

Міністерство освіти і науки України
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
Херсонська філія

Л.І. Коростильов, О.Є. Лугінін,
В.В. Спіхтаренко, Р.Ю. Коршиков, С.В. Кліменков С.В. Терлич

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник

2-е видання, перероблене та доповнене
За редакцією
д-ра техн. наук, професора Л.І Коростильова

Рекомендовано
Вченою радою Національного університету
кораблебудування імені адмірала Макарова

Миколаїв 2019

УДК 539.3/.8
ББК 30.121

Рекомендовано

Вченою радою Національного університету кораблебудування
імені адмірала Макарова

від _____ 2017 року, протокол №

Рецензенти:

Ю.М. Коробанов д.т.н., проф. Національний університет
кораблебудування імені адмірала Макарова

А.В. Букетов д.т.н., проф., Херсонська державна
морська академія;

К83 Коростильов Л.І. Опір матеріалів: Навчальний посібник/
Л.І. Коростильов, О.Є. Лугінін, В.В. Спіхтаренко, С.В. Терлич.
За редакцією д-ра техн. наук, професора Л.І. Коростильова. -
Миколаїв: Видавництво НУК, 2017. – 300 с.

У посібнику наводяться основи теорії опору матеріалів за темами навчальної програми: вступ до дисципліни; напруження та деформації в пружному тілі; розтягання-стискання ступеневого бруса; зрізання та зминання з'єднувальних елементів конструкцій; геометричні характеристики плоских перерізів бруса; кручення бруса; механічні характеристики конструкційних матеріалів і види їх експериментального визначення; згинання балок; стійкість прямолінійних стержнів; міцність при динамічному навантаженні; додаткові питання опору матеріалів (концентрація напружень; поняття про втомленість, повзучість та релаксацію матеріалів; стислі відомості про розрахунки балок в області пластичних деформацій).

Наводяться багаточисленні приклади рішення типових задач за розглянутими темами та завдання для індивідуальної роботи.

У другому виданні частково перероблені та доповнені окремі розділи посібника з доповненням інформації за розглянутими темами дисциплін.

Посібник призначено для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання у їх самостійній роботі та виконанні індивідуальних розрахункових робіт.

© Л.І. Коростильов, О.Є. Лугінін,
В.В. Спіхтаренко, Р.Ю. Коршиков,
С.В. Кліменков, С.В. Терлич, 2019
© Видавництво НУК

ЗМІСТ

ВСТУП.....	10
ЧАСТИНА I ПРОСТІЙШІ ВИДИ ДЕФОРМУВАННЯ	14
<i>1 Основні поняття, положення та гіпотези опору матеріалів</i>	13
1.1 Предмет і завдання дисципліни	14
1.2 Історія розвитку науки опору матеріалів	15
1.3 Типи елементів конструкцій	20
1.4 Розрахункові схеми і види навантажень	22
1.5 Припущення та гіпотези опору матеріалів	25
2 Напруження і деформації в пружному тілі	28
2.1 Метод перерізів при визначенні внутрішніх зусиль	28
2.2 Напруження та деформації їх типи	30
2.3 Деформації. Типи деформацій	32
3 Розтягання-стискання ступеневого бруса	37
3.1 Статично визначувані задані розтягання-стискання бруса.....	37
3.2 Рішення типових задач визначення характеристик розтягання-стискання бруса. Завдання для індивідуальної роботи.....	41
3.3 Статично невизначувані задачі позовжнього навантаження бруса	49

4 Геометричні характеристики плоских перерізів	55
4.1 Площі плоских перерізів бруса.....	56
4.2 Статичні моменти площі перерізу і координати його центра ваги.....	57
4.3 Моменти інерції площі плоского перерізу та їх типи.....	59
4.4 Приклад типового розрахунку геометричних характеристик перерізу. Завдання для індивідуальної роботи.....	65
5 Механічні характеристики конструкційних матеріалів і методи їх експериментального визначення	69
5.1 Загальні поняття про механічні характеристики матеріалів і їх визначення.....	69
5.2 Статистичні випробування на розтягання (стискання) зразків матеріалу. Діаграми випробувань	71
5.3 Механічні характеристики пластичності і твердості матеріалів	77
6 Зрізання і зминання з'єднаних елементів конструкцій .	79
6.1. Основні поняття про деформації зрізу (зсуву) і змину.....	80
6.2 Практичні формули для розрахунку міцності заклепкових, болтових, шлицевих і зварних з'єднань	83
6.3 Рішення типових задач про міцність заклепкових і зварних з'єднань. Завдання для індивідуальної роботи	86

7 Кручення вала.....	93
7.1 Крутий момент в поперечному перерізі вала	93
7.2 Напруження і кутові переміщення вала круглого поперечного перерізу.....	96
7.3 Рішення типової задачі про розрахунок кручення вала. Завдання для індивідуальної роботи	100
ЧАСТИНА 2. ЗГИНАННЯ БАЛОК ТА СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНІВ. ДОДАТКОВІ ПИТАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ.....	90
8 Згинання балок	Ошибка! Закладка не определена..90
8.1 Загальні положення про згинання. Опорні зв'язки і опорні реакції	104
8.2 Визначення опорних реакцій балок	109
8.3 Рішення типових задач з визначення опорних реакцій. Завдання для індивідуальних робіт	116
8.4 Поперечні сили і згинальні моменти при згинанні балок.....	120
8.5 Диференціальні залежності між параметрами згинання балки	129
8.6 Рішення типових задач з побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів. Завдання для індивідуальної роботи	134
8.7 Напруження в поперечному перерізі балок при згинанні та їх розрахунок на міцність	146

8.8	Рішення типового завдання з перевірки міцності балки. Завдання для індивідуальної роботи	153
8.9	Визначення переміщень балок при поперечному згинанні.....	160
8.9.1	Поняття про вертикальні переміщення балки. Диференціальне рівняння пружної лінії балки	160
8.9.2	Визначення переміщень балки шляхом інтегрування рівняння її пружної лінії балки	162
8.9.3	Обчислення переміщень балки методом початкових параметрів	169
8.9.4	Рішення типових задач з визначення переміщень балки методом початкових параметрів. Завдання для індивідуальної роботи	172
8.9.5	Обчислення переміщень балки енергетичними методами.....	179
8.9.6	Рішення типових задач з визначення переміщень балки енергетичними методами. Завдання для індивідуальної роботи	186
8.10	Розрахунки при згинанні статично невизначуваних балок.....	191
8.10.1	Однопрогонові балки.....	191
8.10.2	Нерозрізні багатопрогонові балки	197
9	Складний опір бруса	201
9.1	Загальні положення про складний опір	201

9.2. Косе згинання	202
9.3 Згинання з розтягуванням (стисканням).....	Ошибка!
Закладка не определена.	
9.4 Згинання з крученням	Ошибка! Закладка не определена.
9.5 Рішення типових задач на складний опір. Завдання для індивідуальної роботи.	213
10 Стійкість прямолінійних стержнів	222
10.1 Суть явища втрати стійкості стержня	222
10.2 Ейлерова критична сила і її обчислення при різних граничних умов стержнів. Ейлерове напруження	225
10.3 Критичні напруження і способи їх визначення .	229
10.4. Рішення типових задач з розрахунку стійкості стержнів. Завдання для індивідуальної роботи	234
11 Міцність при динамічних навантаженнях	243
11.1 Поняття про динамічну дію навантаження на елементи конструкцій. Сили інерції	243
11.2 Визначення динамічних напружень і переміщень при ударі.....	244
11.3 Рішення типових задач при дії ударного навантаження. Індивідуальні завдання за розрахунком міцності при ударі	246
12 Додаткові питання опору матеріалів	251
12.1 Явище концентрації напружень	251

12.2 Втомна міцність деталей машин і елементів конструкцій.....	253
12.3. Короткі відомості про повзучість і релаксацію матеріалів.....	258
12.4 Основні поняття про розрахунок елементів конструкцій в області пластичних деформацій	262
12.4.1 Розрахунок елементів конструкції по несучій спроможності.....	262
12.4.2 Розрахунок несучої спроможності бруса при розтягуванні (стисканні)	266
12.4.3 Розрахунок несучої спроможності балок при поперечному згинанні	267
ТЕСТИ І КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ	275
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	293
ДОДАТОК А. ОРІЄНТОВНІ ЗНАЧЕННЯ ДОПУСТИМИХ НАПРУЖЕНЬ МАТЕРІАЛІВ.....	295
ДОДАТОК Б. МОДУЛІ ПРУЖНОСТІ ТА КОЕФІЦІЄНТИ ПУАССОНА	296
ДОДАТОК В. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЯКИХ СТАЛЕЙ	297
ДОДАТОК Г. КОЕФІЦІЄНТИ ЛІНІЙНОГО РОЗШИРЕННЯ МАТЕРІАЛІВ (НА 1 ⁰ С).....	299

ДОДАТОК Д. ЕЛЕМЕНТИ ЗГИНАННЯ СТАТИЧНО
НЕВИЗНАЧУВАНИХ БАЛОК.....303

ДОДАТОК Ж. СОРТАМЕНТИ КАТАНИХ ПРОФІЛІВ
СТАЛЕВИХ БАЛОК.....

ВСТУП

Дисципліна «Опір матеріалів» є складовою частиною навчальної програми, яка забезпечує базову інженерну підготовку майбутніх фахівців. Вона відноситься до циклу дисциплін фундаментальної підготовки студентів за відповідними галузями та спеціальностями і базується на знаннях, отриманих студентами при вивченні таких дисциплін, як «Вища математика», «Фізика», «Теоретична механіка».

Мета дисципліни полягає в освоєнні інженерних методів розрахунку найпростіших елементів машин, механізмів і конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість, а також у підготовці студентів при майбутньому освоєнні спеціальних міцнісних наук.

Завдання при вивченні дисципліни полягають в ознайомленні студентів з механічними характеристиками конструкційних матеріалів та методиками їх експериментального визначення при простих видах деформування, оволодінні навичками використання основних інженерних методів і способів розрахунку найпростіших елементів машин, механізмів і конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість від дії зовнішніх навантажень і температурного впливу.

До вимог щодо знань студентів при вивченні дисципліни відносяться ті, коли студент повинен

знати:

– закони і види деформування при простих і складних видах навантаження;

- суть методу плоских перерізів при визначенні внутрішніх силових факторів;

- характер розподілу і розрахункові формули визначення напружень в поперечних перерізах стержневих елементів конструкцій при типових видах деформування;

- умови міцності, жорсткості та стійкості;

вміти:

- створювати розрахункову схему реальних конструкцій та їх елементів;

- будувати епюри внутрішніх силових факторів і здійснювати їх аналіз;

- виявляти небезпечні перерізи стержнів і знаходити в них найбільш напружені точки;

- аналізувати напружений стан деталей машин, механізмів, окремих елементів конструкцій і правильно вибирати критерії міцності;

- забезпечувати умови міцності, жорсткості і стійкості елементів реального об'єкта;

мати уявлення:

- про механізми деформування і руйнування пружних, пластичних і крихких ізотропних конструкційних матеріалів при простих статичних, повторно–статичних і динамічних навантаженнях;

- про просторові переміщення точок стержнів при деформації від зовнішнього навантаження.

Даний посібник призначений для забезпечення самостійної та індивідуальної роботи студентів денної та заочної форм навчання. Він містить короткі відомості з теорії основних тем дисципліни, приклади розв'язання типових задач та варіанти домашніх індивідуальних завдань за темами дисципліни.

Посібник складається з двох частин.

У *першій частині* посібника розглядаються наступні розділи (теми) навчальної дисципліни:

- а) основні поняття, положення і гіпотези опору матеріалів;
- б) напруження і деформації в пружному тілі;
- в) розтягання-стискання ступеневого бруса;
- г) геометричні характеристики плоских перерізів бруса;
- д) механічні характеристики матеріалів і способи їх експериментального визначення;
- ж) зрізання і зминання елементів конструкцій;
- з) кручення бруса;

Друга частина посібника присвячена розгляду таких розділів:

- а) згинання балок;
- б) стійкість прямолінійних стержнів;
- в) міцність при динамічному навантаженні;
- г) додаткові питання опору матеріалів, де наведені короткі відомості з тем:

- концентрація напружень;
- втомна міцність, повзучість і релаксація матеріалів;
- основи розрахунку елементів конструкцій в області

пластичних деформацій.

У додатках до посібника наведені дані орієнтованих значень допустимих нормальних напружень матеріалів, модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона, коефіцієнтів лінійного розширення матеріалів, таблиць згинання деяких статично визначуваних балок та сортаментів катаних профілів сталевих балок.

Поточний і підсумковий контроль успішності студентів з опору матеріалів здійснюється шляхом проведення письмового тестування, заліків та іспитів.

ЧАСТИНА І ПРОСТІЙШІ ВИДИ ДЕФОРМАУВАННЯ

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ПОЛОЖЕННЯ І ГІПОТЕЗИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

1.1 Предмет і завдання дисципліни

Опір матеріалів – це інженерна наука, що має на меті розрахункове забезпечення надійності простих елементів машин, механізмів та конструкцій інженерних споруд. Тут під надійністю треба розуміти забезпечення безперебійності їх роботи за відведений час експлуатації. В основі надійності лежать вимоги щодо міцності, жорсткості і стійкості елементів, які вивчаються в опорі матеріалів.

На відміну від теоретичної механіки, де розглядаються абсолютно жорсткі (не деформовані) тіла, в опорі матеріалів використовується *модель твердого деформованого тіла*, що змінює свої розміри і форму при зовнішніх навантаженнях.

Предметом опору матеріалів є розгляд методів розрахунку міцності, жорсткості і стійкості найпростіших частин машин, механізмів і елементів конструкцій споруд при заданих видах навантаження. До *задач* дисципліни відноситься розрахункове обґрунтування надійності реальних деформованих тіл з вимог щодо їх міцності, жорсткості і стійкості.

Під *міцністю* розуміють здатність елементів об'єкта розгляду не руйнуватися під дією зовнішніх навантажень шляхом застосування відповідних матеріалів і вибору їх розмірів - це

перша задача. Жорсткість – це здатність об'єктів при навантаженні отримувати деформації і переміщення не більше допустимих величин (*друга задача*). *Стійкість* – здатність елементів об'єкта зберігати початкову форму (прямолінійну чи іншу) при діючих стискаючих навантаженнях (*третьа задача*). В даний час формується ще й *четверта задача*, з якою пов'язано оптимальне проектування конструкцій (найменша маса, розміри, вартість) при забезпеченні їх міцності, жорсткості і стійкості.

1.2 Історія розвитку науки опору матеріалів

Зародження науки про міцність споруд відноситься до глибокої давнини. Ще давньогрецький вчений Архімед намагався доводити міцність кріпосних стін поселень, що обложені ворогами. Відомі його спроби вирішення проблеми про згин консольної балки з цегляної кладки.

Припускають, що одним з перших учених, який експериментально вивчав міцність різних матеріалів і конструкцій, був італійський вчений і художник *Леонардо да Вінчі* (1452 – 1519 рр.). Він перевіряв міцність дроту при розтягуванні, випробував балки на міцність і жорсткість при згинанні. Однак результати його робіт не дійшли повністю до наступних поколінь вчених та інженерів.

Вважається, що зародження науки опору матеріалів датується 1638 роком після виходу в світ знаменитої книги видатного італійського вченого *Галілео Галілея* (1564 – 1642 рр.) «Бесіди і математичні докази, що стосуються двох нових галузей

наук». У цій роботі Галілеєм поставлена проблема про міцність тіл і зроблена перша в історії спроба вирішити це питання на науковій основі. Він досліджує вплив власної ваги на міцність балок, проводить випробування бруса на розтягання, вперше вирішує задачу про згинанні балки, узагальнює досвід проектування і будівництва дерев'яних кораблів з точки зору забезпечення їх міцності. Однак результати і висновки його досліджень носили загальний характер і мали помилкові положення, були не повними і обмеженими. Тому теорія згинання балок, розпочата Галілеєм, була створена лише в XVIII - XIX століттях вченими Маріоттом, Бернуллі, Кулоном, Нав'є, Д.І. Журавським та ін.

У XVIII ст. стрімко розвивається математика, астрономія та інші науки, в тому числі і опір матеріалів. У 1678 році вийшла книга англійського вченого *Роберта Гука* (1635 – 1703 рр.) «Про відновлення здатності або про пружність» - перша друкована праця по дослідженню пружних властивостей матеріалів. Він вперше виклав закон пропорційності між силою і видовженням у пружній стадії роботи матеріалу.

Велику експериментальну роботу по дослідженню різних балок на двох опорах виконав французький вчений *Е. Маріотт* (1620 – 1684 рр.). Він, зокрема, уточнив формулу Галілея для розрахунку балок на згинання і показав, що балка, завантажена зосередженою силою посередині і жорстко закріплена на кінцях, витримує навантаження в два рази більшу, ніж така ж шарнірно оперта балка.

Істотний внесок у вивчення міцності пружних властивостей матеріалів вніс французький вчений *Шарль Кулон* (1736 – 1806 рр.). Він багато уваги приділяв питанням міцності і жорсткості балок при згині, вперше вивів формулу для кута закручування вала з круговим перерізом від дії закручувального моменту.

У Росії питання міцності знайшли відображення в наукових працях початку XVIII століття. В «Регламенті адміралтейства» (1722 р.) опубліковані правила обов'язкових механічних випробувань заліза на міцність. Видатний російський вчений *М.В. Ломоносов* (1711 – 1765 рр.) вивчав твердість матеріалів і їх міцність при стисненні. Він сконструював і побудував кілька приладів для дослідження механічних властивостей матеріалів. Його можна вважати одним з основоположників вчення про твердість матеріалів.

Теоретичні дослідження пружних властивостей міцності матеріалів в цей період проводили Л. Ейлер (1707 – 1783 рр.), французький учений *Ж. Лагранж* (1736 – 1813 рр.).

Сучасник М.В. Ломоносова академік *Леонард Ейлер* вперше визначив критичне значення стискуючої поздовжньої сили, яка прикладена до прямолінійного стержня (1744 р.). Ця стискуюча сила і викликані нею стискуючі напруження увійшли в сучасні міцнісні науки під назвою «ейлерова сила», «ейлерове напруження». Дослідження Ейлера охоплюють задачі про розподіл удару і поперечні коливання стержнів. Він також вперше

розглянув корабель як балку, яка отримує згин на воді, створив теорію згину і стійкості стержнів.

Ж. Лагранж став одним з основоположників енергетичних методів в міцнісних науках, а також теорії згину пластин.

В історії розвитку міцності наук, в тому числі і опорі матеріалів, в XVIII - XIX ст. важливу роль зіграли дослідження таких великих вчених, як Нав'є (1785 – 1836 рр.), Коші (1789 – 1857 рр.), Пуассона (1781 – 1840 рр.), Сен-Венана (1797 – 1886 рр.), Ламе (1795 – 1876 рр.), Юнга (1773 – 1829 рр.) та ін. Зокрема, *Нав'є* було завершено складний шлях пошуків рішень задачі про згинання балки, тривалий у часі майже двісті років. Нав'є з часів Галілео Галілея дав правильне рішення цієї задачі, вперше обґрунтував поняття напруження, сформулював основні рівняння теорії пружності. *Пуассоном* введено в науку поняття коефіцієнта як відношення поперечної до повздовжньої деформації стержня при розтягуванні, який у подальшому отримав назву «коефіцієнта Пуассона». *Ламе* вперше сформулював рівняння прямої задачі теорії пружності в переміщеннях, що носять його ім'я. Він спроектував випробувальну машину, в якій для навантаження використовувався гідропривід. *Коші* отримав диференціальні залежності між деформаціями і переміщеннями пружного тіла. У 1807 році англійський вчений *Томас Юнг* ввів поняття модуля пружності матеріалу. Він звернув увагу на те, що закон Гука справедливий при пружній поведінці матеріалу.

У 1855 році опубліковані роботи видатного російського інженера *Д.І. Журавського* (1821 – 1891 рр.), що вперше встановив

наявність дотичних напружень при згинанні балок і розробив їх теорію, дав розрахунок складених балок і розробив теорію розрахунку ферм.

Широко відомі роботи російського вченого, інженера *Ф.С. Ясинського* (1856 – 1899 рр.) з дослідження стійкості стержнів в пружнопластичній стадії. Їм отримані розрахункові залежності для критичних напружень стиснутих прямолінійних стержнів, які втрачають стійкість за межами пружності матеріалу.

Значний внесок в появі енергетичних методів механіки твердого деформованого тіла внесли італійський вчений *А. Кастільяно* (1847 – 1881 рр., див. далі «теорема Кастільяно»), німецький дослідник *О. Мор* (1835 – 1918 рр., див. далі «інтеграл Мора»), російський вчений *А.К. Верещагін* (1896 – 1959 рр., «графоаналітичний спосіб Верещагіна»).

Велику популярність на початку ХХ ст. отримали роботи українського вченого професора *С.П. Тимошенко* (1879-1972 рр.). Їм запропоновано низку наближених методів прикладної теорії пружності (стійкість систем, теорія і розрахунок балок при ударі, теорія коливань в інженерній справі та ін.). Створює в 1907-1916 рр. навчальні курси опору матеріалів і теорії пружності, що значно перевершують за глибиною і змістом аналогічні роботи за кордоном. У 20-х роках ХХ ст. С.П. Тимошенко переїжджає в США і його наступні наукові роботи в напрямку міцності отримують світове визнання.

За радянських часів в розвиток наук про міцність внесли наші вітчизняні вчені: академіки АН СРСР *О.М. Крилов* (1863 –

1945 рр.), *Б.Г. Гальоркін* (1887 – 1946 рр.), *А.Н. Дінник* (1876 – 1950 рр.), *Н.І. Мухелішвіл* (1891-1976 рр.), *В.В. Новожилов* (1910 – 1987 рр.), *Ю.А. Шиманський* (1883 – 1962рр.), *Ю.Н. Работнов* (1914 – 1985 рр.) та ін; професор *І.Г. Бубнов* (1872 – 1919 рр.) - основоположник будівельної механіки корабля, член-кореспондент АН СРСР *П.Ф. Папкович* (1887 – 1946 рр.), професор *Н.М. Бєляєв* (1890 – 1944 рр.), член-кореспондент АН СРСР *В.З. Власов* (1906 – 1958 рр.), професор *А.С. Вольмір* (1910 – 1986 рр.), член-кореспондент АН СРСР *В.І. Феодос'єв* (1916 - 1992),академіки АН УРСР *Г.С. Писаренко, А.Н. Гузь* і ін.

1.3 Типи елементів конструкцій

Тіла, що представляють собою частини машин, механізмів, різних конструкцій, можуть бути класифіковані за кількома типами. Виділяють такі основні типи тіл - елементів конструкції (рис. 1.1) за своєю ознакою, формою, видом деформування.

Брус - пружне тіло, розміри поперечного перерізу якого малі в порівнянні з його довжиною (рис 1.1, *а*). Прикладами брусів можуть бути колони будівель, споруд та ін.

Вал (рис. 1.1 *б*) – брус круглого поперечного перерізу, який працює в машинах і механізмах на крутіння.

Стержень - це брус в загальному випадку з криволінійної віссю, розміри поперечного перерізу якого значно менше його довжини (рис. 1.1, *в*). Прикладами таких стержнів складові зварні і стандартні прокатні профілі круглого, прямокутного, коробчастого, двотаврового, уголкового і інших перетинів.

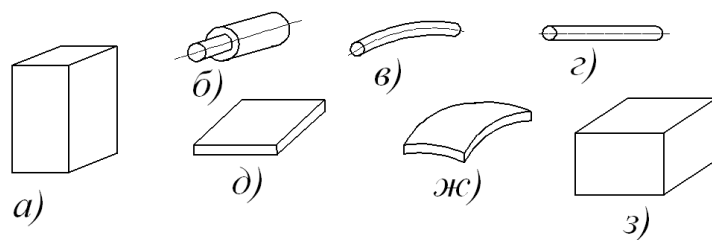


Рисунок 1.1 – Типи елементів конструкцій

Балка – прямолінійний стержень, який зазнає, в основному, деформації згину (рис. 1.1, г). Прикладом балок можуть служити поздовжні і поперечні в'язі конструкцій корпусу судна.

Пластина - тіло, обмежене двома площинами, відстань між якими (товщина) мала в порівнянні з іншими розмірами в плані (рис. 1.1, д). Це тіло може сприймати навантаження як в своїй площині, так нормально до неї. Прикладом пластин є обшивка і настили корпусу судна між балками набору.

Оболонка - тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими значно менш ніж інші розміри (ширина і довжина) - рис 1.1, ж. За формою оболонки можуть бути циліндричними, сферичними, конічними, пологими та ін. Прикладами оболонок можуть бути обшивка корпусу судна в носовій і кормовій кінцевостях, сферичні ємкості для перевезення зрідженого газу на судах газовозах, трубопроводи та ін.

Масив - тіло, всі розміри якого одного порядку (рис.1.1, з). Прикладом таких тіл можуть служити масивні фундаменти під колонами будівель, опори контактних мереж і т.і.

В опорі матеріалів об'єктом дослідження є в основному бруси, стержні та балки. Пластини, оболонки і масивні тіла

вивчаються в інших міцностних науках (наприклад, в будівельній механіці корабля – пластини і оболонки, в теорії пружності – масивні тіла) з використанням більш складного математичного апарату.

1.4 Розрахункові схеми і види навантажень

Реальні частини машин, механізмів, конструкцій різних споруд характеризуються, як правило, великою складністю конструктивних форм: наприклад, колінчастий вал двигуна, гребний вал судна або відсік корпусу судна.

Проводити розрахунок конструкцій з урахуванням всіх їх конструктивних особливостей було б вельми складно, а в деяких випадках і взагалі неможливо. Разом з тим немає ніякої необхідності враховувати всі особливості конструкції, так як вони часто надають несуттєвий вплив на її роботу. Тому при розрахунку реальної конструкції її завжди замінюють ідеалізованою спрощеною схемою – так званої *розрахунковою схемою*, вибір якої є першим і виключно відповідальним етапом розрахунку із забезпечення міцності, жорсткості або стійкості частин машин, механізмів, окремих конструкцій та їх елементів.

Складовими частинами будь-якої розрахункової схеми є:

- а) ідеалізований об'єкт розрахунку;
- б) навантаження, що діють на цей об'єкт;
- в) опорні пристрої об'єкта розрахунку.

Ідеалізований об'єкт розрахунку - це, найчастіше, площинне зображення бруса, стержня або балки на рисунку у вигляді ліній

контур (для бруса, вала або осі балки), що показано на рис. 1.2. На розрахунковій схемі вказують осі координат із зазначенням їх напрямку: для бруса (рис. 1.2, *а*) з початком координат в опорному закріпленні і напрямку осі x від нього (рис 1.2, *б*); для балки початок координат (точка O) приймають, найчастіше, на опорі, горизонтальна ось x спрямована по осі балки (геометричне місце точок центрів тяжіння її поперечних перерізів), а напрямком вертикальної осі z – вгору від початку координат. Аналогічно для задачі про кручення вала (рис. 1.2, *в*)

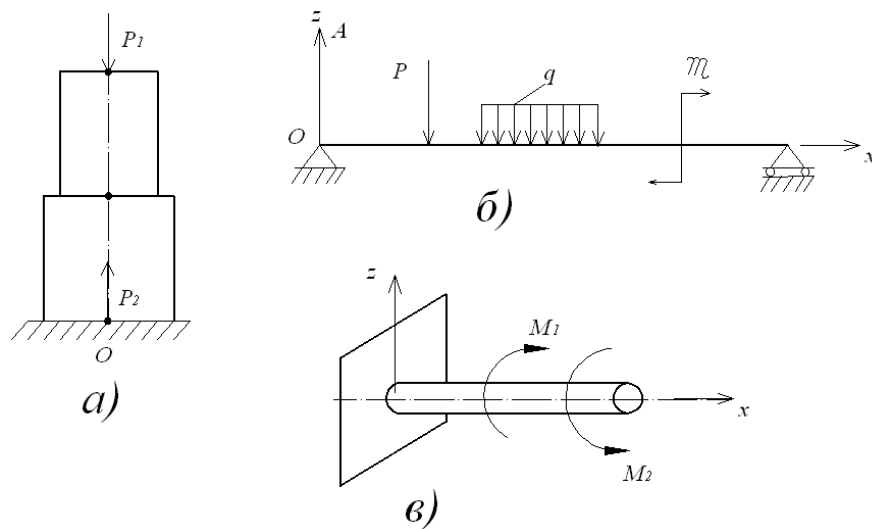


Рисунок 1.2- Приклади розрахункових схем бруса (*а*)?
балки (*б*) і вала (*в*)

За характером дії на тіло зовнішні навантаження можуть бути:

- а) *поверхневими*, як результат взаємодії двох тіл або тіла з середовищем (наприклад, дії вантажу або тиску рідини);
- б) *об'ємними*, що діють в кожній точці тіла (наприклад, сила тяжіння, електромагнітні сили).

Найбільш типові навантаження на брус, стержень (балку), вал можуть бути у вигляді:

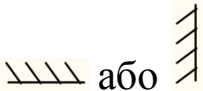
1) *зосередженої сили* P , якщо реальне навантаження прикладене на невеликій ділянці, розміри якої малі у порівнянні з довжиною бруса або балки;

2) *розподіленого навантаження* інтенсивності q , якщо воно постійне або змінне по довжині його прикладення; при постійному навантаженні є відношення рівнодіючої сили ΣP до довжини прикладання розподіленого навантаження a , тобто

$$q = \frac{P}{a}; \quad (1.1)$$

3) *зовнішнього моменту* M , згинального або крутного моменту M (див. рис. 1.2 б, в).

Розмірність P , q , M в системі основних одиниць СІ відповідно в Н, Н/м, Н·м або в їх складових.

Опірні частини бруса (балки) по кінцях в опорі матеріалів приймаються у спрощеному вигляді жорсткого затиснення (защемлення), що позначається на розрахунковій схемі  або  (див. рис. 1.2, а), а також у вигляді шарнірно-нерухомою  або шарнірно-рухомої опори  (див. рис. 1.2, б).

Навантаження розрізняють не тільки за *способом* їх *прикладання* (зосереджені і розподілені), але і за *тривалістю дії* (постійні і тимчасові), а також за *характером прикладування* (статичні і динамічні).

Постійні навантаження (наприклад, власна вага конструкції) діють протягом усього періоду експлуатації

конструкції. *Тимчасові навантаження* (наприклад, вага поїзда) діють протягом обмеженого проміжку часу. *Статичне навантаження* повільно зростає від нуля до її кінцевого значення, а тому це навантаження викликає в конструкції вельми малі прискорення. В зв'язку з цим виникаючими силами інерції можна в розрахунку знехтувати.

Динамічне навантаження (наприклад, ударне) діє на конструкцію або окремі її елементи за дуже короткий проміжок часу, чим спричиняє прискорення точок тіла, що деформуються, і силами інерції не можна нехтувати. Величина цього навантаження значно змінюється за малі проміжки часу.

Тимчасове навантаження може зберігати більш-менш постійну величину протягом всього періоду його дії, а може безперервно змінюватись за певним законом. В останньому випадку воно називається *змінним навантаженням*. Якщо змінне навантаження змінюється за періодичним законом, то воно називається *циклічним*.

1.5 Припущення та гіпотези опору матеріалів

В опорі матеріалів, як в інженерній прикладній науці, доводиться розглядати ідеалізоване тіло, відступаючи в допустимих межах від реальних умов експлуатації, відволікатись від несуттєвих зв'язків і сторін досліджуваного явища, схематизуючи складні явища і виділяючи для матеріалів ряд притаманних їм властивостей. Це досягається прийняттям в опорі матеріалів деяких припущень і гіпотез, за допомогою яких реальне

тіло спрощується, тобто підміняється ідеальним, але зберігаючи в той же час його основні практичні властивості реального і позбавляючи його другорядних властивостей.

До основних *припущень* опору матеріалів відносяться:

1) *суцільності* тіла, коли допускається, що однорідна його маса заповнює обсяг об'єму тіла повністю і нехтується молекулярною структурою матеріалу;

2) *однорідності*, тобто однаковості властивостей матеріалу в усіх точках тіла в якомусь одному напрямку;

3) *ізотропності*, тобто однаковості властивостей тіла у всіх напрямках в межах будь-якої точки матеріалу.

4) *абсолютної пружності* тіла в певних межах, тобто здатності відновлювати свої розміри і форму після припинення дії навантаження.

Властивості однорідності і ізотропності мають більшість конструкційних матеріалів. Для таких матеріалів має місце лінійний зв'язок між напруженнями і деформаціями.

Крім припущень в опорі матеріалів застосовуються також *гіпотези*, що істотно спрощують розрахунки, до яких відносяться:

1) *принцип незалежності дії сил* (принцип суперпозиції), згідно з яким результат впливу на тіло декількох сил дорівнює сумі дій кожної з сил окремо (рис. 1.3, а):

2) *принцип Сен-Венана*: далеко від місця прикладання навантаження результат мало залежить від виду навантаження, а визначається лише величина його головного вектору і моменту,

наприклад (рис. 1.3, б), для визначення прогину на відстані $b \gg a$ від кінцевого перерізу консольної балки.

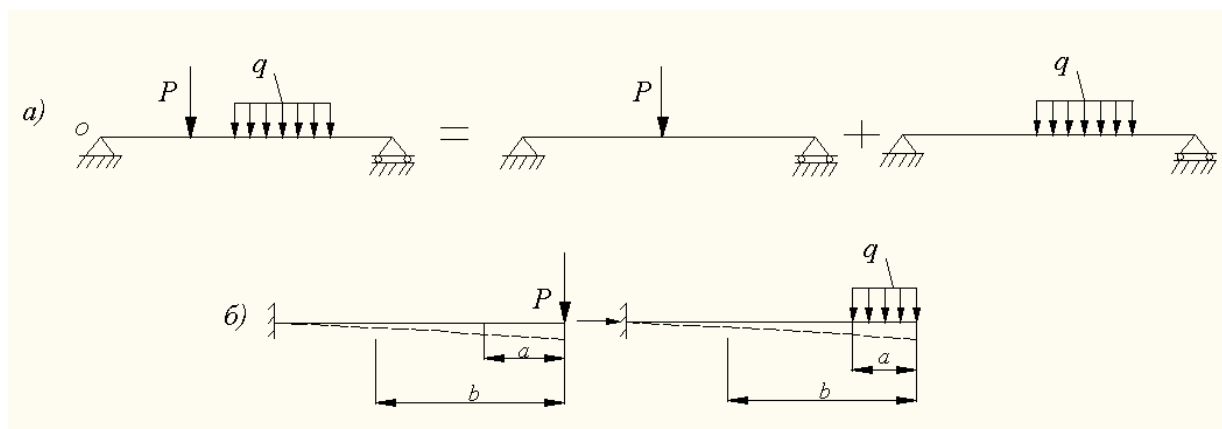


Рисунок 1.3 – Приклади використання гіпотез в опорі матеріалів

3) *гіпотеза плоских перерізів*: перерізи бруса, перпендикулярні до його осі перед навантаженням, залишаються плоскими і перпендикулярними до цієї осі при деформуванні від дії навантаження.

Перераховані допущення і гіпотези, звичайно, призводять до того, що розрахунки за теорією опору матеріалів є наближеними. Однак практична перевірка розрахунків, отриманих на підставі цієї наближеної теорії, підтверджує її достатню точність для практичного використання.

2 НАПРУЖЕННЯ І ДЕФОРМАЦІЇ В ПРУЖНОМУ ТІЛІ

2.1 Метод перерізів при визначенні внутрішніх зусиль

При дії зовнішніх навантажень всередині тіла виникають внутрішні сили, або сили пружності. В опорі матеріалів і в інших міцнісних науках вони визначаються *методом перерізів*. Суть його полягає в тому, що для тіла, яке знаходиться в рівновазі від дії зовнішнього навантаження (активного і реактивного), кожна його частина, виділена з нього умовними перерізами, теж повинна знаходитись у рівновазі. Це вимагає прикладення до кожної частини по умовному перерізу певної системи внутрішніх сил пружності, які разом із зовнішнім навантаженням повинні забезпечити їх рівновагу.

Наприклад, нехай у відповідному місці тіла (рис. 2.1) проводиться переріз 1-1. Одна з частин тіла (наприклад, частина *A*) подумки відкидається. Дію відкинутої частини *A* на частину *B* замінюється внутрішніми силами пружності (див. рис. 2.1*a*). Так як зовнішні сили P , q , $\mathfrak{M}$ прикладені в одній площині xOz (див. рис. 2.1), то внутрішні сили пружності приводяться до трьох рівнодіючих зусиль (внутрішніх силових факторів): поздовжньої сили N , спрямованої уздовж осі бруса; поперечної сили Q , що діє в площині перерізу і перпендикулярна до осі бруса; згинального моменту M .

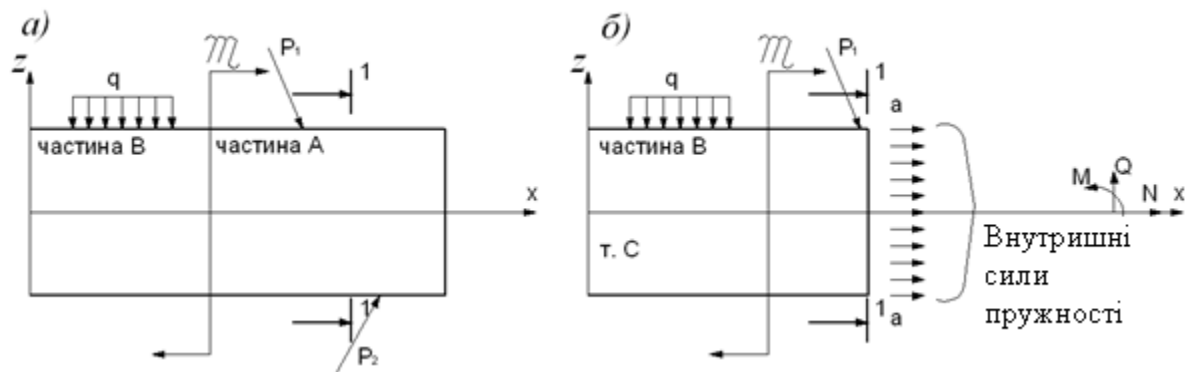


Рисунок 2.1 - Ілюстрація методу перерізів для тіла

Ці зусилля визначаються з умов рівноваги статички для частини *B*:

а) проекція всіх зовнішніх і внутрішніх сил на вісь *x* дорівнює нулю:

$$\sum X = 0; \quad (2.1)$$

б) проекція всіх сил на вісь *y* дорівнює нулю:

$$\sum Y = 0; \quad (2.2)$$

в) сума моментів всіх зусиль відносно будь-якої точки (наприклад точки *C* бруса) - див. рис. 2.1, б) дорівнює нулю:

$$\sum M_C = 0. \quad (2.3)$$

Якщо зовнішні сили представляють просторову систему в осях *x*, *y*, *z*, то в поперечному перерізі буде шість внутрішніх зусиль (три сили і три моменти навколо трьох координатних осей).

Якщо кількість невідомих внутрішніх зусиль дорівнює числу рівнянь рівноваги, то розглядаємо задачу називається *статично визначуваною*. Якщо ж кількість зусиль більше числа рівнянь рівноваги - *статично невизначуваною*. При цьому різниця

кількості невідомих внутрішніх зусиль і числа рівнянь рівноваги називається *ступенем статичної невизначуваності*.

2.2 Напруження та їх типи

Напруження - це міра інтенсивності внутрішніх сил пружності. При довільному навантаженні у кожній точці поперечного перерізу внутрішні сили різні за величиною і напрямком. Тому вводять поняття середнього і повного напруження в точці. Розглянемо їх визначення в довільній точці A

поперечного перерізу бруса (рис. 2.2).

