МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Ж. Ю. БУРУНІНА, Н. О. ШАПОВАЛ

МЕХАНІКА

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів заочної форми навчання

Рекомендовано Методичною радою НУК

ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА

2022

УДК 53(076)
Б58

Автори: Ж. Ю. Буруніна, канд. техн. наук, доцент;
Н. О. Шаповал, канд. техн. наук, доцент

Рецензент С. С. Коваль, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фізики НУК

Рекомендовано Методичною радою НУК

Механіка : методичні вказівки до самостійної роботи
Б58 студентів заочної форми навчання / Ж. Ю. Буруніна, Н. О. Шаповал. – Миколаїв : НУК, 2022. – 84 с.

Метою методичних вказівок є надання допомоги студентам заочної форми навчання в засвоєнні теоретичних основ механіки та підготовці до виконання контрольних робіт і підсумкового контролю знань.

Призначено для студентів заочної форми навчання.

ВСТУП

Фізика – одна з навчальних дисциплін, які формують наукове мислення та світогляд студентів вищих технічних навчальних закладів. При вивченні фізики – ознайомленні з основними фізичними явищами, їх механізмами, закономірностями і практичним застосуванням закладаються основи для вивчення загальнотехнічних та спеціальних дисциплін.

Дані методичні вказівки створені, щоб надати студентам заочної та дистанційної форм навчання допомогу в засвоєнні теоретичного матеріалу дисципліни та опануванні навичками розв'язання фізичних задач. Розв'язання задач допомагає студентам зрозуміти зміст фізичних законів, закріплює в пам'яті формули, прививає навички практичного застосування теоретичних знань з дисципліни.

За своєю структурою методичні вказівки поділено на такі розділи: «Кінематика», «Динаміка матеріальної точки. Закони Ньютона», «Закони збереження імпульсу і момента імпульсу», «Динаміка обертального руху твердого тіла» та «Закон збереження механічної енергії». Такий поділ обумовлено логікою викладання матеріалів дисципліни та формування завдань для самостійного опрацювання студентами. Кожен розділ містить основні теоретичні відомості і доповнений прикладами розв'язання задач, які ілюструють представлений теоретичний матеріал і сприяють його кращому засвоєнню в процесі навчання.

У додатку наведено основні закони та формули, одиниці вимірювання фізичних величин, основні фізичні сталі та довідкові матеріали, які можуть знадобитися при розв'язанні задач.

РОЗДІЛ 1. КІНЕМАТИКА

1.1. Основні поняття кінематики

Предметом вивчення механіки є механічний рух, який полягає в зміні з часом взаємного положення тіл або їхніх частин у просторі. Всякий рух відбувається ***відносно*** довільного тіла, що називається ***тілом відліку***. З тілом відліку пов'язують систему координат, за допомогою якої задається положення тіла, що рухається. Сукупність тіла відліку, пов'язаної з ним системи координат, і годинника, що визначає час, називається ***системою відліку***. Відносно різних систем відліку рух одного і того ж тіла виглядає по-різному. У цьому полягає ***відносність руху***. При розв'язанні практичних задач систему відліку необхідно вибирати так, щоб рух розглянутого тіла був найбільш простим, тобто описувався найменшим числом рівнянь.

Для математичного опису руху різних тіл використовують математичні моделі. Ми будемо користуватися моделями ***матеріальної точки*** й ***абсолютно твердого тіла***.

Матеріальною точкою називається тіло, що має масу, і розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати. Положення матеріальної точки в загальному випадку задається трьома декартовими координатами – x, y та z. ***Абсолютно твердим*** називається тіло, деформаціями якого можна знехтувати при розгляді його руху. Для того щоб задати положення абсолютно твердого тіла в просторі, досить знати координати двох точок цього тіла.

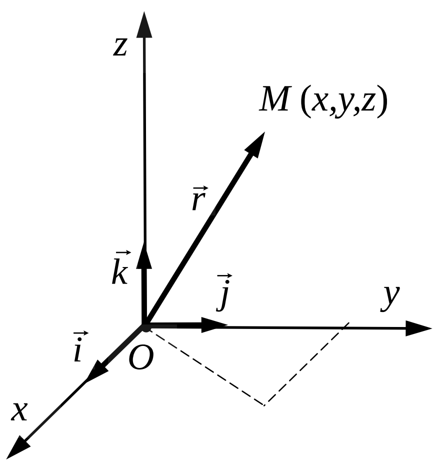


Рисунок 1.1

1.2. Радіус-вектор. Переміщення. Траєкторія. Пройдений шлях

Як уже зазначалося вище, положення матеріальної точки можна задати за допомогою 3-х декартових координат або за допомогою радіуса-вектора, що проводиться з початку координат до тієї точки простору, в якій знаходиться матеріальна точка (рис. 1.1), причому

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.1}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори у напрямку відповідних осей *x*, *y*, *z*. При русі точки ***M*** змінюються з часом як її координати, так і радіус-вектор. Тому для того щоб задати закон руху точки, необхідно вказати залежність зміни координат з часом:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1.2}$$

або залежність радіуса-вектора від часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.3}$$

Рівняння (1.2) і (1.3) називаються кінематичними рівняннями руху матеріальної точки.

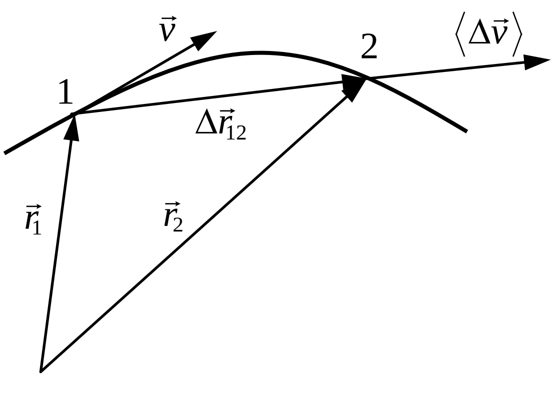


Рисунок 1.2

Введемо деякі визначення. ***Траєкторією*** називають уявну лінію, що описує в просторі матеріальна точка при її русі.

Відстань між точками 1 і 2 (рис. 1.2), відлічувана уздовж траєкторії, називається ***пройденим шляхом***. Пройдений шлях – величина скалярна. Вектор, проведений з початкової точки траєкторії в кінцеву, називається ***переміщенням:***

$$\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

З визначення вектора переміщення маємо, що:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_{12},$$

тобто положення матеріальної точки в даній системі відліку визначено, якщо відомі її початкове положення – вектор $\vec{r}_1$, і переміщення – $\Delta\vec{r}_{12}$.

1.3. Вектор швидкості

Нехай матеріальна точка перемістилася з положення 1 у положення 2 (рис. 1.2) за час Δt. Радіус-вектор набув приросту $\Delta\vec{r}_{12}$. Відношення переміщення до часу, за яке воно відбулося, називається ***вектором середньої швидкості*** за час Δt:

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Миттєвою швидкістю, або просто швидкістю в даний момент часу, називається границя відношення

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1.5}$$

або похідна від радіуса-вектора за часом. З рисунка 1.2 видно, що напрямок вектора швидкості збігається з напрямком дотичної до траєкторії руху в даній точці.

Вектор швидкості можна розкласти на три складові:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k},$$

причому проєкції й величина вектора швидкості обчислюються за формулами

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}, \quad \upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Рух називається ***рівномірним***, якщо за будь-які однакові проміжки часу точка проходить однаковий шлях, або чисельне значення швидкості не змінюється з часом. Якщо швидкість із часом змінюється, то такий рух називається ***нерівномірним***.

1.4. Прискорення

Зміна модуля й напрямку вектора швидкості описується фізичною величиною, яка називається прискоренням:

$$\bar{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.6}$$

Середнє прискорення за час Δt визначається аналогічно вектору середньої швидкості:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}. \tag{1.7}$$

Проєкції й величина вектора прискорення обчислюються за формулами:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)^2}.$$

Представимо вектор швидкості у вигляді $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau}$, де υ – модуль (величина) вектора швидкості, а $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, спрямований за дотичною до траєкторії. У загальному випадку величина й напрямок вектора швидкості змінюються із часом, тоді відповідно до формули (1.6) одержуємо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{1.8}$$

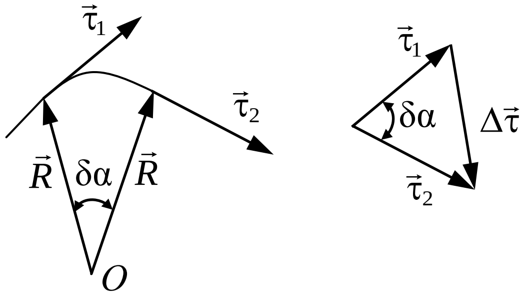


Рисунок 1.3

Перший доданок у виразі (1.8) характеризує зміну швидкості за величиною, і за напрямком збігається з напрямком вектора швидкості. Цей доданок називається ***тангенціальним прискоренням***. Розглянемо другий доданок у виразі (1.8). Спочатку визначимося з напрямком. У міру того, як кут $\delta\alpha$ буде прямувати до нуля (рис. 1.3), вектор $\Delta\vec{\tau}$ буде зменшуватися: $\Delta\vec{\tau} \to d\vec{\tau}$ і $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$. Таким чином, вектор, що відповідає другому доданку у формулі (1.8), перпендикулярний до дотичної до траєкторії в даній точці. Тому другий доданок у формулі (1.8) називають ***нормальним прискоренням***, яке характеризує зміну вектора швидкості за напрямком.

Таким чином, одержуємо, що

$$\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n . \tag{1.9}$$

Тепер визначимо величину нормального прискорення. Можна записати, що

$$\vec{a}_n = \upsilon \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \upsilon \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \upsilon \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds} \upsilon \right) = \upsilon^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} . \tag{1.10}$$

Покажемо, що при прямуванні точки 2 до точки 1 (див. рис. 1.3) відрізок траєкторії між цими точками буде прямувати до дуги окружності деякого радіуса R із центром у точці O. Точку O називають центром кривизни траєкторії, а радіус R називають радіусом кривизни траєкторії в даній точці. З рисунка 1.3 видно, що

$$\delta\alpha = \frac{ds}{R} = \frac{d\tau}{\tau}, \quad \text{або} \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{\tau}{R} = \frac{1}{R} . \tag{1.11}$$

Тепер підставимо вираз для $\dfrac{d\tau}{ds}$ з (1.11) в (1.10) і остаточно одержимо, що $\vec{a}_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} \vec{n}$. Тут $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до траєкторії в даній точці. Остаточно повне прискорення запишеться у вигляді

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt} \vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R} \vec{n} . \tag{1.12}$$

Модуль повного прискорення визначається таким способом:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} . \tag{1.13}$$

Можна показати, що усякий складний рух можна звести до двох простих рухів – поступального й обертального. Для спрощення, як правило, будемо розглядати ці рухи окремо. Отже, для прямолінійного руху $\vec{a}_n = 0$. Якщо при цьому прискорення не змінюється з часом, то такий рух називається ***рівнозмінним***.

Приклад. ***Прямолінійний рух з постійним прискоренням***

Оскільки у цьому випадку напрямок вектора $\vec{a}$ не змінюється, то далі знак вектора писати не будемо, а будемо розглядати прискорення як алгебраїчну величину: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, звідки $\int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} d\upsilon = \int\limits_0^t a dt$, або $\upsilon_2 - \upsilon_1 = at$. Тут $\upsilon_2 = \upsilon$ – кінцеве значення швидкості, а $\upsilon_1 = \upsilon_0$ – початкова швидкість. З урахуванням зроблених зауважень остаточно одержуємо формулу:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at. \tag{1.14}$$

Проінтегрувавши (1.14) від нуля до деякого t, знайдемо, що довжина шляху, пройденого за час t, визначається за відомою формулою:

$$s = \int\limits_0^t \upsilon(t)dt = \int\limits_0^t (\upsilon_0 + at)dt = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{1.15}$$

1.5. Елементи кінематики обертального руху

Рух твердого тіла, закріпленого в одній точці, називається обертанням навколо нерухомої точки – центра обертання. Рух твердого тіла, при якому всі точки описують окружності, центри яких лежать на одній прямій, називається обертанням навколо нерухомої осі. Координатою в цьому випадку є кут повороту φ. З рисунка 1.4 видно, що

$$|d\vec{r}| = R \cdot d\phi = |\vec{r}| \sin\theta d\phi. \tag{1.16}$$

Введемо вектор $d\vec{\phi} = d\phi \cdot \vec{n}$, де $d\varphi$ – кут, на який повернулося тіло, а $\vec{n}$ – одиничний вектор, спрямований за віссю обертання, і напрямок якого пов'язаний з напрямком обертання правилом правого гвинта. Тоді в скороченому вигляді, замість (1.16), можна записати:

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r}\,\right]. \tag{1.17}$$

Тут квадратними дужками позначений векторний добуток векторів $d\vec{\varphi}$ і $\vec{r}$. Напрямок векторного добутку визначається за правилом правого гвинта: вектор, що стоїть у добутку першим, повертаємо в напрямку другого вектора так, щоб цей поворот був за годинниковою стрілкою та на менший кут. Тоді поступальне переміщення уявного правого гвинта вкаже напрямок векторного добутку. Модуль векторного добутку дорівнює добутку модулів співмножників, помноженому на синус кута між ними.

Перша похідна за часом від кута повороту називається ***кутовою швидкістю:***

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}, \tag{1.18}$$

а перша похідна від кутової швидкості називається ***кутовим прискоренням:***

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.19}$$

У проєкціях на вісь обертання z:

$$\omega_z = \frac{d\phi}{dt}, \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.20}$$

Вектори, подібні $d\vec{\phi}$, $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$, напрямок яких зв'язується з напрямком обертання, називаються аксіальними, або псевдовекторами. Вони не мають визначеної точки прикладення, на відміну від звичайних векторів.

Для обертання відносно нерухомої осі з постійним прискоренням маємо

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt. \tag{1.21}$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{1.22}$$

Далі, інтегруючи (1.22) за часом, одержимо залежність кута повороту від часу:

$$\phi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (1.23)$$

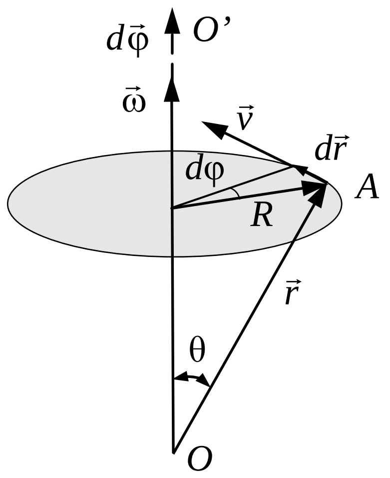


Рисунок 1.4

Відзначимо повну аналогію між формулами для координат і швидкості для поступального й обертального рухів: формули (1.14) та (1.22) і відповідно (1.15) та (1.23).

Знайдемо швидкість $\vec{\upsilon}$ довільної точки A (рис. 1.4). Для цього поділимо вираз (1.17) на dt:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\phi}}{dt}, \vec{r}\right] = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad \vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \qquad (1.24)$$

Модуль вектора швидкості

$$\upsilon = \omega r \sin\theta = \omega R, \qquad (1.25)$$

де R – радіус окружності, за якою рухається точка A. Знайдемо прискорення точки A:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{\upsilon}] = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\right]. \qquad (1.26)$$

У випадку, коли вісь обертання нерухома, вектор $\vec{\varepsilon}$ паралельний вектору $\vec{\omega}$, і тому вектор $[\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$ спрямований убік швидкості $\vec{\upsilon}$, тобто по дотичній до траєкторії руху в точці A, та являє собою тангенціальне прискорення:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] \qquad (1.27)$$

Другий доданок в (1.26) являє собою нормальне прискорення:

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\right]. \qquad (1.28)$$

Модулі тангенціального й нормального прискорень рівні, відповідно

$$a_\tau = \varepsilon R,$$

$$a_n = \omega^2 R, \qquad (1.29)$$

а модуль повного прискорення визначається так:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{1.30}$$

Для рівномірного обертання (з постійною кутовою швидкістю) можна ввести період обертання T – час здійснення одного повного оберту. Для такого обертання кутова швидкість буде дорівнювати $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а число обертів за одиницю часу – частота $n = \frac{1}{T}$.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. *З балкона, який знаходиться на висоті 25 м над поверхнею землі, кинуто вгору м'яч зі швидкістю 20 м/с. Написати формулу залежності координати x від часу, вибравши за початок відліку Землю. Через який час м'яч упаде на землю?*

Дано:	Розв'язування
$\upsilon_0 = 20$ м/с g = 9,8 м/с^2 h = 25 м	Система відліку (СВ) «Земля». Направимо вісь OX вздовж початкової швидкості тіла, тобто протилежно його прискоренню. Тоді висота балкона h буде початковою координатою тіла x_0. Рівняння руху тіла буде таким (див. рис. 1.5).
$x = x(t)$ – ? $t_{\text{рух}}$ – ?	

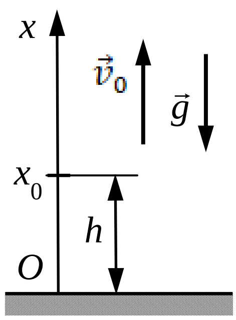


Рисунок 1.5

Під час приземлення $x = 0$, $t = t_{\text{рух}}$;

$$0 = h + \upsilon_0 t_{рух} - \frac{g t_{рух}^2}{2}, \text{ або } \frac{g t_{рух}^2}{2} - \upsilon_0 t_{рух} - h = 0\,.$$

Підставивши значення, розв'яжемо квадратне рівняння:

$$5t_{рух}^2 - 20t_{рух} - 25 = 0\,,\ t_{рух}^2 - 4t_{рух} - 5 = 0\,.$$

Корені рівняння можна знайти за теоремою Вієтта: $t_1 = 5$, $t_2 = -1$ (не задовольняє умові задачі).

Відповідь: 5 секунд.

