

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

С. Б. ПРИХОДЬКО

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
З ДИСЦИПЛІНИ
"Обробка експериментальних даних на ЕОМ"**

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2005

УДК 681.3.06

Приходько С.Б. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни "Обробка експериментальних даних на ЕОМ". – Миколаїв: НУК, 2005. – 52 с.

Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

Методичні вказівки призначені для студентів четвертого курсу спеціальностей напрямку "Комп'ютерні науки", які вивчають дисципліну "Обробка експериментальних даних на ЕОМ". Також може бути корисна магістрам, аспірантам і усім, кому потрібно провести первинну обробку та здійснити вибір аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних, знайти оцінки кореляційної функції, спектральної щільності та параметрів моделі стаціонарного випадкового процесу.

Рецензент доктор технічних наук І.І. Коваленко

ПЕРЕДМОВА

В Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова дисципліна "Обробка експериментальних даних на ЕОМ" відноситься до циклу дисциплін вільного вибору студентів при підготовці бакалаврів.

Методичні вказівки мають допомогти студентам четвертого курсу спеціальностей напрямку "Комп'ютерні науки" у підготовці та виконанні лабораторних робіт з дисципліни "Обробка експериментальних даних на ЕОМ". Вони містять завдання для лабораторних робіт, стислий виклад теоретичних відомостей, етапи виконання робіт та контрольні запитання.

При виконанні кожної лабораторної роботи рекомендується:

- засвоїти теоретичні відомості;
- розібратися з завданням та етапами виконання роботи;
- виконати запропоновані завдання та оформити звіт;
- перевірити повноту розуміння теми за допомогою контрольних запитань, розташованих у кінці кожної роботи.

Лабораторну роботу необхідно виконувати відповідно до наведених етапів її виконання. Звіт оформлюється кожним студентом індивідуально. Він повинен містити в собі назву і ціль роботи; завдання (постановку задачі); методику і алгоритм розв'язання задачі; текст програми (якщо використовується оригінальна програма); результати роботи; аналіз результатів та висновки. Текст програми бажано розміщувати у додатку.

ВСТУП

Процес збору та обробки даних під час проведення фізичного експерименту можна умовно поділити на три етапи: збір, аналіз та подання даних.

Для кожного етапу використовуються спеціальні апаратні та програмні засоби, що, як правило, називають підсистемами, а систему, до якої вони входять, – системою збору і обробки даних. Зазначимо, що на відповідному етапі може використовуватися одна або декілька таких підсистем.

На *першому етапі* зазвичай відбувається так зване кондиціювання (нормалізації) аналогових сигналів (посилення, фільтрація, комутація і т. п.) та їх подальше перетворення. Всі операції на цьому етапі, як правило, здійснюються за допомогою підсистем кондиціювання (нормалізації) і перетворення. Основною задачею підсистеми кондиціювання є доведення параметрів сигналу, отриманих від первинних перетворювачів, до значень, прийнятих для використання підсистемою перетворення даних. У свою чергу, остання виконує безпосереднє аналого-цифрове перетворення аналогових сигналів і, в деяких випадках, тимчасове зберігання отриманих даних.

На *другому етапі* виконується первинний аналіз (обробка) даних і, в деяких випадках, управління процесом проведення експерименту. Усі дії на цьому етапі здійснюються за допомогою підсистем аналізу (обробки) даних і управління проведенням експерименту. Первинний аналіз даних виконується за алгоритмами, які є особливими для кожного оригінального експерименту. Тут, як правило, використовують методи цифрової фільтрації, швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) та інші статистичні методи. Під час такого первинного аналізу (обробки) даних досить часто застосовують спеціалізовані цифрові сигнальні процесори DSP (Digital Signal Processor).

Зазначимо, що при проведенні будь-якого експерименту необхідно контролювати можливу появу грубих помилок у даних. Це стосується і різноманітних систем (наприклад, навігаційних), на вхід яких надходить аналогова інформація, яка потім перетворюється і передається по лінії зв'язку для подальшого аналізу. Ось чому саме первинній обробці експериментальних даних присвячена лабораторна робота № 1. Крім того, інформація про наявність

грубих помилок у даних потрібна для підсистеми управління проведенням експерименту.

На *третьому етапі* здійснюється представлення отриманих результатів у вигляді графіків, діаграм або таблиць. На цьому етапі відбувається як оперативна візуалізація, так і документування отриманих результатів за допомогою підсистем візуалізації і документування. Як правило, для цього використовується різноманітне програмне забезпечення, наприклад LabView, MatLab, Systat, WinStat, Statistica, Statgraphics, Stadia, Excel.

Лабораторна робота № 1

ПЕРВИННА ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Мета роботи: отримати практичні навички первинної обробки експериментальних даних з використанням ЕОМ.

Завдання: виконати первинну обробку експериментальних даних, які наведені у файлі. (Примітка: файл зі значеннями випадкової величини в залежності від варіанту пропонує викладач.).

Загальні теоретичні відомості

У разі прямих вимірів первинну обробку експериментальних даних виконують у наступному порядку:

1. Визначають вибіркове середнє $\bar{x}$ (точкову оцінку математичного сподівання) n результатів спостережень x_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Обчислюють вибірккову дисперсію S_x^2 (незміщену точкову оцінку дисперсії) та точкову оцінку середнього квадратичного відхилення σ_x :

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad \sigma_x = \sqrt{S_x^2}.$$

3. Визначають оцінку середнього квадратичного відхилення

результату виміру

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

4. Перевіряють нормальність закону розподілу результатів спостережень.

5. Для заданого значення довірчої ймовірності знаходять довірчу похибку результату виміру та довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення.

6. Визначають наявність грубих помилок і промахів та, якщо останні знайдені, відкидають відповідні результати і повторюють обчислення.

У разі побічних вимірів іскоме значення випадкової величини, яка вимірюється, обчислюється за результатами прямих вимірів величин, зв'язаних з іскомою визначеною функціональною залежністю.

Окремий результат при багаторазовому прямому вимірюванні фізичної величини через наявність випадкових похибок представляє собою випадкову величину.

Нагадаємо деякі відомості з теорії ймовірностей. Під випадковою розуміють величину, яка в результаті дослід з випадковим результатом приймає те або інше значення. Оскільки закономірностей у появі цих значень немає, аналіз таких величин може виконуватися тільки методами теорії ймовірностей і математичної статистики. Для характеристики випадкової величини необхідно знати сукупність значень цієї величини, а також ймовірності, з якими ці значення можуть з'явитися.

Випадкова величина називається дискретною, якщо множина її можливих значень кінцева або лічильна. Неперервні (недискретні) випадкові величини характеризуються тим, що множина їх можливих значень нелічильна.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке правило, яке дозволяє знаходити ймовірності можливих подій, зв'язаних з випадковою величиною.

Найбільш загальною формою закону розподілу випадкової величини є функція розподілу, яка представляє собою ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше, ніж задане x :

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Якщо функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X при будь-якому x неперервна і, крім того, має похідну $F'(x)$ будь-де, крім, можливо, окремих точок, то випадкова величина є неперервною.

Щільністю ймовірності неперервної випадкової величини X називається *похідна* функції розподілу $f(x) = F'(x)$.

Найбільш розповсюдженим для неперервних випадкових величин є нормальний розподіл (розподіл Гаусса) зі щільністю ймовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

де m_x – математичне сподівання випадкової величини X .

Нормально розподілені випадкові величини часто зустрічаються на практиці. Так, випадкові похибки багатократних вимірів зазвичай розподілені за нормальним законом, навіть коли закони розподілу ймовірностей складових відрізняються від нормального.

Крім того, історично склалося так, що багато статистичних критеріїв, методів і оцінок розроблені тільки для нормального початкового розподілу. Тому при первинній обробці експериментальних даних перевіряють нормальність закону розподілу результатів спостережень.

Перевірку нормальності цього закону (розподілу результатів спостережень) виконують за критерієм Пірсона (критерієм χ^2). Відповідно до цього критерію спочатку обчислюють значення χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j},$$

де m – кількість підінтервалів (кліток), на які розбивається інтервал $[x_{\min}, x_{\max}]$; $x_{\min}$ і $x_{\max}$ – відповідно мінімальне і максимальне значення випадкової величини X ; n_j – абсолютна частота в j -му підінтервалі (кількість значень випадкової величини, які попадають у j -й підінтервал); p_j – ймовірність того, що значення випадкової величини X попадають у j -й підінтервал.

Кількість підінтервалів (кліток), на які розбивається інтервал

$[x_{\min}, x_{\max}]$, може бути визначена за наступними формулами: $m = \log_2 n + 1 = 3,3 \lg n + 1$ (формула Старджеса) або $m = 5 \lg n$ (формула Брукса і Карузера).

Імовірність того, що значення випадкової величини X попадають у j -й підінтервал, може бути визначена як

$$p_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx,$$

де x_{j-1} і x_j – ліва і права границі j -го підінтервалу.

Після цього в залежності від рівня значимості α та кількості ступенів свободи за таблицею верхніх $100\alpha\%$ -х точок розподілу χ^2 (дод. А) знаходять значення $\chi_{\text{кр}}^2$. Якщо $\chi^2 \leq \chi_{\text{кр}}^2$, то з імовірністю $1 - \alpha$ можна прийняти гіпотезу, що закон розподілу результатів спостережень є нормальним, при $\chi^2 > \chi_{\text{кр}}^2$ – цю гіпотезу потрібно відкинути.

Кількість ступенів свободи ν визначається як

$$\nu = m - k - 1,$$

де k – кількість параметрів, від яких залежить закон розподілу. Для нормального розподілу $k = 2$.

Якщо із заданою довірчою ймовірністю закон розподілу результатів спостережень можна вважати нормальним, для цього ж значення ймовірності знаходять довірчу похибку результату виміру та довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення.

Завдяки випадковому характеру похибки $\Delta \hat{\theta}$ оцінки $\hat{\theta}$ параметра θ для конкретизації точності наближеної рівності $\hat{\theta} \approx \theta$ необхідно мати ймовірність p_d того, що $|\Delta \hat{\theta}|$ перейде деяку границю $\Delta > 0$:

$$P(|\Delta \hat{\theta}| \leq \Delta) = p_d.$$

Інтервал від $\hat{\theta} - \Delta$ до $\hat{\theta} + \Delta$, в якому з імовірністю p_d знаходиться справжнє значення θ , називається *довірчим інтервалом*, а його границі – *довірчими границями*, ймовірність p_d – *довірчою ймовірністю*.

Величина $\alpha = 1 - p_d$ в загальному випадку називається *рівнем значимості*. Під рівнем значимості якої-небудь статистичної гіпотези розуміють найбільшу ймовірність α , з якою ця гіпотеза може дати помилковий результат.

Для нормальної генеральної сукупності $(1 - \alpha)\%$ -й довірчий інтервал точкової оцінки математичного сподівання визначається як

$$\left[\bar{x} - t_{n-1} S_x / \sqrt{n}, \bar{x} + t_{n-1} S_x / \sqrt{n} \right],$$

де t_{n-1} – квантіль t -розподілу Стюдента, визначається за таблицею верхніх $100\alpha\%$ -х точок t -розподілу Стюдента (дод. Б) в залежності від рівня значимості $\alpha/2$ та кількості ступенів свободи ν , $\nu = n - 1$.