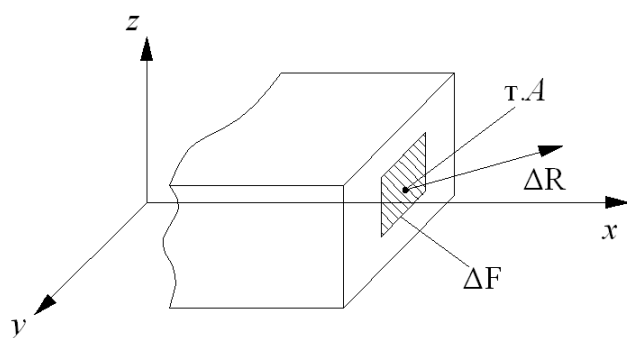


Рисунок 2.2 – До визначення напружень в точці перерізу

Виділимо в околиці т. A елементарну площадку ΔF , розміри якої значно менші розмірів перерізу бруса. Рівнодіюча внутрішніх зусиль на цієї площадці буде ΔR . Тоді *середнє напруження* в точці A розраховується за формулою:

$$p_{cp} = \frac{\Delta R}{\Delta F}. \quad 2.4$$

Розмірність напруження $\frac{\text{сила}}{\text{площа}}$ в системі СІ приймається в одиницях: $\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ (паскаль), $\text{МПа} = 10^6 \text{ Па}$ (мегапаскалей) або в інших похідних.

Середнє напруження характеризує середню інтенсивність внутрішніх сил в площадці ΔF , але не може характеризувати напружений стан в самій т. A . Якщо тепер зменшити площадку ΔF , «стягуючи» її в точку (але таким чином, щоб т. A весь час залишалась всередині площадки), то отримуємо *повне напруження* в точці:

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}. \quad (2.5)$$

У задачах опору матеріалів часто оперують не повним напруженням p , а його складовими (рис. 2.3): *нормальним напруженням* σ , яке являє собою інтенсивність перпендикулярних (нормальних) елементарних внутрішніх сил до площини перерізу тіла; *дотичним напруженням* τ , як інтенсивність елементарних внутрішніх дотичних сил в площині перерізу тіла.

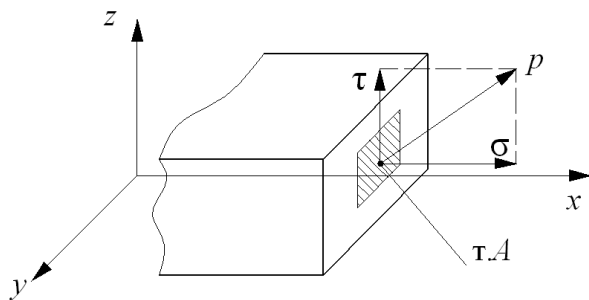


Рисунок 2.3 – До визначення напружень в точці перерізу

Тоді повне напруження в точці можна обчислити через його складові:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (2.6)$$

Якщо нормальні напруження розтягують брус, то вони вважаються додатними, при стискаючих напруженнях - від'ємними. Для дотичних напружень в опорі матеріалів правило знаків не використовують.

Будь-які напруження p , σ , τ до площадці ΔF дають величину елементарної сили: $\Delta P = p \cdot \Delta F$ – повної; $\Delta N = \sigma \cdot \Delta F$ – нормальної до перерізу; $\Delta Q = \tau \cdot \Delta F$ – дотичної в перерізі.

Якщо має місце просторові зовнішні навантаження, то зручно користуватися проекціями повного напруження на координатні осі x , y , z .

Оскільки метою розрахунків на міцність в опорі матеріалів є перевірка умов незруйнованості (міцності) деталей машин, механізмів, елементів конструкції, то розраховані напруження не повинні перевищувати рівня допустимих $[\sigma]$ і $[\tau]$, які встановлюються нормативними документами. Тому перевіряють *умови міцності*, які мають вигляд:

$$\sigma \leq \sigma , \quad \tau \leq \tau \quad (2.7)$$

Орієнтовні значення допустимих напружень матеріалів при розтягненні-стисканні наведені у Додатку А.

У практиці інженерних розрахунків дозволяється перенапруження до 3-5% у порівнянні з допустимим рівнем.

2.3 Деформації. Типи деформацій

Деформування тіл пов'язано зі зміною їх форми і розмірів тіла при навантажуванні. Рівень деформування визначають лінійними і кутовими деформаціями.

Якщо виділити в околі точки A елементарний відрізок довжиною l , розміри якого малі в порівнянні з розмірами тіла, то після навантаження тіла довжина відрізка змінитися на величину Δl (рис.2.4, a).

Лінійною відносною деформацією в околі будь якої точки A тіла називається *межа відношення* абсолютного подовження (укорочення) елементарного відрізка Δl при навантаженні до початкової довжини відрізка l зі «стягуванні» відрізка в точку.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.8)$$

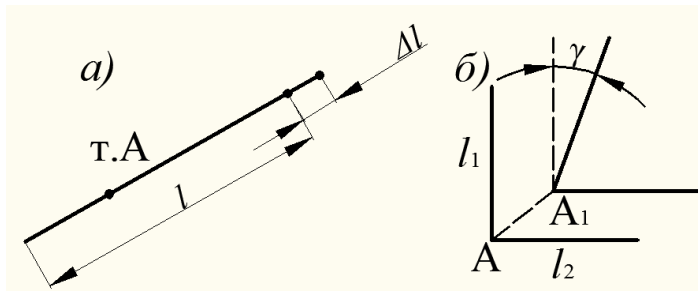


Рисунок 2.4 - Лінійна і кутова деформації в точці

При $\Delta l > 0$ - це подовження, а відповідно лінійна деформація ε є додатною. При $\Delta l < 0$ маємо укорочення, а відповідно лінійна деформація ε - від'ємна. Лінійна відносна деформація ε є безрозмірною величиною.

У разі дії на стержень поздовжньої сили відбувається його відносне подовження (укорочення), яке можна назвати поздовжнім і позначити $\varepsilon_{\text{пд}}$. Однак, одночасно з цією деформацією має місце і відносна деформація стержня в поперечному напрямку $\varepsilon_{\text{пп}}$. При цьому для $\varepsilon_{\text{пд}} > 0$ маємо $\varepsilon_{\text{пп}} < 0$, а для $\varepsilon_{\text{пд}} < 0$ відповідно $\varepsilon_{\text{пп}} > 0$ для більшості конструкційних матеріалів відношення між цими деформаціями зберігає стале значення, тож можна записати:

$$\varepsilon_{\text{пп}} = -\mu \cdot \varepsilon_{\text{пд}}, \quad (2.9)$$

де буквою μ позначається коефіцієнт, який визначається експериментально і називається *коефіцієнтом Пуассона* (для сталі $\mu \approx \frac{1}{3}$).

Величина ε залежить не тільки від положення точки в тілі, а й від початкового положення елементарного відрізка l . Тому зазвичай до букви ε приписують внизу індекс напрямку координатних осей, якщо початкові відрізки вибрано паралельно до них наприклад, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

При виділенні в точці A двох взаємно перпендикулярних елементарних відрізків l_1 і l_2 , що перетинаються, після деформування тіла, і переміщення точки в нове положення A_1 , може змінюватись прямий кут на величину, яку позначають буквою γ (рис. 2.4, б) і вимірюють в радіанах. Тоді зміна прямого кута між взаємо перпендикулярними відрізками називають *кутовою деформацією* γ . Як лінійна, так і кутова деформації є величинами безрозмірними. З урахуванням початкового положення відрізків до букви γ зазвичай приписують індекси напрямку координатних осей, наприклад $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$.

Лінійний зв'язок між напруженнями і відповідними деформаціями пружного ізотропного тіла називають *законом Гука*:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \tau = G \cdot \gamma, \quad (2.10)$$

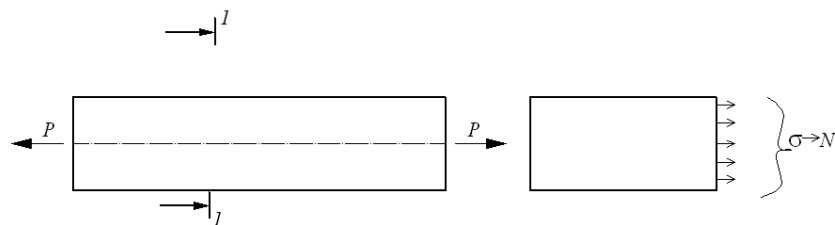
де E – модуль пружності при розтягуванні матеріалу (модуль першого роду, або модуль Юнга), який визначається експериментально (для сталі $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа) ; G - модуль при зсуві, (модуль другого роду). Модулі пружності характеризують жорсткість, тобто спроможність матеріалу противитись відповідному виду пружного деформування тіла.

Значення модулів пружності та коефіцієнтів Пуассону для різних матеріалів наведені у Додатку Б.

У задачах опору матеріалів вивчають чотири найпростіших види деформування. До їх числа відносяться такі:

1. *Осьове розтягання - стискання*. При такому навантаженні внутрішні сили пружності σ можуть бути замінені їх рівнодіючою - поздовжньою силою N (рис.2.5):

а)



б)

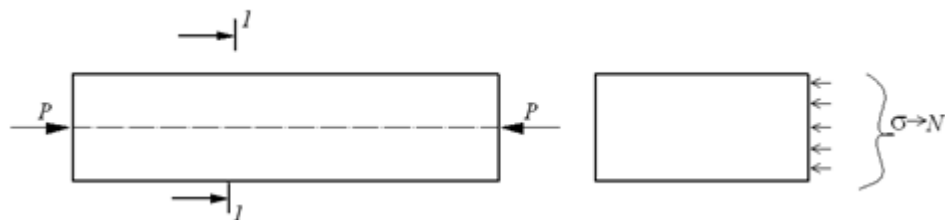


Рисунок 2.5 – Деформації розтягання (а) і стискання (б)

2. *Зсув (зріз)*. Ця деформація виникає тоді, коли дотичні напруження τ в площині перерізу стержня призводять лише до однієї перерізуючої сили Q (рис. 2.6).

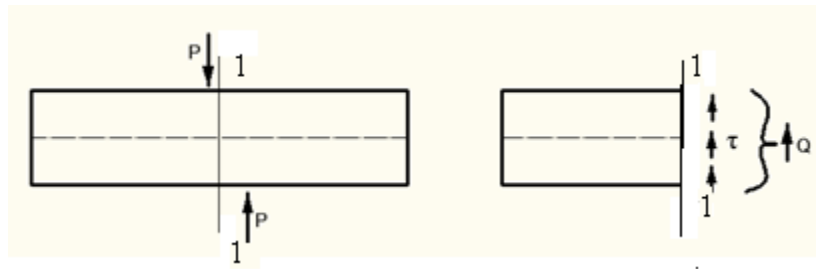


Рисунок 2.6- Деформація зсуву (зрізу)

3. *Кручення*. При цьому виді деформування від зовнішніх крутних моментів стержня M в його поперечних перерізах виникають дотичні напруження τ , що призводять до внутрішнього крутного моменту в перерізі $M_{кр}$ (рис. 2.7). При крученні вісь стержня залишається прямою, а поперечні перерізи повертаються навколо осі стержня один відносно другого на деякий кут.

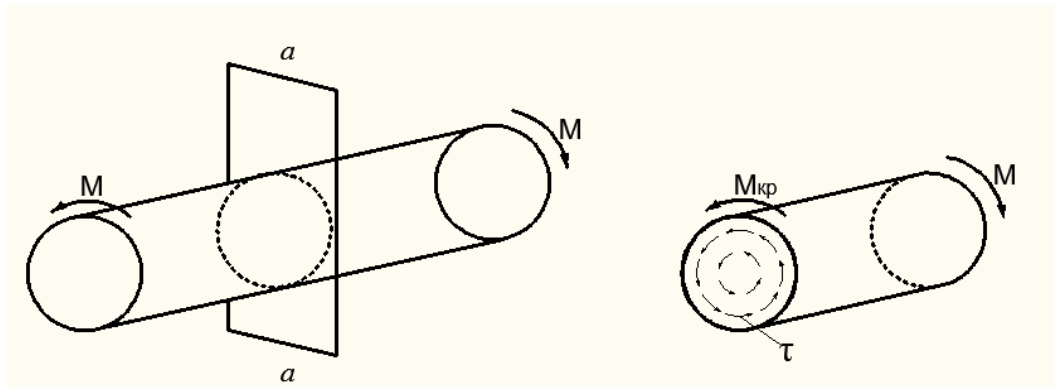


Рисунок 2.7 – Деформація кручення

4. *Згинання*. Цей вид деформації виникає при дії зовнішнього навантаження поперек осі стержня (балки) або згинального моменту. Часто має місце випадок поперечного згину балки, коли зовнішнє навантаження прикладене перпендикулярно до осі балки в координатній площини xOz (рис.2.8,*a*). При цьому у поперечному перерізі балки 1-1 виникає два внутрішніх силових

фактора: поперечна сила Q – рівнодіюча дотичних напружень τ в площині перерізу; згинальний момент M , до якого призводять нормальні напруження σ , що діють перпендикулярно площині перерізу балки (рис. 2.8, б).

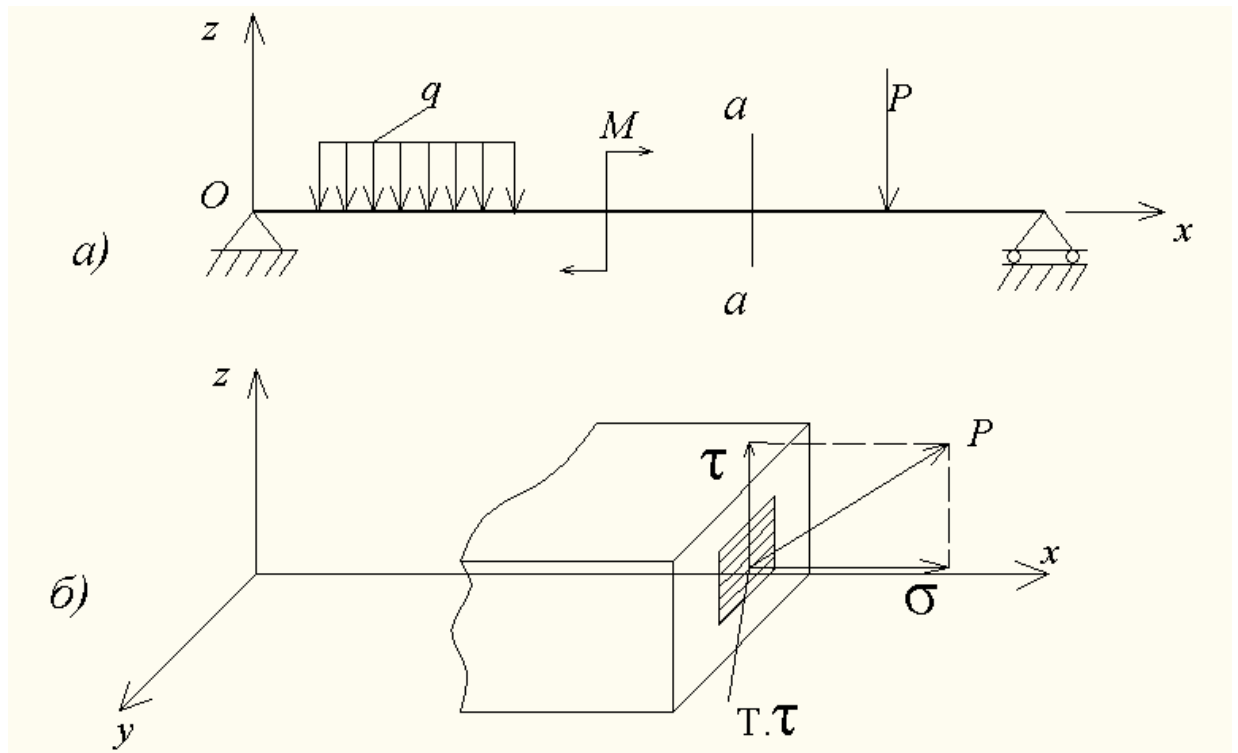


Рисунок 2.8 – Деформація згинання балки

3 РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ СТУПЕНЕВОГО БРУСА

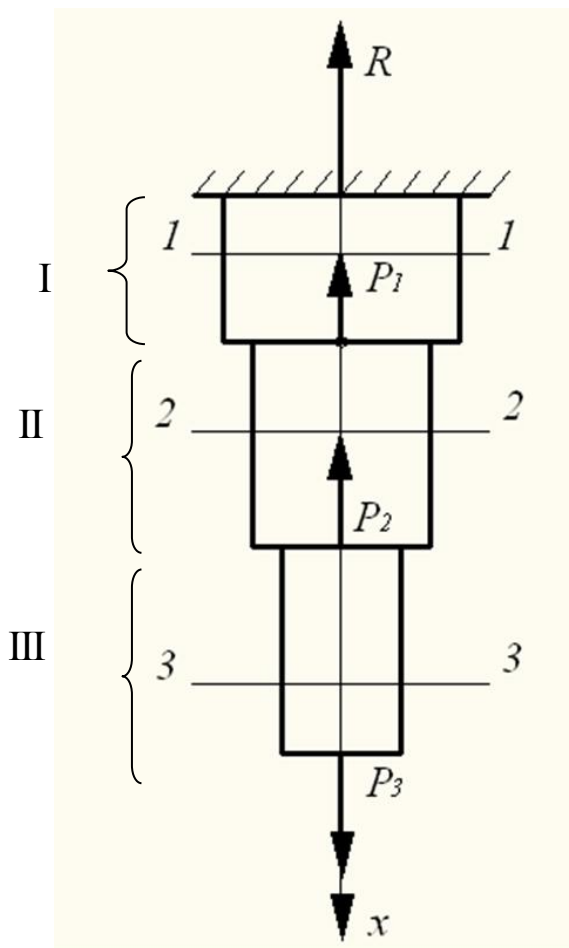
3.1 Статично визначувані задачі розтягання-стискування бруса

Найбільш простим і поширеним на практиці є випадок осового (центрального) розтягання-стискування бруса, коли поздовжні зовнішні сили діють уздовж його осі. При цьому в статично визначених даних для визначення внутрішніх зусиль N в перерізах бруса досить умов статики (2.1):

$$\Sigma X = 0,$$

де під позначенням ΣX розуміють алгебраїчну суму всіх зовнішніх сил P , включаючи реакцію опорного закріплення R , на поздовжню вісь x (рис. 3.1).

Розрахунок компонентів напружено-деформованого стану



ступеневого бруса проводиться по етапам в наступній послідовності:

1) визначається реакції R в опорному закріпленні бруса (див. рис. 3.1);

2) обчислюють поздовжні зусилля N ділянках в перерізах бруса;

3) розраховують нормальні напруження σ в перерізах;

4) обчислюють абсолютні переміщення Δl на кінцях діляниць бруса і переміщень u границь діляниць щодо закріплення;

Рисунок 3.1 - Приклад розрахункової схеми ступеневого бруса при розтягненні-стисканні

5) будують епюри N_i , σ_i , u_i по ділянках бруса.

Розглянемо принципову суть зазначених етапів.

На *першому етапі* необхідно визначити величину і напрям реакції бруса в закріпленні. Не знаючи істинного напрямку реакції

R від зовнішнього навантаження, напрямок R приймається довільно. Якщо при використанні умови статички (3.1) реакція виявилась від'ємною, то це означає, що справжня реакція має зворотній напрямок. Раніше прийнятий на рисунку напрямок реакції слід змінити на протилежний і в подальших розрахунках враховувати величину R зі своїм реальним напрямом.

Наступні етапи 2-4 вимагають визначення розрахункових значень величин N , σ , Δl на ділянках бруса. Ділянками ступеневого бруса є: відстань від опорного закріплення до найближчої поздовжньої зовнішньої сили P або кінця ступені бруса; відстань між зовнішніми силами P або силою і кінцем ступені бруса. На рис. 3.1 показаний приклад виділення ділянок I, II, III і розрахункових перерізів бруса з номерами 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3.

На *другому етапі* проводиться обчислення поздовжніх зусиль N_i в перерізах відповідних ділянок бруса здійснюється з використанням рівняння рівноваги (2.1), де під позначенням ΣX мається на увазі алгебраїчна сума проекцій всіх зовнішніх активних сил P , реактивної сили та внутрішніх зусиль N_i , що діють на одну сторону від перерізу до відкидаємої частини бруса.

Якщо на ділянці бруса задане поздовжнє розподілене навантаження інтенсивності $q(x)$, то при обчисленні N_i в будь-яких перерізах розраховується рівнодіюча ділянки інтенсивності навантаження ($q \cdot x$) на відповідній частині ділянки. З урахуванням координат початку і кінця розподіленого навантаження отримуємо відповідну рівнодіючу цього виду навантаження.

На *третьому етапі* розрахунку обчислюються нормальні напруження σ_i в перерізах ділянок бруса:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}, \quad (3.1)$$

де F_i - площа зданого поперечного перерізу ступені бруса.

Четвертий етап розрахунку полягає в обчисленні величин абсолютних деформацій-переміщень (подовження або укорочення) кінців ступенів бруса:

$$\Delta l = \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot F_i}, \quad (3.2)$$

де l_i - довжина ділянки ступені бруса; E – модуль пружності при розтягуванні матеріалу бруса.

Якщо $N(x)$ і $F(x)$ є змінними величинами вздовж ділянок, то величина абсолютних деформацій кінців ступенів бруса розраховується за формулою:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EF(x)}. \quad (3.3)$$

На останньому *п'ятому етапі* розрахунку розтягання-стискання бруса будуються епюри N , σ , u по ділянкам бруса.

Під *епюрою* розуміють графік залежності зазначених факторів вздовж бруса. Епюри будуються за сторонами від базової (вертикальної) лінії (рис. 3.3). Праворуч від неї значення елементів розтягання відкладаються зі знаком «+», а ліворуч – елементи стискання зі знаком «-». Епюри заштриховують лініями, перпендикулярними до базової. (див. рис. 3.3).

Якщо за довжиною бруса прикладене розподілене навантаження інтенсивністю q або потрібно врахувати сили тяжіння ступенів бруса, то елементи його розтягання-стискання N , σ , Δl будуть залежати від змінної координати x . Її можна розраховувати за ділянками або від опорного закріплення бруса, або від початку його ступенів (див., наприклад, рис. 3.4).

3.2 Рішення типових задач визначення елементів розтягання-стискання статично визначуваного бруса. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 3.1 Розрахувати елементи розтягання-стискання бруса (рис. 3.1) при наступних вихідних даних: $P_1 = 100$ кН; $P_2 = 40$ кН; $P_3 = 30$ кН; $F_1 = 20$ см²; $F_2 = 15$ см²; $F_3 = 10$ см²; $l_1 = 0,5$ м; $l_2 = 0,65$ м; $l_3 = 0,55$ м; $E = 2 \cdot 10^4$ кН/см². Побудувати епюри N , σ , ω .

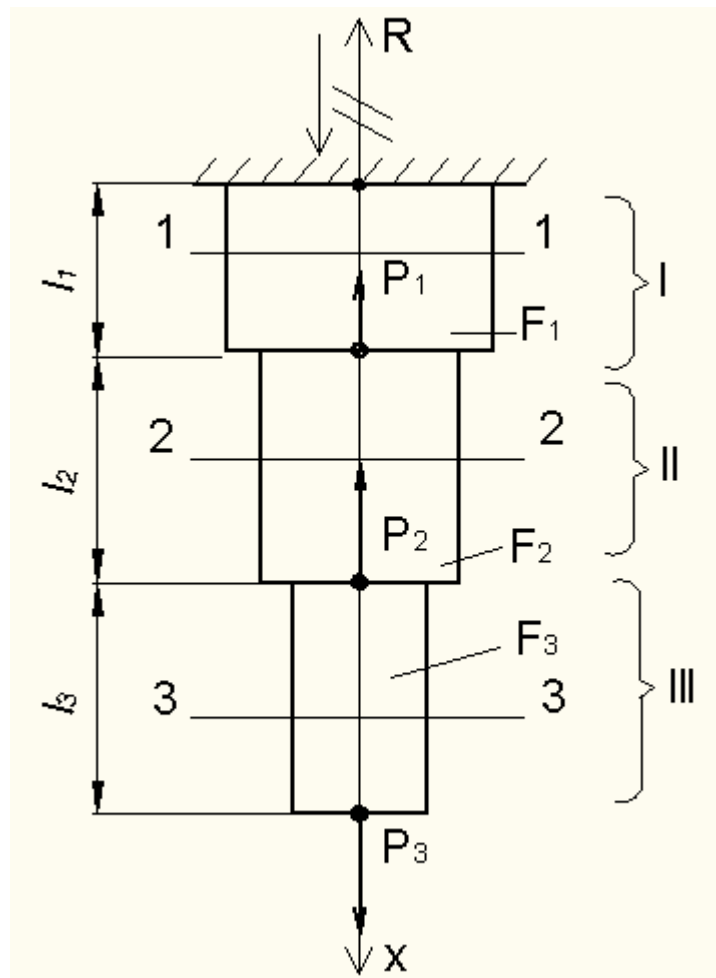


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема бруса

Рішення

1. Визначимо реакцію закріплення бруса R з умови рівноваги статички (див. рис. 3.2):

$$\sum X = 0; -R - P_1 - P_2 + P_3 = 0;$$

$$R = P_3 - P_1 - P_2 = 30 - 100 - 40 = -110 \text{ кН}.$$

Реакція виявилася від'ємною, отже на рисунку змінюємо її напрям (перекреслюємо колишній напрям і вказуємо протилежний (див. рис. 3.2). При новому напрямку реакції в подальших розрахунках вважаємо її додатною.

2. Використовуючи метод перерізів, визначаємо величину поздовжніх сил N в поперечних перерізах бруса за прийнятими ділянками (див. рис. 3.3, *а*). Зручно починати розрахунок з третьої ділянки, оскільки до виразу для N буде входити менше зусиль (див. рис. 3.3, *б*):

– ділянка III (див. рис. 3.3, *б*): $\sum X = 0$; $P_3 - N_3 = 0$; $30 - N_3 = 0$; $N_3 = 30$ кН;

– ділянка II (див. рис. 3.3, *в*): $\sum X = 0$; $P_3 - P_2 - N_2 = 0$; $30 - 40 - N_2 = 0$;

$$N_2 = 30 - 40 = -10 \text{ кН};$$

– ділянка I (див. рис. 3.3, *г*): $\sum X = 0$; $P_3 - P_2 - P_1 - N_1 = 0$; $30 - 40 - 100 - N_1 = 0$; $N_1 = 30 - 40 - 100 = -110$ кН;

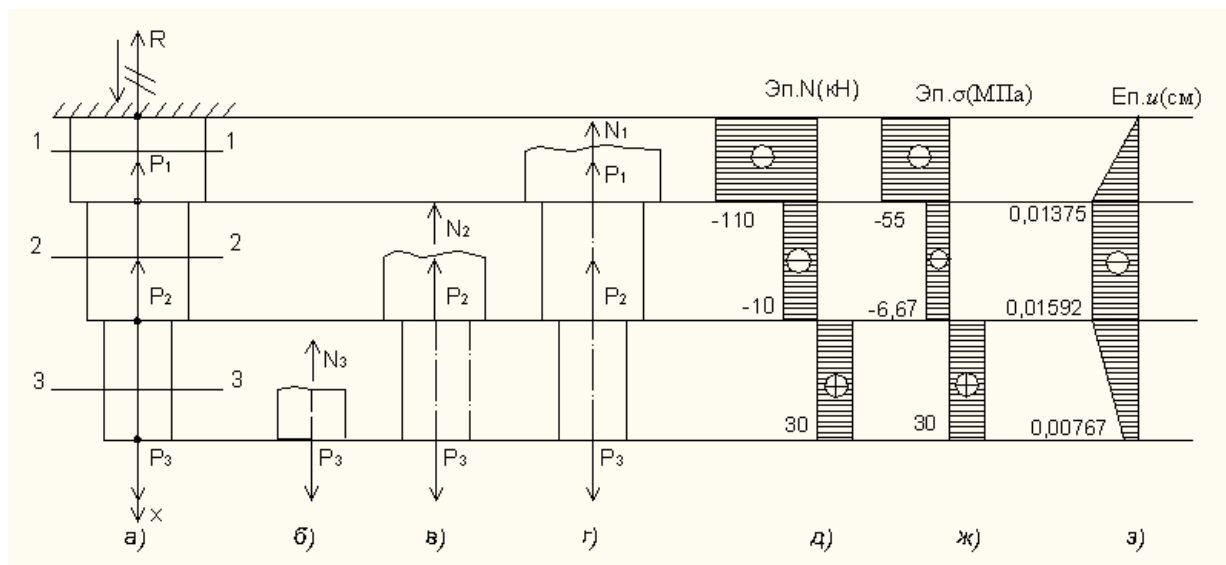


Рисунок 3.3– Перерізи бруса за ділянками і епюри N , σ , u

На підставі виконаних розрахунків будуємо епюру поздовжніх сил N (див. рис. 3.3, *д*).

3. Визначимо величини нормальних напружень в поперечних перерізах бруса за ділянками:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-110}{20} = -5,5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -55 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = -\frac{10}{15} = 0,667 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -6,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{30}{10} = 3,0 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 30 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру нормальних напружень σ (див. рис. 3.3, ж).
Знак мінус вказує на стискуjące напруження.

4. Визначимо величини змін довжини ділянок бруса:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = -\frac{110 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} = -0,01375 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = -\frac{10 \cdot 65}{2 \cdot 10^4 \cdot 15} = -0,00217 \text{ см};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E F_3} = \frac{30 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0,00825 \text{ см}.$$

Знак «-» свідчить про укорочення ділянок бруса.

5. Визначимо зміну довжини всього бруса:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,01375 - 0,00217 + 0,00835 = -0,00767 \text{ см}.$$

Отже, брус при зовнішньому навантаженні зазнає укорочення.

6. Визначимо переміщення мереж ділянок щодо верхнього жорсткого закріплення:

$$u_1 = \Delta l_1 = -0,01375 \text{ см (переміщення направлено вгору);}$$

$$u_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,01375 - 0,00217 = -0,01592 \text{ см};$$

$$u_3 = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,01375 - 0,00217 + 0,00825 =$$

$$= -0,00767 \text{ см};$$

Будуємо епюру переміщень для ділянок бруса u (див. рис. 3.2, з).

Приклад 3.2. Розрахувати елементи розтягання-стискання бруса (рис. 3.4) і побудувати їх епюри при наступних вихідних даних: $P = 100$ кН;

$q = 50 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; F_1 = 20 \text{ см}^2; F_2 = 20 \text{ см}^2; l_1 = 0,7 \text{ м}; l_2 = 1,2 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2.$

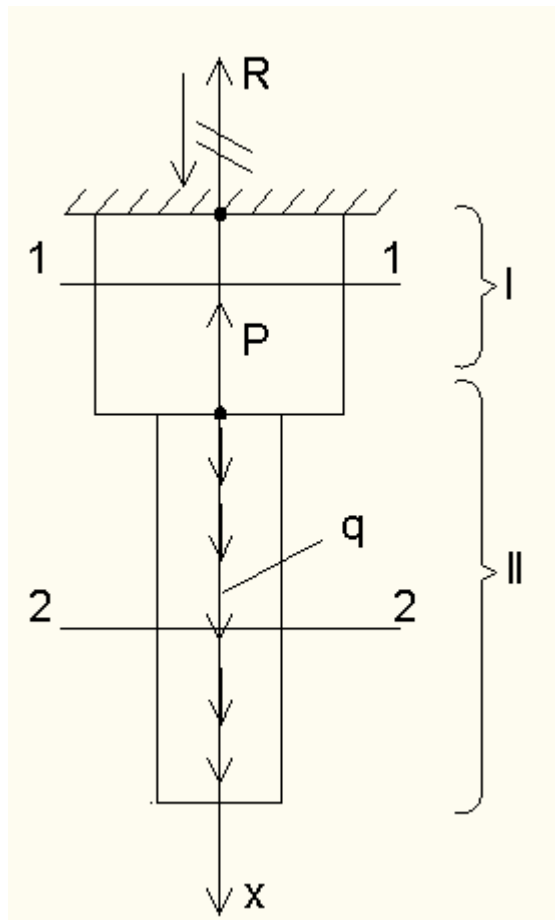


Рисунок 3.4 – Розрахункова схема бруса

Рішення

1. Визначимо реакцію закріплення бруса R з умови рівноваги статички (див. рис. 3.4):

$$\sum X = 0; -R - P + q \cdot l_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} R &= -P + q \cdot l_2 = \\ &= -100 + 50 \cdot 1,2 = -40 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Реакція виявилась від'ємною. Тож її початковий напрямок перекреслюємо і направляємо R_y зворотному напрямку (див. рис. 3.4.).

2. Використовуючи метод перерізів, визначимо величину поздовжніх сил за ділянками бруса (координату x відраховуємо від місця закріплення бруса (рис. 3.5, б, в):

- ділянка I: $\sum X = 0; -N_1 - P + q \cdot l_2 = 0; N_1 = -P + q \cdot l_2 = -100 + 50 \cdot 1,2 = -40 \text{ кН};$

- ділянка II: $l_2 \geq x \geq 0; 1,2 \geq x \geq 0; \sum X = 0; -N_2 + q \cdot x = 0; N_2 = q \cdot x = 50x;$

при $x = 0, N_2 = 0$; при $x = 1,2 \text{ м}, N_2 = 1,2 \cdot 50 = 60 \text{ кН}.$

Будуємо епюру N за ділянками бруса (рис. 3.5, з).

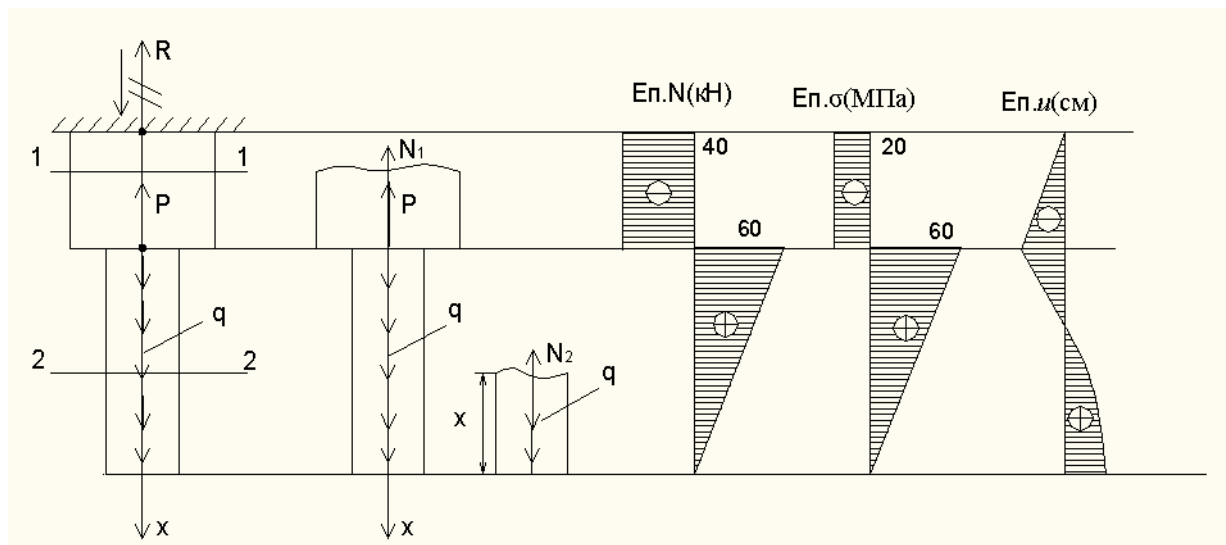


Рисунок 3.5 - Перерізи бруса по ділянках і епюри N, σ, u

3. Визначаємо величини нормальних напружень в поперечних перерізах за ділянками бруса:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-40}{20} = -2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{50x}{10} = 5x;$$

при $x = 0$, $\sigma_2 = 0$;

при $x = 1,2 \text{ м}$, $\sigma_2 = 5 \cdot 1,2 = 6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 60 \text{ МПа}$.

На підставі виконаних розрахунків будуюмо епюру σ (рис.3.5, д).

4. Визначимо зміни довжини ділянок бруса:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = -\frac{40 \cdot 70}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} = -0,007 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = \int_0^{l_2} \frac{N_2}{EF_2} dx$$

$$\Delta l_2 = \int_0^{l_2} \frac{N_2}{EF_2} dx = \frac{0,5}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} \int_0^{120} x dx = \frac{0,5}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \Delta l_2 = 0; \text{ при } x = 120 \text{ см, } \Delta l_2 &= \frac{0,5 \cdot 120^2}{2 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 2} \\ &= 0,018 \text{ см.} \end{aligned}$$

Звертаємо увагу, що на другій ділянці при дії розподіленого навантаження інтенсивністю q закон зміни Δl_2 буде нелінійним – за квадратичною параболою.

5. Визначимо абсолютну зміну довжини всього бруса:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,007 + 0,018 = 0,011 \text{ см}.$$

6. Обчислимо переміщення границь ділянок бруса відносно верхнього жорсткого закріплення:

$u_1 = \Delta l_1 = -0,007$ см (переміщення вгору);

$u_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,007 + 0,018 = 0,011$ см (переміщення вниз).

Будуємо епюру u переміщень ділянок бруса (рис.3.5, ж).

Завдання для індивідуальної роботи

Для ступеневого сталевго бруса при заданому навантаженні і розмірами визначити на ділянках поздовжні сили N , нормальні напруження σ і переміщення меж ділянок u . Побудувати епюри N , σ , u при наступних вихідних даних: $P = 40$ кН; $F = 20$ см²; $a = 50$ см; $E = 2 \cdot 10^4$ кН/см² (задачі 3.1 – 3.6 на рис. 3.6).