Задача 2. *Плавець, стрибнувши з п'ятиметрової вишки, занурився у воду на глибину 2 м. Скільки часу і з яким прискоренням він рухався у воді?*

Дано:	Розв'язування
$\upsilon_{01} = 0$ м/с $h_1 = 5$ м $a_1 = g = 9{,}8$ м/с^2 $\upsilon_2 = 0$ м/с $h_2 = 2$ м	СВ «Земля». При вільному падінні на першому відрізку шляху $\upsilon_{01} = 0$, отже, $\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}$ (оскільки $\upsilon_{1x} = \upsilon_1$, $g_x = g$). Швидкість входження плавця у воду $\upsilon_{02} = \upsilon_1$ дорівнює
$t_{рух}$ – ? a – ?	

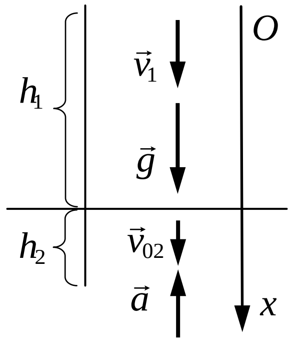


Рисунок 1.6.

швидкості вільного падіння. На другому відрізку (у воді) рух уповільнюється, отже, $a_x = -a$, і кінцева швидкість обертається в нуль ($\upsilon_2 = 0$) (рис. 1.6).

Тоді $h_2 = \dfrac{\upsilon_2^2 - \upsilon_{02}^2}{-2a} = \dfrac{-\upsilon_{02}^2}{-2a} = \dfrac{\upsilon_{02}^2}{2a}$.

Звідси $a = \dfrac{\upsilon_{02}^2}{2h_2}$.

Підставимо $\upsilon_{02} = \upsilon_1 = \sqrt{2gh_2}$:

$$a = \frac{2gh_1}{2h_2}, \quad a = \frac{gh_1}{h_2}.$$

Час руху на другому відрізку:

$$t_2 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_{02}}{-a} = \frac{-\upsilon_{02}}{-a} = \frac{\upsilon_{02}}{a} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{a},$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2gh_1}}{gh_1} h_2 = h_2\sqrt{\frac{2}{gh_1}}, \; t_2 = h_2\sqrt{\frac{2}{gh_1}}.$$

Обчислення

$$a = \frac{9{,}8 \cdot 5}{2} = 25 \text{ м/с}^2; \quad [a] = \frac{\frac{м}{с^2} \cdot м}{м} = \frac{м}{с^2}.$$

Відповідь: 25 м/с^2.

Задача 3. *Снаряд вилетів з гармати під кутом α до горизонту з початковою швидкістю $\vec{\upsilon}_0$. Знайдіть: 1) час польоту снаряда; 2) максимальну висоту підйому; 3) дальність польоту снаряда.*

Дано:	Розв'язування
$\vec{\upsilon}_0$	Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, описується
α	формулами
$t_{пол}$ – ?	$x = \upsilon_{0x} t$,
h_{max} – ?	$y = \upsilon_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2}$.
l – ?	

Так як $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$ та $g_y = -g$, тоді

$$x = \upsilon_0 t \cos\alpha,$$

$$y = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

1) В кінці польоту снаряда координата $y = 0$. Час польоту t знайдемо за формулою для y: $0 = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$.

Розв'язуючи це квадратне рівняння відносно t, знайдемо

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}.$$

Значення t_1 відповідає початку польоту (в цей момент y також дорівнює нулю), а t_2 – шуканий час польоту:

$$t_{пол} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}.$$

2) Час руху до вищої точки траєкторії вдвічі менше всього часу руху, тобто $t_{під} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$. Максимальна висота підйому h_{max} – це значення координати *y*, яке вийде, якщо в вираз для координати *y* замість *t* підставити знайдене значення підйому:

$$h_{max} = \upsilon_0 \sin\alpha \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

3) Дальність польоту *l* – це максимальне значення координати *x*. Його ми отримаємо, якщо в формулу для координати *x* підставимо замість *t* час польоту $t_{пол} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$:

$$l = x_{max} = \upsilon_0 t_{пол} \cos\alpha,$$

або $l = \upsilon_0 \cos\alpha \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$.

При якому значенні кута α дальність польоту максимальна?

Відомо, що $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$.

Отже,

$$l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Звідси видно, що дальність *l* буде найбільшою, якщо $\sin 2\alpha = 1$. Це означає, що $2\alpha = 90^o$ і $\alpha = 45^o$.

Відповідь: $t_{під} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$, $h_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, $l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Задача 4. *Перше тіло вільно падає з висоти* h_1 *= 80 м. Одночасно з ним друге тіло кинуто вертикально вгору з висоти 20 м над землею. Якою має бути початкова швидкість другого тіла, щоб обидва тіла впали одночасно?*

Дано:	Розв'язування
$h_1 = 80$ м $h_2 = 20$ м $g = 9{,}8$ м/с^2 $\upsilon_{01} = 0$ м/с	Перше тіло вільно падало ($\upsilon_{01} = 0$) з висоти h_1, отже: $$h_1 = \frac{gt_{пад}^2}{2} \Rightarrow t_{пад} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$ Для визначення початкової швидкості другого тіла зручно вибрати систему відліку, зв'язану з першим тілом.
υ_{02} – ?	

У цій СВ перше тіло нерухоме, а друге наближається з постійною швидкістю $\upsilon = \upsilon_{0x}$, оскільки $\upsilon_{01} = 0$ і прискорення обох тіл однакове (g). За цей час ($t_{пад}$) переміщення другого тіла відносно першого складатиме

$$S = h_1 - h_2.$$

Тоді

$$S = \upsilon t_{пад} = \upsilon_{02} t_{пад}.$$

Звідси

$$\upsilon_{02} = \frac{S}{t_{пад}} = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{\frac{2h_1}{g}}} = (h_1 - h_2)\sqrt{\frac{g}{2h_1}},\ \upsilon_{02} = (h_1 - h_2)\sqrt{\frac{g}{2h_1}}.$$

Обчислення

$$\upsilon_{02} = (80 - 20)\cdot\sqrt{\frac{9{,}8}{2\cdot 80}} = \frac{60}{4} = 15.$$

$$[\upsilon_{02}] = м\cdot\sqrt{\frac{м}{с^2\cdot м}} = м\cdot\sqrt{\frac{1}{с^2}} = \frac{м}{с}.$$

Відповідь: 15 м/с.

РОЗДІЛ 2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. ЗАКОНИ НЬЮТОНА

2.1. Інерціальні системи відліку. Перший закон Ньютона

Динаміка вивчає зв'язок між взаємодіями тіл і виникаючими в результаті цього змінами в русі взаємодіючих тіл. В основі динаміки лежать три закони Ньютона. Вони є емпіричними, дослідними законами. У кінематиці, де не розглядаються причини, що викликають механічний рух, всі системи відліку рівноправні. У динаміці ж виявляється істотне розходження між різними системами відліку. Виявляється, що динамічні закони руху можуть мати різний вигляд у різних системах відліку. Природно тому вибирати такі системи, в яких ці закони мають найбільш простий вигляд. У зв'язку з цим розглянемо, чим може бути викликане прискорення матеріальної точки в довільній системі відліку.

Досвід показує, що, по-перше, причиною прискорення може бути дія на матеріальну точку інших тіл, і, по-друге, властивості самої системи відліку. Справді, щодо різних систем відліку (що рухаються, наприклад, із прискоренням) прискорення матеріальної точки може бути різним. Тому природно вибирати такі системи відліку, в яких прискорення матеріальної точки цілком обумовлено взаємодією з іншими тілами. У таких системах відліку ***матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану. Такі системи називаються інерціальними***. Це є зміст ***1-го закону Ньютона***. У ньому міститься 2 твердження:

1. Для рівномірного прямолінійного руху тіла не потрібно будь-яких зовнішніх впливів. У цьому змісті стан спокою і рівномірний прямолінійний рух є абсолютно рівноправними.

2. Перший закон Ньютона дає дослідний критерій, що дозволяє відповісти на питання – чи є система відліку інерціальною? А саме тому – це такі системи, відносно яких матеріальна точка не залежить від зовнішніх впливів, або знаходиться у стані спокою, або рухається рівномірно й прямолінійно.

Часто перший закон Ньютона називають законом інерції.

Інерція – це явище, яке полягає в тому, що тіло рухається рівномірно прямолінійно, якщо на нього не діють інші тіла, або дія з боку інших тіл скомпенсована.

Ми будемо розглядати рух тіл в інерціальних системах відліку. У багатьох практичних завданнях інерціальною можна вважати систему відліку, пов’язану із Землею.

2.2. Маса тіла. Сила. Другий закон Ньютона

Отже, стан спокою і рівномірний прямолінійний рух рівноправні. Змінити ці стани руху тіл, тобто надати їм прискорення, можна за допомогою сил.

Сила – це фізична величина, яка визначає зміну стану руху тіл і яка виникає в результаті взаємодії тіл.

Коли ми говоримо, що на тіло діє сила, то розуміємо, що на це тіло діє якесь інше тіло, і в результаті цього впливу змінюється стан розглянутого тіла, тобто змінюється швидкість руху або з’являється деформація. Сила – величина векторна, тобто вона повністю визначена, якщо зазначено її числове значення, напрям і точку прикладання сили. Пряму, проведену через точку прикладання сили в напрямку її дії, називають лінією дії сили. Результат дії сили на абсолютно тверде тіло не зміниться при переносі точки прикладання сили вздовж лінії дії сили.

Основне завдання механіки полягає у встановленні законів руху тіл під дією прикладених до них сил.

Досвід показує, що всяке тіло "чинить опір" при будь-яких спробах змінити його швидкість, як по величині, так і за напрямком. Ця властивість називається ***інертністю тіла***. На практиці інертність проявляється в тому, що швидкість тіла не можна змінити миттєво. Якщо рівні сили діють на різні тіла протягом однакових проміжків часу, то зміна швидкостей цих тіл буде різною. Про тіло, у якого зміна швидкості буде найменшою, говорять, що воно має більшу інертність. ***Мірою інертності тіла служить величина, що називається масою цього тіла***. Маса – величина адитивна, тобто маса тіла дорівнює сумі мас всіх частин тіла. У системі СІ маса тіла вимірюється в кілограмах [кг].

Співвідношення, що встановлює зв’язок між мірою інертності тіла, тобто його масою, і прискоренням, якого набуває тіло під дією прикладеної до тіла сили, було встановлено Ньютоном на підставі великої кількості дослідних даних, і називається ***2-им законом Ньютона. Прискорення, що надане діючою на матеріальну точку (тіло) силою, прямо пропорційне цій силі, збігається з нею за напрямком й обернено пропорційне масі цього тіла***:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (2.1)$$

Одиниця сили називається Ньютоном (*Н*). З виразу (2.1) випливає, що розмірність $H = \frac{кг \cdot м}{с^2}$. Якщо на матеріальну точку одночасно діють кілька сил, то кожна з них надає матеріальній точці таке ж прискорення, якби інших сил не було, тобто

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{N} \vec{a}_i. \qquad (2.2)$$

Це положення називають принципом незалежності дії сил, або принципом суперпозиції рухів. Якщо на матеріальну точку одночасно діє кілька сил, то в другому законі Ньютона під силою ми розуміємо рівнодіючу всіх сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \,. \qquad (2.3)$$

2.3. Третій закон Ньютона

Всяка дія тіл, одна на іншу, носить характер взаємодії. Як показує дослід, при взаємодії змінюються швидкості обох тіл. Прискорення, які одержують тіла при взаємодії, мають протилежний напрямок (рис. 2.1), а величини прискорень задовольняють співвідношенню

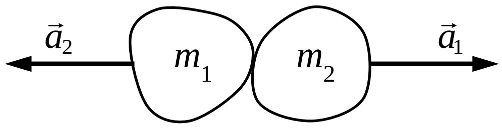


Рисунок 2.1

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

де m_1 та m_2 – маси взаємодіючих тіл.

Ця взаємодія визначається ***3-ім законом Ньютона. Якщо тіло 1 діє на тіло 2 з деякою силою F₂₁, то й тіло 2, у свою чергу, буде діяти на тіло 1 з такою ж по величині й протилежно направленою силою F₁₂*:**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (2.4)$$

2.4. Види взаємодій і сили в механіці

Другий закон Ньютона посідає в механіці дуже важливе місце. Це пов’язано з тим, що рівняння

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

являє собою диференціальне рівняння щодо функції $\vec{r}(t)$. Розв’язання цього рівняння дає розв’язання основного завдання механіки – визначення положення тіла в будь-який момент часу. Але це можна зробити тільки в тому випадку, якщо відомі всі сили, що діють на тіло. Тому вивчення різних взаємодій фізичних об’єктів є одним із головних завдань фізики.

У сучасній науці виділяють чотири типи взаємодій. Дві з них, які розглядаються в механіці, називаються ***гравітаційні*** й ***електромагнітні***. Їм відповідають сили, які не можна звести до більш простих, і тому вони називаються фундаментальними. Сила гравітаційної взаємодії (фундаментальні сили) описуються ***законом всесвітнього тяжіння:***

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (2.5)$$

Тут G – стала всесвітнього тяжіння, m_1 й m_2 – маси взаємодіючих тіл, а r – відстань між ними. У законі всесвітнього тяжіння маса виступає мірою тяжіння тіл і називається гравітаційною масою. Таким чином, ми вже знаємо два визначення маси: з одного боку – це міра інерції, а з іншого боку, маса – міра тяжіння тіл.

Друга, фундаментальна сила, що описує взаємодію між двома точковими зарядами, підкорюється ***закону Кулона:***

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (2.6)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, $\mathrm{k} = 9\cdot 10^9\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$;

q_1, q_2 – величини зарядів першого і другого тіла (точкових зарядів);

r – відстань між зарядженими тілами.

2.4.1. Гравітаційні взаємодії

Про закон Кулона будемо говорити пізніше. Зараз же скажемо декілька слів про закон всесвітнього тяжіння. З рівняння (2.5) видно, що величина сили пропорційна масам взаємодіючих тіл. Якщо ми візьмемо два тіла з масами, наприклад, у 100 кг, і, нехай, відстань між цими тілами 1 м, то вони будуть взаємодіяти із силою, що дорівнює $6{,}67\cdot 10^{-7}$ Н (числове значення гравітаційної сталої $G = 6,67 \cdot 10^{-7} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$). Така мала сила не здатна навіть зрушити з місця ці два тіла. Однак якщо взаємодіючі тіла мають гігантську масу – наприклад, зірка й планета, то величина сили буде дуже великою. Саме сила всесвітнього тяжіння є тим архітектором, який управляє структурою Всесвіту. Саме сила всесвітнього тяжіння визначає взаємне розташування галактик, зірок і планетних систем.

Ми всі живемо на тілі з величезною масою – на планеті Земля. І людина, і будь-який інший предмет масою m притягуються до Землі внаслідок закону всесвітнього тяжіння. Цю силу притягання до Землі ми називаємо силою ваги й розраховуємо за формулою $F = mg$, що є нічим іншим, як наслідком закону Всесвітнього тяжіння. Тобто, ми можемо записати, що

$$mg = G\frac{m_1 m_2}{R^2}. \tag{2.7}$$

Тут g – прискорення вільного падіння, M – маса Землі, $R = R_з + h$ – відстань від центра Землі до тіла маси m (рис. 2.2). З рівняння (2.7) маємо, що

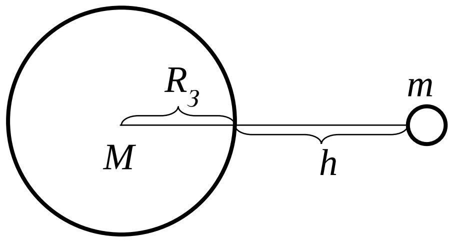


Рисунок 2.2

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{M}{(R_з + h)^2}. \tag{2.8}$$

Тобто, у загальному випадку прискорення вільного падіння залежить від висоти тіла над поверхнею Землі. Оскільки в більшості практично важливих випадків виконується умова $h << R_з$ ($R_з$ = 6400 км), то у формулі (2.8) можна знехтувати h, і формула для g буде мати вигляд

$$g = G\frac{M}{R_з^2}. \tag{2.9}$$

Всі величини у формулі (2.9) – це константи. Отже, прискорення вільного падіння не залежить від маси падаючого тіла, тобто для всіх тіл однакове. Після нескладних обчислень одержимо g = 9,81 м/с^2. Сила ваги направлена до центру Землі. Саме цей напрямок ми приймаємо як вертикальний і визначаємо за допомогою підвісу.

2.4.2. Електромагнітні взаємодії

Електромагнітні взаємодії в механічних явищах проявляються як сили пружності, які з’являються при деформації тіл. *Деформація* – це зміна розмірів або форми тіла під впливом інших тіл. Як відомо з курсу шкільної фізики, всі тіла містять електричні заряди. При деформації тіл змінюються відстані між зарядами, і це, у свою чергу, приводить до порушення рівноваги між силами притягання й відштовхування між зарядами. При розтяганні тіла переважають сили притягання між зарядами й тіло "опирається" розтяганню, аналогічно, при стисканні переважають сили відштовхування.

У найбільш простих випадках, наприклад деформації пружини, силу пружності можна розрахувати за допомогою закону Гука:

$$F_x = -kx. \tag{2.10}$$

Тут x – зсув кінця пружини із положення рівноваги. Знак "–" показує, що напрямок сили протилежний напрямку зсуву. Коефіцієнт k називається жорсткістю й визначається експериментально.

Розглянемо деякі прояви сил пружності.

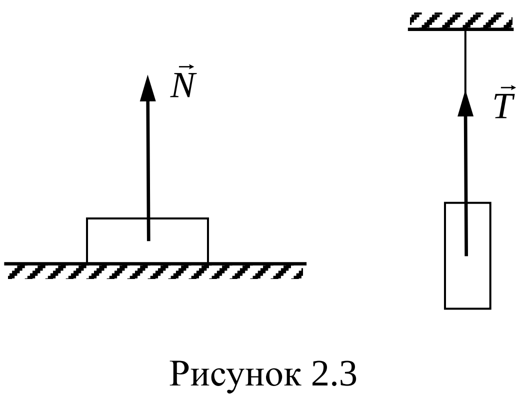


Рисунок 2.3

2.4.3. Сили реакції опори й натягу підвісу

Розглянемо тіло на опорі або підвісі (рис. 2.3). Як ми вже знаємо, на наше тіло діє сила ваги $F = mg$, під дією якої тіло прагне рухатися до центра Землі. При цьому "прагненні" рухатися тіло деформує опору або підвіс. У результаті деформації з’являється сила пружності, що діє на тіло. У випадку тіла на опорі цю силу називають силою реакції опори, а у випадку тіла на підвісі – силою натягу підвісу.

