

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

М. Р. ТКАЧ, В. П. ФРОЛОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА

Иллюстративные материалы

Рекомендовано Методическим советом НУК

Электронное издание комбинированного
использования на DVD-ROM



НИКОЛАЕВ • НУК • 2011

УДК 531:531.2(075)
ББК 22.21
Т 48

Автори:

М. Р. Ткач, доктор технічних наук, професор;

В. П. Фролов, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент Ю. К. Грешнов, кандидат технічних наук, доцент

Кафедра теоретичної механіки

Ткач М. Р.

Т 48 Теоретична механіка. Статика : ілюстративні матеріали / М. Р. Ткач,
В. П. Фролов. – Миколаїв : Видавництво НУК, 2011. – 92 с.

Наведено основні поняття і закони, що вивчаються в розділі теоретичної механіки "Статика". На конкретних прикладах показано методику розв'язання завдань, що розглядаються в курсі. Подано методику та приклади виконання відповідних розрахунково-графічних завдань.

Посібник дає змогу студентам зосередитися на ключових моментах вивченого матеріалу, а також здійснити самоперевірку знань у процесі підготовки до поточного та семестрового контролів кредитно-модульної системи навчання.

Призначено для студентів.

УДК 531:531.2(075)
ББК 22.21

Навчальне видання

ТКАЧ Михайло Романович
ФРОЛОВ Віталій Петрович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА

Ілюстративні матеріали

(російською мовою)

Комп'ютерне складання та верстання *В.Г. Мазанко*
Коректор *М.О. Паненко*

© Ткач М. Р., Фролов В. П., 2011
© Видавництво НУК, 2011

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 5,4. Обсяг даних 4550 кб.

Тираж 14. Вид. № 23. Зам. № 402.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54025, м. Миколаїв, просп. Героїв Сталінграда, 9

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ОТ АВТОРОВ

Творческий процесс освоения теоретической механики является необходимым условием подготовки инженера. Этот процесс создает основу дальнейшего изучения общеинженерных и специальных дисциплин и связан глубоким усвоением логики получения и содержания теоретических результатов, наработкой навыков и приемов рационального решения задач, осуществлением анализа полученных результатов. Все это сопровождается рядом рутинных (по современным понятиям), но абсолютно необходимых работ: выполнением графических построений, осуществлением математических преобразований, проведением расчетов. За их трудоемкостью зачастую теряется физический смысл изучаемых процессов и явлений.

Современное образование (как, впрочем, и жизнь) уже не мыслимо без применения компьютерных технологий. Интерактивный лекционный курс "Статика" обеспечивает условия для концентрации усилий и студентов, и лектора на проблемных аспектах изучаемого материала, а также конкретном применении теоретических положений. В нем в рациональном объеме использованы системы компьютерной поддержки проектирования (*CAD*-системы). Решение математических задач, необходимых в курсе механики, зачастую облегчено системой компьютерного моделирования, не требующей специальных знаний программирования, – системой *MathCAD*. Выполнение графических построений с точностью численных решений задач механики обеспечено системой компьютерной графики – *AutoCAD*. Широкое применение этих (или аналогичных) компьютерных систем в учебном процессе позволяет существенно повысить уровень подготовки студентов, а в практической деятельности – квалификацию специалистов.

Использование студентами данного пособия значительно облегчит выполнение двуединого задания самостоятельной работы: позволит сосредоточиться на ключевых моментах изучаемого материала, а также выполнить самопроверку знаний в процессе подготовки к существующим формам контроля.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

Теоретическая механика – наука об общих законах движения и равновесия материальных тел.

Статика – раздел теоретической механики, изучающий равновесие тел под действием сил и взаимодействие тел в условиях равновесия.

Метод теоретической механики – абстракция: выделение в изучаемом явлении главного и отбрасывание второстепенного.

Модели реальных объектов

Материальная точка – тело, размерами которого можно пренебречь, характеризующееся свойством инерции (масса) и способностью взаимодействия с другими телами.

Абсолютно твердое тело – тело, расстояние между точками которого остается неизменным при любых воздействиях со стороны других тел.

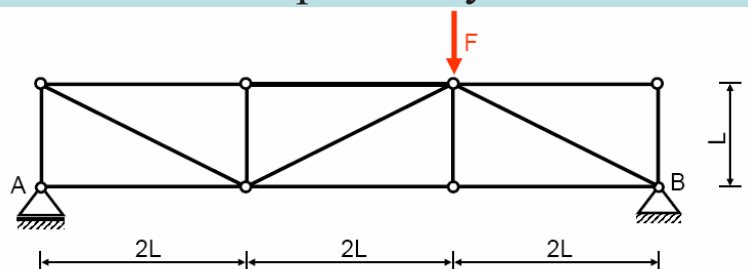


Объект – мост через реку



Опора моста

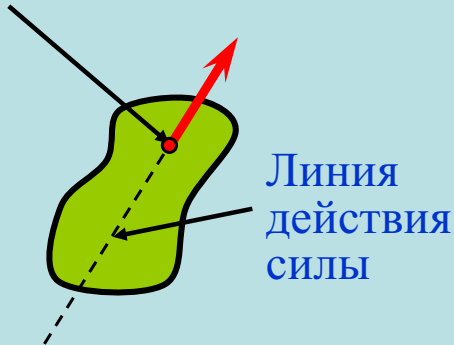
Модель для расчета усилий



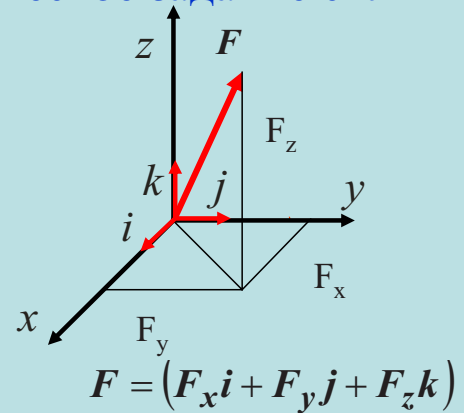
Сила – величина, определяющая интенсивность и направление механического взаимодействия материальных тел.

Сила – мера механического воздействия, в результате которого тела сообщают друг другу ускорение или изменяют форму – деформируются.

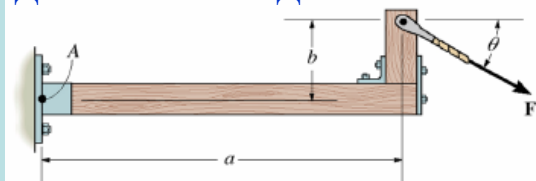
Точка приложения силы



Аналитическое задание силы F

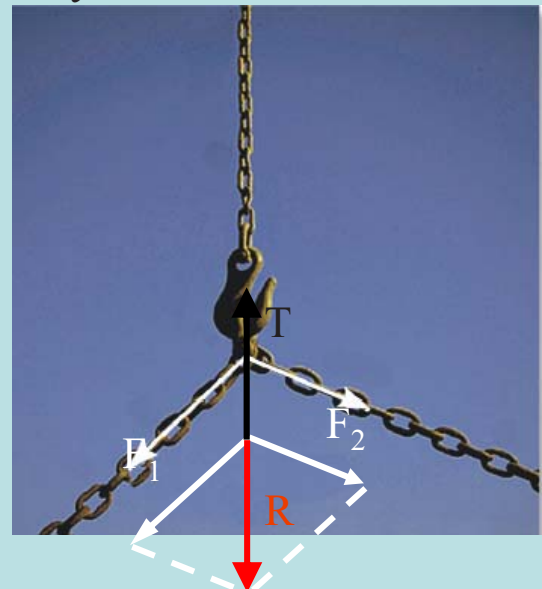


Непосредственное задание силы F



F_x - проекция силы F на ось x
 F_y - проекция силы F на ось y
 F_z - проекция силы F на ось z

Система сил – совокупность сил, действующих на данное тело.

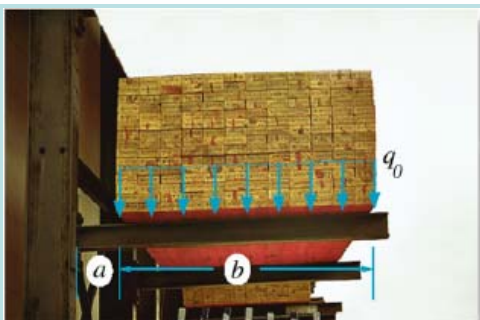
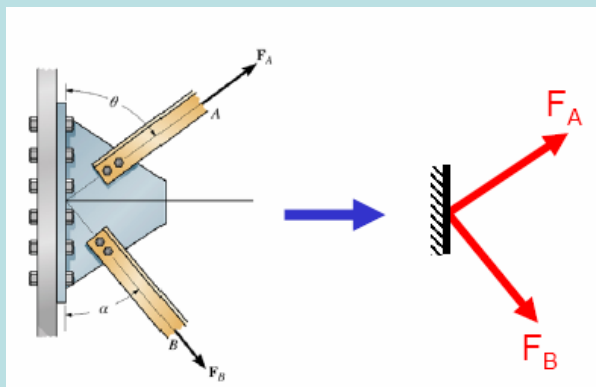


Эквивалентная система сил – система сил, заменяющая данную систему сил, при условии неизменности состояния тела, на которое она действует.

Равнодействующая сила R – сила, заменяющая данную систему сил, при условии неизменности состояния тела, на которое она действует.

Уравновешивающая сила T – сила, равная по величине равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону

Сосредоточенная сила – сила, приложенная к одной точке данного тела



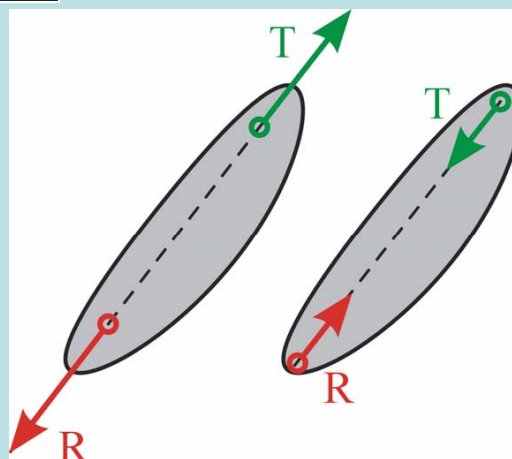
Распределенные нагрузки – силы, действующие на все точки данного объема или поверхности тела.



Аксиомы статики

Аксиома 1 – о равновесии двух сил.

Две силы, приложенные к **абсолютно твердому телу**, будут уравновешены тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.



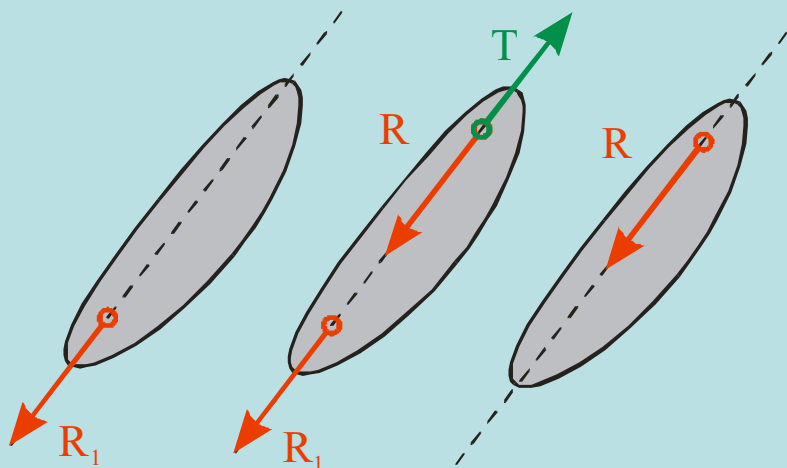
Следствие: если твердое тело находится в равновесии под действием двух сил, то они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

Аксиома 2 – о присоединении или исключении уравнивающих сил.

Не нарушая состояния тела, к нему можно прикладывать (отбрасывать) силы только тогда, когда они составляют уравновешенную систему сил.

В частном случае это система двух сил.

Пусть три силы $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{T}$ равны по модулю.

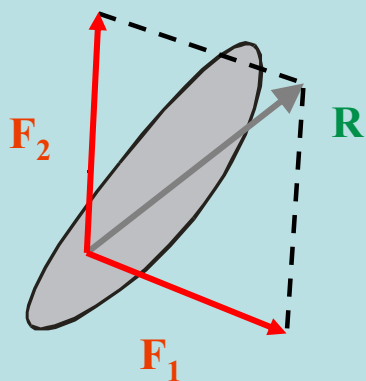


Следствие: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если точку приложения этой силы перенести вдоль линии действия ее в любую другую точку этого тела.

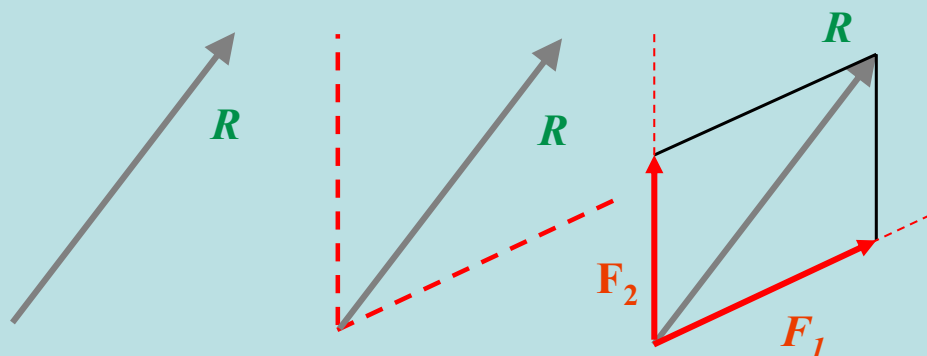
Аксиома 3 – о параллелограмме сил.

Не меняя состояния тела, две силы, приложенные в одной точке, можно заменить одной равнодействующей силой, приложенной в той же точке и равной их геометрической (векторной) сумме.

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$



Следствие: любую силу $\mathbf{R}$ можно разложить на две и более составляющих



Аксиома 4 – о равенстве действия и противодействия.

Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. "Действие равно противодействию".

Однако эти силы *не уравниваются*, т.к. приложены к разным телам.

$$R = -T$$



Формы силового взаимодействия тел.

Близкодействие – взаимодействие между телами путем непосредственного соприкосновения (контакта).

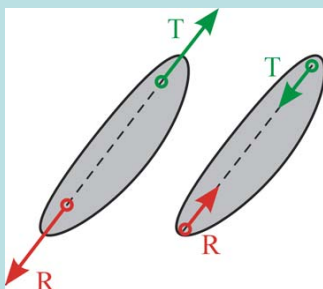
Дальнодействие – взаимодействие тел посредством физических полей (без непосредственного контакта).

Аксиома 5 – принцип отвердевания.

Если деформируемое тело находится в состоянии равновесия под действием некоторой системы сил, то равновесие не нарушится, если тело станет абсолютно твердым (отвердеет).

Следствие: Условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу должны выполняться и для тех же сил, но приложенных к деформируемую телу.

Твердое тело

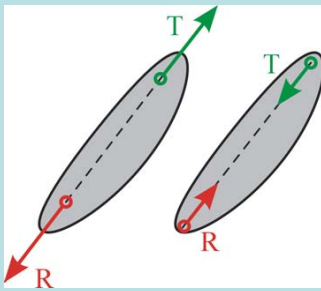


Условие равновесия двух сил, приложенных к **твердому телу** - силы равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

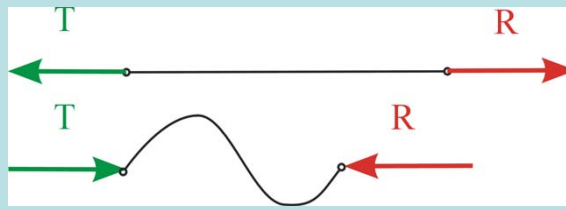
Гибкая нить



Твердое тело



Гибкая нить

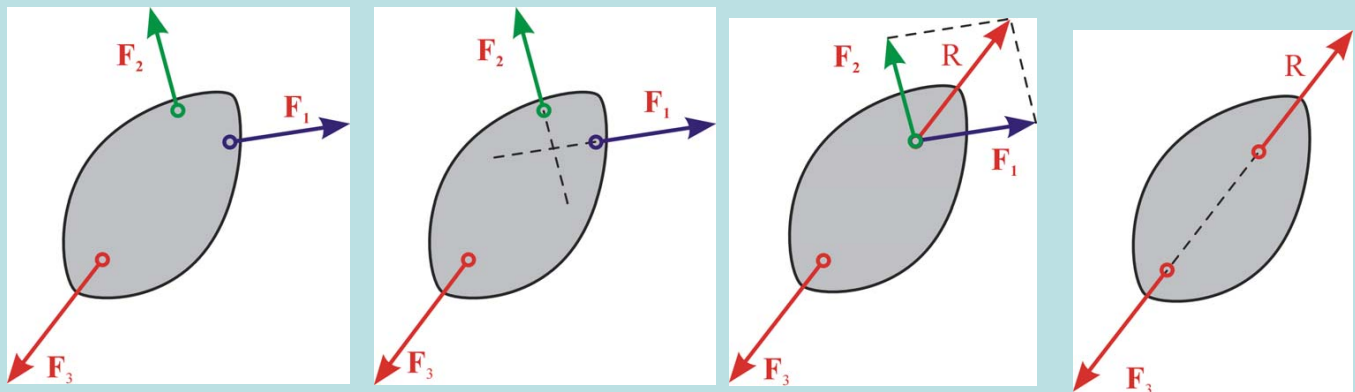


Для деформируемого тела (нити) это условие является необходимыми, но не достаточными.

Две силы, приложенные к деформируемому телу, удовлетворяют этому условию при наличии **добавочного условия**: силы должны только растягивать нить.

Теорема о трех непараллельных силах

Если тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то их линии действия пересекаются в одной точке.



$$R = F_1 + F_2$$

$$R = -F_3$$

Свободным принято называть тело, перемещения которого ничем не ограничены.

Тело, перемещения которого ограничены другими телами, называют несвободным.

Тела, ограничивающие перемещение несвободного тела, называют связями.

Реакции связей – силы, действие которых эквивалентно действию связей.

Реакции связей – пассивные силы, возникающие вследствие действия на тело заданных (активных) сил.

Аксиома 6 – принцип освобождаемости от связей.

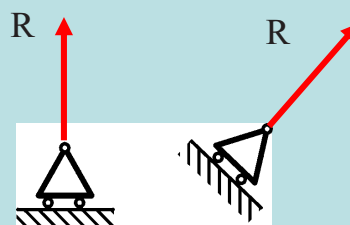
Механическое состояние несвободного тела не изменится если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу.

Связи и их реакции

Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора – препятствует перемещению в направлении, перпендикулярном к плоскости, по которой она перемещается



Условное обозначение

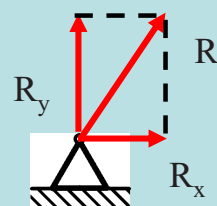


Реакция *цилиндрической шарнирно-подвижной опоры* направлена по нормали к плоскости, по которой она перемещается.

Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора – препятствует перемещению в произвольном направлении в плоскости, перпендикулярной оси опоры



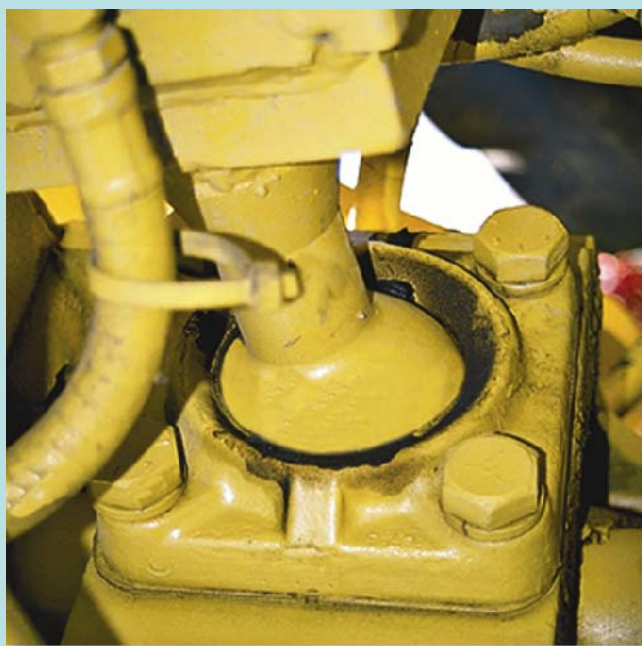
Условное обозначение



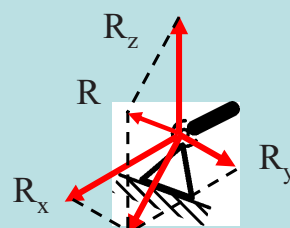
Реакция *цилиндрической шарнирно-неподвижной опоры* может быть направлена произвольно в плоскости, перпендикулярной оси опоры.

Реакцию *цилиндрической шарнирно-неподвижной опоры* целесообразно представлять в виде двух составляющих, направленных параллельно координатным осям.

Сферическая опора – препятствует перемещению тела в любом пространственном направлении



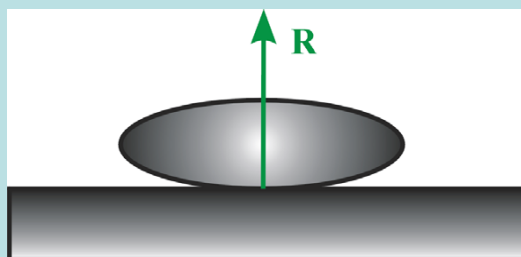
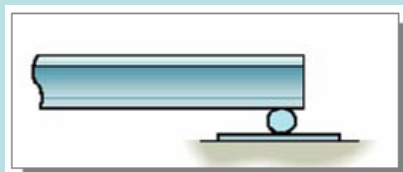
Условное обозначение



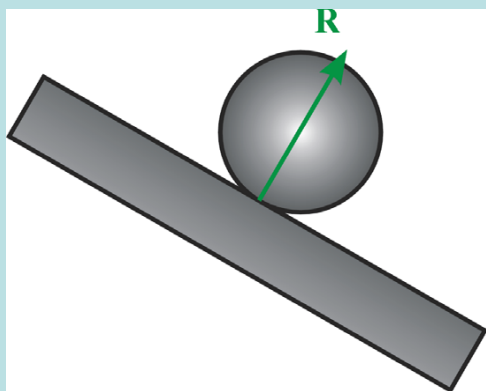
Реакция *сферической опоры* может быть направлена произвольно в пространстве

Реакцию *сферической опоры* целесообразно представлять в виде трех составляющих, направленных параллельно координатным осям.

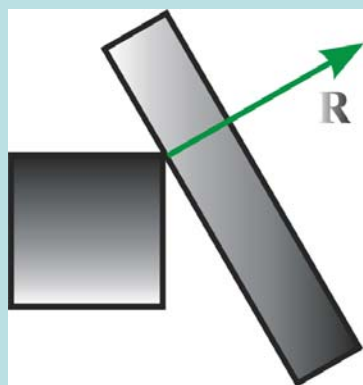
Опора твердого тела на идеальную (без трения) гладкую поверхность – точка контакта может свободно скользить по этой поверхности, но не имеет возможности перемещаться в направлении нормали к ней.



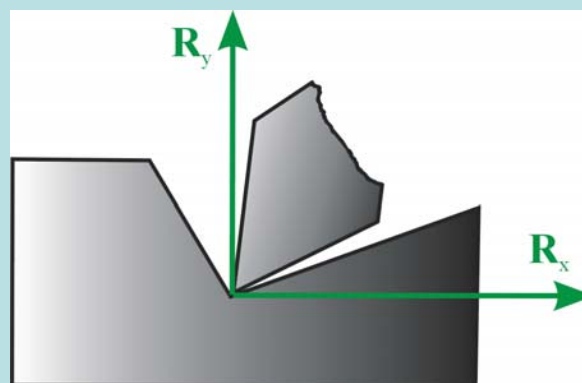
Реакция идеальной гладкой поверхности направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям.



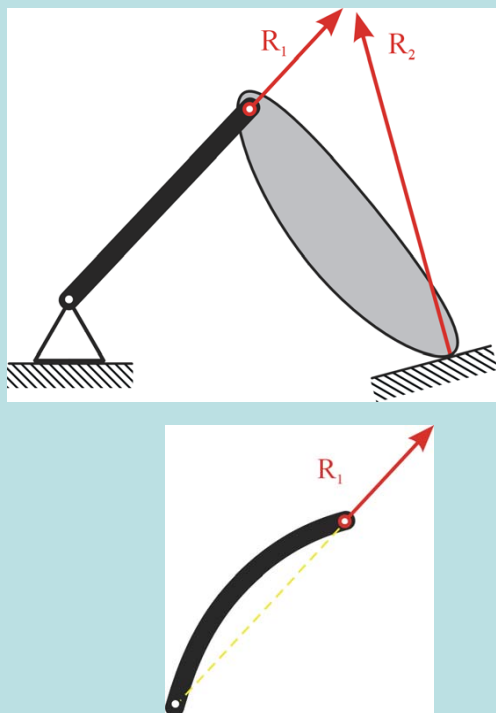
Если твердое тело имеет гладкую поверхность и опирается на острие, то реакция направлена по нормали к поверхности этого тела.



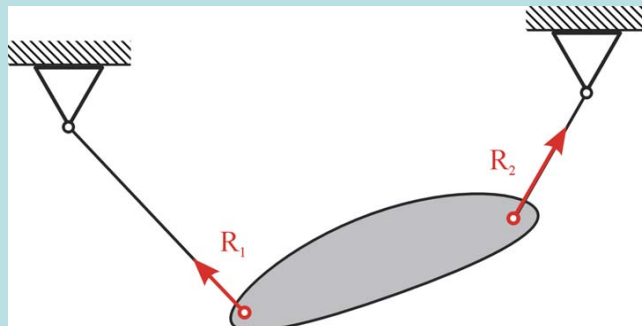
Если твердое тело опирается острием в угол, то реакция может быть представлена двумя составляющими (горизонтальной и вертикальной).



Реакция жесткой стержневой связи направлена по прямой, соединяющей точки ее начала и окончания.

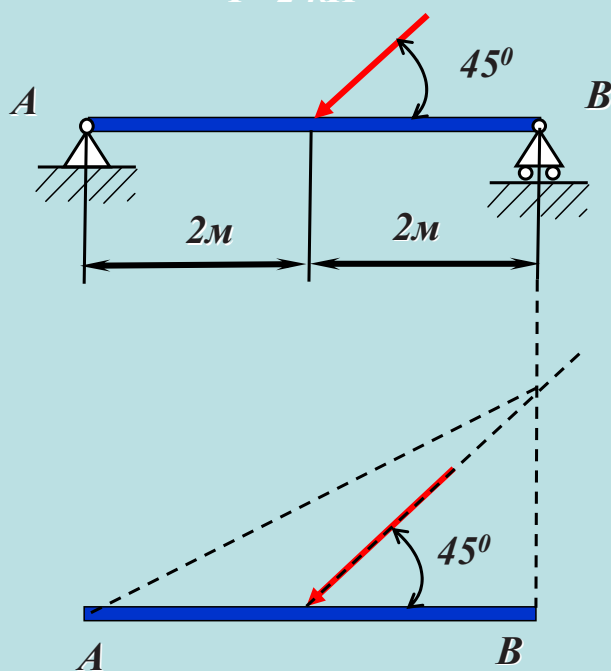


Реакция гибкой связи (нити) направлена вдоль нити *от тела*.

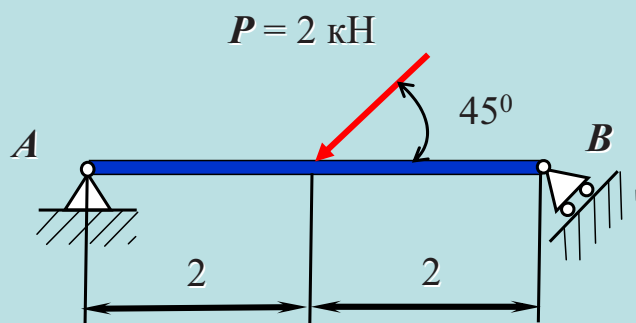


Задача 2.30 Балка АВ шарнирно закреплена на опоре А, у конца В она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила $P = 2 \text{ кН}$. Определить реакции опор для случаев а и б, взяв размеры с чертежей и пренебрегая весом балки.

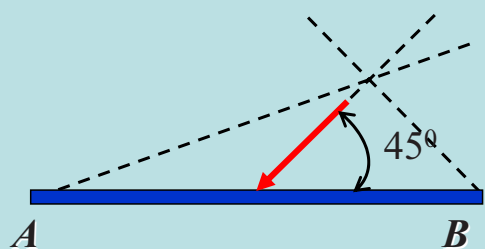
$$P = 2 \text{ кН}$$



1. Рассматриваем равновесие тела-балки.
2. Освободим тело от связей и заменим их реакциями.
3. Реакция **цилиндрической шарнирно-подвижной опоры В** направлена по нормали к плоскости, по которой она перемещается.
3. Реакция **цилиндрической шарнирно-неподвижной опоры А** может быть направлена произвольно в плоскости, перпендикулярной оси опоры.
4. Ее направление определим, используя теорему о трех непараллельных силах.



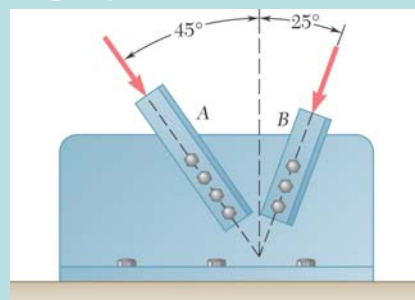
1. Рассматриваем равновесие тела-балки.
2. Освободим тело от связей и заменим их реакциями.
3. Реакция **цилиндрической шарнирно-подвижной опоры B** направлена по нормали к плоскости, по которой она перемещается.
3. Направление реакции **цилиндрической шарнирно-неподвижной опоры A** определим, используя теорему о трех непараллельных силах.



Величина реакций опор A и B определяется из условия равновесия балки.

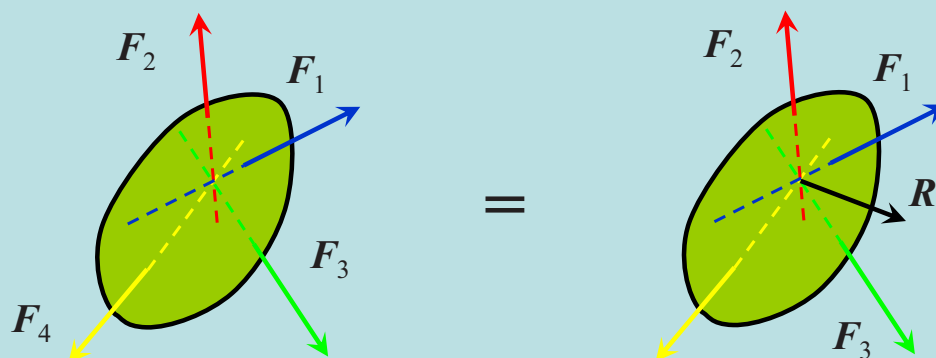
2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Система сходящихся сил – совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.



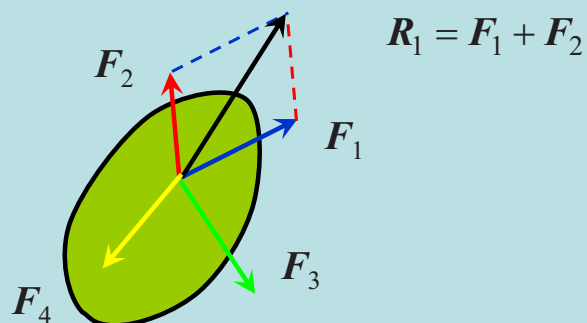
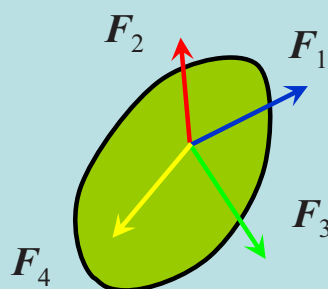
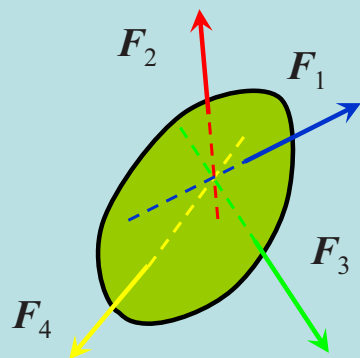
Теорема

Система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна геометрической сумме этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.



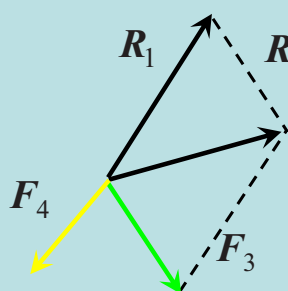
Перенесем точки приложения сил по линии их действия.

Складываем силы F_1 и F_2 .



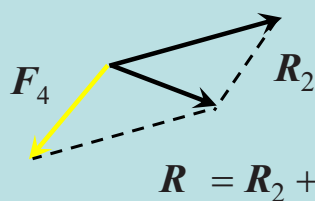
$$R_1 = F_1 + F_2$$

Складываем силы R_1 и F_3 .

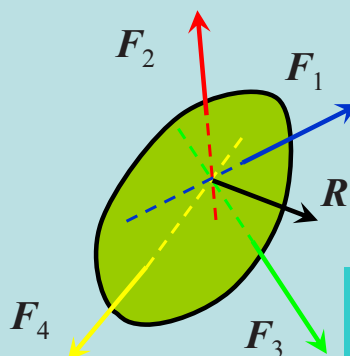


$$R_2 = R_1 + F_3$$

Складываем силы R_2 и F_4 .



