varphi + B_k \cos(\lambda+1)\varphi + C_k \sin(\lambda-1)\varphi + D_k \cos(\lambda-1)\varphi$$

A_k, B_k, C_k, D_k - постоянные, λ - параметр.

Во втором параграфе на основании (I), деформационных условий полного контакта и граничных условий решение рассматриваемой задачи сведено к исследованию трехточечной краевой задачи, для определения системы собственных чисел λ_i которой получено известное трансцендентное уравнение.

Решение плоской задачи теории упругости в рассматриваемой области представляется в виде ряда

$$\Phi_K = \sum_{i=1}^{\infty} \tau^{\lambda_i+1} \Theta_K(\lambda_i, \psi), \quad (K=1, 2) \quad (2)$$

где λ_i упорядочены по возрастанию положительной части. Слагаемые, соответствующие собственным числам λ_i с отрицательными действительными частями, не включены в решение (2), как не соответствующие физическому смыслу задачи.

Характер напряжений вблизи края поверхности контакта определяется первым слагаемым (2), которое имеет вид $\tau^{Re(\lambda_1)+1} \psi(z, \psi)$, где ψ ограничена при $\tau \rightarrow 0$.

В конце этого параграфа для определения λ_i приведен алгоритм численного решения трансцендентного уравнения, являющийся обобщением метода половинного деления для нахождения комплексных корней.

В третьем параграфе приведен анализ результатов вычислений, проведенных для трех серий значений пяти параметров задачи (α , β , μ , ν_1 и ν_2). Результаты численного решения приводятся в виде таблиц. В одном практически важном случае ($\alpha + \beta = \pi$) построены графики.

Вблизи края поверхности соединения, выходящего на гладкую поверхность составного тела ($\alpha + \beta = \pi$), при $\tau \rightarrow 0$ напряжения могут затухать или возрастать в зависимости от величины углов между поверхностью соединения и внешней поверхностью тела (α, β) (в отличие от случая однородного тела, для которого аналогичные напряжения имеют конечные, вообще отличные от нуля значения).

Получены оценки для интервалов изменения этих углов и отношения $\mu = E_1/E_2$, при которых напряжения затухают, а также оценки, когда напряжения неограниченно возрастают при $\tau \rightarrow 0$. Подробно исследована зависимость от α и μ порядка особенностей напряжений.

Выявлено влияние коэффициентов Пуассона соединенных материалов

на интервалы изменения параметров α , β и μ , когда напряжения затухают, а также на порядок особенности напряжений.

Анализ результатов вычислений проведен также для случаев, когда $\alpha + \beta < \pi$ и $\alpha + \beta > \pi$.

В первом случае ($\alpha + \beta = \frac{11}{12} \pi$) существует интервал изменения параметров α и μ , когда, в отличие от случая выступающего ребра однородного тела, на выступающем ребре составного тела, совпадающем с краем поверхности контакта, напряжения могут иметь особенность как при одинаковых, так и при разных значениях коэффициентов Пуассона материалов.

Во втором случае ($\alpha + \beta = \frac{13}{12} \pi$) существует интервал изменения параметров α и μ , при котором напряжения затухают при приближении к входящему краю поверхности соединения составного тела, внешняя поверхность которого в окрестности этого края заземлена. Когда тело однородное, напряжения неограниченно возрастают в окрестности входящего ребра (угловой точки контура) при общей внешней нагрузке независимо от материала.

В обоих рассмотренных случаях установлено влияние изменения коэффициентов Пуассона на интервалы изменения параметров α и μ , когда напряжения имеют особенность (I случай) или затухают (II случай).

Вычисления этой и следующих глав проведены для плоского напряженного состояния.

Вторая глава посвящена исследованию поведения поля напряжений в окрестности края поверхности соединения, когда в этой окрестности внешняя поверхность одного из соединенных материалов (имеющего угол раствора α) заделана, а второго (имеющего угол раствора β) — свободна.

В первом параграфе этой главы сформулирована рассматриваемая

задача и приведены основные соотношения.

Во втором параграфе при помощи деформационных условий полного контакта и граничных условий через функцию напряжений Эри решение рассматриваемой задачи, как и в первой главе, известным способом приводится к отысканию одного собственного значения трехточечной несамосопряженной краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

В третьем параграфе второй главы для ряда комбинаций значений пяти параметров задачи (α , β , μ , ν_1 , ν_2) проведен численный анализ. Выявлен характер напряженного состояния в окрестности частично заделанного края поверхности соединения составного тела в зависимости от характеристик упругости соединенных материалов и геометрии соединения. Вычисления проведены для двух случаев:

$$\alpha + \beta > \pi/4, \quad \mu \geq 1$$

$$\alpha + \beta \leq \pi/2, \quad \mu < 1$$

Результаты численного анализа приводятся в виде графиков и таблиц.