Величину $t_{n-1} S_x / \sqrt{n}$ розглядають як довірчу похибку результату виміру. Вона зменшується зі збільшенням n .

Приклад 1.1. Знайти 95%-й довірчий інтервал точкової оцінки математичного сподівання нормальної сукупності із 10 значень випадкової величини, якщо $\bar{x} = 52$ і $S_x^2 = 96$.

За таблицею у дод. Б для рівня значимості $\alpha/2 = (1 - 0,95)/2 = 0,025$ і кількості ступенів свободи $\nu = 10 - 1 = 9$ визначають квантіль t -розподілу Стюдента $t_9(0,025) = 2,26$. Тоді 95%-й довірчий інтервал точкової оцінки математичного сподівання буде $\left[52 - 2,26 \cdot 9,80 / \sqrt{10}, 52 + 2,26 \cdot 9,80 / \sqrt{10} \right]$ або остаточно $[45; 59]$.

Для нормальної генеральної сукупності $(1 - \alpha)\%$ -й довірчий інтервал точкової оцінки середнього квадратичного відхилення має вигляд

$$\left[S_x \sqrt{n / \chi_{\alpha/2}^2}, S_x \sqrt{n / \chi_{1-\alpha/2}^2} \right].$$

Значення $\chi_{\alpha/2}^2$ і $\chi_{1-\alpha/2}^2$ визначають в залежності від α та ν за таблицею верхніх $100\alpha\%$ -х точок розподілу χ^2 (див. таблицю у дод. А). Кількість ступенів свободи $\nu = n - 1$.

Приклад 1.2. Знайти 95%-й довірчий інтервал точкової оцінки середнього квадратичного відхилення нормальної сукупності із 11 значень випадкової величини, якщо $S_x = 0,130$.

За таблицею у дод. А для кількості ступенів свободи $\nu = 11 - 1 = 10$ та рівнів значимості $\alpha/2 = (1 - 0,95)/2 = 0,025$ і $1 - \alpha/2 = 1 - (1 - 0,95)/2 = 0,975$ знаходять значення $\chi_{10}^2(0,025) = 20,48$ і $\chi_{10}^2(0,975) = 3,25$. Тоді 95%-й довірчий інтервал точкової оцінки середнього квадратичного відхилення буде як $[0,13\sqrt{10/20,48}; 0,13\sqrt{10/3,25}]$ або $[0,091; 0,228]$.

Для нормальної генеральної сукупності результат опиту x^* є похибкою, якщо значення x^* виходе за границі інтервалу

$$[\bar{x} - \Delta_x, \bar{x} + \Delta_x],$$

$$\text{де } \Delta_x = \begin{cases} 4,0S_x & \text{при } 50 < n \leq 100; \\ 4,5S_x & \text{при } 100 < n \leq 1000; \\ 5,0S_x & \text{при } 1000 < n \leq 10000. \end{cases}$$

Якщо генеральна сукупність не є нормальною, значення Δ_x може бути обчислено як

$$\Delta_x = [1,55 + 0,8\sqrt{\varepsilon - 1} \lg(n/10)]S_x,$$

де $\varepsilon = \mu_4(x)/\sigma_x^4$ – ексцес; $\mu_4(x)$ – центральний статистичний момент четвертого порядку випадкової величини X , оцінка якого визначається за формулою

$$\hat{\mu}_4(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4.$$

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1. Визначення вибіркового середнього $\bar{x}$ (точкової оцінки математичного сподівання) n результатів спостережень $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

2. Обчислення вибіркової дисперсії S_x^2 (незміщеної точкової оцінки дисперсії), точкової оцінки середнього квадратичного відхилення $\hat{S}_x$ та оцінки середнього квадратичного відхилення результату виміру.

3. Побудова гістограми за вибіркою значень випадкової величини X . Побудова нормального закону розподілу експериментальних даних (функції щільності ймовірності) на гістограмі.

4. Перевірка нормальності закону розподілу значень випадкової величини X .

5. Знаходження довірчої похибки результату виміру та довірчого інтервалу для середнього квадратичного відхилення випадкової величини X , якщо закон розподілу результатів спостережень вважається нормальним.

6. Визначення наявності грубих помилок і промахів (якщо останні знайдені, відповідні результати відкидають і обчислення повторюють).

Контрольні питання

1. Навіщо виконують первинну обробку експериментальних даних у разі прямих вимірів?

2. Назвіть послідовність виконання первинної обробки експериментальних даних.

3. Що таке випадкова величина?

4. Що таке функція розподілу випадкової величини?

5. Що таке щільність імовірності неперервної випадкової величини?

6. Від яких параметрів залежить нормальний розподіл (розподіл Гаусса)?

7. Як визначити вибірккову дисперсію (незміщену точкову оцінку дисперсії) та точкову оцінку середнього квадратичного відхилення випадкової величини?

8. Для чого перевіряють гіпотезу відносно нормальності закону розподілу ймовірностей?

9. Поясніть критерій χ^2 (критерій Пірсона).

10. Що таке довірчий інтервал, довірча ймовірність, рівень значимості?

11. Як визначають для нормальної генеральної сукупності $\alpha\%$ -ві довірчі границі точкової оцінки математичного сподівання?

12. Як визначають для нормальної генеральної сукупності $\alpha\%$ -ві довірчі границі точкової оцінки середнього квадратичного відхилення?

13. Як перевіряють наявність грубих похибок, коли закон розподілу є нормальним?

14. Як перевіряють наявність грубих похибок, коли закон розподілу не є нормальним?

15. Що роблять, якщо у виборці знайдені грубі похибки (промахи)?

Лабораторна робота № 2

ВИБІР АНАЛІТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Мета роботи: набути практичних навичок підбору аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних, перевірки адекватності підбору та обчислення вибірових оцінок параметрів розподілу з використанням ЕОМ.

Завдання: отримати аналітичну модель розподілу експериментальних даних, які наведені у файлі. (Файл із значеннями випадкової величини в залежності від варіанту пропонує викладач.).

Загальні теоретичні відомості

Підбір аналітичної моделі закону розподілу є засобом узагальненого представлення експериментальних даних у тих випадках, коли відсутнє теоретичне обґрунтування закону розподілу випадкової величини або функції.

Для опису експериментальних даних аналітичну модель закону розподілу підбирають зазвичай із сімей розподілів Джонсона або із класів розподілів Пірсона. Рекомендується застосовувати розподіли Джонсона. Їх перевага у тому, що вони приводять після певних перетворень до нормально розподіленої випадкової величини. Так історично склалося, що велика кількість статистичних критеріїв, методів і оцінок розроблені в основному для випадку нормального початкового розподілу.

Сім'ї розподілів Джонсона отримані шляхом перетворення нормально розподіленої випадкової величини z . В загальному випадку перетворення має вигляд [3]

$$z = \gamma + \eta q(x, \varphi, \lambda); \quad \eta > 0; \quad -\infty < \gamma < \infty; \quad \lambda > 0; \quad -\infty < \varphi < \infty, \quad (2.1)$$

де q – довільна функція; $\gamma, \eta, \lambda, \varphi$ – параметри розподілу Джонсона. Слід відзначити, що γ і η – параметри форми, λ – параметр масштабу, параметр φ характеризує зсув розподілу за напрямом осі абсцис.

Джонсон пропонує три різні сім'ї функцій q :

$$1) \quad q(x, \varphi, \lambda) = \ln \left(\frac{x - \varphi}{\lambda} \right), \quad x > \varphi \quad (\text{сім'я } S_L);$$

$$2) \quad q(x, \varphi, \lambda) = \ln \left(\frac{x - \varphi}{\lambda + \varphi - x} \right), \quad \varphi < x < \varphi + \lambda \quad (\text{сім'я } S_B);$$

$$3) \quad q(x, \varphi, \lambda) = \text{Arsh} \left(\frac{x - \varphi}{\lambda} \right), \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{сім'я } S_U),$$

$$\text{де } \text{Arsh} \left(\frac{x - \varphi}{\lambda} \right) = \ln \left[\frac{x - \varphi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x - \varphi}{\lambda} \right)^2 + 1} \right].$$

Для сім'ї S_L функція щільності ймовірності задається як

$$f_L(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}(x - \varphi)} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\gamma - \eta \ln \lambda}{\eta} + \ln(x - \varphi) \right]^2 \right\},$$

де $x > \varphi$; $\eta > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$; $\lambda > 0$; $-\infty < \varphi < \infty$.

Ця функція зростає від φ до точки максимуму і потім більш повільно спадає у разі спрямування x у нескінченність ($x \rightarrow \infty$). Для сім'ї S_L вона завжди унімодальна, асиметрія завжди додатна, а ексцес більший за 3 (значення ексцесу нормального розподілу).

Для сім'ї S_B функція задається формулою

$$f_B(x) = \frac{\eta \lambda}{\sqrt{2\pi}(x - \varphi)(\lambda + \varphi - x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\gamma + \eta \ln \left(\frac{x - \varphi}{\lambda + \varphi - x} \right) \right]^2 \right\},$$

де $\varphi < x < \varphi + \lambda$; $\eta > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$; $\lambda > 0$; $-\infty < \varphi < \infty$.

Ці функції можуть бути як унімодальними, так і бімодальними. Необхідні та достатні умови для бімодальності полягають у тому, що

$$\eta < 1/\sqrt{2}, \quad |\gamma| < \eta^{-1} \sqrt{1 - 2\eta^2} - 2\eta \text{arth} \sqrt{1 - 2\eta^2}.$$

Для сім'ї S_U функція визначається як

$$f_U(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}[(x-\varphi)^2 + \lambda^2]} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\gamma + \eta \ln \left(\frac{x-\varphi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x-\varphi}{\lambda} \right)^2 + 1} \right) \right]^2 \right\},$$

де $-\infty < x < \infty$; $\eta > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$; $\lambda > 0$; $-\infty < \varphi < \infty$.

Графіки функції $f_U(x)$ мають високий порядок стику з віссю абсцис на кінцях інтервалу, зміни аргументу є унімодальними. Їх моди лежать між медіаною та нулем. Ці розподіли мають додатну або від'ємну асиметрію в залежності від того, від'ємна або додатна величина параметру γ .

Сім'ї розподілів Джонсона відрізняються багатостатністю форм, у площині асиметрії у квадраті A^2 та ексцесу ϵ займають значні області. Діаграма Джонсона, представлена на рис 2.1 (області комбінацій A^2 і ϵ для різних розподілів Джонсона), дозволяє підібрати сім'ю розподілів Джонсона за значеннями оцінок A^2 та ϵ вибіркового розподілу.

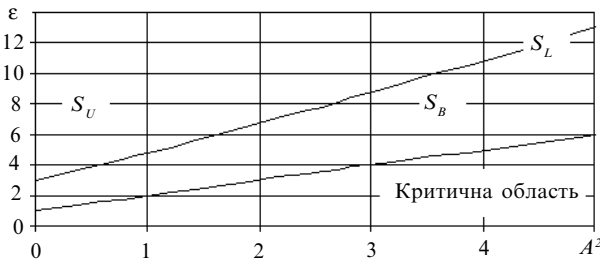


Рис. 2.1. Комбінації A^2 і ϵ для різних розподілів Джонсона

Якщо комбінація A^2 і ϵ знаходиться біля лінії S_L , то вибіркового розподіл можна апроксимувати розподілом із сім'ї S_L (логарифмічно нормальним розподілом). Розподіл зі значеннями A^2 і ϵ , які лежать вище лінії S_L ,

апроксимується розподілом із сім'ї S_U , а які лежать нижче лінії S_L (до лінії критичної області) – розподілом із сім'ї S_B . Якщо комбінація A^2 і ϵ попадає в критичну область, то вибіркового розподіл не можна апроксимувати розподілом із сімей Джонсона.