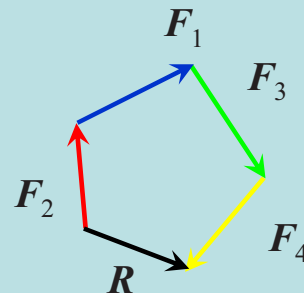
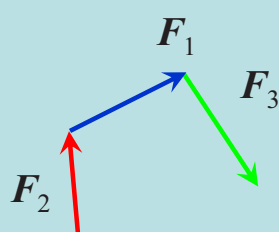
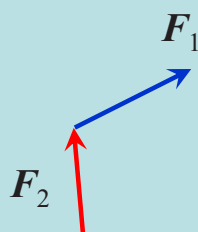
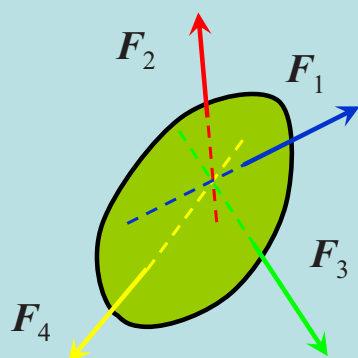
$$R = R_2 + F_4$$



$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

Графический способ нахождения равнодействующей

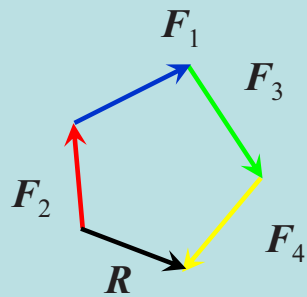
Силовой многоугольник



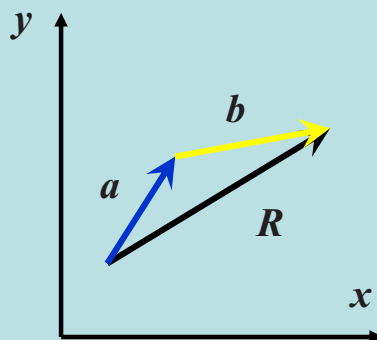
$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

Силовой многоугольник

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$$

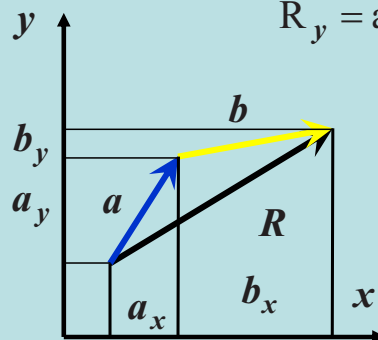


Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$



$$R_x = a_x + b_x$$

$$R_y = a_y + b_y$$



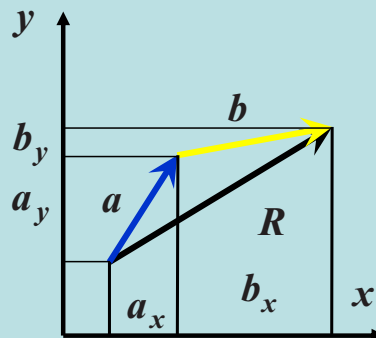
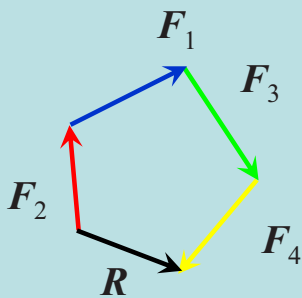
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x},$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y},$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z}.$$

Аналитический способ
нахождения
равнодействующей



Рассмотрим систему сходящихся сил, состоящую из n векторов

Проекции ее равнодействующей равны:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx},$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky},$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}$$

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси.

Условие равновесия системы сходящихся сил

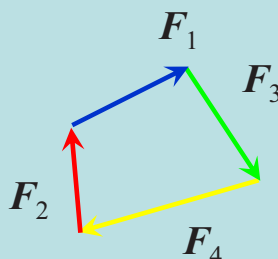
Для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая равнялась нулю.

$$R = 0,$$

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0,$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0,$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0.$$

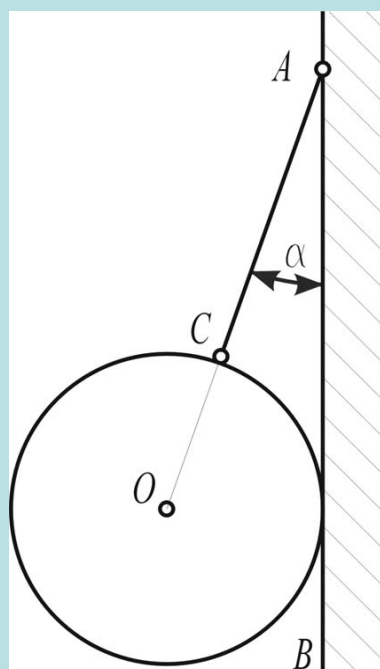


В силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы совпадает с началом первой.

Силовой многоугольник – замкнут.

Задача 2.19. К вертикальной гладкой стене AB подвешен на тросе AC однородный шар O . Трос составляет со стеной угол α , вес шара равен P .

Определить натяжение троса T и силу давления N шара на стену.

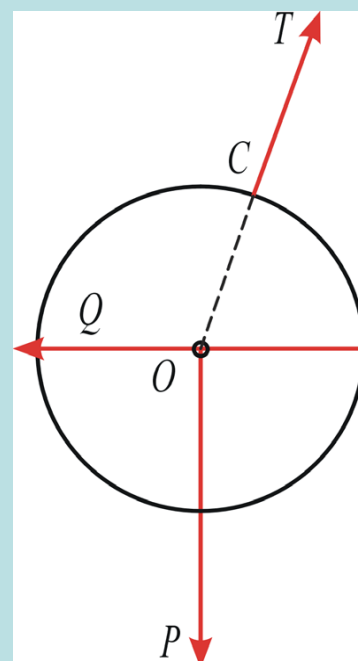


Мысленно освободим тело (шар) от связей и заменим их реакциями.

Реакция троса T направлена вдоль него от точки C к точке A .

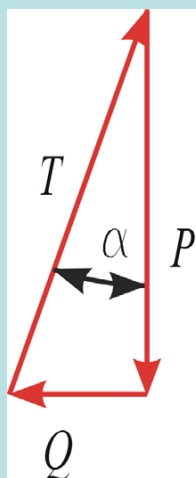
Реакция гладкой стенки Q направлена по нормали к поверхности шара.

Сила давления N равна минус Q .



Шар находится в равновесии под действием трех сил.
Строим замкнутый силовой треугольник.

Геометрическое решение

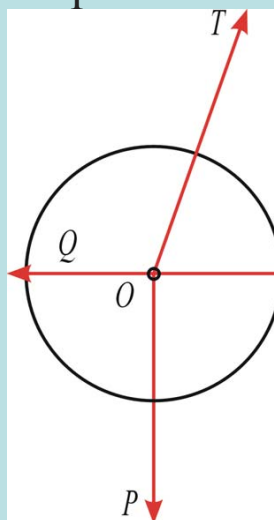


$$T = P / (\cos \alpha)$$

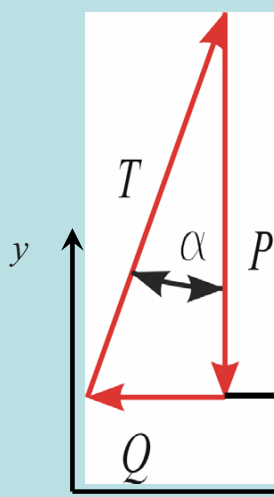
$$\begin{aligned} Q &= T \cdot \sin \alpha = \\ &= [P / (\cos \alpha)] \cdot \sin \alpha = \\ &= P \cdot \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Графическое решение

Если заданы численные значения величин, то строим в масштабе силовой треугольник параллельным переносом сил. Измеряем его стороны.



Аналитическое решение



Выберем оси координат.

Составим уравнения равновесия.

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 = -Q + T \sin \alpha;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 = -P + T \cos \alpha.$$

$$T = P / (\cos \alpha).$$

$$Q = T \cdot \sin \alpha = [P / (\cos \alpha)] \cdot \sin \alpha = P \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Искомая сила давления N равна по величине и противоположна по направлению реакции Q .

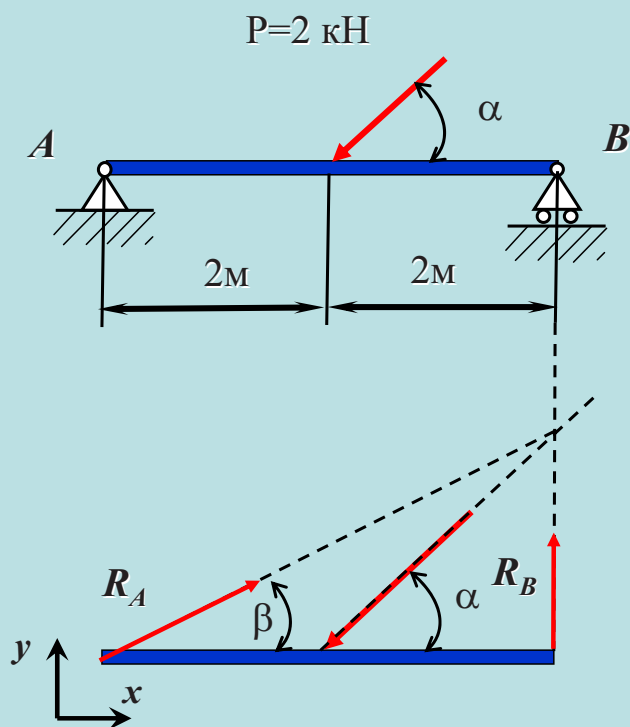
$$N = -Q.$$

Задача 2.30

Примем направления реакций опор.

Выберем оси координат.

Составим уравнения равновесия:



$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0 = -P \cos \alpha + R_A \cos \beta;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0 = -P \sin \alpha + R_A \sin \beta + R_B;$$

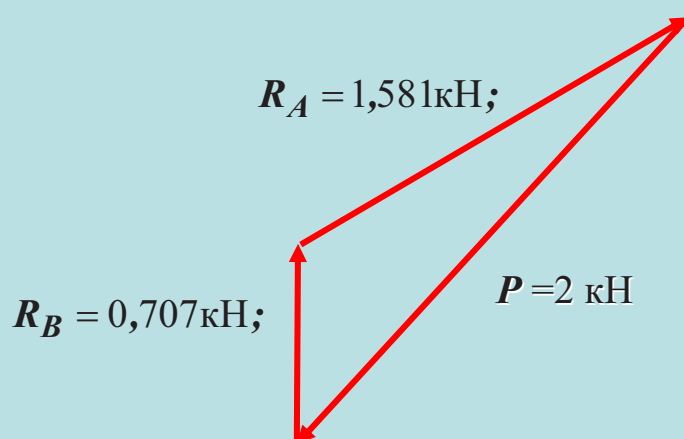
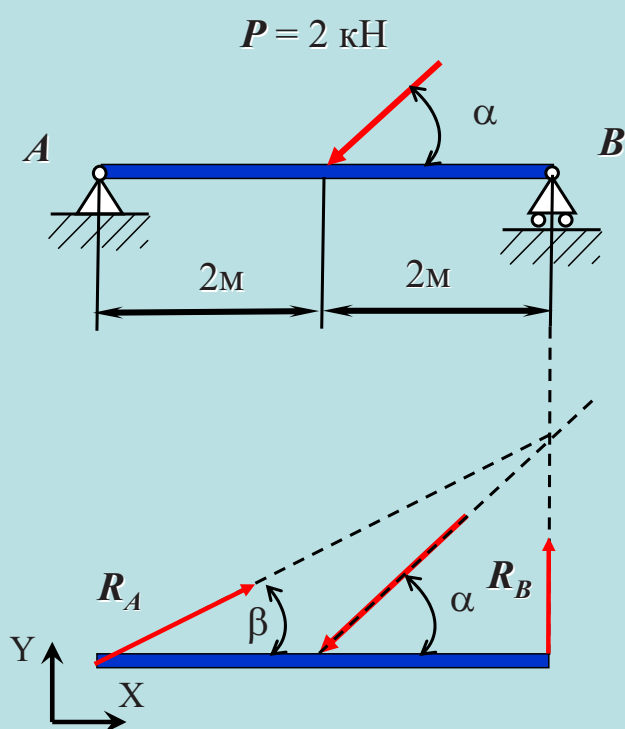
$$R_A = P \cos \alpha / \cos \beta;$$

$$R_B = P \sin \alpha - R_A \sin \beta = P \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta);$$

$$R_A = 1,581 \text{ кН};$$

$$R_B = 0,707 \text{ кН};$$

Проверка решения



Внутренние усилия в стержнях

Внутренние усилия – силы взаимодействия между материальными точками рассматриваемого тела или системы тел.

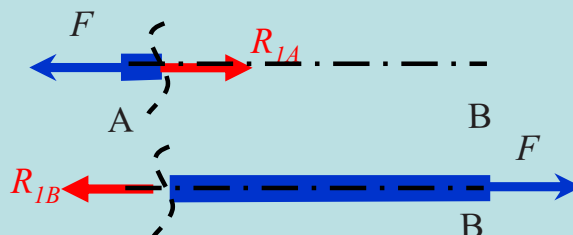
Реакции стержня – действие стержня на тела, вызывающие его растяжение или сжатие.

Метод сечений – позволяет перевести искомые внутренние силы в разряд внешних сил.

Растянутый стержень



Сечение стержня

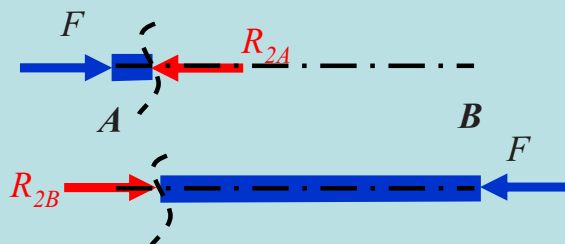


Реакции растянутого стержня равны заданным силам и направлены по оси стержня от его концов.

Сжатый стержень



Сечение стержня



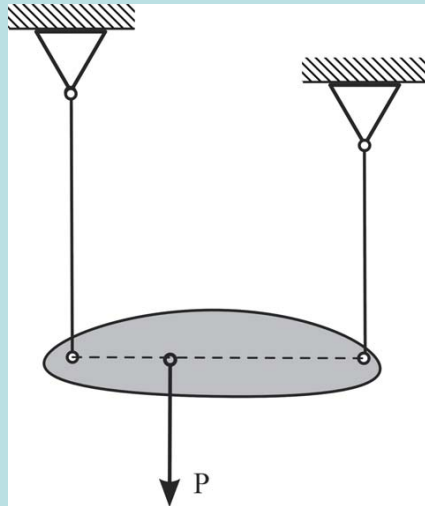
В

Реакции сжатого стержня равны заданным силам и направлены по оси стержня в сторону его концов.

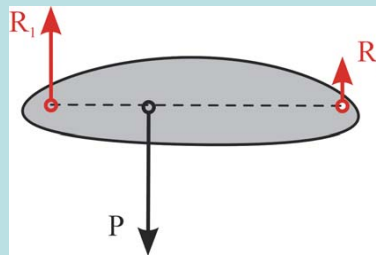
Внутренние усилия действуют в пределах рассматриваемого тела.

3. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ПАРА СИЛ

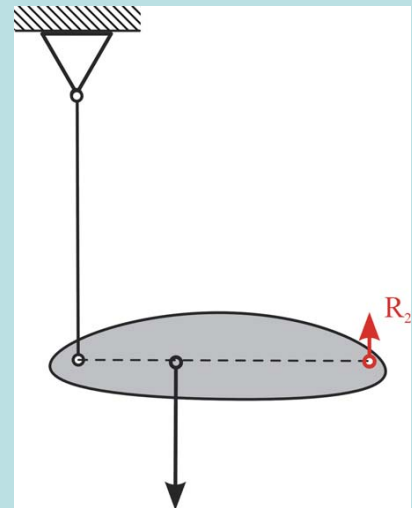
Система параллельных сил – совокупность сил, линии действия которых параллельны.



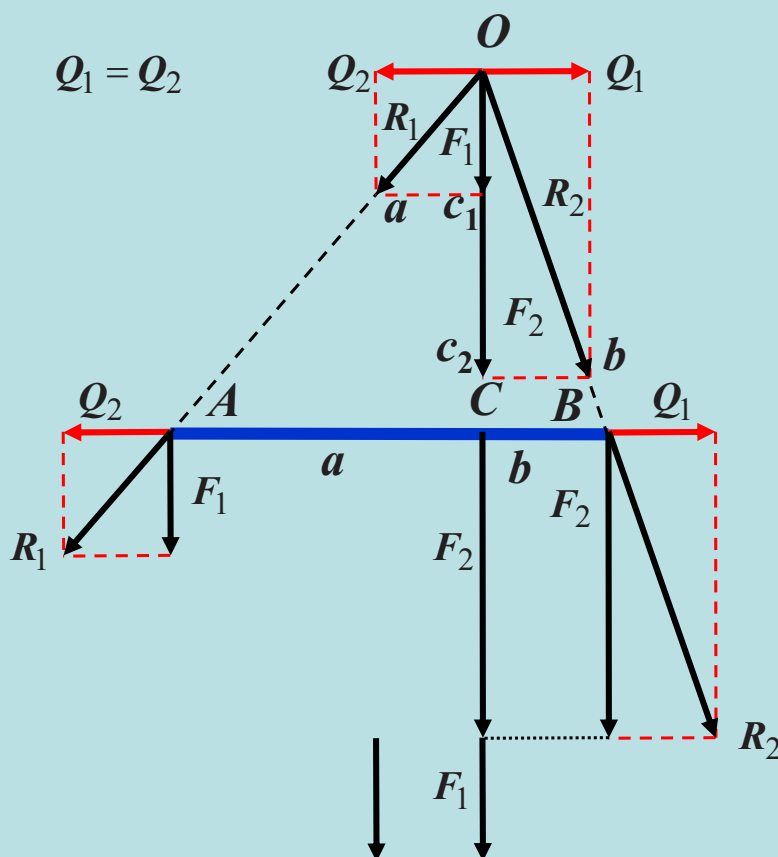
Заменим связи
реакциями
(А6)



Заменим одну
связь реакцией



Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону



Треугольники $АОС$
и $aОс_1$ подобны.

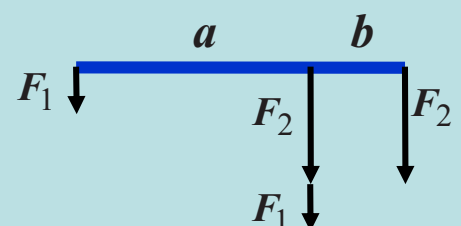
Треугольники $ОВС$
и $Обс_2$ – подобны.

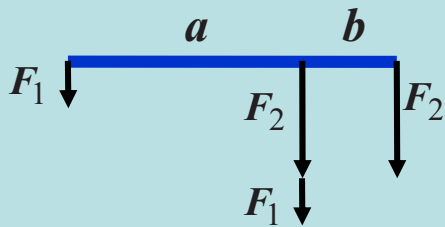
$$\frac{F_1}{OC} = \frac{Q_2}{AC};$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a};$$

$$\frac{F_2}{OC} = \frac{Q_1}{CB};$$

$$R = F_1 + F_2.$$





$$R = F_1 + F_2;$$

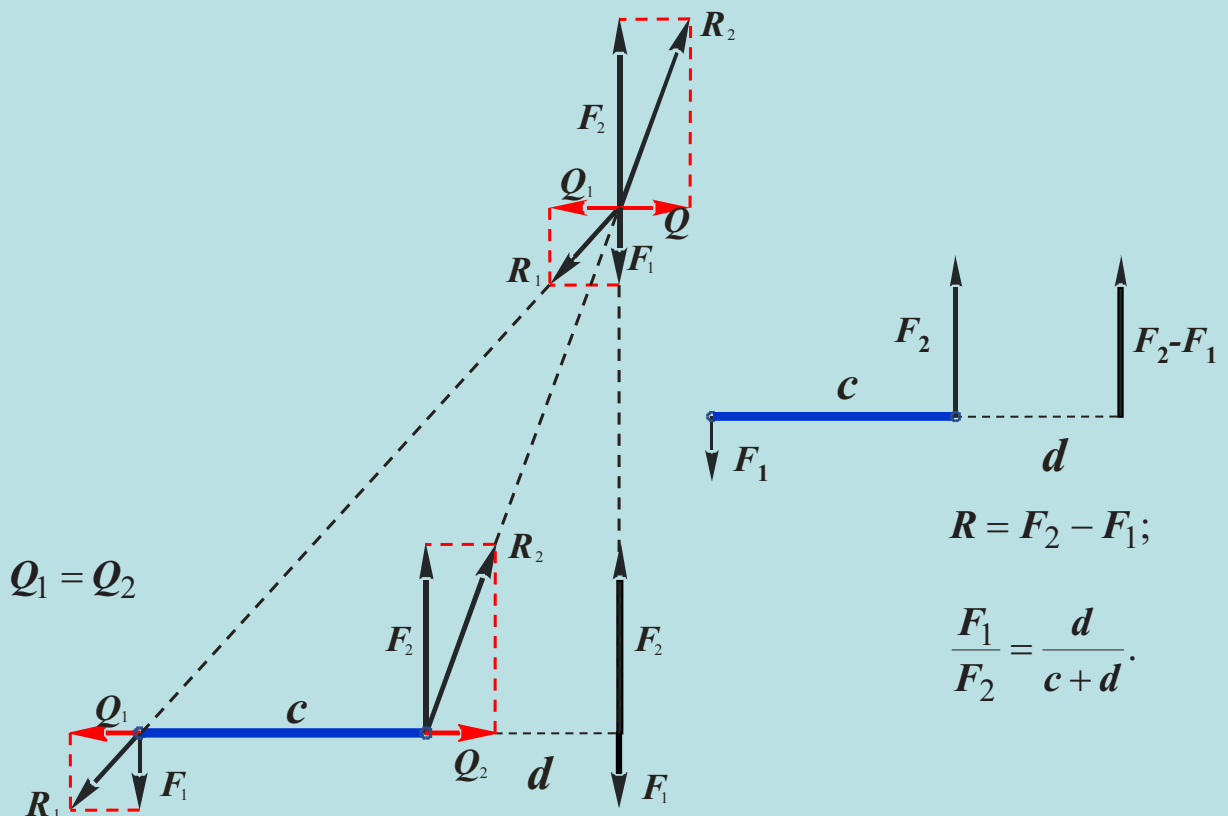
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}.$$

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, параллельна им и направлена в ту же сторону.

Модуль равнодействующей равен сумме модулей слагаемых.

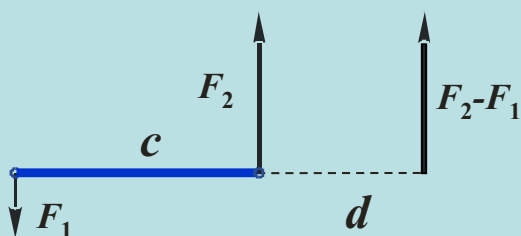
Линия ее действия делит расстояние между точками приложения слагаемых сил обратно пропорционально их модулям.

Сложение двух неравных параллельных сил, направленных в разные стороны



$$R = F_2 - F_1;$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d}{c + d}.$$



$$R = F_2 - F_1;$$

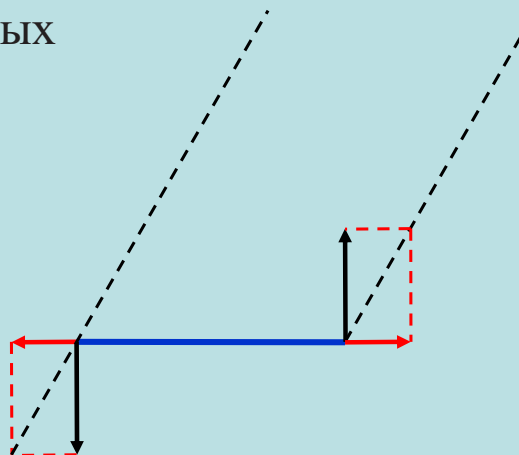
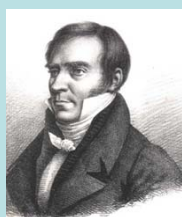
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d}{c + d}.$$

Равнодействующая двух **неравных** параллельных сил, направленных в разные стороны, параллельна им и направлена в сторону большей силы.

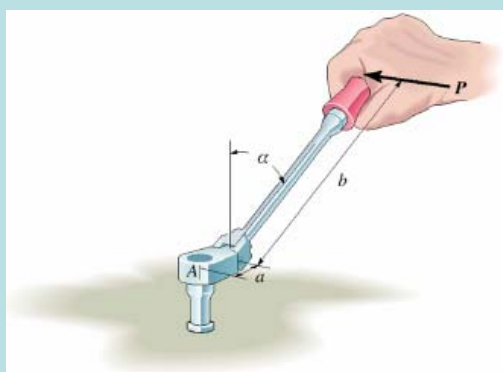
Модуль равнодействующей равен разности модулей слагаемых сил.

Линия ее действия делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внешним образом и обратно пропорционально их модулям.

Если силы равны, то образуется новый объект – **пара сил** (Луи Пуансо, 1804 г.)



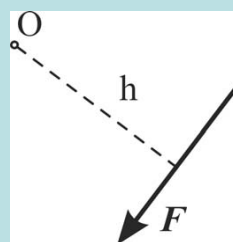
Момент силы относительно точки



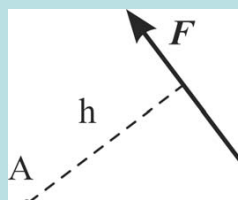
Момент силы относительно точки – алгебраическая величина равная произведению модуля силы на плечо силы, взятая с соответствующим знаком.

Плечо силы h – кратчайшее расстояние (перпендикуляр) из точки O на линию действия силы F .

Правило знаков:
положительное направление "вращения" силы вокруг точки O – против часовой стрелки.

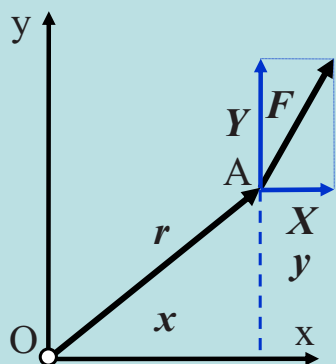


$$M_O = -F \cdot h.$$



$$M_A = F \cdot h.$$

Момент силы относительно точки равен векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы:

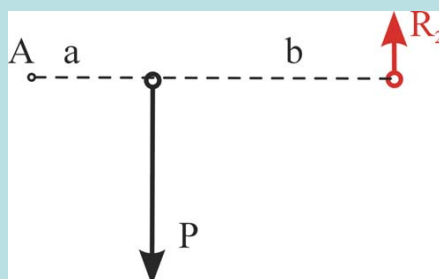
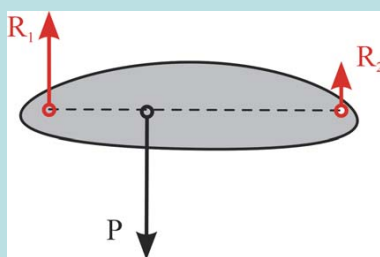


$$M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} x & y \\ X & Y \end{bmatrix} = xY - Xy.$$

Момент силы относительно точки направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\mathbf{r}$ к направлению вектора $\mathbf{F}$ представляется происходящим против хода часовой стрелки

Вектор силы может перемещаться по линии действия силы в пределах твердого тела – **скользящий вектор**.

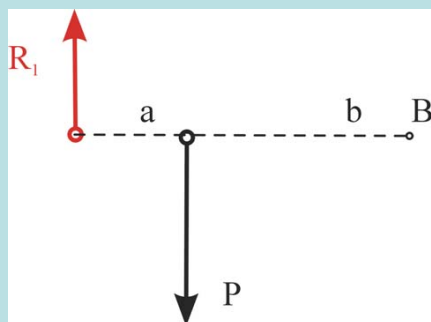
Вектор момента силы относительно точки приложен к этой точке и не может перемещаться – **прикрепленный вектор**.



Запишем сумму моментов сил относительно точки A :

$$\sum M_{Ai} = -P \cdot a + R_2 \cdot (a + b) = 0;$$

$$R_2 = P \cdot a / (a + b).$$

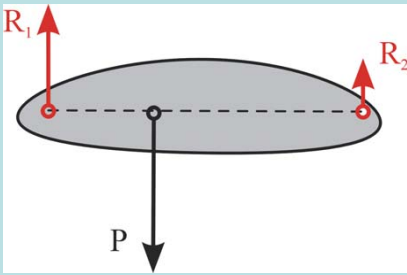


Сумма моментов сил относительно точки B

$$\sum M_{Bi} = -R_1 \cdot (a + b) + P \cdot b = 0;$$

$$R_1 = P \cdot b / (a + b).$$

Равновесие системы параллельных сил



Запишем моменты сил относительно точки O

$$M_{O1} = -P \cdot 0 = 0;$$

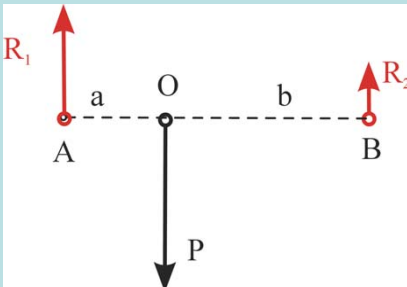
$$M_{O2} = R_2 \cdot b = P \cdot a / (a + b) \cdot b;$$

$$M_{O3} = -R_1 \cdot a = -P \cdot b / (a + b) \cdot a.$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{Oi} = M_{O1} + M_{O2} + M_{O3} = 0;$$

Это условие является следствием двух рассмотренных выше.

$$R_1 + R_2 = P \cdot b / (a + b) + P \cdot a / (a + b) = P.$$



Два условия равновесия системы параллельных сил

1. Алгебраическая сумма проекций всех сил на ось параллельную им равна нулю. Равнодействующая сила равна нулю.

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0;$$

2. Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно одной из точек (A) тела равна нулю.

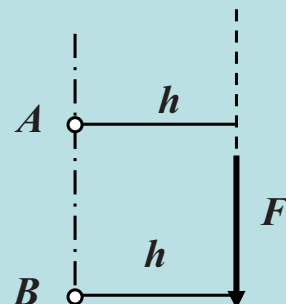
$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0;$$

3. Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно другой точки (B) тела равна нулю.

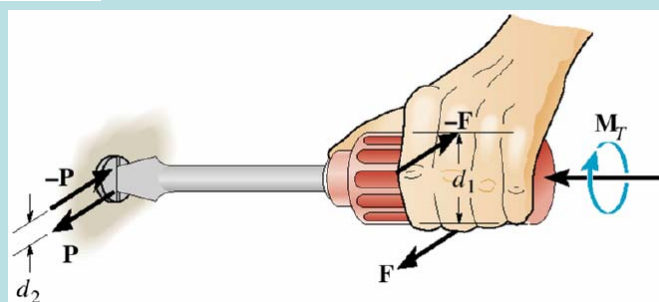
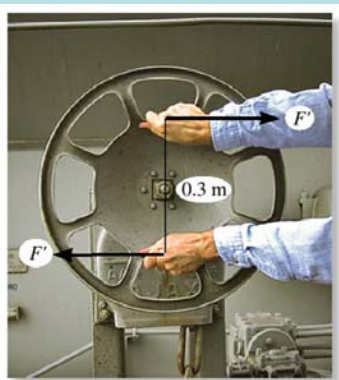
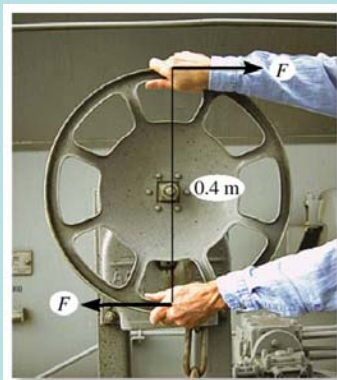
$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0.$$

Точки A и B тела *не лежат на прямой*, параллельной действующим силам.

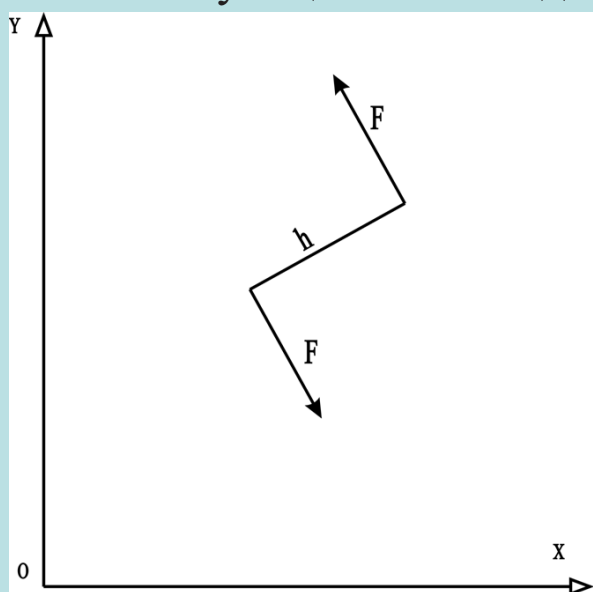
Третье условие выполняется тождественно.



Пара сил – система двух *равных по модулю* параллельных сил, направленных в разные стороны.