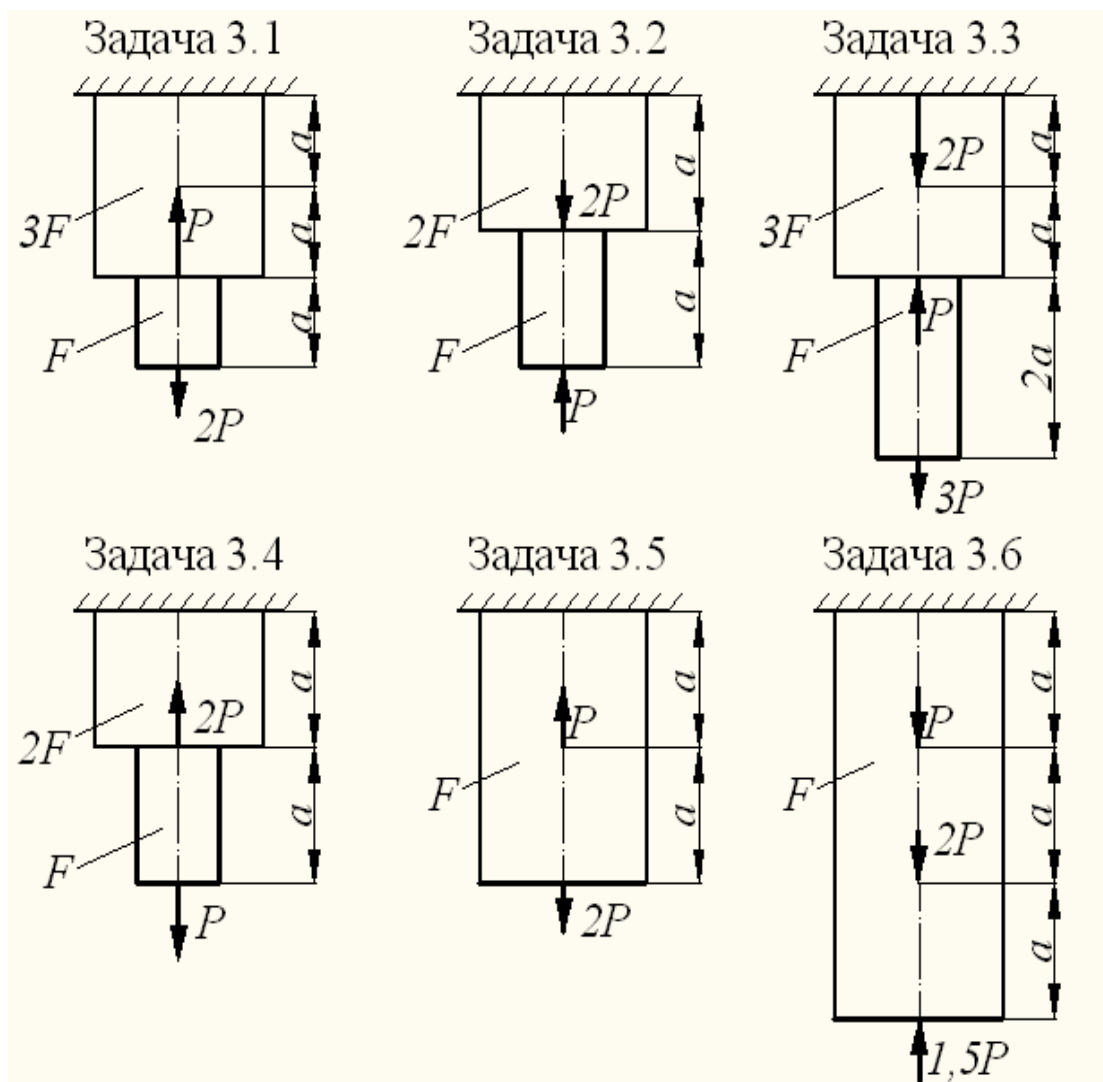


Рисунок 3.2- Варіанти завдань із розрахунку розтягання-
стискання ступеневого бруса

3.3 Статично невизначувані задачі поздовжнього навантаження бруса

У статично невизначуваних задачах розрахунку бруса при поздовжньому навантаженні одного рівняння статички для визначення осьових зусиль недостатньо, тому необхідно використання додаткових залежностей, пов'язаних з умовами сумісності переміщень між елементами системи (сумісності деформацій). Число таких додаткових залежностей відповідає ступеню статичної невизначуваності: $s = n - 1$, де n – число реактивних сил.

У статично невизначуваних задачах поздовжнього навантаження бруса виділяють два найбільш характерних випадка:

- поздовжнє навантаження жорстко закріпленого на кінцях бруса;
- сумісна дія поздовжнього навантаження і зміна температури для бруса (можливість наявності зазору між одним кінцем бруса і опорою).

Приклад 3.3 Визначити внутрішні зусилля, напруження, зміну довжини ділянок і всього бруса (рис.3.7) при наступних

вихідних даних: $P = 300 \text{ кН}$; $F_1 = 150 \text{ см}^2$; $F_2 = 100 \text{ см}^2$;
 $l_1 = 0,55 \text{ м}$; $l_2 = 0,50 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

Рішення

1. Визначимо ступінь статичної невизначуваності бруса. Всього невідомих реактивних зусиль дві (реакції опорних закріплень R_A и R_B , див. рис. 3.7, а), а для системи сил, що діють на брус, можна скласти тільки одне рівняння статки:

$$\sum X = 0, \quad -R_A - R_B + P = 0.$$

Отже, ступінь статичної невизначуваності системи дорівнює:
 $s = n - 1 = 2 - 1 = 1$, тобто система один раз статично невизначувана. Тоді для вирішення задачі необхідно скласти одне додаткове рівняння: наприклад, сумісність переміщень нижнього затиснення в точці B $u_{\text{зат}}^B$ і перерізу бруса $u_{\text{бр}}^B$, тобто $u_{\text{зат}}^B = u_{\text{бр}}^B$. Так як це затиснення жорстке, то $u_{\text{зат}}^B = 0$ і, отже, $u_{\text{бр}}^B = 0$ при від'єднанні бруса від затиснення і заміною його дії на брус реакцією R_B (див. рис. 3.7, б).

2. Складаємо додаткове рівняння сумісності переміщень:

$$u_B = \Delta l_p + \Delta l_{R_B} = 0, \quad (3.4)$$

де Δl_p абсолютне переміщення цього перерізу від дії зовнішньої сили P ;

Δl_{R_B} - абсолютне переміщення перерізу бруса в основній системі від реакції R_B ;

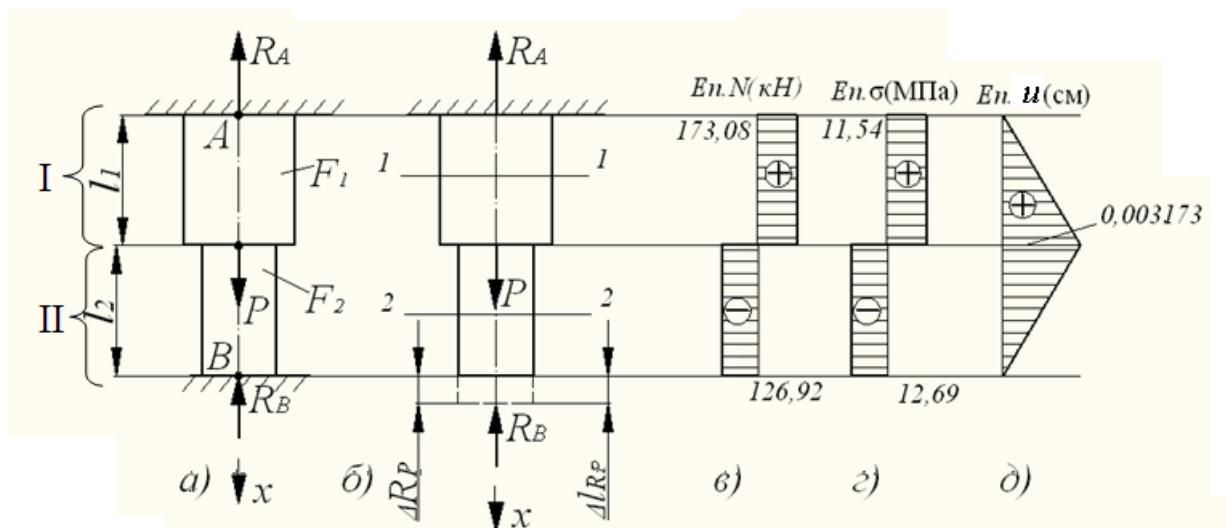


Рисунок 3.7 – Розрахункова схема статично невизначуваного бруса і епюри елементів при поздовжньому навантаженні

Абсолютне укорочення бруса від сили P дорівнює:

$$\Delta l_P = \frac{Pl_1}{EF_1} = \frac{300 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 150} = 0,0055 \text{ см};$$

Абсолютне подовження бруса від реакції R_B :

$$\begin{aligned} \Delta l_{R_B} &= -\frac{R_B l_1}{EF_1} - \frac{R_B l_2}{EF_2} = -\frac{R_B}{E} \left(\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = -\frac{R_B}{2 \cdot 10^4} \left(\frac{55}{150} + \frac{50}{100} \right) = \\ &= -0,4333 \cdot 10^{-4} R_B. \end{aligned}$$

Тоді з умови сумісності переміщень (3.4) отримуємо рівняння:

$$0,0055 - 0,4333 \cdot 10^{-4} R_B = 0, \text{ звідки } R_B = 126,92 \text{ кН.}$$

З рівняння рівноваги статки визначаємо іншу реакцію R_A :

$$-R_A + P - R_B = 0; R_A = P - R_B = 300 - 126,92 = 173,08 \text{ кН.}$$

3. Використовуючи метод перерізів, знаходимо величину поздовжніх сил за ділянками бруса:

$$- \text{ на ділянці I: } N_1 - R_A = 0; N_1 = R_A = 126,92 \text{ кН;}$$

– на ділянці II: $N_1 + P - R_A = 0$; $N_2 = P - R_A = 300 - 126,92 = 173,08 \text{ кН}$.

На підставі виконаних розрахунків будуємо епюру поздовжніх сил N (рис. 3.6, в).

4. Визначимо величину нормальних напружень в поперечних перерізах бруса за ділянками:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{173,08}{150} = 1,154 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 11,54 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-126,92}{100} = -1,269 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -12,69 \text{ МПа}.$$

Будуємо епюру нормальних напружень σ (рис. 3.6, з).

5. Обчислимо абсолютні деформації ділянок бруса:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = -\frac{173,08 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 150} = 0,003173 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = \frac{-N_2 l_2}{E F_2} = -\frac{126,92 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 100} = -0,003173 \text{ см}.$$

6. Переміщення між ділянок відносно верхнього жорсткого закріплення дорівнює:

$$u_I = \Delta l_1 = 0,003173 \text{ см}; u_{II} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,003173 - 0,003173 = 0.$$

На підставі виконаних розрахунків будуємо епюру переміщень (рис. 3.7, д).

Приклад 3.4 Сталевий брус, жорстко закріплений обома кінцями в нерухомих опорах (рис. 3.8), рівномірно нагрівається на 40°C у порівнянні з температурою, при якій він був закріплений. Обчислити напруження, що виникають в поперечних перерізах

бруса при його нагріванні. Вихідні дані для бруса наступні:
 $F_1 = 4\text{см}^2$; $F_2 = 6\text{ см}$; $a = 40\text{ см}$; $b = 30\text{ см}$.

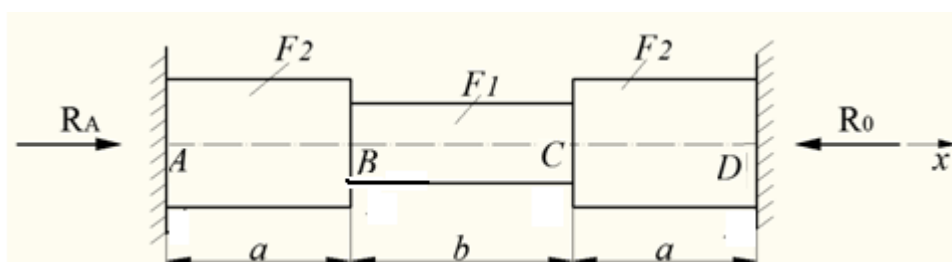


Рисунок 3.8 – Сталевий брус і його розміри

Рішення

В результаті нагрівання бруса в його закріпленнях виникають реакції R_A , R_D (див. рис. 3.8). Для їх визначення умова рівноваги статички дає лише одне рівняння:

$$\sum X = 0, \quad R_A - R_D = 0; \quad R_A = R_D.$$

Звідси не можна визначити величини реакцій і задача виявляється статично невизначуваною. Тому подальший хід вирішення задачі аналогічний попередньому прикладу 3.3.

Відкидаємо праве закріплення і замінюємо його дію на брус прикладенням реактивної сили R_D .

Переміщення перерізу в точці D при відкинутому закладенні визначається виразом:

$$\Delta l_t = \alpha (2a + b) \Delta t, \quad (3.5)$$

де α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, який для сталі за довідковими даними (див. Додаток Г) приймається $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$, а температура нагріву бруса $\Delta t = 40^\circ\text{C}$.

З іншого боку, укорочення бруса від дії реакції R_D дорівнює:

$$\Delta l_{R_D} = -\frac{R_D \cdot 2a}{EF_2} - \frac{R_D \cdot b}{EF_1}. \quad (3.6)$$

З умови сумісності переміщень (відсутності переміщення бруса в т. D)

$$\Delta l_t = \Delta l_{R_D} \quad (3.7)$$

маємо рівняння:

$$\alpha \cdot 2a + b \cdot \Delta t = \frac{-2R_D \cdot a}{EF_2} - \frac{R_D \cdot b}{EF_1}.$$

Тоді невідома реакція R_D з отриманого рівняння буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} R_D &= \frac{\alpha \Delta t \cdot 2a + b \cdot EF_1 F_2}{2aF_1 + bF_2} = \\ &= \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 2 \cdot 40 + 30 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 40 \cdot 4 + 30 \cdot 6} = 50,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Напруження в поперечних перерізах в середній частині стержня:

$$\sigma_{BC} = -\frac{R_D}{F_1} = -\frac{50,8}{4} = 12,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 127 \text{ МПа}.$$

Напруження в поперечних перетинах крайніх частин стержня:

$$\sigma_{AB} = \sigma_{CD} = -\frac{R_D}{F_1} = -\frac{50,8}{6} = -8,47 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -84,7 \text{ МПа}.$$

Знаки «мінус» в отриманих значеннях величин свідчить про напруження стискання.

Завдання для індивідуальної роботи

Для ступеневого сталевго бруса, жорстко закріпленого на кінцях, при заданих розмірах (рис.3.9) і нагріванні до температури $\Delta t = 50^\circ\text{C}$ обчислити нормальні напруження в середній і крайніх частинах бруса при наступних даних: $a = 50\text{ см}$; $F = 5\text{ см}^2$; $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$.

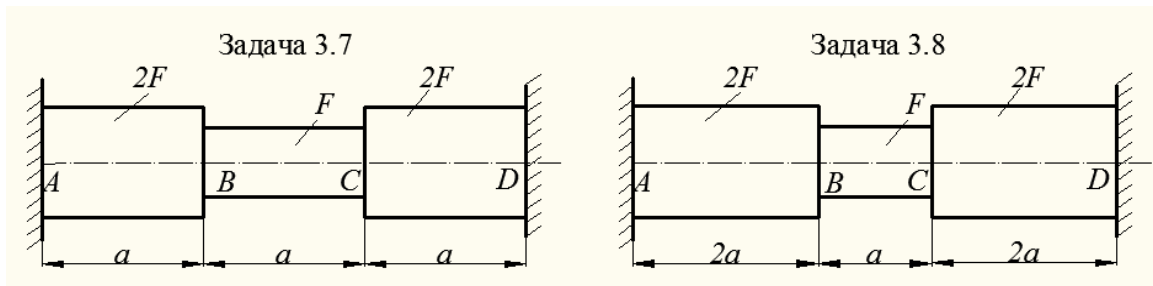


Рисунок 3.9 – Брус, що піддається нагріванню

4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Напруження і деформації в брусі при його навантаженні істотно залежать від розмірів і форми його поперечних перерізів. Тому у всіх розрахунках міцності і жорсткості брусів обов'язково присутні геометричні характеристики їх перерізів.

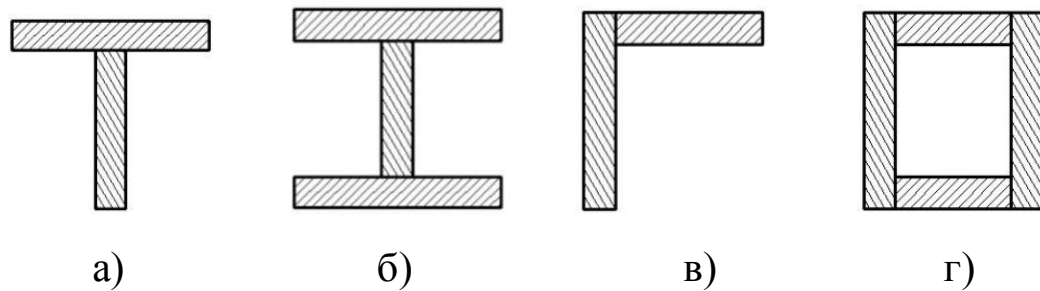
До геометричних характеристик плоского поперечного перерізу бруса відносяться: площа; координати її центру ваги; статичні моменти площі; моменти і радіуси інерції та моменти опору.

4.1 Площі перерізів бруса

Розрізняють составні зварні та катані профілі видовжених тіл, які використовуються в різних галузях техніки.

Составні зварні профілі є зазвичай сукупність зварних прямокутних елементів і представлені на рис. 4.1:

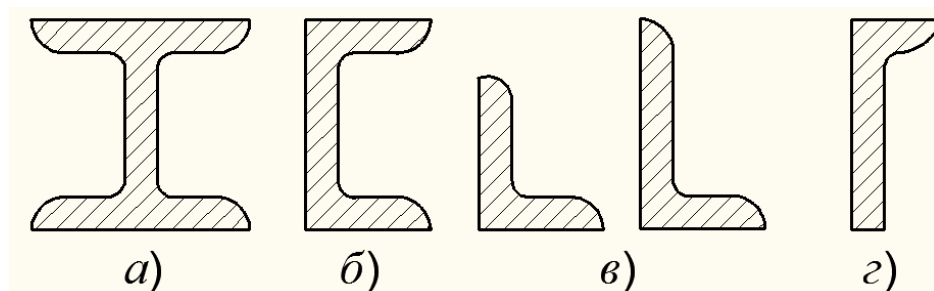
Зазначені вище геометричні характеристики таких перерізів визначаються підсумовуванням характеристик складових їх прямокутних елементів.



а) тавр; б) двутавр; в) куточок; г) коробчастий профіль

Рисунок 4.1 - Составні зварні профілі

Геометричні характеристики перерізів *катаних профілів* вибираються за довідковими даними, наведеними у відповідних стандартах даного сортаменту. Найбільш часто застосовуються катані профілі, які показані на рис. 4.2:



а) двотавр; б) швелер; в) рівнобікі і нерівнобічні уголки; г) полозо бульб несиметричний

Рисунок 4.2 - Катані профілі

4.1.1 Статичні моменти площі перерізу і координати його центра ваги

Розглянемо видовжене тіло в системі координат xuz , що має в плоскому перерізі $a-a$ (рис. 4.3, а) довільну форму (рис.4.3, б):

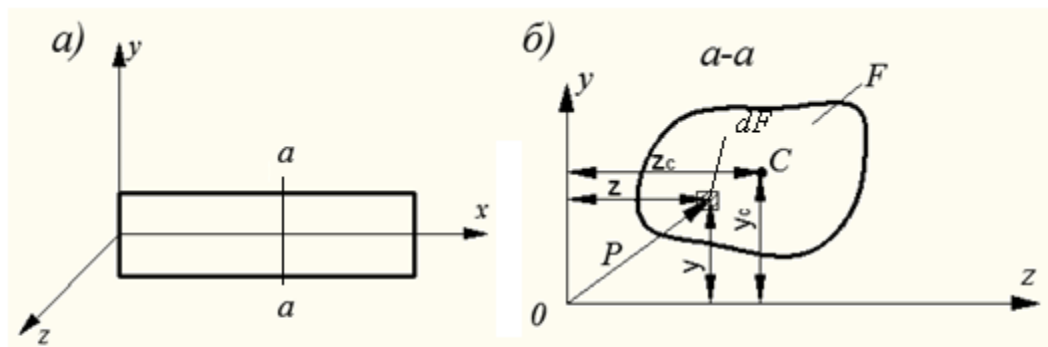


Рисунок 4.3- Видовжене тіло довільної форми поперечного перерізу

Виділимо в межах площі перерізу F елементарну площадку dF з координатами її центру ваги y і z (див. рис. 4.3, б). Тоді статичними моментами S_z і S_y площі перерізу плоскої фігури будуть суми всіх елементарних площин dF з координатами їх центрів тяжіння y і z , що виражається інтегралами вигляду:

$$S_z = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F z dF. \quad (4.1)$$

Отже, *статичний момент* площі перерізу відносно до будь-якої осі є добуток площі цієї фігури на відстань її центра ваги до цієї осі. А якщо площа перерізу F складається з декількох площин F_i з координатами центрів тяжіння y_i і z_i , то статичні моменти цієї площі можна отримати шляхом підсумовування складових цієї площі:

$$S_z = \sum F_i y_i ; \quad S_y = \sum F_i z_i . \quad (4.2)$$

Відзначимо, що розмірність статичного моменту площі є (довжина)³, тобто м³ або відповідні похідні. Статичний момент може бути додатним або від'ємним в залежності від знаків координат центра ваги y або z .

З іншого боку, статичні моменти за формулами (4.1) можна виразити через координати центрів ваги цієї площі перерізу y_c і z_c (див. рис. 4.3, б):

$$S_z = y_c F , \quad S_y = z_c F . \quad (4.3)$$

То ж з (4.3) отримуємо вираз для координат центра ваги перерізу,

$$y_c = \frac{S_z}{F} ; \quad z_c = \frac{S_y}{F}. \quad (4.4)$$

Аналогічно, для декількох площ F_i , складного поперечного перерізу F_i на підставі формул (4.2) можна отримати координати центрів ваги цього перерізу через суму статичних моментів складових його найпростіших елементів:

$$y_c = \frac{\sum F_i y_i}{F}; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{F}. \quad (4.5)$$

Зауважимо, що будь-який складний переріз можна розбити з достатньою точністю на найпростіші прямокутники, а по контуру – на трикутники, і, скориставшись формулами (4.5), знайти координати центра тяжіння всього перерізу.

Зазначимо також, що на підставі формули (4.3) статичні моменти відносно осей, які проходять через центр ваги перерізу, дорівнюють нулю.

Статичні моменти перерізів S_z і S_y називаються також *осьовими*. У той же час існує поняття *полярного статичного моменту* відносно точки C (див. рис 4.3, б):

$$S_\rho = \int_F \rho dF, \quad (4.6)$$

де ρ - відстань центра ваги елементарної площі до початку координатних осей.

На відміну від осьових статичних моментів полярний статичний момент може бути тільки додатним.

4.1.2 Моменти інерції площі плоского перерізу та їх типи

Розрізняють такі типи моментів інерції перерізів: осьовий, відцентровий, полярний, центральний і головні моменти інерції.

Осьовими моментами інерції перерізу називають сумидодатків елементарних площин dF площі перетину F на

квадрати відстаней їх центрів тяжіння у і z до відповідних осей (див.рис.4.3, б), що виражається інтегралами вигляду:

$$I_z = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F z^2 dF. \quad (4.7)$$

Відцентровим моментом інерції перерізу відносно у і z називають таку залежність:

$$I_{zy} = \int_F zy dF. \quad (4.8)$$

Інтеграл виду

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad 4.9$$

називають *полярним моментом* інерції перерізу відносно початку координат т.О.

Сума осьових моментів інерції перерізу відносно двох координатних осей z і у дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат:

$$I_\rho = I_z + I_y. \quad (4.10)$$

Розмірність зазначених видів моментів інерції перерізу – (довжина)⁴, тобто м⁴ або відповідні похідні.

Осьові і полярний моменти інерції перерізу – величини додатні. Відцентровий момент інерції може бути додатним, від’ємним і рівним нулю (для осей, які є віссю симетрії).

Існують залежності для моментів інерції площі при паралельному перенесенні і повороті координатних осей.

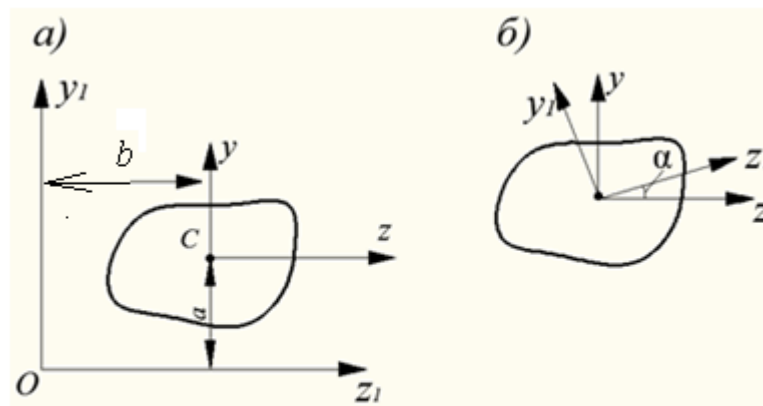


Рисунок 4.4- Паралельний переніс і поворот координатних осей для довільного поперечного перерізу

При *паралельному перенесенні осей* (рис. 4.4, а) момент інерції перерізу відносно будь-якої осі, проведеної паралельно *центральної осі* (що проходить через центр ваги перерізу т. С) дорівнює моменту інерції відносно цієї центральної осі плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між осями:

$$I_{z1} = I_z + a^2 F; \quad I_{y1} = I_y + b^2 F, \quad (4.11)$$

де I_z і I_y - центральні моменти інерції перерізу.

Для відцентрованого моменту інерції при перенесенні осей

$$I_{z1y1} = I_{zy} + abF. \quad (4.12)$$

Якщо відомі моменти інерції перерізу I_z , I_y , I_{zy} відносно осей z і y , то моменти інерції щодо повернутих осей z_1 і y_1 , на кут α по відношенню до вихідних осей (рис. 4.4, б) визначається за формулами:

$$\begin{aligned}
I_{z1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\
I_{y1} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\
I_{z1y1} &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

Головними осями інерції називають дві взаємно перпендикулярні осі, відносно яких центробіжний момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти набувають екстремальних значень (максимуму і мінімуму).

Головні центральні моменти інерції обчислюються за формулою:

$$I_{1,2} = I_{\frac{max}{min}} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}, \tag{4.14}$$

де I_x, I_y, I_z – моменти інерції площі відповідно довільного положення центральних осей.

Положення головних осей інерції (див. рис. 4.4, б) знаходять при куті повороту осей α за формулою

$$tg \alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_z}. \tag{4.15}$$

В розрахунках міцності елементів конструкцій користуються поняттям такої геометричної характеристики як *момент опору перерізу*.

Розглянемо для прикладу поперечний переріз бруса (рис. 4.5).

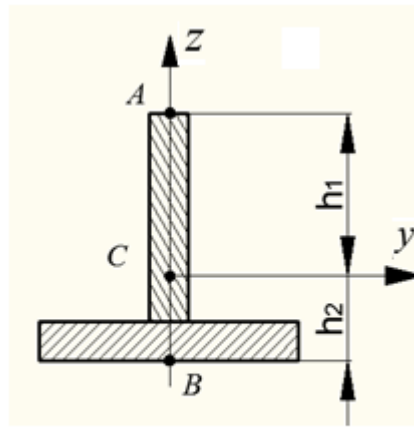


Рисунок 4.5 - Составний поперечний переріз бруса

Відстань до найбільш віддаленої т. A від центра ваги перерізу т. C позначимо h_1 , а відстань до т. B - через h_2 .

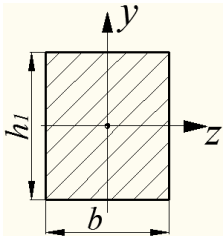
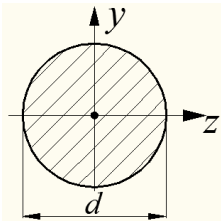
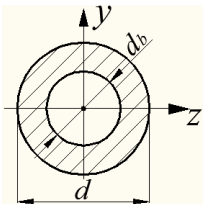
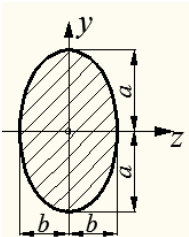
Тоді моменти опору перерізу відносно горизонтальної осі z відносно точок A , B обчислюються як відношення осьового моменту інерції щодо осі z до відстаней до цих точок A , B :

$$W_{z_A} = W_{min} = \frac{I_z}{h_1}; \quad W_{z_B} = \frac{I_z}{h_2}. \quad (4.16)$$

Практичний інтерес в розрахунках міцності представляє найменший момент опору перерізу W_{min} , який відповідає найбільш віддаленій точці A від центра ваги перерізу $h_1 = z_{max}$.

Розмірність елементів опору (довжина)³, тобто м³, см³.

Таблиця 4.1 Значення моментів інерції і моментів опору найпростіших плоских перерізів відносно центральних осей

Види найменування перерізу		Моменти інерції		Моменти опору W_z
		I_z	I_y	
Прямокутник		$\frac{bh^2}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$
Круг		$\frac{\pi}{64}d^4 \approx 0,05d^4$		$\frac{\pi}{32}d^3 \approx 0,1d^3$
Кільце		$\frac{\pi d^4}{64} \left(1 - \frac{d_b^4}{d^4}\right)$		$\frac{\pi d^3}{32} \left(1 - \frac{d_b^3}{d^3}\right)$
Еліпс		$\frac{\pi a^3 b}{4}$	$\frac{\pi b^3 a}{4}$	$\frac{\pi a^3 b}{4}$

Геометричні характеристики катаних профілів балок надані за сортаментами у Додатку Д.

4.4 Приклад типового розрахунку геометричних характеристик перерізу. Завдання для індивідуальної роботи

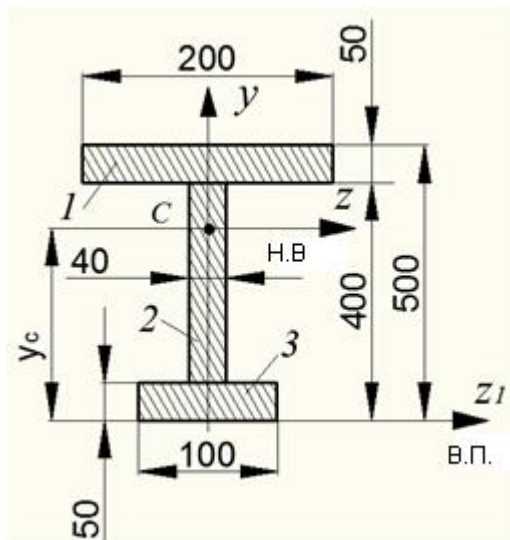


Рисунок 4.6 - Переріз составного двотавра

Приклад 4.1 Для перерізу составного двотавру (рис. 4.6) визначити положення центра ваги і центральний момент інерції I_z відносно горизонтальної осі z , що проходить через центр ваги перерізу в точці C (розміри дані в мм).

Рішення

Заданий переріз є складним. Він складається з декількох простих елементів прямокутної форми: верхнього та нижнього поясків і стінки (див. рис. 4.6). Для визначення геометричних характеристик окремих складових перерізу вибирають довільну вісь порівняння (в.п.), від якої відраховують відстань центрів ваги простих елементів перерізу. У нашому прикладі прийнято: вісь порівняння z_1 проходить через нижню кромку нижнього пояска.

Необхідні в завданні геометричні характеристики визначимо в наступній послідовності:

1. Заданий переріз симетричний відносно вертикальної осі y , отже центр ваги перерізу (точка C) лежить на цій осі і $z_c = 0$, а положення центра ваги по вертикалі y_c розраховуємо за формулою:

$$y_c = \frac{\sum S_i}{\sum F_i} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \text{ см},$$

де S_i ($i = 1, 2, 3$) – статичні моменти елементів перерізу, см^3 ; F_i – площі перерізів цих елементів, см^2 .

Для верхнього пояска 1 (див. рис. 4.6) $F_1 = 20 \cdot 5 = 100 \text{ см}^2$. Центр ваги цього пояска знаходиться від осі порівняння на відстані $y_1 = 47,5 \text{ см}$, тому $S_1 = F_1 \cdot y_1 = 100 \cdot 47,5 = 4750 \text{ см}^3$.

Для стінки 2 $F_2 = 40 \cdot 4 = 160 \text{ см}^2$. Центр ваги стінки знаходиться від в.п. на відстані $y_2 = 25 \text{ см}$, тому $S_2 = F_2 \cdot y_2 = 160 \cdot 25 = 4000 \text{ см}^3$.

Для нижнього пояска 3 $F_3 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ см}^2$. Центр ваги цього пояска знаходиться від осі порівняння на відстані $y_3 = 2,5 \text{ см}$, тому $S_3 = F_3 \cdot y_3 = 50 \cdot 2,5 = 125 \text{ см}^3$.

Тоді центр ваги всього перерізу визначиться як

$$y_c = \frac{4750 + 4000 + 125}{100 + 160 + 50} = \frac{8875}{310} = 28,6 \text{ см}.$$

2. Центральний момент інерції всього перерізу відносно нейтральної осі z , що проходить через центр ваги перерізу (точка C), розраховується за формулою:

$$I_z = \sum_i I_i^{\text{вл}} + I_i^{\text{пер}} - y_i^2 F_i, \text{ см}^4,$$

де $I_i^{\text{вл}}$ - власні моменти інерції складових елементів перерізу щодо горизонтальних осей, які проходять через їх центри ваги, см^4 ; $I_i^{\text{пер}}$ - переносні моменти інерції елементів перерізу відносно осі порівняння z_1 , см^4 .

Окремі елементи складного перерізу являють собою прямокутники, моменти інерції яких відносно горизонтальної осі, що проходить через центр їх ваги, розраховуються за формулою (див. табл. 4.1):

$$I = \frac{bh^3}{12},$$

де b - ширина елемента перерізу (горизонтальний розмір); h - висота елемента перерізу.

У нашому прикладі:

$$- \text{для верхньої полиці } I_1^{\text{вл}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 2,5^3}{12} = 26 \text{ см}^4;$$

$$- \text{для стінки } I_2^{\text{вл}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 40^3}{12} = 21333 \text{ см}^4;$$

$$- \text{для нижньої полиці } I_3^{\text{вл}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 2,5^3}{12} = 13 \text{ см}^4.$$

Виконаємо розрахунок переносних моментів інерції елементів перерізу:

$$- \text{для верхньої полиці } I_{z1}^{\text{пер}} = F_1 \cdot y_1^2 = 100 \cdot 47,5^2 = 225625 \text{ см}^4;$$

$$- \text{для стінки } I_{z2}^{\text{пер}} = F_2 \cdot y_2^2 = 160 \cdot 22,5^2 = 81000 \text{ см}^4;$$

$$- \text{для нижньої полиці } I_{z3}^{\text{пер}} = F_3 \cdot y_3^2 = 50 \cdot 2,5^2 = 312 \text{ см}^4.$$

Тоді остаточно для всього перерізу составного двотавру центральний момент інерції відносно центральної осі z буде дорівнювати:

$$I_z = 26 + 21333 + 13 + 225625 + 81000 + 312 - 28,6^2 \cdot 100 + 160 + 50 = 74729 \text{ см}^4 \approx 74,4 \cdot 10^3 \text{ см}^4.$$

Завдання для індивідуальної роботи

Задача 4.1 Для составного тавра (рис 4.7) розрахувати положення центру ваги C перерізу та значення центрального моменту інерції I_z при наступних вихідних даних: $b = 120 \text{ мм}$; $h = 160 \text{ мм}$; $t_1 = 30 \text{ мм}$; $t_2 = 40 \text{ мм}$.

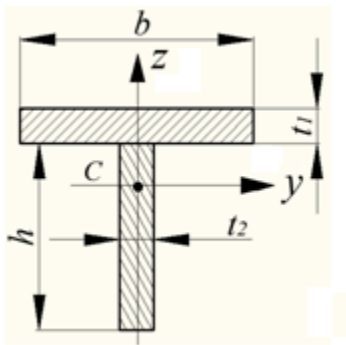


Рисунок 4.7

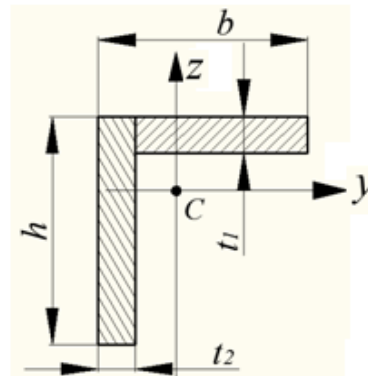


Рисунок 4.8

Задача 4.2 Для составного уголка (рис 4.8) знайти положення центру ваги перерізу і значення центральних моментів інерції I_z и I_y при наступних вихідних даних: $b = 120 \text{ мм}$; $h = 160 \text{ мм}$; $t_1 = 30 \text{ мм}$; $t_2 = 40 \text{ мм}$.

5 МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ І МЕТОДИ ЇХ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ

5.1 Загальне поняття про механічні характеристики матеріалів і їх визначенні

При виборі матеріалу деталей машин, механізмів, елементів конструкцій в проектуванні і в подальших розрахунках їх міцності, жорсткості і стійкості необхідно знання механічних характеристик матеріалу. *Механічними характеристиками* називаються такі їх чисельні значення, які характеризують пружність, міцність, пластичність і твердість матеріалу.

Пружність - це здатність матеріалу деталей і елементів конструкцій відновлювати свої розміри і форму після припинення дії зовнішнього навантаження.

Міцність – це вимога до деталей машин і механізмів, елементів конструкцій не руйнуватись під дією зовнішнього навантаження.

Пластичність характеризує властивості матеріалу давати значні залишкові деформації після зняття навантаження і при цьому не руйнуватися.

Під *твердістю* матеріалу розуміють характеристику його поверхні шляхом здатності чинити опір проникненню в нього інших тіл (наприклад, сталеві кульки, алмазних піраміди або конуса). Твердість відповідає якості поверхні конструкційного

матеріалу для подальшого виготовлення з нього деталей машин, механізмів, конструкцій.

Механічні характеристики визначаються в лабораторних умовах шляхом випробувань на спеціальному обладнанні зразків матеріалів стандартних розмірів. Механічні випробування розрізняють за характером навантаження і за видом деформації.

За характером навантаження випробування бувають:

а) *статичні* (при дії повільно змінюваної за часом сили або постійної сили).

б) *змінні* (від мінливого за величиною і напрямком навантаження).

в) *ударні* (при дії навантажень малої тривалості за часом).

По виду деформацій випробування зразків розрізняються на:

- розтягання;
- стискання;
- зріз;
- згинання.

Випробування проводять при нормальній кімнатній температурі, хоча бувають випробування зразків матеріалу при високій температурі (наприклад, для двигунів турбін, реактивних двигунів) і низькій температурі (наприклад, для матеріалів холодильних камер рефрижераторних приміщень суден та ін.).

За механічними властивостями конструкційні матеріали можуть бути розділені на дві *групи*:

- а) пластичні;
- б) крихкі.

У пластичних матеріалів руйнуванню передують значні пластичні деформації (наприклад, сталь, мідь, алюміній).

Для крихких матеріалів руйнування відбувається в пружній області (наприклад, чавун, бронза, скло).

Найбільш широко проводять статичні випробування зразків на розтягання. Пояснюється це тим, що механічні характеристики матеріалу при розтяганні дозволяють використовувати їх і при інших видах деформацій. Крім того, цей вид випробувань легко здійснити в лабораторних умовах.

5.2 Статистичні випробування на розтягання (стискання) зразків матеріалу. Діаграми випробувань

Під час випробувань зразків на розтягання отримують механічні характеристики, що визначають властивості пружності і пластичності матеріалу.

Найбільш часто проводять випробування зразків із сталевого матеріалу, який знаходить широке застосування на практиці.

Зразки бувають циліндричними (рис. 5.1, а) і плоскими (рис. 5.1, б). Їх розміри обумовлюють спеціальні нормативні документи (стандарти і нормалі):

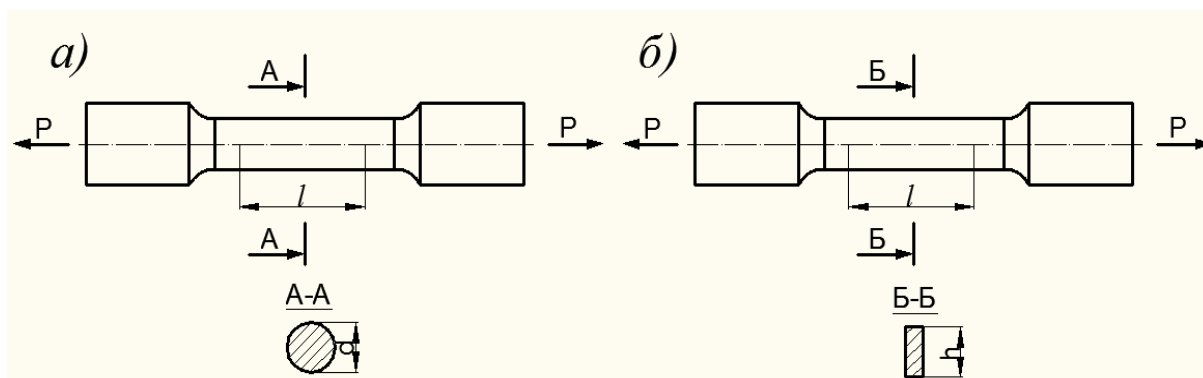


Рисунок 5.1 – Зразки матеріалу при випробуваннях на розтягання

Розрізняють такі види зразків:

а) довгі, у яких $\frac{l_0}{d_0} = 10$ і $\frac{l_0}{h_0} = 10$;

б) короткі при $\frac{l_0}{d_0} = 5$ і $\frac{l_0}{h_0} = 5$,

де d_0 - діаметр розрахункової довжини циліндричних зразків;
 h_0 - висота перерізу плоского зразка; l_0 - розрахункова довжина зразка (див. рис. 5.1).