2.4.4. Вага тіла

Вагою тіла називають силу, з якою тіло діє на опору або підвіс (рис. 2.4). При взаємодії тіла з опорою або підвісом деформується й саме тіло, що приводить до появи сили пружності, яка діє на опору або підвіс. Сили ваги й реакції опори зв’язані між собою відповідно до третього закону Ньютона: $\vec{P}=\vec{N}$. Аналогічна рівність $\vec{P}=\vec{T}$ має місце й для тіла на підвісі. Вагу тіла дуже часто плутають із силою ваги через те, що у випадку нерухомого тіла ці сили виявляються рівними по величині. Але це дві різні сили: сила ваги є гравітаційною силою (взаємодіють тіло й Земля), у той час як вага тіла – це сила пружності (взаємодіють тіло й опора). Сила ваги діє на тіло, а вага – на опору (або підвіс), на якій (-ому) перебуває це тіло. Крім того, вага тіла виявляється залежною від умов, у яких перебуває тіло, зокрема, вона залежить від прискорення, з яким рухається розглянуте тіло.

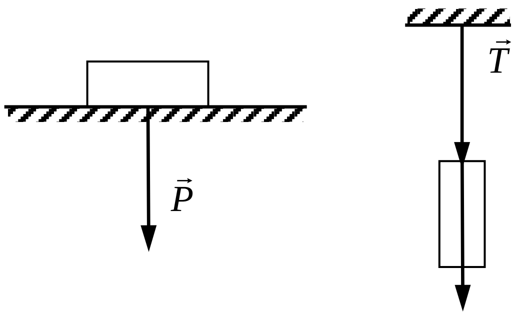


Рисунок 2.4

Ще одна сила, з якою мають справу в механіці – це ***сила тертя***. Ми будемо мати справу із зовнішнім тертям – це тертя між рухомими відносно один одного тілами. Сила тертя теж зводиться до взаємодії між атомами двох тіл, у точках дотику контактуючих тіл, тобто, в остаточному підсумку, – до сил електромагнітного походження. Тертя між поверхнями двох тіл при відсутності прошарку газу або рідини між ними називається *сухим тертям*. Сухе тертя ще ділять на *тертя ковзання* й *тертя котіння*. Останнє зазвичай набагато менше першого. Розрізняють *тертя ковзання* й *тертя спокою*. Сила тертя спокою звичайно менше сили тертя ковзання. Сила тертя ковзання визначається виразом:

$$F_{тер} = \mu N, \qquad (2.11)$$

де N – сила нормального тиску, що притискає тертьові поверхні одна до іншої, μ – коефіцієнт тертя. Сила тертя завжди спрямована протилежно вектору швидкості.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. *Автомобіль масою 2 т проходить по опуклому мосту з радіусом кривизни 40 м зі швидкістю 36 км/год. З якою силою автомобіль тисне на міст в його середині?*

Дано:	СІ:	Розв'язування
$m = 2$ т	$m = 2\cdot10^3$ кг	Вивчивши умову задачі, побудуємо рисунок 2.5.
$\upsilon = 36$ км/год	$\upsilon = 10$ м/с	Оскільки міст опуклий, то траєкторія руху автомобіля криволінійна. Автомобіль рухається зі сталою за модулем швидкістю.
$R = 40$ м		
$F_{тяги} = P$ – ?		

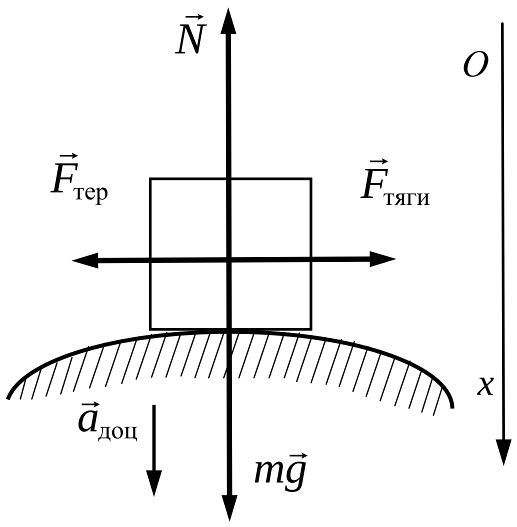


Рисунок 2.5

Тому в задачі присутнє тільки доцентрове прискорення, напрямлене до центру кривизни, тобто у верхній точці моста вертикально вниз. Зобразимо сили, що діють на автомобіль у верхній точці моста, враховуючи, що прискорення збігається за напрямом з рівнодіючою силою. Отже, модуль сили тяжіння більший за модуль сили реакції опори.

Згідно з другим законом Ньютона,

$$\vec{F}_{рів} = m\vec{a}.$$

Опишемо рівнодіючу силу як геометричну суму сил, що діють на тіло:

$$\vec{F}_{рів} = \vec{F}_{тяги} + \vec{F}_{тер} + \vec{N} + m\vec{g}.$$

Підставимо значення рівнодіючої сили у другий закон Ньютона:

$$\vec{F}_{тяги} + \vec{F}_{тер} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_{доц}. \qquad (1)$$

Виберемо вісь для проєктування, що співпадає з напрямом прискорення, і спроєктуємо на вісь OX ліву і праву частини виразу (1):

$$OX\text{:}\ F_{тяги\,x} + F_{тер\,x} + N_x + mg_x = ma_{доц}. \qquad (2)$$

Розпишемо проєкції на вісь OX:

$$F_{тяги\,x} = F_{тяги}\cos 90^\circ = F_{тяги}\cdot 0 = 0,$$

оскільки $\cos 90° = 0$.

$$F_{тер\,x} = F_{тер}\cos 90^\circ = F_{тер}\cdot 0 = 0,$$

$$N_x = N\cos 180^\circ = N(-1) = -N,$$

оскільки $\cos 180° = -1$.

$$mg_x = mg\cos 0^\circ = mg,$$

оскільки cos 0° = 1.

$$a_{доц} m = a_{доц} m \cos 0^{\circ} = a_{доц} m .$$

Підставимо значення проєкцій у вираз (2):

$$mg - N = a_{доц} m .$$

Звідси

$$N = m\left(g - a_{доц}\right),$$

де $a_{доц} = \dfrac{\upsilon^2}{R}$.

Отже,

$$N = m\left(g - \frac{\upsilon^2}{R}\right).$$

Згідно з третім законом Ньютона $P = N$. Отже, $P = m\left(g - \dfrac{\upsilon^2}{R}\right)$.

Відповідь: $P = m\left(g - \dfrac{\upsilon^2}{R}\right)$.

Задача 2. *Хлопчик масою 50 кг гойдається на гойдалці з довжиною підвісу 4 м. З якою силою він давить на сидіння при проходженні стану рівноваги зі швидкістю 6 м/с?*

Дано:	Розв’язування
m = 50 кг	Рух хлопчика відбувається дугою кола радіусом l, тіло
l = R = 4 м	отримує доцентрове прискорення, $\vec{P} = -\vec{N}$ або $P = N$ за
$\upsilon_{\max} = 6$ м/с	третім законом Ньютона (рис. 2.6).
P – ?	Застосуємо основне рівняння динаміки, щоб знайти N:

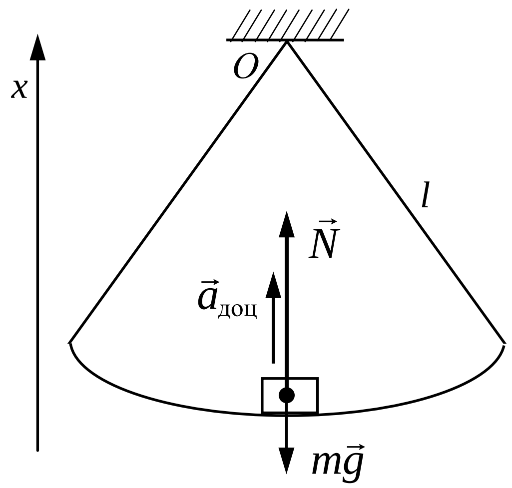


Рисунок 2.6

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_{доц}, \quad N - mg = ma_{доц},$$

$N = m(a_{доц} + g)$, $N = P$, тоді

$$P = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} + g\right).$$

Обчислення

$$[P] = кг\left(\frac{м^2}{с^2 м} + \frac{м}{с^2}\right) = H,$$

$$P = 50\left(\frac{36}{4} + 9{,}8\right) = 960.$$

Відповідь: 940 Н.

Задача 3. *Маневровий тепловоз масою m_1 тягне два вагони однакової маси ($m_2 = m_3$) з прискоренням а. Визначити силу тяги тепловоза і силу натягнення зчеплень, якщо коефіцієнт опору руху дорівнює μ.*

Дано:	Розв'язування
m_1	Запишемо основне рівняння динаміки для всієї системи
$m_2 = m_3$	в проєкції на вісь OX (сили $\vec{T}_1$, $\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_2'$ є внутрішніми)
μ	(рис. 2.7):
a	$F_{тяги} - F_{тер1} - 2F_{тер2} = a(m_1 + m_2 + m_3)$.
T_1 – ?	Оскільки $N_1 = m_1 g$, $N_2 = m_2 g$, $N_3 = m_3 g$ взаємно
T_2 – ?	компенсуються, то
$F_{тяги}$ – ?	

$$F_{тяги} - \mu m_1 g - 2\mu m_2 g = a(m_1 + 2m_2),$$

$$F_{тяги} = (m_1 + 2m_2)(a + \mu g).$$

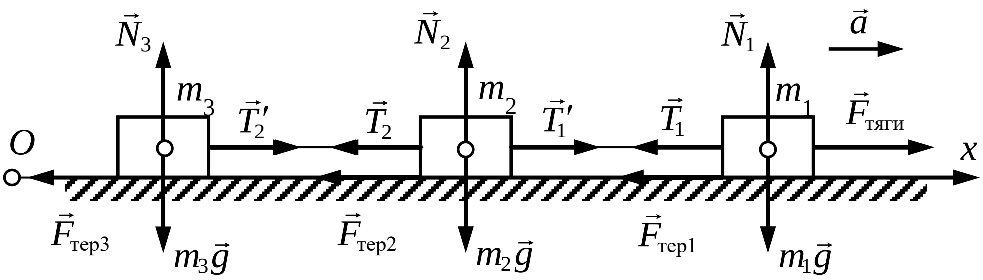


Рисунок 2.7

Для знаходження $\vec{T}_1$ запишемо основне рівняння для тепловоза в проєкції на вісь *OX*. Для нього $\vec{T}_1$ є зовнішньою силою. Тому

$$F_{тяги} - T_1 - F_{тер1} = am_1,$$

$$F_{тер1} = \mu m_1 g\ .$$

Отже,

$$T_1 = F_{тяги} - m_1(a + \mu g).$$

Для знаходження $\vec{T}_2$ $T_2 = T_2'$ запишемо основне рівняння динаміки для другого вагона в проєкції на вісь *OX*:

$$T_2' - F_{тер3} = m_3 a\,,$$

$$F_{тер3} = \mu m_3 g\ .$$

Отже,

$$T_2' = m_3 a + \mu m_3 g\,,$$

або $T_2' = m_3(a + \mu g)$.

Відповідь: $F_{тяги} = (m_1 + 2m_2)(a + \mu g)$, $T_1 = 2m_2(a + \mu g)$, $T_2 = m_3(a + \mu g)$.

Задача 4. *На похилій площині довжиною 5 м, висотою 3 м знаходиться вантаж масою 50 кг. Яку силу, напрямлену вздовж похилої площини, треба докласти, щоб утримати цей вантаж? Затягувати рівномірно вгору? Затягувати з прискоренням 1 м/с^2? Коефіцієнт тертя 0,2.*

Дано:

h = 3 м

l = 5 м

m = 50 кг

μ = 0,2

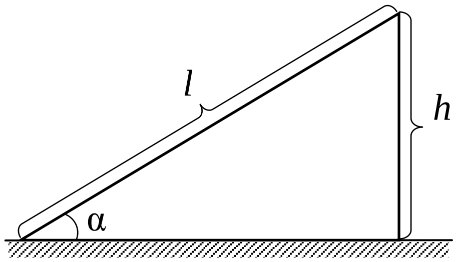
$F_{утр}$ – ? (a_1 = 0 м/с^2)

$F_{тяги2}$ – ? (a_2 = 0 м/с^2)

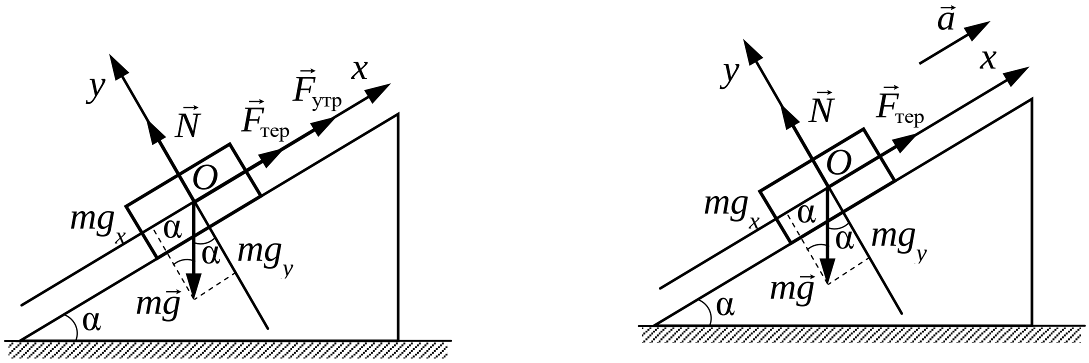
$F_{тяги3}$ – ? (a_3 = 1 м/с^2)

Розв’язування

$\frac{h}{l} = \sin\alpha$, отже, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$ (рис. 2.8,*а*).



а)



б) в)

Рисунок 2.8

Розглянемо перший випадок (рис. 2.8,*б*). Сила тяжіння тягне тіло вниз, тому

$$\vec{F}_{утр} + \vec{F}_{тер} + m\vec{g} + \vec{N} = 0,$$

$$\begin{cases} F + F \quad - mg\sin\alpha = 0, \\ N - mg\cos\alpha = 0, \end{cases}$$

$OX \rightarrow F_{утр} = mg\sin\alpha - F_{тер}$,

$$OY \rightarrow N = mg\cos\alpha,$$

$$F_{тер} = \mu mg\cos\alpha,$$

$$F_{утр} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Розглянемо другий і третій випадки разом (рис. 2.8,*в*):

$$\vec{F}_{тяги} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тер} = m\vec{a} \text{ (рис. 2.8,в).}$$

При рівномірному русі: $a_2 = 0$,

OX: $F_{тяги2} - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$,

$$F_{тяги2} = mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha).$$

При рівноприскореному русі:

$$a_3 \neq 0,$$

$$F_{тяги} - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma_3,$$

$$F_{тяги3} = m(a_3 + \mu g\cos\alpha + g\sin\alpha).$$

Обчислення

$$[F_{утр}] = кг\frac{м}{с^2} = Н,$$

$$F_{утр} = 50\cdot 9{,}8\cdot\left(\frac{3}{5} - 0{,}2\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 216,$$

$$F_{тяги2} = 50\cdot 9{,}8\cdot\left(\frac{3}{5} + 0{,}2\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 372,$$

$$F_{тяги3} = 50\cdot\left(9{,}8\cdot\frac{3}{5} + 9{,}8\cdot 0{,}2\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = 422.$$

Відповідь: для утримання тіла на похилій площині необхідно докласти силу 216 Н. Для рівномірного затягування вантажу вздовж похилої площини необхідно докласти силу 372 Н. Для прискореного затягування – 422 Н.

Задача 5. *З якою максимальною швидкістю може їхати мотоцикліст горизонтальною площиною, описуючи дугу радіусом 100 м, якщо коефіцієнт тертя гуми об ґрунт 0,4? Під який кут до горизонту нахилиться мотоцикл?*

Дано:	Розв'язування
R = 100 м	Траєкторією руху є дуга кола, тому даний рух є рухом з прискоренням. Доцентрове прискорення спрямоване до центра кола, а його модуль дорівнює:
μ = 0,4	$$a_{доц} = \frac{\upsilon^2}{R}.$$
υ – ?	
α – ?	

На тіло діють три сили: $\vec{N}$, $\vec{F}_{тер}$, $m\vec{g}$. Уявимо мотоцикліста у вигляді прямої, що проходить через його центр тяжіння (т. O'). Тоді

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тер} = m\vec{a}_{доц},$$

OX: $F_{тер} = ma_{доц}$, $a_{доц} = \dfrac{\upsilon^2}{R}$

(рис. 2.9,а),

$F_{тер} = \mu mg$ – при горизонтальному русі.

Тоді $\mu mg = \dfrac{\upsilon^2}{R} m$, $\upsilon = \sqrt{\mu g R}$ – максимальна швидкість мотоцикліста під час руху дугою кола.

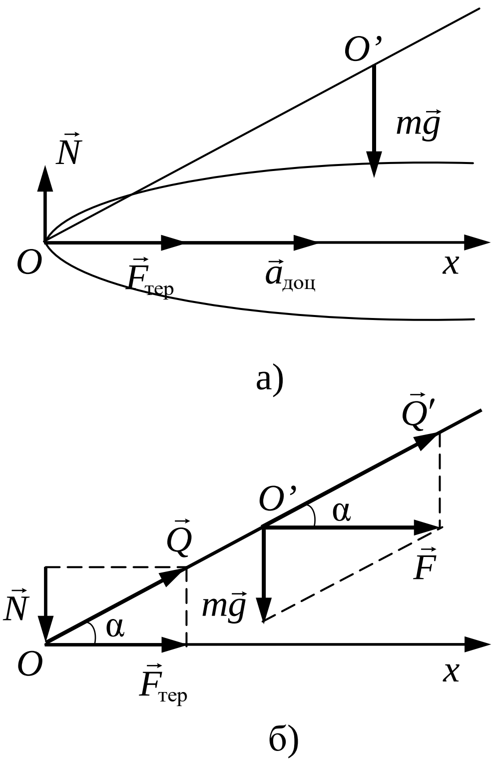


Рисунок 2.9

Мотоцикліст має нахилитись так, щоб напрям реакції опори $\vec{Q}$ $\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}_{тер}$ проходив через його центр ваги (O'), в іншому випадку він перекидатиметься. Тому

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тер} = m\vec{a}_{доц} \quad \text{(рис. 2.9,}\textit{б}\text{)},$$

$$\vec{N} + \vec{F}_{тер} = \vec{Q}.$$

Тоді $\vec{Q} + m\vec{g} = m\vec{a}_{доц}$, або $\vec{Q} + m\vec{g} = \vec{F}$.