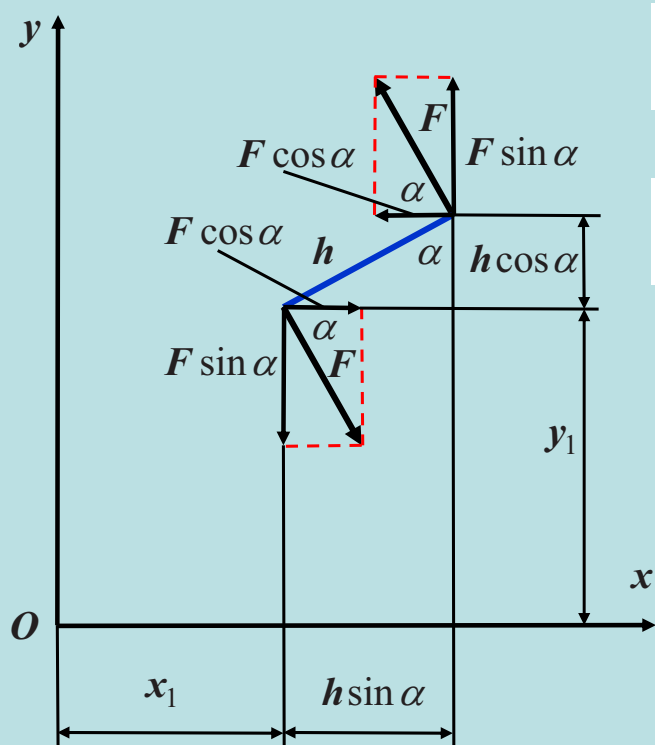
Момент пары сил – алгебраическая величина равная произведению *модуля одной силы пары на плечо пары*, взятая с соответствующим знаком для направления поворота плеча пары.



$$M = F \cdot h.$$

Сумма моментов сил пары относительно любой точки, взятой в ее плоскости не зависит от их относительного положения и равна моменту пары сил.

Момент пары сил – *свободный вектор*.



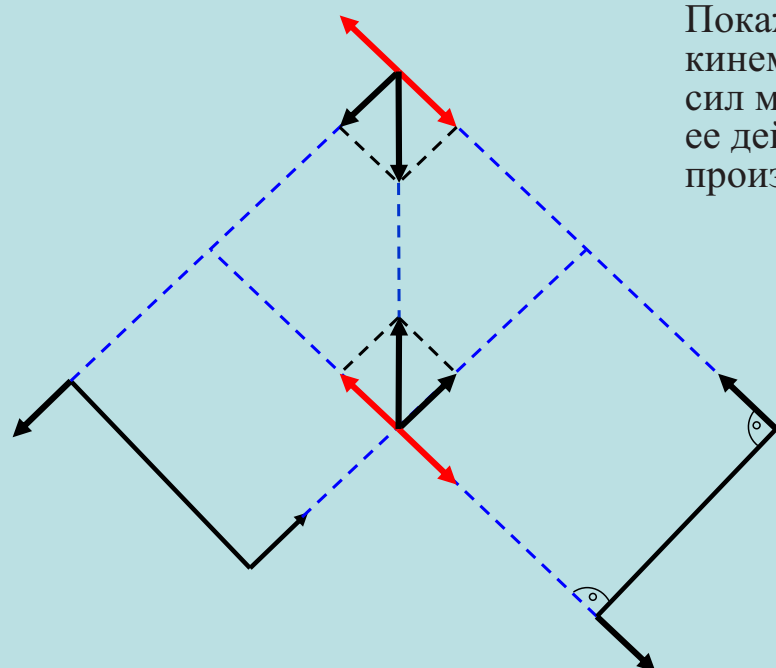
В плоскости пары примем произвольно точку O и направления осей x и y .

Сумма моментов двух сил пары относительно точки O :

$$M_O = F \cdot \sin \alpha \cdot (x_1 + h \cdot \sin \alpha) - F \cdot \sin \alpha \cdot x_1 + F \cdot \cos \alpha \cdot (y_1 + h \cdot \cos \alpha) - F \cdot \cos \alpha \cdot y_1 = F \cdot h.$$

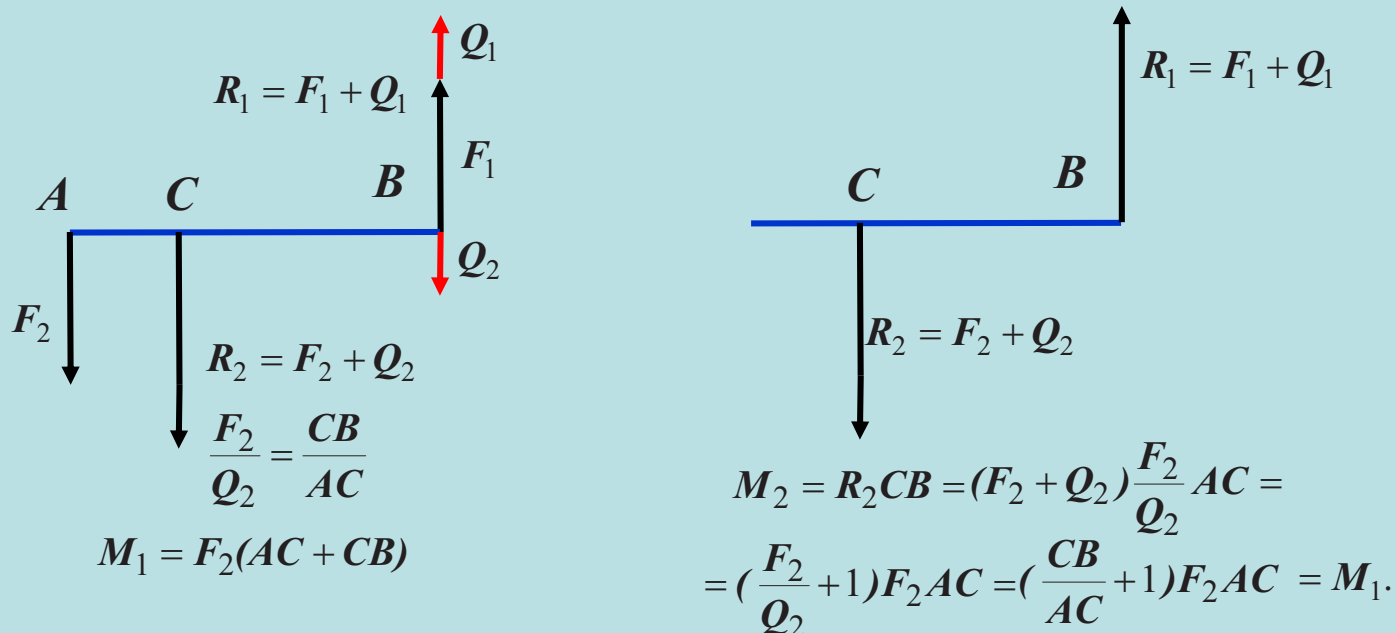
Свойства пар сил

1. Пара сил, полученная перемещением заданной пары в любое положение в плоскости ее действия, эквивалентна заданной паре сил.

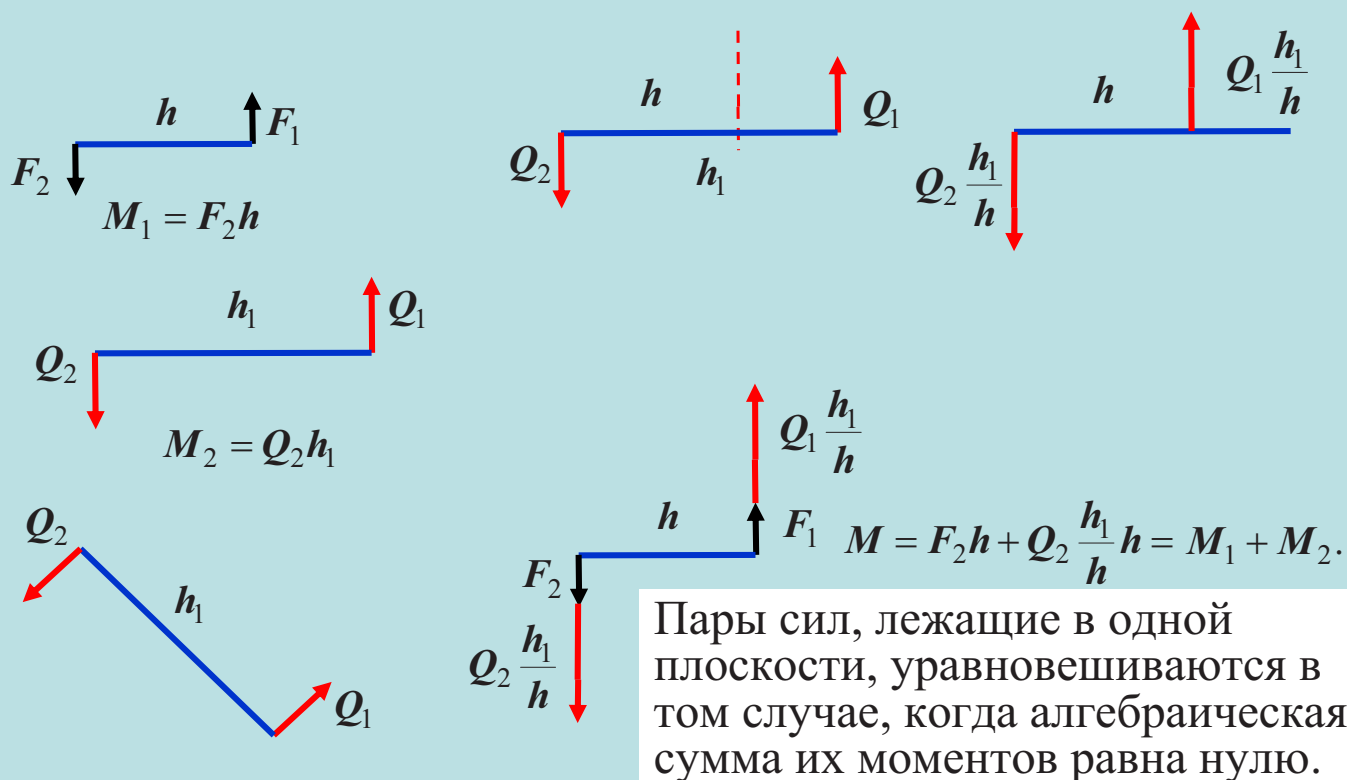


Покажем, что не изменяя кинематическое состояние тела, пару сил можно переместить в плоскости ее действия, совместив плечо с произвольным равным отрезком.

2. Две пары с равными моментами - эквивалентны и оказывают равное действие даже если силы (плечо) одной пары не равны силам (плечу) другой.



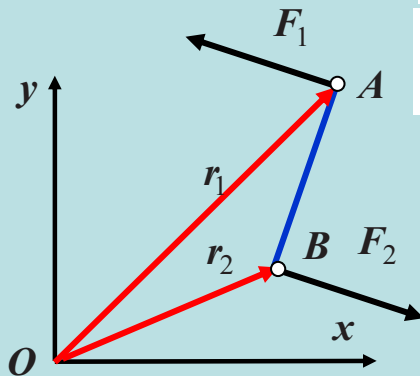
3. Две пары сил, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой сил, лежащей в той же плоскости, с моментом, равным сумме моментов данных двух пар.



Момент пары сил равен векторному произведению радиус-вектора плеча пары на вектор силы

В плоскости пары примем произвольно точку O и направления осей x и y .

Сумма моментов двух сил пары относительно точки O :



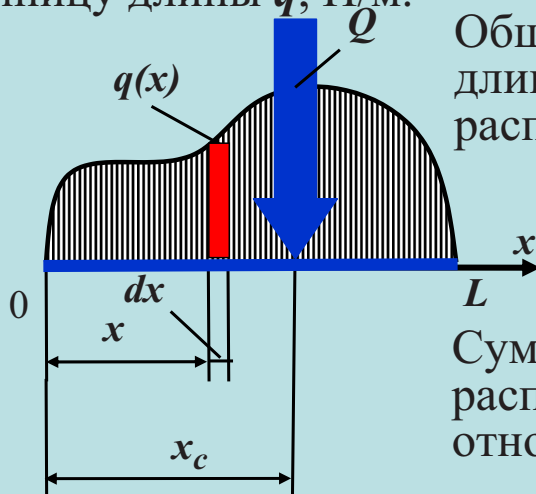
$$\begin{aligned} M_O &= r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = r_1 \times F_1 + r_2 \times (-F_1) = \\ &= F_1 \times (r_1 - r_2) = F_1 \times \overline{BA} = (-F_2) \times \overline{BA} = F_2 \times \overline{AB}. \end{aligned}$$

Момент пары сил – вектор, перпендикулярный к плоскости пары, равный по модулю произведению **модуля одной из сил пары на плечо пары** и направленный в ту сторону, откуда "вращение" пары представляется происходящим против хода часовой стрелки

Вектор момента пары сил – **свободный вектор**.

Равнодействующая нагрузки, распределенной по линии

Распределенная по линии нагрузка задается интенсивностью на единицу длины q , Н/м.



Общая нагрузка на всю длину L – равнодействующая распределенной нагрузки

$$Q = \int_0^L q(x) dx.$$

Общая нагрузка на всю длину L – площадь под кривой $q(x)$

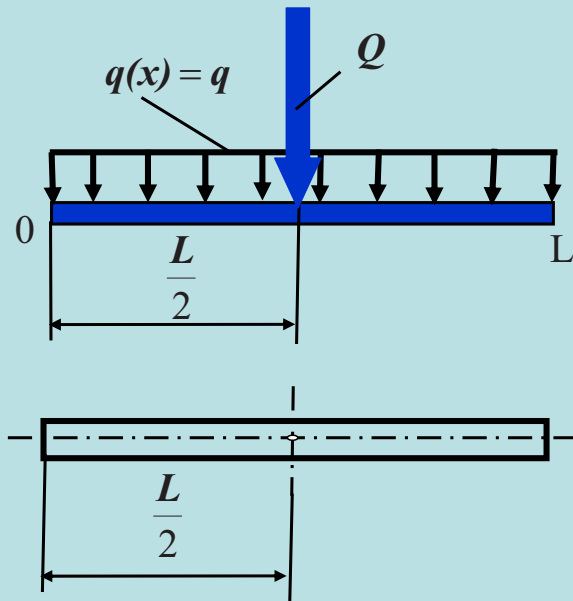
Сумма моментов распределенной нагрузки относительно точки O

$$M_o = \int_0^L q(x) x dx.$$

Момент равнодействующей распределенной нагрузки относительно точки O

$$M_o = x_c \int_0^L q(x) dx; \quad x_c = \frac{\int_0^L q(x) x dx}{\int_0^L q(x) dx}.$$

Равномерная нагрузка

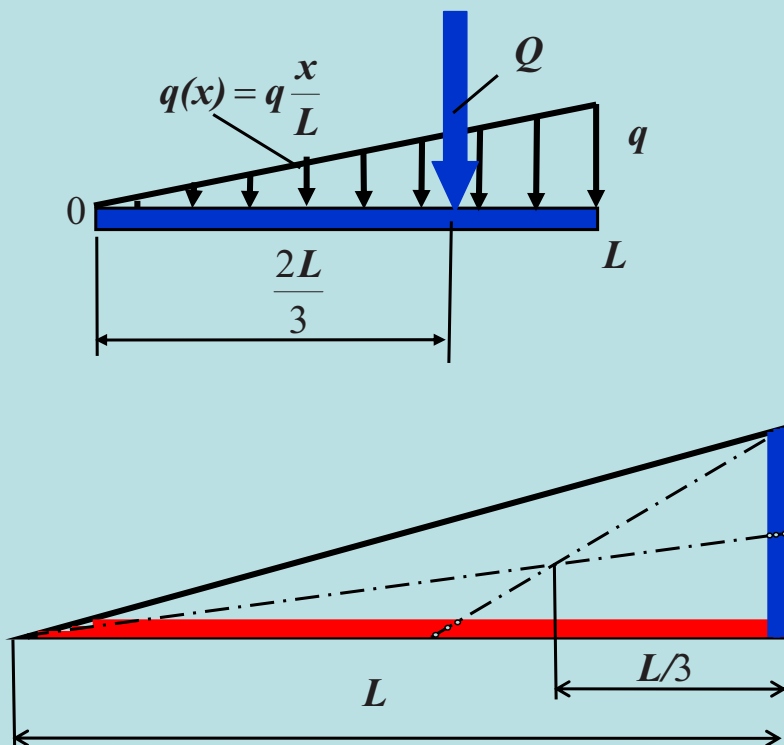


$$Q = \int_0^L q(x) dx = qL;$$

$$x_c = \frac{\int_0^L q(x) x dx}{\int_0^L q(x) dx} = \frac{L}{2}.$$

$$Q = qL$$

Треугольная нагрузка

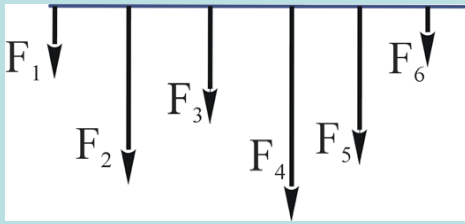


$$Q = \int_0^L q(x) dx = q \frac{L}{2};$$

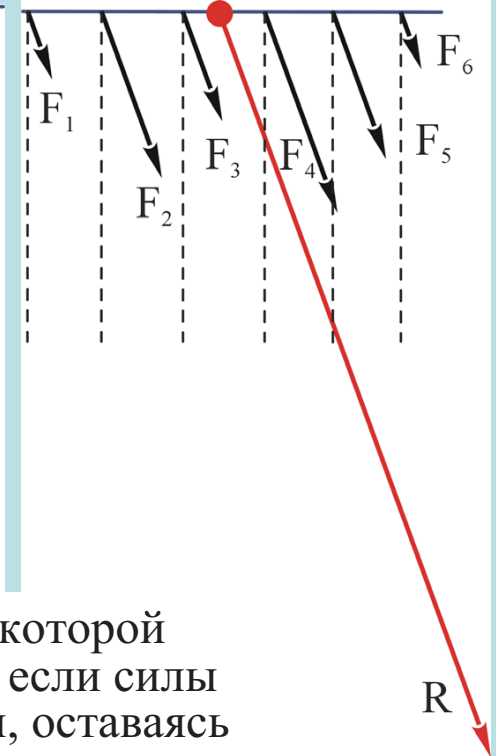
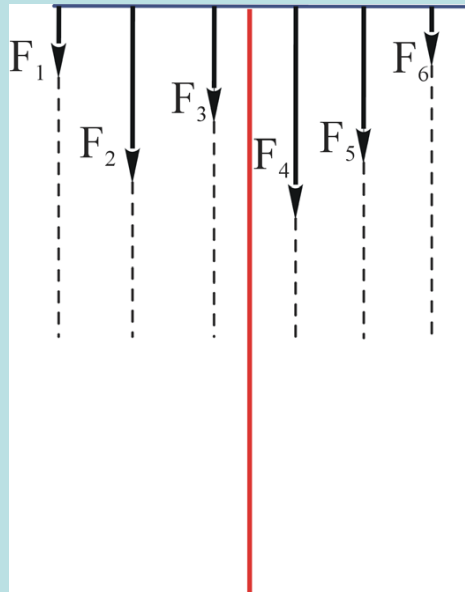
$$x_c = \frac{\int_0^L q(x) x dx}{\int_0^L q(x) dx} = \frac{2L}{3}.$$

$$Q = \frac{qL}{2}$$

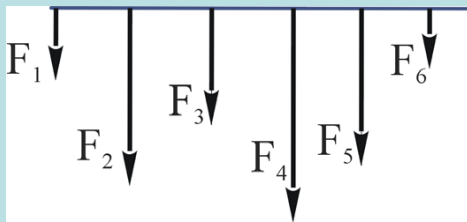
Центр параллельных сил



$$R = \sum_{i=1}^n F_i.$$



Центр параллельных сил — точка вокруг которой поворачивается равнодействующая этих сил, если силы поворачиваются вокруг их точек приложения, оставаясь параллельными.

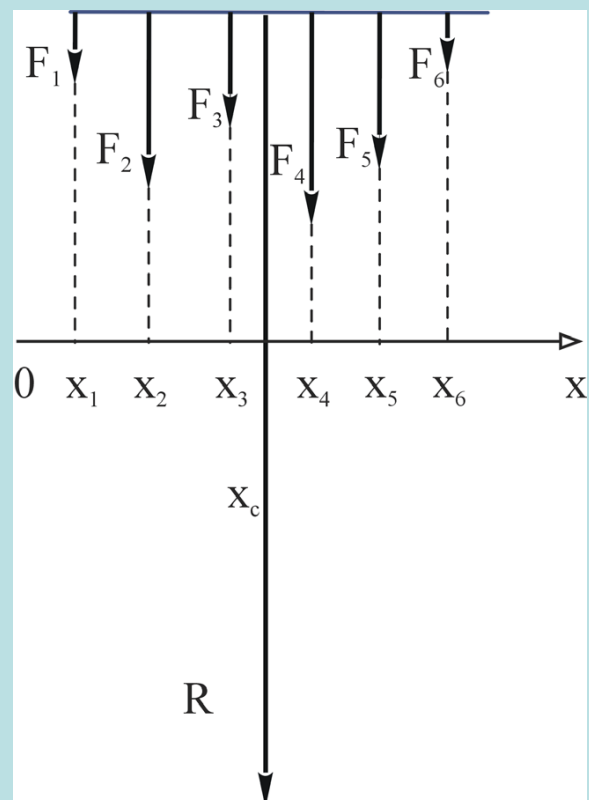


Моменты сил F и равнодействующей относительно точки O равны между собой

$$x_c \cdot R = \sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i;$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$



Если все силы равны F .

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot F} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

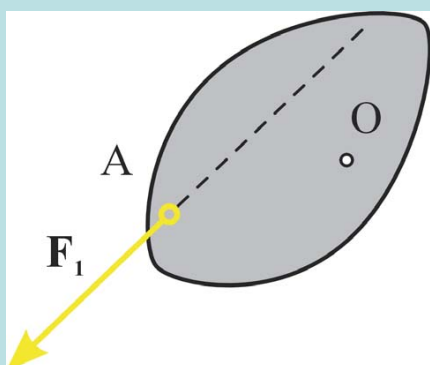
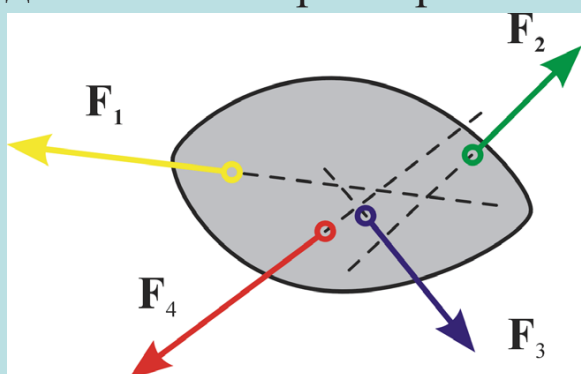
Среднее арифметическое значение x_i

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot F} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}.$$

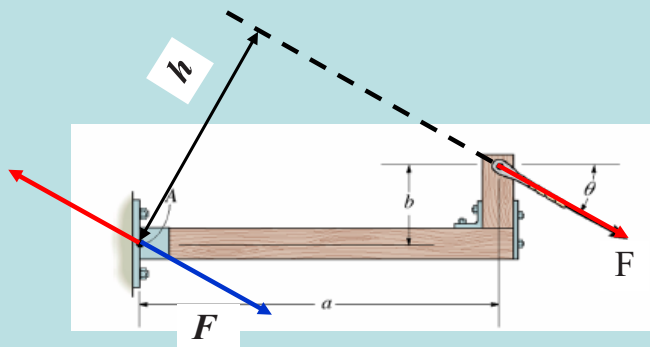
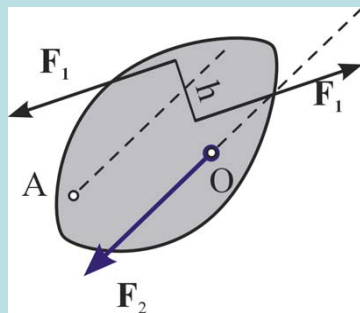
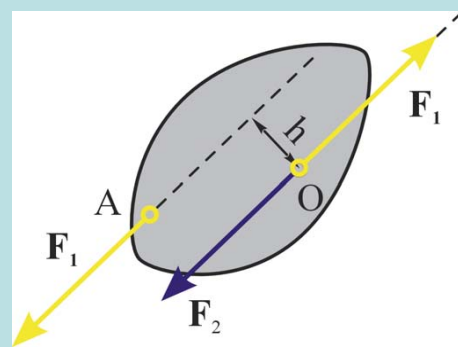
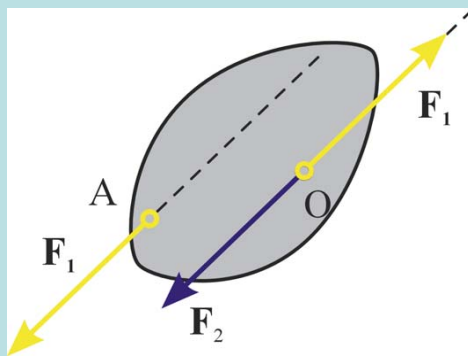
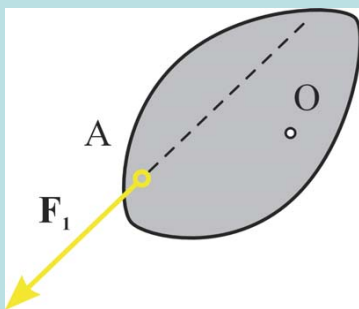
Среднее арифметическое значение y_i

4. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИЛ

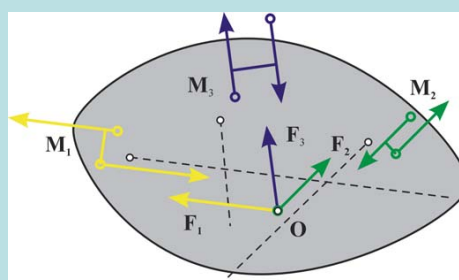
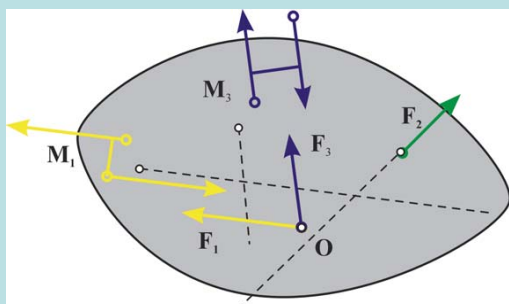
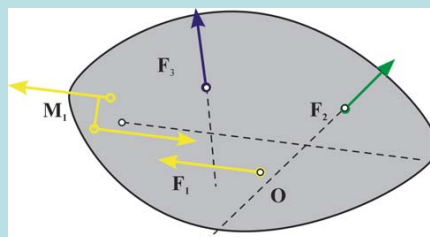
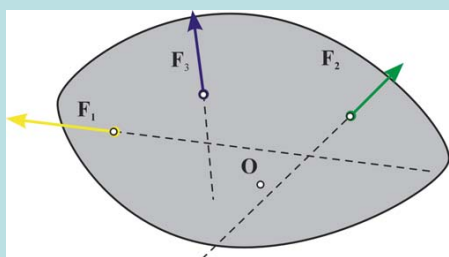
Произвольная плоская система сил - совокупность сил, линии действия которых произвольно расположены в плоскости.

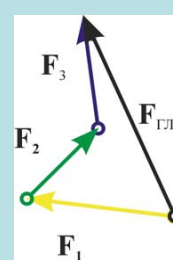
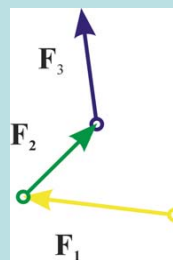
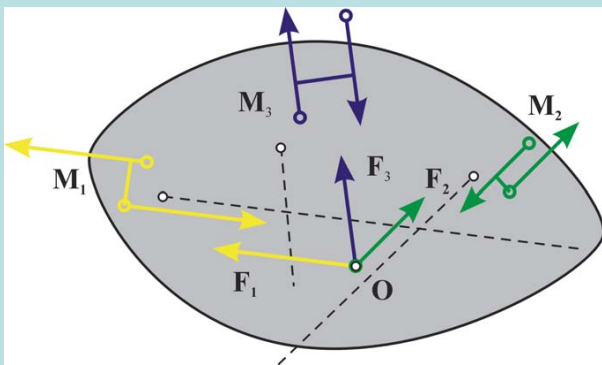


Всякая сила, приложенная к твердому телу, эквивалентна такой же силе, но приложенной к другой точке тела и паре сил с моментом, равным моменту первой силы относительно точки приложения второй силы (теорема Пуансо).



Система сил, приложенная к твердому телу, эквивалентна **главному вектору**, приложенному в произвольной точке тела, и **главному моменту** относительно данной точки.

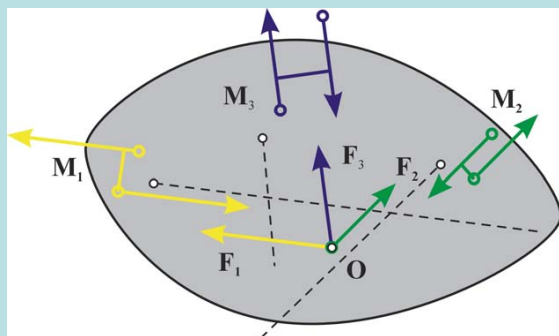




Главный вектор системы сил равен их геометрической сумме и приложен к **любой точке** тела (центру приведения).

$$F_{\text{ГЛ}} = \sum_{i=1}^n F_i;$$

Главный вектор системы сил – **инвариант** (неизменная величина) данной системы сил.



$$M_{\text{ГЛ}} = \sum_{i=1}^n M_{iO}.$$

Главный момент системы сил относительно центра О равен сумме моментов всех сил системы относительно **центра приведения**.

Главный момент системы сил **зависит** от выбранного центра приведения (не является инвариантом).

Произвольная плоская система сил, приложенная к твердому телу, эквивалентна одной силе и одной паре сил.

Условия равновесия произвольной плоской системы сил равенство нулю и главного вектора системы, и главного момента относительно центра приведения:

$$F_{\text{ГЛ}} = \sum_{i=1}^n F_i = 0; \quad M_{\text{ГЛ}} = \sum_{i=1}^n M_{iO} = 0.$$

1. Алгебраическая сумма проекций всех сил на ось x равна нулю.
2. Алгебраическая сумма проекций всех сил на ось y равна нулю.
3. Алгебраическая сумма моментов всех сил относительно одной из точек тела (A) равна нулю.

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0.$$

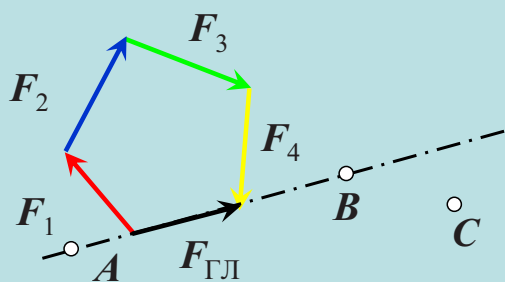
Следствие: алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой другой точки тела (B) равна нулю тождественно.

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0.$$

Вторая форма условия равновесия произвольной плоской системы сил

1. Алгебраические суммы моментов всех сил относительно трех точек тела, *не лежащих на одной прямой*, равны нулю.

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0.$$



предположим: $F_{\text{ГЛ}} = \sum_{i=1}^n F_i \neq 0;$

$$M_{F_{\text{ГЛ}}A} = 0; \quad M_{F_{\text{ГЛ}}B} = 0; \quad M_{F_{\text{ГЛ}}C} \neq 0.$$

$$: F_{\text{ГЛ}} = \sum_{i=1}^n F_i = 0;$$

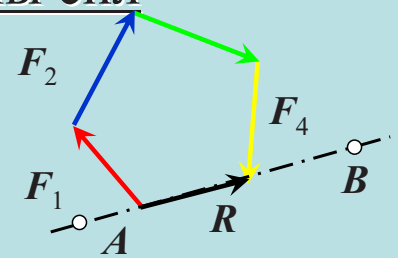
Следствие - алгебраическая сумма проекций всех сил на любую ось(x) равна нулю тождественно.

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0;$$

Третья форма условия равновесия произвольной плоской системы сил

1. Алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух произвольных точек тела равны нулю.

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0;$$



2. Алгебраическая сумма проекций всех сил на ось (x), не перпендикулярную прямой, проходящей через эти точки (A,B), равна нулю.

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0.$$

Следствие 1: алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой другой точки тела (C) равна нулю тождественно.

$$\sum_{i=1}^n M_{iC} = 0.$$

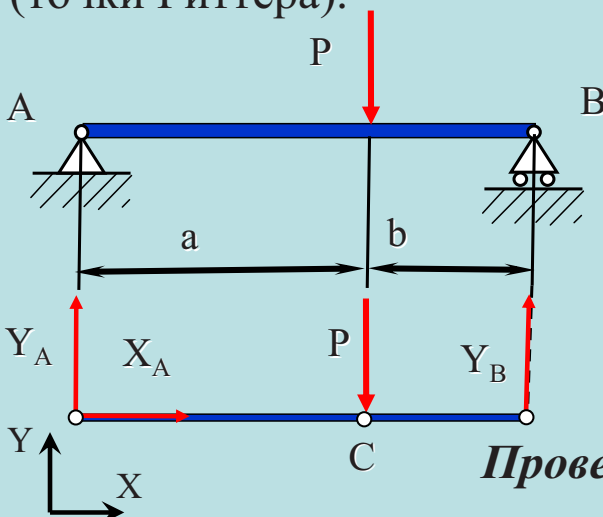
Следствие 2: алгебраическая сумма проекций всех сил на любую ось (y), не совпадающую с x равна нулю тождественно.

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0;$$

Рекомендации:

1. Желательно координатные оси проводить перпендикулярно большинству неизвестных сил.

2. Точки для составления уравнений равенства моментов выбирать на пересечении линий действия неизвестных сил (точки Риттера).