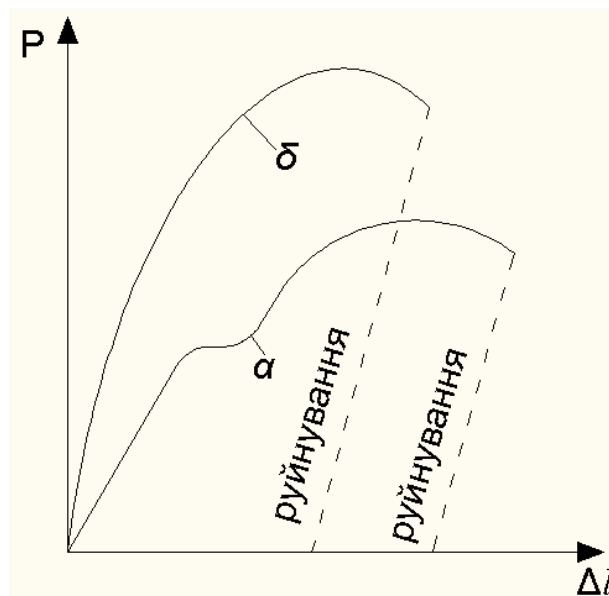


Рисунок 5.2 – Діаграма розтягання зразка

Зразки випробовують на спеціальних машинах (пресах) з механічним або гідравлічним приводом. В результаті випробувань будується діаграма " $P-\Delta l$ " (P - величина сили, що розтягує зразок, Δl – видовження розтягнутої довжини зразка при розтягуванні), вид якої показаний на рис. 5.2 (це так звана «машинна діаграма»).

Діаграма на рис. 5.2, а відповідає матеріалу зразків з маловуглецевої сталі (Ст2, Ст3), для яких має місце яскраво виражена «ділянка плинності» (горизонтальна лінія графіку). Діаграма на рис. 5.2, б відповідає випробуванню зразків з низьколегованої або легованої сталі (наприклад, 09Г2, 10ХСНД). Ці сталі відрізняються між собою вмістом вуглецю і легуючих добавок.

На підставі «машинних діаграм» рис. 5.2, які викреслюються спеціальним пристроєм машини будуються «умовні діаграми» в осях «напруження $\sigma = \frac{P}{F}$ » і «деформації $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ». Така діаграма називається умовною у зв'язку з тим, що величини площі перерізу F_0 і розрахункової довжини зразка l_0 приймаються первинними за розмірами зразка. Таке припущення відповідає близьким до дійсності величинам напружень і деформацій тільки для початкової частини діаграми. Якщо ж враховувати дійсний вид діаграми зі змінними при випробуваннях величинами F_0 і l_0 , то це не призведе до суттєвих змін величин напружень тільки в кінцевій частині діаграми, хоча значно ускладнить обробку «машинної діаграми». Результати «дійсної діаграми» використовується, в основному, в дослідницьких цілях.

Розглянемо поведінку зразка при його розтягуванні на пресі і відзначимо характерні точки діаграми (рис.5.3)

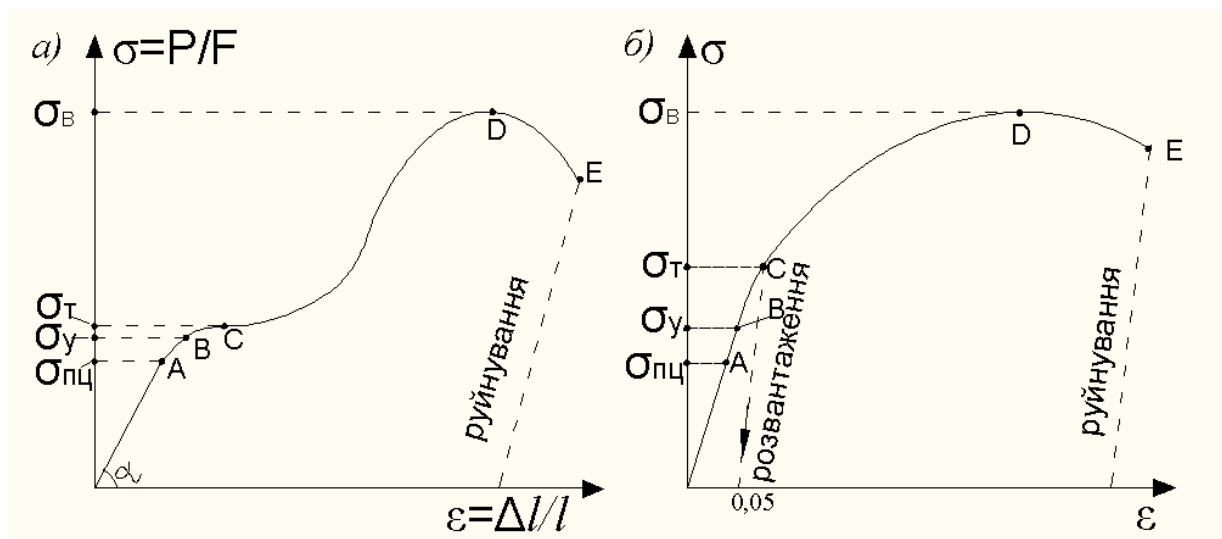


Рисунок 5.3 - Діаграми розтягування зразків з маловуглецевої сталі (а) і низьколегованої сталі (б)

До точки A на діаграмах має місце лінійна залежність між σ і ϵ , тобто вважається справедливим закон Гука $\sigma = E \cdot \epsilon$, де $E = \tan \alpha$ – модуль пружності при розтягуванні. Напруження, що відповідають точці A , називаються *границею пропорційності* (див. рис. 5.3).

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{F}, \quad (5.1)$$

де $P_{пц}$ – навантаження розтягання, що відповідає точці A діаграми.

Тангенс кута нахилу α пружної лінії діаграми відповідає модулю пружності матеріалу E при розтяганні зразка.

При досягненні сили розтягання величини P_y в точці B матеріал ще деформується пружно, але порушується лінійна залежність між σ і ϵ .

Напруження, які відповідні точці B діаграми, називаються *границею пружності* (див. рис. 5.3)

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{P_{\text{пр}}}{F}, \quad 5.2$$

де $P_{\text{пр}}$ – навантаження розтягання в пружній області.

Границі пропорційності $\sigma_{\text{пц}}$ і пружності $\sigma_{\text{пр}}$ відносяться до механічних характеристик, які визначають *властивості пружності матеріалу*.

При досягненні сили розтягання величини P_T в точці C спостерігається подальше зростання подовжень зразка Δl для маловуглецевої сталі без збільшення навантаження P_T . Це явище називається *плинністю матеріалу*, а напруження, яке відповідне горизонтальної лінії на діаграмі (майданчик плинності), - *границею плинності σ_T* (див. рис.5.3, а).

Для низьколегованої сталі (див. рис.5.3, б) немає плинності. Тому за границю плинності приймається така точка C на діаграмі, яка відповідає залишкової пластичної деформації зразка при його розвантаженні $\varepsilon = 0,05\%$ або $0,005$. Тому, напруження з позначенням $\sigma_{0,05}$ називають *умовною границею пружності матеріалу*.

Після стадії плинності при подальшому збільшенні розтягуючого навантаження матеріал зразка починає знову чинити опір деформації. Тут деформації ростуть швидше навантаження. Ця ділянка діаграм вище точки C називається *зоною зміцнення*.

При розтягуючій силі що розтягує $P = P_B$ на зразку з'являється місцеве стоншення - *шийка* (рис. 5.4). Це найбільше навантаження, яке може витримати зразок перед руйнуванням (розривом в районі шийки). Відповідно напруження σ_B є

найбільшим перед руйнуванням (точка D на діаграмах) і називається *границею міцності*.

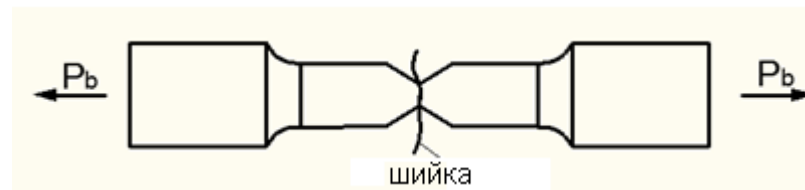


Рисунок 5.4 - Виникнення шийки зразка перед руйнуванням

Подальше зменшення перерізу шийки призводить до зменшення поздовжнього навантаження і зразок розривається і (точка E на рис. 5.3).

Величини напружень σ_T і $\sigma_{0,05}$ спільно з σ_B характеризують *міцність матеріалу*.

При *стисненні* сталевих зразків діаграма деформування подібна розтягуванню. Близькими до розтягування є механічні характеристики $\sigma_{пл}$, $\sigma_{пр}$, σ_T . Поняття границі міцності σ_B при стисненні сталевих зразків не існує, так як матеріал не руйнується, а сплющується.

Для крихких матеріалів (наприклад, чавун, бронза) проводять випробування циліндричних зразків на стискання. Діаграма « σ - ϵ » для крихких матеріалів показана на рис. 5.5. Єдина характеристика, отримана при випробуваннях, це *границя міцності* при стисканні зразка σ_B .

Чавун, як крихкий матеріал, краще чинить опір при стисканні. Границя міцності матеріалу при стисканні у кілька разів більша ніж при розтягуванні.

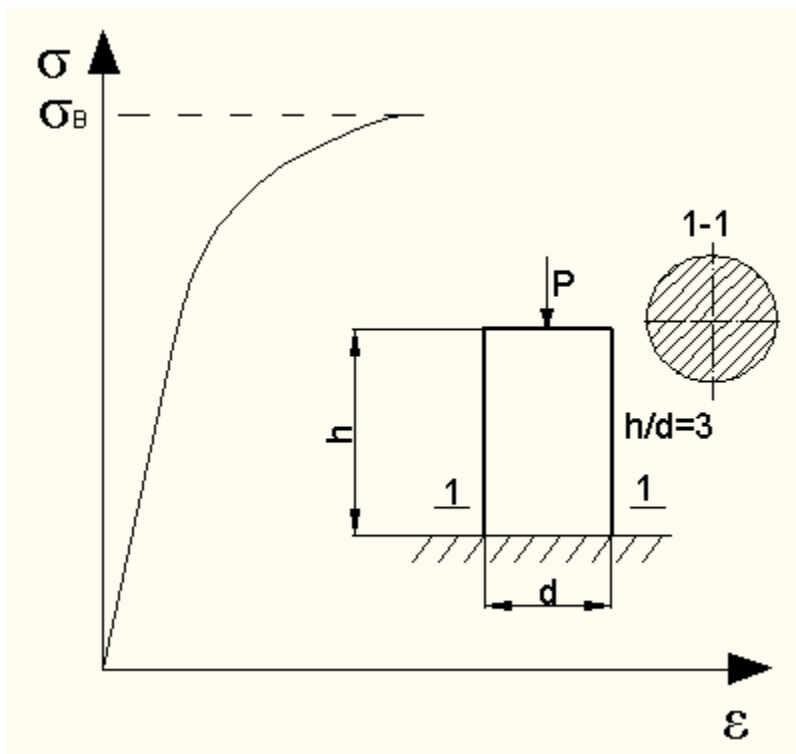


Рисунок 5.5 - Діаграма стискання крихких зразків

5.3 Механічні характеристики пластичності і твердості матеріалів

За діаграмами випробувань металевих зразків на розтягання визначаються також характеристики *пластичності матеріалу*:

- а) відносне видовження після розриву δ ;
- б) відносне поперечне звуження після розриву ψ .

Відносне видовження розраховується за формулою:

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{ост}}}{l} = \frac{l_1 - l_0}{l} \cdot 100\%, \quad 5.3$$

де l - початкова (розрахункова) довжина зразка;

l_1 - довжина зразка після руйнування (розриву).

Таким чином, відносне видовження, як механічна характеристика пластичності матеріалу, є виміряне у відсотках відношення зміни довжини зразка після руйнування до його первісної довжини.

Поперечне звуження визначається як:

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \cdot 100\%, \quad (5.4)$$

де F_0 - початкова площа поперечного перерізу зразка;

F_1 - площа поперечного перерізу зразка в районі шийки після руйнування.

Отже, відносне поперечне звуження характеризується зміною у відсотках відношення площі перерізу зразка після руйнування до його початкової площі перед випробуванням.

Чим більші значення величин δ і ψ , тим пластичніше матеріал. Такі матеріали переважно використовуються на практиці бо вони краще сприймають ударну дію навантажень і низькі температури.

До механічних характеристик пластичності відносяться також *кут загину* сталевих зразків. Ця механічна характеристика визначає такий допустимий кут загину зразка α , при якому не повинно бути тріщин в його розтягнутій зоні (рис.5.6).

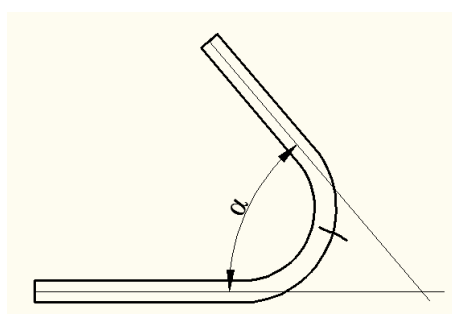


Рисунок 5.6 - Випробування на кут загину зразка

в'язкість характеризує також зварюваність сталі.

Твердість, як механічна характеристика стану поверхні матеріалу, визначається вдавненням у зразок сталеві кульки, алмазних призми або конуса (відповідні випробування називаються за іменами їх авторів Бринеля, Віккерса, Роквелла). Так, твердість матеріалу по Бринелю розраховується в одиницях напруження за формулою

$$HB = \frac{P}{\pi d f}, \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}, \quad (5.6)$$

де P - зусилля по втисненню сталеві кульки в матеріал; d - діаметр кульки; f - глибина вдавнення кульки в матеріал.

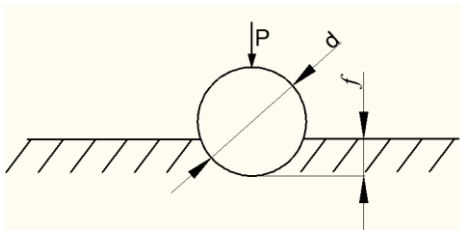


Рисунок 5.7 – Випробування твердості матеріалу по Брінелю

Механічні характеристики деяких сталей наведені у Додатку Б.

6 ЗРІЗАННЯ І ЗМІНАННЯ З'ЄДНАНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

6.1 Основні поняття про деформації зрізу (зсуву) і змину

Під *зрізом* (або *зсувом*) розуміється деформація, яка виникає під дією двох близько розташованих і протилежно направлених сил (рис. 6.1). При цьому в поперечному перерізі 1-1 між силами виникають дотичні напруження зрізу, які обчислюють за формулою:

$$\tau_{зр} = \frac{Q}{F_{зр}}, \quad (6.1)$$

де Q - зрізаюча сила (рівнодіюча дотичних напружень) в площині зрізу 1-1, яка дорівнює $Q = P$, а $F_{зр}$ - площа зрізу.

Умова міцності при зрізі має вигляд:

$$\tau_{зр} = \frac{Q}{F_{зр}} \leq \tau_{зр}, \quad (6.2)$$

де $\tau_{зр}$ - допустиме напруження деформації зрізу, яке при статичному навантаженні приймається рівним $\tau_{зр} = (0,6 \div 0,8) \sigma_p$; σ_p допустиме напруження при розтяганні того ж матеріалу.

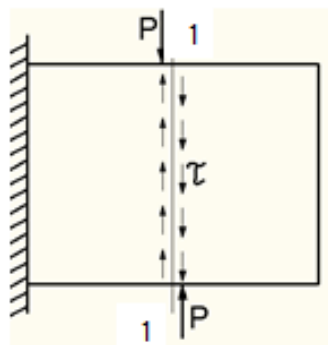


Рисунок 6.1 - Виникнення деформації зрізу

Розрахунки міцності на зріз здійснюються для заклепкових, шпонкових, болтових і зварних з'єднань машин, механізмів конструкцій.

Розглянемо заклепкове з'єднання (рис. 6.2) при розтягуванні силами P . При деякій величині сили P заклепка може бути зрізана за перерізом 1-1. Сила P передається шляхом тиску стінок отвору на стержень заклепки. Тоді за умови міцності (6.2) величина $Q = P$, а площа перерізу заклепки при її діаметрі d дорівнює $F_{зр} = \frac{\pi d^2}{4}$.

При зрізі між дотичним напруженням τ і кутовою деформацією γ в пружній області виконується закон Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad 6.3$$

де G - модуль пружності при зсуві, який пов'язаний з двома пружними характеристиками E і μ залежністю

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad 6.4$$

Якщо для сталевих матеріалів прийняти коефіцієнт Пуассона $\mu = \frac{1}{3}$, тоді з формули (6.4) можна отримати зв'язок між модулями пружності першого і другого роду $E \approx 2,7G$.

При роботі на зріз з'єднуючих елементів (заклепок, шпонок, болтів) в них виникає і такий вид деформації як зминання.

Так, при контакті заклепки із з'єднаними листами (рис. 6.2, а) від сил розтягування P площа зминання $F_{зм}$ умовно дорівнює площі проекції циліндричної поверхні контакту на діаметральну площину (рис. 6.2, б):

$$F_{зм} = d \cdot \delta, \quad (6.5)$$

де d - діаметр заклепки; δ - товщина з'єднуючого листа (накладки).

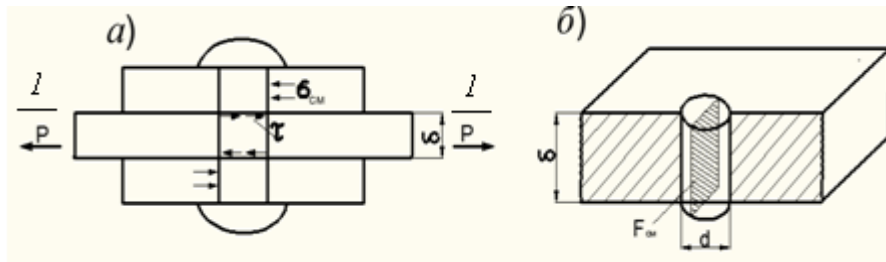


Рисунок 6.2- Умови роботи заклепкового з'єднання

Зминанням називається місцева деформація стискання від нормальних напружень $\sigma_{зм}$ (див. рис. 6.2, а) на площі передачі тиску $F_{зм}$ при контакті між поверхнями отвору і з'єднувальних елементів.

Умова міцності при зминанні для з'єднувального елемента (наприклад, заклепки або шпонки на рис. 6.2, а) записується у вигляді

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{F_{зм}} \leq \sigma_{зм} , \quad (6.6)$$

де $\sigma_{зм}$ - допустиме напруження на зминання, приймається рівним $\sigma_{зм} = 1,7 \div 2 \sigma_p$ - допустиме напруження при розтягуванні з того ж матеріалу.

За умовами (6.2) і (6.6) виконують перевірочний розрахунок відповідно на зріз (зсув) і зминання. З них можна отримати формули для проектувального розрахунку і визначення допустимого навантаження,

– проектувальний розрахунок:

$$F_{\text{зр}} \geq \frac{Q}{\tau_{\text{зр}}}, \quad F_{\text{зм}} \geq \frac{P}{\sigma_{\text{зм}}}; \quad (6.7)$$

– визначення допустимого навантаження:

$$Q_{\text{доп}} = F_{\text{зр}} \cdot \tau_{\text{зр}}, \quad P_{\text{доп}} = P \cdot \sigma_{\text{зм}}. \quad (6.8)$$

6.2 Практичні формули для розрахунку міцності заклепкових і зварних з'єднань

Заклепкові з'єднання бувають двох видів: однозрізні і двозрізні. Якщо руйнування заклепок відбувається по одній площині зрізу 1-1, то таке з'єднання називають однозрізним (рис. 6.3, а), а по двох площинах 1-1 і 2-2 - двозрізним (рис. 6.3, б).

Умова міцності на зріз для заклепкового з'єднання має вигляд

$$\tau_{\text{зр}} = \frac{P}{n \cdot i \cdot F_{\text{зр}}} \leq \tau_{\text{зр}}, \quad (6.9)$$

де $n = 1$ – для однозрізного з'єднання, $n = 2$ – для двозрізного з'єднання; i – число заклепок (для двохзрізного з'єднання - по одну сторону від стику – див.рис.6.3, а, б).

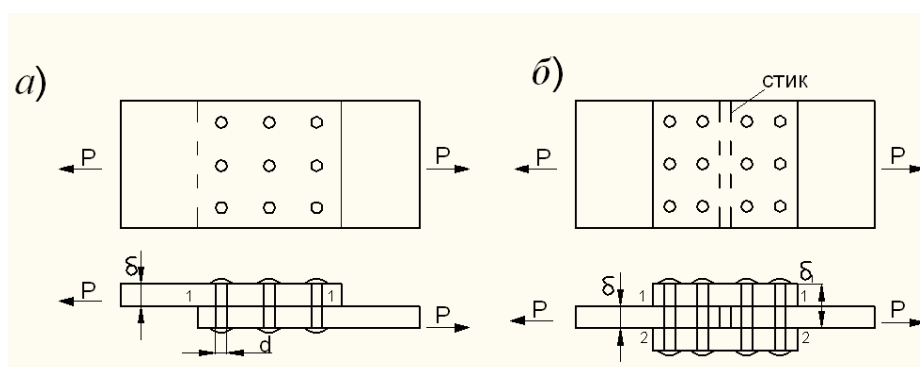


Рисунок 6.3- Види заклепкових з'єднань

Умова міцності з'єднання на зминання має вигляд:

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{i \cdot F_{зм}} \leq \sigma_{зм} , \quad (6.10)$$

де $F_{зм}$ для однозрізного з'єднання приймається $F_{зм} = d \cdot \delta$; для двозрізного з'єднання – $F_{зм} = d \cdot \delta$ при $\delta < 2\delta_1$ (див. рис. 6.3, б) і $F_{зм} = 2d\delta_1$ при $\delta \geq 2\delta_1$.

З формул (6.9) і (6.10) можна визначити число заклепок i для забезпечення міцності, необхідні площі зрізу $F_{зр}$ або зминання $F_{зм}$ (див. формулу 6.7), а також допустиме навантаження $P_{доп}$ (див. формулу 6.8).

Зварювання – найбільш досконалий вид з'єднання в різних конструкціях. Розрізняють зварні з'єднання в стик і внапустку.

Умови міцності стикового зварного шва при розтягуванні або стисканні з'єднання листів силами P , (рис. 6.4) перевіряють за нормальними напруженнями:

$$\sigma = \frac{P}{h \cdot l} \leq \sigma' , \quad (6.11)$$

де h – розрахункова товщина шва $h = \delta$; l – довжина шва; σ' – допустиме нормальне напруження для зварного шва, яке залежить від виду навантаження (розтягування або стискання), способу зварювання, марки електродів.

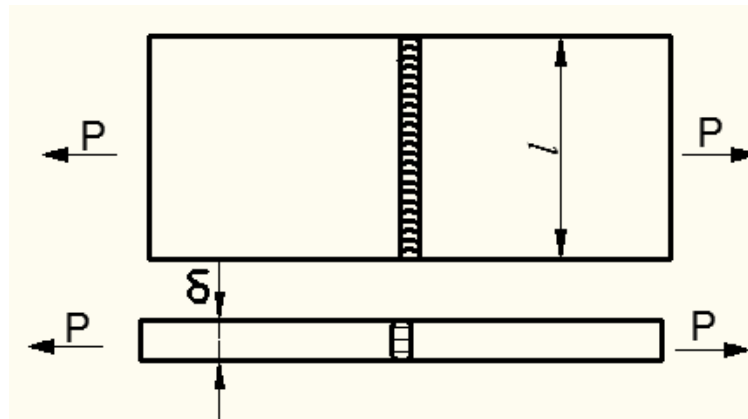


Рисунок 6.4- Стикове зварне з'єднання

Напусткове зварне з'єднання виконують кутовими швами (рис. 6.5, а): k – катет шва; h – розрахункова товщина шва, яка приймається

$$h = \beta \cdot k, \quad (6.12)$$

де β - коефіцієнт, що залежить від виду зварювання (ручна, напівавтоматична, автоматична), який обирається за нормативними документами.

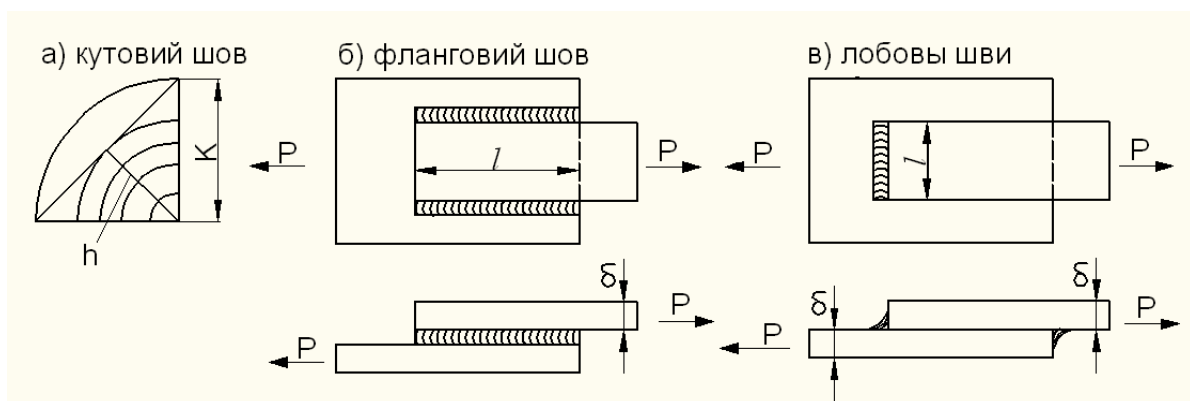


Рисунок 6.5- Напусткові зварні з'єднання

Міцність напусткових з'єднань перевіряються за дотичними напруженнями зрізу:

а) для флангових швів

$$\tau_{зр} = \frac{P}{2F_{ш}} \leq \tau' ; \quad (6.13)$$

б) для лобових швів

$$\tau_{зр} = \frac{P}{F_{ш}} \leq \tau' , \quad (6.14)$$

де $F_{ш}$ - розрахункова площа перерізу кутового шва, $F_{ш} = h \cdot l$; τ' – допустиме дотичне напруження для кутового шва, яке залежить від тих же факторів що і σ' , а також виду шва (флангового або лобового).

6.3 Рішення типових задач на міцність заклепкових і зварних з'єднань. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 6.1 Перевірити міцність на зріз і зминання заклепкове з'єднання (рис. 6.6) і міцність листа по ослабленому перерізу при розтягуванні силами P за наступними вихідними даними: $P = 40 \text{ кН}$; $b = 80 \text{ мм}$; $d = 8 \text{ мм}$; $\sigma_p = 14 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $\tau_{зр} = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $\sigma_{зм} = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $\delta = \delta_1 = 10 \text{ мм}$.

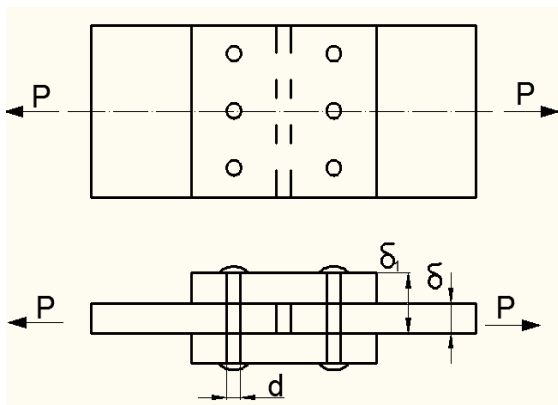


Рисунок 6.6- Розрахункова схема двозрізного заклепкувального з'єднання

Рішення

1. Перевірка міцності з'єднання на зріз:

$$\tau_{зр} = \frac{P}{n \cdot i \cdot F_{зр}} \leq \tau_{зр} ,$$

де $n = 2$ для двозрізного з'єднання; i – число заклепок по одну сторону від стика, $i = 3$; $F_{зр}$ – площа перерізу заклепки, $F_{зр} = \frac{\pi d^2}{4}$

$$\tau_{зр} = \frac{40}{2 \cdot 3 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,8^2}{4}} = 13,4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \geq \tau_{зр} .$$

З розрахунку видно, що умова міцності заклепкового з'єднання не виконується, тому збільшуємо діаметр заклепки: приймаємо $d = 10\text{мм}$ і повторюємо розрахунок:

$$\tau_{зр} = \frac{40}{2 \cdot 3 \cdot \frac{3,14 \cdot 1^2}{4}} = 8,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < \tau_{зр} .$$

Міцність заклепувального з'єднання на зріз забезпечена.

2. Перевірка міцності на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{i \cdot F_{зм}} \leq \sigma_{зм} .$$

Оскільки в поєднанні $2\delta_1 > \delta$, то приймаємо в розрахунку меншу площу зминання: $F_{зм} = d \cdot \delta = 1 \cdot 1 = 1,0 \text{ см}^2$.

$$\sigma_{зм} = \frac{40}{3 \cdot 1} = 13,3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < \sigma_{зм} \text{ .забезпечена.}$$

3. Перевірка міцності листа по ослабленому перерізу від отворів для заклепок:

$$F_{\text{нетто}} = b \cdot \delta - i \cdot \delta \cdot d = 8 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 5,0 \text{ см}^2;$$

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{нетто}}} = \frac{40}{5} = 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < \sigma_p .$$

Міцність листа, ослабленого отворами під заклепки, забезпечується.

Приклад 6.2. Визначити число заклепок для однозрізного з'єднання листів при розтягуванні силами P (рис. 6.7) при наступних вихідних даних: $P = 40 \text{ кН}$; $d = 10 \text{ мм}$; $\tau_{зр} = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $\sigma_{зм} = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

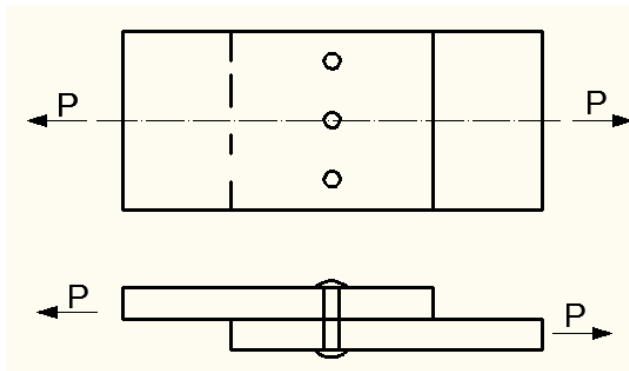


Рисунок 6.7 - Однозрізне заклепувальне з'єднання

Рішення

З умови міцності на зріз

$$\tau_{зр} = \frac{P}{i \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau_{зр}$$

визначається число заклепок:

$$i \geq \frac{P}{\tau_{зр} \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{40}{10 \cdot \frac{3,14 \cdot 1^2}{4}} = 5,3.$$

Приймаємо найближче більше число, тому кількість заклепок з'єднання з умови міцності на зріз дорівнює $i_{зр} = 6 \text{ шт.}$

З умов міцності на зминання

$$\sigma_{зм} = \frac{p}{i \cdot F_{зм}}$$

число заклепок буде:

$$i \geq \frac{P}{\sigma_{\text{зм}} \cdot d \cdot \delta} = \frac{40}{24 \cdot 1 \cdot 1} = 1,7.$$

Приймаємо $i_{\text{зм}} = 2$ шт.

З двох рішень по забезпеченню міцності заклепкуваного з'єднання вибираємо те, яке відповідає максимальному числу заклепок:

$$i = \max \begin{matrix} i_{\text{зр}} \\ i_{\text{зм}} \end{matrix} = 6 \text{ шт.}$$

Приклад 6.3. Знайти довжину флангових зварних швів l , що забезпечують міцність на зріз зварного напусткового з'єднання при розтягуванні силами P з використанням ручного зварювання (рис. 6.8). Вихідні дані: $P = 80 \text{ кН}$; $\tau' = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; катет кутового шва $k = 4 \text{ мм}$.

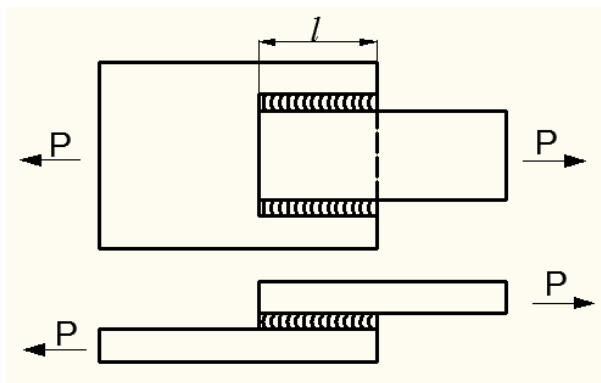


Рисунок 6.8 - Розрахункова схема напусткового зварного з'єднання з фланговими швами

Рішення

Довжину флангових швів визначаємо з умови міцності на зріз:

$$\tau_{\text{зр}} = \frac{P}{2 \cdot F_{\text{ш}}} = \frac{P}{2 \cdot h \cdot l} = \frac{P}{2\beta \cdot k \cdot l} \leq \tau'.$$

У разі ручного зварювання коефіцієнт $\beta = 0,7$. Тоді з умови міцності на зріз знаходимо довжину флангових швів:

$$l \geq \frac{P}{2\beta \cdot k \cdot \tau'} = \frac{80}{2 \cdot 0,7 \cdot 0,4 \cdot 10} = 14,3 \text{ см.}$$

Приклад 6.4. Знайти катет лобового шва, що забезпечує міцність зварного напусткового з'єднання при ручному зварюванні від розтягування силами P . Вихідні дані $P = 80 \text{ кН}$; $l = 200 \text{ мм}$; $\tau' = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

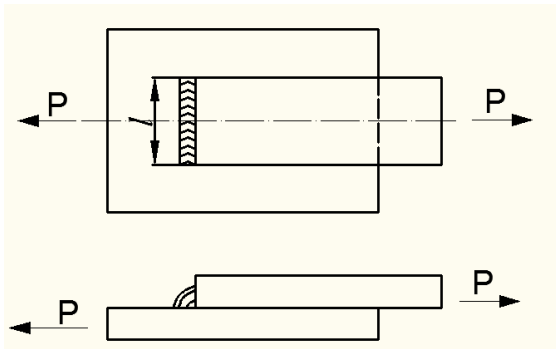


Рисунок 6.9-Розрахункова схема напусткового зварного з'єднання з лобовим швом

Рішення

З умови міцності на зріз для зварного шва

$$\tau_{зр} = \frac{P}{F_{ш}} = \frac{P}{h \cdot l} = \frac{P}{\beta \cdot k \cdot l} \leq \tau'$$

при використанні ручного зварювання ($\beta = 0,7$) знаходимо катет шва:

$$k \geq \frac{P}{\beta \cdot l \cdot \tau'} = \frac{80}{0,7 \cdot 20 \cdot 10} = 0,57 \text{ см.}$$

Приймаємо найближчий мінімальний катета лобового шва $k = 4 \text{ мм}$.

Завдання для індивідуальної роботи

Задача 6.1 Два листа товщиною $\delta = 10$ мм з'єднані внапустку шістьма заклепками діаметром $d = 20$ мм (рис. 6.10). Визначити величину допустимих розтягуючих зусиль $P_{\text{доп}}$ і необхідну ширину листів b при допустимих напруженнях: розтягання $\sigma_p = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, зріз $\tau_{\text{зр}} = 12 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, $\sigma_{\text{зм}} = 20 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

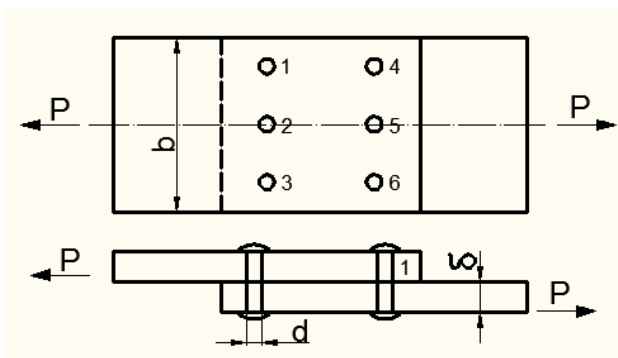


Рисунок 6.10

Задача 6.2 Знайти необхідну кількість заклепок i для з'єднання в напустку двох листів товщиною $\delta = 10$ мм при розтягуванні силами $P = 120$ кН. Прийняти діаметр заклепки $d = 20$ мм.

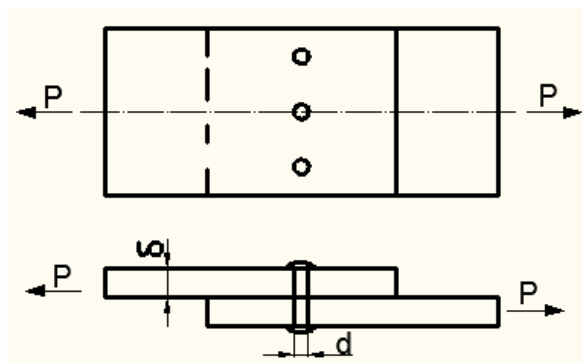
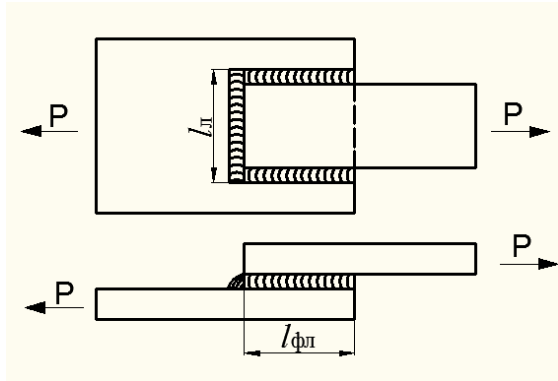


Рисунок 6.11

Задача 6.3. Визначити катет флангового і лобового швів при ручному зварюванні листів в напустку, якщо величина сил розтягування листів $P = 80 \text{ кН}$, довжина лобового шва $l_{\text{л}} = 20 \text{ см}$,



довжина флангових швів $l_{\text{фл}} = 30 \text{ см}$, допустиме напруження зварних швів на зріз $\tau' = 10 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

Рисунок 6.12

7 КРУЧЕННЯ ВАЛА

7.1 Крутний момент в поперечному перерізі вала

Крученням називають такий вид деформації видовженого тіла, при якому в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор - *крутний момент* M_K (інші складові дорівнюють нулю).

Тіла, в яких виникає деформація кручення, прийнято називати *валом*. У своїй більшості вали мають круглий переріз.