Практично завжди при підборі аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних асиметрія A та ексцес ϵ невідомі. У цьому випадку вибір сім'ї розподілів Джонсона здійснюється за оцінками асиметрії A та ексцесу ϵ , які знаходяться за гістогра-

мою. Після вибору необхідної сім'ї розподілів Джонсона обчислюють його параметри і виконують перевірку адекватності обраної моделі експериментальним даним за критерієм згоди, наприклад критерієм Пірсона (χ^2 -критерієм).

Параметри функції щільності ймовірності γ , η , λ та ϕ для обраної сім'ї розподілів Джонсона в загальному випадку можна знайти шляхом рішення наступної задачі математичного програмування:

$$\theta = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{j=1}^m [y(x_j) - f(x_j, \theta)]^2 \right\}, \quad (2.2)$$

де $\theta = \{\gamma, \eta, \lambda, \phi\}$ – вектор невідомих параметрів; x_j – значення випадкової величини x всередині j -го підінтервалу; $y(x_j)$ – значення ординати гістограми при значенні x_j ; $f(x_j, \theta)$ – вираз функції щільності ймовірності при значенні x_j ; m – кількість підінтервалів гістограми. Зазначимо, що при використанні формули (2.2) у якості значення $y(x_j)$ потрібно брати відношення відносної частоти в j -му підінтервалі до довжини j -го підінтервалу Δx .

Параметри функції щільності ймовірності γ , η , λ та ϕ для обраної сім'ї розподілів Джонсона також можна знайти із рішення системи рівнянь, яка складена з рівностей відповідних аналітичних виразів для статистичних моментів $\alpha_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ та їх оцінок, обчислених за вибірковими даними гістограми.

Відповідні оцінки статистичних моментів $\alpha_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ знаходяться за гістограмою за формулами

$$\hat{\alpha}_1(x) = \bar{x} = \sum_{j=1}^m y(x_j) \Delta x x_j;$$

$$\hat{\mu}_k(x) = \sum_{j=1}^m y(x_j) \Delta x [x_j - \bar{x}]^k, \quad k = 2, 3, 4.$$

Для сім'ї розподілів S_L статистичні моменти $\alpha_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ можна представити у вигляді наступних виразів:

$$\alpha_1(x) = \varphi + \lambda \omega \rho; \quad \mu_2(x) = \lambda^2 \omega^2 \rho^2 (\omega^2 - 1);$$

$$\mu_3(x) = \lambda^3 \omega^3 \rho^3 (\omega^6 - 3\omega^2 + 2),$$

$$\mu_4(x) = \lambda^4 \omega^4 \rho^4 (\omega^2 - 1)(\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3),$$

де $\omega = \exp(0,5/\eta^2)$; $\rho = \exp(-\gamma/\eta)$.

Тоді параметри функції щільності ймовірності γ , η , λ та φ можна знайти з вирішення наступної системи рівнянь:

$$\varphi + \lambda \omega \rho = \hat{\alpha}_1(x); \quad \lambda^2 \omega^2 \rho^2 (\omega^2 - 1) = \hat{\mu}_2(x);$$

$$\lambda^3 \omega^3 \rho^3 (\omega^6 - 3\omega^2 + 2) = \hat{\mu}_3(x);$$

$$\lambda^4 \omega^4 \rho^4 (\omega^2 - 1)(\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3) = \hat{\mu}_4(x),$$

яка є системою нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для її рішення рекомендується використовувати чисельний метод Ньютона.

Найпростішу процедуру підгонки параметрів для сім'ї розподілів S_L запропонував Уїксел, і вона полягає у наступному. Спочатку знаходять $t = (\omega^2 - 1)^{0,5}$ як додатній корінь рівняння $t^3 + 3t - A = 0$.

Після цього параметр зсуву φ визначається за формулою

$$\varphi = \alpha_1(x) - \frac{\sqrt{\mu_2(x)}}{t}.$$

Параметр η характеризується значенням ω , а саме

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2 \ln \omega}}.$$

Вираз $\gamma - \eta \ln \lambda$ розглядається як єдиний параметр і обчислюється після логарифмування добутку $\lambda \rho$.

Для сім'ї розподілів S_U статистичні моменти $\alpha_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ можна представити у вигляді наступних виразів:

$$\alpha_1(y) = -\omega \operatorname{sh} \Omega; \quad \mu_2(y) = \frac{1}{2} (\omega^2 - 1) (\omega^2 \operatorname{ch} 2\Omega + 1);$$

$$\mu_3(y) = -\frac{1}{4} \omega^2 (\omega^2 - 1)^2 \{ \omega^2 (\omega^2 + 2) \operatorname{sh} 3\Omega + 3 \operatorname{sh} \Omega \}; \quad (2.3)$$

$$\mu_4(y) = \frac{1}{8} (\omega^2 - 1)^2 \{ \omega^4 (\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3) \operatorname{ch} 4\Omega +$$

$$+ 4\omega^4 (\omega^2 + 2) \operatorname{ch} 2\Omega + 3(2\omega^2 + 1) \},$$

де $y = (x - \varphi)/\lambda$; $\omega = \exp(0,5/\eta^2)$; $\Omega = \gamma/\eta$; $\operatorname{sh} \Omega = 0,5(e^\Omega - e^{-\Omega})$;
 $\operatorname{ch} \Omega = 0,5(e^\Omega + e^{-\Omega})$.

Врахувавши, що $y = (x - \varphi)/\lambda$, знайдемо зв'язок між статистичними моментами для випадкової величини в (2.3) та величини x :

$$\alpha_1(y) = \frac{\alpha_1(x) - \varphi}{\lambda}; \quad \mu_2(y) = \frac{1}{\lambda^2} [\alpha_2(x) - \alpha_1^2(x)];$$

$$\mu_3(y) = \frac{1}{\lambda^3} [\alpha_3(x) - 3\alpha_2(x)\alpha_1(x) + 2\alpha_1^3(x)]; \quad (2.4)$$

$$\mu_4(y) = \frac{1}{\lambda^4} [\alpha_4(x) - 4\alpha_3(x)\alpha_1(x) + 6\alpha_2(x)\alpha_1^2(x) - 3\alpha_1^4(x)],$$

де $\alpha_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ – початкові статистичні моменти відповідно 2, 3, 4-го порядку випадкової величини x . Їх оцінки знаходяться за гістограмою $\hat{\alpha}_k(x) = \sum_{j=1}^m y(x_j) \Delta x x_j^k$.

Тоді параметри функції щільності ймовірності γ , η , λ та φ цієї сім'ї можна знайти таким чином. Із рішення системи рівнянь

$$\frac{\lambda^2}{2} (\omega^2 - 1) \left(\omega^2 \frac{e^{2\Omega} + e^{-2\Omega}}{2} + 1 \right) = \alpha_2(x) - \alpha_1^2(x);$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda^3}{8} \omega^2 (\omega^2 - 1)^2 \left\{ \omega^2 (\omega^2 + 2) (e^{3\Omega} - e^{-3\Omega}) + 3(e^\Omega - e^{-\Omega}) \right\} = \\
& = \alpha_3(x) - 3\alpha_2(x)\alpha_1(x) + 2\alpha_1^3(x); \tag{2.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^4}{8} (\omega^2 - 1)^2 \left\{ \omega^4 (\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3) \frac{e^{4\Omega} + e^{-4\Omega}}{2} + \right. \\
& \left. + 4\omega^4 (\omega^2 + 2) \frac{e^{2\Omega} + e^{-2\Omega}}{2} + 3(2\omega^2 + 1) \right\} = \alpha_4(x) - \\
& - 4\alpha_3(x)\alpha_1(x) + 6\alpha_2(x)\alpha_1^2(x) - 3\alpha_1^4(x)
\end{aligned}$$

визначають параметри γ , ω та Ω , що можливо за допомогою методу Ньютона. Далі знаходять параметри η і γ :

$$\eta = \sqrt{0,5/\ln \omega}, \quad \omega > 0; \quad \gamma = \Omega \eta.$$

Останній параметр ϕ знаходять із рішення першого рівняння системи (2.4): $\phi = \lambda \omega s h \Omega + \alpha_1(x)$.

Для сім'ї розподілів S_B вирази для статистичних моментів у прийнятній формі отримати досить складно. Тому для підбору параметрів розподілу в деяких випадках простіше використовувати інші величини, такі, як, наприклад, квантілі [3].

В цьому випадку за значення ϕ приймають початок першого підінтервалу, а в якості значення масштабного параметра λ обирають кількість підінтервалів m . Інші два параметри γ і η підбирають так, щоб отримати точний збіг для двох крайніх підінтервалів. Для нормованої величини $y = (x - \phi)/\lambda$ перетворення (2.1) записується як $z = \gamma + \eta \ln[y/(1 - y)]$.

В першому підінтервалі $y = 1/m$, а для іншого кінця $y = (m - 1)/m$. Для цих значень y підраховують $\ln[y/(1 - y)]$, які позначимо відповідно l_1 і l_m . За відносними частотами попадання випадкової величини x в кожний із крайніх інтервалів, використовуючи таблиці квантілей нормального розподілу, визначають відповідні квантілі z_{f_1} і z_{f_m} . Далі складають систему двох рівнянь

$$\gamma + \eta l_1 = z_{f_1};$$

$$\gamma + \eta l_m = z_{f_m}.$$

Із її рішення знаходять параметри γ і η .

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1. Побудова гістограми за вибіркою значень випадкової величини x .
2. Знаходження оцінки центру вибіркового розподілу або оцінки математичного сподівання випадкової величини x за гістограмою.
3. Обчислення оцінок центральних статистичних моментів $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ за гістограмою.
4. Обчислення оцінок асиметрії A та ексцесу ϵ за оцінками моментів $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$.
5. Вибір сім'ї розподілів Джонсона за оцінками A^2 і ϵ .
6. Знаходження параметрів функції щільності ймовірності γ , η , λ та ϕ для обраної сім'ї розподілів Джонсона.
7. Перевірка адекватності знайденої аналітичної моделі вибіркому розподілу експериментальних даних за критерієм згоди.
8. Побудова обраної аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних (функції щільності ймовірності) на гістограмі.

Контрольні питання

1. Навіщо здійснюють підбір аналітичної моделі розподілу експериментальних даних?
2. Які розподіли зазвичай використовують для опису експериментальних даних?
3. У чому перевага розподілів Джонсона?
4. Як знайти оцінку центру вибіркового розподілу або оцінку математичного сподівання випадкової величини x за гістограмою?
5. Як знайти оцінки центральних статистичних моментів випадкової величини x за гістограмою?
6. Як обрати сім'ю розподілів Джонсона?
7. Які параметри необхідні для підбору розподілу Джонсона?
8. Як знайти параметри функції щільності ймовірності для обраної сім'ї розподілів Джонсона в загальному випадку?

9. Як знайти параметри розподілу Джонсона?
10. Як перевірити адекватність знайденої аналітичної моделі вибіркового розподілу експериментальних даних?