$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0. \quad -Pa + Y_B(a+b) = 0;$$

$$Y_B = Pa / (a+b);$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0. \quad Pb - Y_A(a+b) = 0;$$

$$Y_A = Pb / (a+b);$$

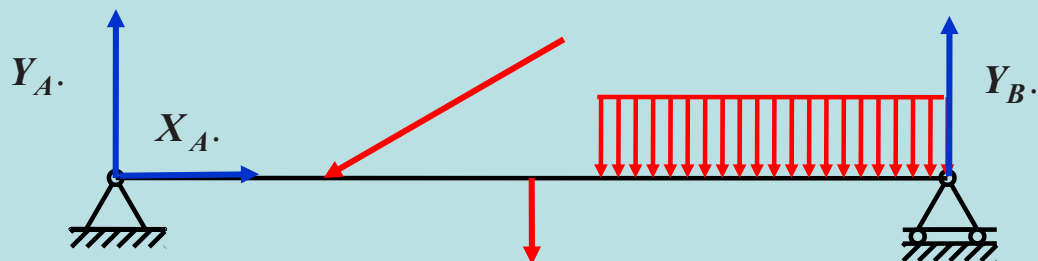
$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0; \quad X_A = 0;$$

Проверка 1 $\sum_{i=1}^n M_{iC} = 0. \quad -Y_A a + Y_B b = 0;$

Проверка 2 $\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; \quad Y_A - P + Y_B = 0;$

Статически определимая сил

Если число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, в которые эти реакции входят, то задача является *статически определимой*.

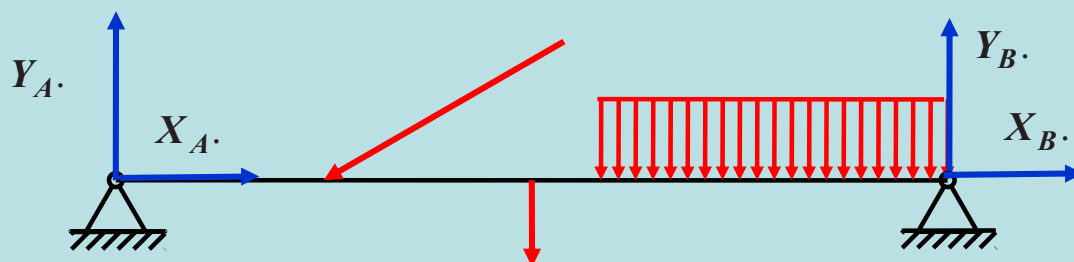


Число неизвестных реакций связей равно 3

Система статически определима

Статически неопределимая сил

Если число неизвестных реакций связей превышает число уравнений равновесия, в которые эти реакции входят, то задача является *статически неопределимой*.



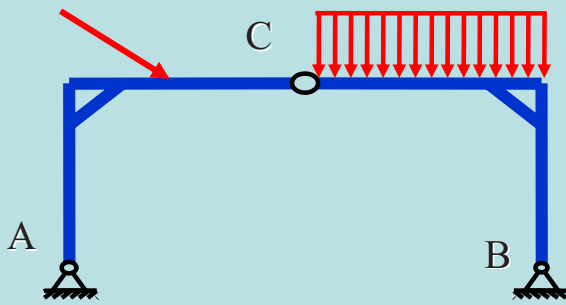
Число неизвестных реакций связей равно 4

Система статически не определима

В этом случае, необходимо рассматривать деформируемое твердое тело.

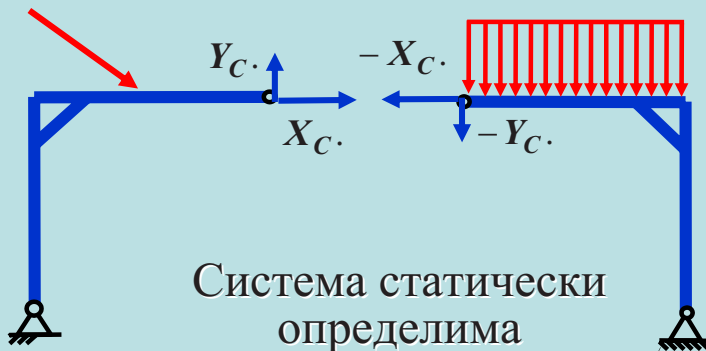
Равновесие системы тел

Если система тел находится в равновесии, то все тела системы тел находятся в равновесии



Число неизвестных реакций связей равно 4.

Количество уравнений равновесия конструкции – 3.



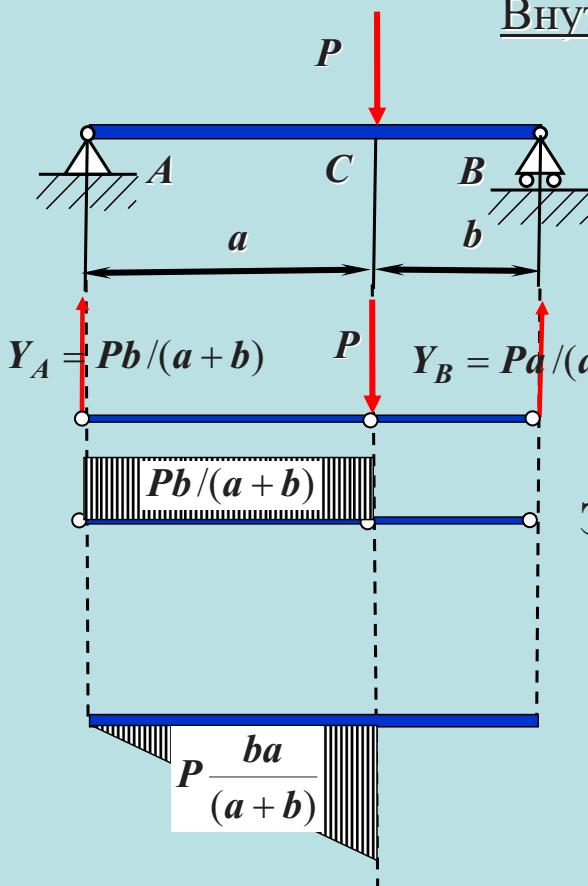
Система статически определима

Число неизвестных реакций связей равно 6.

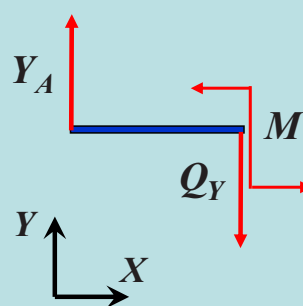
Количество уравнений равновесия 6.

Шарнир С – внутренняя связь.

Внутренние усилия



1. Рассечем балку в произвольном месте по оси x , но левее точки С.



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

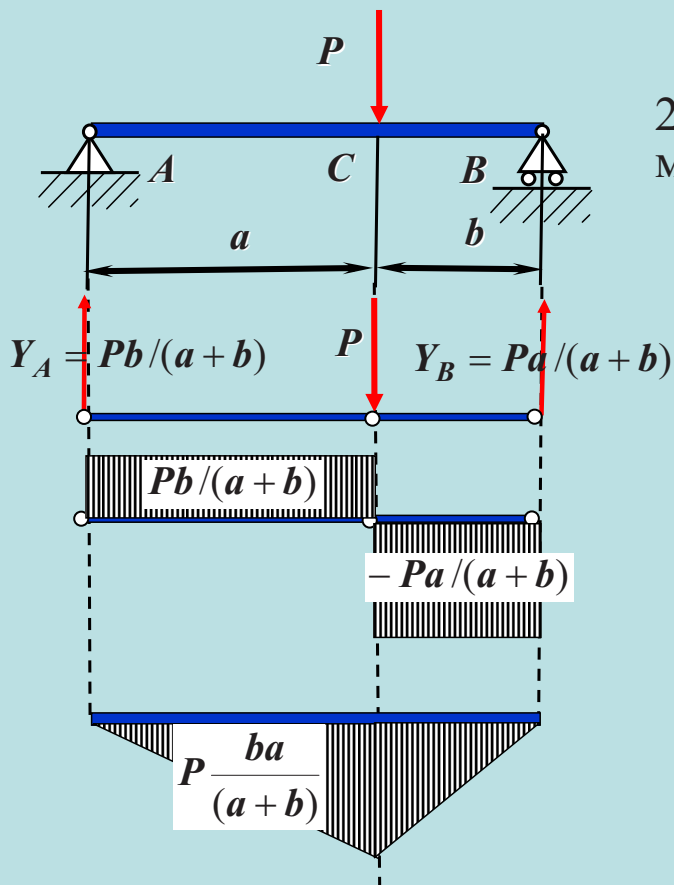
$$Y_A - Q_Y = 0;$$

$$Q_Y = Y_A.$$

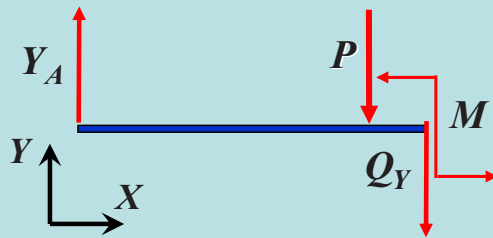
Эпюра Q

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0. \quad -Y_A x + M_x = 0; \quad M_x = Y_A x;$$

Эпюра M



2. Рассечем балку в произвольном месте по оси x , но правее точки C .



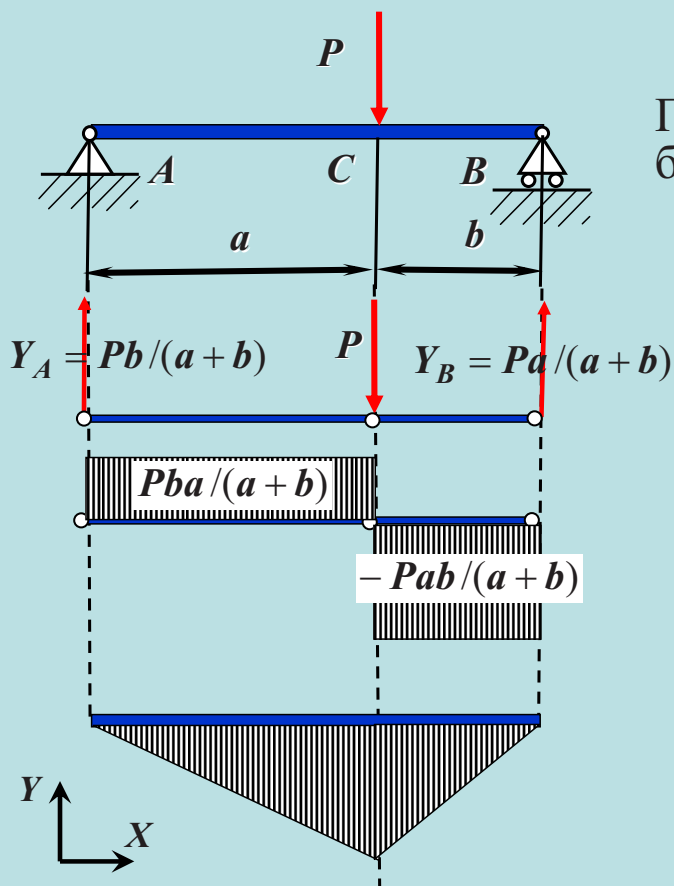
$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0;$$

$$Y_A - P - Q_Y = 0;$$

$$Q_Y = -P + Y_A;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad -Y_A x + P(x-a) + M_X = 0;$$

$$M_X = Y_A x - P(x-a);$$



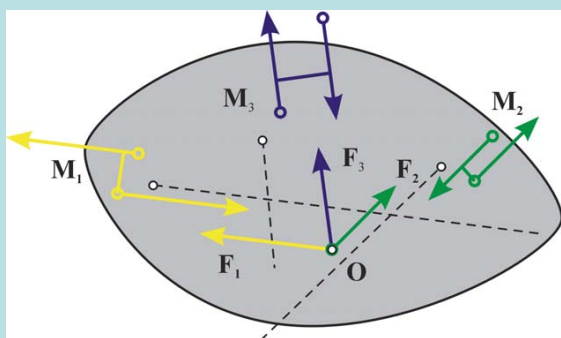
Площадь эпюры внутренних сил балки равна нулю.

Момент внутренних сил в крайних сечениях балки равен нулю.

Внутренние усилия действуют в пределах рассматриваемого тела.

Инженерные методы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость являются предметом курса *"Сопротивление материалов"*.

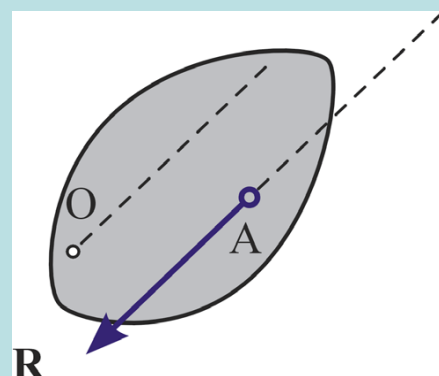
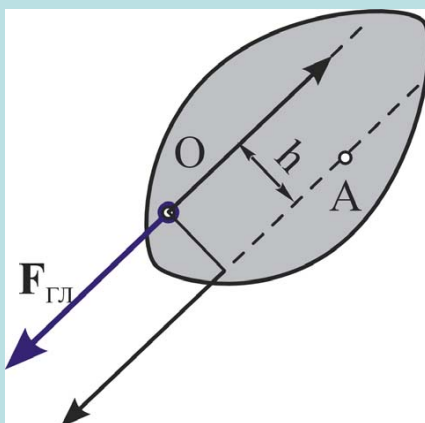
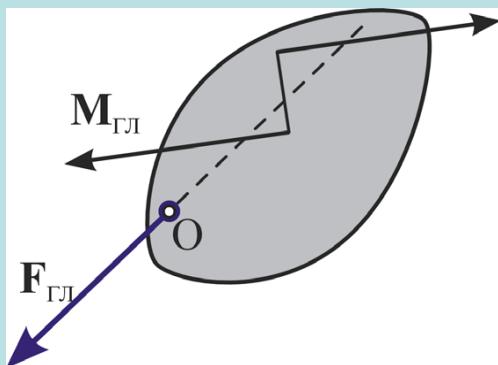
Приведение плоской системы сил к равнодействующей



Первый случай. Если главный момент системы сил относительно центра приведения равен нулю, то главный вектор этой системы сил эквивалентен ей и является равнодействующей системы.

Линия действия равнодействующей проходит через центр приведения.

Второй случай. Если главный момент системы относительно центра приведения не равен нулю, система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой не проходит через центр приведения.



$$h = \frac{M_{ГЛ}}{F_{ГЛ}}.$$

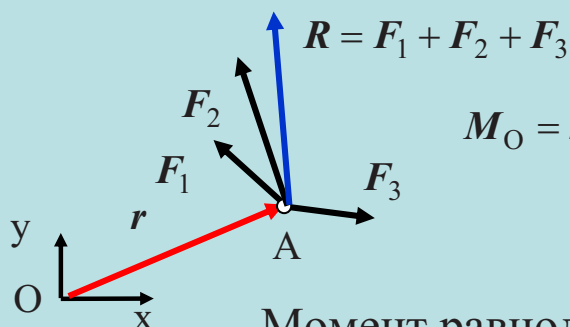
Равнодействующая по модулю равна главному вектору, параллельна ему, но отличается линией действия.

Теорема Вариньона – момент равнодействующей плоской системы сил относительно какой-либо точки, лежащей в этой плоскости, равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой же точки.



Примем произвольно точку O и направления осей x и y .

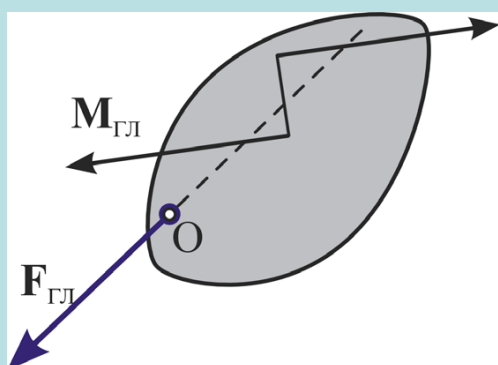
Сумма моментов всех сил относительно точки O :



$$M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}.$$

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил равен алгебраической сумме моментов составляющих сил (1725 г.).

Приведение плоской системы сил к паре сил



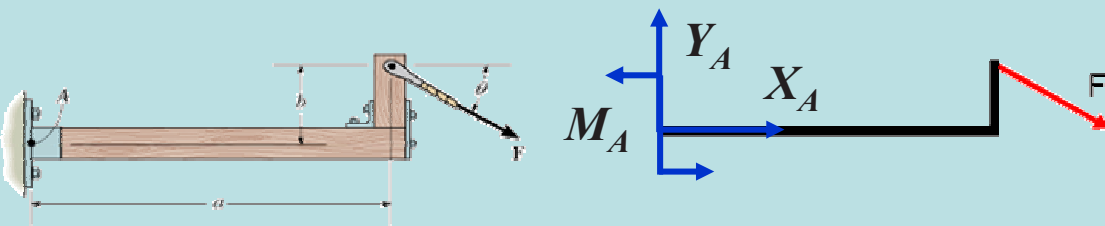
Если главный вектор системы сил равен нулю, а главный момент системы нулю не равен, то система приводится к паре сил.

В этом случае главный момент системы не зависит от центра приведения и является ее инвариантом.

Случаи приведения плоской системы сил к данной точке

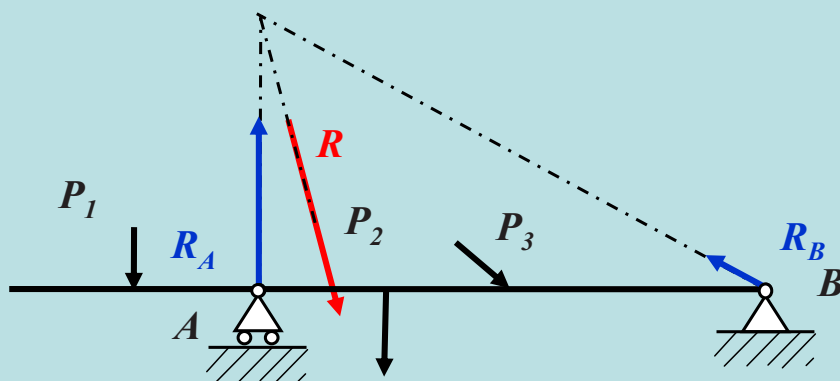
$M_{\text{ГЛ}}$	Не равен нулю	Равен нулю	Не равен нулю	Равен нулю
$F_{\text{ГЛ}}$	Не равен нулю	Не равен нулю	Равен нулю	Равен нулю
	R – не проходит через центр приведения	R – проходит через центр приведения	Пара сил	Равновесие

Жесткая заделка препятствует линейным и угловым перемещениям тела.



Реакции такой связи представляют собой силу (обычно в виде двух составляющих X_A и Y_A) и пару сил, момент которой обозначают M_A .

Графическое определение реакций опор

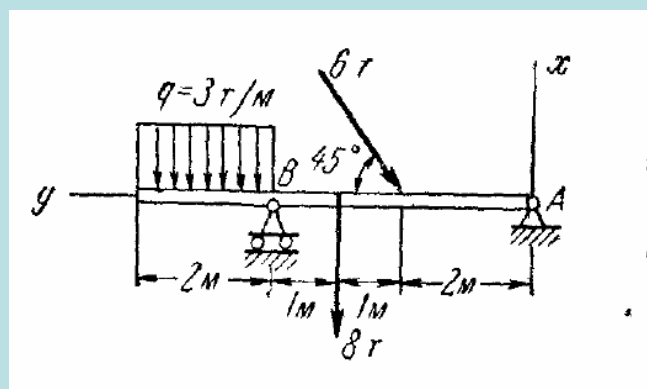
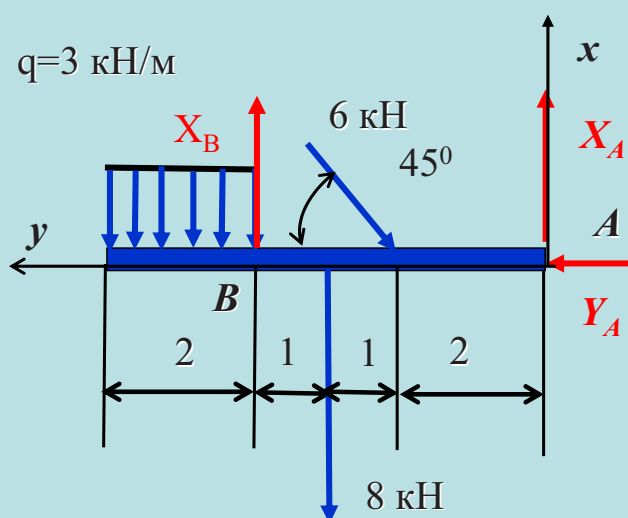


1. Определение величины равнодействующей активных сил.

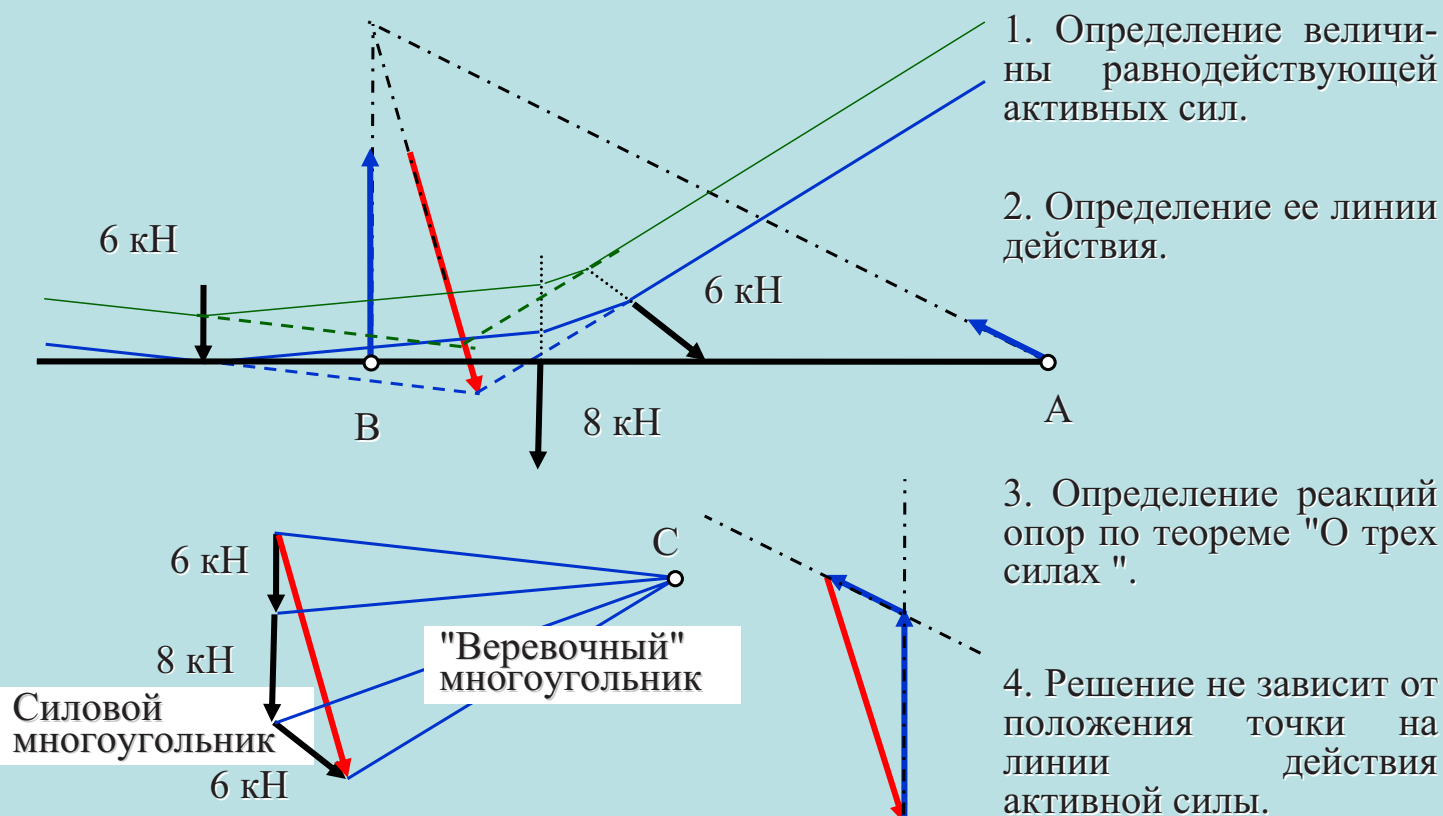
2. Определение ее линии действия.

3. Определение реакций опор согласно теоремы "О трех силах".

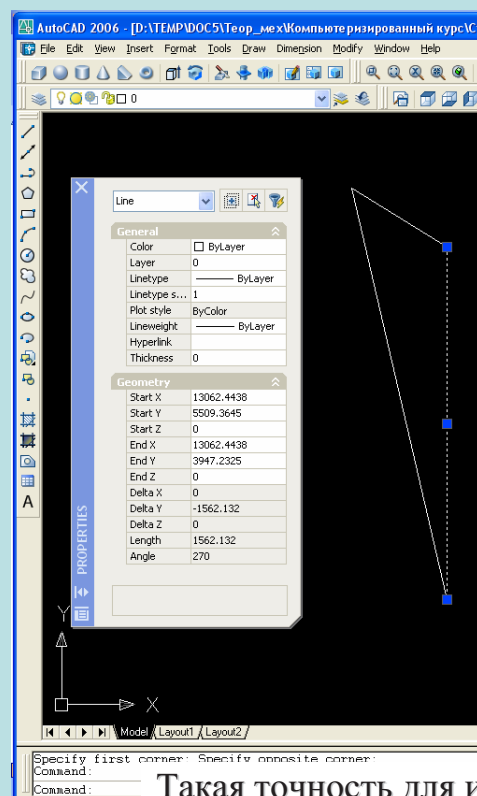
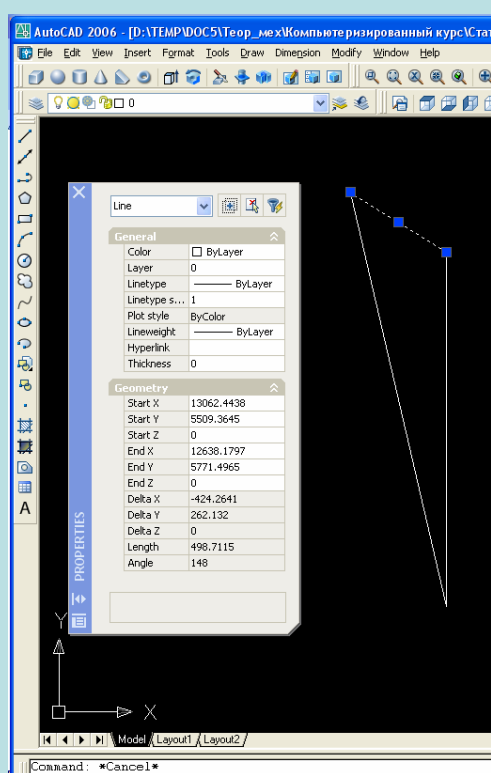
Задача 4.26. Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на чертеже.



Графическое решение – метод "веревочного" многоугольника



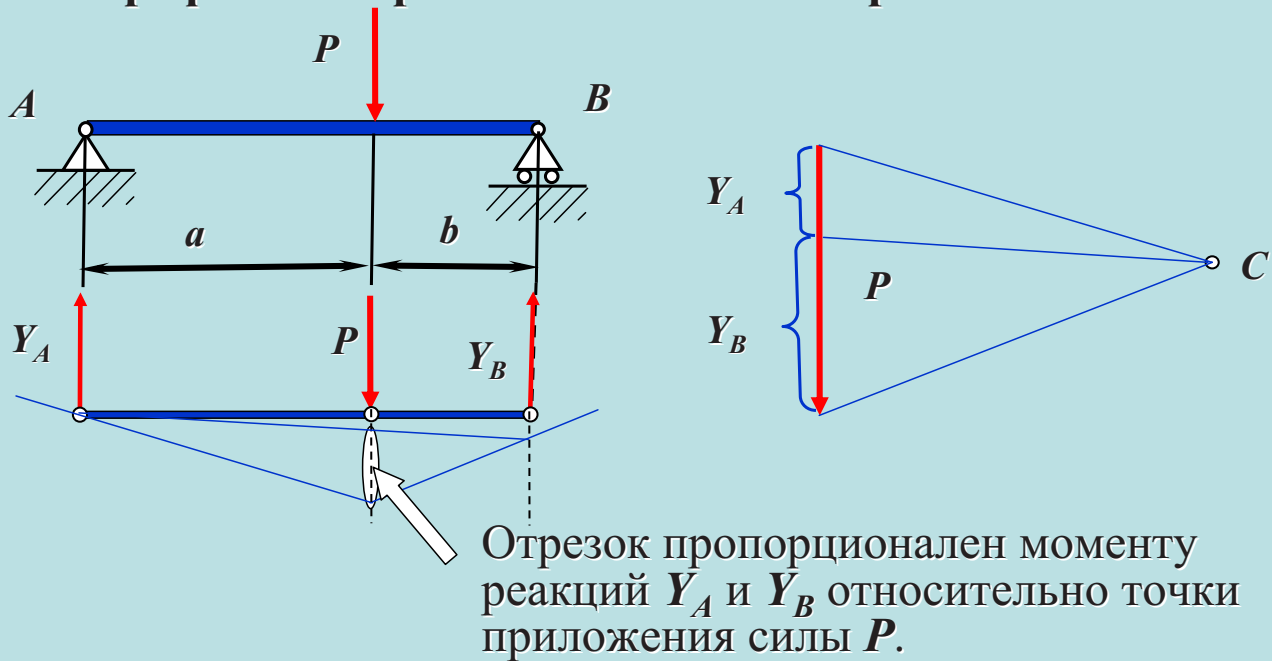
Графическое решение – система AutoCAD



$$X_A = 2,6213 \text{ кН}; Y_A = 4,2426 \text{ кН}; X_B = 15,621 \text{ кН}$$

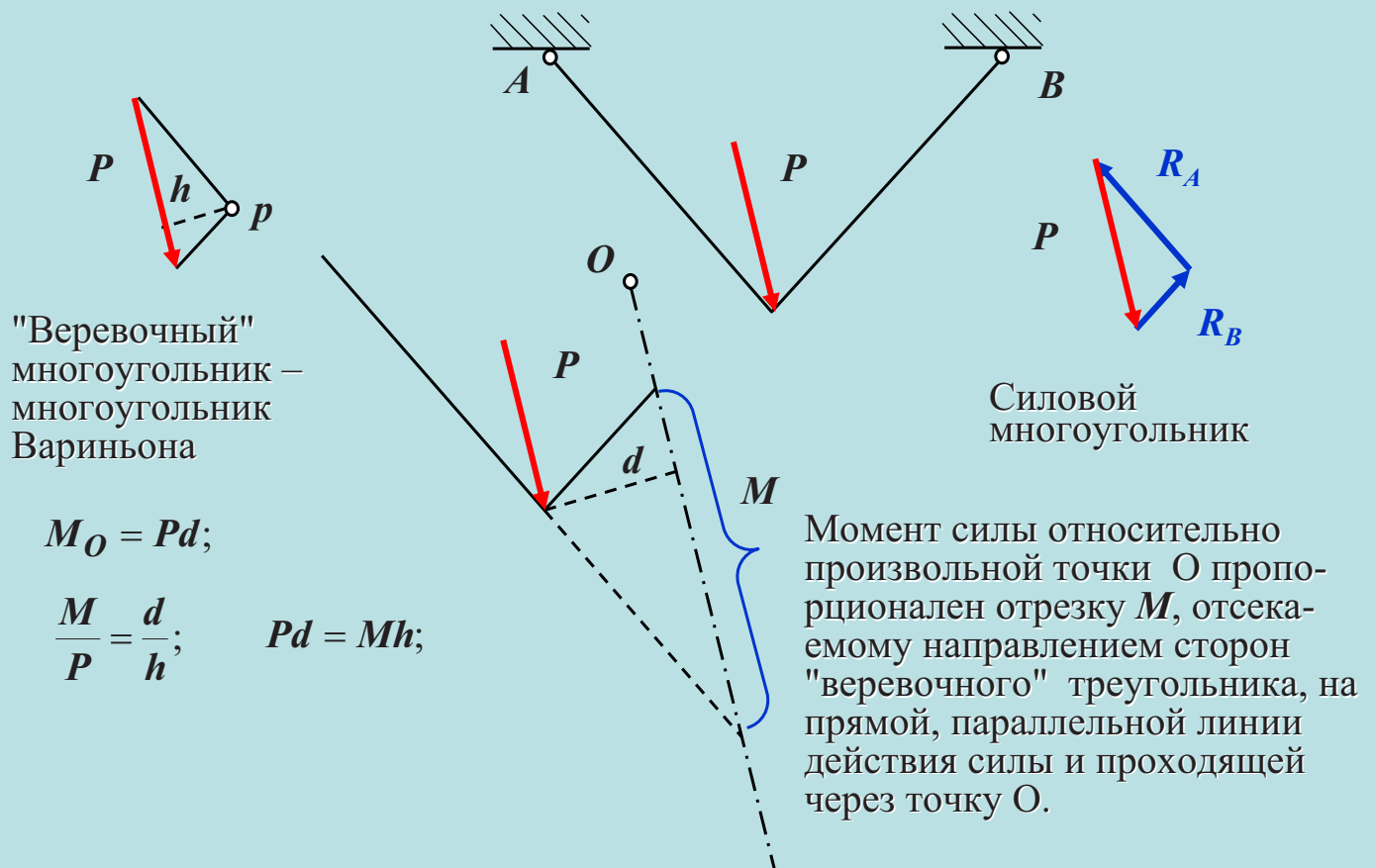
Такая точность для инженерных расчетов избыточна !!