Із трикутника сил $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $m\vec{g}$:

$$tg\alpha = \frac{mg}{F} = \frac{mg}{ma_{доц}},$$

$$tg\alpha = \frac{g}{\frac{\upsilon^2}{R}} = \frac{gR}{\upsilon^2};$$

$\alpha = arctg\,\frac{gR}{\upsilon^2}$ – кут нахилу мотоцикліста до горизонту.

Обчислення

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot м} = \sqrt{\frac{м^2}{с^2}} = \frac{м}{с},$$

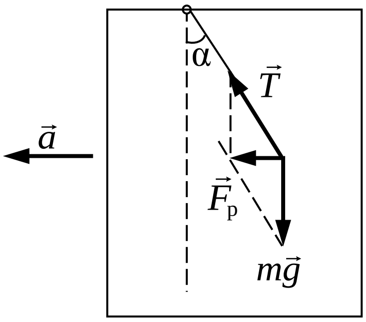
$$\upsilon = \sqrt{0{,}4\cdot 9{,}8\cdot 100} = 20,$$

$$\alpha = arctg\,\frac{9{,}8\cdot 100}{400} = arctg\,2{,}5 = 68^\circ.$$

Відповідь: 20 м/с, 68°.

Задача 6. *Визначити кут відхилення нитяного маятника у трамваї, який рухається горизонтально з прискоренням* $\vec{a}$.

Дано:	Розв’язання
a	*Перший спосіб*
$\alpha - ?$	У системі відліку «Земля» маятник відхиляється, оскільки діючі на нього сили надають йому прискорення $\vec{a}$ (рис. 2.10,*а*):



а)

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

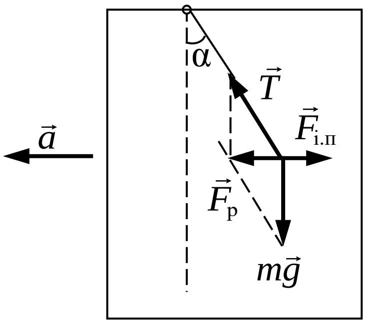
$$\vec{T} + m\vec{g} = \vec{F}_p,$$

$$F_p = ma.$$

Із трикутника сил $tg\alpha = \dfrac{F_p}{mg} = \dfrac{ma}{mg} = \dfrac{a}{g}$.

Другий спосіб

У системі відліку «Трамвай» маятник відхиляється й опиняється в стані спокою за умови (рис. 2.10,*б*):



б)

Рисунок 2.10

$$\vec{F}_{1.n} = -m\vec{a},$$

$$\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a} = 0,$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = \vec{F}_p,$$

$$F_p = ma,$$

$$tg\alpha = \frac{a}{g}.$$

Відповідь: $tg\alpha = \dfrac{a}{g}$.

Задача 7. *Жолоб CD, на якому лежить кулька, утворює кут 45° з вертикаллю й обертається навколо осі Ос, яка проходить через нижній кінець жолоба. Визначити, на якій відстані від нижнього краю жолоба кулька буде в рівновазі при обертанні його із швидкістю 30 об/хв. Тертя не враховувати* (рис. 2.11,*а*).

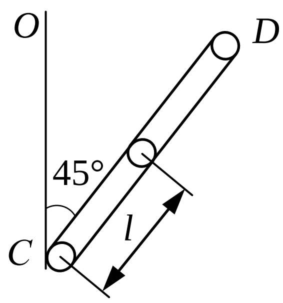


Рисунок 2.11, а)

Дано:	Розв’язання
n = 30 об/хв = 0,5 с$^{-1}$	*Перший спосіб*
$\alpha = 45^{\circ}$	У системі відліку «Земля» кулька буде у стані спокою (в рівновазі) у точці, де діючі на неї сили надають їй доцентрового прискорення (рис. 2.11,*б*):
l – ?	

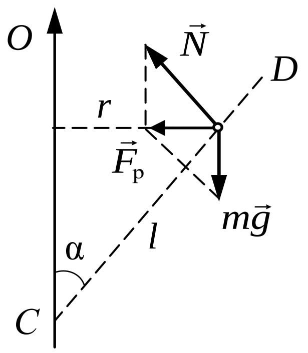


Рисунок 2.11,б)

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{доц},\ m\vec{g} + \vec{N} = \vec{F}_p,$$

$$\vec{F}_p = m\vec{a}_{доц},\ F_p = ma_{доц},\ a_{доц} = \omega^2 r.$$

Оскільки α = 45º, то $F_p = mg$,

$$g = 4\pi^2 n^2 r,\ r = \frac{g}{4\pi^2 n^2},\ l = \frac{r}{\sin\alpha},$$

$$l = \frac{g}{4\pi^2 n^2 \sin\alpha}.$$

Обчислення

$$[l] = \frac{м \cdot c^2}{c^2} = м,$$

$$l = \frac{9{,}8}{4\cdot\pi^2\cdot 0{,}25\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1{,}41.$$

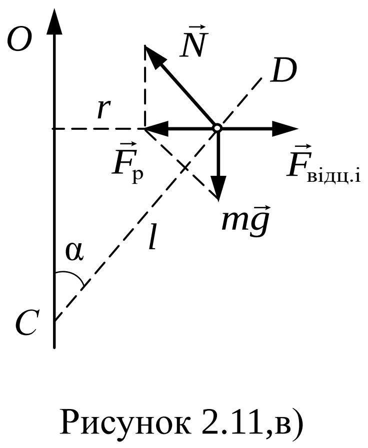


Рисунок 2.11,в)

Другий спосіб

У системі відліку «Жолоб» кулька буде в стані спокою у точці, де (рис. 2.11,*в*)

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{відц.і} = 0,\ \vec{F}_{відц.і} = -m\vec{a}_{доц},$$

$$\vec{N} + m\vec{g} - m\vec{a}_{доц} = 0,\ \vec{F}_p - m\vec{a}_{доц} = 0,$$

$$\vec{F}_p = m\vec{a}_{доц},\ F = ma_{доц}.$$

Далі – як у попередньому варіанті розв’язування.

Відповідь: 1,41 м.

РОЗДІЛ 3. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ І МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

3.1. Імпульс. Центр мас системи матеріальних точок. Повний імпульс системи матеріальних точок

Імпульсом (кількістю руху) матеріальної точки (тіла) називається вектор, що дорівнює добутку маси матеріальної точки (тіла) на її швидкість:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}\,. \tag{3.1}$$

Подивимося, чим визначається зміна імпульсу. Для цього знайдемо похідну за часом від виразу (3.1). У класичній механіці $m = const$. Тоді, виконавши диференціювання, отримаємо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{\upsilon}\right) = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}\,, \qquad \text{або} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{3.2}$$

Швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює діючій на цю точку силі. Вираз (3.2) являє собою диференційну форму запису другого закону Ньютона. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$d\left(m\vec{\upsilon}\right) = \vec{F}dt\,. \tag{3.3}$$

Фізична величина, рівна $\vec{F}dt$, називається імпульсом сили за час її дії dt. Таким чином, ***зміна імпульсу матеріальної точки за час dt дорівнює імпульсу результуючої сили, що діє на матеріальну точку за той самий проміжок часу***.

Механічною системою називають сукупність матеріальних точок (тіл), які взаємодіють між собою, і їх розглядають як єдине ціле.

Розглянемо механічну систему, що складається з декількох матеріальних точок (тіл). ***Центром інерції***, або ***центром мас*** системи матеріальних точок називають таку точку *C*, радіус-вектор якої визначається виразом

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \,. \qquad (3.4)$$

Тут m_i і $\vec{r}_i$ – маса і радіус-вектор i-ї точки системи; $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – загальна маса всієї системи; N – число матеріальних точок, які входять до складу системи. Відповідно координати точки C розраховуються за формулами:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i \,, \qquad y_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i y_i \,, \qquad z_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i z_i \,,$$

де x_i, y_i, z_i – координата точки на відповідній осі.

Знайдемо швидкість центра інерції точки C:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = \frac{\vec{p}}{m} \,. \qquad (3.5)$$

У формулі (3.5) величина $\sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = \vec{p}$ – це векторна сума імпульсів усіх матеріальних точок системи, яка називається ***імпульсом системи*** матеріальних точок. Таким чином, отримуємо

$$\vec{p} = m \vec{\upsilon}_c \,. \qquad (3.6)$$

Тобто, ***імпульс системи матеріальних точок дорівнює добутку маси всієї системи на швидкість її центра мас***.

3.2. Теорема про рух центра мас механічної системи

Тіла, що не входять до складу механічної системи, називаються ***зовнішніми***, а сили, що діють з боку цих тіл, називаються ***зовнішніми силами***. Відповідно ***сили***, що діють між тілами, які входять до складу механічної системи, називаються ***внутрішніми***. Тоді на кожну i-ту точку, яка входить до складу розглянутої системи, можуть діяти як зовнішні сили $\vec{F}_i^{ext}$, так і сили $\vec{F}_{ik}$, які діють між матеріальними точками системи, тобто сили внутрішні. Запишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного тіла розглянутої системи:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\upsilon}_1) = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1N}$$
$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{\upsilon}_2) = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2N}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d}{dt}(m_N\vec{\upsilon}_N) = \vec{F}_N^{ext} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \ldots + \vec{F}_{N,N-1}$$

Почленно складемо ці рівняння й одержимо

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i) = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{\upsilon}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right) + \ldots + \left(\vec{F}_{N-1,N} + \vec{F}_{N,N-1}\right) \qquad (3.7)$$

Доданки, які стоять у дужках у рівнянні (3.7), являють собою суму сил взаємодії тіл з номерами *i* та *k*. На підставі 3-го закону Ньютона суми сил у дужках дорівнюють нулю. Тоді отримаємо, що

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i) = \sum_i \vec{F}_i^{ext}\,. \qquad (3.8)$$

З лівої сторони в рівнянні (3.8) стоїть швидкість зміни повного імпульсу системи, суму в правій частині цього рівняння називають головним вектором зовнішніх сил, або результуючою зовнішніх сил $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$. З урахуванням наведених зауважень замість (3.8) можна записати

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,. \qquad (3.9)$$

Таким чином, ми одержали узагальнення другого закону Ньютона на довільну механічну систему: ***швидкість зміни імпульсу механічної системи матеріальних точок (тіл) дорівнює головному вектору зовнішніх сил, які діють на цю систему***. У проєкціях на осі системи координат

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x, \qquad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \qquad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \qquad (3.10)$$

Причому $p_x = \sum_i m_i \upsilon_{xi}$, $p_y = \sum_i m_i \upsilon_{yi}$, $p_z = \sum_i m_i \upsilon_{zi}$. Відповідно до рівняння (3.6) маємо $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$, і вираз (3.9) приймає вигляд

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}_c) = m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F},$$

або з урахуванням того, що $\vec{a}_c = \dfrac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}$,

$$m\vec{a}_c = \vec{F}. \qquad (3.11)$$

Рівняння (3.11) становить зміст основного закону динаміки твердого тіла: ***добуток маси тіла на прискорення його центра мас дорівнює результуючій силі, що діє на тіло***. Якщо розглядається система з декількох тіл, то з рівняння (3.11) випливає, що ***центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи, і на яку діє результуюча зовнішніх сил, прикладених до системи***. Останнє твердження носить назву теореми про рух центра мас.

3.3. Закон збереження імпульсу

Механічну систему називають ***замкнутою***, якщо на неї не діють зовнішні сили. Взагалі, замкнутих систем у природі не буває, але якщо внутрішні сили в системі в багато разів перевищують зовнішні, то таку систему наближено можна вважати замкнутою. Наприклад, при пострілі із гармати сили взаємодії між снарядом і гарматою у багато разів перевищують всі інші сили, які діють на снаряд і гармату, тому систему "гармата-снаряд" можна вважати замкнутою. Для замкнутої системи головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю $\vec{F} = 0$ і рівняння (3.9) приймає вигляд

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0;$$

відповідно

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i = const. \qquad (3.12)$$

Таким чином, ми прийшли до закону збереження імпульсу, який говорить, що ***імпульс замкнутої системи не змінюється з часом***. З іншого боку,

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_C = const, \qquad (3.13)$$

або при будь-яких процесах, що відбуваються в замкнутій системі, швидкість її центра мас (центра інерції) залишається незмінною.

Закон збереження імпульсу є одним з основних законів природи. Ми одержали його як наслідок із законів Ньютона. Однак область застосування закону збереження імпульсу набагато ширша, ніж область застосування законів Ньютона. Так, закон збереження імпульсу справедливий і у мікросвіті, де закони Ньютона не застосовуються. У теоретичній фізиці доводиться, що цей фундаментальний закон природи є наслідком однорідності простору. ***Однорідність простору*** означає, що паралельний перенос замкнутої системи не позначається на фізичних властивостях системи й законах її руху.

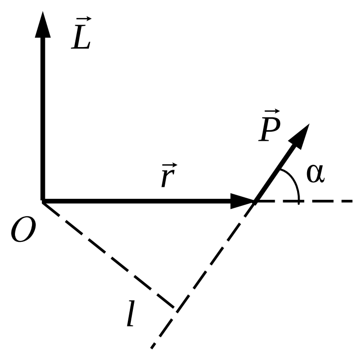


Рисунок 3.1

Іноді буває, що $\vec{F} \neq 0$ і, відповідно $\vec{p} \neq const$, але якщо проєкція результуючого вектора зовнішніх сил на довільну вісь дорівнює нулю, то проєкція імпульсу на цю ж вісь не змінюється з часом. У цьому випадку говорять про ***закон збереження проєкції імпульсу***, тобто якщо $\frac{dp_x}{dt} = 0$, то $p_x = const$.

3.4. Момент імпульсу. Основне рівняння динаміки обертального руху навколо нерухомої точки

Ми вже наводили аналогію між законами поступального й обертального рухів, коли розглядали кінематику. Також ця аналогія поширюється і на динаміку. Так, аналогом імпульсу для обертального руху служить величина, що називається моментом імпульсу.

Моментом імпульсу частинки відносно деякої точки О називають вектор $\vec{L}$***, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора*** $\vec{r}$***, проведеного з точки О в точку прикладання імпульсу, на імпульс*** $\vec{p}$ (рис. 3.1):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}],\ L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = l \cdot p\,, \tag{3.14}$$

де $l = r \cdot \sin\alpha$ називається плечем вектора імпульсу $\vec{p}$ відносно точки O.

З'ясуємо, яка фізична величина визначає зміну вектора моменту імпульсу. Для цього візьмемо похідну за часом від вектора $\vec{L}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon}, m\vec{\upsilon}] + [\vec{r}, \vec{F}]. \tag{3.15}$$

Перший член у рівнянні (3.15) тотожно дорівнює нулю як векторний добуток двох колінеарних векторів. Другий член у цьому рівнянні називається ***моментом сили*** і це є векторний добуток радіуса-вектора, проведеного в точку прикладання сили, на цю силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \tag{3.16}$$

У результаті, для швидкості зміни моменту імпульсу ми одержимо так звані ***рівняння моментів***:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,. \tag{3.17}$$

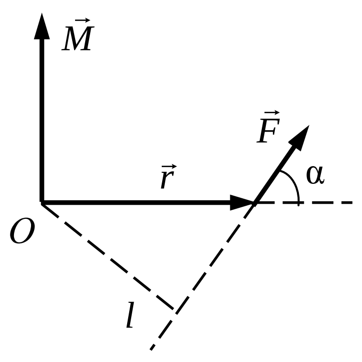


Рисунок 3.2

Похідна за часом від моменту імпульсу частинки відносно деякої точки О дорівнює моменту рівнодіючої сили відносно тієї ж точки О (рис. 3.2).

Тепер розглянемо систему частинок. Зауважимо, що момент імпульсу – величина адитивна. Це означає, що момент імпульсу системи частинок відносно деякої точки *O* дорівнює сумі моментів імпульсу окремих частинок системи відносно тієї ж точки *O*: $L = \sum_i L_i$.

Тоді для системи частинок можна записати

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i L_i = \sum_i \frac{d\overline{L}_i}{dt} . \qquad (3.18)$$

Тепер врахуємо, що на кожну *i*-ту частинку системи діють як внутрішні сили F_{ik}, з боку інших частинок системи, так і результуюча зовнішніх сил F_i^{ext} . Тоді для кожної частинки системи можна записати

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_k \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i^{ext} , \qquad (3.19)$$

де $\sum_k \vec{M}_{ik} = \sum_k \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right]$ та $\vec{M}_i^{ext} = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{ext}\right]$. Зміна результуючого моменту імпульсу буде, очевидно,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{M}_{ik} + \sum_{i+1}^{N} \vec{M}_i^{ext} . \qquad (3.20)$$

Покажемо, що подвійна сума в рівнянні (3.20) тотожно дорівнює нулю. Дійсно,

$$\vec{M}_{ki} = \left[\vec{r}_k, \vec{F}_{ki}\right] = \left[\left(\vec{r}_i + \vec{r}_{ik}\right), \left(-\vec{F}_{ik}\right)\right] = -\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] = \vec{M}_{ik} . \qquad (3.21)$$

Так як моменти в подвійній сумі зустрічаються попарно, то вони взаємно знищуються. У виразі (3.21) ми врахували, що на підставі 3-го закону Ньютона $F_{jk} = -F_{kj}$. Замінимо у (3.20) суму моментів зовнішніх сил результуючим, або головним моментом зовнішніх сил відносно тієї ж точки *O* (рис. 3.3): $\vec{M} = \sum_{i+1}^{N} \vec{M}_i^{ext}$. Тоді в результаті всіх перетворень одержимо основний закон динаміки для тіла, яке обертається відносно нерухомої точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,. \qquad (3.22)$$

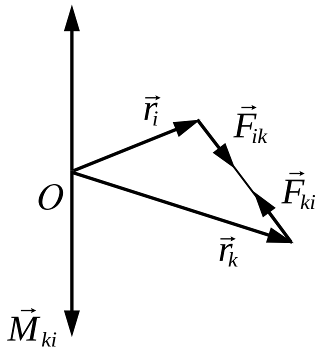


Рисунок 3.3

Швидкість зміни моменту імпульсу системи відносно нерухомої точки дорівнює результуючому моменту відносно тієї ж точки всіх зовнішніх сил, які діють на систему. Якщо система замкнута, тобто $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = const$.