Деформації кручення зазнають вали машин і механізмів при обертанні, пружини, що працюють в експлуатації і т.п.

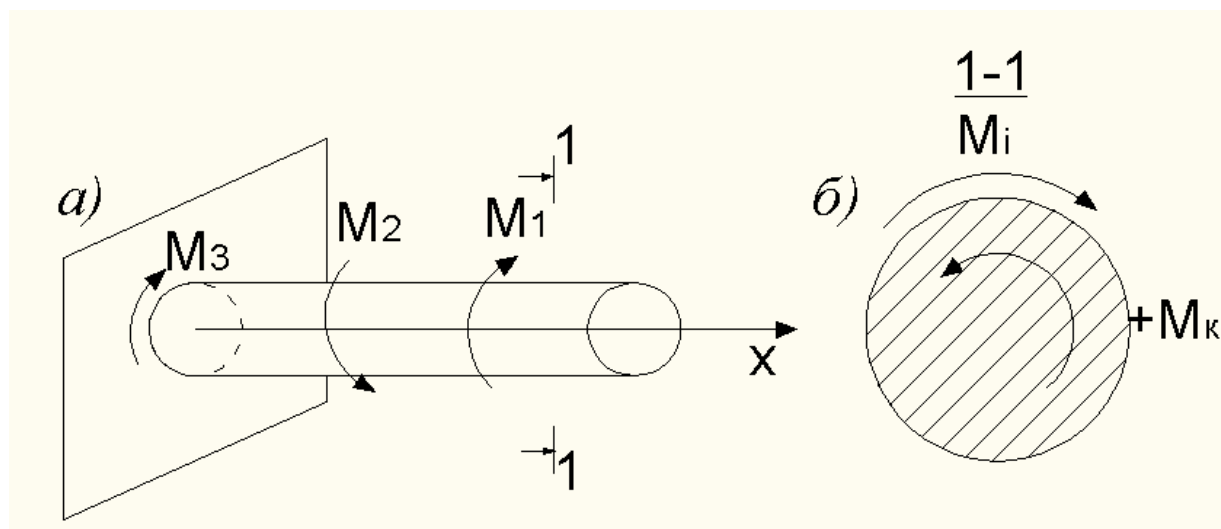


Рисунок 7.1 - Правила знаків для крутного моменту

У будь-якому поперечному перерізі, перпендикулярному до осі вала, крутний момент чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх зкручуючих моментів, прикладених до однієї з частин вала від перерізу. Таким чином крутний момент M_K в перерізі урівноважує зовнішні зкручуючі моменти M_i по одну сторону від перерізу (рис. 7.1, *a*).

Знак крутного моменту принципового значення не має. Однак домовимося надалі, що будемо вважати M_K додатним, якщо при погляді на торець відкинутої у задумі частини бруса зовнішній зкручуючий момент M_i діє за годинниковою стрілкою (рис. 7.1, б).

Для розрахунку крутного моменту в перерізі необхідно визначити всі включаючи до нього крутні моменти – зовнішні активні і реактивний при наявності защемлення опорного перерізу (наприклад, M_3 на рис. 7.1, а), і скласти рівняння рівноваги

$$M = 0. \quad (7.1)$$

де M - активні і реактивні моменти, які прикладені в перерізах вала.

При визначенні крутних моментів вздовж вала використовують метод перерізів з розбивкою вала на ділянки шляхом визначення меж між ними. За межі приймається: кінцеві перерізи ступенів вала; перерізи між зовнішніми активними крутними моментами; перерізи, де починається або закінчується розподілений зовнішній момент.

Графік значень крутного моменту за довжиною бруса називається *епюрою крутних моментів*. За епюрою можна визначити небезпечний переріз, де діє найбільший за абсолютною величиною крутний момент.

При побудові епюри M_K , додатні значення M_K відкладаються вгору від горизонтальної лінії, а від'ємні – вниз.

Розглянемо принципову суть побудови епюри M_K на прикладі вала (рис. 7.2) по ділянкам 1-3:

– на ділянці 1 – 1 у перерізі 1 (з урахуванням знаку M_K):

$$M_{K_1} = -M_1; \quad (7.2)$$

– на ділянці 2 – 2 у перерізі 2:

$$M_{K_2} = -M_1 - M_2; \quad (7.3)$$

– на ділянці 3 – 3 у перерізі 3:

$$M_{K_3} = -M_1 - M_2 + M_3; \quad (7.4)$$

$$M_K^{max} = M_{K_2}.$$

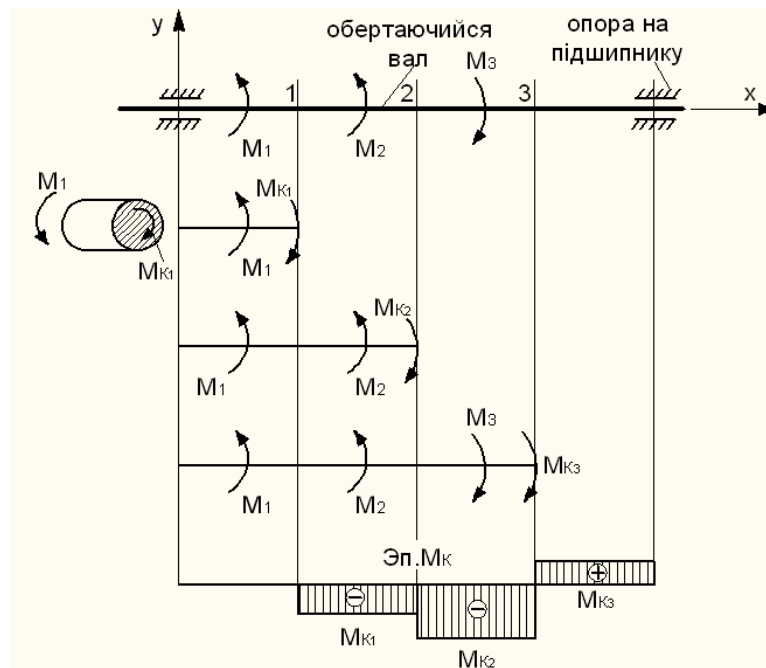


Рисунок 7.2- Епюра крутних моментів для вала

Деформацію кручення сприймає вал, що обертається з насадженими на нього шківками паскової передачі.

Зовнішні обертаючі моменти, що діють на кожен шків, можуть бути виражені через потужність N (в $вт$) і кутову швидкість ω (в $рад / сек$) за формулою

$$M = \frac{N}{\omega}, \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (7.5)$$

Зовнішній крутний момент може бути визначений і через сили натягу гілок паскової передачі шківів.

Слід мати на увазі, що напрямок стрілок на розрахунковій схемі кручення вала відноситься до напрямку крутних моментів, а не до напрямку його обертання.

7.2 Напруження і кутові переміщення вала круглого поперечного перерізу

Міцність вала при крученні забезпечуються, коли дотичні напруження τ в площині його поперечного перерізу не перевищують рівня допустимих. Ці напруження приводять до рівнодіючої – крутному моменту в перерізі M_K (рис. 7.3, а).

Теорія кручення бруса кругового перерізу вала заснована на таких *гіпотезах і припущеннях*:

а) поперечний переріз вала, плоский і перпендикулярний до його осі перед виникненням деформації кручення залишається плоским і нормальним до його осі після деформації (гіпотеза плоских перерізів);

б) радіуси поперечних перерізів при деформації не викривляються;

в) матеріал бруса підкоряється закону Гука між напруженнями і деформаціями.

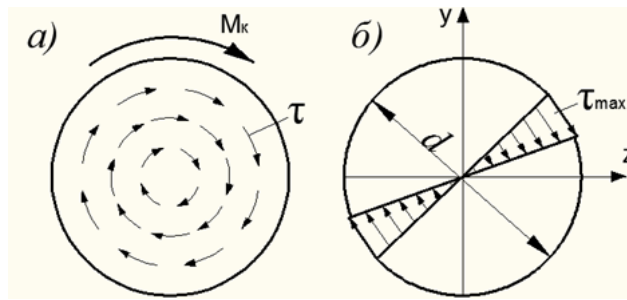


Рисунок 7.3- Дотичні напруження в перерізі бруса

Максимальні дотичні напруження τ_{max} , за якими перевіряється міцність при крученні, обчислюються в небезпечному перерізі вала, де діє найбільший за абсолютною величиною крутний момент M_K . Дотичні напруження розподіляються по перерізу за лінійним законом. Небезпечною точкою буде найбільш віддалена від центру перерізу точка на поверхні бруса (рис. 7.3, б). Тоді для вала круглого суцільного або кільцевого поперечного перерізу умова міцності має вигляд:

$$\tau_{max} = \frac{M_K^{max}}{W_p} \leq \tau_K, \quad 7.6$$

де M_K^{max} - найбільший крутний момент в небезпечному перерізі вала; W_p - полярний момент опору перерізу; τ_K - допустиме дотичне напруження при крученні, що дорівнює для сталевих матеріалів бруса $\tau_K = (0,5 \div 0,8) \sigma_p$.

Полярний момент опору перерізу вала дорівнює:

а) для круглого суцільного перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3; \quad 7.7$$

б) для кільцевого перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2d^3 (1 - c^4), \quad 7.8$$

де $c = \frac{d_{\text{в}}}{d}$; d - діаметр суцільного перерізу і зовнішній діаметр кільцевого перерізу; $d_{\text{в}}$ - внутрішній діаметр кільця.

За формулою (7.6) можна визначати як необхідний діаметр вала d , так і допустиме навантаження при крученні $M_K^{\text{доп}}$.

Кут повороту одного перерізу відносно іншого називається повним кутом закручування вала між цими перерізами.

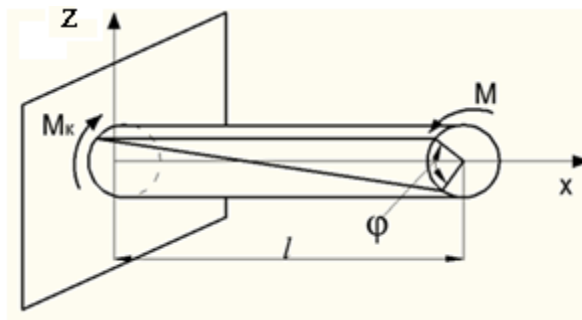


Рисунок 7.4- Кут закручування вала при деформації кручення

Повний кут закручування вала довжиною l визначається за формулою

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_K dx}{GJ_p}, \text{ рад}, \quad (7.9)$$

де GJ_p - жорсткість перерізу при крученні; G - модуль зсуву; J_p - полярний момент інерції перерізу.

Для круглого суцільного перерізу вала

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad (7.10)$$

Для кільцевого перерізу вала

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1 d^4 (1 - c^4). \quad (7.11)$$

При $M_K = \text{const}$ і $J_p = \text{const}$ (вал постійного перерізу) повний кут закручування ділянки довжиною l визначається за формулою

$$\varphi = \frac{M_K l}{G J_p}, \text{ рад.} \quad \text{або} \quad \varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_K l}{G J_p}, \text{ град.} \quad (7.12)$$

Характеристикою жорсткості вала при крученні є *відносний кут закручування* $\theta = \varphi/l$.

Умова жорсткості при крученні вала має вигляд:

$$\theta \leq \theta_{\text{доп}}, \frac{\text{град}}{\text{см}}, \quad (7.13)$$

де $\theta_{\text{доп}}$ - допустимий відносний кут закручування, який для різних конструкцій і видів навантажень приймається в межах $0,15 \div 2 \frac{\text{град}}{\text{см}}$ $1 \text{ град} = \frac{180}{\pi} \text{ рад.} = 57,3 \text{ рад.}$

Формула (7.9) для кута повороту на i -й ділянці φ_i відносно кінцевого перерізу вала має вигляд:

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \int_0^x \frac{M_{K_i}}{G J_{p_i}} dx, \quad (7.14)$$

де M_{K_i} - крутний момент на i -й ділянці; $G J_{p_i}$ - жорсткість i ділянки; φ_{i-1} - кут повороту кінцевого перетину попередньої ($i-1$) ділянки.

За результатами розрахунку кутів закручування вала за формулою (7.14) будується епюра кутів закручування φ . Ординати епюри φ відкладаються вгору від горизонтальної лінії, а від'ємні – вниз.

8.4 Рішення типової задачі про розрахунок кручення вала. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 7.1. Стальний вал постійного круглого перерізу (рис. 7.5) навантажений зовнішніми крутними моментами M_1 , M_2 , M_3 , M_4 . Значення трьох моментів наведено на рисунку. Потрібно визначити величину зовнішнього крутного моменту M_4 ; розрахувати величини крутних моментів по ділянках вала і побудувати епюру M_{Ki} ; визначити необхідний діаметр перерізу вала, якщо допустимі напруження при крученні $\tau_K = 50 \text{ МПа}$; розрахувати кути закручування вала φ_i відносно крайнього лівого перерізу і побудувати епюру φ ; визначити найбільший відносний кут закручування і порівняти його з допустимою величиною $\theta = 1,5 \frac{\text{град}}{\text{см}}$, $G = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

Рішення

1. Визначаємо величину зовнішнього крутного моменту M_4 з умови статички:

$$M = 0; -0,8 + 1,2 - 1 + M_4 = 0;$$

$$M_4 = 0,8 - 1,2 + 1 = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При складанні умов статички користуємося, наприклад, наступним правилом знаків для зовнішніх моментів: при їхньому напрямку за годинниковою стрілкою вони приймаються зі знаком плюс, проти годинникової стрілки - зі знаком мінус.

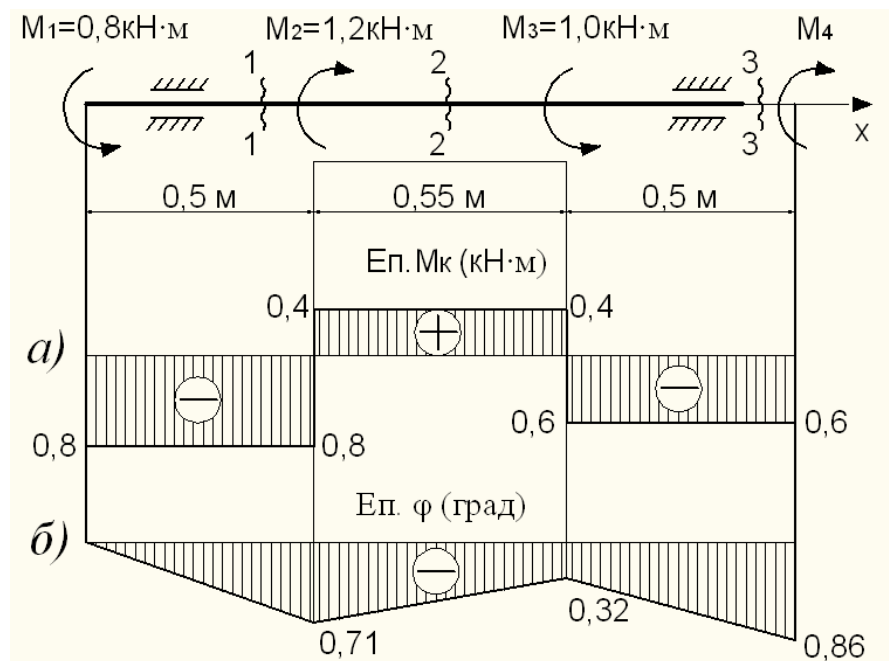


Рисунок 0.5- Розрахункова схема вала при скручуванні

2. Розбиваємо вал на три ділянки ($i = 3$) між зовнішніми крутними моментами і кінцями вала. За ділянками в зазначених перерізах 1, 2, 3 (див. рис. 7.5) розраховуємо крутні моменти M_{Ki} :

$$M_{K_1} = -M_1 = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{K_2} = -M_1 + M_2 = -0,8 + 1,2 = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{K_4} = -M_4 = -0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На підставі виконаних розрахунків будуємо епюру M_K (див. рис. 7.5, а). За епюрою визначаємо найбільше значення крутного моменту $M_K^{max} = M_1 = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

3. З умови міцності вала на кручення

$$\tau_{max} = \frac{M_K^{max}}{W_p} \leq \tau_K$$

розраховуємо необхідний діаметр поперечного перерізу вала.

Так як для вала суцільного круглого перерізу $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, то

$$\tau_{max} = \frac{16M_K^{max}}{\pi d^3} \leq \tau_K ,$$

звідки

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_K^{max}}{\pi \cdot \tau_K}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 80}{3,14 \cdot 5}} = 4,34 \text{ см.}$$

Округляючи діаметр вала в більшу сторону, приймаємо $d = 45 \text{ мм.}$

4. Визначаємо жорсткість вала на кручення GJ_p :

$$GJ_p = G \frac{\pi d^4}{32} = 8 \cdot 10^3 \frac{3,14 \cdot 4,5^4}{32} = 32,2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^2.$$

5. Розраховуємо кути закручування меж ділянками вала відносно лівого крайнього перерізу:

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{K_1} l_1}{GJ_p} = -\frac{0,8 \cdot 100 \cdot 50}{32,2 \cdot 10^4} = -0,0124 \text{ рад.} = -0,71 \text{ град.}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_{K_2} l_2}{GJ_p} = -0,0124 + \frac{0,4 \cdot 100 \cdot 55}{32,2 \cdot 10^4} =$$

$$= -0,0124 + 0,0068 = -0,0056 \text{ рад.} = -0,32 \text{ град.}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{M_{K_3} l_3}{GJ_p} = -0,0056 - \frac{0,6 \cdot 100 \cdot 50}{32,2 \cdot 10^4} =$$

$$= -0,0056 - 0,006893 = -0,0149 \text{ рад} = -0,86 \text{ град.}$$

На підставі виконаних розрахунків будуємо епюру кутів закручування валу φ (див. рис. 7.5, б).

6. Визначаємо найбільший відносний кут закручування θ_{max} і перевіряємо умову жорсткості на кручення. Найбільший відносний кут закручування θ_{max} відповідає в нашому прикладі найбільшому за модулем крутному моменту (див. рис. 7.5, а).

$$M_K^{max} = M_{K_1} = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м} = 80 \text{ кН} \cdot \text{см}$$

$$\theta_{max} = \frac{M_K^{max}}{GJ_p} \cdot \frac{180^\circ}{3,14} = \frac{80 \cdot 180}{32,2 \cdot 10^4 \cdot 3,14} = 1,425 \frac{\text{град}}{\text{см}}.$$

Перевіряємо умову жорсткості на кручення

$\theta_{max} < [\theta] = 1,5 \frac{\text{град}}{\text{см}}$. Отже, умова жорсткості для вала виконується.

Завдання для індивідуальної роботи

Для заданого вала, що зазнає кручення від зовнішніх крутних моментів M_1 , M_2 , M_3 , розрахувати по ділянках крутні моменти M_{Ki} і кути закручування φ_i . Побудувати епюри M_K і φ . Визначити небезпечний переріз вала при крученні.

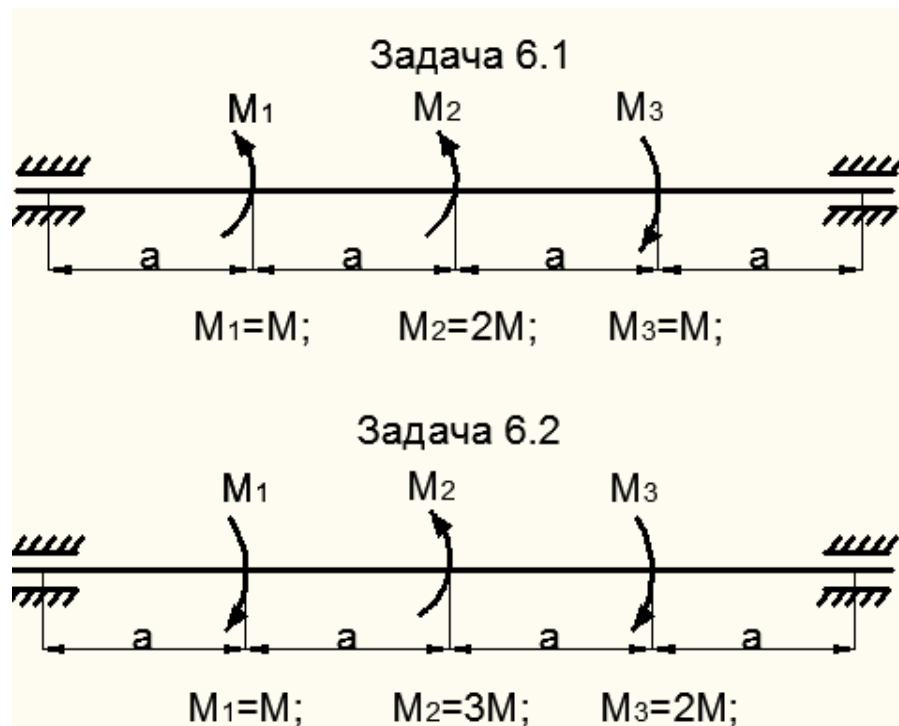


Рисунок 7.6- Варіанти завдань розрахунку вала на кручення

ЧАСТИНА 2

ЗГИНАННЯ БАЛОК І СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНІВ. ДОДАТКОВІ ПИТАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

8 ЗГИНАННЯ БАЛОК

8.1 Загальні положення про згинання балок.

Опорні зв'язки і опорні реакції.

Одним з найбільш поширених елементів суднобудівних, машинобудівних та інших конструкцій є балки. Нагадаємо, що *балкою* називається стержень частіше всього з прямолінійною віссю, що сприймає в основному деформацію згинання. Це є такий вид деформації балки, яка викривляється (згинається) під дією зовнішніх навантажень (зосереджених і розподілених сил, зовнішніх активних моментів) в результаті видовження одних поздовжніх волокон і скорочення інших та зсуву перерізів, що має місце при наявності зовнішніх опорних в'язей (опор, затиснень). *Віссю* балки називається геометричне місце центрів тяжіння перерізів до її навантаження (рис. 8.1, а). При дії зовнішніх навантажень вісь балки викривляється. Будемо називати її *пружною лінією балки* (Рис. 8.1, б).

Деформація згинання балки характеризується двома величинами (Рис 8.2): 1) *прогином* (*лінійним переміщенням*) w_A точки A балки перпендикулярно до її осі; 2) *кутом повороту* θ_A поперечного перерізу в площині згинання в результаті згину балки по відношенню до її початкового стану.

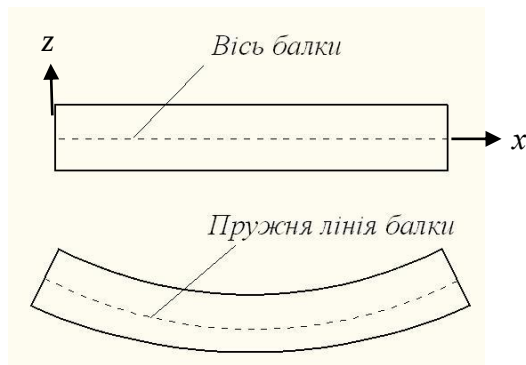


Рисунок 8.1 - Вісь і пружна лінія балки

Розрахункова схема балки, що, сприймає деформацію згинання, зображається лініями: прямою – до деформації і кривою (пунктиром) – в результаті деформації. Зауважимо, що при малих деформаціях балок за гіпотезою плоских перерізів кут повороту θ_A приблизно дорівнює куту нахилу горизонтальної лінії дотичної в точці A до пружної лінії (див. рис. 8.2).

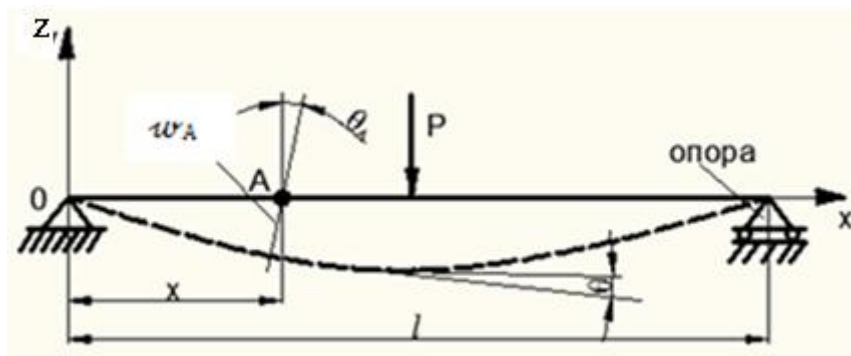


Рисунок 8.2 - Розрахункова схема балки при її згинанні і її деформації

У розрахунках балок при згинанні початок системи координат зазвичай приймається на лівому кінці балки (точка O), поздовжня вісь x має дотичний напрямок вправо від початку

координат, а дотичний напрямок вертикальної осі z - вгору (див. рис. 8.2).

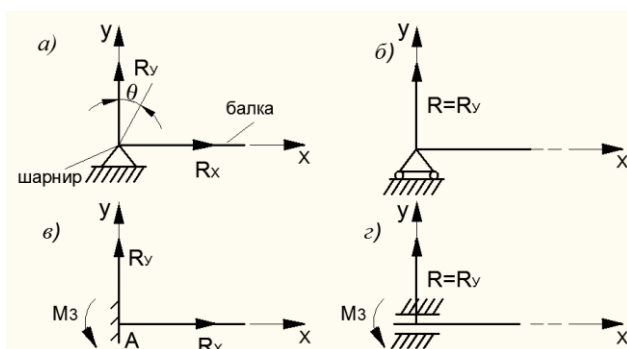
В опорі матеріалів розглядаються, в основному, балки з постійним по її довжині перерізом і називаються *призматичними*. Балки з одним опорним перерізом (затисненням) іменуються *консольними*, а з двома опорами на кінцях (див. рис. 8.2) – *однопрогонними*.

Особливістю балок у складі конструкцій є наявність опор (опорних закріплень) на кінцях. Балки служать для передачі діючих зовнішніх навантажень на опори, які їх підтримують.

В опорі матеріалів розглядаються такі найпростіші типи опорних закріплень, схематичне зображення яких показано на рисунку 8.3:

- 1) шарнірно-нерухома опора;
- 2) шарнірно-рухома опора;
- 3) нерухоме жорстке затиснення (защемлення);
- 4) рухоме жорстке затиснення.

Шарнірно-нерухома опора (рис.8.3, а) виключає вертикальне і горизонтальне переміщення



опорного перерізу ($w = u = 0$), але дозволяє його поворот в шарнірі опори навколо неї на кут θ . У загальному випадку в

Рисунок 8.3 – Типи опорних закріплень

такій опорі виникають вертикальна і горизонтальна реакції R_z і R_x .

Шарнірно-рухома опора (рис. 8.3, б) перешкоджає вертикальному зміщенню балки в опорному перерізі ($w = 0$), але можливе горизонтальне зміщення опори u і кут повороту опорного перерізу θ . В опорі виникає тільки вертикальна реакція $R = R_z$, а горизонтальна реакція відсутня ($R_x = 0$).

Нерухоме жорстке затиснення (рис. 8.3, в) накладає на балку умови відсутності не тільки горизонтального і вертикального переміщення ($w = u = 0$), а й повороту опорного перерізу ($\theta = 0$). В загальному випадку в такому опорному закріпленні виникають вертикальна і горизонтальна реакції R_z , R_x а також реактивний момент M_3 .

Рухоме жорстке затиснення (рис. 8.3, г) дозволяє переміщення опорного перетину тільки в горизонтальному напрямку при відсутності вертикального переміщення і кута повороту перерізу в опорі ($w = \theta = 0$). В такому затисненні виникають тільки вертикальна реакція R_z і реактивний момент M_3 .

По закінченню загальних положень підрозділу відзначимо *види деформації згинання* при дії на балку зовнішніх навантажень, що лежать в одній з головних площин інерції поперечного перерізу. Так, при розташуванні силових факторів в координатної площини xOz виникають такі типи згинання:

а) *чисте згинання*, яке проводиться двома зовнішніми (активними) моментами M , спрямованими в протилежні сторони

(рис. 8.4, а). При цьому з усіх внутрішніх силових факторів не рівним нулю є тільки згинальний момент;

б) *плоский поперечне згинання*, коли в прольоті балки між опорами може бути не перпендикулярне до її осі навантаження (рис.8.4, б) при цьому не рівними нулю будуть три внутрішніх силових фактора: згинальний момент, поперечна і поздовжня реактивні сили;

в) *пряме поперечне згинання* (яке часто називають поперечним згинанням) при дії перпендикулярних до осі балки навантажень (рис. 8.4, в).

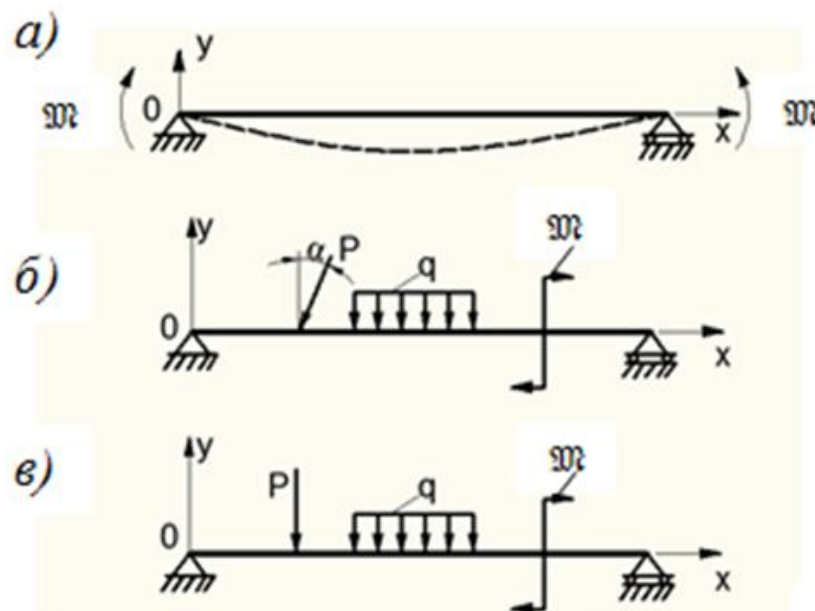


Рисунок 8.4 – Види згинання балок

Якщо балка при поперечному згині має такі опори, що загальне число реакцій, що виникають на опорах, не перевищують двох, то реакції завжди можуть бути визначені з двох рівнянь рівноваги типу (8.2). Такі балки, реакції яких визначаються з цих рівнянь статички, називаються *статично визначними* балками. Ці балки можуть бути таких найпростіших видів (рис. 8.9):

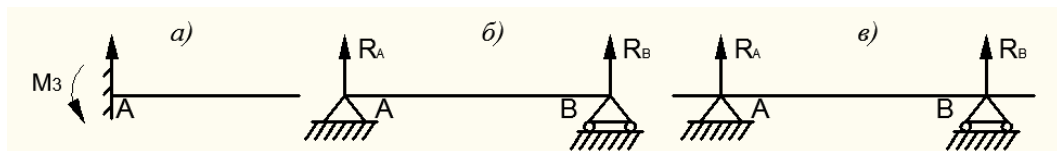


Рисунок 0.5 - Статично визначні балки

1) балка з одним жорстко затисненим і іншим вільним кінцем, інакше консоль (рис.8.5, а);

2) шарнірно-оперті балки (рис.8.5, б і 8.5, в).

Значення опорних реакцій деяких статично визначених балок надані у Додатку Д.

Балки, у яких загальне число реакцій опор більше числа рівнянь рівноваги, називаються *статично невизначими* (розрахунок їх згину буде розглянуто в п. 8.10). Для таких балок реакції опор визначаються зі спільного рішення рівнянь статки і умов сумісності деформацій між балкою і опорними закріпленнями.

8.2 Визначення опорних реакцій балок

В опорних закріпленнях балок виникають *реакції* як зусилля протидії зовнішньому навантаженню, з визначення яких необхідно починати вирішення всіх задач по згинанню.

Реакції опор статично-визначених балок розраховуються з рівнянь рівноваги статки, які можна представити у двох різних варіантах:

1) у вигляді суми проекцій всіх сил на осі x і y , а також суми моментів сил (включаючи реакції) відносно будь-якої точки по осі балки:

$$\sum X = 0; \sum Z = 0; \sum M = 0; \quad 8.1$$

2) у вигляді суми всіх сил на одну з координатних осей x або z і двох сум моментів сил (включаючи реакції) відносно опор балок в точках A , B (див. рис. 8.2):

$$\sum X = 0 \text{ або } \sum Z = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0 \quad 8.2$$

Вибір того чи іншого варіанта складання рівнянь рівноваги проводиться в кожному конкретному випадку з таким розрахунком, щоб по можливості не виконувати рішення системи рівнянь. Для перевірки правильності визначення опорних реакцій отримані їх величини рекомендується підставляти в якесь рівняння рівноваги, яке не використовувалось раніше.

При визначенні реакцій їх напрямки можна вибирати довільно. Якщо ж реакції в розрахунку виявилися від'ємними, то це означає, що їх напрямок протилежний вибраному. У цьому випадку на розрахунковій схемі початковий напрямок реакцій перекреслюють і вказують їх зворотний напрямок. У подальших розрахунках реакції розглядаються за їх реальним напрямком.

Однак можна заздалегідь передбачити правильний напрямок реакцій на підставі подумки представленої пружною лінії балки після її навантаження зовнішніми зусиллями (рис 8.6): при «відриві» балки від опори (опора A) реакція R_A має напрямок до опори; при «вдавленні» балки на опору (опора B) реакція R_B має напрямок від опори.

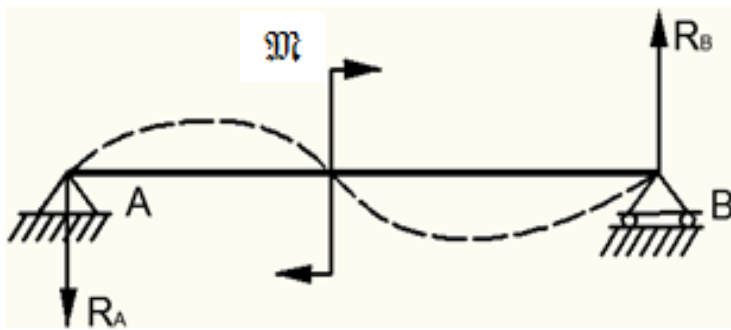


Рисунок 8.6 - До визначення напрямку реакцій

реакцій

Розглянемо типові випадки визначення реакцій для найпростіших видів навантажень.

Якщо на балку діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q , як показано на рис.8.7, то при визначенні опорних реакцій розподілене навантаження змінюється на рівнодіючу R , що дорівнює добутку інтенсивності навантаження q на довжину ділянки її дії l

$$R = q \cdot l. \quad 8.3$$

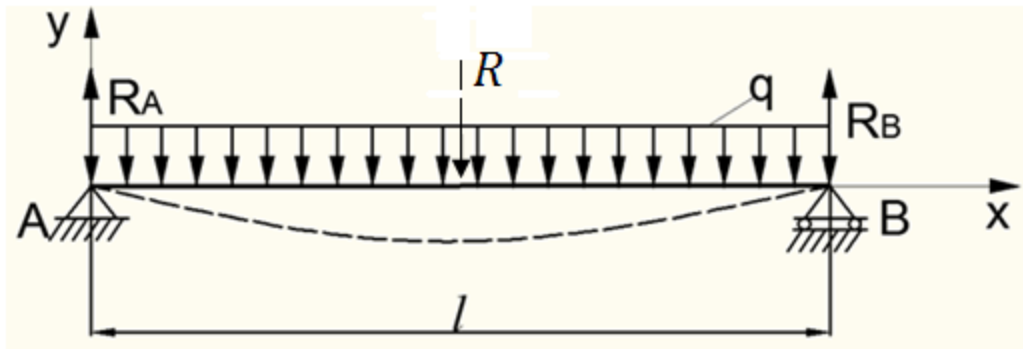


Рисунок 8.7 - Випадок рівномірно розподіленого навантаження на балку

Прикладом рівномірно розподіленого навантаження може служити власна вага балки або часто розташовані зосереджені навантаження на ділянці її довжини.

Точка прикладання рівнодіючої рівномірно розподіленого навантаження q лежить посередині тієї ділянки, на який вона діє. При лінійному законі дії розподіленого навантаження $q(x)$ рівнодіюча прикладається по її центру тяжіння.

Розмірність інтенсивності навантаження q виражається в кН/м або кН/см.

Розглянемо послідовність визначення опорних реакцій для випадку навантаження балки, показаної на рис.8.7:

1. На розрахунковій схемі балки показується прийнятий напрямок реактивних сил R_A і R_B , що виникають на опорах. Оскільки зовнішнє навантаження діє у вертикальній площині перпендикулярно осі балки, то горизонтальна реактивна сила на шарнірно-нерухомій опорі A відсутня.

2. Оскільки в даному випадку маємо дві невідомі реактивні сили R_A і R_B , то для їх визначення використовуємо два рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0. \quad 8.4$$

При складанні цих умов необхідно прийняти правило знаків для моментів сил, включаючи реакції: якщо моменти від сил спрямовані за годинниковою стрілкою, то вони вважаються додатними, а в протилежному напрямку – від’ємними.

Тоді перша умова рівноваги (8.4) приводить до рівняння щодо невідомої реактивної сили R_B (див. рис.8.7):

$$\sum M_A = ql \cdot \frac{l}{2} - R_B \cdot l = 0,$$

звідки

$$\frac{ql^2}{2} = R_B \cdot l; \quad R_B = \frac{ql}{2}.$$

Реакція є додатною, отже її напрямок прийнято правильним.

Аналогічно використовуємо другу умову рівноваги (8.4), що приводить до рівняння:

$$\sum M_B = R_A \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$R_A \cdot l = \frac{ql^2}{2}; \quad R_A = \frac{ql}{2}.$$

Знову реактивна сила виявилася додатною, отже її напрямок на розрахунковій схемі вибрано вірно.

3. Правильність визначення величин реактивних сил перевіряється за допомогою невикористаного рівняння умови рівноваги:

$$\sum Z = 0. \quad 8.5$$

При цьому проекції сил, які співпадають з напрямком осі z , вважаються додатними, а спрямованих у зворотну сторону – від'ємними.

Тоді на підставі використання умови (8.5) маємо:

$$\frac{ql}{2} - ql + \frac{ql}{2} = 0.$$

$$0 \equiv 0.$$

Отримана тотожність свідчить про правильність визначення величин реакцій в розрахунку згинання балки.

Розглянемо інший типовий випадок навантаження у вигляді внецентренно розташованої зосередженої сили P за довжиною балки l (рис.8.8).

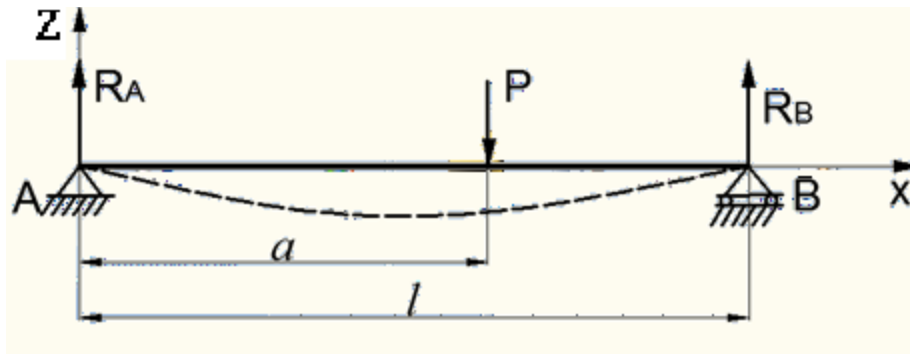


Рисунок 8.8–Випадок внецентренного навантаження балки
зосередженою силою

1. Покажемо на розрахунковій схемі реактивні сили R_A і R_B . Вони спрямовані, як було зазначено вище, назустріч навантаженню.