Лабораторна робота № 3

ОЦІНКА КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ТА СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Мета роботи: набути практичних навичок оцінки кореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу з використанням ЕОМ.

Завдання: побудувати оцінки кореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу за експериментальними даними, наведеними у файлі. (Файл з експериментальними даними – значеннями ординат випадкового процесу в залежності від варіанта видає викладач.).

Загальні теоретичні відомості

Випадковим процесом називають випадкову функцію, аргументом якої є час.

Кореляційною (або автокореляційною) функцією випадкового процесу $X(t)$ називають не випадкову функцію двох аргументів $K_X(t, t')$, яка при кожній парі значень аргументів t і t' дорівнює кореляційному моменту відповідних перерізів випадкового процесу:

$$K_X(t, t') = M\{[X(t) - m_X(t)][X(t') - m_X(t')]\}.$$

Спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ називають границю відношення дисперсії, яка припадає на даний інтервал частот, до довжини цього інтервалу, коли остання прямує до нуля.

Стаціонарним, у вузькому розумінні, випадковим процесом називають такий випадковий процес $X(t)$, для якого n -вимірний диференційний закон розподілу $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ залежить при будь-якому n тільки від інтервалів часу між моментами часу $t_1, t_2, \dots, t_n$, наприклад, залежить тільки від $t_2 - t_1, t_3 - t_1, t_n - t_1$.

Випадковий процес називається стаціонарним у широкому розумінні, якщо його математичне сподівання не залежить від часу t , а кореляційна функція є функцією тільки різниці моментів часу, наприклад $\tau = t_2 - t_1$.

Окрім властивості стаціонарності, при аналізі випадкових процесів зазвичай використовується припущення про ергодичність стаціонарних процесів. Ергодичність, як і стаціонарність, може визначатися по відношенню до різних ймовірнісних характеристик – математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції. Стаціонарний процес називається ергодичним по відношенню до математичного сподівання, якщо середнє за множиною реалізацій дорівнює середньому за часом:

$$M\{X_t\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Аналогічно визначається ергодичність по відношенню до дисперсії, кореляційної функції та інших характеристик.

Властивість ергодичності дозволяє при аналізі випадкових процесів знаходити оцінки їх ймовірнісних характеристик за однією реалізацією, замінюючи усереднення за множиною реалізацій усередненням за часом за однією реалізацією. Так, оцінки математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу визначаються за наступними формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2;$$

$$\hat{K}_X(\tau) = \hat{K}_X(\Delta t \cdot j) = \frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} (x_i - \bar{x})(x_{i+j} - \bar{x}), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

де Δt – крок дискретизації за часом.

Спектральна щільність $S_X(\omega)$ і кореляційна функція $K_X(\tau)$ зв'язані перетворенням Фур'є. У дійсній формі цей зв'язок такий:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad (3.2)$$

$$K_X(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

У комплексній формі цей зв'язок має наступний вигляд:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_X(\tau) d\tau; \quad (3.3)$$

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_X(\omega) d\omega.$$

Оцінка спектральної щільності за експериментальними даними може бути отримана двома шляхами.

По-перше, для цього можна скористатися оцінкою $\hat{K}_X(\tau)$ кореляційної функції $K_X(\tau)$ і відповідно за формулою (3.3) отримати оцінку спектральної щільності:

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} e^{-i\omega\tau} K_X(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

де $\pm \tau_m$ – границі інтервалу визначення $\hat{K}_X(\tau)$, які відповідають умові $\hat{K}_X(\pm \tau_m) \approx 0$.

Розрахунок незгладженої оцінки спектральної щільності відповідно з (3.2) і (3.4) ведуть за формулою

$$\hat{S}_X(\omega_k) = \frac{\Delta t}{\pi} \left[2 \sum_{j=1}^{m-1} \hat{K}_X(j\Delta t) \cos\left(\frac{jk\pi}{m}\right) + \hat{K}_X(0) + \hat{K}_X(\tau_m) \cos(k\pi) \right],$$

де $k=1, 2, \dots, m$; $j=0, 1, \dots, m$; $m = \tau_m / \Delta t$. Тут значення оцінки $\hat{K}_X(\tau)$ визначаються за формулою (3.1) при $N = m$.

Оцінка $\hat{S}_X(\omega)$ за формулою (3.4) є незгладженою оцінкою спектральної щільності. Вона є незміщеною, але неслухною, тому що дисперсія цієї оцінки не прямує до нуля зі збільшенням до нескінченності часу T реалізації $x(t)$, за якою була визначена оцінка $\hat{K}_X(\tau)$. Зазначимо: точність цієї оцінки $\hat{S}_X(\omega)$ зменшується з наближенням до границь інтервалу визначення $\hat{K}_X(\tau)$ і в деяких випадках стає неприйнятною, тому що неврахування ординат кореляційної функції $\hat{K}_X(\tau)$ при $|\tau| > \tau_m$ може суттєво спотворити ординати спектральної щільності при малих значеннях частоти ω .

Таким же неефективним є і безпосереднє використання перетворення Фур'є до реалізації $x(t)$ для отримання оцінки спектральної щільності $\hat{S}_X(\omega)$.

Беручи до уваги те, що спектральна щільність є усередненим значенням квадрату модуля амплітуди розкладання випадкової функції у ряд Фур'є, в якості оцінки спектральної щільності природним є прийняти вираз, який називають періодограмою:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T e^{i\omega t} x(t) dt \right|^2, \quad (3.5)$$

де T – довжина реалізації $x(t)$.

Неслушність оцінки (3.5) спектральної щільності $S_X(\omega)$ пов'язана з тим, що тут оцінюється не числовий параметр, який характеризує $S_X(\omega)$, а вісь всього ходу цієї функції, або виконується непараметрична оцінка $S_X(\omega)$. Через те, що число ординат спектральної щільності $S_X(\omega)$, які оцінюються, є нескінченним, дисперсія оцінки кожної ординати не спадає зі збільшенням T . Тому (3.5) не може бути прийнята в якості оцінки спектральної щільності.

Якщо ми будемо шукати не оцінку ординат спектральної щільності $S_X(\omega)$, а оцінку інтегралу від цієї спектральної щільності, взятого в границях від ω_1 до ω_2 , або (що те ж саме) різницю спектральних щільностей $S_X(\omega_2) - S_X(\omega_1)$, то її оцінка

$$S_X(\omega_2) - S_X(\omega_1) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{i\omega t} x(t) dt \right|^2 \right\} d\omega$$

буде асимптотично незміщеною і слушною.

Таким чином, із-за неслухності оцінки $\hat{S}_X(\omega)$ формула (3.5) не дозволяє навіть при дуже великих довжинах реалізації T отримати надійне значення спектральної щільності в даній точці ω , тобто надійно визначити тонку структуру функції $S_X(\omega)$. І навпаки, якщо ми будемо шукати усереднені значення цієї функції, то зі збільшенням інтервалу усереднення (ω_1, ω_2) при тій же довжині реалізації ми будемо отримувати ефективніші оцінки. Але якщо ми використаємо отримані усереднені оцінки для характеристики спектральної щільності $S_X(\omega)$, то отримаємо систематичну похибку. Інакше, отримуючи слушну оцінку шляхом вказаного вище усереднення за частотами, порушимо незміщеність оцінки.

Для подолання виникаючих таким чином труднощів застосовують різні способи, які базуються на раціональному усередненні ординат спектральної щільності.

Один з таких способів полягає у наступному. Інтервал часу $(0, T)$ поділяють на m інтервалів довжиною T_0 і для кожного з цих інтервалів, застосувавши (3.5), отримують m оцінок спектральної щільності:

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{1}{2\pi T_0} \left| \int_{(j-1)T_0}^{jT_0} e^{i\omega t} x(t) dt \right|^2, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

середнє арифметичне яких при достатньо великих T_0 і m можна прийняти за оцінку $S_X(\omega)$. Тобто

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{S}_j(\omega). \quad (3.6)$$

Оцінку, яка є практично еквівалентною (3.6), можна отримати з (3.4), якщо ввести у підінтегральний вираз відповідну вагову функцію:

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-T_0}^{T_0} e^{-i\omega\tau} \lambda_K(\tau) \hat{K}_X(\tau) d\tau, \quad (3.7)$$

де $\lambda_K(\tau)$ – вагова (згладжуюча) парна функція, яка називається кореляційним вікном. Ця вагова функція обертається в нуль при $|\tau| > T_0$. Інтервал T_0 називають шириною вікна.

Введення у формулу перетворення Фур'є додаткової вагової функції, відмінної від нуля тільки на кінцевому (симетричному) інтервалі зміни аргументу, приблизно є еквівалентним переходу від неслухної оцінки (3.5) до слухної оцінки (3.6). При цьому загальні міркування стосовно вибору інтервалу T_0 залишаються такими: інтервал T_0 повинен бути достатньо великим для того, щоб оцінка $\hat{S}_X(\omega)$ була незміщеною, і достатньо малим, щоб $m = T/T_0$ було настільки великим числом, що оцінка буде ефективною.

Нажаль, загальних теоретичних рекомендацій стосовно вибору значення T_0 отримати не вдається, тому що оптимальне значення T_0 залежить не тільки від шуканої спектральної щільності $S_X(\omega)$, але і від конкретної задачі, яка при цьому вирішується. Тому можна зробити тільки загальні практичні вказівки стосовно вибору T_0 . Обравши вигляд вагової функції $\lambda_K(\tau)$, виконують розрахунок $\hat{S}_X(\omega)$ при різних T_0 . Оскільки мале значення T_0 відповідає більшому числу m у формулі (3.6), оцінка, яка при цьому отримується, буде найбільш ефективною. Але із-за малого значення T_0 вона буде мати найбільшу зміщеність. Зі збільшенням T_0 ефективність оцінки буде падати, а систематична похибка – зменшуватися. На графіках $\hat{S}_X(\omega)$ це буде відображатися таким чином: при малих T_0 графік $\hat{S}_X(\omega)$ буде мати вигляд плавної кривої, на який усі характерні для даної спектральної щільності піки будуть згладжені; зі зростанням T_0 тонка структура спектральної щільності буде поступово проявлятися, а при подальшому рості T_0 графік $\hat{S}_X(\omega)$ почне нагадувати реалізацію випадкового процесу, поведінка якого не відображає характер $S_X(\omega)$, а є наслідком неслухної оцінки. Якщо загальна довжина T реалізації випадкового процесу достатньо велика, то, вчинивши вказаним вище чином, за-

звичай вдається підібрати "оптимальне" значення T_0 . Якщо T мале, то, природньо, жодним вибором T_0 не можна отримати достатньо добру оцінку спектральної щільності і необхідно збільшувати довжину реалізації (кількість експериментальних даних).

Кращою оцінкою спектральної щільності, яка отримується на основі оцінки $\hat{K}_X(\tau)$ кореляційної функції $K_X(\tau)$ із застосуванням кореляційних вікон $\lambda_\kappa(\tau)$, є згладжена оцінка

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{\Delta t}{\pi} \left[2 \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_\kappa(j\Delta t) \hat{K}_X(j\Delta t) \cos\left(\frac{jk\pi}{m}\right) + \lambda_\kappa(0) \hat{K}_X(0) \right],$$

де $k=1, 2, \dots, m$; $j=0, 1, \dots, m$; $m=T_0/\Delta t$. Тут значення оцінки $\hat{K}_X(\tau)$ визначаються за формулою (3.1) при $N=m$.