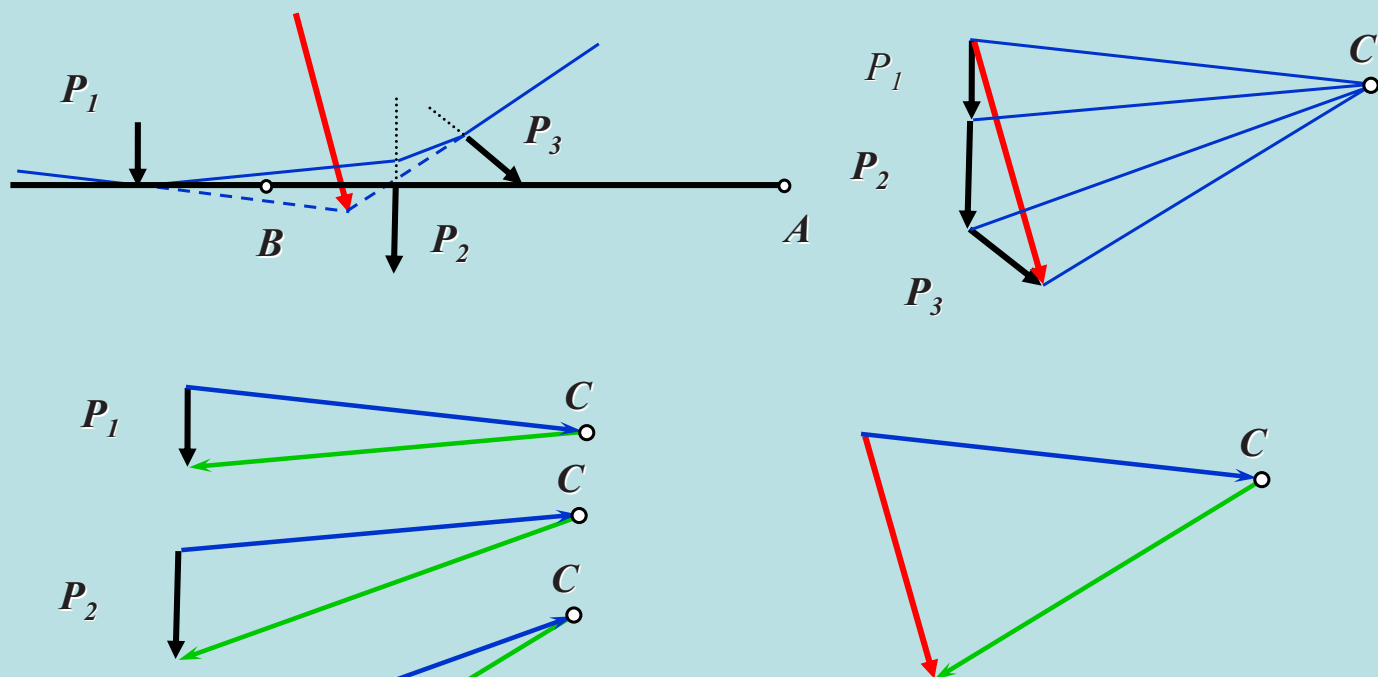
Графическое решение – система параллельных сил



Если на тело действует несколько параллельных сил, то необходимо заменить их равнодействующей: определить ее величину и линию действия.

Обоснование метода "веревочного" многоугольника





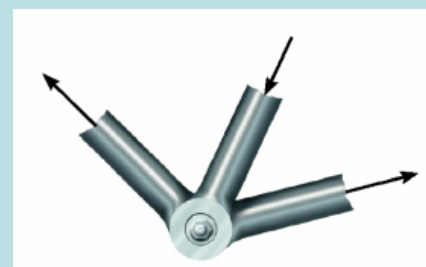
Линия действия равнодействующей системы сил проходит через точку пересечения крайних сторон "веревочного" многоугольника.

5. ФЕРМЫ

Ферма – сквозная конструкция, состоящая из большого числа стержней, соединенных в точках схода их осей.



Соединения стержней называют узлами.



Предположения

Внешние силы приложены только в узлах фермы.

Веса стержней пренебрежимо малы.

Узлы представляют собой идеальные шарниры (без трения).

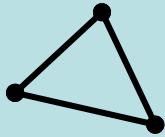
Плоская простая ферма получена из треугольников путем последовательного присоединения каждого нового узла при помощи двух новых стержней.

Число стержней – s .

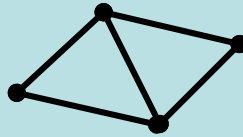
Число узлов – n .



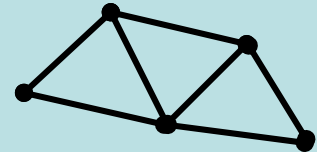
$$s=1;$$
$$n=2$$



$$s=3;$$
$$n=3$$



$$s=5;$$
$$n=4$$



$$s=7;$$
$$n=5$$

$$s = 2 \cdot n - 3.$$

Для каждого узла можно составить два уравнения равновесия.

Общее количество таких уравнений – $2n$.

Общее количество неизвестных реакций стержней – s и три опорные реакции:

$$s + 3 = 2 \cdot n.$$

Простая ферма всегда статически определима.

Определение усилий в стержнях способом "вырезания" узлов

Мысленно последовательно вырезаем узлы фермы.

Прикладываем к ним соответствующие внешние силы и **реакции стержней**.

Определяем **реакции стержней** из двух условий равновесия системы сходящихся сил.

Применяем графический или аналитический метод.

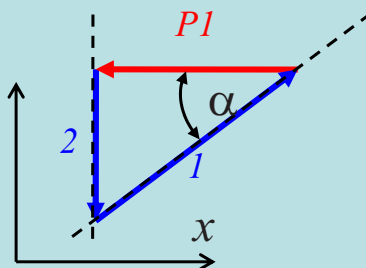
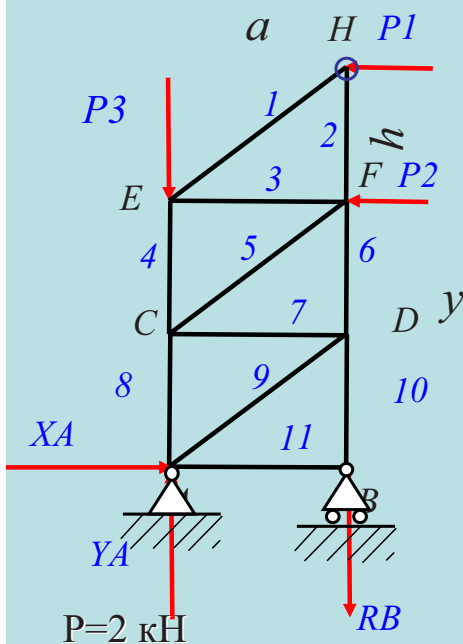
Последовательно рассматриваем такие узлы, где неизвестны реакции **двух стержней**.

Усилия в стержнях по модулю равны реакциям стержней, но направлены в противоположную сторону.

Обозначим стержни цифрами, а узлы - буквами.

Начинаем построение с узла, где сходятся два стержня – H .

Отбрасываем стержни 1 и 2 и заменяем их действие реакциями стержней 1 и 2.

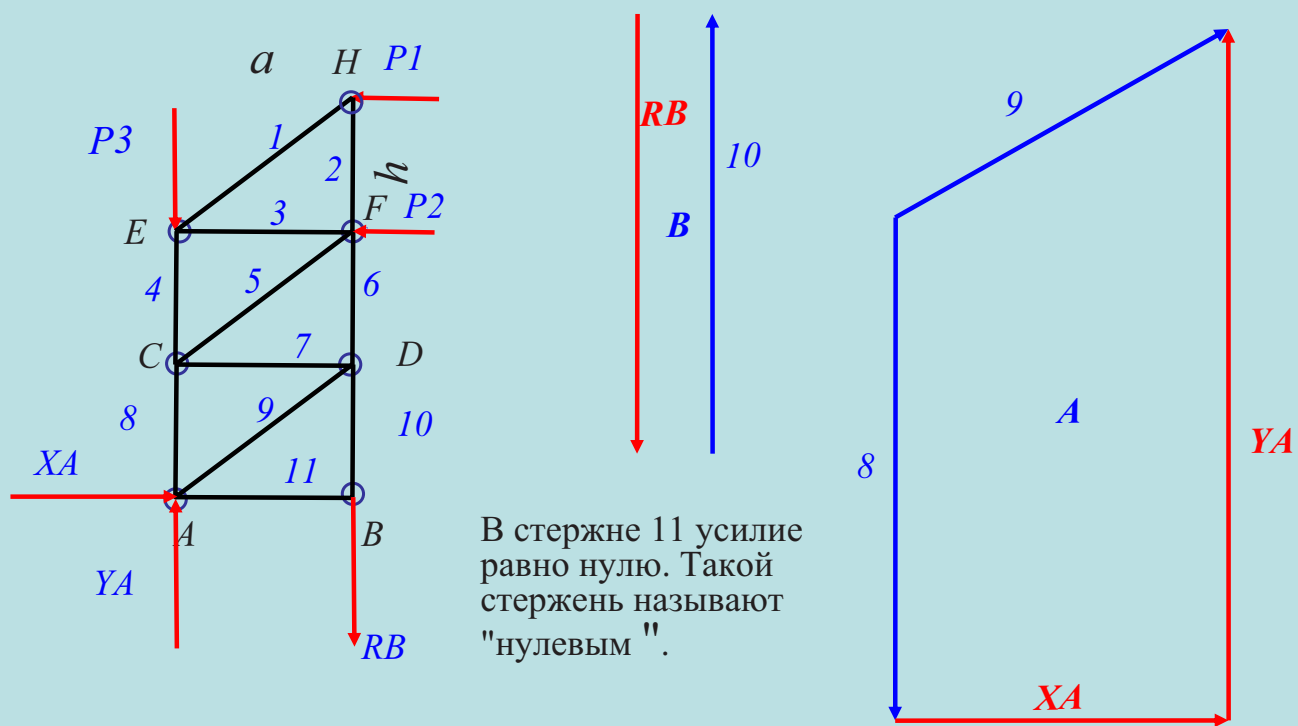
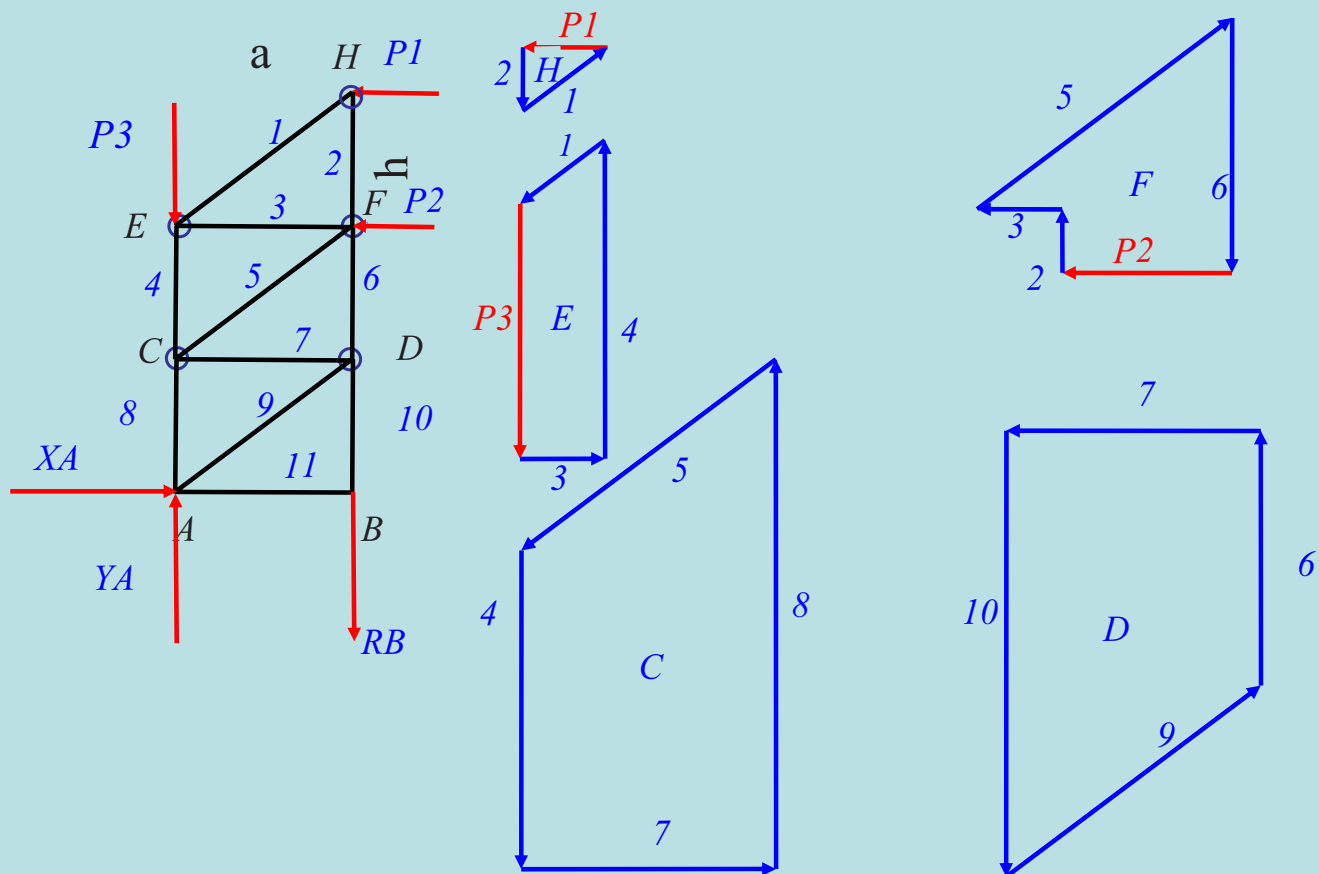


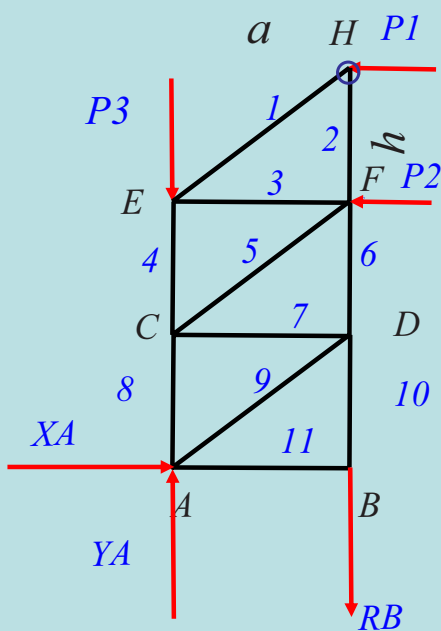
Для узла H составляем два уравнения равновесия.

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0; -P_1 + S_{1H} \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; S_{1H} \cdot \sin \alpha - S_{2H} = 0;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = h/a.$$





Для каждого из узлов составляем **два уравнения** равновесия.

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0;$$

Решая уравнения равновесия находим две неизвестные реакции стержней.

Проверка решения.

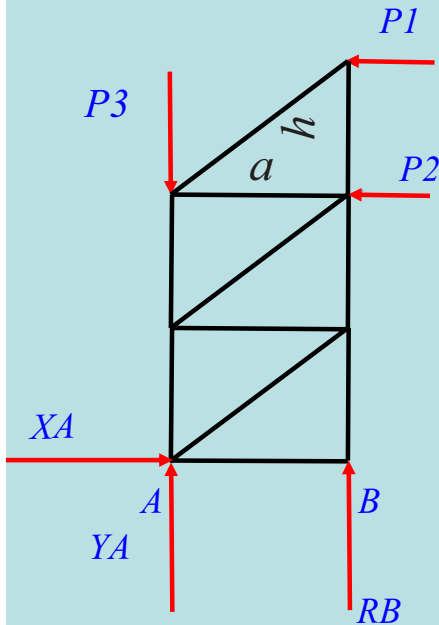
Реакции опор определены двумя способами:

- 1- из условий равновесия всей фермы ;
- 2- из условия равновесия опорных узлов А и В фермы.

Полученные результаты должны быть равными с заданной точностью.

Недостаток способа "вырезания узлов" - накопление погрешности.

Определение реакции опор из условия равновесия фермы



$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0;$$

$$P_1 \cdot 3h + P_2 \cdot 2h + R_B \cdot a = 0;$$

$$R_B = -(P_1 \cdot 3h + P_2 \cdot 2h)/a;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0;$$

$$P_1 \cdot 3h + P_2 \cdot 2h + P_3 \cdot a - Y_A \cdot a = 0;$$

$$Y_A = (P_1 \cdot 3h + P_2 \cdot 2h + P_3 \cdot a)/a;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0;$$

$$X_A - P_1 - P_2 = 0;$$

$$X_A = (P_1 + P_2).$$

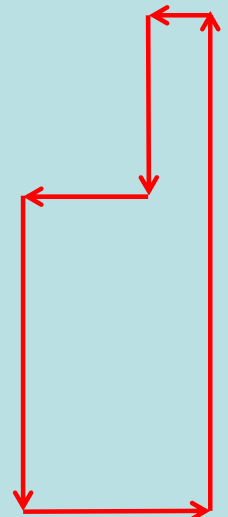
Проверка правильности определения реакций
опор

Графическая

Силовой многоугольник -
замкнут

Аналитическая

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = -P_3 + Y_A - R_B = 0;$$



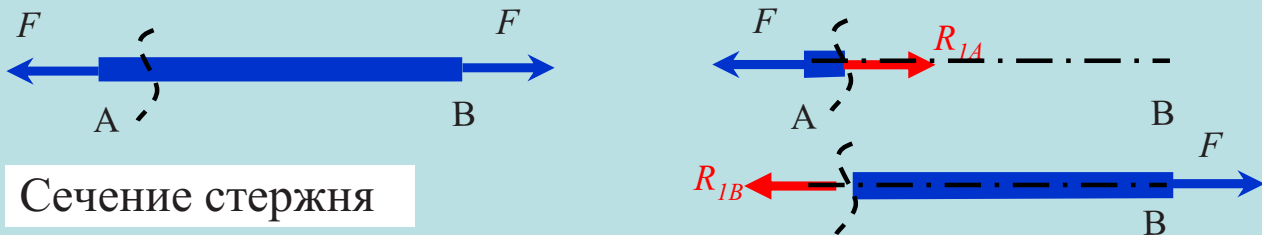
Внутренние усилия в стержнях

Внутренние усилия – силы взаимодействия между материальными точками рассматриваемого тела или системы тел.

Реакции стержня – действие стержня на тела вызывающие его растяжение или сжатие.

Метод сечений – позволяет перевести искомые внутренние силы в разряд внешних сил.

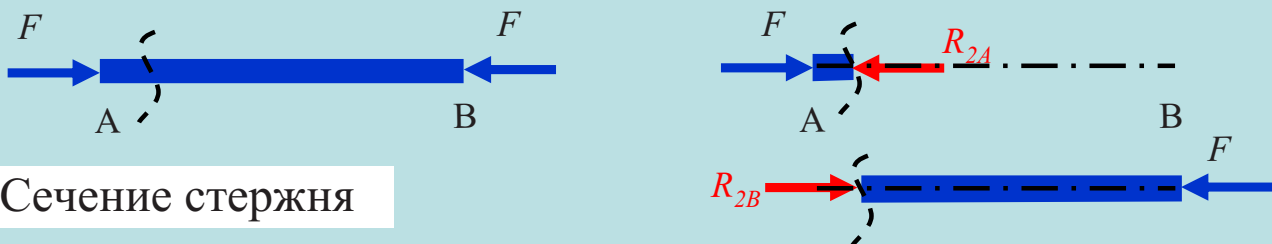
Растянутый стержень



Сечение стержня

Реакции растянутого стержня равны заданным силам и направлены по оси стержня от его концов.

Сжатый стержень

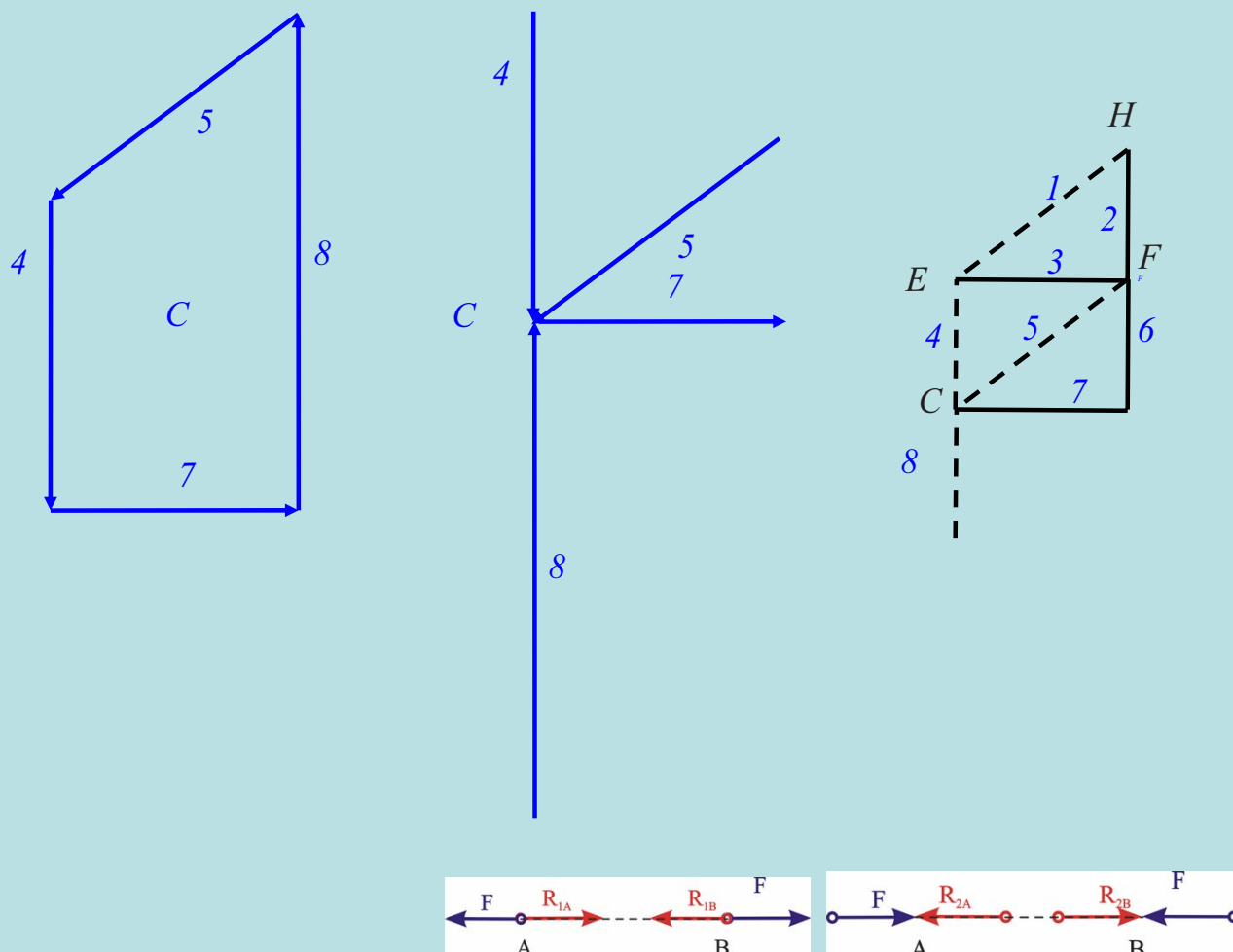
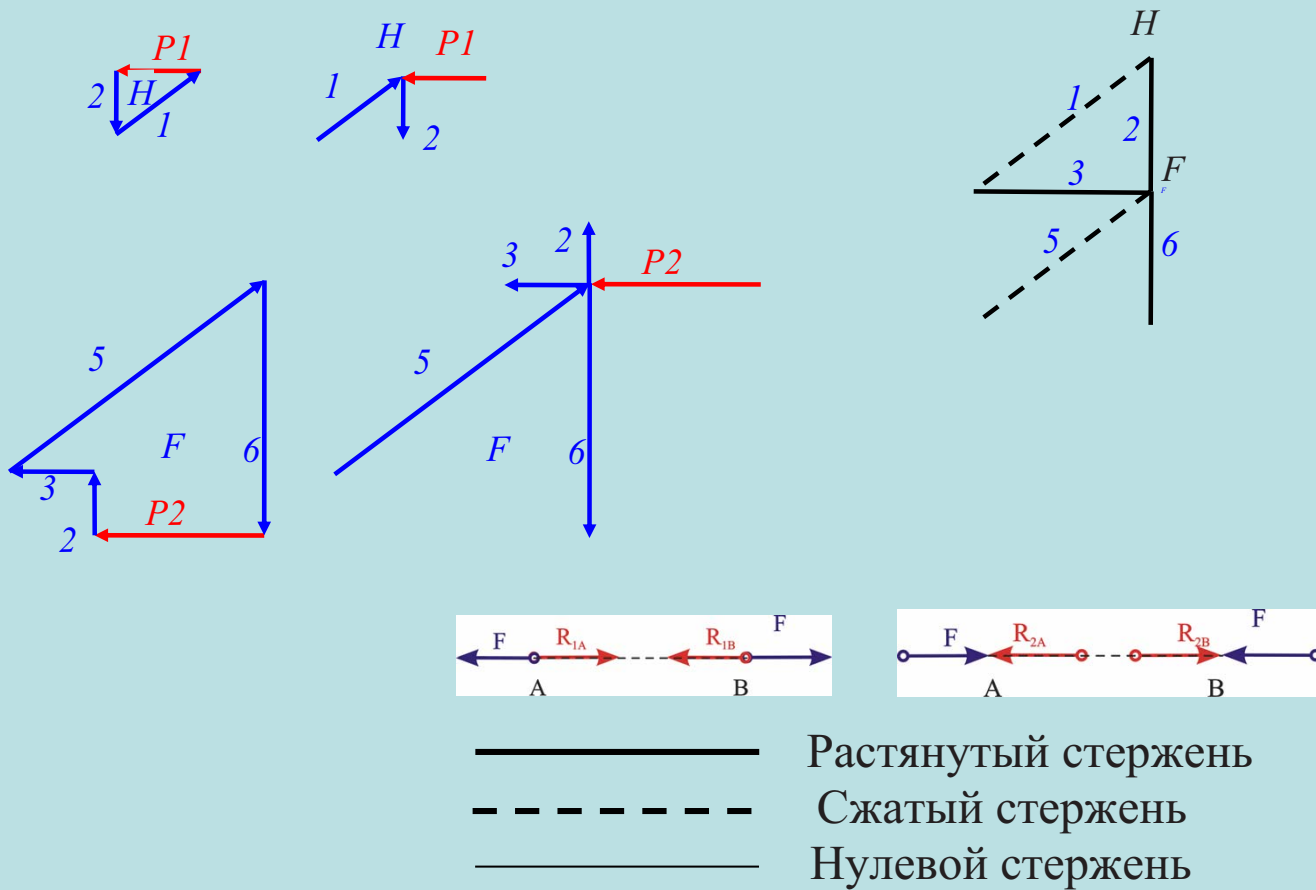


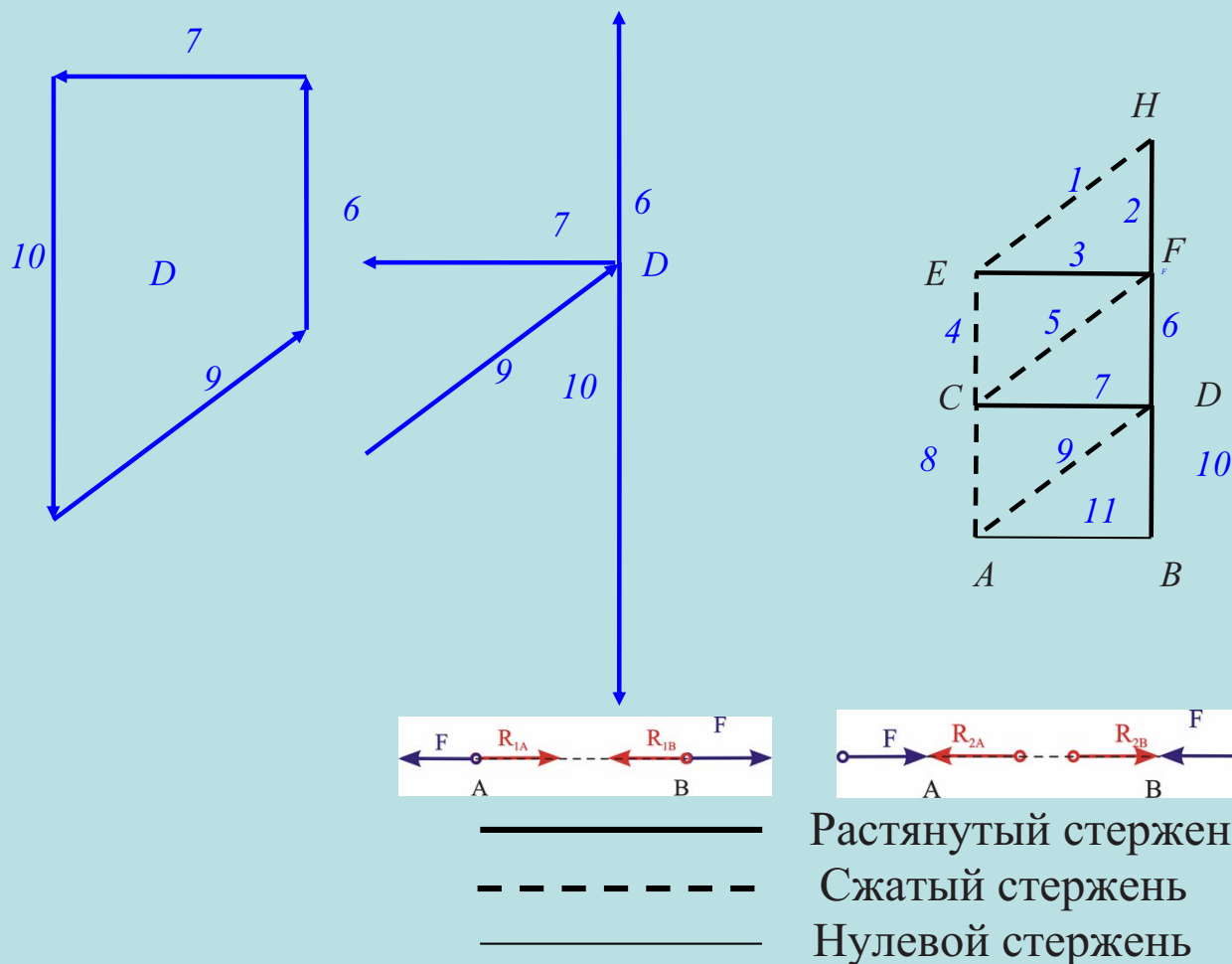
Сечение стержня

Реакции сжатого стержня равны заданным силам и направлены по оси стержня в сторону его концов.

Внутренние усилия действуют в пределах рассматриваемого тела.

Определение растянутых и сжатых стержней





Определение усилий в стержнях способом сечений

Способ "сечений" (способ Риттера) позволяет найти **усилие** в любом стержне фермы независимо от усилий в других стержнях.

Предварительно необходимо определить реакции опор из условий равновесия абсолютно твердого тела.

При определении усилий все стержни предварительно считаем растянутыми.

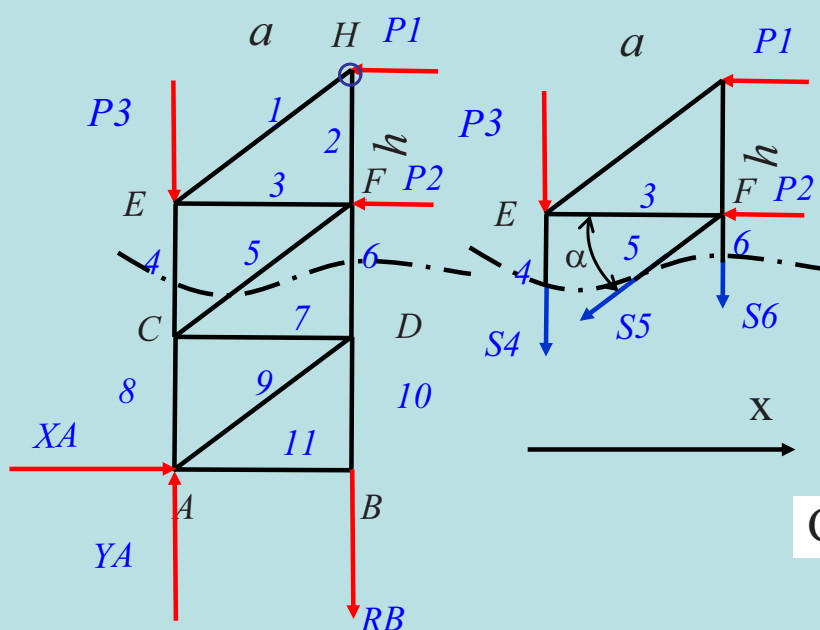
Сечение должно пересекать не более чем три стержня.

Мысленно отбрасываем часть фермы, заменяя ее действие **усилиями**, приложенными в соответствующих сечениях стержней и направленными в сторону отброшенной части.

Определяем величину **усилий** в стержнях из условий равновесия.

Знак "минус" в величине **усилия** указывает на сжатый стержень.

Определим усилия в стержнях 4, 5 и 6.