2. Реактивні сили визначимо з умов рівноваги статички:

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B \cdot l + P \cdot a = 0; \quad R_B = P \frac{a}{l};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot l - P \cdot (l - a) = 0; \quad R_A = P \frac{l - a}{l}.$$

Реактивні сили виявились додатними, отже їх первинний напрямок на розрахунковій схемі вибрано правильно.

Зауважимо заодно, що реакція на опорі B виявилася більшою, ніж реакція на опорі A . Це є наслідком того, що сила P знаходиться ближче до опори B , а значить і навантажує її більше.

3. Перевірка:

$$\sum Z = 0; \quad R_A - P + R_B = P \frac{a}{l} - P + P \frac{l - a}{l} = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Отримана тотожність свідчить про правильність визначення реакцій.

Розглянемо ще один випадок навантаження балки в прогоні зовнішнім зосередженим моментом $\mathfrak{M}$ (рис. 8.9), що також має місце в практичних розрахунках згину.

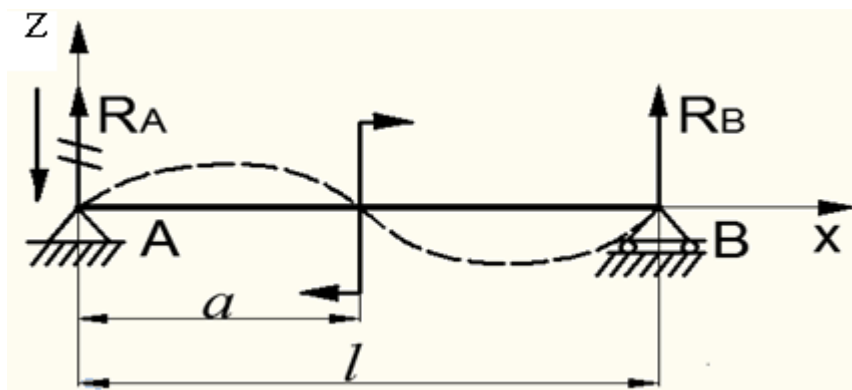


Рисунок 8.9 - Випадок навантаження балки зосередженим моментом

1. Покажемо на розрахунковій схемі напрямки реактивних сил (спочатку ми не знаємо, чи правильно прийняті ці напрямки).

2. Реакції визначаємо з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B \cdot l + \mathfrak{M} = 0; \quad R_B = \frac{\mathfrak{M}}{l};$$

реактивна сила виявилась додатною, отже її напрямки вибрано вірно.

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot l + \mathfrak{M} = 0; \quad R_A = -\frac{\mathfrak{M}}{l}.$$

2. Реактивна сила виявилася від'ємною, а це означає, що її напрямки вибрано неправильно. Тому на розрахунковій схемі закреслюємо початково (помилково) прийнятий напрямки R_A і

вказуємо зворотній (справжній) напрямок (див. рис.8.9). У подальших розрахунках вважаємо дію реактивної сили R_A з правильно вибраним напрямком.

3. Перевірка:

$$\sum Z = 0; \quad -R_A + R_B = 0; \quad -\frac{\mathfrak{M}}{l} + \frac{\mathfrak{M}}{l} = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Використане рівняння рівноваги для балки виконується, а це означає правильність визначення реакцій за їх величиною і напрямком.

8.3 Рішення типових задач з визначення опорних реакцій. Завдання для індивідуальних робіт

Приклад 8.3.1. Визначити величини опорних реакцій в балці, зображеній на рис.8.10, при наступних вихідних даних:

$$\mathfrak{M} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad q = 2 \text{ кН/м}; \quad P = 5 \text{ кН}; \quad \alpha = 30^\circ; \quad l_1 = 2 \text{ м}; \quad l_2 = 4 \text{ м}.$$

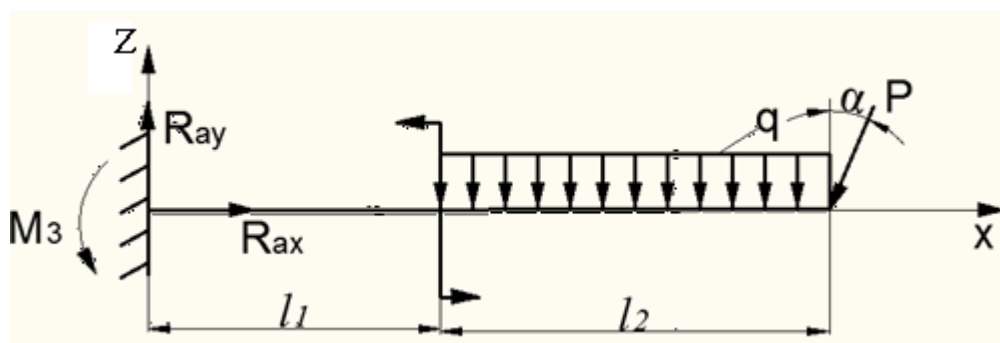


Рисунок 8.7 – Консольна балка

Рішення

1. Приймаємо напрямки реактивних зусиль R_{Ax} , R_{Az} , M_3 . Наявність горизонтальної реактивної сили R_{Ax} пов'язано з

присутністю в поперечному навантаженні балки зосередженої сили P , спрямованої під кутом α до осі балки, а це означає наявність горизонтальної проекції цієї сили.

2. Складаємо рівняння рівноваги і визначаємо величини опорних реакцій:

$$\sum X = 0; \quad R_{Ax} - P \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$R_{Ax} = P \cdot \sin \alpha = 6 \cdot \sin 30^\circ = 3 \text{ кН};$$

$$\sum Z = 0; \quad R_{Ay} - q \cdot l_2 - P \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$R_{Ay} = q \cdot l_2 + P \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 4 + 6 \cdot \cos 30^\circ = 13,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_3 - \mathfrak{M} + q \cdot l_2 \cdot l_1 + \frac{l_2^2}{2} + P \cdot \cos \alpha \cdot l_1 + l_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} M_3 &= -\mathfrak{M} + q \cdot l_2 \cdot l_1 + \frac{l_2^2}{2} + P \cdot \cos \alpha \cdot l_1 + l_2 = \\ &= -4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{4^2}{2} + 6 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 + 4 = 59,2 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Всі реакції виявилися додатними, що означає правильність вибору їх напрямків.

3. Правильність визначення реакцій перевіряємо за допомогою раніше не використаної умови статки:

$$M_B = 0;$$

$$\begin{aligned} M_B &= -M_3 + R_{Ay} \cdot l_1 + l_2 - \mathfrak{M} - q l_2 \frac{l_2^2}{2} = \\ &= -59,2 + 13,2 \cdot 2 + 4 - 4 - 2 \frac{4^2}{2} = -59,2 + 13,2 \cdot 6 - 4 - 16 = 0 \\ &0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Умова статички виконується, отже реакції за величиною і напрямком визначені правильно.

Приклад 8.2. Визначити величини опорних реакцій в балці (рис.8.11), якщо $P_1 = 3 \text{ кН}$, $P_2 = 1,5 \text{ кН}$, $M = 5,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН / м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 1 \text{ м}$, $c = 3 \text{ м}$.

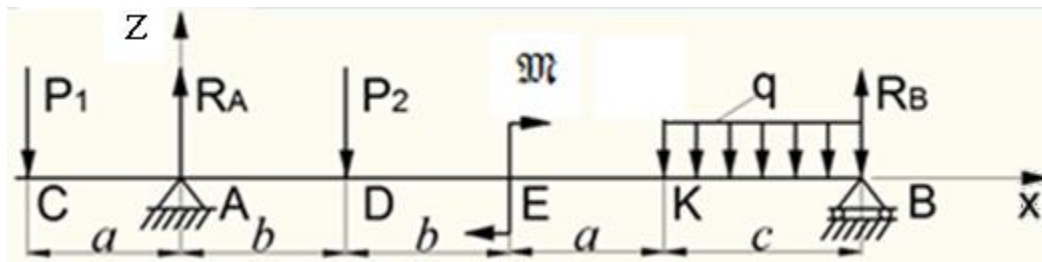


Рисунок 8.8 - Шарнірно-оперта балка з консоллю

Рішення

1. Покажемо на опорах передбачуваний напрямок вертикальних реактивних сил R_A і R_B . Горизонтальної реакції на шарнірно-нерухомій опорі A немає через відсутність горизонтального навантаження на балку. Початок координат приймаємо на лівій опорі балки в точці A .

2. Визначимо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad & -P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + M - q \cdot c \cdot 2b + a + \frac{c}{2} \\ & - R_B \cdot 2b + a + c = 0; \\ R_B = & \frac{-P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + M - q \cdot c \cdot 2b + a + \frac{c}{2}}{2b + a + c} = \\ = & \frac{-3 \cdot 2 + 1,5 \cdot 1 + 2 \cdot 3(2 \cdot 1 + 2 + \frac{3}{2})}{2 \cdot 1 + 2 + 3} = 4,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Реактивна сила є додатною, значить її напрямок вибрано вірно.

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; \quad & -P_1 \cdot 2a + 2b + c - P_2 \cdot a + b + c + M - q \cdot c \cdot \frac{c}{2} \\ & + R_A \cdot 2b + a + c = 0; \\ R_A = & \frac{P_1 \cdot 2a + 2b + c - P_2 \cdot a + b + c + M - q \cdot \frac{c^2}{2}}{2b + a + c} = \\ = & \frac{3 \cdot 4 + 2 + 3 + 1,5 \cdot 2 + 1 + 3 - 5,1 + 2 \cdot \frac{3^2}{2}}{2 + 2 + 3} = 5,7 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Реакція також додатна, отже її напрямок також вибрано правильно.

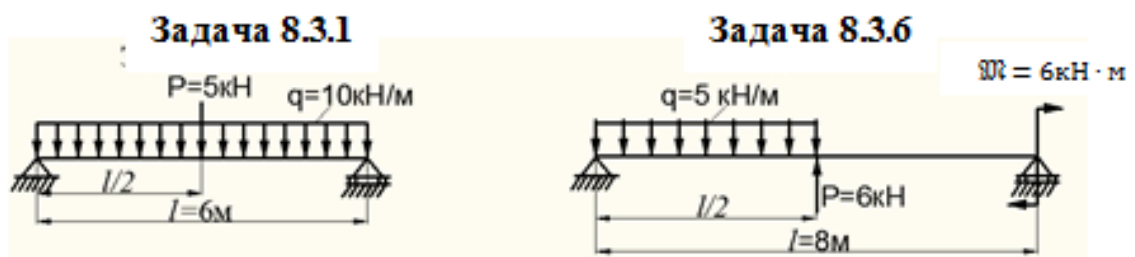
3. Перевірка:

$$\begin{aligned}\sum Z = 0; \quad & -P_1 + R_A - P_2 - q \cdot c + R_B = \\ & = -3 + 5,7 - 1,5 - 2 \cdot 3 + 4,8 = 0; \\ & 0 \equiv 0.\end{aligned}$$

Умова статички виконується, а це означає, що величини реакцій, та їх напрямки знайдено вірно.

Завдання для індивідуальної роботи

Визначити опорні реакції для балок:



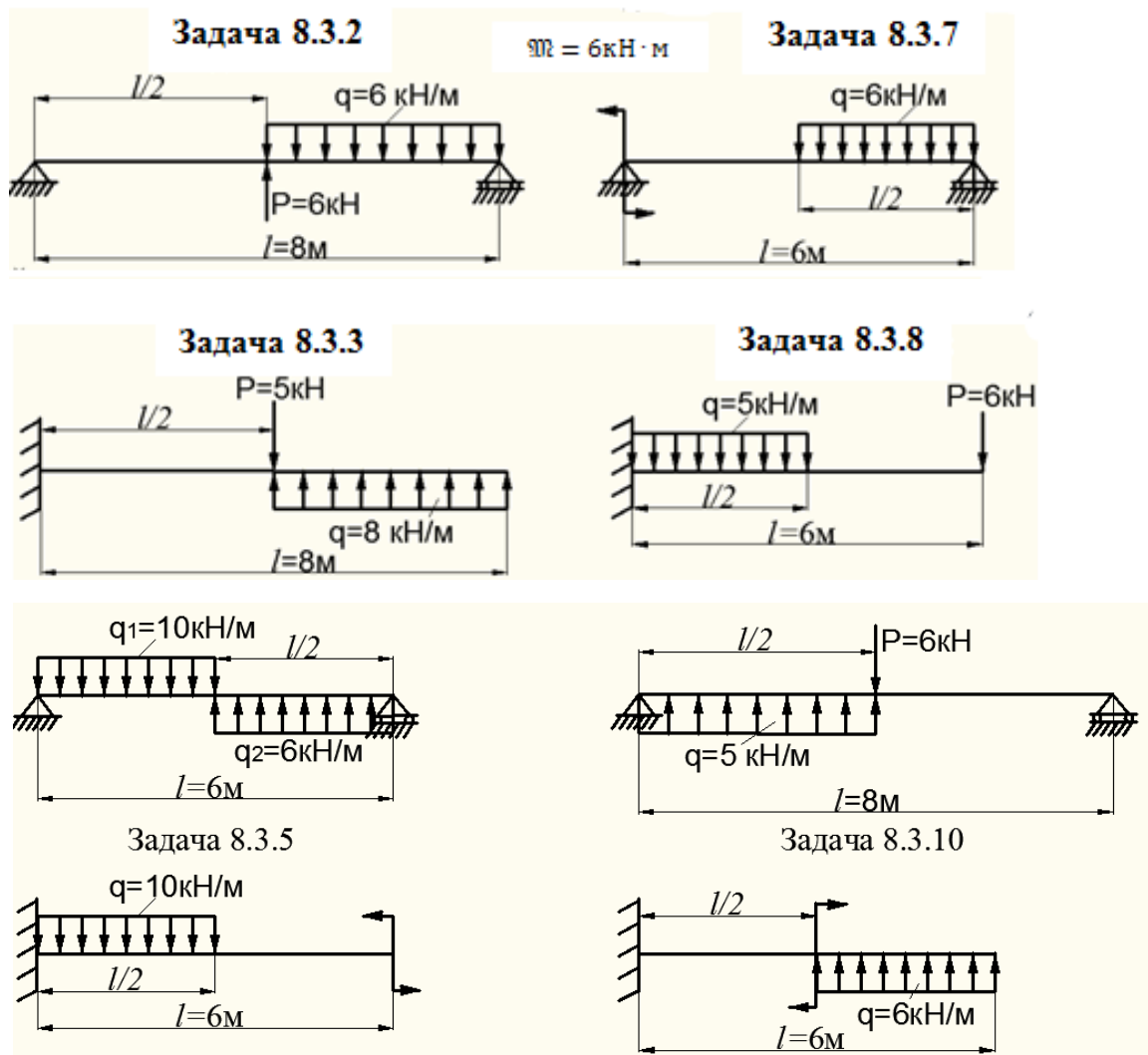


Рисунок 8.9 - Варіанти завдання з визначення опорних реакцій

8.4 Поперечна сила та згинальний момент при згинанні балок

Відповідно до гіпотези плоских перерізів (див. п. 1.5) плоскі поперечні перерізи балки до деформації залишаються плоскими і в деформованому стані. При згинанні ці плоскі перерізи взаємно обертаються навколо осі перпендикулярної до осі згинання. Очевидно, такий поворот відбувається внаслідок розтягування одних волокон матеріалу балки і стискання інших. У нашому

прикладі на рис. 8.1, б верхні волокна (на вогнутій стороні балки) стискаються, а нижні - розтягуються. Звідси можна зробити висновок, що у балки є такий шар волокон, який не зазнає ні розтягування, ні стискання. Цей шар називається *нейтральним шаром*. Лінія перетину нейтрального шару з площиною будь-якого поперечного перерізу називається *нейтральною віссю* (збігається з пружною лінією балки – пунктир на рис. 8.1, б).

Ці прості висновки не відразу були зроблені вченими. Знадобилося близько століття з часу початку вивчення згинання балок, щоб прийти до правильного розуміння цього явища. Галілей, який поклав початок створення наукової теорії згинання, ще на початку XVIII століття зробив неправильне припущення, що при згині всі волокна матеріалу однаково подовжуються. І тільки в кінці XVIII століття дослідним шляхом було встановлено, що при згинанні одні волокна (на опуклій стороні) *розтягуються*, а інші (на увігнутій стороні) *стискаються*.

Внаслідок подовження одних волокон і укорочення інших в балці виникає один з внутрішніх силових факторів – *згинальний момент*. Крім цього, як було встановлено, при згині балки одні перерізи балки зсуваються по відношенню до інших (російський вчений, інженер Д.І. Журавський), що призводить до іншого внутрішнього силового фактору – *поперечної сили*.

Згинальний момент – це головний момент всіх нормальних до перерізу балки елементарних внутрішніх сил σ відносно нейтральної осі, яка збігається з головною центральною віссю поперечного перерізу:

$$M = \int_F \sigma y dF, \quad 8.6$$

де σ – нормальні напруження, які перпендикулярні до площини поперечного перерізу (див. рис 2.3).

Згинальний момент в поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зусиль (включаючи реактивні), розташованих по один бік від перерізу, відносно центра ваги цього перерізу.

В опорі матеріалів згинальний момент *додатний*, якщо верхні волокна балки стискаються і *від'ємний* при розтягуванні верхніх волокон (рис. 8.13, *а*). Це правило кривизни з математики, якому майже два століття.

Поперечна сила – це головний вектор всіх елементарних сил τ в перерізі, що лежать у площині перерізу і паралельні до вертикальної осі поперечного перерізу:

$$Q = \int_F \tau dF, \quad (8.7)$$

Поперечна сила чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх зовнішніх сил (включаючи реакції) на вертикальну вісь z , яка перпендикулярна осі балки.

В опорі матеріалів поперечна сила в перерізі *додатна*, якщо вона прагне обертати ліву відтятую частину балки за годинниковою стрілкою, а в протилежному напрямку – для правої відтятою частини балки – *від'ємна* (рис. 8.13, *б*).

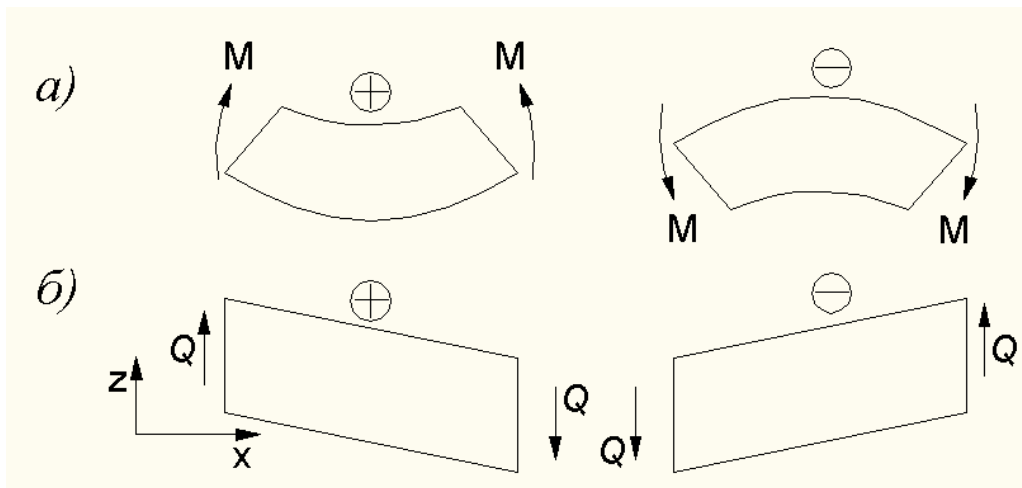


Рисунок 8.103 - Правило знаків для M і Q

Графіки зміни величин M і Q за довжиною балки називаються *епюрами*. Епюри будуються з урахуванням правил знаків M і Q по ділянкам балки. Тут під ділянками епюри розуміють відстань між кінцем балки і опорою, між опорою і зовнішніми силовими чинниками і між самими силовими чинниками. Додатні ординати епюр M і Q відкладаються вгору від осі балки (див. п. 8.2), а від'ємна – вниз.

Якщо, наприклад, на балку діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q (рис. 8.14), то порядок побудови епюр M і Q наступний:

1. Визначаємо величини реакцій R_A і R_B з умов статички (див. п. 8.2): $R_A = R_B = ql / 2$.

2. Будуємо епюру Q , користуючись методом перерізів на ділянці між опорами: в перерізі x подумки відкидаємо частину балки, наприклад, ліву. Дія відкинутої частини балки на ту, що залишилась, замінюємо внутрішньою силою пружності – поперечною силою $Q(x)$; $Q(x) = R_A \cdot x - qx = \frac{ql}{2} - qx$.

З отриманого виразу бачимо, значить, що закон зміни зусилля Q по ділянці відповідає прямій лінії між крайніми координатами: при $x = 0$ $Q(0) = ql / 2$; при $x = l$ $q(l) = ql / 2 - ql = -ql / 2$. З'єднуємо крайні координати епюри прямою лінією із зазначенням знаків Q (див. епюру Q на рис. 8.14).

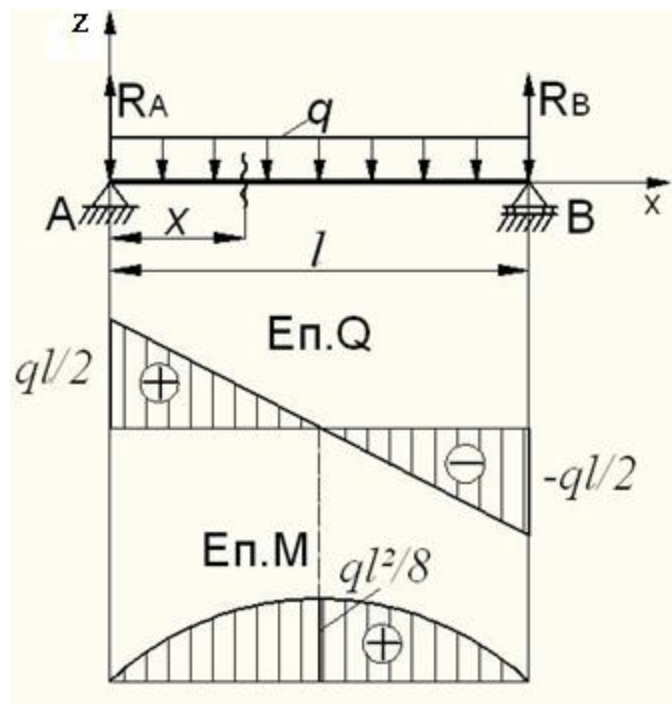


Рисунок 8.14 – Епюри M и Q при згинанні шарнірно-обпёртої балки при рівномірно розподіленому навантаженні

3. Будуємо епюру M з використанням методу перерізів. Подумки відкидаємо ліву частину маємо і з урахуванням прийнятого правила знаків для M маємо закон зміни $M(x)$ на ділянці:

$$M_x = R_A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}.$$

Отриманий вираз означає, що закон зміни M на ділянці балки відповідає квадратичній параболі: при $x = 0$ $M(0) = 0$; при $x = l$ $M(l) = 0$.

Координату максимуму епюри M на ділянці визначимо із умови існування екстремуму функції $M(x)$:

$$\frac{dM}{dx} = 0; \quad \frac{dM}{dx} = \frac{ql}{2} - \frac{2qx}{2} = \frac{ql}{2} - qx = 0; \text{ звідки } x = \frac{l}{2}.$$

Тобто максимум епюри M буде при координаті $x = \frac{l}{2}$ і він відповідає значенню моменту $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$. Максимальне значення поперечної сили Q за абсолютною величиною буде на опорах $Q_{max} = \frac{ql}{2}$.

Відзначимо при цьому, що максимум епюри M має місце в точці, де поперечна $Q = 0$.

Таким чином, при узгодженні епюр Q і M необхідно пам'ятати, що на епюрах, де $Q = 0$, має місце M_{max} .

В іншому типовому випадку навантаження балки зосередженою силою P (рис. 8.15) побудова епюр Q і M відповідає такій послідовності дій.

1. Визначаємо величину реакцій R_A і R_B з умов рівноваги статички (див. п. 8.2): $R_A = P \frac{l-a}{l}$; $R_B = P \frac{a}{l}$.

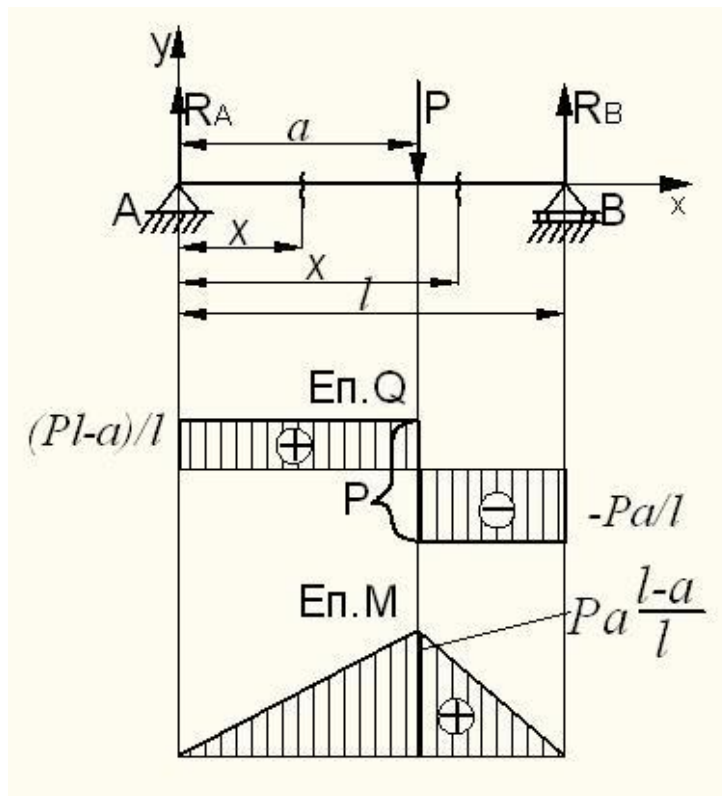


Рисунок 8.15– Епюри Q та M при згинанні балки, завантаженою зосередженою силою

2. Побудова епюри Q виконується на двох ділянках балки: першій ділянці – при $a \geq x \geq 0$; другій ділянці – при $a \leq x \leq l$.

На першій ділянці $Q = R_A = P \frac{l-a}{l}$:

при $x = 0$ і $x = a$ $Q = P \frac{l-a}{l}$.

На ділянці закон зміни Q відповідає прямій лінії з ординатою $Q = P \frac{l-a}{l}$.

На другій ділянці закон зміни Q відповідає залежності:

$$Q = R_A - P = P \frac{l-a}{l} - P = -P \frac{a}{l}.$$

А це є горизонтальна пряма лінія з ординатою $(-P \frac{a}{l})$ на цій ділянці (див. епюру Q на рис. 8.15).

Звертаємо увагу, що в перерізі, де діє на балку зосереджена сила P має місце скачок на величину цієї сили на епюрі Q (див. епюру Q на рис. 8.15).

3. Переходимо до побудови епюри M на ділянках балки.

На першій ділянці: $0 \leq x \leq a$ $M_x = R_A \cdot x = P \frac{l-a}{l} x$;
при $x = 0$ $M(0) = 0$; при $x = a$ $M_a = P \frac{l-a}{l} \cdot a$;
закон зміни згинального моменту на ділянці – пряма похила лінія (див. епюру M на рис. 8.15).

На другій ділянці $a \leq x \leq l$, $M_x = R_A \cdot x - P x - a$;
закон зміни епюри M на цій ділянці – теж пряма похила лінія:

$$\begin{aligned} \text{при } x = a \quad M_a &= P \frac{l-a}{l} \cdot a; \\ \text{при } x = l \quad M_l &= P \frac{l-a}{l} \cdot l - P l - a = \\ &= P l - a - P l - a = 0. \end{aligned}$$

На рис. 8.15 зображена епюра $M(x)$.

У підсумку для балки: $Q_{max} = P \frac{a}{l}$; $M_{max} = Pa \frac{l-a}{l}$.

Ще один типовий випадок навантаження балки – це дія в прогоні зосередженого зовнішнього моменту $\mathfrak{M}$ (рис.8.16). Покажемо послідовність побудови епюр Q і M .

1. Визначаємо величини реакцій на опорах балки:

$$R_A = R_B = \frac{\mathfrak{M}}{l} \text{ (див. п.8.2).}$$

2. Для двох ділянок балки знаходимо закони зміни епюри Q .

На першій ділянці $0 \leq x \leq a$, $Q = -R_A = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$;
 при $x = 0$ і $x = a$ $Q = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$, що відповідає прямій
 горизонтальній лінії на ділянці.

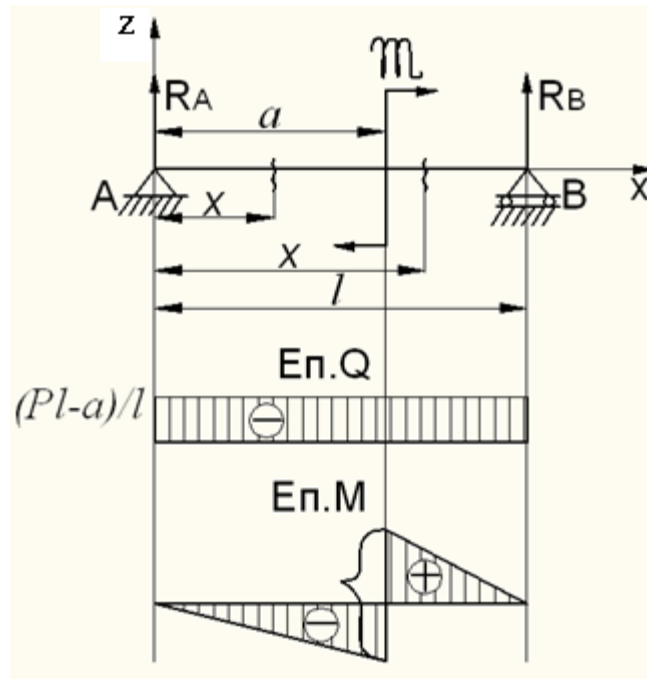


Рисунок 8.16 – Епюри Q і M при згинанні балки, завантаженої зовнішнім моментом

На другій ділянці при $a \leq x \leq l$, $Q = -R_A = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$.

А це продовження прямої лінії першої ділянки (див. рис. 8.16).

3. Епюра M на ділянках балки така.

На першій ділянці при $0 \leq x \leq a$ $M_x = -R_A \cdot x$;
 при $x = 0$ $M_x = 0$; при $x = a$ $M_a = -\frac{\mathfrak{M}}{l} \cdot a$.

Епюра M на цій ділянці відповідає прямій лінії.

На другій ділянці $a \leq x \leq l$ $M_x = -R_A \cdot x + \mathfrak{M}$;

при $x = a$ $M_a = -\frac{\mathfrak{M}}{l} \cdot a + \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \left(1 - \frac{a}{l}\right)$;

$$\text{при } x = l \quad M|_l = -\frac{\mathfrak{M}}{l} \cdot l + \mathfrak{M} = 0.$$

Епюра $M(x)$ зображена на рис 8.16, б).

Звертаємо увагу, що в перерізі, де діє зовнішній зосереджений момент $\mathfrak{M}$, на епюрі M має місце скачок на величину цього моменту (див. рис. 8.16, б).

При побудові епюр Q та M при згинанні балок, крім розглянутого аналітичного способу існують і інші підходи: побудова епюр за характерними точками; спосіб накладання (суперпозиції) [1, 3, 11].

8.15 Диференціальні залежності між параметрами згинання балки

Між інтенсивністю розподіленого навантаження, поперечною силою і згинальним моментом існують диференціальні залежності, встановлені російським ученим Д.І. Журавським і німецьким дослідником М.Шведлером.

Розглянемо балку, завантажену довільно розподіленим навантаженням $q(x)$, яке описується заданою аналітичною залежністю (рис. 8.17, а). У перерізі x виділимо двома паралельними перерізами нескінченно малий елемент dx (рис. 8.17, б).

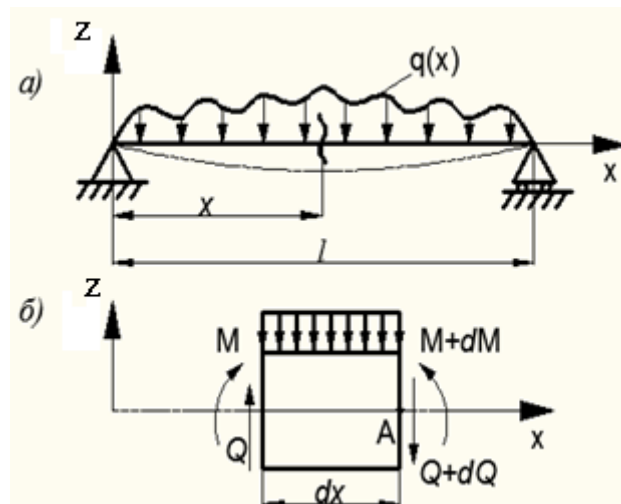


Рисунок 8.17 – До визначення диференціальних залежностей між силовими параметрами згинання балки

На нього діють: розподілене навантаження інтенсивністю $q(x)$, яке на нескінченно малій довжині елемента dx можна вважати постійним; поперечна сила Q і згинальний момент M , які при зміні довжини на величину dx отримують малі прирости dQ і dM .

Скористаємося умовами рівноваги статки для елемента балки dx :

$$1. \sum X = 0; Q(x) - q(x) \cdot dx - Q(x) - dQ = 0, \text{ звідки}$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x), \quad (8.8)$$

тобто похідна поперечної сили Q в поперечному перерізі x по лінійної координаті x дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження $q(x)$ в тому ж перерізі. Нагадаємо з вищої математики, що перша похідна функції за координатою в геометричному сенсі відповідає тангенсу кута нахилу дотичної до функції по відношенню до горизонтальної осі. А це означає, що

при криволінійній функції $Q(x)$ похідна $\frac{dQ}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут між дотичною до функції $Q(x)$ і горизонтальною лінією, паралельною до осі x .

2. $\Sigma M_A = 0$. Для моментів приймаємо таке ж правило знаків, що і при визначенні реакцій (див. п. 8.2):

$$M(x) + Q(x) \cdot dx - q(x) \cdot dx \frac{dx}{2} - M(x) - dM = 0;$$

$$M(x) + Q(x) \cdot dx - q(x) \cdot \frac{dx^2}{2} - M(x) - dM = 0,$$

звідки, нехтуючи складовими другого порядку малості (підкреслено), отримуємо:

$$\frac{dM}{dx} = Q(x). \quad (8.9)$$

Тобто перша похідна від згинального моменту в перерізі дорівнює поперечній силі в тому ж перерізі. Аналогічно вищевказаному, тангенс кута нахилу дотичної до криволінійної функції $M(x)$ від горизонтальної осі дорівнює похідній $\frac{dM}{dx}$.

Підставляючи (8.9) в (8.8), отримуємо:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x), \quad (8.10)$$

тобто друга похідна від згинального моменту в перерізі x дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження у тому ж перерізі.

Залежності (8.9) і (8.10) складають суть теореми *Журавського-Шведлера*: перша похідна від згинального моменту дорівнює поперечній силі в перерізі балки, а друга похідна – інтенсивності розподіленого навантаження у тому ж перерізі.

Диференціальні залежності між силовими параметрами згинання (8.8) - (8.10) використовуються при узгодженні між собою епюр Q та M :

1. На ділянках балки, на яких поперечна сила додатна, згинальний момент зростає (зліва направо), а на ділянках, на яких вона від'ємна, – спадає.

2. Чим більше за абсолютною величиною значення поперечної сили Q , тим крутіше лінія, що обмежує епюру M . Звідси випливає, що на ділянках балки із зростаючою величиною q , лінія епюри M обернена опуклістю вниз, а зі спадаючою величиною q – опуклістю вгору.

3. На ділянці балки, де поперечна сила Q має стале значення, епюра M описується прямою похилою лінією.

4. Якщо на межі сусідніх ділянок балки епюра Q має скачок, то лінії, що обмежують епюру M на цих ділянках, сполучаються зі зломом.

5. Якщо на межі сусідніх ділянок балки на епюрі Q є скачок, то лінії, що обмежують епюру M на цих ділянках, сполучаються зі зломом, тобто не мають в точці сполучення загальної дотичної.

6. Згинальний момент досягає екстремуму (максимуму або мінімуму) в перерізі балки, в якому поперечна сила дорівнює нулю; дотична до лінії, що обмежує епюру M , в цьому перерізі паралельна до базової лінії епюри.

7. На ділянках дії розподіленого навантаження q поперечні сили змінюються вздовж балки за лінійним законом, а епюра

згинальних моментів на цих ділянках – за законом квадратичної параболи.

8. На ділянках балки, на яких розподілене навантаження відсутнє, поперечна сила є сталою, а згинальний момент змінюється за лінійним законом.

9. На ділянках, де додатний згинальний момент зростає, від’ємна поперечна сила теж зростає; там, де додатний згинальний момент спадає, додатна поперечна сила зростає.

10. У місцях, де до балки прикладена зосереджена сила, на епюрі Q буде стрибок, рівний за величиною цій силі, а на епюрі M матиме місце перелом.

11. Зовнішній зосереджений момент на характер епюри Q не впливає, а ордината епюри M в цьому перерізі має скачок, рівний за величиною цьому моменту.

12. Епюра M завжди звернена опуклістю назустріч розподіленому навантаженні, що впливає з формули (8.10) і збігається з правилом знаків для згинальних моментів і кривизною лінії цієї епюри.

13. Початкові і кінцеві значення Q та M на епюрах повинні відповідати значенням зосереджених сил (в тому числі реакцій) і зовнішніх моментів з урахуванням правила знаків.

Узгодження епюр Q і M між собою з урахуванням типових випадків зовнішнього навантаження (зосереджена сила і розподілене навантаження, зовнішній момент) ілюструється наступною таблицею:

Таблиця 8.1- Узгодження епюр Q і M між собою

Внутрішні зусилля	Навантаження							
				$q=0$				
Еп. Q								
Еп. M								

Значення максимальних поперечних сил і згинальних моментів для деяких статично визначених балок надані у Додатку Д.

8.6 Рішення типових задач з побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 8.6.1. Побудувати епюри поперечних сил Q і згинальних моментів M для балки (рис. 8.18) при поперечному згинанні за наступними вихідними даними $P_1 = 3 \text{ кН}$; $P_2 = 1,5 \text{ кН}$; $M = 5,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $q = 2 \text{ кН} / \text{м}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 3 \text{ м}$.