Отже, ***момент імпульсу замкнутої системи не змінюється з часом***. Це твердження визначає закон збереження моменту імпульсу. Цей закон є одним із фундаментальних законів природи. Його область застосування набагато ширша, ніж область застосування класичної механіки, в рамках якої ми його одержали. У теоретичній фізиці доводиться, що цей закон є наслідком ізотропії простору. ***Ізотропія простору*** означає, що в просторі немає виділених напрямків. Інакше кажучи, поворот системи відліку на довільний кут не змінює властивості системи і закони її руху.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. *Пліт масою* m_1 *вільно пливе по поверхні води зі швидкістю* υ_1. *На пліт з берега стрибає людина масою* m_2. *Швидкість людини перпендикулярна швидкості плота і дорівнює* υ_2. *Визначити швидкість плота з людиною. Тертям плота об воду знехтувати* (рис. 3.4,*а*, *б*).

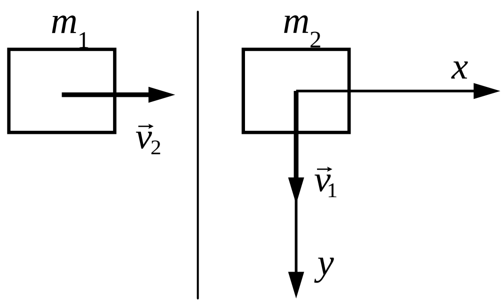


Рисунок 3.4, а)

Дано:	Розв’язування
m_1 υ_1 m_2 υ_2	
υ – ?	

Перший спосіб

За законом збереження імпульсу

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}.$$

У проєкції на OX

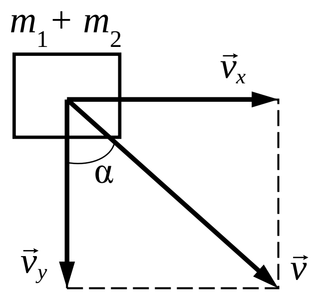
$$m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_x.$$

У проєкції на OY

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_y,$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2},$$

$$\upsilon = \frac{1}{(m_1 + m_2)}\sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2}.$$



б

Другий спосіб

За законом збереження імпульсу

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}.$$

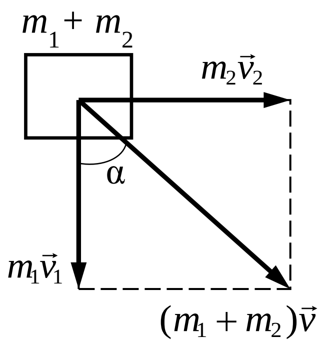
Отже, $(m_1 + m_2)\vec{\upsilon}$ – діагональ паралелограма зі сторонами $m_1\vec{\upsilon}_1$ і $m_2\vec{\upsilon}_2$ (рис. 3.4,*в*).

За теоремою Піфагора маємо

$$(m_1 + m_2)\upsilon = \sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2},$$

звідки

$$\upsilon = \frac{1}{(m_1 + m_2)}\sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2}.$$



в)

Рисунок 3.4

Відповідь: $\upsilon = \frac{1}{(m_1 + m_2)}\sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2}$.

Задача 2. *На кінці дошки масою 10 кг і довжиною 4 м стоїть хлопчик масою 40 кг. Хлопчик переходить на протилежний кінець дошки, рухаючись по ній*

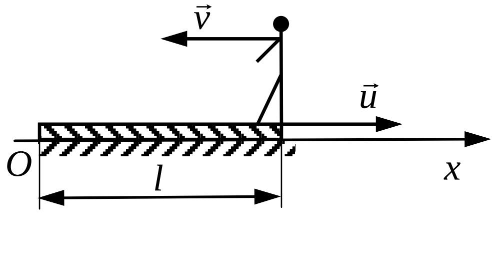


Рисунок 3.5,а)

з відносною швидкістю 1 м/с. На яку відстань пересунеться при цьому дошка, якщо тертям дошки об дорогу знехтувати (рис. 3.5,*а*)?

Дано:	Розв'язування
M = 10 кг	*Перший спосіб*
m = 40 кг	Коли людина почне рухатись, у результаті впливу сили
l = 4 м	тертя між підошвами людини і поверхнею дошки, остання
υ = 1 м/с	почне пересуватися в зворотному напрямку зі швидкістю $\vec{u}$.
S – ?	Тоді швидкість людини відносно Землі дорівнює $(\vec{\upsilon}+\vec{u})$.

За законом збереження імпульсу

$$m(\vec{\upsilon}+\vec{u})+M\vec{u}=0\,.$$

У проєкції на вісь OX:

$$m(-\upsilon+u)+Mu=0\,,$$

$$-m\upsilon+mu+Mu=0\,,$$

$$u=\frac{m\upsilon}{m+M}\,,\ S=ut\,.$$

Час переміщення дошки дорівнює часу руху хлопчика зі швидкістю υ відносно дошки. Отже,

$$t=\frac{l}{\upsilon}\,.$$

Підставимо значення t і u у формулу переміщення S:

$$S=\frac{m\upsilon}{(M+m)}\frac{l}{\upsilon}=\frac{ml}{M+m}\Rightarrow S=\frac{ml}{M+m}\,.$$

Обчислення

$$[S]=\frac{кг\cdot м}{кг}=м\,,\ S=\frac{40\cdot 4}{10+40}=3{,}2\,.$$

Відповідь: 3,2 м.

Другий спосіб

Тертям дошки об дорогу нехтують.

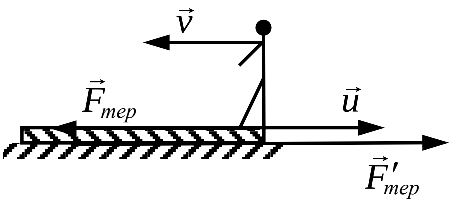


Рисунок 3.5, б)

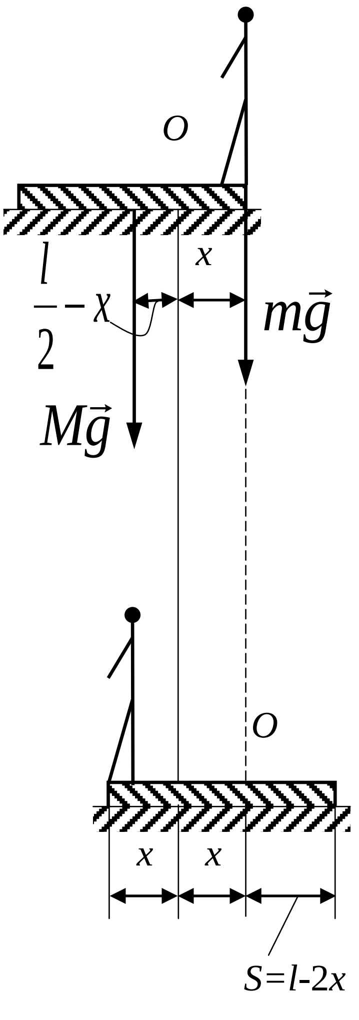
Взаємодія людини з дошкою – це внутрішні сили, вони положення центра маси в просторі не змінюють.

Визначимо положення центра маси дошки з людиною на її кінці (O) і запишемо правило моментів відносно нього.

У вихідному стані

$$Mg\left(\frac{l}{2}-x\right)=mgx,$$

$$x=\frac{Ml}{2(M+m)}.$$



Після переміщення хлопчика x має те ж саме значення, оскільки положення центра маси людини з дошкою не змінюється (рис. 3.5,*б*, *в*).

Тоді:

$$S=l-2x,$$

$$S=l-\frac{2Ml}{2(M+m)},$$

$$S=l\left(1-\frac{M}{M+m}\right)=\frac{lm}{M+m}.$$

Обчислення

$$[S]=\frac{м\cdot кг}{кг}=м,$$

$$S=\frac{40\cdot 4}{40+10}=3{,}2.$$

Відповідь: 3,2 м.

Рисунок 3.5, в)

Задача 3. *Через нерухомий блок перекинуто нитку, до одного кінця якої прив’язаний вантаж масою m_1, а до іншого – драбина масою m_2.*

Людина масою m_3 *піднімається драбиною зі швидкістю* υ. *Визначити швидкість опускання драбини за умови, що* $m_1 = m_2 + m_3$ (рис. 3.6).

Дано:	Розв'язування
m_1	Оскільки нерухомий блок змінює тільки напрямок швидкості тіла на протилежний, то задача рівнозначна такому: модуль швидкості підйому вантажа дорівнює модулю опускання драбини відносно Землі. Швидкість людини відносно Землі дорівнює $(\vec{\upsilon} + \vec{u})$.
m_2	
m_3	
υ	
$m_1 = m_2 = m_3$	
u – ?	Запишемо закон збереження імпульсу для даної

замкненої системи тіл:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + m_3(\vec{\upsilon} + \vec{u}) = 0,$$

$$u_1 = u_2 = u.$$

У проєкції на вісь *OX*:

$$m_1 u + m_2 u + m_3(-\upsilon + u) = 0,$$

$$m_1 u + m_2 u - m_3\upsilon + m_3 u = 0,$$

$$m_1 u + m_2 u + m_3 u = m_3\upsilon,$$

$$u = \frac{m_3\upsilon}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Відповідь: $u = \dfrac{m_3\upsilon}{m_1 + m_2 + m_3}$.

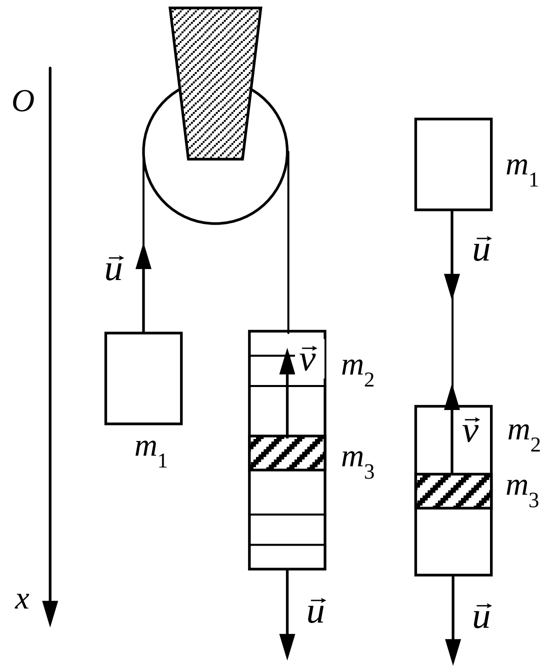


Рисунок 3.6

РОЗДІЛ 4. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

4.1. Дія моменту сил на тверде тіло

У попередньому розділі ми ввели величину, яку назвали моментом сили: $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$.

Коли сила прикладена до однієї із точок твердого тіла, вектор $\vec{M}$ характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки *O*, відносно якої він визначається. Тому момент сили називають також обертальним моментом. Якщо тіло не закріплене й може обертатися навколо точки *O* довільним чином, то під дією сили тіло повернеться навколо осі, що збігається за напрямком з вектором $\vec{M}$.

Розглянемо випадок, коли тверде тіло може обертатися навколо нерухомої осі (рис. 4.1,*а*). Нехай на тіло діє довільно спрямована сила $\vec{F}$. Знайдемо проєкцію моменту цієї сили на вісь обертання, яку позначимо як вісь *z*. Для цього розкладемо силу на три складові, як показано на рис. 4.1, і розглянемо, як діють ці сили на тіло.

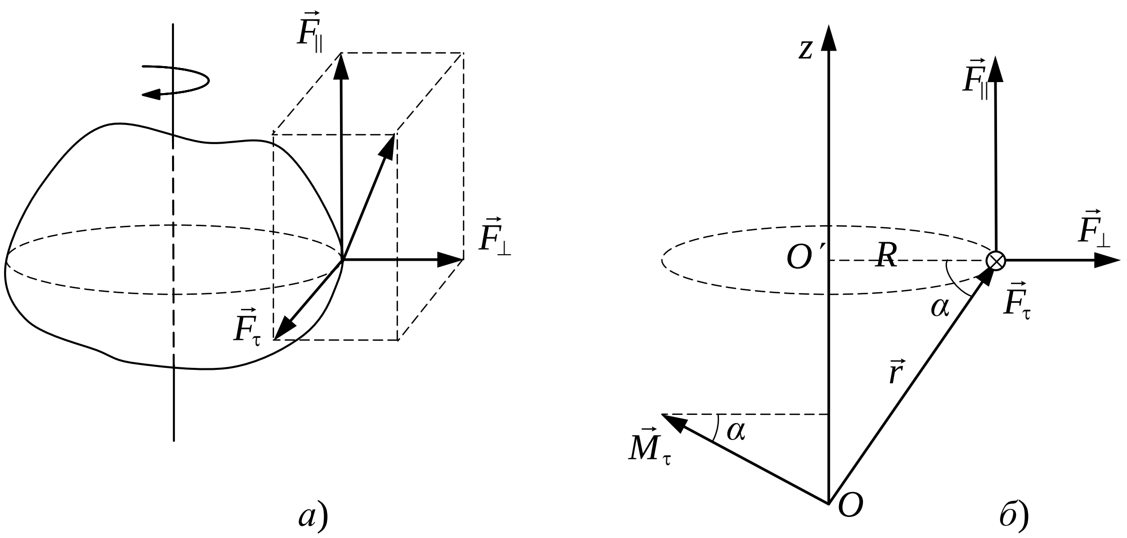


Рисунок 4.1

З рисунка видно, що сила $\vec{F}_{\perp}$ – згинає вісь обертання, сила $\vec{F}_{//}$ – приводить до ковзання тіла вздовж осі, і лише дія сили $\vec{F}_{\tau}$ приводить до обертального руху навколо осі. Прямим обчисленням неважко показати, що

$$M_z = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]_z = \left(\vec{M}_{\tau}\right)_z = M_{\tau} \cos\alpha = rF_{\tau} \cos\alpha = RF_{\tau} . \qquad (4.1)$$

Отже, обертання навколо нерухомої осі (осі z) може викликати тільки сила $\vec{F}_{\tau}$, причому вона тим вдаліше здійснить цей поворот, чим більше її плече R відносно осі обертання. Відзначимо, що величина проєкції моменту сил на вісь обертання не залежить від вибору точки O (точки, відносно якої обчислюється повний обертальний момент $\vec{M}$).

4.2. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла

Якщо спроєктувати рівняння моментів для системи матеріальних точок $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ на виділений напрямок (вісь обертання), уздовж якого направимо координатну вісь Oz, то одержимо основний закон динаміки для тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z . \qquad (4.2)$$

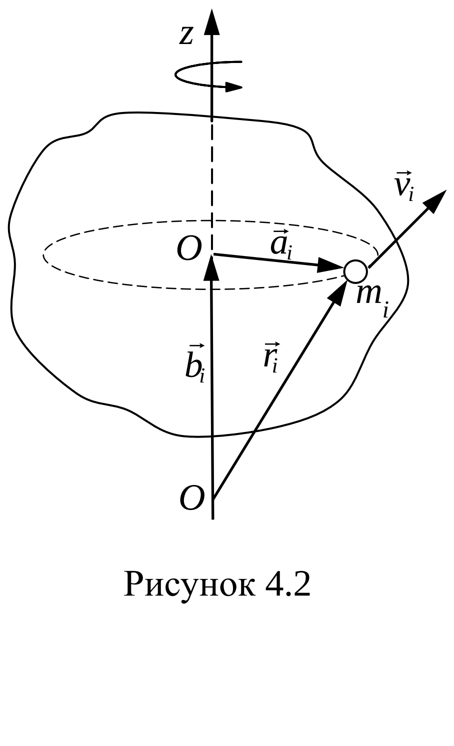


Рисунок 4.2

Швидкість зміни моменту імпульсу тіла відносно нерухомої осі обертання дорівнює результуючому моменту відносно цієї ж осі всіх зовнішніх сил, що діють на тіло.

Як знаходити проєкцію моменту зовнішніх сил на вісь обертання, ми вже знаємо (див. формулу 4.1), визначимо тепер вираз для моменту імпульсу L_z тіла, що обертається відносно нерухомої осі обертання *Oz* з кутовою швидкістю ω. Нам відома формула для моменту імпульсу матеріальної точки

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \tag{4.3}$$

і ми знаємо, що повний момент імпульсу системи матеріальних точок дорівнює

$$\vec{L} = \sum_i L_i , \tag{4.4}$$

де $\vec{L}_i$ – момент імпульсу *i*-ої матеріальної точки. Для того щоб скористатися формулами (4.3); (4.4), подумки розіб'ємо тіло на досить малі області, такі, щоб швидкості всіх точок такої області можна було вважати постійними (рис. 4.2). Представимо радіус-вектор *i*-ої матеріальної точки у вигляді

$$\vec{r}_i = \vec{a}_i + \vec{b}_i .$$

Вектор $\vec{a}_i$ – перпендикулярний осі обертання, а вектор $\vec{b}_i$ – паралельний їй. Тоді момент імпульсу *i*-ої матеріальної точки запишеться у вигляді

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i] = [\vec{b}_i, m_i\vec{\upsilon}_i] + [\vec{a}_i, m_i\vec{\upsilon}_i]. \tag{4.5}$$

Перший доданок у (4.5) дає вектор, перпендикулярний осі обертання (див. рис. 4.2), і його проєкція на вісь *Oz* дорівнює нулю. Другий доданок дає вектор, спрямований уздовж осі обертання. Таким чином, з урахуванням того, що $\vec{\upsilon}_i \perp \vec{a}_i$, можна записати

$$L_{iz} = a_i m_i \upsilon_i = \omega \cdot m_i \omega^2 . \tag{4.6}$$

У формулі (4.6) ми врахували, що лінійна швидкість матеріальної точки υ_i зв'язана з кутовою швидкістю обертання формулою $\upsilon_i = \omega \cdot a_i$ (a_i – радіус окружності, по якій рухається *i*-а точка твердого тіла). Кутова швидкість обертання ω – однакова для всіх точок тіла, що обертається, тоді на підставі формули (4.4) відразу одержуємо вираз для проєкції моменту імпульсу тіла на вісь обертання:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i a_i^2 = \omega J_z \,. \qquad (4.7)$$

Тут ми ввели позначення

$$J_z = \sum_i m_i a_i^2 \,. \qquad (4.8)$$

Фізична величина, описувана формулою (4.8), називається ***моментом інерції тіла*** відносно осі обертання. Тепер основний закон динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої осі (4.2), запишеться у вигляді

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon \,. \qquad (4.9)$$

Якщо момент зовнішніх сил відсутній ($M_z = 0$), то

$$\omega J_z = const \,. \qquad (4.10)$$

Вираз (4.10) являє собою окремий випадок закону збереження моменту імпульсу, записаного для тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

4.3. Момент інерції твердого тіла. Теорема Штейнера

Момент інерції – дуже важлива характеристика тіла, що обертається. З основного закону динаміки тіла, що обертається (4.9), видно, що момент інерції описує інертність тіла в обертальному русі. Як і при поступальному русі, тіло, що обертається, "опирається" зміні своєї кутової швидкості при дії моменту сил. Отже, ***момент інерції є міра інертності твердого тіла при обертальному русі***.