Наведемо кореляційні вікна, що використовуються найчастіше:

1) трикутне вікно (вікно Бартлєта)

$$\lambda_\kappa(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_0}, & |\tau| \leq T_0; \\ 0, & |\tau| > T_0; \end{cases}$$

2) вікно Хемінга

$$\lambda_\kappa(\tau) = \begin{cases} \left(0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi\tau}{T_0} \right), & |\tau| \leq T_0; \\ 0, & |\tau| > T_0. \end{cases}$$

Зазначимо, що ці вікна використовуються при знаходженні оцінок тих спектральних щільностей, які мають унімодальну форму.

Формулу (3.7) можна перетворити таким чином, щоб під знак інтегралу входила не оцінка кореляційної функції, а періодограма $I(\omega)$. Для цього у (3.7) потрібно замінити вагову функцію $\lambda_\kappa(\tau)$ її перетворенням Фур'є $w(\omega)$:

$$\lambda_\kappa(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1\tau} w(\omega_1) d\omega_1,$$

а замість $\hat{K}_X(\tau)$ підставити її вираз через реалізацію випадкового процесу $x(t)$. Тоді оцінку $\hat{S}_X(\omega)$ можна записати як

$$\hat{S}_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\omega) I(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\omega - \omega_1) I(\omega_1) d\omega_1. \quad (3.8)$$

Функцію $w(\omega)$ у (3.8) називають спектральним вікном. Найчастіше використовуються такі вікна:

1) трикутне вікно (вікно Бартлета) $w(\omega) = \frac{4}{\pi} \frac{\sin^2 0,5\omega T_0}{\omega^2 T_0};$

2) вікно Хемінга $w(\omega) = \frac{0,54}{2\pi} \frac{\sin \omega T_0}{\omega} - \frac{0,46}{2\pi} \frac{\omega \sin \omega T_0}{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{T_0}\right)^2}.$

На прикінці зазначимо, що класичні методи спектрального аналізу, які ми розглянули, придатні практично до всіх класів сигналів за припущенням щодо стаціонарності. Недоліком цих методів спектрального аналізу є спотворення у спектральних складових за боковими пелюстками завдяки зважуванню даних за допомогою вікна. Для збільшення точності оцінок та спектральної роздільної здатності використовуються методи авторегресійного спектрального оцінювання, наприклад, такі, як методи Юла-Уалкера, Берга та інші.

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1. Визначення точкових оцінок математичного сподівання і дисперсії випадкового процесу ($\bar{x}$ і σ_x^2).

2. Знаходження оцінки $\hat{K}_X(\tau)$ кореляційної функції $K_X(\tau)$ випадкового процесу та побудова графіка цієї оцінки.

3. Визначення ширин T_0 кореляційних вікон Бартлета та Хемінга.

4. Знаходження згладжених оцінок $\hat{S}_X(\omega)$ спектральної щіль-

ності $S_X(\omega)$ із застосуванням вікон Бартлета і Хемінга та побудова графіків цих оцінок.

Контрольні питання

1. Що таке випадковий процес?
2. Які припущення використовують при аналізі випадкових процесів?
3. Дайте визначення стаціонарного випадкового процесу у широкому та вузькому розумінні.
4. Поясніть властивість ергодичності.
5. Що таке кореляційна функція?
6. Що таке спектральна щільність?
7. Назвіть методи оцінки кореляційної функції та спектральної щільності.
8. Навіщо використовують кореляційні вікна?
9. Що таке ширина кореляційного вікна?
10. Назвіть відомі кореляційні вікна.
11. Які вікна використовуються при знаходженні оцінок тих спектральних щільностей, які мають унімодальну форму?
12. Яку функцію називають спектральним вікном?

Лабораторна робота № 4

ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Мета роботи: набути практичних навичок оцінки параметрів моделі стаціонарного випадкового процесу з використанням ЕОМ.

Завдання: за експериментальними даними, які наведені у файлі, знайти точкові оцінки параметрів наступного стохастичного диференціального рівняння (СДР):

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 |\dot{y}| \dot{y} + c_1 y + c_3 y^3 = n(t), \quad (4.1)$$

яке описує випадковий процес $Y(t)$. Тут $n(t)$ – білий шум з коефіцієнтом інтенсивності N_0 .

Задані наступні експериментальні данні: значення ординат випадкових процесів $y(t)$ та $\dot{y}(t)$. Потрібно визначити точкові оцінки наступних невідомих параметрів СДР (4.1):

- а) b_1 і c_1 при відомому значенні N_0 та $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$;
- б) b_1 , b_2 , c_1 і c_3 при відомому значенні N_0 ;
- в) b_1 , b_2 , c_1 , c_3 і N_0 .

Примітка: файл з експериментальними даними в залежності від варіанту, а також значення N_0 для задач "а" або "б" пропонує викладач. Крім того, викладач вирішує, яку із задач виконує студент: "а", "б", "в" або усі.

Загальні теоретичні відомості

Невідомі параметри за своїм характером можуть бути різними: постійними або випадковими величинами, а також випадковими процесами. Різниця між ними полягає у тому, що постійні параметри зберігають своє значення в різних дослідах (вимірах); випадкові величини зберігають своє значення у даному вимірі, а також можуть набувати різних значень у різних спостереженнях; випадкові процеси змінюються в часі при конкретному спостереженні. Оскільки значення постійного параметру невідоме заздалегідь, його можна трактувати як поодинокий випадок параметру у вигляді випадкової величини. Крім того, нагадаємо, що, за визначенням, значення випадкового процесу у будь-який момент часу є випадковою величиною. Тому тут ми будемо розглядати методи оцінки параметрів θ , які представляють собою випадкову величину.

Оцінку параметрів моделі за спостереженнями поведінки об'єкту при заданій структурі моделі називають ідентифікацією у вузькому розумінні або параметричною ідентифікацією.

Першими і найпростішими моделями, до яких було застосовано процедуру ідентифікації, є детерміновані регулярні функції, які зв'язують входи та виходи моделі об'єкту. Із цим пов'язаний перший підхід теорії ідентифікації, що з'явився в математичному аналізі у вигляді теорії наближення функцій багаточленами і веде свій початок від праць П.Л. Чебишева.

Для ідентифікації стохастичних систем були застосовані методи математичної статистики, що поклали початок теорії оцінювання, основною задачею якої є оцінка параметрів цих систем в оточенні випадкових впливів. Основною моделлю, що описує поведінку динамічного об'єкту під час дії на нього випадкових впливів, є СДР. Нагадаємо, що СДР – це диференційне рівняння, до складу якого входить білий шум.

Білий шум – це стаціонарний нормальний випадковий процес з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією, яка дорівнює дельта-функції.

Отримати оцінку – фактично означає організувати таку функцію результатів спостереження $g_{\xi}(\xi_0^k)$, значення якої можна було прийняти за оптимальну оцінку $\theta = g_{\xi}(\xi_0^k)$ справжнього значення параметра θ .

Окремий результат спостереження ξ_0^k є часові відліки в $k+1$ точках конкретної реалізації випадкового спостереження $\xi(t)$, $t \in [0, T]$. Різні спостереження ξ_0^k , як і ординати функції від них, будуть представляти собою випадкові величини. Тому не можна знайти оцінку, що приймала б значення, наближене до θ , для усіх можливих спостережень. Потрібно обмежитися такою процедурою оцінювання, яка дає непогані результати всередньому при багатократному її повторенні. В залежності від критерію оптимальності оцінки та інших факторів можливі різні підходи до формування функції $f_{\xi}(\xi_0^k)$, які базуються на байєсівській та небайєсівській методологіях.

Підходи, які базуються на байєсівській методології

При байєсівському підході критерій оптимальності пов'язують з так званою функцією втрат $c(\theta, g_{\xi}(\xi_0^k))$, що характеризує їх через відхилення оцінки від справжнього значення параметра θ . Вигляд її обирається на основі практичних міркувань та простоти рішення задачі і не є особливо обмеженим.

Оскільки конкретне значення $c(\theta, g_{\xi}(\xi_0^k))$ залежить від результатів спостереження і є випадковим, якість вимірювання характеризується деякими середніми значеннями. В результаті усереднення $c(\theta, g_{\xi})$ із функцією правдоподібності $f(\xi_0^k | \theta)$ отримуємо так званий умовний ризик

$$r(\theta, g_{\xi}) = \int_{(\xi_0^k)} c(\theta, g_{\xi}(\xi_0^k)) f(\xi_0^k | \theta) d\xi_0^k.$$

Тут інтеграл є $(k+1)$ -кратним.

Природньо, що кращими є алгоритми $g_{\xi}(\xi_0^k)$, які приводять до менших значень $r(\theta, g_{\xi})$. Якщо деякий алгоритм $g_{\xi}(\xi_0^k)$ мінімізує умовний ризик при всіх значеннях θ , то таке рішення є оптимальним. Але в загальному випадку рішення, яке мінімізує умовний ризик, буде різним при різних θ . Тоді вибір оптимального рішення виконується на основі байесівського підходу – мінімізації середнього ризику (умовного ризику, усередненого з апіорною щільністю ймовірності параметру):

$$R(g_{\xi}) = \int_{(\theta)} r(\theta, g_{\xi}) f_{pr}(\theta) d\theta = \int_{(\theta)} \int_{(\xi_0^k)} c(\theta, f(\xi_0^k)) f(\xi_0^k | \theta) d\xi_0^k d\theta. \quad (4.2)$$

Відповідно до відомої теореми множення ймовірностей маємо

$$f(\theta, \xi_0^k) = f(\xi_0^k) f(\theta | \xi_0^k) = f_{pr}(\theta) f(\xi_0^k | \theta). \quad (4.3)$$

З урахуванням (4.3) вираз (4.2) можна записати інакше:

$$R(g_{\xi}) = \int_{(\xi_0^k)} R(g_{\xi} | \xi_0^k) f(\xi_0^k) d\xi_0^k, \quad (4.4)$$

де $R(g_{\xi} | \xi_0^k)$ – апостеріорне математичне сподівання функції втрат, яке називають апостеріорним ризиком,

$$R(g_{\xi} | \xi_0^k) = \int_{(\theta)} c(\theta, g_{\xi}) f(\theta | \xi_0^k) d\theta. \quad (4.5)$$

Рішення $\hat{\theta} = g_{\xi}(\xi_0^k)$ мінімізуючи середній ризик (4.2) і називається оптимальним байесівським рішенням відносно апіорного розподілу $f_{pr}(\theta)$, якість оптимальної оцінки визначається мінімальним значенням середнього (байесівського) ризику.

Інтеграл (4.4) мінімізується, якщо мінімізувати підінтегральний вираз при кожному значенні змінної інтегрування ξ_0^k . Це можна зробити в силу того, що оцінка $\hat{\theta} = g_{\xi}(\xi_0^k)$ визначається для кожного спостереження ξ_0^k . Таким чином, оцінка $\hat{\theta}$ повинна мінімізу-

вати $R(g_{\xi} | \xi_0^k) f(\xi_0^k)$. Оскільки $f(\xi_0^k) > 0$, цій співмножник можна опустити. В результаті отримуємо, що мінімум середнього ризику $R(g_{\xi})$ досягається при тому ж значенні g_{ξ} , що й мінімум апостеріорного ризику (4.5):

$$\int_{(\theta)} c(\theta, \hat{\theta}) f(\theta | \xi_0^k) d\theta = \min_{\hat{\theta}}. \quad (4.6)$$

Це твердження є справедливим і до дискретного параметру θ . При цьому інтеграл у (4.6) замінюється сумою.