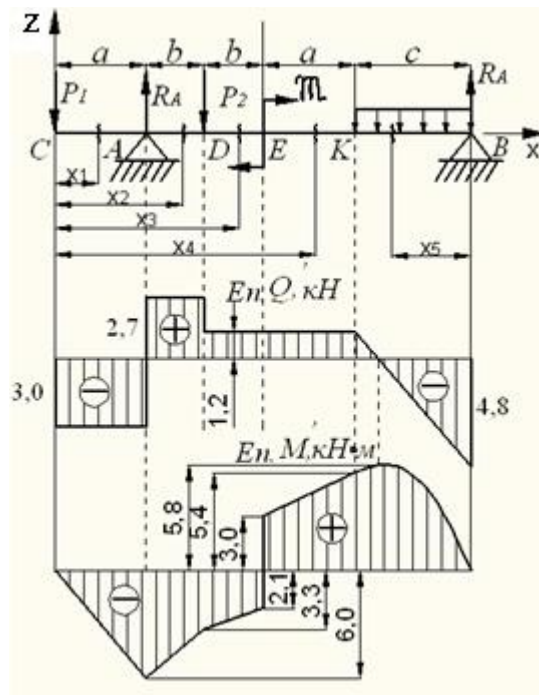


Рисунок 8.18—Епюри Q і M при згинанні для шарнірно-опертої балки

Рішення

1. Визначимо опорні реактивні сили з умов рівноваги статички:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & -P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + \mathfrak{M} - q \cdot c \cdot 2b + a + \frac{c}{2} \\ & - R_B \cdot 2b + a + c = 0; \\ R_B = & \frac{-P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + \mathfrak{M} - q \cdot c \cdot 2b + a + \frac{c}{2}}{2b + a + c} = \\ = & \frac{-3 \cdot 2 + 1,5 \cdot 1 + 5,1 - 2 \cdot 3(2 \cdot 1 + 2 + \frac{3}{2})}{2 \cdot 1 + 2 + 3} = 4,8 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; & -P_1 \cdot 2a + 2b + c - P_2 \cdot a + b + c + \mathfrak{M} - q \cdot c \cdot \frac{c}{2} \\ & + R_A \cdot 2b + a + c = 0; \\ R_A = & \frac{P_1 \cdot 2a + 2b + c - P_2 \cdot a + b + c - \mathfrak{M} + q \cdot c \cdot \frac{c}{2}}{2b + a + c} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot 4 + 2 + 3 + 1,5 \cdot 2 + 1 + 3 - 5,1 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}}{2 + 2 + 3} = 5,7 \text{ кН.}$$

Перевірка: $\sum Z = 0$; $-P_1 - P_2 - q \cdot c + R_A + R_B = 0$;

$$-3 - 1,5 - 2 \cdot 3 + 5,7 + 4,8 = 0.$$

$$0 \equiv 0.$$

Реактивні сили знайдено правильно.

2. Розбиваємо балку на 5 ділянок (див. рис. 8.18): CA , AD , DE , EK , KB . Початок координат приймаємо в лівому крайньому перерізі балки у точці C .

3. Визначаємо величини Q і M на кожній ділянці.

Ділянка CA : $0 \leq x_1 \leq a$;

$$Q_1 = \sum Z = -P_1 = -3 \text{ кН.}$$

Відкладаємо постійну ординату $Q_1 = 3 \text{ кН}$ на ділянці CA .

$$M_1 = \sum M_{x_1} = -P_1 \cdot x_1;$$

при $x_1 = 0$ $M_1 = 0$;

при $x_1 = a = 2 \text{ м}$ $M_1 = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Оскільки x_1 входить у вираз для M_1 в першій степені, то закон зміни M_1 на ділянці лінійний. Відкладаємо ординати M_1 на початку і кінці ділянки.

Ділянка AD : $a \leq x_2 \leq a + b$;

$$Q_2 = \sum Z = -P_1 + R_A = -3 + 5,7 = 2,7 \text{ кН.}$$

Відкладаємо постійну ординату $Q_2 = 2,7 \text{ кН}$ на ділянці AD .

$$M_2 = \sum M_{x_2} = -P_1 \cdot x_2 + R_A x_2 - a ;$$

при $x_2 = a = 2 \text{ м}$

$$M_2 = -P_1 \cdot a = -3 \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при $x_2 = a + b = 2 + 1 = 3 \text{ м}$

$$M_2 = -3 \cdot 3 + 5,7 \cdot 3 - 2 = -3,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Відкладаємо ординати M_2 на ділянці AD .

Ділянка DE : $a + b \leq x_3 \leq a + 2b$;

$$Q_3 = \sum Z = -P_1 + R_A - P_2 = -3 + 5,7 - 1,5 = 1,2 \text{ кН}.$$

Відкладаємо постійну ординату $Q_3 = 1,2 \text{ кН}$ на ділянці ;

$$M_3 = \sum M_{x_3} = -P_1 \cdot x_3 + R_A x_3 - a - P x_3 - a - b ;$$

$$\text{при } x_3 = a + b = 2 + 1 = 3 \text{ м}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= -P_1 a + b + R_A a + b - a - P_2 a + b - a - b = \\ &= -3 \cdot 3 + 5,7 \cdot 1 = -3,3 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\text{при } x_3 = a + 2b = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \text{ м}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= -P_1 a + 2b + R_A \cdot 2b - P_2 \cdot b = \\ &= -3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5,7 \cdot 2 \cdot 1 - 1,5 \cdot 1 = \\ &= -12 + 11,4 - 1,5 = -2,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

відкладаємо ординати M_3 на ділянці DE .

Ділянка EK : $a + 2b \leq x_4 \leq 2(a + b)$;

$Q_4 = Q_3 = 1,2 \text{ кН}$. Продовжуємо на ділянці епюру Q попередньої ділянки;

$$M_4 = \sum M_{x_4} = -P_1 \cdot x_4 + R_A x_4 - a) - P_2(x_4 - a - b + \mathfrak{M};$$

$$\text{при } x_4 = a + 2b = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \text{ м}$$

$$\begin{aligned} M_4 &= -3 \cdot 4 + 5,7 \cdot 4 - 2 - 1,5 \cdot 4 - 2 - 1 + 5,1 = \\ &= -12 + 5,7 \cdot 2 - 1,5 + 5,1 = 3,0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\text{при } x_4 = 2 a + b = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ м}$$

$$\begin{aligned} M_4 &= -3 \cdot 6 + 5,7 \cdot 6 - 2 - 1,5 \cdot 6 - 2 - 1 + 5,1 = \\ &= -18 + 5,7 \cdot 4 - 1,5 \cdot 3 + 5,1 = 5,43 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Відкладаємо ординати M_4 на ділянці EK .

Ділянка KB . Через громіздких обчислень за попередньою процедурою простіше відкласти координату x_5 від правого кінця балки точці B : $0 \leq x_5 \leq a$;

$$Q_5 = \sum Z = -R_B + q \cdot x_5 = -4,8 + 2 \cdot x_5;$$

при $x_5 = 0$ $Q_5 = -4,8$ кН;

при $x_5 = c = 3$ м $Q_5 = -4,8 + 2 \cdot 3 = 1,2$ кН.

Відкладаємо ординати Q_5 на ділянці KB , враховуючи лінійний закон зміни поперечної сили.

$$M_5 = \sum M_{x_5} = R_B \cdot x_5 + q \cdot x_5 \cdot \frac{x_5}{2} = R_B \cdot x_5 - \frac{q x_5^2}{2}.$$

З отриманої залежності видно, що координата x_5 в другій степені; тож закон зміни M_5 на ділянці відповідає квадратичній параболі.

Ординати згинального моменту M_5 на ділянці KB наступні:

при $x_5 = 0$ $M_5 = 0$;

при $x_5 = c = 3$ м; $M_5 = 4,8 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 3^2}{2} = 14,4 - 9 = 5,4$ кН · м.

Знайдемо максимум згинального моменту M_{max} на ділянці KB , враховуючи, що його значення відповідає координаті x ,

де $Q = 0$. Порівняємо вираз для Q_5 до нуля і знайдемо з нього

координату x_5 : $Q_5 = 0$; $-4,8 + 2 \cdot x_5 = 0$, звідки $x_5 = \frac{4,8}{2} = 2,4$ м.

Тоді з виразу для M_5 при $x_5 = 2,4$ м маємо $M_{max} = R_B \cdot x_5 - \frac{q x_5^2}{2} = 4,8 \cdot 2,4 - \frac{2 \cdot 2,4^2}{2} = 5,8$ кН · м. Відкладаємо отримані

ординати M_5 на ділянці KB .

Звертаємо увагу на те, що опуклість епюри M спрямована назустріч інтенсивності зовнішнього навантаження q .

Епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки показані на рис. 8.18. Вони дозволяють визначити положення небезпечних перерізів балки, де діють максимальні за модулем значення внутрішніх силових факторів: $Q_{max} = 4,8 \text{ кН}$, $M_{max} = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Відзначимо також, що в перерізах балки, де Q і M змінюють знаки, значення цих силових факторів відповідають їх величинам ліворуч і праворуч від перерізу, а не значенням Q і M в цьому перерізі по модулю. Наприклад в перерізі $x = a + 2b$ (див. рис. 8.18) значення M зліва від перерізу дорівнює $M = -2,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а праворуч – дорівнює $M_5 = 3,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а не $|M| = 5,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Приклад 8.6.2. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, показаної на рис.8.19, при наступних вихідних даних: $q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $P = 20 \text{ кН}$; $\mathfrak{M} = 30 \text{ кНм}$; $a = 1\text{м}$; $b = 3\text{м}$; $c = 2\text{м}$.

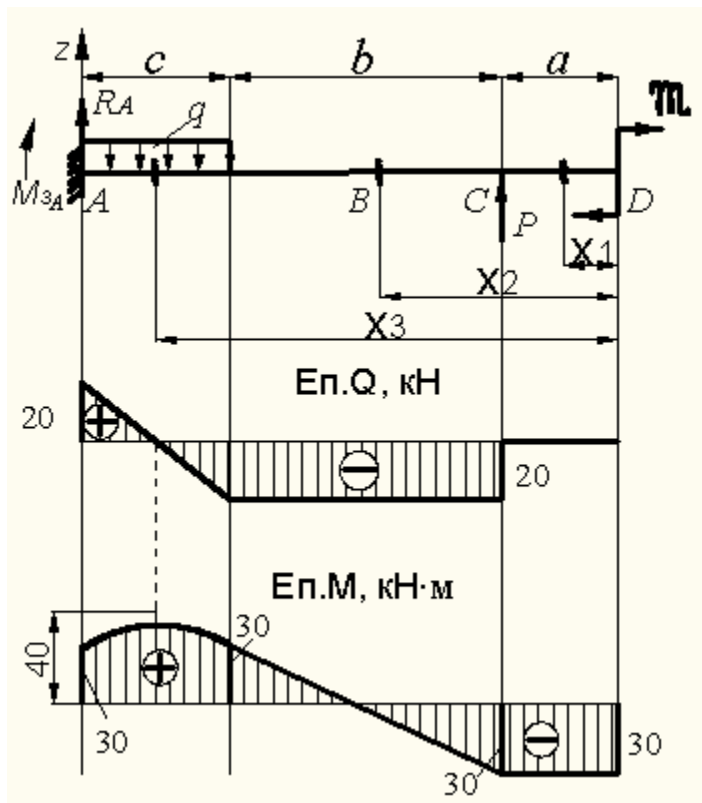


Рисунок 8.19 – Епюра M і Q для консольної балки

Рішення

Для консольної балки розрахунок опорних реакцій R_A і M_{zA} можна не проводити в разі відліку координати x від правого кінця балки точці D . Їх величини автоматично визначаються після побудови епюр.

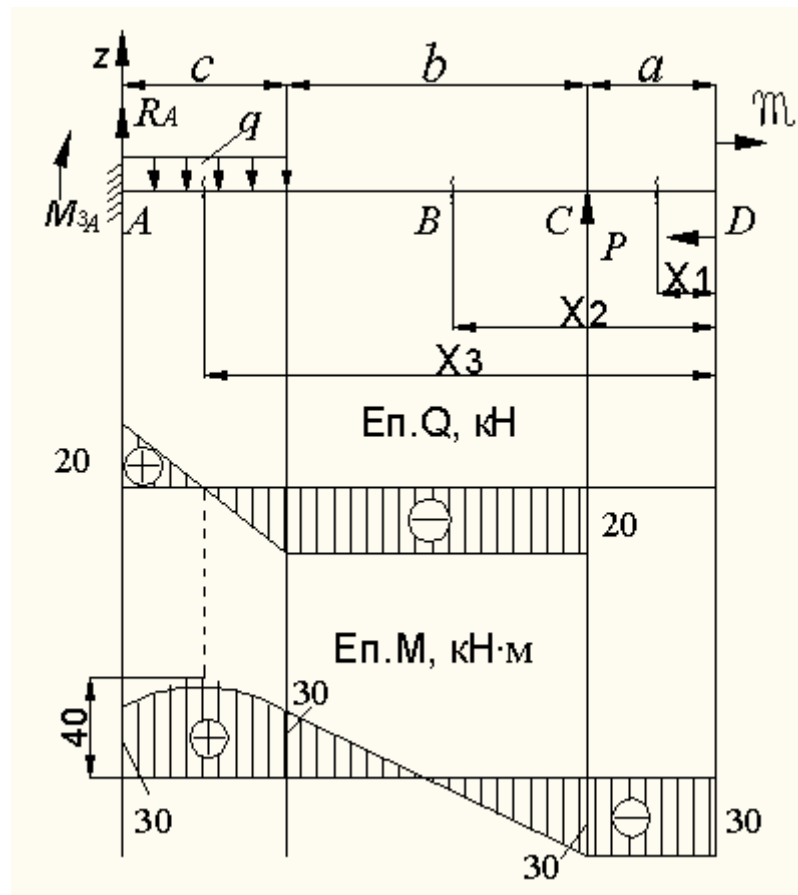


Рисунок 8.19–Епюри M і Q для консольної балки

Ділянками балки при побудові епюр будуть: AB , BC і CD .

1. *Побудова епюри поперечних сил.* На першій ділянці DC (переріз x_1) поперечна сила відсутня. На епюрі Q цьому відповідає пряма лінія з нульовою координатою, що співпадає з базовою лінією епюри.

На другій ділянці CB (переріз x_2) поперечна сила з урахуванням правила знаків дорівнює:

$Q_2 = -P = -20 \text{ кН}$, тобто на всій ділянці епюра постійна.

На третій ділянці BA поперечна сила визначається залежністю

$$Q_3 = -P + q x_3 - a + b = -20 + 20 x_3 - 1 + 3 = \\ = -20 + 20 x_3 - 4 .$$

З цього виразу видно, що поперечна сила на ділянці змінюється за лінійним законом.

Координата x_3 на ділянці лежить в межах:

$$a + b \leq x_3 \leq l = a + b + c;$$

при $x_3 = a + b = 1 + 3 = 4$ м $Q_3 = -20 + 20 \cdot 4 - 4 = -20$ кН;

при $x_3 = l = a + b + c = 1 + 3 + 2 = 6$ м $Q_3 = -20 + \\ + 20 \cdot 6 - 4 = -20 + 20 \cdot 2 = 20$ кН;

Відкладаємо ординати поперечних сил на цій ділянці і отримуємо в підсумку епюру Q для всієї балки. З епюри Q отримуємо $R_A = Q_3 = 20$ кН.

Побудова епюри згинальних моментів. На першій ділянці балки DC згинальний момент сталий і з урахуванням правила знаків $M_1 = -\mathfrak{M} = -30$ кН · м. Відкладаємо це значення згинального моменту вздовж ділянки на епюрі M .

На другій ділянці CB згинальний момент дорівнює:

$M_2 = -\mathfrak{M} + P x_2 - a = -30 + 20 x_2 - 1$ і змінюється за лінійним законом.

Для побудови епюри на ділянці CB при $a \leq x_2 \leq a + b$ знайдемо два значення моменту:

при $x_2 = a = 1$ м $M_2 = -30 + 20 \cdot 1 - 1 = -30$ кН · м;

при $x_2 = a + b = 1 + 3 = 4$ м $M_2 = -30 + 20 \cdot 4 - 1 = \\ = -30 + 20 \cdot 3 = 30$ кН · м.

Ординати епюри M_2 відкладаємо на ділянці і з'єднуємо прямою.

На третій ділянці BA при $a + b \leq x_3 \leq l = a + b + c$ згинальний момент дорівнює:

$$\begin{aligned} M_3 &= -\mathfrak{M} + P \cdot x_3 - a - q \cdot x_3 - a + b \cdot \frac{x_3 - a - b}{2} = \\ &= -\mathfrak{M} + P \cdot x_3 - a - \frac{q \cdot x_3 - a - b}{2} = \\ &= -30 + 20 \cdot x_3 - 1 - \frac{20 \cdot x_3 - 4}{2} = -10x_3^2 + 100x_3 - 210. \end{aligned}$$

На цій ділянці графік згинального моменту має вигляд квадратичної параболи. Тому при побудові епюри спочатку знайдемо значення M_3 на кінцях ділянки:

$$\text{при } x_3 = a + b = 1 + 3 = 4 \text{ м}$$

$$M_3 = -10 \cdot 4^2 + 100 \cdot 4 - 210 = -160 + 400 - 210 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_3 = a + b + c = 1 + 3 + 2 = 6 \text{ м}$$

$$M_3 = -10 \cdot 6^2 + 100 \cdot 6 - 210 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

З епюри M отримуємо значення реактивного моменту в затисненні (точка A):

$$M_{3A} = M_3 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимум згинального моменту M_3 на ділянці відповідає координаті, де $Q_3 = 0$, тобто при $x_3 = a + b + \frac{c}{2} = 1 + 3 + \frac{2}{2} = 5 \text{ м}$ $M_3 = M_{\max} = -10 \cdot 5^2 + 100 \cdot 5 - 210 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Відкладаємо значення моментів на ділянках і остаточно отримуємо епюру згинальних моментів для балки (див. рис. 8.19). З епюр Q і M отримуємо: $Q_{\max} = 20 \text{ кН}$; $M_{\max} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Ці значення використовуються в подальшому при розрахунку нормальних і дотичних напружень в небезпечних перерізах при перевірці міцності балки.

Завдання для індивідуальної роботи

Варіанти завдань для індивідуальної роботи з побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів, які показані на рис 8.20 при наступних вихідних даних:

$$P = 3 \text{ кН}; q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}; a = 2 \text{ м}.$$

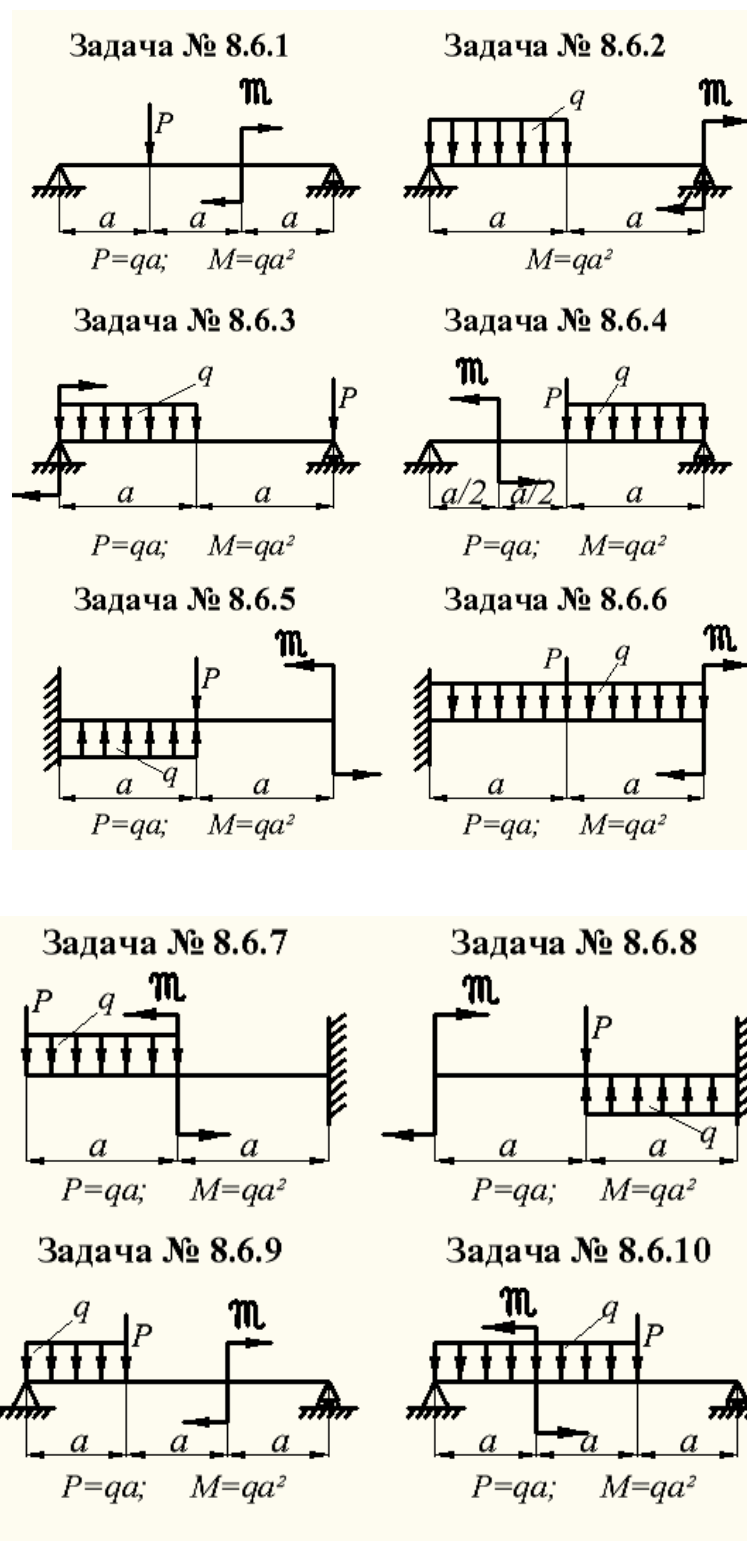


Рисунок 8.20 - Варіанти завдання з побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів

8.7 Напруження в поперечних перерізах балок при згинанні і розрахунок їх на міцність

При поперечному згинанні балки від довільного зовнішнього навантаження $q(x)$, P в її поперечних перерізах виникають поперечні сили $Q(x)$ і згинальні моменти $M(x)$ (рис. 8.21, а).

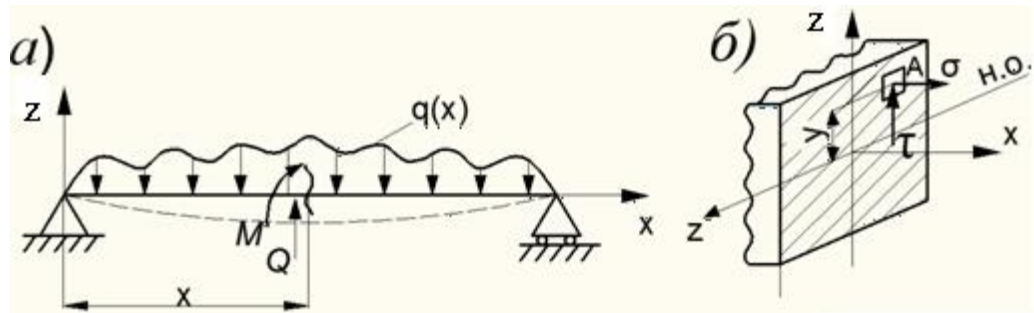


Рисунок 8.111- Напруження в поперечних перерізах балки при її поперечному згинанні

До згинального моменту M в перерізі x призводять нормальні напруження σ , що діють перпендикулярно площині поперечного перерізу (рис. 8.21, б). Поперечна сила Q є рівнодіючої дотичних напружень τ , які лежать в площині перерізу.

Розглядаючи деформацію поздовжнього волокна балки, що проходить через точку A перерізу балки (див. рис. 8.21, б), можна отримати формулу для нормальних напружень σ :

$$\sigma = -\frac{M \cdot z}{I_y}, \quad (8.11)$$

де M - згинальний момент в перерізі x ; z - вертикальна координата точки A , яка відлічується від нейтральної осі z (н.в.) перерізу z ; I_y - центральний осьовий момент інерції перерізу балки відносно центральної осі y , що проходить через центр ваги перерізу.

З формули (8.11) випливає, що нормальні напруження розподіляються по висоті перерізу за лінійним законом. Для вогнутої балки (див. рис. 8.22, а) верхні волокна балки стискаються (такі напруження приймаються зі знаком “-”), а нижні – розтягуються (приймаються зі знаком “+”). Тому, щоб автоматично врахувати знаки напружень, згинального моменту M і ординати z , у формулі (8.11) вказується знак “мінус”. Саме в такій формі ця формула буде застосовуватись нижче.

Графік зміни нормальних напружень по висоті балки, що згинається, називається *епюрою σ* (еп. σ), яка показана на рис. 8.22, б.

Епюру σ показують в площині перерізу балки (рис. 8.22, б, в), повертаючи дійсну епюру в об'ємному зображенні у напрямку до осі z на 90° .

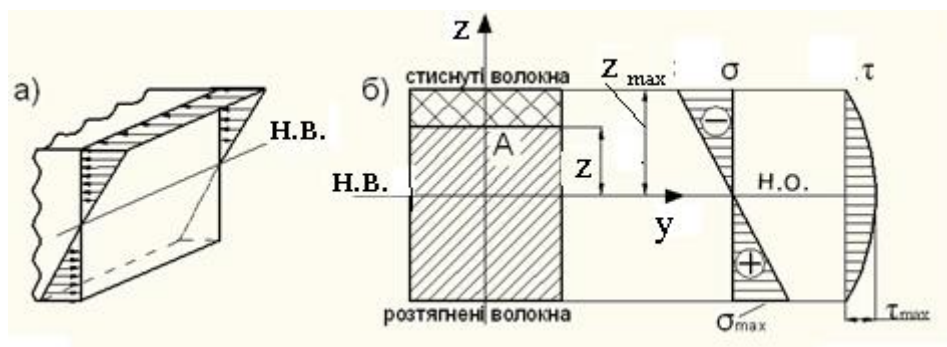


Рисунок 8.12- Епюри нормальних і дотичних напружень для балки прямокутного перерізу

Епюри показуються зі знаками напружень σ , відкладаючи додатні значення праворуч, а від'ємні – ліворуч від вертикальної базової лінії, яка відображає висоту перерізу.

З епюри видно, що максимальні нормальні напруження за модулем виникають в найбільш віддалених від нейтральної осі в точках перерізу балки, тобто при z_{max} .

Величина I_y у формулі (8.11), що залежить тільки від розмірів і форми поперечного перерізу балки, називають *осьовим моментом опору перерізу* (див. п. 4.3) і розраховують за формулою

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}. \quad (8.12)$$

Отже, призгинанні балки умова міцності за нормальними напруженням має вигляд:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq \sigma. \quad (8.13)$$

Для балок симетричного профілю відносно нейтральної осі величина W_y однакова для кратних точок перерізу.

Для балки несиметричного поперечного перерізу, наприклад, несиметричного двутавра (рис. 8.23, а), епюра σ показана на рис. 8.23, б.

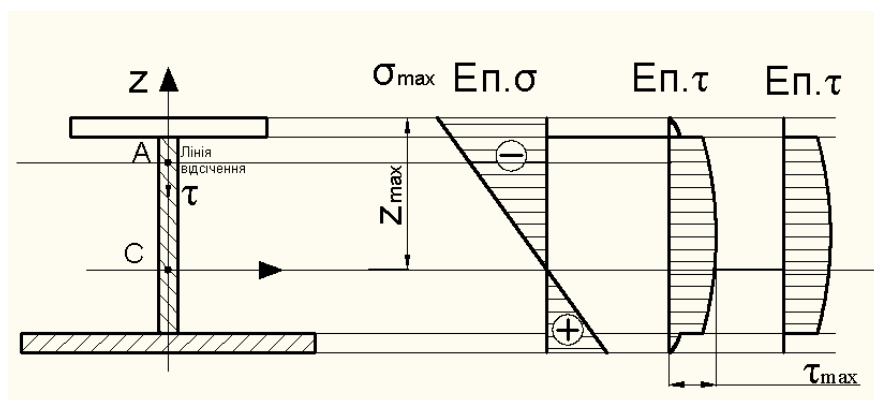


Рисунок 8.23- Епюри нормальних і дотичних напружень для несиметричного двотавра

Для такої балки

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y^{min}}, \quad (8.14)$$

де W_y^{min} - мінімальний момент опору перерізу, $W_y^{min} = \frac{I_y}{z_{max}}$.

Для більшості балок в різних конструкціях нормальні напруження є найбільшими і за ними перевіряють міцність таких елементів конструкцій. Умова міцності має вигляд

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y^{min}} \leq \sigma, \quad (8.15)$$

де M_{max} - найбільший за модулем згинальний момент в небезпечному перерізі балки, $\sigma = k \cdot \sigma_T$ - допустиме нормальне напруження (k - коефіцієнт запасу міцності, σ_T - границя плинності матеріалу).

Умова міцності (8.15) дає можливість вирішувати такі три завдання: 1) визначати напруження, якщо відомі максимальний згинальний момент, діючий на балку, і момент опору перерізу; 2) визначати допустиме навантаження через згинальний момент і момент опору перерізу; 3) визначати мінімальний осьовий момент опору, а за ним і розміри перерізу балки, якщо відомі згинальний момент і допустимі напруження.

Формула для *дотичних напружень* при поперечному згинанні балки була вперше отримана Д.І. Журавським при розгляді умови рівноваги відсіченого елемента балки і носить ім'я *формули Журавського*:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z}{I_y \cdot b}, \quad (8.16)$$

де Q - поперечна сила в перерізі балки; S_z - момент опору частини площі перерізу балки по один бік від лінії відсічення у точці A (див. рис. 8.23, a), де розраховується величина τ ; I_y - центральний момент інерції площі поперечного перерізу балки, відносно горизонтальної осі y ; b - горизонтальний розмір перерізу балки вздовж лінії відсічення.

Розподіл дотичних напружень по висоті перерізу балки називається *епюрою* τ і відповідає закону квадратичної параболи (див. рис. 8.23, b , z). Знаки напружень на епюрі τ в опорі матеріалів, за звичай, не проставляються. Найбільші дотичні напруження τ_{max} виникають в точці лінії відсічення, що проходить через центр ваги перерізу балки, а в крайніх точках по висоті перерізу – $\tau = 0$.

Треба зауважити, що для балок складеного поперечного перерізу (наприклад, складений двотавр на рис. 8.23, a) в точках з'єднання стінки і полиць значення τ будуть двозначні, тому що для стінки величина b формулою (8.16) відповідає товщині стінки, а для полиць величина b дорівнює їх ширині. Тому на епюрі τ (див. рис. 8.23, b) величини дотичних напружень в полках значно менше величин τ , що відносяться до однойменних точок стінки. Цими невеликими напруженнями в полках нехтують і будують епюру τ тільки для стінки (див. рис. 8.23, z).

Для коротких і високих балок величини дотичних напружень τ сумірні з величинами нормальних напружень σ . Тому для таких

балок, де значну частку має деформація зсуву, перевіряється умова міцності за дотичними напруженнями $\tau_{max} \leq \tau$, де $[\tau]$ - допустиме дотичне напруження, яке обирається з нормативних документів.

З перевітками міцності балок пов'язані *гіпотези міцності*.

Для найпростіших напружених станів (див. розділи 3.6) умови міцності складаються в зіставленні максимальних напружень з величинами допустимих напружень:

а) для одноосного розтягання-стискання (рис. 8.24, а)

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} \leq \sigma ;$$

б) при зсуві (зрізі) (рис. 8.24, б)

$$\tau_{max} = \frac{P}{F_{cp}} \leq [\tau].$$

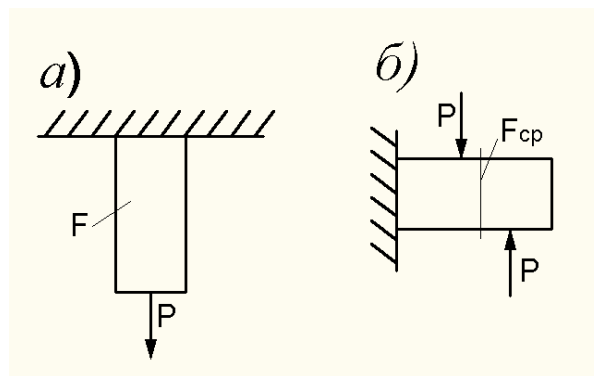


Рисунок 8.24 – Найпростіші види деформацій розтягнення-стиснення а) і зсуву б)

Так як при поперечному згинанні в більшості точок по висоті поперечних перерізів виникають одночасно як нормальні, так і дотичні напруження, то напружений стан тут буде двохосьовим (складним). Тому вводяться так звані *гіпотези міцності*, які

встановлюють ознаки рівномірності (еквівалентності) складних напружених станів з найпростішими. Найбільш поширеними в опорі матеріалів є наступні гіпотези міцності.

Гіпотеза найбільших дотичних напружень (третя класична гіпотеза міцності), згідно з якою два напружених стани рівномірні (найпростіше і складне), якщо максимальні дотичні напруження для них однакові. Перевірка міцності в точці проводиться тут за зведеними (еквівалентними) напруженнями:

$$\sigma_{зв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma, \quad (8.17)$$

де $\sigma_{зв}$ - зведені напруження; σ, τ - напруження в одній і тій же точці небезпечного перерізу балки; σ - допустиме напруження, рівень яких встановлюється при простому напруженому стані.

Енергетична гіпотеза формозміни, так звана четверта класична гіпотеза міцності, за якою умова міцності має вигляд

$$\sigma_{зв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma. \quad (8.18)$$

За умовами (8.17) і (8.28) можна встановити найбільш напружену точку по висоті перерізу балки.

Так, для симетричної двотаврової балки (рис. 8.25) найбільш небезпечною точкою за нормальними напруженнями будуть 1, 5.

$$\sigma_{max}^{т.1} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq \sigma.$$

У цій точці немає дотичних напружень.

Небезпечною точкою за дотичними напруженнями буде точка 3, де діють максимальні дотичні напруження, а нормальні напруження дорівнюють нулю:

$$\tau_{\text{т.3}}^{\text{max}} = \frac{Q \cdot S_y^{\text{max}}}{I_y \cdot t} \leq \tau .$$

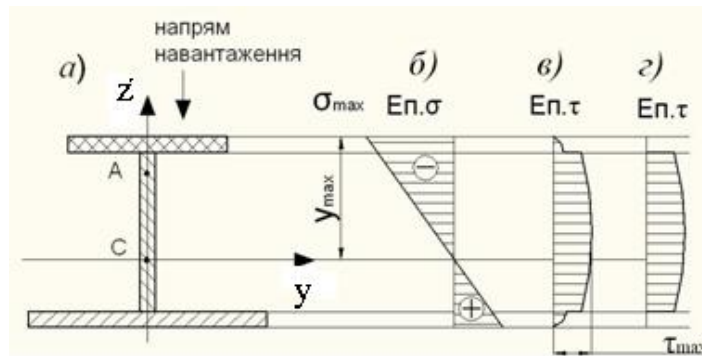


Рисунок 8.25- До перевірки міцності двотаврової балки

Однак поряд з точкою 1 є точка 2, теж з великим рівнем нормальних напружень. В цій точці існують як нормальні, так і дотичні напруження. Для неї і здійснюється перевірка міцності за зведеними напруженнями, наприклад, за формулою (8.17):

$$\sigma_{\text{зв}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_2^2} \leq \sigma .$$

$$\text{Тут } \sigma_2 = \frac{M \cdot z_2}{I_y} \leq \sigma ; \tau_2 = \frac{Q \cdot S_y^{\text{т.2}}}{I_y \cdot t} \leq \tau ,$$

де поперечна сила Q визначається у тому перерізі балки, в якому діє максимальний згинальний момент M ; $S_y^{\text{т.2}}$ - статичний момент полки балки відносно нейтральної осі.

8.8 Рішення типового завдання з перевірки міцності при згинанні балки. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 8.8.1. Для двотаврової балки, розміри перерізу якої в міліметрах показані на рис. 8.26, перевірити її міцність по нормальних і дотичних напруженнях при наступних вихідних

даних:

$$q = 240 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, l = 4 \text{ м}, t = 50 \text{ мм}, I_y = 74,4 \cdot 10^3 \text{ см}^4, \quad \sigma = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

$$\tau = 5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Побудувати епюри напружень в небезпечних перерізах.

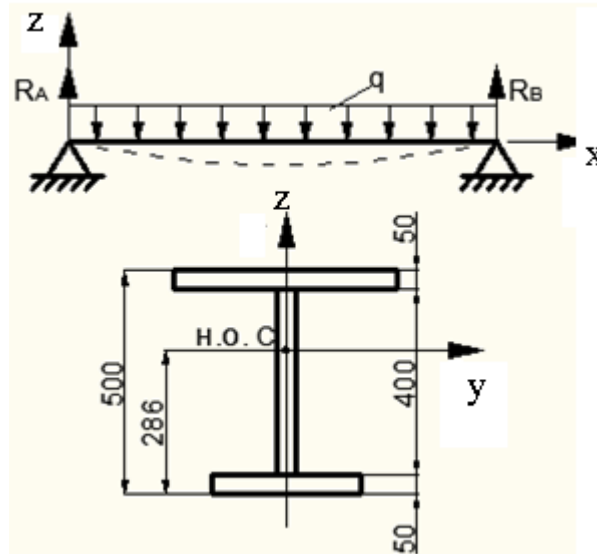


Рисунок 8.26 – Поперечне згинання двотаврової балки

Рішення

З наведеного раніше прикладу п.8.4 маємо:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}; M_{max} = \frac{ql^2}{8} \text{ (див. рис. 8.14).}$$

Перевірка міцності балки здійснюється за такими етапами:

1. Умова міцності за нормальними напруженнями має вигляд

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot z_{max}}{I_y} \leq \sigma ;$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{240 \cdot 4^2}{8} = 480 \text{ кН} \cdot \text{м} = 48,0 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$z_{max} = 28,6 \text{ см};$$

$$\sigma_{max} = \frac{48,0 \cdot 10^3 \cdot 28,6}{74,7 \cdot 10^3} = \frac{1373}{74,7} = 18,4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \leq \sigma = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Умови міцності для небезпечного перерізу посередині балки, де діє M_{max} , виконується.

2. Умова міцності за дотичними напруженнями відповідає залежності

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S}{I_y \cdot t} \leq [\tau].$$

Із епюри Q (див. рис. 8.14) маємо:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}; \quad Q_{max} = R_A = \frac{240 \cdot 4}{2} = 480 \text{ кН}.$$

Статистичний момент S частини площі поперечного перерізу балки вище горизонтальної лінії, яка проходить через центр ваги перерізу (точка C) складається з двох частин:

1) S_1 - статичного моменту площі верхньої полиці відносно нейтральної осі перерізу

$$S_1 = F_1 \cdot z_1,$$

де F_1 - площа перерізу полиці, $F_1 = 20 \cdot 5 = 100 \text{ см}^2$;

z_1 - відстань центру ваги площі полиці до точки C (центр ваги перерізу балки), через яку проходить нейтральна вісь,

$$z_1 = 18,9 \text{ см};$$

$$S_1 = 100 \cdot 18,9 = 1890 \text{ см}^3;$$

2) S_2 - статичного моменту частини стінки балки вище точки C

$$S_2 = F_2 \cdot z_2,$$

де F_2 - площа перетину частини стінки від нейтральної осі; z_2 - відстань центру ваги частини стінки до нейтральної осі; $F_2 = 16,4 \cdot 5 = 82 \text{ см}^2$; $z_2 = 10,7 \text{ см}$; $S_2 = 82 \cdot 10,7 = 877,4 \text{ см}^3$.

Тоді статичний момент частини площі перерізу балки вище нейтральної осі (точка С) буде

$$S = S_1 + S_2 = 1890 + 877,4 \approx 2767 \text{ см}^3.$$

Умова міцності балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S}{I_y \cdot t} = \frac{480 \cdot 2767}{74,7 \cdot 10^3 \cdot 5} \approx 3,6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \leq \tau = 5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Умова міцності балки за дотичними напруженнями в небезпечному перерізі на опорах, де діє $Q_{\max}$, виконується.