Відзначимо деякі властивості моменту інерції, що відрізняють його від маси. По-перше, момент інерції залежить від геометричних розмірів тіла. Цю властивість моменту інерції демонструє фігурист на льоді, коли, притискаючи руки до тіла, він зменшує свій момент інерції, що приводить до збільшення швидкості обертання спортсмена відповідно до закону зберігання моменту імпульсу (4.10). По-друге, значення моменту інерції залежить від вибору осі, відносно якої він обчислюється.

Момент інерції являє собою, таким чином, важливу величину й потрібно вміти визначати її відносно довільної осі обертання.

Відзначимо, що у визначенні моменту інерції (4.8) обчислення будуть тим більш точними, чим на більше число матеріальних точок можна розбити суму в (4.8). У межі це означає перехід до інтегрування

$$J = \sum_i m_i a_i^2 \Rightarrow J_z = \int r^2 dm. \tag{4.11}$$

У формулі (4.10) r – це відстань від виділеного елемента тіла масою dm до осі обертання.

Як приклад обчислимо момент інерції однорідного диска радіуса R відносно осі, що проходить через його центр та перпендикулярній площини диска. Виділимо на диску кільцевий шар товщиною dr. Всі точки цього шару будуть перебувати на однаковій відстані r від осі обертання й вираз під знаком інтеграла запишеться у вигляді

$$r^2 dm = r^2 \rho dV = r^2 \rho b 2\pi r dr. \tag{4.12}$$

Тут ρ – густина матеріалу диска, b – товщина диска (див. рис. 4.2). Підставимо (4.12) в (4.11) і проінтегруємо по r. У результаті одержимо

$$J_z = 2\pi b\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho b \frac{R^4}{4} = \pi b\rho \frac{R^4}{2}. \tag{4.13}$$

Тепер врахуємо в (4.13), що маса всього диска дорівнює добутку густини ρ на об’єм диска $b\pi R^2$, й остаточно одержимо

$$J_z = \frac{mR^2}{2}. \tag{4.14}$$

Обчислити момент інерції тіла відносно довільної осі, що навіть не проходить через тіло, дозволяє ***теорема Штейнера***, згідно з якою ***момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла,***

й паралельній даній, і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями:

$$J = J_0 + ma^2 \,. \tag{4.15}$$

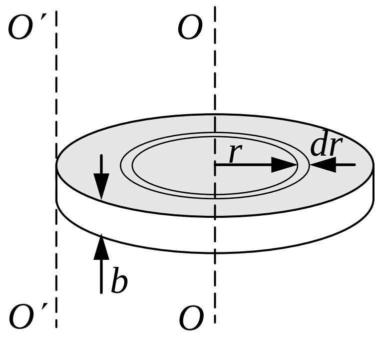


Рисунок 4.3

Обчислимо момент інерції того ж диска відносно осі *OO*, що проходить через утворюючу вісь диска (рис. 4.3). Відповідно до теореми Штейнера, момент інерції диска відносно осі *O'O'* буде дорівнювати

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \,.$$

Відзначимо, що пряме обчислення моменту інерції диска відносно осі *OO* за формулою (4.11) являє собою більш важке завдання, чим те, яке ми вирішили.

4.4. Вільні осі. Поняття про гіроскоп

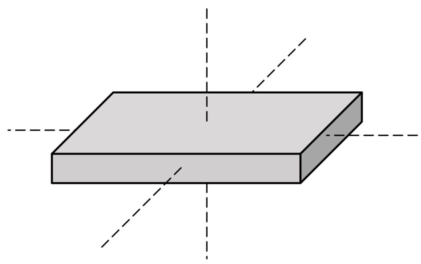


Рисунок 4.4

Теорема Штейнера показує, яке значення має момент інерції відносно осей, що проходять через центр мас тіл. Особливо важливі так звані вільні осі, або осі вільного обертання. Це осі, які зберігають своє положення в просторі при відсутності зовнішніх сил, що діють на тіло. Виявляється, що для будь-якого тіла існують, щонайменше, три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр мас тіла, які є вільними осями. Їх ще називають головними осями інерції тіла. Наприклад, для паралелепіпеда головними осями інерції є три осі, що проходять через центри протилежних граней (рис. 4.4). Властивість вільних осей зберігати своє положення в просторі використовується в гіроскопах.

Гіроскопи являють собою масивні однорідні тіла, які з великою кутовою швидкістю обертаються навколо своєї осі симетрії, що є вільною віссю. Сила ваги не може змінити орієнтацію осі обертання, тому що сила, прикладена до центра мас, і момент сили відносно центра мас дорівнює нулю. Таким чином, як не обертати гіроскоп, напрямок його осі обертання залишиться незмінним у просторі. Гіроскопи використовуються в навігації.

Приклади розв’язування задач

Задача 1. *Однорідний стержень масою m = 2 кг прикріплений своїм нижнім кінцем до шарніра. Стержень утримується в рівновазі горизонтальною відтяжкою, прикріпленою до нерухомого вертикального стояка. Визначити силу натягу відтяжки, силу реакції шарніра та її напрямок* (рис. 4.5).

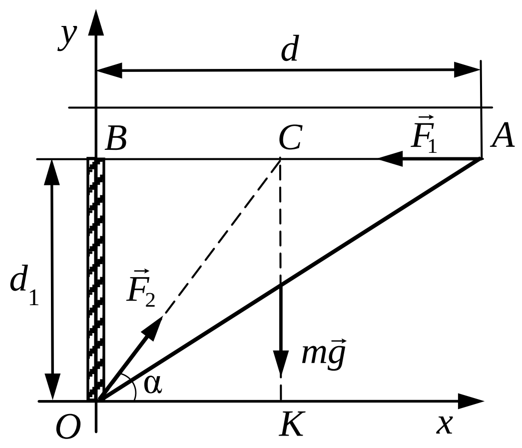


Рисунок 4.5

Дано:	Розв’язування
m = 2 кг $d = AB$ = 0,6 м $d_1 = OB$ = 0,4 м	На стержень діють три сили: сила тяжіння $(\vec{F}_m = m\vec{g})$, прикладена до його середини (стержень однорідний),
F_1 – ?, F_2 –? α – ?	сила $\vec{F}_1$ пружності відтяжки і сила $\vec{F}_2$ пружності в шарнірі. Віссю обертання є шарнір біля нижнього кінця стержня

(точка O).

Запишемо умови рівноваги стержня (рис. 4.5):

1) алгебраїчна сума моментів сил відносно точки O дорівнює нулю:

$$F_m \frac{d}{2} - F_1 d_1 = 0, \text{ де } \frac{d}{2} \text{ і } d_1 \text{ – плечі сил } F_m \text{ і } F_1,\ F_m \frac{d}{2} = F_1 d_1.$$

Звідси $F_1 = \frac{mgd}{2d_1}$;

2) для знаходження $\vec{F}_2$ запишемо другу умову рівноваги стержня:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = 0.$$

Спроєктуємо його на координатні осі:

OX: $-F_1 + F_{2x} = 0$,

OY: $F_{2y} - mg = 0$.

Звідси: $F_{2x} = F_1$, $F_{2y} = mg$.

За теоремою Піфагора: $F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{F_1^2 + (mg)^2}$,

$$F_2 = \sqrt{F_1^2 + (mg)^2}.$$

Із рисунка 4.5 витікає, що при рівновазі стержня лінії дії сил $m\vec{g}$ і $\vec{F}_1$ перетинаються в точці C: $M_{сили\ тяжіння} = 0$, $M_1 = 0$.

Оскільки алгебраїчна сила моментів сил відносно будь-якої можливої осі обертання дорівнює нулю ($M_1 + M_2 + M_{сили\ тяжіння} = 0$), то, значить, і момент сили $\vec{F}_2$ відносно точки C дорівнює нулю ($M_2 = 0$), тобто сила $\vec{F}_2$ напрямлена вздовж прямої OC.

Із ΔOCK: $tg\alpha = \frac{d_1}{\frac{d}{2}} = \frac{2d_1}{d}$.

Звідси $\alpha = arctg \frac{2d_1}{d}$.

Обчислення

$$F_1 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0{,}3}{0{,}4} = 15,$$

$$F_2 = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25,$$

$$\alpha = arctg \frac{2 \cdot 0{,}4}{0{,}6} = arctg 1{,}3,\ \alpha \approx 52^0.$$

$$[F_1] = \frac{кг \cdot Н \cdot м}{м \cdot кг} = Н\ ,$$

$$[F_2] = \sqrt{Н^2 + \left(кг\frac{м}{с^2}\right)^2} = Н\ .$$

Задача 2. *На яку максимальну висоту може піднятися людина масою m по драбині масою M і довжиною l, приставленій до гладенької стіни? Кут між драбиною і підлогою дорівнює α, коефіцієнт тертя драбини об підлогу дорівнює μ.*

Дано:	Розв'язування
m	Запишемо умову рівноваги драбини:
M	1) алгебраїчна сума моментів сил відносно точки B
L	дорівнює нулю (рис. 4.6):
α	$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = 0,$
μ	$-N_2 l\sin\alpha + mg\cos\alpha + Mg\dfrac{l\cos\alpha}{2} = 0$.(1)
h – ?	Моменти сил $\vec{N}_1$ і $\vec{F}_{тер}$

дорівнюють нулю, оскільки дорівнюють нулю плечі цих сил відносно точки B;

2) векторна сума сил, що діють на драбину, дорівнює нулю:

$$m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тер} + \vec{N}_1 = 0\ .$$

Проєкція цього рівняння на вісь OX:

$$F_{тер} - N_2 = 0 \Rightarrow F_{тер} = \mu N_1\ .$$

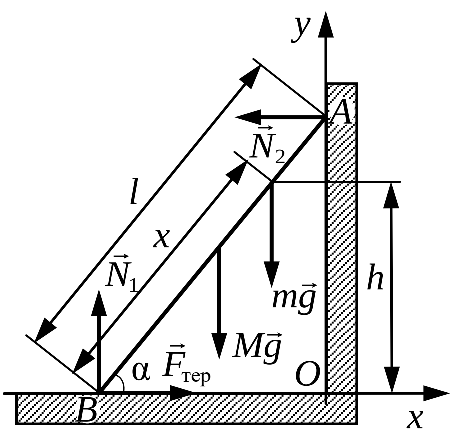


Рисунок 4.6

Отже,

$$N_2 = \mu N_1\ . \qquad (2)$$

Проєкція рівняння на вісь OY:

$$N_1 - Mg - mg = 0\ ,$$

$$N_1 = g(M+m). \quad (3)$$

Підставимо значення N_1 в N_2, одержимо:

$$N_2 = \mu g(M+m). \quad (4)$$

Підставимо значення N_2 в рівняння (1):

$$-\mu g(M+m)l\sin\alpha + mgx\cos\alpha + Mg\frac{l\cos\alpha}{2} = 0,$$

$$mx\cos\alpha = \mu(M+m)l\sin\alpha - \frac{Ml\cos\alpha}{2},$$

$$x = \frac{\left[\mu(M+m)\sin\alpha - \frac{M\cos\alpha}{2}\right]l}{m\cos\alpha}\sin\alpha,$$

$$h = \frac{\left[(M+m)\mu\sin\alpha - \frac{M\cos\alpha}{2}\right]}{m}l\cdot tg\alpha.$$

Відповідь: максимальна висота, на яку піднімається людина, дорівнює:

$$h = \frac{\left[(M+m)\mu\sin\alpha - \frac{M\cos\alpha}{2}\right]}{m}l\cdot tg\alpha.$$

Задача 3. *В однорідній тонкій круглій пластинці радіусом r вирізаний круг радіусом r/2. Визначити положення центра маси пластини.*

Дано:	Розв’язування
$R = r$	Вкладемо круг у виріз пластини.
$R_1 = r/2 = OO_1$	Тоді сила тяжіння великого диска
x – ?	$mg = m_1g + m_2g$.
$x = OC$	За правилом моментів сил (відносно точки O):

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0,$$

$$M_1 = -m_1gR_1 = -m_1g\frac{r}{2}.$$

Оскільки сила тяжіння великого диска ($m\vec{g}$) проходить через точку O, то момент цієї сили (M_2) дорівнює нулю: $M_3 = m_2gx$ (рис. 4.7).

Тоді

$$-m_1 g\frac{r}{2} + m_1 gx = 0.$$

Звідси витікає:

$$m_1 gx = m_1 g\frac{r}{2},$$

$$x = \frac{m_1 r}{2m_2}.$$

Виразимо маси та об’єми тіл:

$$m_1 = \rho V_1,\ m_2 = \rho V_2,$$

$$V_1 = S_1 h,\ V_2 = S_2 h.$$

Тоді

$$x = \frac{\rho S_1 hr}{2\rho S_2 h} = \frac{S_1 r}{2S_2}, \qquad (1)$$

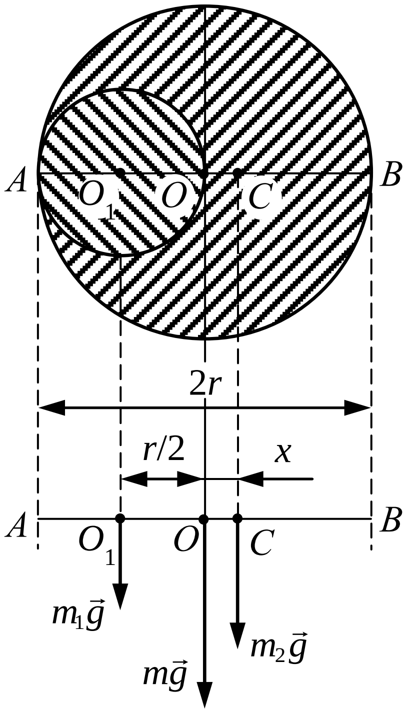


Рисунок 4.7

де S_1 – площа малого круга; S_2 – площа, яка дорівнює площі великого круга за вилученням площі малого круга: $S_2 = S - S_1$

Розпишемо S:

$$S_1 = \pi R_1^2 = \pi\frac{r^2}{4},$$

$$S = \pi R^2 = \pi r^2.$$

Тоді

$$S_2 = \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{4} = \frac{3}{4}\pi r^2.$$

Підставимо значення S_1 і S_2 у формулу (1) й одержимо:

$$x = \frac{\frac{\pi r^2}{4} r}{2\frac{3}{4}\pi r^2} = \frac{r}{6},\quad x = \frac{r}{6}.$$

Відповідь: центр мас пластинки зміститься вправо на $x = \frac{r}{6}$.

РОЗДІЛ 5. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

5.1. Механічна робота. Потужність

Нехай частка під дією сили $\vec{F}$ рухається по деякій траєкторії із точки 1 у точку 2 (рис. 5.1). У загальному випадку сила $\vec{F}$ може змінюватися як по величині, так і по напрямку. Розглянемо елементарне переміщення $d\vec{r}$, у межах якого силу $\vec{F}$ можна вважати постійною.

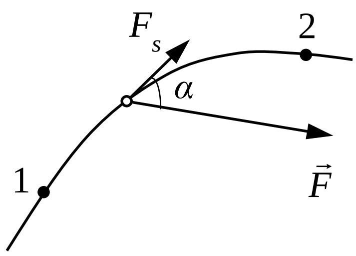


Рисунок 5.1

Елементарною роботою dA сили $\vec{F}$ по переміщенню $d\vec{r}$ називають величину, рівну скалярному добутку:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}\text{, або } dA = F\cos\alpha dr = F_S \cdot dS, \qquad (5.1)$$

де $F_S = F\cos\alpha dr$ – проєкція сили $\vec{F}$ на напрямок руху, $dS = |d\vec{r}|$.

Робота dA – величина алгебраїчна. Якщо кут $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то робота додатна, якщо $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то робота від'ємна. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ робота тотожно дорівнює нулю. Робота вимірюється в ***Джоулях*** (*Дж*). Розмірність Джоуля дорівнює добутку розмірності сили (*Н*) на розмірність переміщення: Дж = Н·м. Робота, здійснювана на кінцевому шляху *s*, дорівнює сумі елементарних робіт на окремих ділянках *ds* або інтегралу

$$A = \int_0^s F_S ds. \qquad (5.2)$$

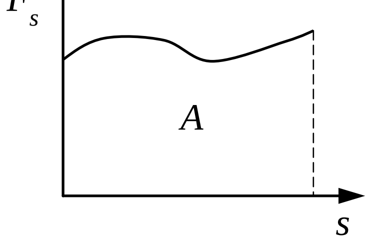


Рисунок 5.2

Роботі можна надати наочний геометричний зміст. Якщо сила F_s задана як F_s функція пройденого шляху *s*, то робота на цьому шляху виміряється площею, обмеженою кривою F_s(s), у координатах *s* та F_s (рис. 5.2).