Даны оценки интервалов изменения параметров задачи α , β и μ , когда напряжения затухают и когда они имеют особенность при $\zeta \rightarrow 0$. Выявлена закономерность влияния коэффициентов Пуассона соединенных материалов на интервалы изменения параметров задачи, при которых напряжения затухают, а также на изменение порядка особенности напряжений. Анализ результатов численного расчета показывает, что вблизи частично заделанного края поверхности соединения тела затухание напряжений возможно при $\alpha + \beta < \pi$. Когда $\alpha + \beta \rightarrow \pi - 0$, $\nu_2 \rightarrow 0$ и $\epsilon_1/\epsilon_2 \rightarrow \infty$, затухание напряжений возможно при $\beta = \frac{\pi}{2} - \epsilon$, где ϵ - сколь-

угодно малое положительное число.

В случае $\alpha + \beta > \pi$ для всех комбинаций значений параметров задачи напряжения имеют особенность. В итоге установлено, что при помощи неоднородности предельный угол малонапряженности можно увеличить от $\pi/2$ для однородного клина до π для составного клина.

Третья глава посвящена исследованию характера напряженного состояния в окрестности угловой точки однородного тела и в окрестности края поверхности соединения составного тела, когда на внешней поверхности тела около угловой точки или края контакта нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю (условие гладкого контакта или в частном случае - круговой симметрии задачи).

В первом параграфе этой главы сформулирована задача и приведены основные соотношения.

Во втором параграфе решение этой задачи на основании граничных и деформационных контактных условий, как и в первых двух главах, известным способом приводится к отысканию одного собственного значения трехточечной несамосопряженной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Для собственных значений этой краевой задачи получено трансцендентное уравнение. Для трех случаев: 1) $\beta = 0$; 2) $\alpha = 0$; 3) $\mu = 1$; $m_1 = m_2$ это уравнение существенно упрощается и принимает один и тот же вид.

$$\sin^2 \lambda \varphi - \sin^2 \varphi = 0 \quad (3)$$

(1. $\varphi = \alpha$, 2. $\varphi = \beta$, 3. $\varphi = \alpha + \beta$), что соответствует однородному телу.

Исследование зависимости искомого корня уравнения (3) от уг-

ла φ показывает, что в окрестности ребра поверхности однородного тела, на которой вблизи этого ребра выполняются условия гладкого контакта, напряжения имеют конечные значения при $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pi$, а при $\varphi > \frac{\pi}{2}$, за исключением $\varphi = \pi$, напряжения имеют особенность, порядок которой приближается к порядку особенности сосредоточенной силы, когда φ приближается к π или 2π .

Установлено, что в рассматриваемой задаче при общей внешней нагрузке затухания напряжений вблизи угловой точки контура однородного тела не будет, так как корень $\lambda = 1$ трансцендентного уравнения (3) является собственным значением соответствующей краевой задачи для однородного тела.

В третьем параграфе этой главы для составного тела дан анализ результатов вычислений, которые проведены для шести серий значений ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi$) параметров задачи. Результаты вычислений приведены в виде таблиц и графиков.

Независимо от упругих характеристик соединенных материалов и геометрии соединения затухания напряжений не будет вблизи края поверхности соединения рассматриваемого составного тела. Напряжения в этой окрестности или имеют особенность, или конечны. Отсутствие особенностей напряжений возможно в случаях:

- а) $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$;
- б) $\alpha + \beta = \pi$ при изменении μ в интервале

$$\inf \left(\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}, \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} \right) \leq \mu \leq \sup \left(\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}, \frac{1-\nu_2}{1-\nu_1} \right)$$

для плоского напряженного состояния рассматриваемого тела.

В обоих случаях напряжения имеют конечные значения, если коэффициенты Пуассона соединенных материалов ν_1 и ν_2 имеют

разные значения ($\nu_1 \neq \nu_2$). Если $\nu_1 = \nu_2$ при всех значениях β и μ , кроме $\mu = 1$ (однородное тело), напряжения неограниченно возрастают при приближении к краю поверхности соединения материалов ($z \rightarrow 0$).

Независимо от коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 и параметра μ , когда $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, напряжения вблизи края поверхности соединения имеют конечные значения.

В зависимости от параметров μ, ν_1 и ν_2 даны оценки для интервалов изменения значений угла α , когда вблизи края контакта составного тела отсутствует особенность напряжений. Определено влияние изменения коэффициентов Пуассона соединенных материалов на порядок особенностей напряжений.