Отже, байєсівські правила оцінки можна знаходити, застосовуючи апостеріорний ризик, який визначається обраною функцією втрат і апостеріорним розподілом параметру.

Для знаходження байєсівської оцінки потрібно задати функцію втрат. В багатьох практичних випадках можна припускати, що втрати залежать тільки від похибки оцінки:

$$\delta_{\theta} = \delta_{\theta}(\xi_0^k) = \hat{\theta} - \theta, \quad c(\theta, \hat{\theta}) = c(\delta_{\theta}).$$

Три типові функції втрат (квадратична, проста і модульна) мають відповідний вигляд:

$$c(\delta_{\theta}) = \delta_{\theta}^2, \quad c(\delta_{\theta}) = 1 - \Delta(\delta_{\theta}), \quad c(\delta_{\theta}) = |\delta_{\theta}|. \quad (4.7)$$

Підставляючи ці вирази у (4.6) і знаходячи мінімум апостеріорного ризику, приходимо до наступних результатів. Байєсівська оцінка у разі квадратичної функції втрат є оптимальною за критерієм мінімуму середнього квадрату похибки і представляє собою математичне сподівання апостеріорної щільності ймовірності:

$$\hat{\theta}_{\text{KB}} = \int_{(\theta)} \theta f(\theta | \xi_0^k) d\theta.$$

При цьому мінімальне значення апостеріорного ризику (4.5) є апостеріорною дисперсією:

$$R(\hat{\theta}_{\text{KB}} | \xi_0^k) = D_{ps} = \int_{(\theta)} (\theta - \hat{\theta}_{\text{KB}})^2 f(\theta | \xi_0^k) d\theta.$$

Байєсівська оцінка у разі простої функції втрат є оптимальною за критерієм максимуму апостеріорної щільності ймовірності, тобто збігається з положенням абсолютного максимуму апостеріорної щільності ймовірності. Якщо абсолютний максимум досягає у допустимій області зміни параметру θ та апостеріорна щільність ймовірності $f(\theta|\xi_0^k)$ є диференційованою за θ , то оцінку можна знаходити з вирішення рівняння $\partial f(\theta|\xi_0^k)/\partial \theta|_{\theta=\hat{\theta}}=0$.

Оскільки логарифм є монотонно зростаючою функцією аргументу, то зазвичай вирішують рівняння

$$\partial \ln f(\theta|\xi_0^k)/\partial \theta|_{\theta=\hat{\theta}}=0. \quad (4.8)$$

Апостеріорна щільність ймовірності може бути записана як

$$f_{ps}(\theta)=f(\theta|\xi_0^k)=k f_{pr}(\theta)f(\xi_0^k|\theta), \quad (4.9)$$

$$k=\left[\int f_{pr}(\theta)f(\xi_0^k|\theta)d\theta\right]^{-1}.$$

Зазначимо, що умовна щільність ймовірності $f(\xi_0^k|\theta)$ називається функцією правдоподібності. При фіксованому значенні ξ_0^k вона показує, наскільки одне можливе значення параметру θ "правдоподібніше" за інше.

Формула (4.9) фактично є математичним записом відомої теореми Байєса, яка дає правило формування апостеріорного знання із апріорних відомостей і результатів експерименту. Вона дозволяє розділити в рівнянні (4.8) інформацію спостереження та апріорні відомості:

$$\partial \ln f(\xi_0^k|\theta)/\partial \theta|_{\theta=\hat{\theta}} + \partial \ln f_{pr}(\theta)/\partial \theta|_{\theta=\hat{\theta}} = 0.$$

У багатьох випадках (наприклад, при широкому рівномірному апріорному розподілі параметра) виконується наближена рівність:

$$\partial \ln f_{pr}(\theta)/\partial \theta|_{\theta=\hat{\theta}}=0,$$

і оцінка за максимумом апостеріорної щільності ймовірності збігається з небайєсівською оцінкою за максимумом функції правдоподібності:

$$\partial \ln f(\xi_0^k | \theta) / \partial \theta \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = 0.$$

Оцінки постійних параметрів за методом максимальної правдоподібності мають добрі властивості – вони асимптотично (при $k \rightarrow \infty$) слушні, ефективні і нормально розподілені. Тому цей метод знайшов широке практичне застосування.

Визначення оцінки вектора θ параметрів СДР за методом максимальної правдоподібності можна записати як задачу математичного програмування:

$$\theta = \arg \max_{\theta} M \{ \ln f_{pr}(\theta, Y, X, t) \}, \quad (4.10)$$

де $M \{ \}$ – операція математичного сподівання.

Приклад 4.1. Стаціонарний випадковий процес $Y(t)$ з компонентами $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ описується СДР (4.1). Значення N_0 відоме, а $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$. За методом максимальної правдоподібності отримати формули для визначення оцінок $\hat{b}_1$ і $\hat{c}_1$ параметрів b_1 і c_1 СДР (4.1).

Для цього за формулою (4.10) потрібно знайти апіорну щільність імовірності $f_{pr}(\theta, Y, X)$. В нашому випадку вектор $\theta = \{b_1, c_1\}$, $Y(t) = \{y(t), \dot{y}(t)\}$, $X(t) = \{n(t)\}$, а щільність імовірності не залежить від часу, тому що випадковий процес $Y(t)$ є стаціонарним. Щільність імовірності $f_{pr}(\theta, Y, X)$ може бути знайдена з вирішення рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова, яке будується на основі СДР. В нашому випадку щільність імовірності визначається як

$$f_{pr}(\theta, Y, X) = C \cdot \exp \left(-\frac{b_1}{N_0} \dot{y}^2 - \frac{b_1}{N_0} c_1 y^2 \right), \quad (4.11)$$

де постійна C знаходиться із умови нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{pr}(\theta, Y, X) dy d\dot{y} = 1. \quad (4.12)$$

Після інтегрування щільності ймовірності (4.11) з умови формули (4.12) отримуємо

$$C = \frac{b_1 \sqrt{c_1}}{\pi N_0}. \quad (4.13)$$

Підставляючи щільності ймовірності (4.11) з урахуванням (4.13) в (4.9) і виконуючи операцію математичного сподівання, переходимо до наступної задачі параметричної ідентифікації:

$$\boldsymbol{\theta} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\ln \frac{b_1 \sqrt{c_1}}{\pi N_0} - \frac{b_1}{N_0} \alpha_{2_2} - \frac{b_1 c_1}{N_0} \alpha_{2_1} \right), \quad (4.14)$$

де α_{2_1} і α_{2_2} – відповідно початкові статистичні моменти 2-го порядку $y(t)$ і $\dot{y}(t)$.

В результаті вирішення задачі (4.14) шляхом нескладних перетворень отримуємо співвідношення

$$b_1 = \frac{N_0}{2\alpha_{2_2}}; \quad c_1 = \frac{\alpha_{2_2}}{\alpha_{2_1}}. \quad (4.15)$$

При вирішенні практичних задач дуже часто використовуються оцінки за мінімумом середнього квадрату похибки і за максимумом апостеріорної щільності ймовірності або максимумом функції правдоподібності. Ці оцінки в загальному випадку різні, але в асимптотиці (при $k \rightarrow \infty$ або $t \rightarrow \infty$) байєсівські оцінки і оцінки максимальної правдоподібності асимптотично еквівалентні. При цьому функцію правдоподібності часто можна апроксимувати нормальною щільністю ймовірності.

При оцінці векторного параметру $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l\}$ аналогом квадратичної функції втрат (4.7) є квадратична форма:

$$c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \Omega_{ij} (\hat{\theta}_i - \theta_i) (\hat{\theta}_j - \theta_j),$$

де $\boldsymbol{\Omega} - l \times l$ додатна напіввизначена матриця з елементами Ω_{ij} , які виконують роль вагових коефіцієнтів.

Мінімізація апостеріорного ризику

$$\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}} \mid \xi_0^k) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \Omega_{ij} \int_{(\boldsymbol{\theta})} (\hat{\theta}_i - \theta_i)(\hat{\theta}_j - \theta_j) f(\boldsymbol{\theta} \mid \xi_0^k) d\boldsymbol{\theta}$$

шляхом рішення системи рівнянь

$$\partial \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}} \mid \xi_0^k) / \partial \hat{\theta}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

призводить до системи

$$\sum_{j=1}^l \Omega_{ij} \int_{(\boldsymbol{\theta})} (\hat{\theta}_j - \theta_j) f(\boldsymbol{\theta} \mid \xi_0^k) d\boldsymbol{\theta} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

або у векторну форму

$$\boldsymbol{\Omega} \int_{(\boldsymbol{\theta})} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) f(\boldsymbol{\theta} \mid \xi_0^k) d\boldsymbol{\theta} = 0.$$

Рішенням цих рівнянь є вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{кв}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} = \int_{(\boldsymbol{\theta})} \boldsymbol{\theta} f(\boldsymbol{\theta} \mid \xi_0^k) d\boldsymbol{\theta}$ з компо-

нентами $\hat{\theta}_{i \text{ кв}} = \hat{\theta}_i = \int_{(\boldsymbol{\theta})} \theta_i f(\boldsymbol{\theta} \mid \xi_0^k) d\boldsymbol{\theta}.$

Таким чином, при квадратичній функції втрат байєсівська оцінка векторного параметру зводиться, як і при оцінці скалярного параметру, до знаходження математичного сподівання апостеріорного розподілу $f(\boldsymbol{\theta} \mid \xi_0^k).$

Зазначимо, що байєсівські методи оцінки можна застосовувати лише тоді, коли відома апіорна щільність ймовірності розподілу параметру. Ця щільність ймовірності може бути визначена, особливо для стохастичних систем, лише в поодиноких випадках. Якщо вона не відома, то байєсівські методи використовувати не можна і потрібно застосовувати небайєсівські методи оцінки, для яких знання апіорного розподілу не потрібне.

Небайєсівські методи оцінки

До небайєсівських методів, окрім згаданого вище методу максимальної правдоподібності, відносяться мінімаксний метод та різні варіанти методу моментів, які не потребують знання апіорної щільності ймовірності. За мінімаксним методом мінімізують умовний ризик для найнесприятливішого випадку, а саме знаходять мінімаксне рішення g_m із умови $\min_g \max_{\theta} r(\theta, g) = \max_{\theta} r(\theta, g_m)$.

Величина $\max_{\theta} r(\theta, g_m)$ називається мінімаксним ризиком.