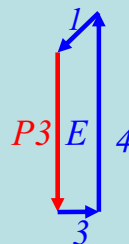


Сумма моментов всех сил относительно точки F (точка Риттера стержня 4) равна нулю.

$$P_3 \cdot a + S_4 a + P_1 \cdot h = 0;$$

$$S_4 = -(P_3 + P_1 \frac{h}{a}).$$

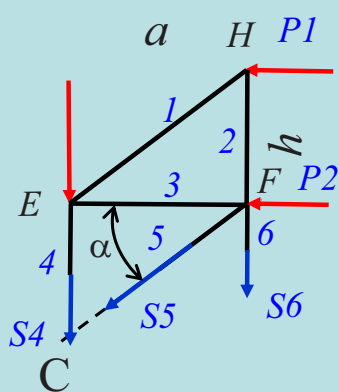
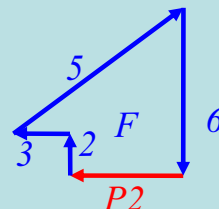
Стержень 4 сжат



Сумма проекций всех сил на ось x равна нулю.

$$-P_1 - P_2 - S_5 \cdot \cos \alpha = 0. \quad S_5 = -(P_1 + P_2) / \cos \alpha.$$

Стержень 5 сжат



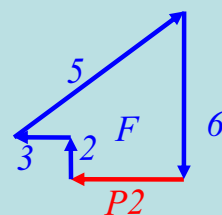
Определим усилия в стержне 6.

Сумма моментов всех сил относительно точки C (точка Риттера стержня 6) равна нулю.

$$P_1 \cdot 2h + P_2 \cdot h - S_6 \cdot a = 0.$$

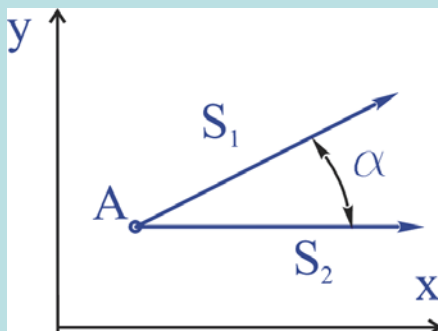
$$S_6 = (2P_1 + P_2) \frac{h}{a}.$$

Стержень 6 растянут



Леммы о нулевых (незагруженных) стержнях загруженной фермы

Лемма 1. Если в незагруженном узле фермы сходятся два стержня, то усилия в них равны нулю.



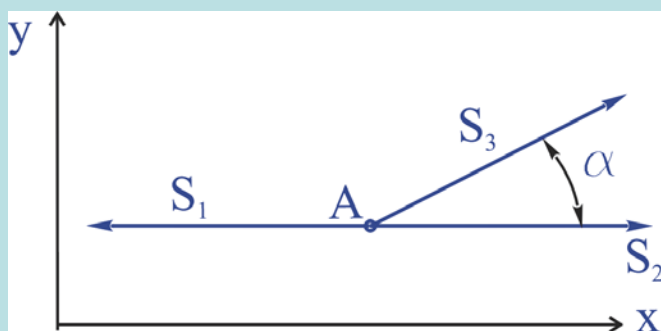
$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0; S_1 + S_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; S_1 \cos(90 - \alpha) = 0;$$

$$S_1 = 0;$$

$$S_2 = 0;$$

Лемма 2. Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, два из которых расположены на одной прямой, то усилие в третьем из них равно нулю.



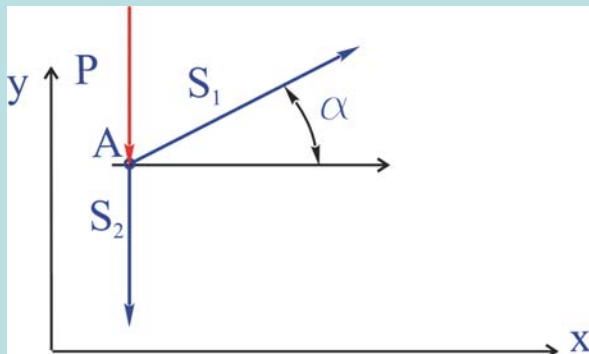
$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0; -S_1 + S_2 + S_3 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; S_3 \cos(90 - \alpha) = 0;$$

$$S_3 = 0;$$

$$S_1 = S_2.$$

Лемма 3. Если в узле фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю.



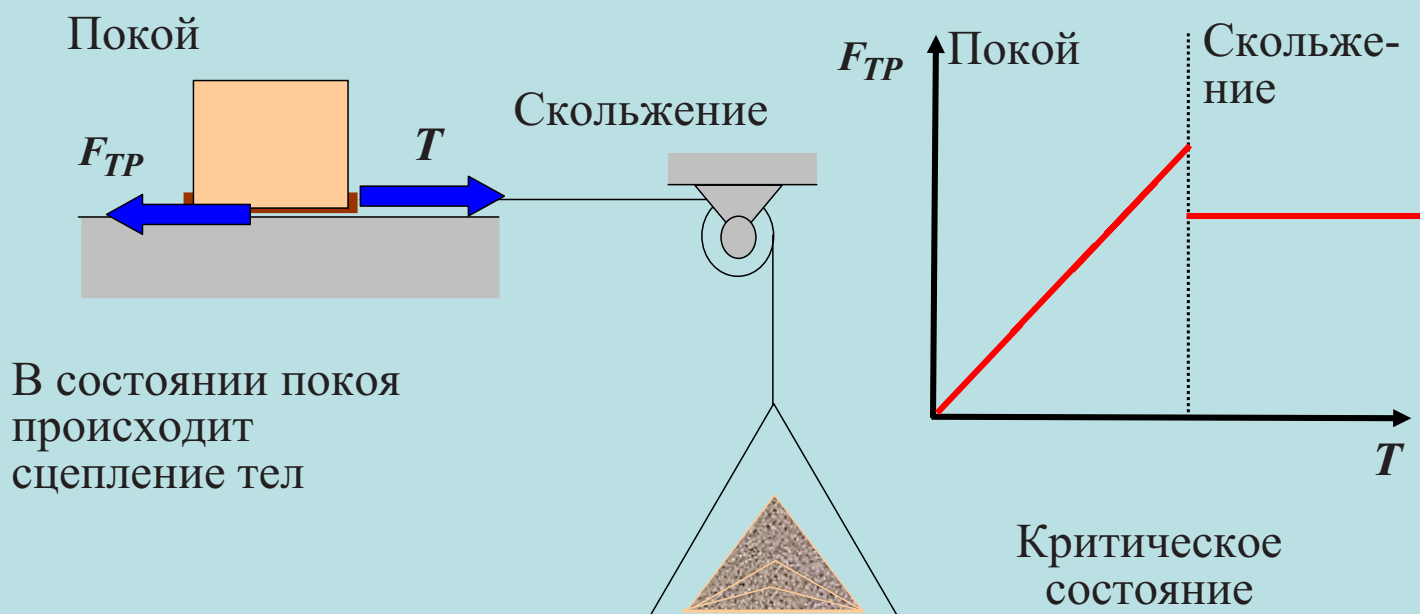
$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = 0; \quad S_1 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = 0; \quad -P - S_2 + S_1 \cos(90 - \alpha) = 0;$$

$$S_1 = 0;$$

$$S_2 = P.$$

6. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ



Сдвигающая сила T изменяется от нуля до своего максимального значения – $0 \leq T \leq T_{max}$.

Критическое состояние – момент процесса нагружения, когда тело теряет равновесие и начинает скольжение по плите.

При действии сдвигающей силы, приложенной к телу, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела из равновесного положения (**сила трения покоя**) или его действительному перемещению при его движении (**сила трения скольжения**).

Сила **трения покоя** изменяется от нуля до некоторого максимального значения.

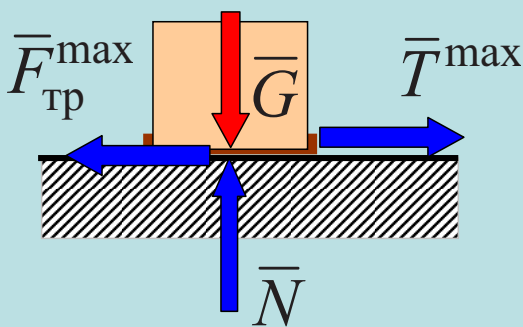
Ее величина равна сдвигающей силе.

Сила **трения скольжения** принимается постоянной.

Ее величина равна примерно 0,7...0,8 силы трения покоя.

В реальных условиях она зависит от скорости движения.

Основные законы трения (Амонтона - Кулона)



1. Сила трения лежит в касательной плоскости к соприкасающимся поверхностям и направлена в сторону противоположную направлению, в котором приложенные к телу силы стремятся его сдвинуть или сдвигают в действительности (реактивный характер).

2. Сила трения изменяется от нуля до своего максимального значения

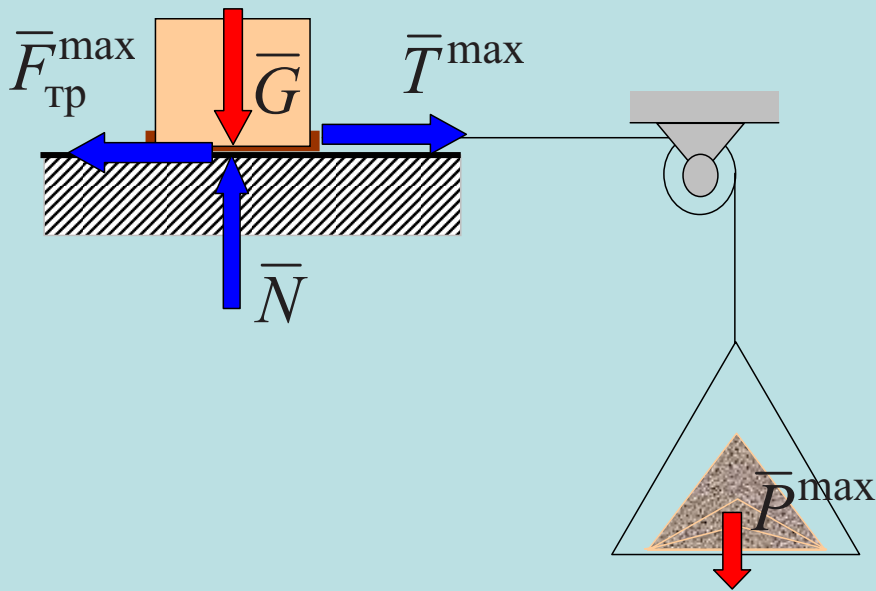
$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}.$$

Максимальная сила трения пропорциональна коэффициенту трения и **силе нормального давления**

$$F_{\text{тр}}^{\text{max}} = f \cdot N.$$

3. Коэффициент трения есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ($f = \text{const}$).

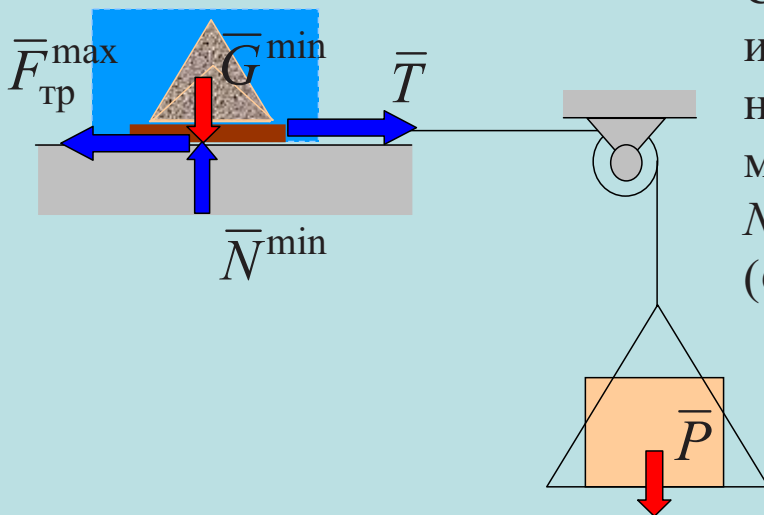
4. Сила трения в широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.



Сдвигающая сила
изменяется от нуля
до своего
максимального
значения –
 $0 \leq T \leq T^{\text{max}}$,
 $(0 \leq P \leq P^{\text{max}})$.

$$\sum X_i = 0; \quad T^{\text{max}} - F_{\text{тр}}^{\text{max}} = 0; \quad \Rightarrow \quad T^{\text{max}} = f \cdot N;$$

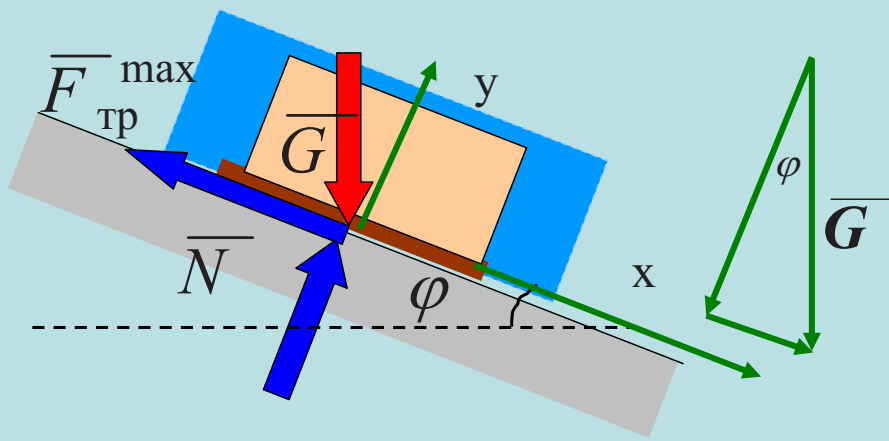
$$\sum Y_i = 0; \quad N - G = 0. \quad \Rightarrow \quad N = G; \quad f = \frac{T^{\text{max}}}{N} = \frac{P^{\text{max}}}{G}.$$



Сила нормального давления
изменяется от некоторого
начального значения до
минимального значения –
 $N_0 \geq N \geq N^{\text{min}}$
 $(G_0 \geq G \geq G^{\text{min}})$.

$$\sum X_i = 0; \quad T - F_{\text{тр}}^{\text{max}} = 0; \quad \Rightarrow \quad T = f \cdot N^{\text{min}};$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N^{\text{min}} - G^{\text{min}} = 0. \quad \Rightarrow \quad N^{\text{min}} = G^{\text{min}}; \quad f = \frac{T}{N^{\text{min}}} = \frac{P}{G^{\text{min}}}.$$



Сдвигающая сила изменяется при изменении угла наклона плоскости скольжения от нуля до максимального значения:
 $0 \leq \varphi \leq \varphi^{max}$.

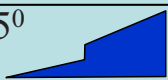
$$\sum X_i = 0; \quad G \cdot \sin \varphi^{max} - F_{тр}^{max} = 0; \quad \Rightarrow \quad G \cdot \sin \varphi^{max} = f \cdot N;$$

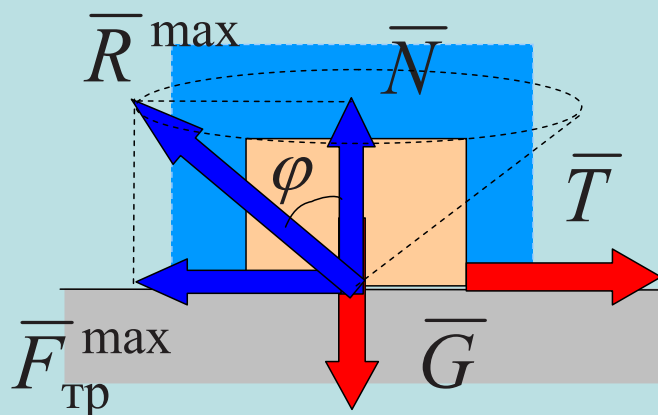
$$\sum Y_i = 0; \quad N - G \cdot \cos \varphi^{max} = 0. \quad \Rightarrow \quad N = G \cdot \cos \varphi^{max};$$

$$f = \frac{G \cdot \sin \varphi^{max}}{N} = \frac{G \cdot \sin \varphi^{max}}{G \cdot \cos \varphi^{max}} = \operatorname{tg} \varphi^{max}.$$

Коэффициент трения скольжения является безразмерной величиной.

Ориентировочные значения коэффициента трения скольжения

Первая поверхность	Вторая поверхность	Коэффициент трения f	Угол наклона φ
Сталь	Чугун	0,20...0,40	11,5°  22°
Сталь	Сталь	0,20...0,50	11,5°  45°
Сталь	Бронза	0,20...0,40	11,5°  22°
Древесина	Древесина	0,30...0,50	16,7°  45°
Сталь	Резина	0,20...0,50	11,5°  45°



С учетом силы трения, возникающей при контакте с **шероховатой** поверхностью, **полная реакция** такой поверхности может рассматриваться как геометрическая сумма нормальной реакции N абсолютно гладкой поверхности и силы трения $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$: $\bar{R}^{\text{max}} = \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}^{\text{max}}$

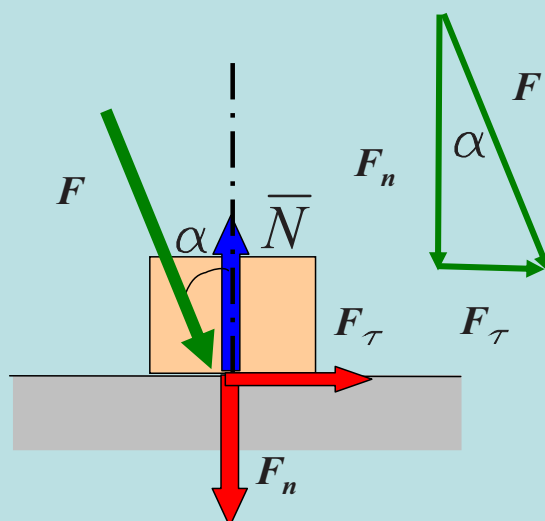
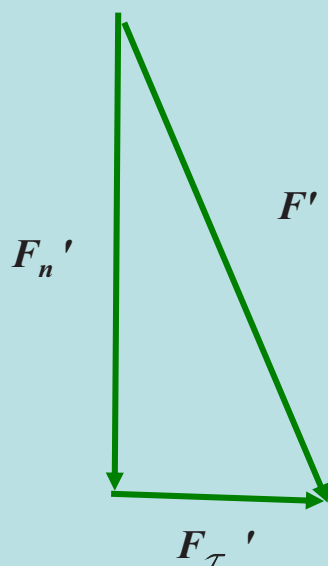
Угол отклонения полной реакции шероховатой поверхности – **угол трения**, равный

$$\varphi = \arctg \left(\frac{F_{\text{тр}}^{\text{max}}}{N} \right) = \arctg(f)$$

При изменении направления сдвигающей силы T на опорной поверхности ее поворотом относительно нормали к плоскости полная максимальная реакция шероховатой поверхности описывает **конус трения**.

Пусть активные силы (G , T и др.), действующие на тело, приводятся к равнодействующей F , составляющей угол α с нормалью к поверхности.

Пусть равнодействующая F увеличится.



Состояние покоя или скольжения тела не зависит от величины F , а определяется величиной угла α .

Равновесие на *шероховатой поверхности* возможно лишь в том случае, когда сила F находится внутри пространства конуса трения

Условия равновесия:

$$\sum X=0; \quad F \sin \alpha \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}.$$

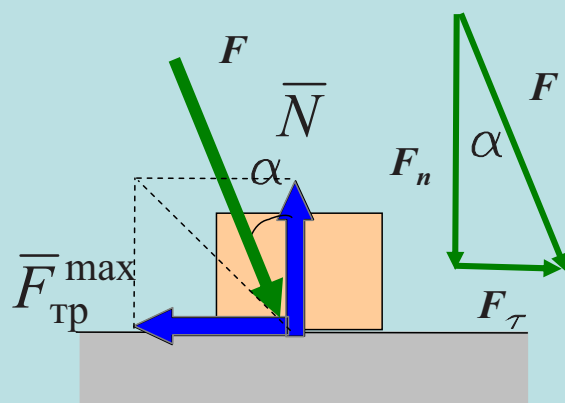
$$\sum Y=0; \quad N = F \cos \alpha.$$

Максимальная сила трения

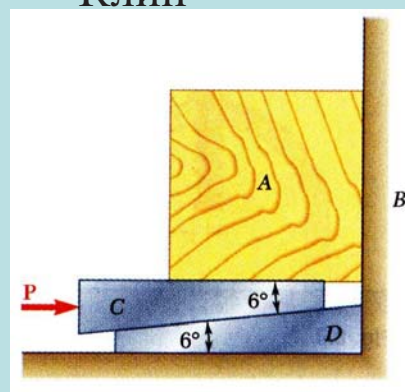
$$F_{\text{тр}}^{\text{max}} = f \cdot N = \text{tg} \varphi \cdot N = \text{tg} \varphi \cdot F \cdot \cos \alpha.$$

Тогда: $F \cdot \sin \alpha \leq \text{tg} \varphi \cdot F \cdot \cos \alpha$,

откуда $\text{tg} \alpha \leq \text{tg} \varphi$ и $\alpha \leq \varphi$.

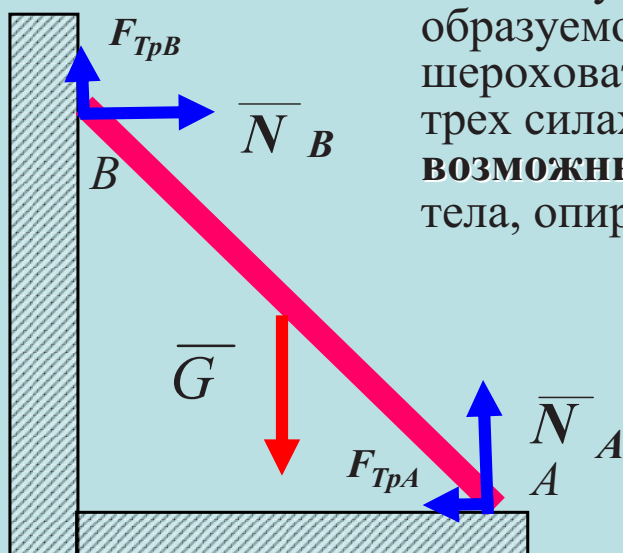


Клин



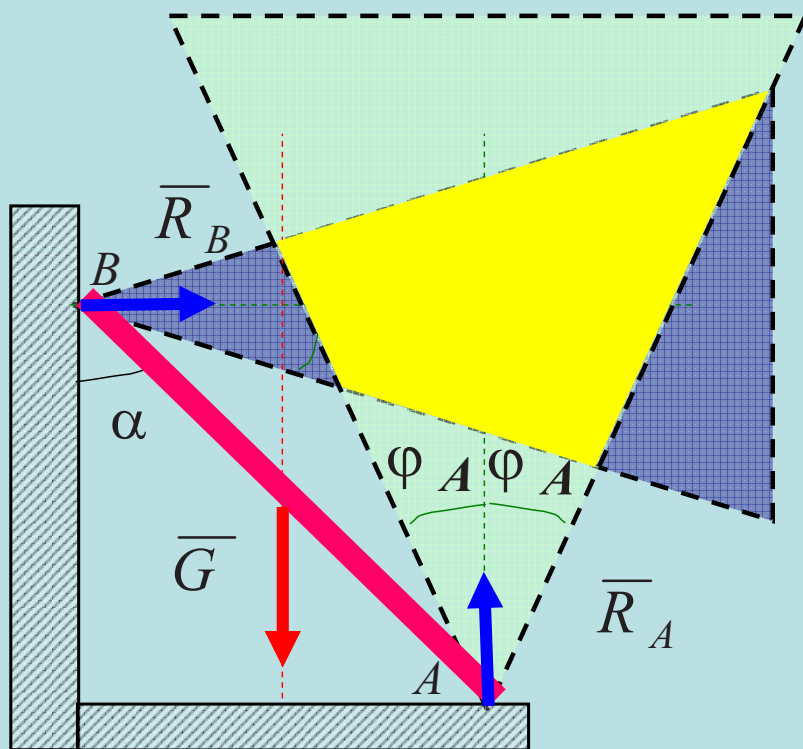
Определение области равновесия тела

Используя понятие конуса трения, образуемого полной реакцией шероховатой поверхности, и теоремы о трех силах, определим **область возможных равновесных положений** тела, опирающегося на две поверхности.



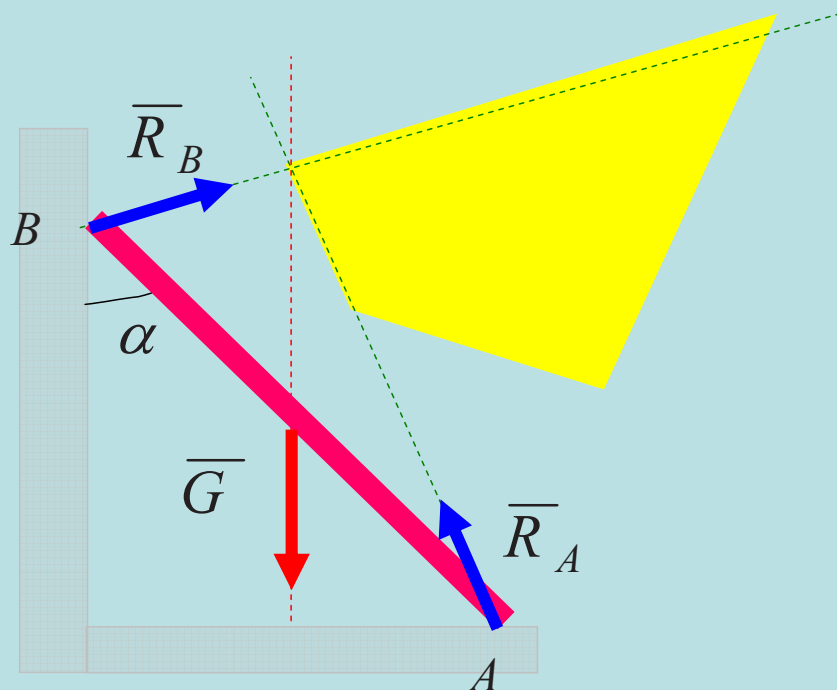
По заданным коэффициентам трения получим углы трения, определяющие предельные положения полной реакции, и построим конусы трения.

Общая область конусов дает область равновесных положений тела.

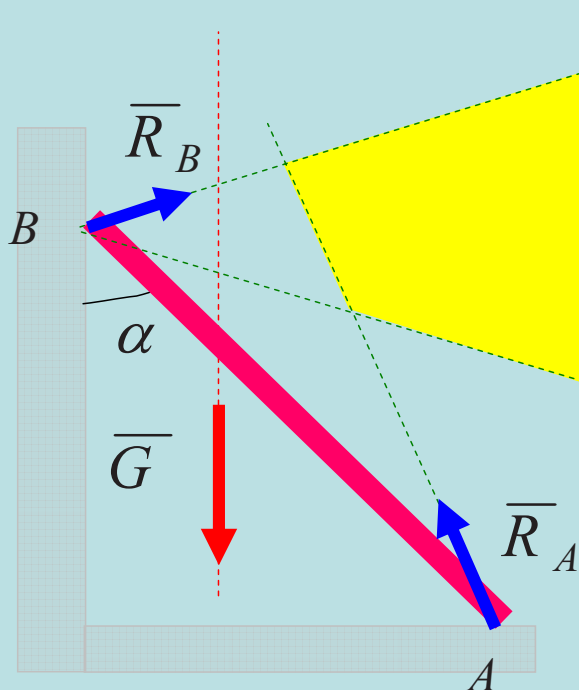


Тело находится под действием трех сил: $\vec{G}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$.

В положении равновесия эти силы пересекаются в точке, лежащей на линии действия силы $\vec{G}$.



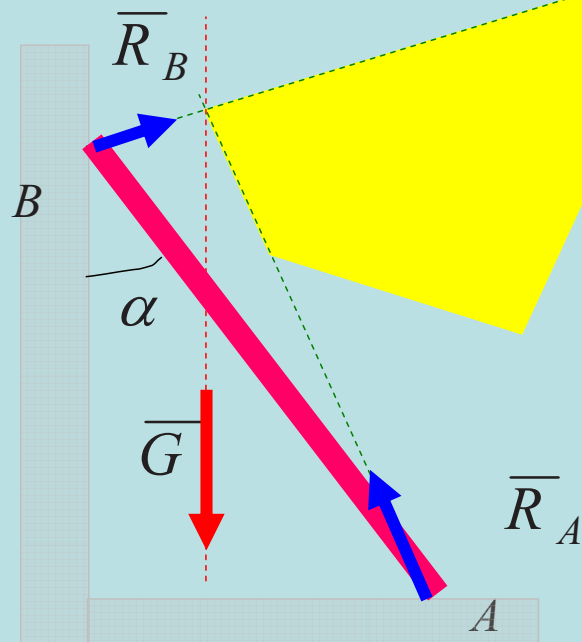
Тело находится в положении равновесия, если линия действия силы $\vec{G}$ находится в области равновесия.



Переместим тело выше.

Равновесие нарушено.

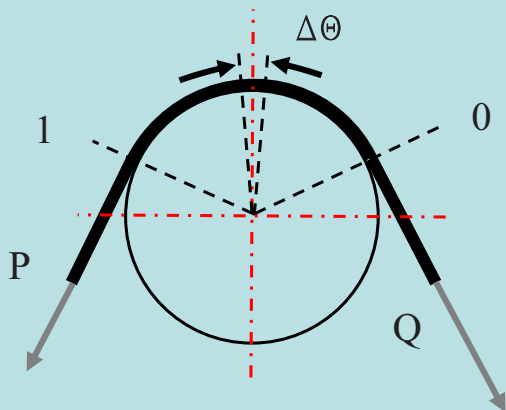
Для обеспечения равновесия необходимо уменьшить угол α .



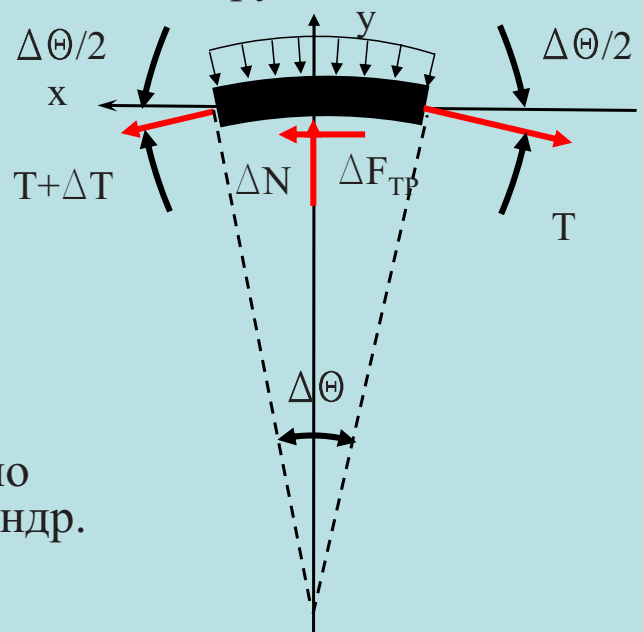
Трение гибких тел

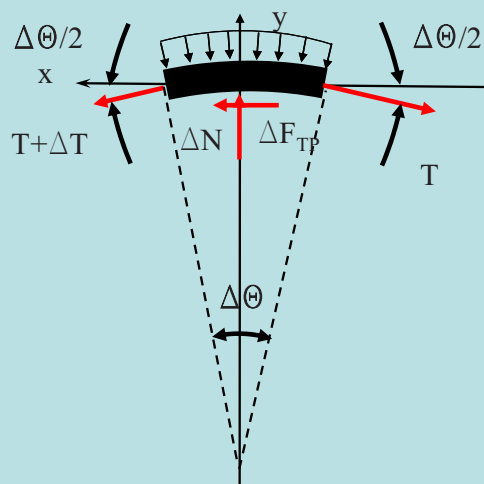
Задача: определение силы P натяжения троса, достаточной для уравнивания силы Q , приложенной ко второму концу троса, если между тросом и цилиндром существует трение.

Рассматривается критическое состояние – при этом сила Q уже способна вызвать скольжение троса по цилиндру.