Якщо на частку одночасно діють кілька сил, то робота результуючої сили дорівнює алгебраїчній сумі робіт, здійснюваних кожною із сил на тому ж переміщенні:

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \int \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... \right) d\vec{r} = \int \vec{F}_1 d\vec{r} + \int \vec{F}_2 d\vec{r} + ... = A_1 + A_2 + ... \ .$$

Величина, що характеризує швидкість виконання роботи силою $\vec{F}$, і ***рівна роботі, виконаній в одиницю часу, називається потужністю***:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{\upsilon} \ . \tag{5.3}$$

Величина потужності в системі СІ вимірюється у ***Ваттах*** (*Вт*), і Вт = Дж/с. Ми також знаємо ще одну одиницю виміру потужності – кінська сила: *1 к.с. = 736 Вт*.

5.2. Кінетична енергія. Теорема про кінетичну енергію

Розпишемо вираз для роботи (5.1), скориставшись другим законом Ньютона:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} d\vec{r} = m \vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2} \right). \tag{5.4}$$

Фізична величина, рівна

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} \ , \tag{5.5}$$

називається ***кінетичною енергією***. Відзначимо, що в різних інерціальних системах відліку швидкість тіла може бути різною. Отже, кінетична енергія залежить від вибору інерціальної системи відліку. Тут же відзначимо, що кінетична енергія – величина адитивна. З формули (5.4) випливає, що елементарна робота рівнодіючої всіх сил дорівнює повному диференціалу від кінетичної енергії. Якщо в результаті дії сили $\vec{F}$ швидкість тіла змінилася від υ_1 до υ_2, то, інтегруючи (5.4), отримуємо

$$A = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = T_2 - T_1. \qquad (5.6)$$

Або, ***збільшення кінетичної енергії тіла на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх сил, під дією яких відбувалося це переміщення.*** Формулу (5.6) називають теоремою про кінетичну енергію.

З формули (5.4) випливає, що кінетична енергія виміряється, як і механічна робота, у Джоулях.

Тепер розглянемо тіло маси *m*, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі. Кінетичну енергію знайдемо, просумувавши кінетичні енергії малих часток маси m_i, на які розіб’ємо тіло:

$$T = \sum_i \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 \rho_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i \rho_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Тут ρ_i – відстань від *i*-ої частки до осі обертання. Таким чином, кінетична енергія тіла, що обертається,

$$T = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (5.7)$$

І знову відзначимо схожість формул для поступального й обертального рухів – на цей раз кінетичних енергій поступального (5.5) і обертального рухів (5.7).

Тепер можна легко знайти вираз для роботи рівнодіючої всіх сил при обертанні тіла навколо нерухомої осі. На підставі теореми про кінетичну енергію (5.6) маємо

$$dA = dT = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega = J\omega\varepsilon dt = J\varepsilon d\varphi = Md\varphi. \qquad (5.8)$$

Тут ми скористалися основним законом динаміки обертального руху (4.9) $M = J\varepsilon$, а також врахували, що $d\omega = \varepsilon dt$. З формули (5.8) випливає, що при обертальному русі робота виконується моментом сил.

У випадку плоского складного руху кінетична енергія тіла буде складатися із двох частин – кінетичної енергії поступального руху його центра мас і кінетичної енергії обертання навколо центра мас із кутовою швидкістю ω:

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J\omega_c^2}{2}. \qquad (5.12)$$

5.3. Консервативні сили. Потенціальна енергія

У сучасному природознавстві прийнято вважати, що взаємодія тіл здійснюється за допомогою полів. Полем сил називають область простору, в кожній точці якої на частку діє сила, що закономірно змінюється від точки до точки. Інакше кажучи, якщо в кожній точці простору на матеріальну точку діють сили, то говорять, що в просторі визначене силове поле. Приклад силового поля – поле сили тяжіння. Нехай тіло переміщається із точки 1 у точку 2 (рис. 5.3). Обчислимо роботу, що здійснює сила ваги при цьому переміщенні.

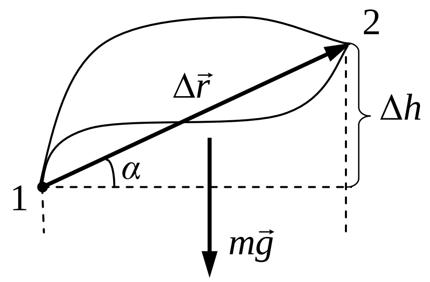


Рисунок 5.3

Відповідно до визначення механічної роботи (5.1) можемо записати

$$A = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r}. \qquad (5.13)$$

Тепер скористаємося обставиною, що поблизу поверхні Землі сила ваги постійна: $m\vec{g} = const$. Постійну величину можна винести з-під знака інтеграла й вираз (5.13) для роботи запишеться так:

$$A = m\vec{g}\int_1^2 d\vec{r}. \qquad (5.14)$$

Інтеграл у виразі (5.14) являє собою суму елементарних переміщень $d\vec{r}$, які робить тіло при своєму русі із точки 1 у точку 2. Очевидно, що сума всіх елементарних переміщень буде дорівнювати $\Delta\vec{r}$. Отже, вираз (5.14) приймає вигляд

$$A = m\vec{g}\Delta\vec{r} = mg\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -mg\left|\Delta\vec{r}\right|\sin\alpha = -mg\Delta h = -mg\left(h_2 - h_1\right), \quad (5.15)$$

де h_1 – висота, на якій перебуває тіло над поверхнею Землі в початковому положенні 1, і h_2 – висота в кінцевому положенні 2. А тепер найголовніше. При обчисленні роботи сили ваги ми нічого не говорили про траєкторію, по якій рухається наше тіло. Очевидно, що для будь-якої траєкторії, що веде із точки 1 у точку 2, вектор переміщення $\Delta\vec{r}$ буде тим самим, і згідно з (5.15), для всіх траєкторій робота сили ваги буде мати також те саме значення. Тобто, робота сили ваги не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки початковою й кінцевою висотою тіла над поверхнею Землі.

Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії, за якою тіло переходить із одного положення в інше, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла, називаються консервативними. У цьому випадку кожному положенню тіла в силовому полі можна зіставити деяку функцію $U(\vec{r})$ таку, що різниця значень цієї функції в точках 1 і 2 визначає роботу сил поля по переміщенню тіла між цими точками:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (5.16)$$

Функцію U називають потенціальною енергією тіла. Порівнюючи формули (5.15); (5.16), дійдемо до висновку, що потенціальна енергія тіла в полі сили ваги описується формулою

$$U = mgh, \quad (5.17)$$

де h – висота, на якій перебуває тіло над поверхнею Землі.

До консервативних сил відносяться й сили пружності. Знайдемо потенціальну енергію пружної деформації. Сила пружності (див. розділ 2, формула (2.10)) дорівнює

$$F = -kx\,, \tag{5.18}$$

тут x – зсув кінця пружини з положення рівноваги. Якщо ми будемо розтягувати або стискати пружину, то на підставі 3-го закону Ньютона робота зовнішньої сили, протилежно спрямованій силі пружності пружини, буде дорівнювати

$$A = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}. \tag{5.19}$$

Ця робота зовнішньої сили була витрачена на збільшення потенціальної енергії пружини. Якщо вважати, що енергія пружини в недеформованому стані дорівнює 0, то тоді

$$U = \frac{kx^2}{2}. \tag{5.20}$$

Потенціальну енергію часто називають енергією взаємодії. Дійсно, у першому прикладі взаємодіють тіло й Земля, у випадку пружини взаємодіють окремі частини одного тіла (нагадаємо, що сили пружності з'являються при зміні взаємного положення заряджених часток, з яких складається тіло).

5.4. Закон збереження механічної енергії

Найбільш загальною мірою різних форм руху матерії є її енергія. Механічна енергія вимірюється кількістю роботи, яку система тіл могла б здійснити. Розрізняють два види механічної енергії – кінетичну і потенційну. Внаслідок відносності руху кінетична енергія відносна, тобто система володіє різними кінетичними енергіями в різних системах координат. Практично недосяжна така конфігурація системи, при якій її потенційна енергія дорівнювала б нулю. Але процеси, що відбуваються в системі, пов'язані з переходом її від однієї конфігурації до іншої, тобто зі зміною потенційної енергії, що дозволяє прийняти за нуль потенційної енергії будь-яке її значення. Тому має сенс говорити про потенційну і кінетичну енергії системи тіл лише в обраній системі координат і при певному нульовому рівні потенційної енергії. Якщо здійснюють роботу внутрішні консервативні сили системи, змінюється її конфігурація (тільки консервативні сили залежать від взаємного розташування тіл системи). Отже, потенційна енергія системи вимірюється роботою, яку можуть зробити її внутрішні консервативні сили.

Переведемо систему з якогось стану 1 в стан 2. При цьому внутрішні консервативні сили здійснять роботу $dA_{1,2}$. При можливому зворотному переході системи в стан 1 внутрішні консервативні сили системи можуть зробити роботу $dA_{1,2}$. Робота цих сил по замкнутому контуру 1-2-1

$$dA_{1,2} + dA_{1,2} = 0\,.$$

Але можлива робота внутрішніх консервативних сил $dA_{1,2}$ вимірює потенційну енергію системи в стані 2 ($П_2$) стосовно стану 1 ($П_1$), тобто

$$П_2 - П_1 = dП = dA_{2,1} = -dA_{1,2}\,.$$

Таким чином,

$$dП = -dA\,,$$

де dA – робота внутрішніх консервативних сил у будь-якому процесі 1-2 (між нескінченно близькими конфігураціями), а $dП$ – зміна потенційної енергії в цьому процесі. Наприклад, якщо більш консервативні сили системи здійснюють негативну роботу (під зовнішнім впливом), конфігурація системи змінюється так, що відповідно збільшується потенційна енергія системи, і навпаки.

Розглянемо довільну систему тіл. Для кожного тіла цієї системи можна написати рівняння руху

$$\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt},$$

де $\vec{F}_i$ – рівнодіюча всіх сил, які діють на *i*-те тіло; m_i – маса; $\vec{\upsilon}_i$ – швидкість цього тіла.

За час dt i-те тіло переміщується на $d\vec{l}_i$. Робота, яку здійснює сила $\vec{F}_i$ на переміщені $d\vec{l}_i$, дорівнює

$$\vec{F}_i d\vec{l}_i = m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} d\vec{l}_i. \tag{5.21}$$

Врахуємо, що швидкість тіла на цьому переміщенні дорівнює $\vec{\upsilon}_i = \frac{d\vec{l}_i}{dt}$, отримаємо значення роботи

$$dA = \vec{F}_i d\vec{l}_i = m_i \vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i.$$

Написавши рівняння для кожного з n тіл системи і почленно склавши ці рівняння, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} dT_i = d\sum_{i=1}^{n} T_i = dT,$$

де $T = \sum_{i=1}^{n} dT_i$ – кінетична енергія системи. Зміна кінетичної енергії системи тіл рівна алгебраїчній сумі робіт усіх сил, що діють на тіла цієї системи. Якщо, наприклад, сумарна робота всіх сил дорівнює нулю, кінетична енергія системи не змінюється.

Доцільно з лівої частини виділити роботу внутрішніх консервативних сил, пов'язану зі зміною потенційної енергії системи:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i d\vec{l}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i d\vec{l}_i,$$

де $\vec{f}_i$ – внутрішні консервативні, а $\vec{\Phi}_i$ – всі зовнішні і внутрішні дисипативні сили, що діють на тіла системи;

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i d\vec{l}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i d\vec{l}_i = dT, \text{ або } dT - \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i d\vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i d\vec{l}_i. \tag{5.22}$$

Але робота внутрішніх консервативних сил зі зворотним знаком дорівнює зміні потенційної енергії системи за час dt:

$$-\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i d\vec{l}_i = -dA = d\Pi . \qquad (5.23)$$

Підставимо вираз (5.23) у формулу (5.22), отримаємо

$$dT + d\Pi = \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i d\vec{l}_i .$$

Отже, $d(T + \Pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i d\vec{l}_i$.

Зміна повної енергії системи дорівнює роботі внутрішніх дисипативних і всіх зовнішніх сил при цьому переході системи з одного стану в інший.

Зокрема, для замкнутої консервативної системи тіл

$$d(T + \Pi) = 0 \quad \text{та} \quad T + \Pi = const .$$

Ми отримали закон збереження енергії в механіці: повна енергія замкнутої консервативної системи є величина постійна.

Додаток

ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТА ФОРМУЛИ

Кінематика	
Рівномірний прямолінійний рух	
Рівняння зміни проєкції переміщення з часом	$S_x = \upsilon_x t$
Рівняння рівномірного прямолінійного руху	$x = x_0 + \upsilon_x t$
Середня шляхова швидкість	$\upsilon_{c.l} = \frac{l}{t} = \frac{l_1 + l_2 + ... + l_n}{t_1 + t_2 + ... + t_n}$
Середня швидкість переміщення	$\vec{\upsilon}_{c.S} = \frac{\vec{S}}{t} = \frac{\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + ... + \vec{S}_n}{t_1 + t_2 + ... + t_n}$
Правило додавання переміщень, де $\bar{S}$ – переміщення тіла у нерухомій системі відліку; $\bar{S}_1$ – переміщення тіла у рухомій системі відліку; $\bar{S}_2$ – переміщення рухомої системи відліку відносно нерухомої	$\vec{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$
Правило додавання швидкостей, де $\vec{\upsilon}$ – швидкість тіла у нерухомій системі відліку; $\vec{\upsilon}_1$ – швидкість тіла у рухомій системі відліку; $\vec{\upsilon}_2$ – швидкість рухомої системи відліку відносно нерухомої	$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$
Рівноприскорений прямолінійний рух	
Рівняння проєкції швидкості при рівноприскореному русі	$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$
Рівняння проєкції переміщення на вісь *Ox*	$S_x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t}{2}$ $S_x = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}$ $S_x = \frac{\upsilon_{0x} - \upsilon_x}{2} \cdot t$
Рівняння рівноприскореного прямолінійного руху	$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$
Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту	
Дальність польоту тіла	$l = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$

Максимальна висота підняття тіла	$h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_n - \frac{gt_n^2}{2}$
Час підняття на максимальну висоту	$t_0 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$
Рівномірний рух по колу	
Довжина дуги	$l = R\varphi$
Період обертання	$T = \frac{t}{N}$
Частота обертання	$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$
Лінійна швидкість	$\upsilon = \frac{l}{t} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$
Кутова швидкість	$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$
Модуль доцентрового прискорення	$a = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$
Динаміка	
Закони Ньютона	
Рівнодіюча сила	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$
Маса тіла	$m = \rho V$
Другий закон Ньютона	$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$
Третій закон Ньютона	$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
Сили в механіці	
Закон всесвітнього тяжіння	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
Сила тяжіння	$F_{тяж} = G\frac{M_З m_2}{r^2} = mg$
Прискорення вільного падіння на висоті h над поверхнею Землі	$g_h = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2} = g\frac{R_З^2}{(R_З + h)^2}$
Перша космічна швидкість (швидкість супутника, який рухається по коловій орбіті)	$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$
Сила пружності (закон Гука)	$F_{упр} = k\lvert x\rvert$
Механічне напруження, де E – модуль Юнга (пружності), $\varepsilon = \frac{\lvert\Delta l\rvert}{l_0}$ – відносне видовження	$\sigma = E\varepsilon$
Максимальна сила пружності	$F_{\max} = \sigma_м S$
Запас міцності	$n = \frac{\sigma_м}{\sigma}$

Жорсткість тіла, де l_0 – початкова довжина тіла, S – площа поперечного перерізу тіла	$k = \frac{ES}{l_0}$
Жорсткість системи двох паралельно з'єднаних пружин	$k_{пар} = k_1 + k_2$
Жорсткість системи двох послідовно з'єднаних пружин	$\frac{1}{k_{посл}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
Вага тіла, яке знаходиться у стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно	$P_0 = mg$
Вага тіла, яке рухається з прискоренням a, що направлене вертикально вгору	$P = m(g + a)$
Вага тіла, яке рухається з прискоренням a, що напрямлене вертикально вниз	$P = m(g - a)$
Вага тіла, яке рухається з прискоренням a, що напрямлене горизонтально	$P = m\sqrt{g^2 + a^2}$
Коефіцієнт перевантаження	$k = \frac{P}{P_0}$
Сила тертя ковзання	$F_{тр} = \mu N$
Сила тиску	$F = pS$
Елементи статики	
Момент сили, де l – плече сили	$M = Fl$
Динамічна умова рівноваги	$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0 \\ M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0 \end{cases}$
Закони збереження у механіці	
Імпульс тіла	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$
Другий закон Ньютона в імпульсній формі	$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$
Закон збереження імпульсу	$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = const$
Потенціальна енергія тіла, піднятого на висоту h	$E_p = mgh$
Потенціальна енергія деформованої пружини	$E_p = \frac{kx^2}{2}$
Кінетична енергія тіла	$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$
Повна механічна енергія тіла	$E = E_p + E_к$
Закон збереження енергії у замкнених механічних системах	$E_1 = E_2$
Закон збереження енергії при непружніх зіткненях	$E_1 = E_2 + Q$
Механічна робота	$A = FS\cos\alpha$

Теорема про потенціальну енергію	$A=-\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$
Теорема про кінетичну енергію	$A=\Delta E_к = E_{к2} - E_{к1}$
Зв'язок між роботою та повною енергією	$A=E_2 - E_1$
Механічна потужність	$P=\frac{A}{t}=F\upsilon\cos\alpha$
ККД механізма	$\eta=\frac{A_к}{A_з}=\frac{P_к}{P_з}$
Динаміка обертального руху	
Момент інерції системи (тіла)	$J=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$
Момент інерції полого та суцільного циліндрів (або диска) відносно осі симетрії	$J=mR^2$; $J=\frac{1}{2}mR^2$
Момент інерції шара відносно осі, що проходить через центр шара	$J=\frac{2}{5}mR^2$
Момент інерції тонкого стержня відносно осі, перпендикулярної стержню, перпендикулярній стержню і що проходить через його центр	$J=\frac{1}{12}mR^2$
Момент інерції тонкого стержня відносно осі, перпендикулярної стержню і що проходить через його кінець	$J=\frac{1}{3}mR^2$
Теорема Штейнера	$J=J_C+ma^2$
Кінетична енергія обертаючого тіла відносно нерухомої осі	$T_{вр}=\frac{J_z\omega^2}{2}$
Момент сили відносно нерухомої точки	$M=[rF]$
Момент сили відносно нерухомої осі	$M=[rF]_z$
Момент імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки	$L=[rp]=[r,m\upsilon]$
Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі	$L_z=\sum_{i=1}^{n} m_i\upsilon_i r_i=J_z\omega$
Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла	$M_z=J_z\varepsilon$; $M=\frac{dL}{dt}$
Закон збереження моменту імпульсу	$L=const$