Отметим, что закономерности зависимости характера напряженного состояния в окрестности края поверхности контакта в рассматриваемом случае и в случаях, рассмотренных в ранее опубликованных работах Рао, Хейна и Эрдогана, Боджи, Чобаняна, Геворкяна и других авторов, существенно отличаются. В случае выполнения условий гладкого контакта, рассмотренного в настоящей главе, малонапряженность края поверхности контакта составного клина невозможно получать подбором углов и упругих постоянных материалов, а порядок особенности напряжений в этом случае может достигать единицы, т.е. порядка особенности напряжений под сосредоточенной силой. Такой высокий порядок особенности напряжений в окрестности края контакта в ранее исследованных случаях невозможен.

В четвертом параграфе этой главы приведен пример приложения системы собственных функций рассматриваемой в этой главе трехточечной краевой задачи при решении плоской смешанной задачи теории упругости для кругового сектора. Показано, что для произвольной

внешней нагрузки на части контура сектора $\mathcal{Z} = \mathcal{Q}$. решение рассматриваемой задачи получено в виде сходящегося ряда, коэффициенты которого определены в замкнутой форме. В частном случае, когда $\alpha = \mathcal{K}$, получается задача контакта упругой полуокружности, прижатой по диаметру к гладкой жесткой опоре.

В первом приложении приведено доказательство ограниченности мнимой части первого корня λ_1 трансцендентного уравнения, полученное в первой главе. Доказывается, что модуль левой части трансцендентного уравнения в интервале действительной части $\lambda = x + iy$ ($0 < x < 2$) при возрастании y монотонно возрастает как $e^{x\rho(y)}$. Поэтому мнимая часть корня трансцендентного уравнения с наименьшей действительной частью сверху ограничена. Этим доказывается, что трансцендентное уравнение в полосе $0 < x < 1$ при $y > 4$ не имеет корней, т.е. выявлен достаточно узкий интервал для нахождения искомого корня, чем и экономится машинное время.

Во втором приложении приведена программа отыскания корней трансцендентного уравнения на ЭВМ "Раздан-3".

В третьем приложении приведены таблицы вычисленных корней трансцендентных уравнений.

В выводах обобщаются основные результаты работы.

В диссертационной работе получены решения трех новых задач о поведении напряжений в особых точках в составном теле. В ней впервые получены следующие результаты:

1. Проведен асимптотический анализ решения плоской задачи теории упругости вблизи края поверхности контакта составного тела при трех различных стеснениях внешней поверхности тела в окрестности этого края.

2. Обобщен численный метод исследования порядка затухания или возрастания местных напряжений около края поверхности контакта составного тела. При помощи этого метода на ЭВМ "Раздан-3" получены значения корней трансцендентных уравнений и для широкого диапазона изменения геометрических параметров соединения и упругих постоянных соединенных материалов установлен характер распределения напряжений вблизи рассматриваемого края.

3. Доказано, что при общей внешней нагрузке напряжения около входящего края поверхности контакта на заделанной или частично заделанной части поверхности составного тела могут затухать, около выступающего края - возрастать, а около гладкого края - возрастать или затухать в зависимости от геометрии соединения и упругих свойств материалов.

4. Установлено, что вблизи частично заделанного края поверхности контакта составного тела при помощи неоднородности предельный угол малонапряженности можно увеличить от $\mathcal{K}/2$ для однородного тела до $\mathcal{K}$ для составного тела.

5. Доказано, что при общей внешней нагрузке около как выступающего, так и входящего ребра поверхности однородного или составного тела, на котором выполняются условия гладкого контакта, затухание напряжений невозможно, а порядок особенности напряжений может достигать единицы, т.е. порядка особенности напряжений под сосредоточенной силой.

6. В составном теле, находящемся в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния, около края поверхности соединения, в окрестности которого выполняются условия гладкого контакта, в зависимости от упругих постоянных соединенных материалов и геометрии соединения напряжения не имеют особенности только тогда, когда сумма углов между поверхностью соединения и

внешней поверхностью тела меньше $\kappa/2$ и равна κ , а коэффициенты Пуассона соединенных материалов имеют разные значения. Исключение составляет случай $\alpha = \beta = \frac{\kappa}{2}$, когда независимо от упругих постоянных соединенных тел напряжения около края поверхности соединения конечны.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих статьях.

1. Аветисян А.Г. Исследование характера напряженного состояния в частично заделанной окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т.ХХУ, № 5, 1972.

2. Аветисян А.Г., Чобанян К.С. Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т.ХХУ, № 6, 1972.

3. Аветисян А.Г. Особенности напряжений в составном теле при контурных условиях гладкого контакта. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып.12, Казань, изд-во КГУ, 1976.