Сила натяжения троса постепенно снижается силами трения о цилиндр.





$$\sum F_x = 0: (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta \Theta}{2} - T \cos \frac{\Delta \Theta}{2} + \Delta F_{TP} = 0;$$

$$\sum F_y = 0: \Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta \Theta}{2} - T \sin \frac{\Delta \Theta}{2} = 0;$$

$$\Delta S = r \cdot \Delta \Theta;$$

$$\Delta N = q_n \cdot \Delta S; \Delta F_{TP} = f \cdot \Delta N$$

$$\Delta \Theta \rightarrow 0; \sin \frac{\Delta \Theta}{2} \rightarrow \frac{\Delta \Theta}{2}; \cos \frac{\Delta \Theta}{2} \rightarrow 1;$$

$$\sum F_y = 0: q_n r \Delta \Theta = T \frac{\Delta \Theta}{2} + T \frac{\Delta \Theta}{2} + \Delta T \frac{\Delta \Theta}{2}; \quad q_n r = T;$$

$$\sum F_x = 0: \Delta T + q_n \cdot f \cdot r \cdot \Delta \Theta = 0;$$

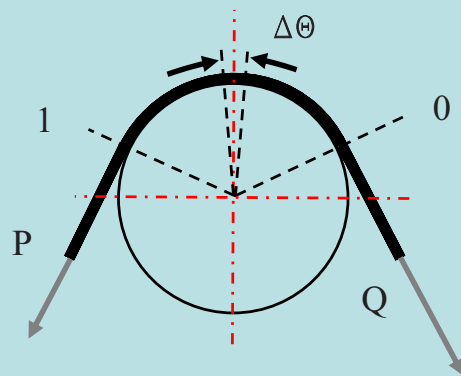
$$\Delta T = -f \cdot T \cdot \Delta \Theta;$$

$$\frac{dT}{T} = -f \cdot d\Theta$$

Пределы интегрирования:

Сечение 0: $\Theta = 0; T = Q;$

Сечение 1: $\Theta = \varphi; T = P.$



$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = - \int_0^\varphi f \cdot d\Theta$$

$$\ln P - \ln Q = -(f \cdot \varphi - f \cdot 0);$$

$$\ln \frac{P}{Q} = -f \cdot \varphi;$$

$$\frac{P}{Q} = \exp(-f \cdot \varphi);$$

Формула Эйлера

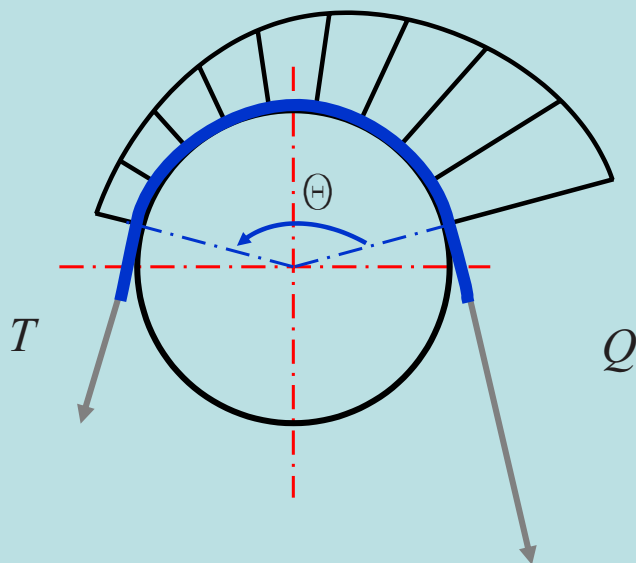
Изменение натяжения троса по углу поворота Θ

$$T = Q \cdot \exp(-f \cdot \Theta)$$

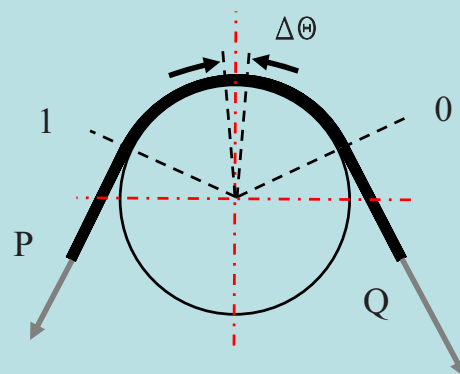
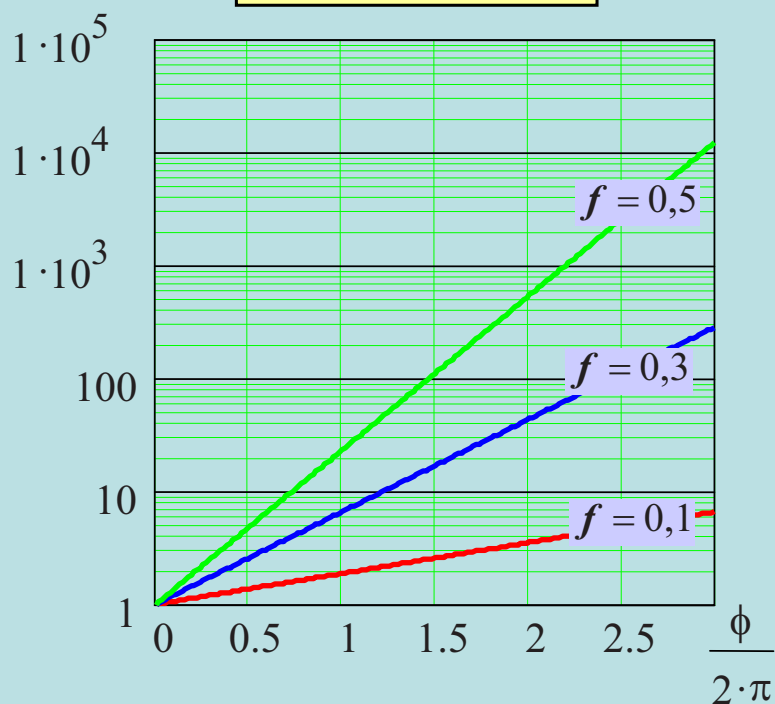
$$\Theta=0; T=Q;$$

$$\Theta=\varphi; T=P;$$

$$f=0,5; \varphi=150^\circ$$



$$\frac{Q}{P} = e^{f \cdot \varphi} = \exp(f \cdot \varphi).$$



Обратная задача - определение силы P натяжения троса, достаточной **преодоления** силы Q , приложенной ко второму концу троса, если между торсом и цилиндром имеется трение.

Сила трения направлена в противоположную сторону.

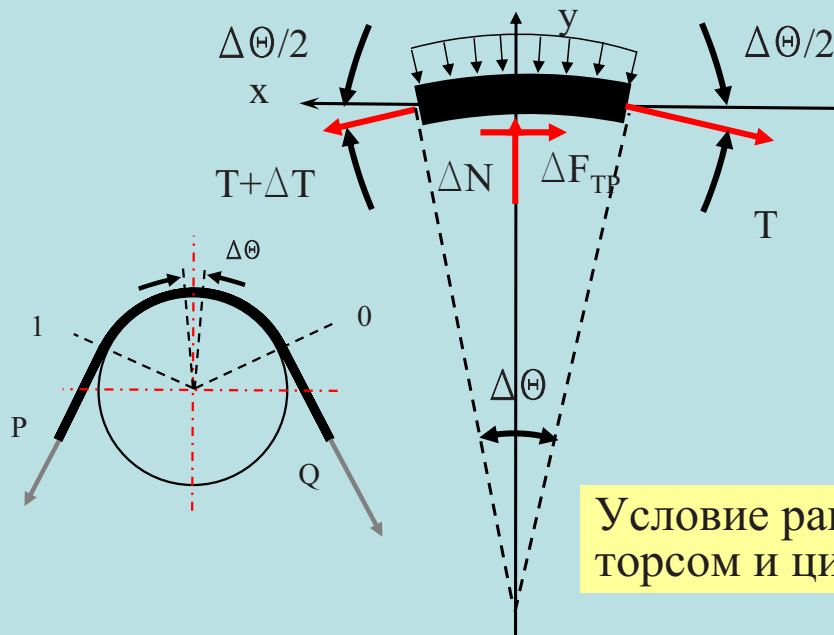
$$\sum F_x = 0: \Delta T - q_n \cdot f \cdot r \cdot \Delta \theta = 0;$$

$$\Delta T = f \cdot T \cdot \Delta \theta;$$

$$\frac{P}{Q} = \exp(f \cdot \varphi).$$

Условие равновесия троса, если между торсом и цилиндром имеется трение

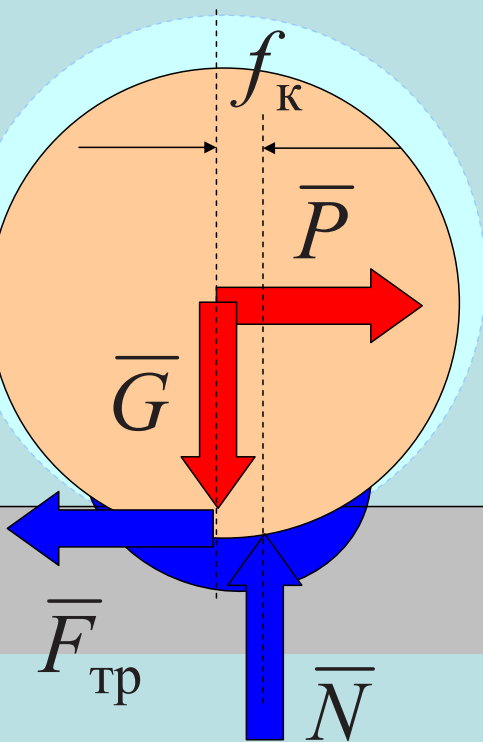
$$\exp(-f \cdot \varphi) \leq \frac{P}{Q} \leq \exp(f \cdot \varphi).$$



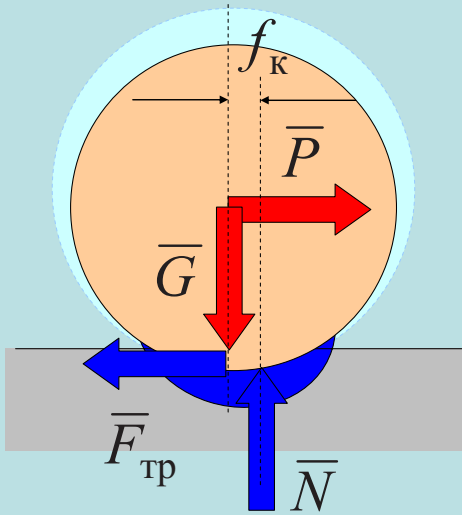
Трение качения

При действии сдвигающей силы, приложенной к катку, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела из равновесного положения (**сила трения покоя**) или его действительному перемещению при его движении (**сила трения скольжения**). Появляется пара сил, момент которой препятствует повороту катка (**момент сопротивления качению**).

Возникновение пары сил, препятствующей качению, связано с деформацией опорной плоскости, в результате которой равнодействующая нормальных реактивных сил по площадке контакта смещена от линии действия силы тяжести в сторону возможного или действительного движения.



Основные законы трения качения



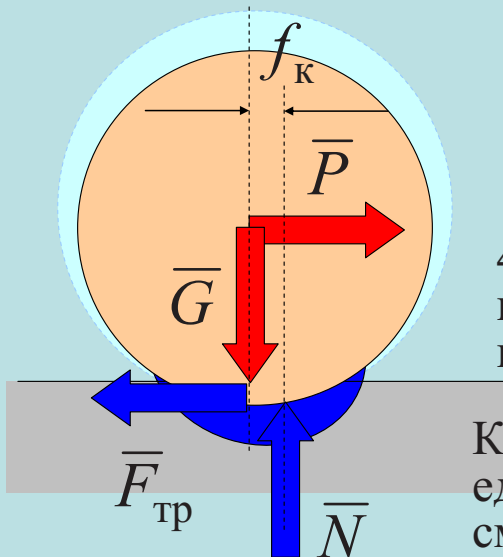
1. Момент сопротивления качению всегда направлен в сторону противоположную, тому направлению, в котором приложенные к телу силы стремятся его повернуть, или действительному повороту под действием этих сил (реактивный характер).

2. Момент сопротивления качению изменяется от нуля до своего максимального значения

$$0 \leq M_k \leq M_k^{\max}.$$

Максимальный момент сопротивления качению пропорционален коэффициенту трения качения и силе нормального давления:

$$M_k^{\max} = f_k N.$$



3. Коэффициент трения качения есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ($f_k = \text{const}$).

4. Момент сопротивления качению в широких пределах не зависит от радиуса катка.

Коэффициент трения качения измеряется единицами длины и равен по величине смещению равнодействующей нормального давления.

Для стальных деталей в силу малости деформаций коэффициент трения качения имеет очень малую величину и составляет примерно 0,0005 м (0,5 мм).

При увеличении деформации контактирующих поверхностей коэффициент трения качения увеличивается.

7. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИЛ

Пространственная произвольная система сил – силы не лежат в одной плоскости, не параллельны и их линии действия не пересекаются в одной точке.

Момент силы относительно центра в пространстве – вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо и направленный перпендикулярно к плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки, представляется происходящим против хода часовой стрелки.

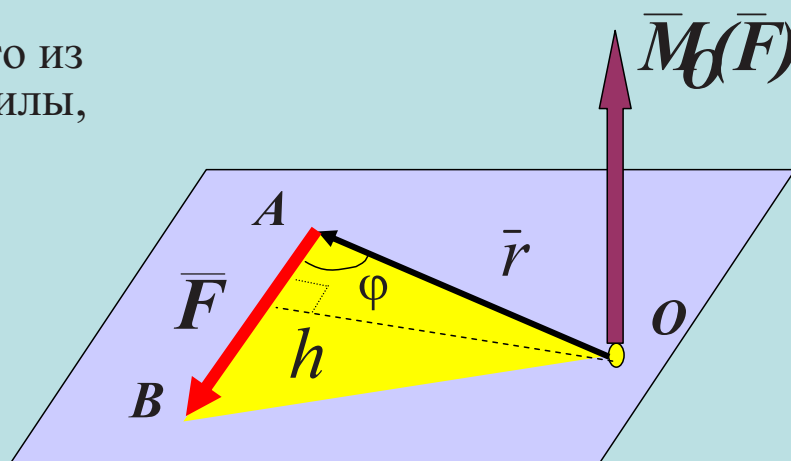
Момент силы относительно центра в пространстве – *векторная величина*, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из центра к точке приложения силы, и вектора силы:

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}.$$

Модуль момента силы относительно центра равен:

$$M_O(\bar{F}) = rF \sin(\bar{r}, \bar{F}) = Fh.$$

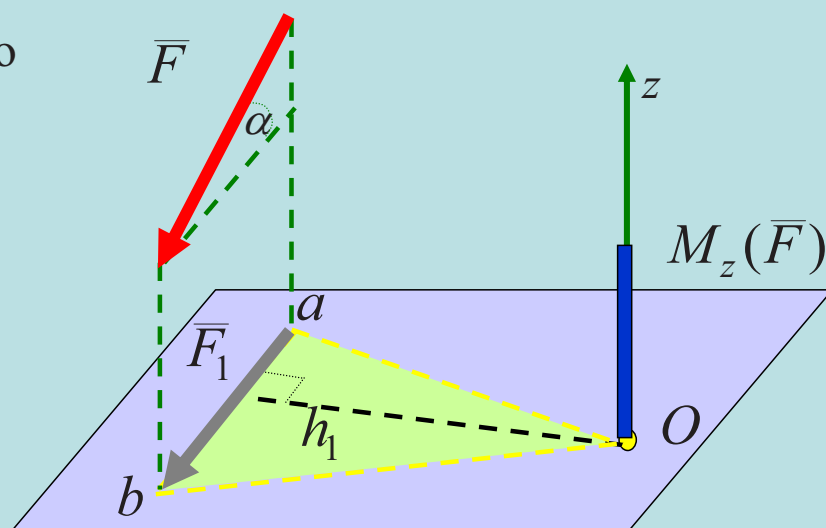
Модуль момента силы относительно центра численно равен удвоенной площади треугольника OAB .



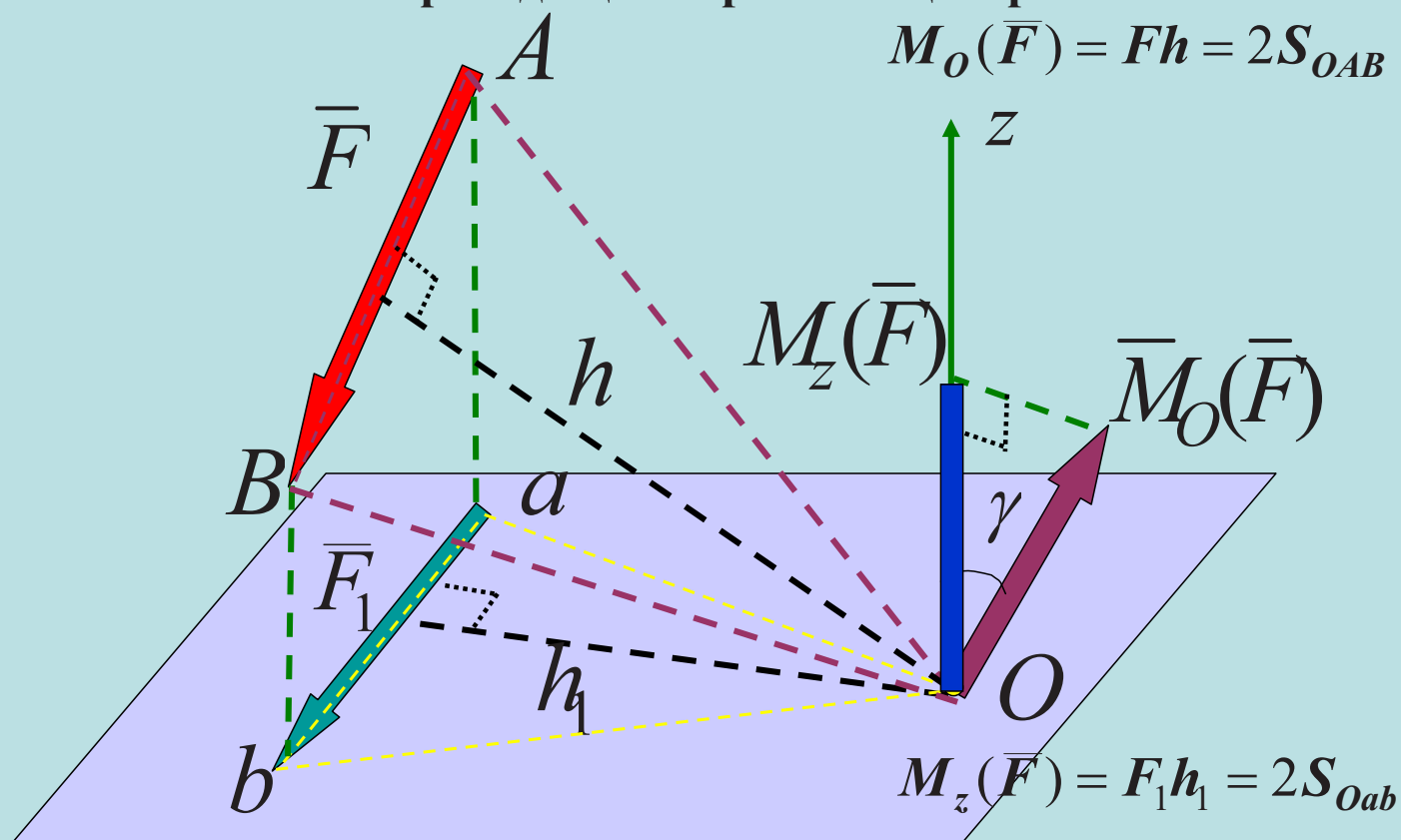
Момент силы относительно оси – алгебраическая величина,
равная произведению *проекции вектора силы* в плоскость,
перпендикулярную этой оси, на плечо этой проекции относительно
точки пересечения оси с плоскостью:

$$M_z(\bar{F}) = \pm F_1 h_1.$$

Момент силы относительно
оси численно равен
удвоенной площади
треугольника Oab .

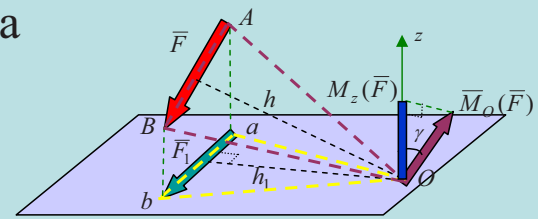


Связь момента силы относительно центра и относительно оси,
проходящей через этот центр



Модуль момента силы относительно центра O , лежащего на оси z , равен удвоенной площади треугольника OAB :

$$M_O(\bar{F}) = Fh = 2S_{OAB}$$



Модуль момента силы оси z , равен удвоенной площади треугольника Oab : $M_z(\bar{F}) = F_1 h_1 = 2S_{Oab}$

Треугольник Oab получен проекцией треугольника OAB в плоскость, перпендикулярную оси z . Его площадь связана с площадью треугольника OAB соотношением: $S_{Oab} = S_{OAB} \cos \gamma$

где γ - двугранный угол между плоскостями треугольников.

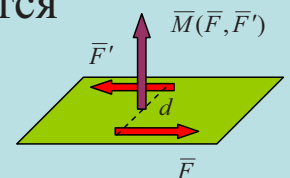
Поскольку вектор момента силы относительно точки перпендикулярен плоскости треугольника OAB , то угол между вектором и осью равен углу γ .

Таким образом, **момент силы относительно оси есть проекция вектора момента силы относительно центра на эту ось:**

$$M_z(\bar{F}) = M_O(\bar{F}) \cos \gamma.$$

Момент пары сил в пространстве – вектор, перпендикулярный плоскости действия пары, направленный в ту сторону, откуда вращение плоскости под действием пары представляется происходящим против часовой стрелки.

Модуль момента пары равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары:



$$M = Fd = F'd$$

Теоремы о парах:

О переносе пары сил в плоскость, параллельную плоскости ее действия – Пару сил можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.

Об эквивалентности пар сил – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты геометрически (векторно) равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

О сложении пар сил – Систему пар сил можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической (векторной) сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.

Условие равновесия системы пар сил: $\bar{M} = \sum \bar{M}_i = 0.$

Приведение произвольной системы сил к заданному центру

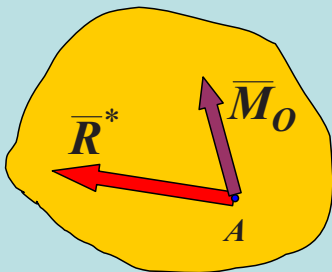
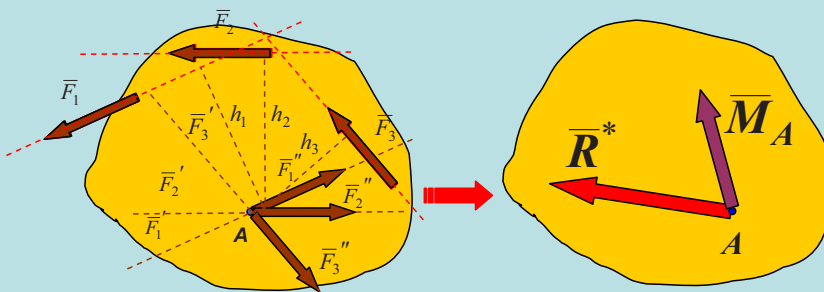
Выбираем произвольную точку A в качестве центра приведения.

Каждую из сил переносим в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар сил.

Присоединенные пары сил в пространстве характеризуются векторами.

Сходящаяся система сил приводится к **одной силе**, приложенной в центре приведения.

Система пар приводится к **одной паре** (теорема о сложении пар), момент которой равен векторной сумме моментов исходных сил относительно центра приведения.



В общем случае произвольная система сил приводится к одной силе *главному вектору* и к одной паре сил *главному моменту*.

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_i \quad - \text{ главный вектор;}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_A = \sum \vec{M}_{iA} \quad - \text{ главный момент.}$$

Аналитическое определение главного вектора системы

$$\begin{aligned}\bar{R}^* &= \sum \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots = \\ &= X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k} + X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}^* &= (X_1 + X_2 + \dots) \bar{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots) \bar{j} + \\ &+ (Z_1 + Z_2 + \dots) \bar{k} = R_x^* \bar{i} + R_y^* \bar{j} + R_z^* \bar{k}\end{aligned}$$

Проекции главного вектора :

$$R_x^* = \sum X_i; R_y^* = \sum Y_i; R_z^* = \sum Z_i;$$

$$\cos(\bar{R}^*, x) = \frac{R_x^*}{R^*};$$

Направляющие косинусы главного вектора:

Модуль главного вектора:

$$\cos(\bar{R}^*, y) = \frac{R_y^*}{R^*}.$$

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}}$$

Аналитическое определение главного момента системы

$$\begin{aligned}\bar{M}_A &= \sum \bar{M}_i = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots = \\ &M_{1x} \bar{i} + M_{1y} \bar{j} + M_{1z} \bar{k} + M_{2x} \bar{i} + M_{2y} \bar{j} + M_{2z} \bar{k} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_A &= (M_{1x} + M_{2x} + \dots) \bar{i} + (M_{1y} + M_{2y} + \dots) \bar{j} + \\ &+ (M_{1z} + M_{2z} + \dots) \bar{k} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}\end{aligned}$$

Проекции главного момента: $M_x = \sum M_{ix}; M_y = \sum M_{iy}; M_z = \sum M_{iz};$

Направляющие косинусы главного момента:

$$\cos(\bar{M}_A, x) = \frac{M_x}{M_A};$$

Модуль главного момента:

$$M_A = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\cos(\bar{M}_A, y) = \frac{M_y}{M_A}.$$

Условием равновесия пространственной произвольной системы сил является одновременное обращение в нуль главного вектора и главного момента системы :

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i = 0; \quad \bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA} = 0.$$

Уравнения равновесия получаются в виде системы шести уравнений из условий равновесия с использованием выражений для проекций главного вектора и главного момента системы сил:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & \sum M_{xi} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & \sum M_{yi} &= 0; \\ \sum Z_i &= 0; & \sum M_{zi} &= 0. \end{aligned}$$

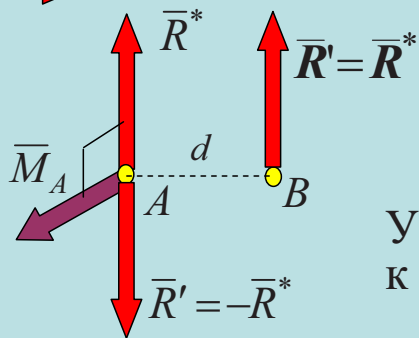
8. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИЛ



Почему при одном направлении ветра парусники идут в разные стороны?

Возможные случаи приведения пространственной произвольной системы сил к простейшему виду:

	$\bar{R}^*$	$\bar{M}_A$	Дополнительное условие	Простейший вид системы
1	$\bar{R}^* = 0$	$\bar{M}_A = 0$		Условие равновесия
2	$\bar{R}^* \neq 0$	$\bar{M}_A = 0$		Равнодействующая
3	$\bar{R}^* = 0$	$\bar{M}_A \neq 0$		Пара сил
4	$\bar{R}^* \neq 0$	$\bar{M}_A \neq 0$	$\bar{R}^* \perp \bar{M}_A$	Равнодействующая 
			$\bar{R}^* \nparallel \bar{M}_A$	Силовой винт (сила и пара сил)



$$d = \frac{M_A}{R^*}.$$

Условия приведения системы к равнодействующей в векторной форме:

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = R^* M_A \cos(\bar{R}^*, \bar{M}_A) = 0;$$

$$\bar{M}_A = 0; \Rightarrow \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0;$$

$$\bar{R}^* \perp \bar{M}_A; \Rightarrow \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0; (\cos(\bar{R}^*, \bar{M}_A) = 0).$$

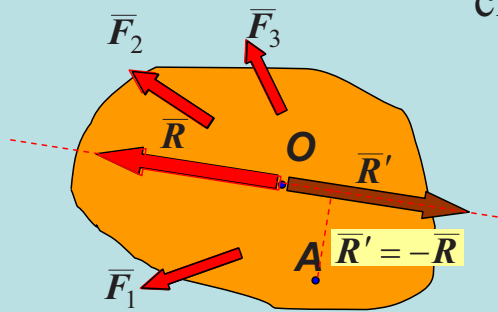
В аналитической (координатной) форме:

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = R_x^* M_x + R_y^* M_y + R_z^* M_z = 0.$$

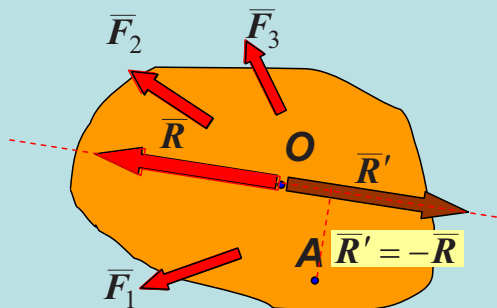
Теорема Вариньона о моментах равнодействующей для пространственной системы сил

Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно любого центра равен **геометрической** сумме моментов сил системы относительно этого же центра.

Момент равнодействующей системы сил относительно любой оси равен **алгебраической** сумме моментов сил системы относительно этой же оси.



Доказательство. Пусть система сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ приводится к равнодействующей, приложенной в точке O . Такая система не находится в равновесии ($R \neq 0$).



Уравновесим эту систему силой R' , равной равнодействующей R и направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Система исходных сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ и уравновешивающей силы R' находится в равновесии и должна удовлетворять условиям равновесия, например:

$$\sum \bar{M}_{iA} + \bar{M}_A(\bar{R}') = 0.$$

Поскольку сила R' равна равнодействующей R и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то $M_A(R') = -M_A(R)$.

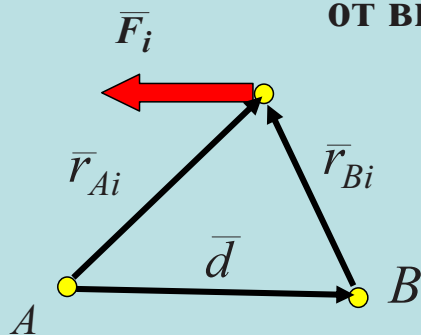
$$\sum \bar{M}_{iA} - \bar{M}_A(\bar{R}) = 0$$

$$\bar{M}_A(\bar{R}) = \sum \bar{M}_{iA}.$$

Спроектируем это векторное равенство на любую ось, например, x :

$$M_x(\bar{R}) = \sum M_{ix}$$

Зависимость главного момента системы сил от выбора центра приведения



Моменты силы $\vec{F}_i$ относительно центров приведения A и B:

$$\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_B(\vec{F}_i) = \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i$$

1. Свяжем между собой точки приведения A и B радиус-вектором $\vec{d}$.

$$\vec{d} = \vec{r}_{Ai} - \vec{r}_{Bi} \quad \text{или} \quad \vec{r}_{Bi} = \vec{r}_{Ai} - \vec{d}.$$

2. Подставим радиус-вектор $\vec{r}_{Bi}$ в выражение для момента $M_B(F_i)$:

$$\vec{M}_B(\vec{F}_i) = (\vec{r}_{Ai} - \vec{d}) \times \vec{F}_i = \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i - \vec{d} \times \vec{F}_i.$$

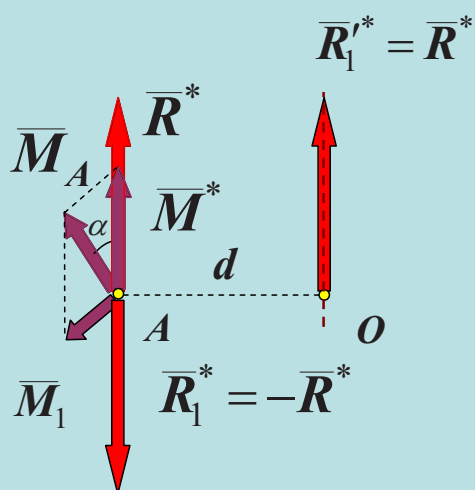
3. Просуммируем моменты всех сил $\vec{M}_B(\vec{F}_i)$:

$$\sum \vec{M}_B(\vec{F}_i) = \sum \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i - \sum \vec{d} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_i) - \vec{d} \times \sum \vec{F}_i.$$

4. Зависимость главного момента сил от выбора центра приведения:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A - \vec{d} \times \vec{R}^*.$$

Силовой винт (сила и пара сил)



Пусть система сил приведена в точке A к главному вектору $\vec{R}^*$ и паре с главным моментом $\vec{M}_A$, составляющими произвольный угол α .

1. Разложим главный момент $\vec{M}_A$ на два момента $\vec{M}^*$ и $\vec{M}_1$ по двум направлениям: направлению главного вектора и перпендикулярно к нему и $\vec{M}_1$.

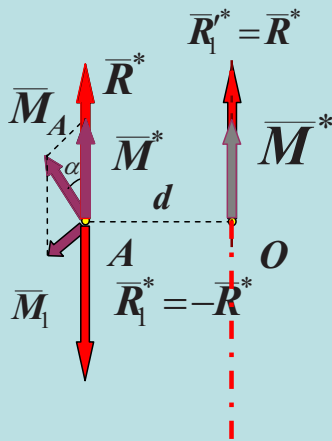
2. Представим пару сил с моментом $\vec{M}_1$ в виде сил, равных по модулю главному вектору $\vec{R}^*$.

Плечо этой пары
$$d = \frac{M_1}{R^*}$$

3. Систему сил в точке A удалим (аксиома присоединения).

4. Оставшуюся пару сил с моментом $\vec{M}^*$ перенесем в точку приложения оставшейся силы $\vec{R}'^*$ (теорема о переносе пары в пространстве).

Исходная система сил в центре приведения A в новом центре приведения O трансформировалась в **силовой (статический) винт** и более не может быть упрощена.

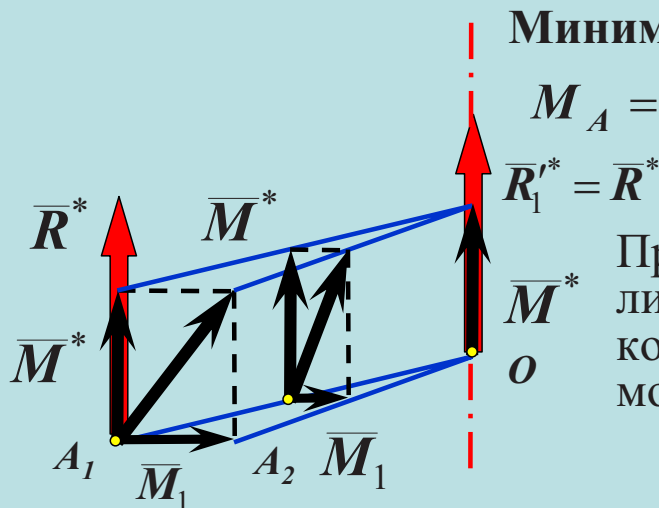


Составляющая главного момента M_1 , перпендикулярная главному вектору, исчезла, а вторая составляющая M^* осталась неизменной.

Совокупность силы $R_1'^*$ и момента пары M^* можно перенести в любую точку на линии действия силы $R_1'^*$, т.к. момент пары M^* является свободным вектором, а силу можно переносить по линии ее действия.

Величина главного момента в точке A :

$$M_A = \sqrt{M^{*2} + M_1^2} = \sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2}.$$



Минимальный главный момент

$$M_A = \sqrt{M^{*2} + M_1^2} = \sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2}$$

При выборе точек приведения по линии A_1O от исходной точки A_1 до конечной точки O $d \rightarrow 0$ и главный момент $M_{A1} \rightarrow M^* = \min$.

Геометрическое место точек центров приведения, для которых главный момент системы принимает минимальное значение называется **центральной осью системы**.

Это линия действия силы $\bar{R}_1'^* = \bar{R}^*$.