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Прописні	Рядкові	Назва	Прописні	Рядкові	Назва	Прописні	Рядкові	Назва
Α	α	Альфа	Ι	ι	Ета	Ρ	ρ	Ро
Β	β	Бета	Κ	κ	Каппа	Σ	ς, σ	Сігма
Γ	γ	Гамма	Λ	λ	Лямбда	Τ	τ	Тау
Δ	δ	Дельта	Μ	μ	Мю	Υ	υ	**І-псілон**
Ε	ε	Е-псілон	Ν	ν	Ню	Φ	φ	Фі
Ζ	ζ	Дзета	Ξ	ξ	Ксі	Χ	χ	Хі
Η	η	Ета	Ο	ο	О-мікрон	Ψ	ψ	Псі
Θ	θ	Тета	Π	π	Пі	Ω	ω	О-мега

ПРИСТАВКИ ДО ПОЗНАЧЕННЯ ОДИНИЦЬ

фемто	10^{-15}	ф	f	мілі	10^{-3}	м	m	гекто	10^{2}	г	h
піко	10^{-12}	п	p	санти	10^{-2}	с	c	кіло	10^{3}	к	k
нано	10^{-9}	н	n	деци	10^{-1}	д	d	мега	10^{6}	М	M
мікро	10^{-6}	мк	μ	дека	10	да	da	гіга	10^{9}	Г	G

ОСНОВНІ ОДИНИЦІ

Назва фізичної величини та її позначення	Одиниця виміру фізичної величини	
	Назва одиниці вимірювання (в СІ)	Позначення одиниці вимірювання
Довжина *l*	метр	м
Час *t*	секунда	с
Швидкість υ		м/с
Прискорення *a*		м/с^2
Кутове переміщення φ	радіан	рад
Кутова швидкість ω		рад/с
Кутове прискорення ε		рад/с^2
Період *T*	секунда	с

Частота *n*		$\frac{1}{c} = c^{-1}$
Маса *m*	кілограм	кг
Сила *F*	ньютон	$\text{Н} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Імпульс тіла *p*		$\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Робота *A*	джоуль	Дж = Н·м
Енергія *E*	джоуль	Дж = Н·м
Потужність *P*	ват	$\text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$
Момент сили *M*	ньютон-метр	Н·м
Момент імпульсу *L*	джоуль-секунда	Дж·с
Момент інерції *I*		$\text{кг} \cdot \text{м}^2$
ККД механізму η		1
Тиск *p*	паскаль	$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$

ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ СТАЛІ

Гравітаційна стала	$G = 6{,}6731 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
Універсальна газова стала	$R = 8.31447 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
Атомна одиниця маси	$1\text{а.о.м.} = 1.66057 \cdot 10^{-27}\,\text{кг}$
Стала Планка	$h = 6.62607 \cdot 10^{-34}\,\text{Дж} \cdot \text{с}$
Елементарний заряд	$e = 1.60218 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$
Маса спокою електрона	$m_e = 9.10938 \cdot 10^{-31}\,\text{кг}$
Маса спокою протона	$m_p = 1.67262 \cdot 10^{-27}\,\text{кг}$
Молярний об’єм ідеального газу при нормальних умовах (p_0 = 101325 Па, T_0 =273,15 К)	$V_0 = 22.4138 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Число Авогадро	$N_A = 6.02214 \cdot 10^{-23}\,\text{моль}^{-1}$
Стала Больцмана	$k = \frac{R}{N_A} = 1.38065 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$
Стала Стефана-Больцмана	$\sigma = 5{,}6704 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$
Електрична стала	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}854188 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$

Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2{,}99792 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
Стала Фарадея	$F = 9{,}648 \cdot 10^{4}\ \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$

ПРИСКОРЕННЯ (приблизні значення)

Прискорений рух	Прискорення, м/с^2	Сповільнений рух	Прискорення (від'єм.), м/с^2
Потяг метро	1	Аварійне гальмування автомобіля	4…6
Гоночний автомобіль	4,5	Реактивний літак при посадці	5…8
Швидкісний пасажирський ліфт	0,9…1,6		
Пасажирський потяг	0,35	Парашутист під час наповнення купола парашута при швидкості падіння 60 м/с	близько 60
Трамвай	0,6		
Запуск ракети	30…90		
Снаряд в стволі гармати	100 000		

КІНЕМАТИЧНІ ПАРАМЕТРИ ПЛАНЕТ

Планети	Період обертання навколо Сонця $T_С$ (в роках)	Період обертання навколо осі T_0	Орбітальна швидкість υ_0, км/с	Швидкість звільнення υ, км/с	Число супутників N
Меркурій	0,241	88 днів	48,8	4,20	–
Венера	0,615	247 ± 5 днів	35,0	10,2	–
Земля	1,00004	23 ч 56 хв 4с	29,8	11,16	1
Марс	1,881	24 ч 37 хв 23с	24,2	5,01	2
Юпітер	11,86	9 ч 51 хв	13,06	59,5	12
Сатурн	29,46	10 ч 14 хв	9,65	35,4	9
Уран	84,01	10 ч 49 хв	6,78	22,2	5
Нептун	164,8	14 год (?)	5,42	24,8	2
Плутон	247,7	–	4,73	–	–
Луна	(супутник Землі)	27 днів 7 год 43 хв 11 с	–	2,37	–

ЗАЛЕЖНІСТЬ ШВИДКОСТІ ТІКАННЯ υ ВІД ВИСОТИ *H* НАД ПОВЕРХНЕЮ ЗЕМЛІ

H, 10^3 км	υ, км/с
0	11,19
0,5	10,77
1	10,40
2	9,76
5	8,37
10	6,98
20	5,50
30	4,68
40	4,15
50	3,76

ПЕРІОД ОБЕРТАННЯ *T* СУПУТНИКА ЗЕМЛІ НА РІЗНИХ ВИСОТАХ *H*

H, км	T, ч
0	1,41
250	1,49
500	1,58
750	1,68
1000	1,75
1500	1,93
1690	2,00
2000	2,12
5000	3,35
10 000	5,78
35 800	23,935

ГУСТИНА ТВЕРДИХ ТІЛ (при 20 °С)

Речовина	ρ, 10^3 кг/м^3	Речовина	ρ, 10^3 кг/м^3
Метали та сплави		*Дерево (повітряно-сухе)*	
Алюміній	2,7	Бальса	0,2
Бронза	8,7…8,9	Бамбук	0,4
Ванадій	6,02	Береза	0,7

Вісмут	9,8	Дуб, бук	0,7…0,9
Вольфрам	19,34	Залізне дерево (бакаут)	1,1…1,4
Германій	5,3	Кедр	0,5…0,6
Дюралюміній	2,79	Горіх	0,6…0,7
Залізо	7,88	Сосна, ялина	0,4…0,5
Золото	19,31	Чорне дерево	1,1...1,3
Кобальт	8,8	Ясень, червоне дерево	0,6…0,8
Константан	8,88	*Мінерали*	
Кремній	2,3	Алмаз	3,51
Латунь	8,4…8,7	Апатит	3,16…3,22
Магній	1,76	Асбест	2,35…2,6
Манганін	8,5	Барит	4,48
Мідь	8,93	Берил	2,67…2,72
Молібден	10,2	Графіт	2,21…2,25
Натрій	0,975	Кальцит	2,6…2,8
Нікелін	8,77	Каолініт	2,54…2,60
Нікель	8,9	Кварц	2,65
Ніобій	8,57	Корунд	4,00
Олово	7,29	Слюда	2,6…3,2
Пермаллой	8,6	*Горні породи*	
Пермендур	8,2…8,3	Базальт	2,8…3,2
Платина	21,46	Боксити	2,9…3,5
Плутоній	19,25	Граніти	2,5…3,0
Свинець	11,35	Кам’яне вугілля (сухе)	1,2…1,5
Срібло	10,5	Крейда (повітряно-суха)	2,0
Сталь	7,7…7,9	Мрамор	2,5…2,8
Супермаллой	8,87	*Пластмаси та шаруваті пластики*	
Таллій	11,86		
Тантал	16,6	Амінопласти шаруваті	1,4
Титан	4,5	Вініпласт	1,38…1,4
Торій	11,71	Плексіглас	1,18
Уран	19,1	Полівініловий пластикат	1,34…1,4
Хром	7,15	Полістирол	1,06
Цинк	7,15	Текстоліт	1,3…1,4
Цирконій	6,5	Фенопласт текстолітовий	1,34…1,4

Чувун	7,0	Фторопласти	2,1…2,4
Різноманітні матеріали		Целлон	1,3
Бакелітовий лак	1,4		
Віск бджолиний білий	0,95…0,96		
Кість	1,8…2,0		
Льод (при 0^0 С)	0,917		
Резина тверда звичайна	1,2		
Скло зеркальне	2,55		
– кварцеве	2,21		
– пірекс	2,59		
– звичайне	2,5		
– термометричне	2,59		
Фарфор	2,2 – 2,4		
Ебоніт	1,2		
Бурштин	1,1		

ГУСТИНА ГАЗІВ ТА ПАРІВ

(при 0 °С і тиску 760 мм рт. ст.)

Речовина	ρ, кг/м^3	Речовина	ρ, кг/м^3
Азот	1,251	Неон	0,900
Аміак	0,771	Озон	2,139
Аргон	1,783	Окис вуглецю	1,25
Ацетилен	1,173	Хлор	3,22
Водень	0,08988	Насичена пара при 0 °С	
Повітря	1,293		
Гелій	0,1785	Бензол	0,012
Двоокис вуглецю	1,977	Водяна пара	0,005
Кисень	1,429	Етиловий спирт	0,033
Криптон	3,74	Етиловий ефір	0,83

ГУСТИНА РІДИН (при 20 °С)

Речовина	ρ, 10^3 кг/м^3	Речовина	ρ, 10^3 кг/м^3
Азотна кислота	1,51	Молоко середньої жирності	1,03
Анілін	1,02	Морська вода	1,01…1,03
Ацетон	0,791	Мурашина кислота	1,22
Бензин	0,68 – 0,72	Нафта	0,76…0,85

Бензол	0,879	Нітробензол	1,2
Бром	3,12	Нітрогліцерин	1,6
Вода важка	0,99823 1,1086	Ртуть	13,55
		Сіркова кислота	1,83
Гексан	0,660	Соляна кислота (38%)	1,19
Гептан	0,684		
Гліцерин	1,26	Хлороформ	1,489
Масло вазелінове – машинне	0,8 0,9	Толуол	0,866
		Оцтова кислота	1,049
Метиловий спирт	0,792	Етиловий спирт	0,79

КОЕФІЦІЄНТИ ТЕРТЯ КОВЗАННЯ ДЛЯ РІЗНОМАНІТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Поверхні, що труться	*k*
Бронза по бронзі	0,2
Сталь по сталі	0,18
Дерево сухе по дереву	0,25…0,5
Дерев'яні полози по снігу та льоду	0,035
те ж, але полози оббиті залізом	0,02
Дуб по дубу вздовж волокон	0,48
те ж поперек волокон одного тіла і вздовж волокон другого	0,34
Канат прядив'яний мокрий по дубу	0,33
Канат прядив'яний сухий по дубу	0,53
Шкіряний ремінь вологий по металу	0,36
Шкіряний ремінь вологий по дубу	0,27…0,38
Шкіряний ремінь сухий по металу	0,56
Колесо зі сталевим бандажем по сталевому рельсу	0,16
Лід по льоду	0,028
Мідь по чавуну	0,27
Метал вологий по дубу	0,24…0,26
Метал сухий по дубу	0,5…0,6
Підшипник ковзання при мастилі	0,02…0,08
Гума (шини) по твердому ґрунту	0,4…0,6
Гума (шини) по чавуну	0,83
Змащений жиром шкіряний ремінь по металу	0,23
Сталь (або чавун) по феродо * і райбесту *	0,25…0,45
Сталь по залізу	0,19
Сталь по льоду (ковзани)	0,02…0,03
Сталь по сталі ковзани	0,18

Сталь по чавуну	0,16
Фторопласт по нержавіючій сталі	0,064…0,080
Фторопласт-4 по фторопласту ковзани	0,052…0,086
Чавун по бронзі	0,21
Чавун по чавуну	0,16
Примітка. Зірочкою відзначені матеріали, що застосовуються в гальмових і фрикційних пристроях	

МЕЖІ МІЦНОСТІ ДЕЯКИХ МАТЕРІАЛІВ (кг/мм^2)

Матеріали	Межа міцності	
	при розтягуванні	при стисканні
Амінопласти шаруваті	8	20
Бакеліт	2…3	8…10
Бетон	–	0,5…3,5
Вініпласт	4	8
Гетинакс	15…17	15…18
Граніт	0,3	15…26
Графіт	0,5…1,0	1,6…3,8
Дуб (при 15 % вологості) вздовж волокон	9,5	5
те ж поперек волокон	–	1,5
Цегла	–	0,74…3
Латунь, бронза	22…50	–
Лід (0 °С)	0,1	0,1…0,2
Пінопласт плитковий	0,06	–
Поліакрилат (оргскло)	5	7
Полістирол	4	10
Сосна (при 15 % вологості) вздовж волокон	8	4
те ж поперек волокон	–	0,5
Сталь для конструкцій	38…42	–
Сталь кремнехромомарганцевиста	155	–
Сталь машиноподелочна (вуглецева)	32…80	–
Сталь рельсова	70…80	–
Текстоліт ПТК	10	15…25
Фенопласт текстолітовий	8…10	10…6
Фторопласт-4	2	–
Целлон	4	16
Целулоїд	5…7	–

Чавун білий	–	до 175
Чавун серій дрібнозернистий	21…25	до 140
Чавун сірий звичайний	14…18	60…100

МОДУЛІ ПРУЖНОСТІ ТА КОЕФІЦІЄНТИ ПУАССОНА

Назва матеріала	Модуль Юнга E, 10^7 Н/м^2	Модуль зсуву G, 10^7 Н/м^2	Коефіцієнт Пуассона μ
Алюмінієва бронза, лиття	10300	4100	0,25
Алюміній	6300…7000	2500…2600	0,32…0,36
Бетон	1500…4000	700…1700	0,1…0,15
Вісмут	3200	1200	0,33
Граніт, мармур	3500…5000	1400…4400	0,1…0,15
Дюралюміній катаний	7000	2600	0,31
Вапняк щільний	3500	1500	0,2
Інвар	13500	5500	0,25
Кадмій	5000	1900	0,3
Каучук	0,79	0,27	0,46
Кварцова нитка (плавлена)	7300	3100	0,17
Константан	16000	6100	0,33
Латунь корабельна катана	9800	3600	0,36
Латунь холоднотягнута	8900…9700	3400…3600	0,32…0,42
Манганін	12300	4600	0,33
Мідь, лиття Мідь прокатана Мідь холоднотягнута	8200 10800 12700	 3900 4800	 0,31…0,34 0,33
Нікель	20400	7900	0,28
Плексиглас	525	148	0,35
Резина м’яка вулканізована	0,15…0,5	0,05…0,15	0,46..0,49
Срібло	8270	3030	0,37
Сталі леговані	20600	8000	0,25…0,30
Сталі вуглецеві	19500…20500	800	0,24…0,28
Стальне лиття	17000		
Скло	4900…7800	1750…2900	0,2…0,3
Титан	11600	4400	0,32
Фосфориста бронза катана	11300	4100	0,32…0,35
Целулоїд	170…190	65	0,39
Цинк катаний	8200	3100	0,27
Чавун білий, сірий	11300…11600	4400	0,23…0,27
Чавун ковкий	15000		

ЛІТЕРАТУРА

1. Мочалов, А. А. Курс физики [Текст] : учеб. пособ. : в 2 т. / А. А. Мочалов. – Николаев : НУК, 2008. – 560 с.

2. Трофимова, Т. И. Курс физики [Текст] : учеб. пособ. / Т. И. Трофимова – М. : Высш. школа, 1985. – 432 с.

3. Соколович, Ю. А. Фізика [Текст] : довідник / Ю. А. Соколович, Г. С. Богданова. – Х. : Ранок, 2002. – 464 с.

4. Савельев, И. В. Курс физики. Механика. Молекулярная физика. [Текст] : учеб. пособ. : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – 352 с.

5. Ушкац, М. В. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка [Текст] : метод. посіб. / М. В. Ушкац, С. С. Коваль. – Миколаїв : НУК, 2008. – 214 с.

6. Кучерук, І. М. Загальний курс фізики [Текст] : навч. посіб. : у 3 т. / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. – Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика. – К. : Техніка, 1999. – 536 с.

7. Зачек, І. Р. Курс фізики [Текст] : навч. посіб. / І. Р. Зачек, І. М. Кравчук, Б. М. Романишин, В. М. Габа, Ф. М. Гончар. – Львів : Вид-во «Бескид Біт», 2002. –376 с.

8. Кириллов, В. М. Решение задач по физике : учебное пособие / В. М. Кириллов и др. – М. : КомКнига, 2006. – 286 с.

9. Кингсеп, А. С. Основы физики. Курс общей физики. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика : учеб. пособие / А. С. Кингсеп, Г. Р. Локшин, О. А. Ольхов. – М., 2001. – 400 с.

10. Иванов, А. Е. Механика. Молекулярная физика и термодинамика [Текст] : учебное пособие / А. Е. Иванов, С. А. Иванов. – М., 2016.

11. Бурунина, Ж. Ю. [Текст] : учеб. пособ. / Ж. Ю. Бурунина, М. В. Ушкац, С. С. Коваль, Н. А. Шаповал, К. Д. Евфимко, А. А. Мочалов. – Николаев, 2020. – 192 с.

ЗМІСТ

Для нотаток

Навчальне видання

БУРУНІНА Жанна Юріївна
ШАПОВАЛ Наталя Олександрівна

МЕХАНІКА

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів заочної форми навчання

Комп'ютерне верстання *В. В. Москаленко*
Коректор *О. Є. Вакула*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 4,9. Тираж 100 прим. Вид. № 15. Зам. № 1506-16.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.