Мінімаксний критерій дає оптимальне рішення лише для найгіршої (відносно θ) ситуації. Слід також зазначити, що для використання мінімаксного методу необхідно мати умовну щільність ймовірності $f(\xi_0^k | \theta)$. Крім того, непоширене застосування цього критерію пояснюється і тим, що знаходження мінімаксного рішення пов'язано з великими труднощами. Дещо легше становище результат Вальда, який визначає відповідність між мінімаксними та байєсівськими рішеннями. З'ясовується, що мінімаксне рішення g_m при деяких слабких обмеженнях є байєсівським відносно найменш сприятливого апіорного розподілу $\tilde{f}_{pr}(\theta)$, який максимізує байєсівський ризик. При цьому мінімаксний ризик дорівнює байєсівському ризику для $\tilde{f}_{pr}(\theta)$, а функція ризику $r(\theta, g_m)$ мінімаксного рішення g_m не залежить від значення параметру θ . Звідси випливає: якщо байєсівський ризик для деякого апіорного розподілу $f_{pr}(\theta)$ стає незалежним від θ , то цей розподіл найменш сприятливий, а байєсівське рішення g_m – мінімаксне. Цей факт допомагає під час пошуку найменш сприятливого апіорного розподілу та мінімаксних рішень.

Мінімаксний критерій часто використовується в робастних (стійких) методах оцінювання, які малочутливі до відхилень апіорних даних та інших відхилень від прийнятої моделі.

Для оцінки невідомих параметрів застосовують метод моментів (класичний метод моментів). При цьому можливі два випадки його застосування. У першому випадку якщо відома щільність ймовірності $f(\xi; \theta_1, \dots, \theta_l)$ та за результатами спостережень знайдені оцінки статистичних моментів $\hat{\alpha}_k(\theta_1, \dots, \theta_l)$, невідомі параме-

три $\theta_1, \dots, \theta_l$ визначаються з наступних l алгебраїчних рівнянь:

$$\int_{(\xi)} \xi^k f(\xi; \theta_1, \dots, \theta_l) d\xi = \hat{\alpha}_k(\theta_1, \dots, \theta_l), \quad k=1, \dots, l.$$

Цей варіант класичного методу моментів відноситься до небайесівських методів оцінки. Його обмежене застосування пояснюється труднощами при знаходженні щільності ймовірності $f(\xi; \theta_1, \dots, \theta_l)$.

У другому випадку, якщо відома щільність імовірності $f_{pr}(\theta, Y)$ та за результатами спостережень знайдені оцінки статистичних моментів $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(Y)$, невідомі параметри $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_l\}$ визначаються з l алгебраїчних рівнянь:

$$\int_{(Y)} Y f_{pr}(\theta, Y) dY = \hat{\alpha}(Y),$$

які після взяття інтегралу можна записати у наступному вигляді:

$$F(\hat{\alpha}, \theta) = b(\hat{\alpha}). \quad (4.16)$$

Цей варіант класичного методу моментів вже відноситься до байесівських методів оцінки. Його обмежене застосування пояснюється труднощами при знаходженні апіорної щільності ймовірності $f_{pr}(\theta, Y)$.

Систему моментних рівнянь (4.16) можна побудувати на основі іншого підходу, який не потребує знання щільності ймовірності $f_{pr}(\theta, Y)$. Суть цього підходу полягає у використанні для побудови моментних рівнянь формули Іто з наступним застосуванням операції математичного сподівання.

Припустимо, що задано СДР Іто

$$dY = f(Y, t)dt + G(Y, t)dW(t), \quad (4.17)$$

де $dW(t)$ – векторний процес Вінера.

Для довільної двічі диференційованої функції $h(Y)$ формула Іто визначається як

$$dh(\mathbf{Y}) = \left\{ \sum_{i=1}^n h'_{y_i}(\mathbf{Y}) f_i(\mathbf{Y}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h''_{y_i y_j}(\mathbf{Y}) [\mathbf{G}(\mathbf{Y}, t) \mathbf{G}^T(\mathbf{Y}, t)]_{ij} \right\} dt + \\ + \sum_{i,j=1}^n h'_{y_i}(\mathbf{Y}) g_{ij}(\mathbf{Y}, t) dW_j(t). \quad (4.18)$$

Застосовуючи до (4.18) операцію математичного сподівання, маємо

$$\frac{dM\{h(\mathbf{Y})\}}{dt} = M \left\{ \sum_{i=1}^n h'_{y_i}(\mathbf{Y}) f_i(\mathbf{Y}, t) \right\} + \\ + \frac{1}{2} M \left\{ \sum_{i,j=1}^n h''_{y_i y_j}(\mathbf{Y}) [\mathbf{G}(\mathbf{Y}, t) \mathbf{G}^T(\mathbf{Y}, t)]_{ij} \right\}. \quad (4.19)$$

Формула (4.19) може бути застосована для отримання системи рівнянь для статистичних моментів k -го порядку, якщо визначити функцію $h(\mathbf{Y})$ відповідно рівною $y_i^2(t)$, $y_i(t)y_j(t)$, $y_i^3(t)$, $y_i^2(t)y_j(t)$, $y_i(t)y_j^2(t)$, $y_i^4(t)$, ..., $y_j^k(t)$.

Застосовуючи операцію математичного сподівання до СДР (4.17) та формулу (4.19) до відповідних функцій $h(\mathbf{Y})$, систему рівнянь для статистичних моментів можна записати як

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{b}(\boldsymbol{\alpha}). \quad (4.20)$$

Якщо покласти в (4.20) $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = 0$, отримуємо (4.16).

Параметри СДР (4.1) визначаються з вирішування системи рівнянь для статистичних моментів (4.16). Якщо число невідомих параметрів СДР менше за кількість рівнянь для статистичних моментів, то із (4.16) потрібно вибрати l рівнянь.

Приклад 4.2. Припустимо, що заданий стаціонарний випадковий процес $\mathbf{Y}(t)$ з компонентами $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ описується СДР (4.1). Значення N_0 відоме, $b_2 = 0$, $c_3 = 0$. За методом моментів отримати формули для визначення оцінок $\hat{b}_1$ і $\hat{c}_1$ параметрів b_1 і c_1 СДР (4.1).

Врахувавши, що $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$, перетворимо рівняння (4.1) в систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = -b_1 y_2 - c_1 y_1 + n(t). \end{cases} \quad (4.21)$$

Застосовуючи операцію математичного сподівання до рівнянь (4.21) та формулу (4.19) до функцій $y_1^2(t)$, $y_2^2(t)$ і $y_1(t)y_2(t)$, систему рівнянь (4.20) можемо записати як

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{1_1} &= \alpha_{1_2} \\ \dot{\alpha}_{1_2} &= -b_1 \alpha_{1_2} - c_1 \alpha_{1_1}; \\ \dot{\alpha}_{2_1} &= 2\alpha_{1_1 1_2}; \\ \dot{\alpha}_{2_2} &= 2(-b_1 \alpha_{2_2} - c_1 \alpha_{1_1 1_2}) + N_0; \\ \dot{\alpha}_{1_1 1_2} &= \alpha_{2_2} - b_1 \alpha_{1_1 1_2} - c_1 \alpha_{1_1}, \end{aligned}$$

де α_{1_1} і α_{1_2} – відповідно початкові статистичні моменти 1-го порядку для y_1 і y_2 ; α_{2_1} і α_{2_2} – відповідно початкові статистичні моменти 2-го порядку для y_1 і y_2 ; $\alpha_{1_1 1_2}$ – змішаний початковий статистичний момент для y_1 і y_2 .

Якщо покласти в (4.20) $\dot{\alpha}(t) = 0$, отримуємо систему двох алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2\alpha_{2_2} b_1 &= N_0; \\ \alpha_{2_1} c_1 &= \alpha_{2_2}. \end{aligned}$$

Із рішення цієї системи дуже легко отримати формули (4.15) для визначення оцінок $\hat{b}_1$ і $\hat{c}_1$ параметрів b_1 і c_1 .

Метод моментів дає оптимальні оцінки лише в тому випадку, коли кількість моментних рівнянь n збігається з числом невідомих параметрів m . Якщо n більше за m , виникає проблема вибору моментних рівнянь для визначення оцінок параметрів. Дещо полегшує становище підхід, який було запропоновано у роботі [12]. В цій роботі у випадку лінійної системи (4.16) для вибору моментних рівнянь запропоновано використовувати критерій мінімуму числа обумовленості матриці відповідної системи рівнянь.

Приклад 4.3. Припустимо, що, як і в прикладі 4.2, заданий стаціонарний випадковий процес $Y(t)$ з компонентами $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ описується СДР (4.1). Значення N_0 відоме, $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$. За методом моментів необхідно отримати систему моментних рівнянь для визначення точкових оцінок наступних параметрів СДР (4.1):

1) b_1 , b_2 , b_2 і c_3 при відомому значенні N_0 ;

2) b_1 , b_2 , b_2 , c_3 і N_0 .

Для (4.1) в [10, 11] отримана система з чотирнадцяти лінійних рівнянь для статистичних моментів, шість з яких можуть використовуватися для визначення невідомих параметрів СДР (4.1):

$$\alpha_{2_2} b_1 + \alpha_{3_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_{1_2}} c_1 + \alpha_{3_{1_2}} c_3 - 0,5 N_0 = 0; \quad (4.22)$$

$$\alpha_{1_{1_2}} b_1 + \alpha_{1_{2_{|2|}}} b_2 + \alpha_{2_1} c_1 + \alpha_{4_1} c_3 = \alpha_{2_2}; \quad (4.23)$$

$$\alpha_{4_2} b_1 + \alpha_{5_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_{3_2}} c_1 + \alpha_{3_{3_2}} c_3 - 1,5 \alpha_{2_2} N_0 = 0; \quad (4.24)$$

$$\alpha_{3_{1_2}} b_1 + \alpha_{3_{2_{|2|}}} b_2 + \alpha_{4_1} c_1 + \alpha_{6_1} c_3 = 3 \alpha_{2_{2_2}}; \quad (4.25)$$

$$\alpha_{1_{3_2}} b_1 + \alpha_{1_{4_{|2|}}} b_2 + \alpha_{2_{2_2}} c_1 + \alpha_{4_{2_2}} c_3 - \alpha_{1_{1_2}} N_0 = \alpha_{4_2} / 3; \quad (4.26)$$

$$\alpha_{2_{2_2}} b_1 + \alpha_{2_{3_{|2|}}} b_2 + \alpha_{3_{1_2}} c_1 + \alpha_{5_{1_2}} c_3 - 0,5 \alpha_{2_1} N_0 = \alpha_{1_{3_2}}, \quad (4.27)$$

де $\alpha_{k_i} = \langle y_i^k \rangle$; $\alpha_{k_i l_j} = \langle y_i^k y_j^l \rangle$; $\alpha_{k_{|2|}} = \langle y_2^{k-1} | y_2 \rangle$; $\alpha_{k_i l_{|2|}} = \langle y_1^k y_2^l | y_2 \rangle$.

В [12] за критерієм мінімуму числа обумовленості матриці системи моментних рівнянь запропоновано використовувати для визначення точкових оцінок параметрів b_1 , b_2 , c_1 , і c_3 систему рівнянь (4.24)–(4.27), а для параметрів b_1 , b_2 , c_1 , c_3 і N_0 систему рівнянь (4.22)–(4.25), (4.27).

Радикальним підходом до вирішення проблеми вибору моментних рівнянь для визначення оцінок невідомих параметрів, у тому числі і СДР, є узагальнений метод моментів (УММ). Хоча, у порівнянні з методом моментів, він значно складніший у практичній реалізації для стохастичних систем.

Для пояснення суті цього методу перетворимо (4.16) в систему

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (4.28)$$

яку, як показано в [10, 11], можна застосовувати у якості моментних умов в УММ.