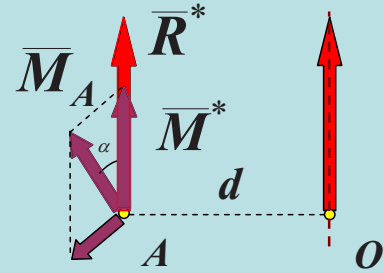
Кинематическое состояние системы не изменяется при переносе главного вектора и главного минимального момента вдоль центральной оси системы.

Следовательно, полученный результат справедлив для любой точки приведения, лежащей на центральной оси системы сил.

Главный минимальный момент может быть вычислен как проекция главного момента в любой точке приведения на направление главного вектора:

$$M^* = M_A \cos \alpha = M_A \cos (\bar{M}_A, \bar{R}^*);$$

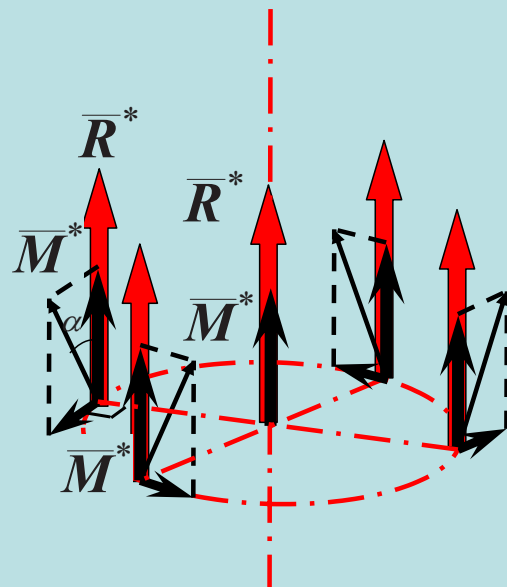
$$\cos \alpha = \frac{M^*}{M_A} = \frac{M^*}{\sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2}};$$



При выборе точек приведения на одном и том же расстоянии от центральной оси (на цилиндрической поверхности) главные моменты системы сил равны по модулю и составляют одинаковый угол α с образующей цилиндра:

$$M_A = \sqrt{M^{*2} + M_1^2} = \sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{M^*}{M_A} = \frac{M^*}{\sqrt{M^{*2} + (R^* d)^2}};$$



$$M^* = M_A \cos \alpha = M_A \cos(\overline{M}_A, \overline{R}^*).$$

Умножая на модуль главного вектора левую и правую части выражения главного минимального момента получим:

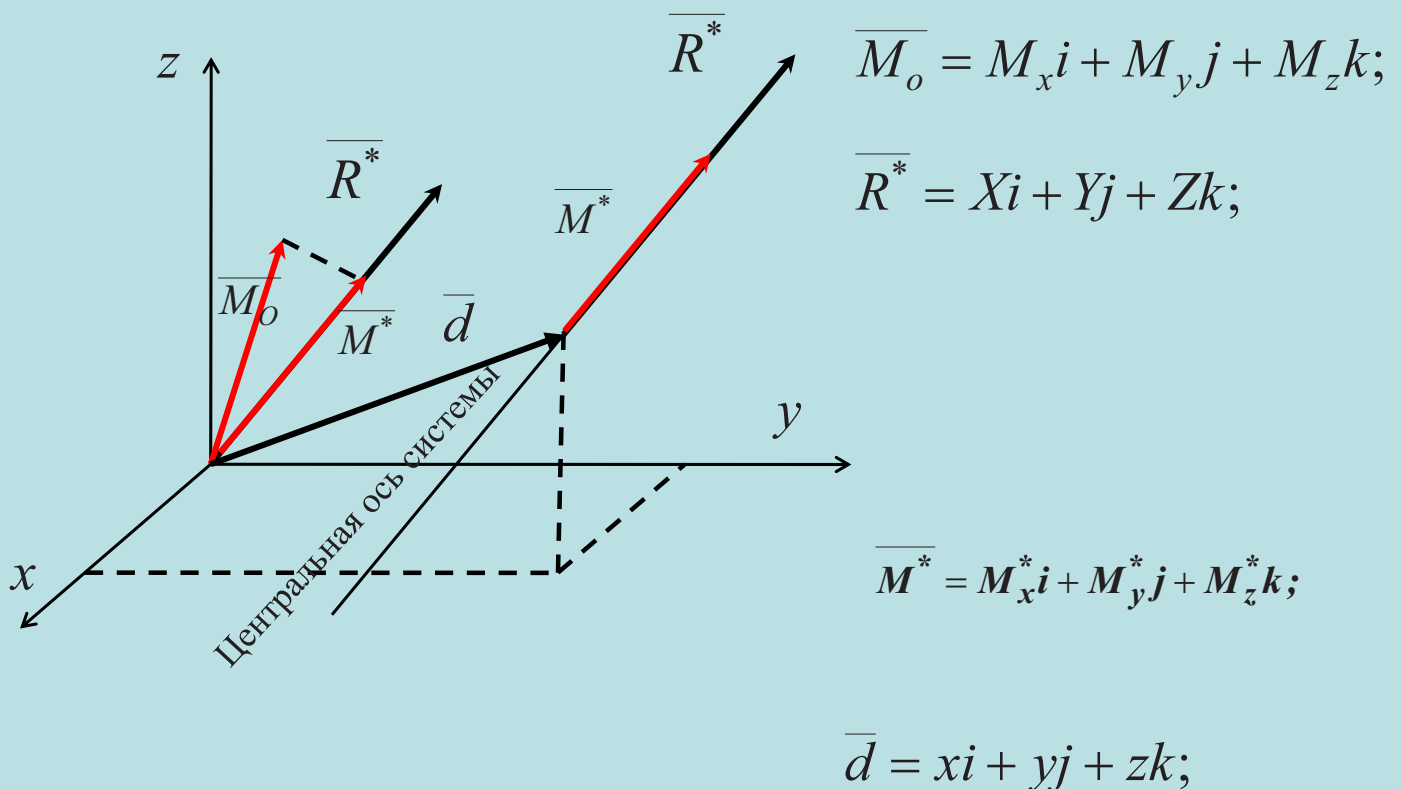
$$R^* M^* = R^* M_A \cos(\overline{M}_A, \overline{R}^*) = \overline{R}^* \cdot \overline{M}_A.$$

Главный минимальный момент выражается через **скалярное произведение** главного вектора и главного момента в точке А :

$$M^* = \frac{\overline{R}^* \cdot \overline{M}_A}{R^*} = \frac{XM_X + YM_Y + ZM_Z}{R^*};$$

$$\overline{M}_A = M_x i + M_y j + M_z k; \quad \overline{R}^* = Xi + Yj + Zk.$$

Уравнение центральной оси системы сил



$$\overline{M}^* = \overline{M}_O - \overline{d} \times \overline{R}^*$$

$$\overline{M}_O = M_x i + M_y j + M_z k;$$

$$\overline{M}^* = M_x^* i + M_y^* j + M_z^* k;$$

$$\overline{R}^* = Xi + Yj + Zk;$$

$$\overline{d} = xi + yj + zk;$$

$$\overline{d} \times \overline{R}^* = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= (yZ - Yz)i + (xZ - Xz)j + (xY - Xy)k;$$

$$M_x^* = M_x - (yZ - Yz);$$

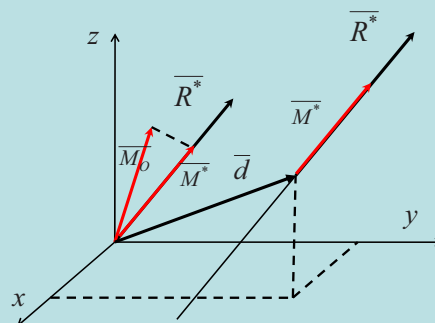
$$M_y^* = M_y - (xZ - Xz);$$

$$M_z^* = M_z - (xY - Xy).$$

$$M_x^* = M_x - (yZ - Yz);$$

$$M_y^* = M_y - (xZ - Xz);$$

$$M_z^* = M_z - (xY - Xy).$$



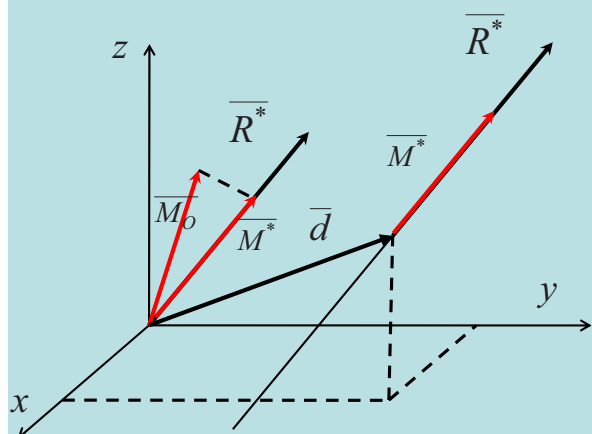
Одноименные проекции векторов M^* и R^* - пропорциональны т.к. эти векторы направлены по одной прямой.

$$\frac{M_x^*}{X} = \frac{M_y^*}{Y} = \frac{M_z^*}{Z} = \frac{M^*}{R^*};$$

$$\frac{M_x - (yZ - Yz)}{X} = \frac{M_y - (xZ - Xz)}{Y} = \frac{M_z - (xY - Xy)}{Z} = \frac{M^*}{R^*}.$$

Уравнение центральной оси системы сил

Из этих трех уравнений независимыми являются только **два**:



$$\frac{M_x - (yZ - Yz)}{X} = \frac{M^*}{R^*};$$

$$\frac{M_y - (\cancel{xZ} - \cancel{Xz})}{Y} = \frac{M^*}{R^*};$$

$$\frac{M_z - (\cancel{xY} - \cancel{Xy})}{Z} = \frac{M^*}{R^*}.$$

Точки пересечения центральной оси с координатными плоскостями.

Плоскость $yOz \rightarrow x=0$;

Значения y и z определяем из третьего и второго уравнений.

Плоскость $zOx \rightarrow y=0$; Значения x и z определяем из первого и третьего уравнений.

Плоскость $xOy \rightarrow z=0$; Значения x и y определяем из первого и второго уравнений.

Инварианты системы сил – величины, не зависящие от выбора центра приведения.

Первый (векторный) инвариант – главный вектор системы сил R^* :

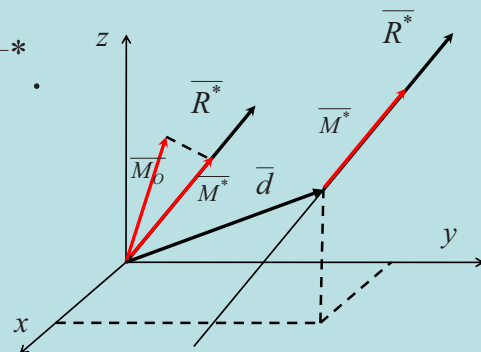
$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i.$$

Главный момент не является инвариантом, поскольку он зависит от выбора центра приведения.

Запишем зависимость величины главного момента системы сил от выбора точки приведения:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A - \bar{d} \times \bar{R}^*.$$

Умножим левую и правую части этого выражения скалярно на главный вектор и раскроем скобки:



$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_B = \bar{R}^* \cdot (\bar{M}_A - \bar{d} \times \bar{R}^*) = \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A - \bar{R}^* \cdot (\bar{d} \times \bar{R}^*),$$

Второе слагаемое в правой части обращается в нуль, т.к. главный вектор $\mathbf{R}^*$ перпендикулярен вектору векторного произведения в скобках.

Отсюда получаем тождество.

$$\bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_B = \bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_A$$

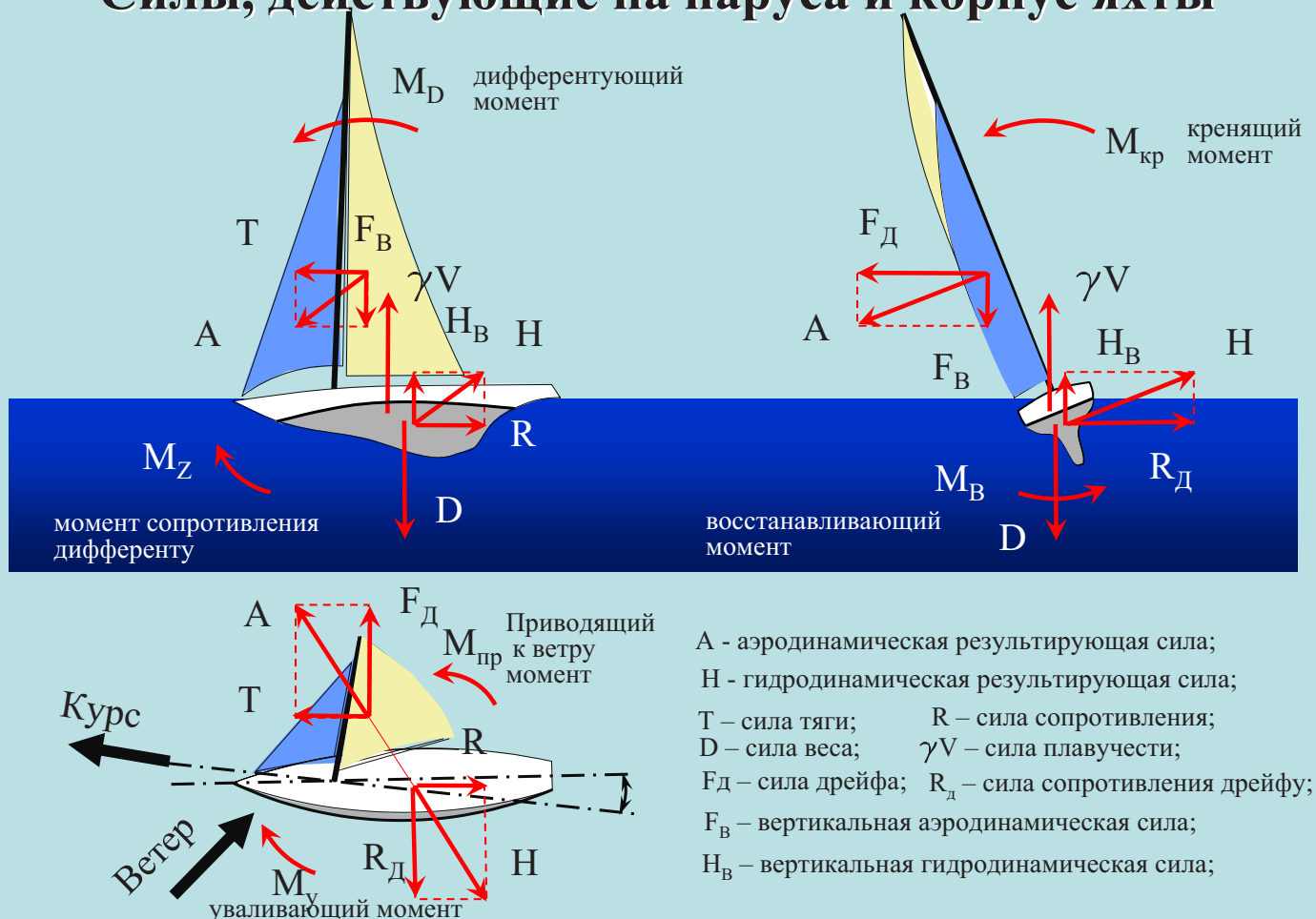
Таким образом, скалярное произведение главного вектора $\mathbf{R}^*$ и главного момента $\mathbf{M}_A$ есть **второй (скалярный) инвариант**:

$$\bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_A = \text{invar}$$

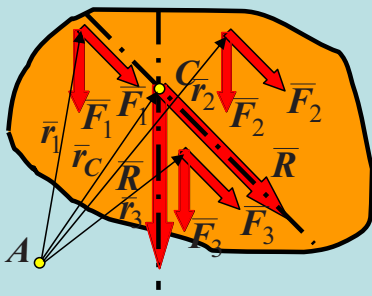
Следовательно, *главный минимальный момент* $\mathbf{M}^*$ также является инвариантной величиной:

$$M^* = \frac{\bar{\mathbf{R}}^* \cdot \bar{\mathbf{M}}_A}{R^*} = \frac{\text{invar}}{\text{invar}} = \text{invar}$$

Силы, действующие на паруса и корпус яхты



9. ЦЕНТР РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ



Сложение параллельных сил: две параллельные и направленные в одну сторону силы приводятся к одной силе – равнодействующей, приложенной в точке, делящей прямую их соединяющую на отрезки, обратнопропорциональные величинам сил.

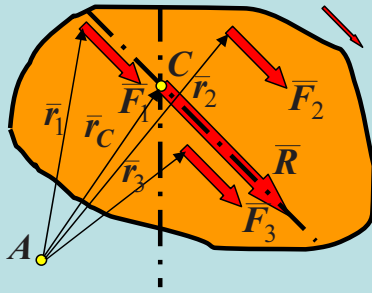
Последовательно складывая попарно параллельные силы приходим также к одной силе – равнодействующей $\bar{R}$:

Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, то точка приложения силы (равнодействующей) по существу не определена.

Если все силы повернуть на один и тот же угол и вновь провести сложение сил, то получаем другое направление линии действия равнодействующей.

Центр параллельных сил – точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

Для аналитического определения положения центра параллельных сил применим теорему Вариньона: $\bar{M}_A(\bar{R}) = \sum \bar{M}_{iA}$; $\bar{r}_C \times \bar{R} = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i$.



Каждую из сил представим с помощью единичного вектора $\bar{e}$, параллельного линиям действия сил:

$$\bar{F}_i = F_i \bar{e}$$

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = \sum F_i \bar{e}$$

$$\bar{r}_C \times (\sum F_i \bar{e}) = \sum \bar{r}_i \times F_i \bar{e}$$

$$(\bar{r}_C \sum F_i) \times \bar{e} = (\sum F_i \bar{r}_i) \times \bar{e}$$

Теорема Вариньона примет вид:

после перестановки скалярных множителей в векторных произведениях

Из равенства векторных произведений и идентичности второго сомножителя следует:

$$\bar{r}_C \sum F_i = \sum F_i \bar{r}_i \quad \bar{r}_C = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i}$$

Проекции полученного соотношения для радиуса-вектора центра параллельных сил на координатные оси дают аналитические формулы для определения координат центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}.$$

Центр тяжести системы тел

Центр тяжести – центр приложения равнодействующей сил тяготения (веса) системы тел или материального тела.

При определении положения центра тяжести тела используются гипотезы:

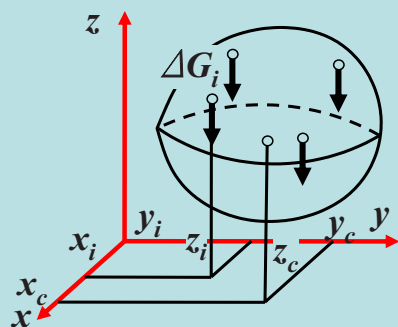
1. Линии действия сил тяготения, приложенные к отдельным частицам тела, параллельны (рассматриваемые тела имеют размеры много меньше радиуса Земли и углом между линиями действия сил тяготения частиц тел можно пренебречь).
2. Ускорение свободного падения $g = \text{const}$ (высота рассматриваемых тел много меньше радиуса Земли и изменением величины ускорения свободного падения по высоте тела можно пренебречь)
3. Рассматриваемые тела – однородные (нет включений материалов с другой плотностью) и сплошные (нет пустот).

Определение положения центра тяжести *системы тел* производим по зависимостям для определения положения центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i}; \quad y_C = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}; \quad z_C = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i},$$

где G_i – силы тяжести каждого из тел системы.

Центр тяжести однородного тела



Разобьем однородное тело на элементарные объемы, координаты центров тяжести которых известны.

$$x_C = \frac{\sum \Delta G_i x_i}{\sum \Delta G_i}; \quad y_C = \frac{\sum \Delta G_i y_i}{\sum \Delta G_i}; \quad z_C = \frac{\sum \Delta G_i z_i}{\sum \Delta G_i},$$

где ΔG – силы тяжести элементарных объемов.

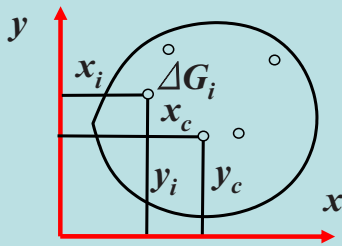
Сила тяжести элементарного объема $dG = \gamma dV$,
где $\gamma = \text{const}$ – **вес единицы объема**.

Выделим элементарный объем $dV = dx dy dz$.

Координаты центра тяжести однородного тела (центра тяжести объема):

$$x_C = \frac{\int x dG}{\int dG} = \frac{\iiint x \gamma dx dy dz}{\iiint \gamma dx dy dz} = \frac{\int x dV}{\int dV}; \quad y_C = \frac{\int y dV}{\int dV}; \quad z_C = \frac{\int z dV}{\int dV}.$$

Центр тяжести плоской фигуры



Для тела постоянной толщины ($H = \text{const}$)
 $dV = H dx dy = H dS$:

Сила тяжести элементарного объема $dG = \gamma H dS$,
 $\gamma H = \text{const}$ – вес единицы площади.

Координаты центра тяжести пластинки (центра тяжести площади пластинки):

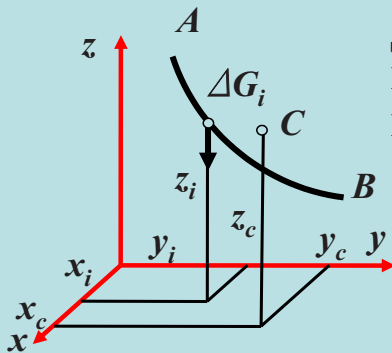
$$x_c = \frac{\iint x \gamma H dx dy}{\iint \gamma H dx dy} = \frac{\int x dS}{\int dS}; \quad y_c = \frac{\int y dS}{\int dS}.$$

Статический момент площади плоской фигуры относительно оси - сумма произведений элементарных площадей, входящих в состав площади фигуры на алгебраические значения их расстояний до этой оси

$$S_x = \sum y_i \Delta S_i = \int y dS = y_c S. \quad S_y = \sum x_i \Delta S_i = \int x dS = x_c S.$$

Статические моменты площади плоской фигуры относительно осей, проходящих через центр тяжести фигуры, равны нулю

Центр тяжести линии



Для линейного тела постоянного поперечного сечения ($S = \text{const}$) ось которого кривая АВ.

$$dV = S dL:$$

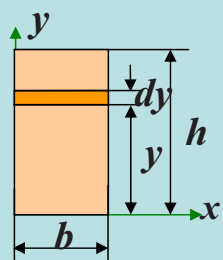
Сила тяжести элементарного объема $dG = \gamma S dL$.

$\gamma S = \text{const}$ – вес единицы длины (погонный вес).

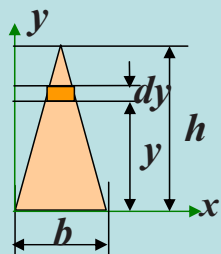
$$x_c = \frac{\int x \gamma S dL}{\int \gamma S dL} = \frac{\int x dL}{L}; \quad y_c = \frac{\int y dL}{L}; \quad z_c = \frac{\int z dL}{L}.$$

Определение положения центра тяжести простейших плоских тел

Прямоугольник: $dS = b dy$



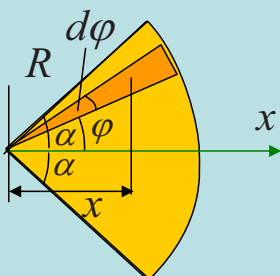
$$y_c = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^h y b dy}{\int_0^h b dy} = \frac{b \int_0^h y dy}{b \int_0^h dy} = \frac{b \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{bh} = \frac{h}{2}.$$



Треугольник:

$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}; \quad b_y = \frac{h-y}{h} b; \quad dS = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy.$$

$$y_c = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^h y \frac{h-y}{h} b dy}{\int_0^h \frac{h-y}{h} b dy} = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy}{\frac{b}{h} \int_0^h (h-y) dy} = \frac{\frac{b}{h} \left(h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h}{\frac{b}{h} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3}$$



Круговой сектор:

$$dS = \frac{1}{2} R (R d\varphi) = \frac{1}{2} R^2 d\varphi$$

$$x_c = \frac{\int_S x dS}{\int_S dS} = \frac{2 \int_0^\alpha \frac{2}{3} R \cos \varphi \frac{R^2}{2} d\varphi}{2 \int_0^\alpha \frac{R^2}{2} d\varphi} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \varphi \Big|_0^\alpha}{R^2 \varphi \Big|_0^\alpha} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

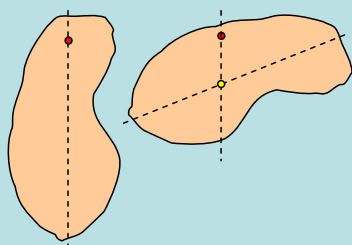
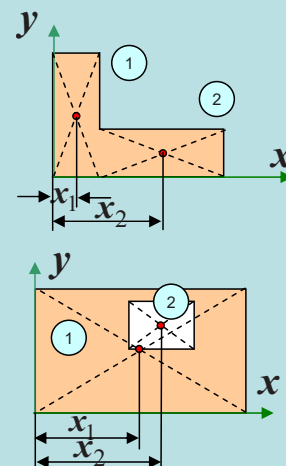
Определение координат центра тяжести сложных тел

Метод разбиения – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны или легко определяются положения центра тяжести.

Метод отрицательных площадей – сложная фигура разбивается на ряд простых, но при наличии пустот их представляют в виде областей, площадь которых "отрицательна".

Метод симметрии – при наличии у фигуры оси или плоскости симметрии центр тяжести лежит на этой оси или в этой плоскости. С учетом этого свойства уменьшается количество координат центра тяжести, подлежащих определению.

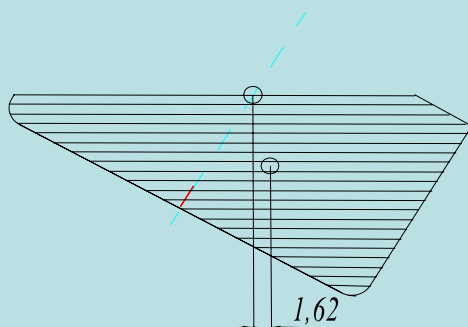
Метод интегрирования – при наличии у фигуры достаточно простого контура, описываемым известным уравнением, выбирается элементарная площадка или полоска и выполняется аналитическое интегрирование. В более сложных случаях используются численные методы интегрирования.



Метод подвешивания – экспериментальный метод. Достаточно фигуру подвесить поочередно за две любые точки и прочертить соответствующие вертикали. Точка пересечений этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.

CAD системы – выполняется чертеж детали и система определяет ее геометрические характеристики:

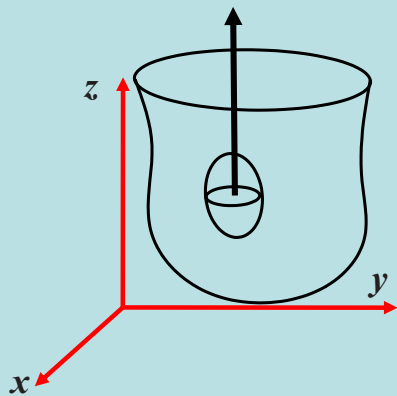
- объем (площадь);
- площадь поверхности (периметр);
- координаты центра тяжести;
- все моменты инерции.



----- REGIONS -----	
Area:	52799.0628
Perimeter:	1055.0152
Bounding box:	X: 2325.2384 -- 2762.8115 Y: -210.3257 -- 0.0000
Centroid:	X: 2573.2243 Y: -74.4669
Moments of inertia:	X: 427763429.7649 Y: 3.5015E+11
Product of inertia:	XY: -1.0203E+10
Radii of gyration:	X: 90.0096 Y: 2575.2195
Principal moments and X-Y directions about centroid:	I: 117786639.1473 along [0.9804 -0.1973] J: 559543097.9498 along [0.1973 0.9804]

Центр сил давления жидкости на погруженное тело

Равнодействующая сил давления жидкости на тело, частично или полностью погруженное в нее, проходит через центр тяжести объема жидкости и равна весу вытесненной жидкости .



Мысленно удалим тело из жидкости.

Выделим в жидкости объем, занимаемый телом.

Этот объем, занимаемый телом, находится в равновесии.

Представим, что этот объем затвердел и, естественно, находится в равновесии .

Тогда силы давления жидкости уравнивают силу веса выделенного объема.

Сила веса выделенного объема жидкости приложена в его центре тяжести и равна весу жидкости, содержащейся в этом объеме.

Заменим затвердевший объем жидкости телом такой же формы и объема.

Воздействие жидкости на него будет эквивалентным воздействию на затвердевший объем жидкости.

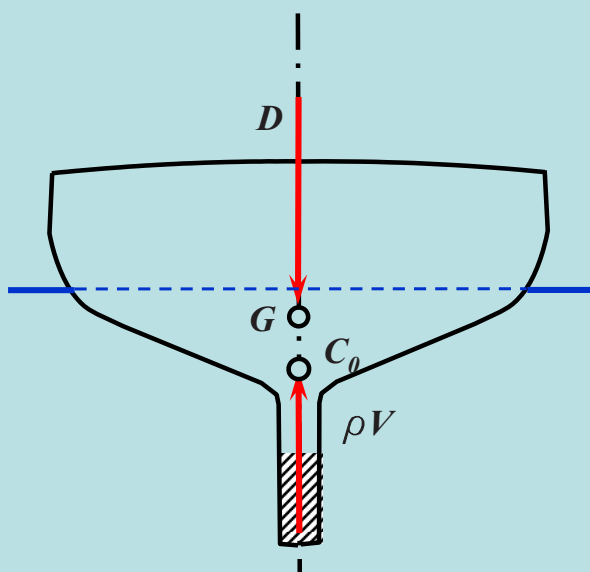
Этот закон был дань Архимедом за 200 слишком лет до Р. Х. и доказан им несколько иным рассуждением, нежели вышеприведенное, весьма строго, и притом, рассматривая свободную поверхность жидкости не как горизонтальную плоскость, а как часть шаровой поверхности, центр которой совпадает с центром земного шара. Дока-

Равновесие плавающих тел

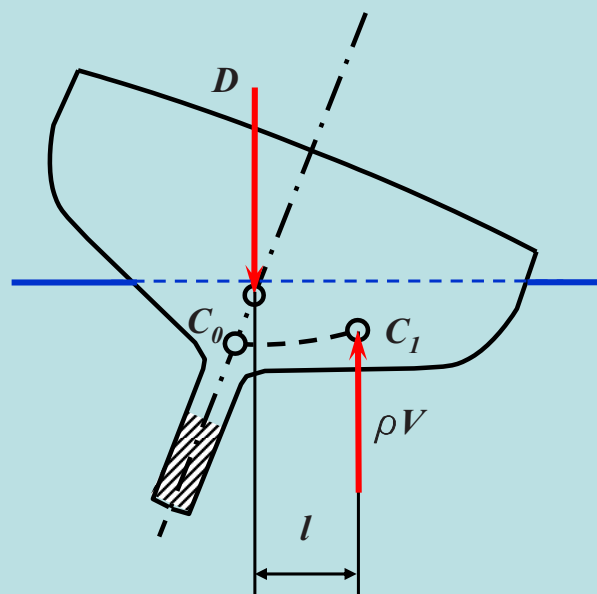
1. Равновесие возможно только тогда, когда погружена определенная часть объема.

2. Прямая, соединяющая центр тяжести тела и центр тяжести погруженного объема, нормальна к свободной поверхности жидкости (вертикальна).

Устойчивость равновесия плавающих тел



Плечо остойчивости- l



Восстанавливающий момент- $D \cdot l$

Восстанавливающий момент- *D-l*

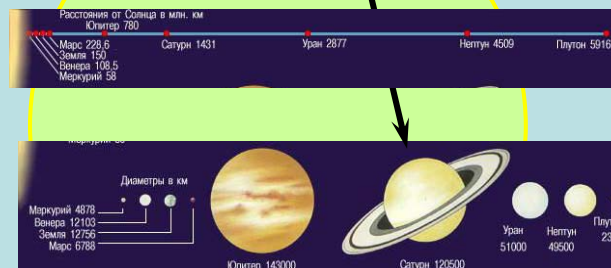
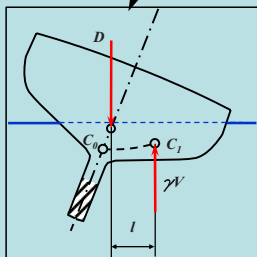
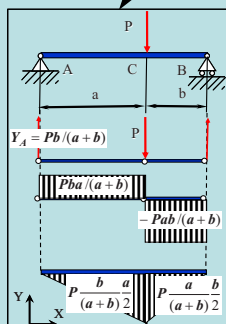


Механика

Мореходная астрономия

Небесная механика

Теоретическая механика



Солнце – 696 тыс. км

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики [Текст] : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – С.Пб. : Лань, 2009. – 736 с.
2. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики : статика и кинематика [Текст] / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – С.Пб. : Лань, 2001. – 768 с.
3. **Павловський, М. А.** Теоретична механіка [Текст] / М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2002.
4. **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике [Текст] : учеб. пособие / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – С.Пб. : Лань, 2008. – 448 с.
5. **Яблонский, А. А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / А. А. Яблонский. – М. : Высшая школа, 2010. – 400 с.
6. **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики [Текст] / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2010. – 416 с.
7. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика и кинематика [Текст] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – С.Пб. : Лань, 2010. – 672 с.

СОДЕРЖАНИЕ

От автора	3
1. Основные понятия и аксиомы	4
2. Система сходящихся сил	14
3. Система параллельных сил. Пара сил	19
4. Плоская система произвольных сил	32
5. Фермы	46
6. Равновесие тела при наличии трения	57
7. Произвольная система пространственных сил	69
8. Приведение произвольной системы пространственных сил к простейшему виду	75
9. Центр распределенных сил. Центр тяжести	84
Список использованной литературы	91