У загальному випадку, коли кількість рівнянь для статистичних моментів більша за кількість невідомих параметрів, неможливо підібрати параметри, які оцінюються, так, щоб усі рівняння (4.28) були тотожно рівними нулю. Але можливо вибрати параметри, які оцінюються, таким чином, щоб отримати значення лівих частин цих рівнянь (4.28) як можна ближче до нуля, тобто знайти $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.29)$$

Як показав Hansen, в результаті вирішування задачі (4.29) отримуються слушні, але неефективні оцінки вектора $\boldsymbol{\theta}$. Для наближення оцінок $\boldsymbol{\theta}$ до ефективних може бути застосований УММ, суть якого зводиться до рішення наступної задачі:

$$\boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})\}^T \boldsymbol{\Omega} \{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})\},$$

де $\boldsymbol{\Omega}$ – $m \times m$ додатна напіввизначена матриця.

Тепер вектор $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$ для оцінки параметрів СДУ методом УММ будується на основі відомої щільності ймовірності (або умовної щільності ймовірності) як функції $\boldsymbol{\theta}$ і $\mathbf{Y}$. На жаль, ці щільності ймовірності можна побудувати для обмеженого числа СДР.

У якості альтернативного підходу для побудови моментних умов в [10, 11] запропоновано використовувати формулу Іто. Беручи до уваги (4.19), введемо наступний $m \times 1$ вектор $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$, компоненти якого визначаються як

$$z_l(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n h'_{y_i}(\mathbf{Y}) f_i(\mathbf{Y}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h''_{y_i y_j}(\mathbf{Y}) [\mathbf{G}(\mathbf{Y}, t) \mathbf{G}^T(\mathbf{Y}, t)]_{ij}.$$

Тоді вектор $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})$ можна визначити як

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = M\{\mathbf{z}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})\}.$$

Матриця $\boldsymbol{\Omega}$ є матрицею ваги та визначається як $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}_D^{-1}$. У поодинокому випадку матриця $\mathbf{W}_D$ – це діагональна матриця, еле-

менти якої знаходяться як

$$w_{ii} = \text{Var}[z_i(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})].$$

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1. Обчислення у моменти часу t_i точкових оцінок початкових статистичних моментів випадкових процесів $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ та визначення для цих моментів часу точкових оцінок наступних невідомих параметрів СДР (4.1):

а) b_1 і c_1 при відомому значенні N_0 та $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$ за формулами (4.15);

б) b_1 , b_2 , c_1 і c_3 при відомому значенні N_0 із рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.24)–(4.27);

в) b_1 , b_2 , c_1 , c_3 і N_0 із рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.22)–(4.25), (4.27).

2. Побудова графіків залежностей знайдених оцінок невідомих параметрів СДР (4.1) від часу.

3. Обчислення у моменти часу t_i точкових оцінок дисперсій знайдених оцінок невідомих параметрів СДР (4.1) та побудова графіків залежностей оцінок цих дисперсій від часу.

Контрольні питання

1. Якими за своїм характером можуть бути невідомі параметри?
2. Що називають параметричною ідентифікацією?
3. Назвіть основну математичну модель, яка описує поведінку динамічного об'єкту при дії на нього випадкових впливів.
4. Що таке стохастичне диференціальне рівняння?
5. Що таке білий шум?
6. Що таке функція втрат?
7. Назвіть типові функції втрат.
8. Коли можна використовувати байєсівські методи оцінки?
9. Коли використовують небайєсівські методи оцінки?
10. Що таке функція правдоподібності?
11. Що показує функція правдоподібності?
12. Що таке мінімаксний ризик?
13. Для якої ситуації дає оптимальне рішення мінімаксний критерій?

14. Як виконуються оцінювання параметрів стохастичних диференційних рівнянь методом максимальної правдоподібності, методом моментів, узагальненим методом моментів?

15. Назвіть переваги та недоліки методу максимальної правдоподібності, методу моментів, узагальненого методу моментів для оцінки параметрів стохастичних диференційних рівнянь.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вероятностные методы в вычислительной технике: Учеб. пособие для вузов по спец. ЭВМ / *А.В. Крайников* и др.; Под ред. *А.Н. Лебедева* и *Е.А. Чернявского*. – М.: Высш. шк., 1986. – 312 с.

2. Вероятностные методы в инженерных задачах: Справочник / *А.Н. Лебедев* и др. – С.Пб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербургское отделение, 2000. – 333 с.

3. *Кендалл М., Стюарт А.* Теория распределений / Пер. с англ. под ред. *А.Н. Колмогорова*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 588 с.

4. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2 т.: Пер. с франц. – М.: Мир, 1983. – Т. 1. – 312 с.

5. *Плескунин В.И., Воронина Е.Д.* Теоретические основы организации и анализа выборочных данных в эксперименте / Под ред. *А.В. Башарина*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. – 232 с.

6. *Полард Дж.* Справочник по вычислительным методам статистики / Пер. с англ. *В.С. Занадворова*; под ред. и с предисл. *Е.М. Четыркина*. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 344 с.

7. *Приходько С.Б.* Параметрическая идентификация стохастической дифференциальной системы // 36. наук. праць УДМТУ. – Миколаїв: УДМТУ. – 1998. – № 9 (357). – С. 70–74.

8. *Приходько С.Б.* Параметрическая идентификация стохастической дифференциальной системы второго порядка с нелинейным восстановлением // 36. наук. праць УДМТУ. – Миколаїв: УДМТУ. – 2001. – № 2 (374). – С. 159–167.

9. *Приходько С.Б.* Параметрическая идентификация нелинейной стохастической дифференциальной системы второго порядка при случайном воздействии с ненулевым временем корреляции // 36. наук. праць УДМТУ. – Миколаїв: УДМТУ. – 2002. – № 2 (380). – С. 173–180.

10. *Приходько С.Б.* Параметрическая идентификация стохастических дифференциальных систем по статистическим моментам выходных сигналов // Наук. праці Донецького нац. техн. ун-ту. Сер. Обчислювальна техніка та автоматизація. – Донецьк, 2002. – Вип. 48. – С. 289–297.

11. *Приходько С.Б.* Выбор моментных условий для параметрической идентификации стохастических дифференциальных систем обобщенным методом моментов // Тр. II междунар. конф. "Идентификация систем и задачи

управления" SICPRO'03, М., 29–31 янв. 2003 г. – М.: И-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2003. – С. 1292–1301.

12. *Приходько С.Б.* Выбор моментных уравнений для параметрической идентификации стохастических дифференциальных систем методом моментов // Автоматика-2003: Матеріали 10-ї міжнар. конф. з авт. управління, м. Севастополь, 15–20 вересня 2003 р.: В 3 т. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2003. – Т. 1. – С. 77–79.

13. *Свешиников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 463 с.

14. Статистические методы для ЭВМ/ Под ред. *К. Энслейна, Э. Релстона, Г.С. Уилфа* / Пер. с англ. под ред. *М.Б. Малютова*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 464 с.

15. Цифровая обработка сигналов: Опыт использования персональных ЭВМ/ *А.А. Иванько, В.И. Гордиенко, В.М. Соловьев, Я.А. Иванько*. – К.: Техника, 1991. – 160 с.

Додаток А. Верхні 100α %-і точки розподілу χ^2

В таблиці наведені верхні 100α%-і точки розподілу χ^2 , тобто такі значення x , що $P(\chi_v^2 > x) = \alpha$.

v	α							
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,005
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,0 ⁴ 39	0,0 ³ 16	0,0 ³ 98	0,0 ² 39	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,0201	0,0506	0,103	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	55,76	59,34	63,69	66,77

Продовж. таблиці

v	α							
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,005
50	27,99	29,71	32,36	34,76	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	124,3	129,6	135,8	140,2

Нижні $100\alpha\%$ -і точки розподілу χ^2 дорівнюють верхнім $100(1-\alpha)\%$ -м точкам.

Звернемо увагу на те, що якщо випадкова величина X має розподіл χ^2 з v ступенями свободи і v достатньо велико (скажемо, більше 30), то розподіл величини $Z = \sqrt{2X} - \sqrt{2v-1}$ є наближено нормальним з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією. Це дає змогу застосовувати таблиці нормального розподілу і попередню формулу для знаходження значення x для достатньо великих v .

Додаток Б. Верхні $100\alpha\%$ -і точки t -розподілу Стюдента

В таблиці наведені верхні $100\alpha\%$ -і точки t -розподілу Стюдента, тобто такі значення x , що $P(t_v > x) = \alpha$.

v	α				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,08
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53
5	4,03	3,36	2,57	2,01	1,48
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44
7	3,50	3,00	2,36	1,90	1,42
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37

Продовж. таблиці

v	α				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36
12	3,06	2,68	2,18	1,78	1,36
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,35
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,34
15	2,95	2,60	2,13	1,75	1,34
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33
19	2,86	2,54	2,09	1,73	1,33
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1,32
21	2,83	2,52	2,08	1,72	1,32
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32
25	2,79	2,48	2,06	1,71	1,32
26	2,78	2,48	2,06	1,71	1,32
27	2,77	2,48	2,05	1,70	1,31
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31
29	2,76	2,47	2,04	1,70	1,31
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,31
40	2,70	2,46	2,02	1,68	1,30
50	2,68	2,42	2,01	1,67	1,30
60	2,66	2,40	2,00	1,67	1,30
80	2,64	2,39	1,99	1,66	1,29
100	2,63	2,37	1,98	1,66	1,29
200	2,60	2,36	1,97	1,65	1,29
500	2,59	2,34	1,96	1,65	1,28
∞	2,576	2,326	1,960	1,645	1,282

Для отримання нижніх $100\alpha\%$ -х точок t -розподілу Стюдента необхідно змінити знак у верхній $100\alpha\%$ -й точці.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
ВСТУП.....	4
Лабораторна робота № 1. Первинна обробка експериментальних даних.....	5
Лабораторна робота № 2. Вибір аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних.....	12
Лабораторна робота № 3. Оцінка кореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу.....	20
Лабораторна робота № 4. Оцінка параметрів моделі стаціонарного випадкового процесу.....	28
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	44
Додаток А. Верхні 100 α %-і точки розподілу χ^2	46
Додаток Б. Верхні 100 α %-і точки t -розподілу Стюдента.....	47

Навчальне видання

ПРИХОДЬКО Сергій Борисович

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З
ДИСЦИПЛІНИ
"Обробка експериментальних даних на ЕОМ"**

(українською мовою)

Редактор М.П. Фоміна
Комп'ютерна правка та верстка К.О. Докієнко
Коректор Н.О. Шайкіна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК
№ 1150 від 12.12.2002 р.

Підписано до друку 05.07.05. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Гарнітура "Таймс". Друк офсетний. Ум. друк. арк. 3,0. Обл.-вид. арк. 3,1.
Тираж 150 прим. Вид. № 17. Зам. № 122. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

ДЛЯ НОТАТОК



ВИДАВНИЦТВО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ



Шановні панове!

Запрошуємо Вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого забезпечать оперативне та якісне виконання замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника в повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригіналу-макета, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізку на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублюкатором фірми "Duplo" формату А3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати **підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки**, – ми до Ваших послуг.

© Національний університет кораблебудування
✉ Україна, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5,
видавництво НУК

☎ 8(0512) 47-83-86; 39-81-42, 39-73-39, fax 8(0512) 42-46-52;
E-mail: publishing@usmtu.edu.ua