Епюри нормальних і дотичних напружень в небезпечних перерізах балки представлені на рис. 8.27:

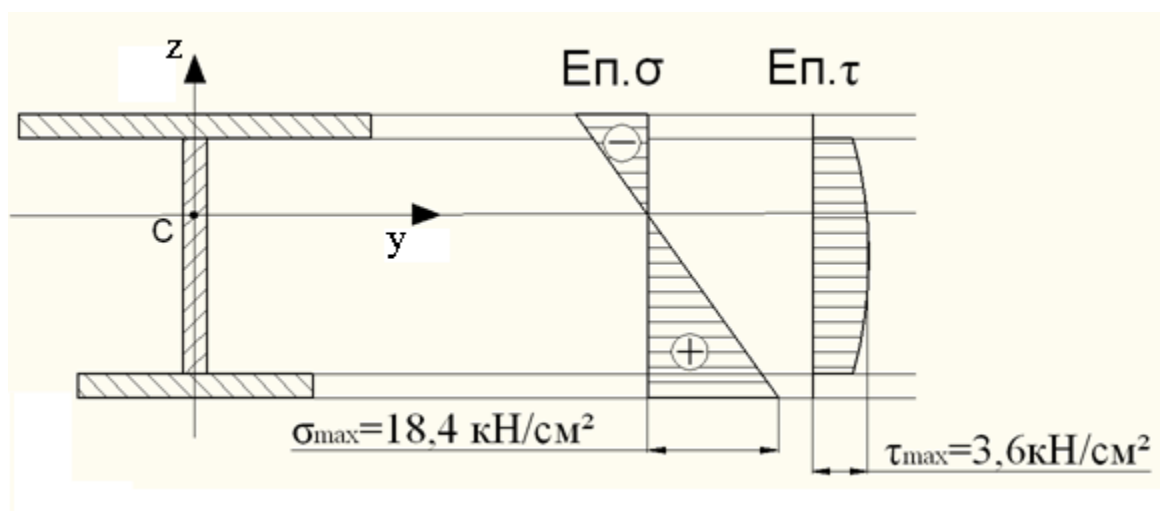


Рисунок 8.27 - Епюри нормальних і дотичних напружень для несиметричного двутавру

Приклад 8.8.2 Визначити допустиму величину сили P , яка згинає шарнірно-оперту сталеву балку довжиною $l = 1 \text{ м}$ (рис. 8.28, а). Переріз балки прямокутний: $b = 4 \text{ см}$; $h = 6 \text{ см}$. Границя

плинності матеріалу балки $\sigma_T = 30 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, коефіцієнт запасу міцності $k = 1,5$.

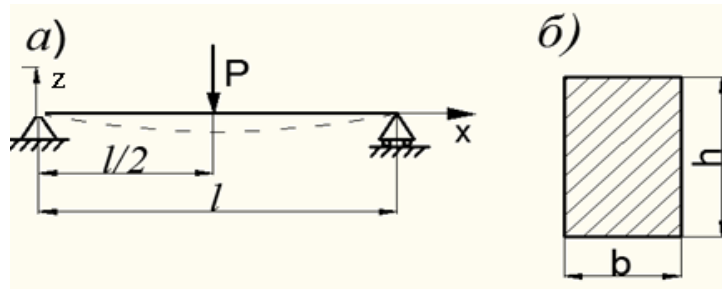


Рисунок 8.13 - Поперечне згинання балки, завантаженої силою

Рішення

Максимальний згинальний момент, що виникає в перерізі посередині балки (див. рис. 8.15), дорівнює:

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}.$$

Умова міцності балки за максимальними нормальними напруженням для її поперечного перерізу має вигляд (2.13):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq \sigma, \quad \text{або} \quad \frac{Pl}{4 \cdot \frac{bh^2}{6}} \leq \frac{\sigma_T}{k},$$

звідки

$$P \leq \frac{4\sigma_s b h^2}{6 \cdot 1,5 \cdot l} = \frac{4 \cdot 30 \cdot 4 \cdot 6^2}{6 \cdot 1,5 \cdot 100} = 19,2 \text{ кН}.$$

Отже, допустиме навантаження на балку не повинна перевищувати $P = 19,2 \text{ кН}$.

Завдання для індивідуальної роботи

Завдання 8.7.1. Для консольної балки при рівномірно розподіленому навантаженні перевірити міцність за нормальними і дотичними напруженнями при наступних вихідних даних: $q = 200 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$; $l = 3 \text{ м}$; $I_y = 60,0 \cdot 10^3 \text{ см}^4$; $\sigma = 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $\tau = 5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$. Побудувати епюри нормальних і дотичних напружень.

Завдання 8.7.2. Визначити допустиме навантаження для консольної балки симетричного двотаврового перерізу з такими вихідними даними (рис. 8.30): $l = 5 \text{ м}$, $I_y = 60,0 \cdot 10^3 \text{ см}^4$; $\sigma = 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $\tau = 5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$. Побудувати епюри нормальних і дотичних напружень.

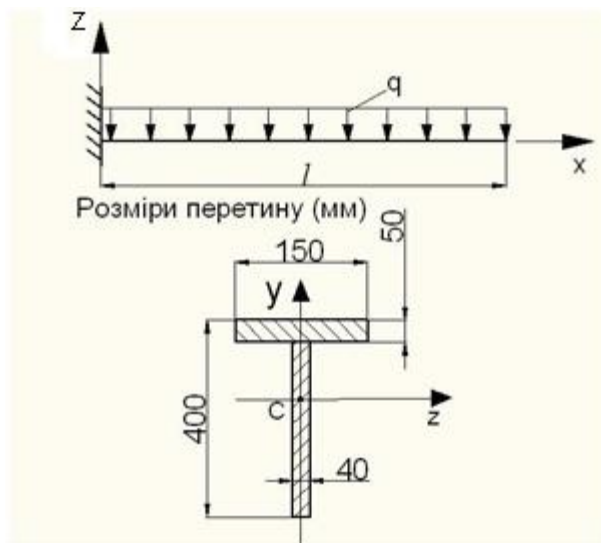


Рисунок 8.14 - Поперечне згинання таврової балки при рівномірному розподіленому навантаженні

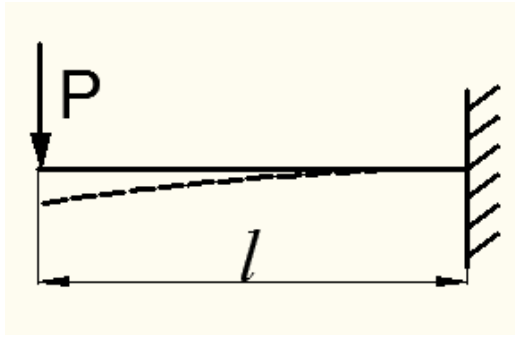


Рисунок 8.15- Поперечне згинання двотаврової балки від дії зосередженої сили

Завдання 8.7.3. Дерев'яна балка довжиною $l = 4$ м (рис. 8.31) несе рівномірно розподілене навантаження $q = 4 \frac{\text{кН}}{\text{см}}$. Знайти розміри прямокутного поперечного перерізу балки, якщо відношення висоти до ширини перерізу $h:b=2$. Допустиме нормальне напруження при згинанні $\sigma = 1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$

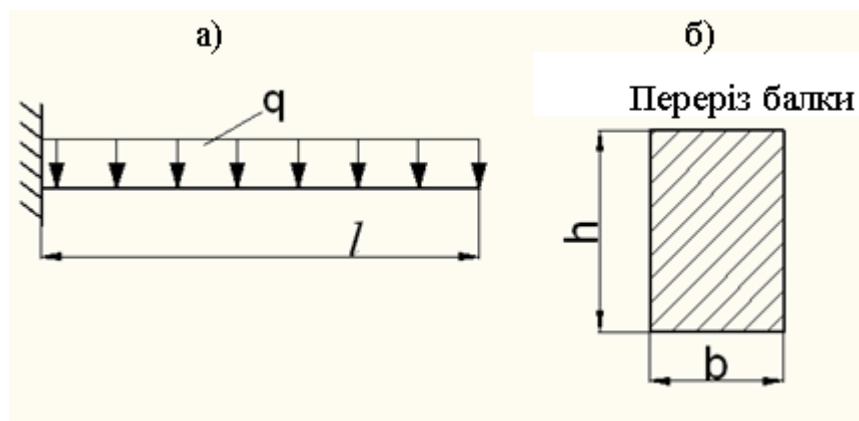


Рисунок 8.16 - Згинання консольної дерев'яної балки при дії рівномірного розподіленого навантаження

8.9 Визначення переміщень балок при поперечному згинанні

8.9.1 Поняття про вертикальне переміщення балки. Диференціальне рівняння пружної лінії балки

Крім розрахунків на міцність для елементів конструкцій виконуються розрахунки на *жорсткість*. Нагадаємо, що під жорсткістю мається на увазі такі вимоги, при якій переміщення (деформації) елементів конструкцій не повинні перевищувати допустимих величин. Тут під *переміщенням* розуміють вертикальний прогин балки $w = w(x)$ в перерізі з координатою x і кутове переміщення перерізу балки $\theta = \theta(x)$ (рис. 8.32).

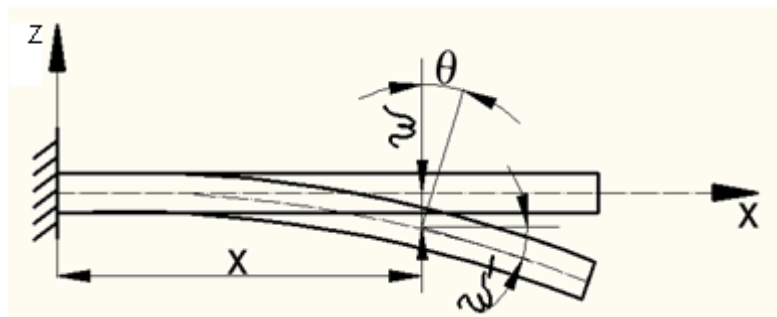


Рисунок 8.17 – Переміщення при згині балки

За гіпотезою плоских перерізів поворот перерізу θ дорівнює куту між дотичною до пружної лінії в даній точці. При малих прогинах цей кут практично дорівнює його тангенсу, тобто першій похідній $\frac{dw}{dx} = \theta$

$$\theta \approx w'(x). \quad (8.19)$$

Правило знаків для переміщень: прогин додатний при переміщенні вгору, тобто в бік напрямку осі z ; кут повороту перерізу додатний при його повороті проти напрямку руху годинникової стрілки.

Між кривизною пружної лінії балки і згинальним моментом $M = M(x)$ існує залежність:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y}, \quad (8.20)$$

де $\frac{1}{\rho}$ – кривизна зігнутої осі балки, яка характеризує величину деформації при згині (ρ - радіус кривизни); EI_y - жорсткість при згиннанні балки.

Зауважимо, що при $\rho > 0$ кривизна $\frac{1}{\rho} > 0$ і лінія функції $w = w(x)$ звернена опуклість вниз, тобто в сторону додатного значення згинальних моментів $M = M(x)$. Звідси знак кривизни лінії збігається зі знаком згинального моменту.

З математики відома залежність між кривизною лінії $\frac{1}{\rho}$ і її функцією w :

$$\frac{1}{\rho} = w'''' \sqrt{1 + (w')^2}^{\frac{3}{2}}. \quad (8.21)$$

В межах пружних деформацій матеріалу балки величина w' становить тисячні долі одиниці, отже, можна знехтувати значенням $(w')^2$ у порівнянні з одиницею. Тоді $\frac{1}{\rho} = w''$. З урахуванням залежності (8.20), отримаємо:

$$EI_y w'''' x = M x. \quad (8.22)$$

Залежність (8.22) називається *диференціальним рівнянням пружної лінії балки*. Вона пов'язує функції прогину $w(x)$ і згинального моменту $M(x)$ вздовж балки.

Інтегруванням рівняння (8.22) можна отримати величини вертикального прогину і кута повороту переріза при згинанні балки.

8.9.2 Визначенні переміщень балки шляхом інтегрування рівняння її пружної лінії

Нехай при поперечному згинанні балки відомо аналітичний вираз (рівняння) для згинального моменту $M = M(x)$ як неперервної функції вздовж балки. Тоді дворазовим інтегруванням диференціального рівняння пружної лінії балки (8.22) можна знайти вирази для кутів повороту перерізів вздовж балки $\theta' = w'(x)$ і прогинів $w(x)$:

$$EI_y w'(x) = \int_0^x M(x) dx + C; \quad (8.23)$$

$$EI_y w''(x) = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C \cdot x + D, \quad (8.24)$$

де C і D – сталі інтегрування, які визначаються з граничних умов.

Граничними умовами називаються умови опирання балки на опорах. Ці умови виражають собою рівність нулю в опорних перерізах параметрів згинання балки, наприклад, прогинів та їх похідних w' і w'' .

Так, для найпростіших випадків обпирання балки на опорах (рис.8.33) граничними умовами будуть:

а) при шарнірному закріпленні балки в кінцевих перерізах (рис.8.33, а):

$$- \text{при } x = 0 \quad w(0) = w'''(0) = 0;$$

- при

$$x = l \quad w(l) = w'''(l) = 0; \quad (8.25)$$

б) при жорсткому затисканні балки в кінцевих перерізах (рис.8.33, б):

$$- \text{при } x = 0 \quad w(0) = w''(0) = 0;$$

$$- \text{при } x = l \quad w(l) = w''(l) = 0. \quad (8.26)$$

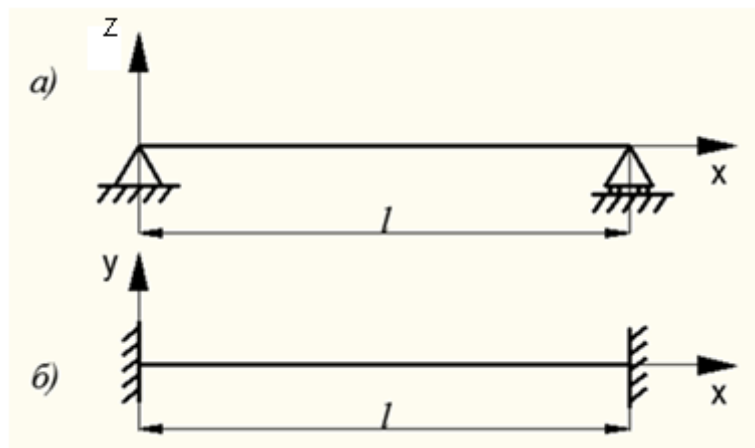


Рисунок 8.18- Найпростіші види обпирання балки в кінцевих перерізах

Розглянемо обчислення елементів згинання балок для типових випадків навантаження, які найбільш часто зустрічаються на практиці.

Приклад 8.9.1. Балка, затиснена одним кінцем, згинається під дією сили P , прикладеної на протилежному кінці (рис.8.34). Визначити прогин балки на кінці консолі w_B .

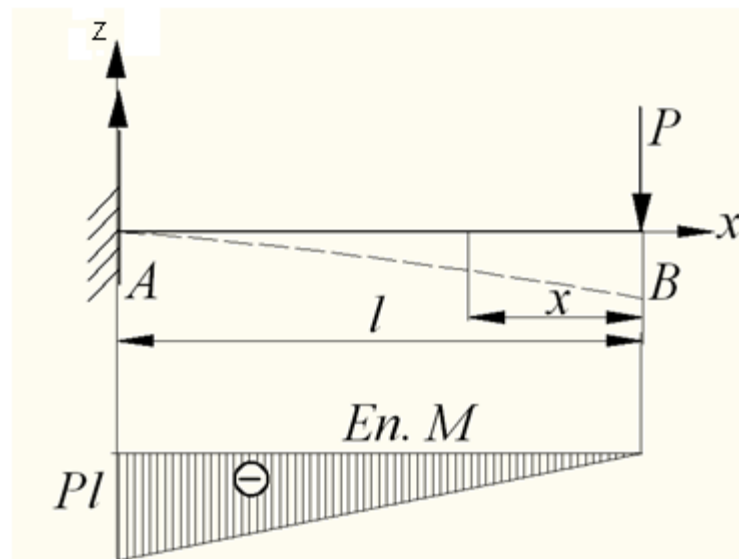


Рисунок 8.19 - Жорстке затиснення балка при згинанні від дії сили P

Рішення

Зручно взяти початок координат осей x і z на правому кінці балки, так як не треба визначати реактивні зусилля R_A і $M_{зА}$ в закріпленні балки.

Рівняння згинального моменту в перерізі x :

$$M = -P \cdot x. \quad (8.27)$$

Інтегруючи диференціальне рівняння пружної лінії балки (8.22), на підставі виразів (8.23) і (8.24) знаходимо:

$$EI_y w'' = \int_0^x -P \cdot x \, dx + C = -P \int_0^x x \, dx + C = -P \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\begin{aligned}
 El_y w'' &= \int_0^x -P \cdot x \, dx + C \cdot x + D = \\
 &= -\frac{P}{2} \int_0^x x^2 \, dx + C \cdot x + D = -\frac{P}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C \cdot x + D,
 \end{aligned}$$

тобто відповідно:

$$w'' = \frac{1}{El_y} \left(-P \frac{x^2}{2} + C \right); \quad (8.28)$$

$$w = \frac{1}{El_y} \left(-\frac{P}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C \cdot x + D \right). \quad (8.29)$$

Для визначення сталих інтегрування C і D використовуємо граничні умови (8.26), відповідні розглянутого випадку обпирання балки (див. рис. 8.35):

– при $x = l$ $w' = 0$; з виразу (8.28) знаходимо:

$$\frac{1}{El_y} \left(-P \frac{l^2}{2} + C \right) = 0, \quad \text{звідки } C = \frac{Pl^2}{2};$$

– при $x = l$ $w = 0$; з виразу (8.29) знаходимо:

$$\frac{1}{El_y} \left(-\frac{P}{2} \cdot \frac{l^3}{3} + \frac{Pl^2}{2} \cdot l + D \right) = 0,$$

$$\text{звідки } D = \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2} = -\frac{Pl^3}{3}.$$

Тоді прогин балки на підставі виразу (8.29) опишеться залежністю

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{El_y} \left(-\frac{Px^3}{6} + C \cdot x + D \right) = \frac{1}{El_y} \left(-\frac{Px^3}{6} + \frac{Pl^2}{2} \cdot x - \frac{Pl^3}{3} \right) = \\
 &= \frac{Pl^2}{2El_y} \cdot x - \frac{Pl^3}{3El_y} \cdot \frac{x^3}{l^3} + 1.
 \end{aligned}$$

Величина прогину балки на кінці консолі в точці O при $x = 0$ буде:

$$w_B = -\frac{Pl^3}{3EI_y}. \quad (8.30)$$

Знак мінус у формулі (8.30) вказує на те, що прогин в точці O спрямований в протилежний бік напрямку осі z , тобто вниз.

Приклад 8.9.2. Балка, шарнірно обперта на двох опорах (рис. 8.35), згинається від рівномірного розподіленого навантаження інтенсивності q . Визначити кут повороту перерізу на опорах і прогин посередині прогину балки.

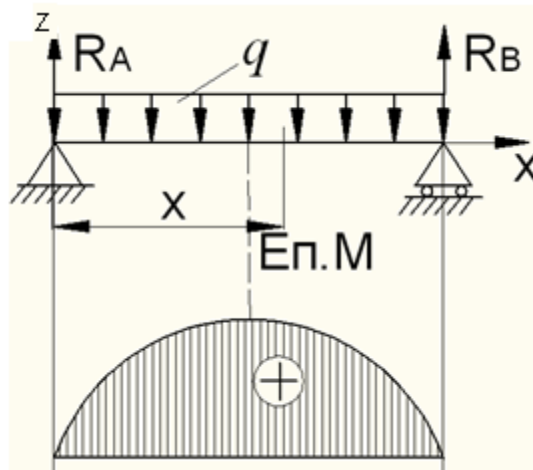


Рисунок 8.20 - Згинання шарнірно обпертої балки при рівномірно розподіленому навантаженні

Рішення

Реактивні зусилля опор з умов рівноваги статички дорівнюють:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

Вираз для згинального моменту в перетині x балки має вигляд:

$$M = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}. \quad (8.31)$$

Використовуючи формули (8.23) і (8.24), з урахуванням залежності (8.31) отримаємо вирази для кутів повороту перерізів і прогинів вздовж балки при заданому випадку навантаження:

$$\begin{aligned} w'' &= \frac{1}{EI_y} \left(\int_0^x M \, dx + C = \frac{1}{EI_y} \int_0^x \left(\frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) dx + C \right. \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\frac{ql}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{2 \cdot 3} \right) + C ; \\ w &= \frac{1}{EI_y} \int_0^x \left(\frac{ql}{4} \cdot x^2 - \frac{qx^3}{6} + C \right) dx + D = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\frac{ql}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{qx^4}{6 \cdot 4} \right) + C \cdot x + D = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left(\frac{ql}{12} x^3 - \frac{qx^4}{24} \right) + C \cdot x + D , \end{aligned}$$

тобто відповідно:

$$w'' = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{ql}{4} \cdot x^2 - \frac{qx^3}{6} + C \right) ; \quad (8.32)$$

$$w = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{ql}{12} x^3 - \frac{qx^4}{24} \right) + C \cdot x + D , \quad (8.33)$$

Для визначення сталих інтегрування C і D скористаємося граничними умовами (8.25):

— при $x = 0$ $w(0) = 0$, з виразу (8.33) знаходимо $D = 0$;

– при $x = l$ $w = 0$, на підставі виразу (8.33) маємо:

$$\frac{1}{EI_y} \left[\frac{ql}{12} l^3 - \frac{ql^4}{24} + C \cdot l \right] = 0;$$

$$C = -\frac{ql^3}{12} + \frac{ql^3}{24} = -\frac{ql^3}{24}.$$

Підставляємо знайдені значення C і D в вирази (8.32) і (8.33):

$$w'' = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{ql}{4} \cdot x^2 - \frac{qx^3}{6} - \frac{ql^3}{24} \right] = \frac{ql}{2EI_y} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3l} - \frac{l^2}{12} \right]; \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{ql}{12} x^3 - \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3}{24} \cdot x \right] = \\ &= \frac{ql}{2EI_y} \left[x^3 - \frac{x^4}{2l} - \frac{l^2}{2} \cdot x \right]. \end{aligned} \quad (8.35)$$

З виразу (8.34) для кутів повороту перерізу вздовж балки знайдемо кут повороту лівого перерізу при $x = 0$ (точка A):

$$\theta' = w' = -\frac{ql^3}{24EI_y} \quad (8.36)$$

Знак мінус в цьому виразі показує, що з урахуванням прийнятого правила знаків переріз A балки повертається за напрямком руху годинникової стрілки.

Із залежності (8.35) отримаємо величину прогину балки посередині прогону при $x = \frac{l}{2}$:

$$w = -\frac{5ql^4}{384EI_y}, \quad (8.37)$$

що відповідає прогину балки вниз посередині її прогону.

Наведений в прикладах метод визначення переміщень балки відноситься до класу *аналітичних методів*, що дають точне рішення задач. Однак даний метод не зручний тим, що при

декількох ділянках балки k з різними виразами для згинальних моментів в них, на кожній ділянці буде по дві сталих інтегрування типу C і D . Тоді загальне число сталих складе $(2 \times k)$ і для їх визначення необхідно вирішувати систему рівнянь з великим числом невідомих. Задача стає громіздкою і незручною для практики. Однак існує інший підхід до визначення переміщень балки при декількох ділянках з різними виразами $M(x)$, коли число сталих пружною лінії не буде залежати від кількості таких ділянок.

8.2.3 Обчислення переміщень балки на основі методу початкових параметрів

При наявності декількох ділянок вздовж балки, на яких згинальний момент $M(x)$, а відповідно і поперечна сила $Q(x)$ описується різними неперервними функціями, можна отримати універсальний вираз для пружної лінії, де сталими інтегрування будуть всього чотири параметри згинання балки. До них відносяться значення: прогину w_0 , кута повороту перерізу θ_0 , згинального моменту M_0 і поперечної сили Q_0 на початку ділянки, які називаються *початковими параметрами* згинання балки.

Метод розрахунку переміщень балки на основі універсального виразу для її пружною лінії називається *методом початкових параметрів*.

Розглянемо практичну сторону використання цього універсального виразу пружної лінії балки для визначення її переміщень.

Нехай на балку довжиною l діє кілька основних типів зовнішніх навантажень: моментів M_i , зосереджених сил P_i , рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності q_i (рис.8.36).

Початок координат (точка O) приймається на лівому кінці балки. Координати прикладення зовнішніх сил відлічуються від точки O і позначені a_i, b_i, c_i, d_i . Зовнішні зусилля мають напрямки, що призводять до додатних згинальних моментів від їх дії в перерізі x на останній ділянці балки. Якщо рівномірно розподілене навантаження не доходить до правого кінця балки, то його слід продовжити до кінця, а щоб не змінювати умови роботи балки, необхідно одночасно докласти навантаження тієї ж інтенсивності, але у зворотному напрямку (див. рис. 8.36).

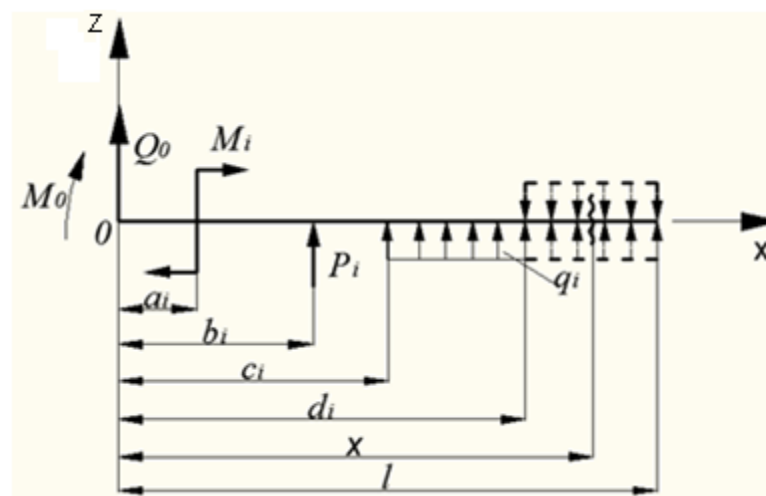


Рисунок 8.21 - Загальний випадок навантаження балки основними типами зовнішніх зусиль

Універсальний вираз для прогину балки на останній ділянці відносно координати x має вигляд

$$\begin{aligned}
w = w(x) = w_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{M_0 x^2}{2EI_y} + \frac{\theta_0 x^3}{6EI_{zy}} + \sum_i \frac{M_i (x - a_i)^2}{2EI_y} \\
+ \sum_i \frac{P_i (x - b_i)^3}{6EI_y} + \sum_i \frac{q_i (x - c_i)^4}{24EI_y} - \\
- \sum_i \frac{q_i (x - d_i)^4}{24EI_y}.
\end{aligned} \quad (8.38)$$

Диференціюючи це рівняння, отримуємо вираз для кутів повороту перерізів балки:

$$\begin{aligned}
\theta(x) = w'(x) = \theta_0 + \frac{M_0 x}{EI_y} + \frac{\theta_0 x^2}{2EI_y} + \sum_i \frac{M_i (x - a_i)}{EI_y} + \\
+ \sum_i \frac{P_i (x - b_i)^2}{2EI_y} + \sum_i \frac{q_i (x - c_i)^3}{6EI_y} - \\
- \sum_i \frac{q_i (x - d_i)^4}{6EI_y}.
\end{aligned} \quad (8.39)$$

У цих виразах початкові параметри: w_0, θ_0, M_0, Q_0 визначаються з граничних умов. Знак $\sum_i$ вказує на можливість урахування декількох зазначених навантажень. Значок a_i та йому аналогічні показують, що відповідну складову слід враховувати тільки при $x > a_i$, а при $x \leq a_i$ вони дорівнюють нулю. Цей значок називається значком Бубнова.

Метод початкових параметрів також відноситься до класу аналітичних методів обчислення переміщень балки.

Максимальні значення переміщень деяких статично визначених балок надано у Додатку Г.

8.9.4 Рішення типових задач з визначення переміщень балки методом початкових параметрів. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 8.9.3. Балка, що лежить на двох шарнірних опорах, згинається зовнішнім згинальним моментом $\mathfrak{M}$, прикладеним посередині прогону (рис.8.37). Визначити кути повороту перерізів над опорами і максимальний прогин балки.

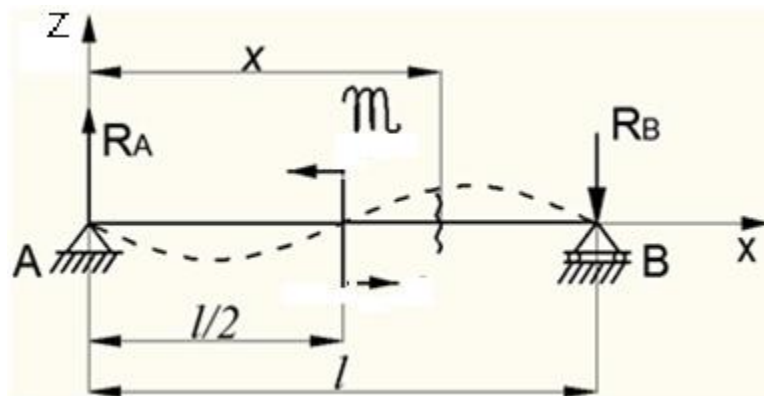


Рисунок 8.22 - До визначення переміщень балки від зовнішнього моменту

Рішення

Реакції опор балки від заданого навантаження визначаються з умов рівноваги статички (див.п.8.2, рис.8.8):

$$R_A = R_B = \frac{\mathfrak{M}}{l}.$$

Прогин балки і кути повороту її перерізів визначаються з використанням універсальних виразів методу початкових параметрів (8.38) і (8.39). Для заданої балки з граничних умов на лівому кінці маємо значення таких початкових параметрів: $w_0 = M_0 = 0$; $Q_0 = R_A$. Тоді універсальні вирази в перерізі x для даної балки матимуть вигляд:

$$w(x) = \theta_0 \cdot x + \frac{R_A \cdot x^3}{6EI_y} - \frac{\mathfrak{M} \cdot x - \frac{l^2}{2}}{2EI_y}; \quad (8.40)$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{R_A \cdot x^2}{2EI_y} - \frac{\mathfrak{M} \cdot x - \frac{l^2}{2}}{2EI_y}; \quad (8.41)$$

Підпорядковуючи вираз (8.40) граничній умові на першій опорі при $x = l$ в точці В $w = w(l) = 0$, отримаємо

$$\theta_0 \cdot l + \frac{\mathfrak{M}}{l} \cdot \frac{l^3}{6EI_y} - \frac{\mathfrak{M} \cdot \frac{l^2}{2}}{2EI_y} = 0,$$

звідки

$$\theta_0 = \theta_A = -\frac{\mathfrak{M}l}{24EI_y}. \quad (8.42)$$

Так як зовнішній момент $\mathfrak{M}$ прикладений посередині перерізу, то

$$\theta_A = \theta_B = -\frac{\mathfrak{M}l}{24EI_y} \quad (8.43)$$

Знак мінус у виразі (8.43) свідчить про те, що перерізи A та B від дії моменту $\mathfrak{M}$ повертаються за годинниковою стрілкою, а за прийнятим правилом знаків це відповідає від'ємним кутам повороту перерізів балки.

Так як всі початкові параметри визначені то формули (8.40) і (8.41) можна представити у спрощеному вигляді:

$$w(x) = -\frac{\mathfrak{M}l}{24EI_y} \cdot x + \frac{\mathfrak{M}x^3}{6lEI_y} - \frac{\mathfrak{M} \cdot x - \frac{l^2}{2}}{2EI_y};$$

$$\theta(x) = -\frac{\mathfrak{M}l}{24EI_y} + \frac{\mathfrak{M}x^2}{2lEI_y} - \frac{\mathfrak{M} \cdot x - \frac{l^2}{2}}{2EI_y}.$$

З умов екстремуму функції прогину $\frac{dw}{dx} = 0$ знаходимо те значення x , при якому функція w отримує максимальне значення:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{EI_y} - \frac{\mathfrak{M}l}{24} + \frac{\mathfrak{M}}{l} \cdot \frac{x^2}{2} = 0, \text{ або } -\frac{l}{24} + \frac{x^2}{2l} = 0,$$

звідки

$$x = \frac{\sqrt{2l^2}}{24} = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

Максимальний прогин балки на першій ділянці знайдемо, якщо підставивши отримане значення x в рівняння для прогинів (8.40):

$$\begin{aligned} w_{max} &= -\frac{\mathfrak{M}l}{24EI_y} \cdot \frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{\mathfrak{M}}{l} \cdot \frac{l}{2\sqrt{3}}^3 \cdot \frac{1}{6EI_y} - \frac{\mathfrak{M}}{2EI_y} \cdot \frac{l}{2\sqrt{3}} - \frac{l^2}{2} = \\ &= -\frac{\mathfrak{M}l^2}{72\sqrt{3}EI_y}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

На другій ділянці прогин буде такі ж, як і на першій ділянці, але ж з протилежним знаком.

Приклад 8.9.4. Визначити прогин балки, зображеної на рис 8.39, в перерізах B і C . Прийняти значення інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження $q = \frac{4P}{l}$.

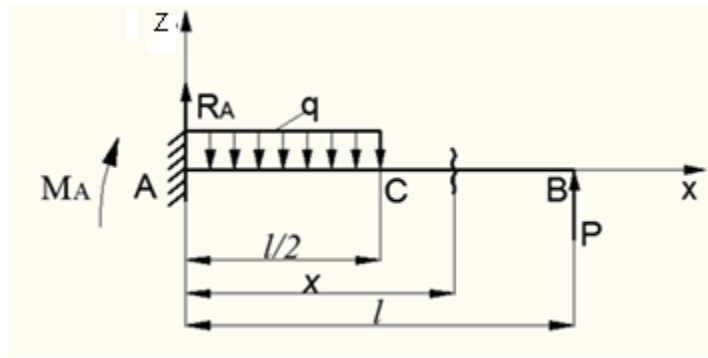


Рисунок 8.23 – До визначення переміщень балки від заданого навантаження

Рішення

Реакції балки в затисненні (точка A) визначаються з умов рівноваги статички і для заданого навантаження дорівнюють:

$$R_A = P; \quad M_A = P \frac{l}{2}.$$

При заданих умовах закріплення балки і реактивних зусиль значення початкових параметрів будуть: $\theta_0 = w_0 = 0$; $Q_0 = R_A = P$; $M_0 = M_A = \frac{Pl}{2}$.

Прогин балки в перерізі C , при $x = \frac{l}{2}$, з рівняння (8.38) буде:

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{1}{EI_y} R_A \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{6} + M_A \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - q \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{24} = \\ &= \frac{1}{EI_y} R_A \cdot \frac{l^2}{48} + M_A \cdot \frac{l^2}{8} - q \cdot \frac{l^2}{384}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Розподілене навантаження поширюється до перерізу в точці C , тому останній доданок рівняння (8.37) наближається до нуля; перед q узятий знак мінус, так як розподілене навантаження

призводить до від'ємного згинального моменту в перерізі x .
Підставивши значення R_A , M_A , q , отримаємо:

$$w_c = \frac{1}{EI_y} P \frac{l^3}{48} + P \frac{l^3}{16} - P \frac{l^3}{96} = \frac{7Pl^3}{96EI_y}. \quad (8.47)$$

Прогин в перерізі точки B за рівнянням (8.38) при $x = l$ буде:

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{1}{EI_y} R_A \frac{l^3}{6} + M_A \frac{l^2}{2} - q \frac{l^4}{24} + q \frac{\frac{l}{2}^4}{24} = \\ &= \frac{1}{EI_y} P \frac{l^3}{6} + P \frac{l^3}{4} - P \frac{l^3}{6} + P \frac{l^3}{96} = \frac{25Pl^3}{96EI_y}. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Приклад 8.9.5. Визначити прогин і кут повороту перерізу в точці C посередині прогону балки (рис.8.39).

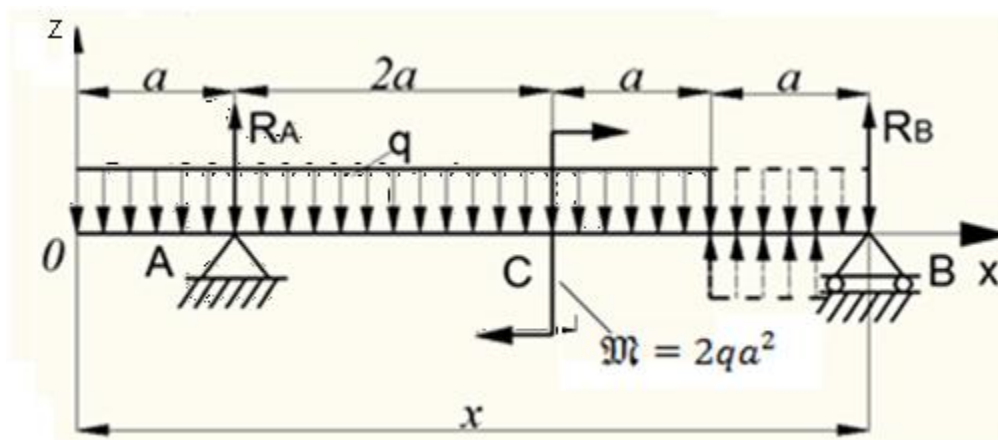


Рисунок 8.24 - До визначення переміщень балки від заданого навантаження

Рішення

Реактивні зусилля на шарнірних опорах визначимо з умов рівноваги статички:

$$R_A = \frac{5}{2} qa; \quad R_B = \frac{3}{2} qa.$$

Подовжуємо розподілене навантаження q до точки B і прикладаємо на останній ділянці у зворотному напрямку розподілене навантаження (див. рис. 8.30). Універсальні вирази прогинів пружної лінії і кутів повороту перерізів балки (8.38) і (8.39) при заданому навантаженні приймуть вигляд:

$$w = w_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{M_0 x^2}{2EI_y} + \frac{Q_0 x^3}{6EI_y} + \frac{\mathfrak{M} x - 3a^2}{3a \cdot 2EI_y} +$$

$$+ \frac{R_A (x - a)^3}{b_i \cdot 6EI_y} - \frac{qx^4}{24EI_y} + \frac{q x - 4a^4}{c_i \cdot 24EI_y}; \quad (8.49)$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{M_0 x}{EI_y} + \frac{\theta Q_0 x^2}{2EI_y} + \frac{\mathfrak{M} x - 3a}{3a \cdot EI_y} + \frac{R_A x - a^2}{b_i \cdot 2EI_y} -$$

$$- \frac{qx^3}{6EI_y} + \frac{q x - 4a^3}{c_i \cdot 6EI_y}; \quad (8.50)$$

На початку координат (точка O) при $x = 0$ відсутні зосереджені сили і моменти, тому початкові параметри $Q_0 = M_0 = 0$. Інші параметри θ_0 и w_0 знаходимо з граничних умов:

– при $x = a$ опора A $w = 0$, тоді з рівності (8.49) маємо

$$w_0 + \theta_0 \cdot a = \frac{qa^4}{24EI_y}; \quad (8.51)$$

– при $x = 5a$ опора B $w = 0$, тоді з рівності (8.49) буде

$$w_0 + 5\theta_0 \cdot a + \frac{\mathfrak{M}(2a)^2}{24EI_y} + \frac{R_A(4a)^3}{6EI_y} - \frac{q \cdot 5a^4}{24EI_y} + \frac{qa^4}{24EI_y} = 0,$$

або

$$w_0 + 5\theta_0 \cdot a = -\frac{112qa^4}{24EI_y}. \quad (8.52)$$

Із системи рівнянь (8.51) і (8.52), знаходимо:

$$\theta_0 = -\frac{111qa^3}{96EI_y}; w_0 = \frac{115qa^4}{96EI_y} \quad (8.53)$$

Підставляючи отримані значення початкових параметрів (8.53) в універсальні рівняння (8.49) і (8.50), для середини прогону балки в точці C при $x = 3a$ отримуємо:

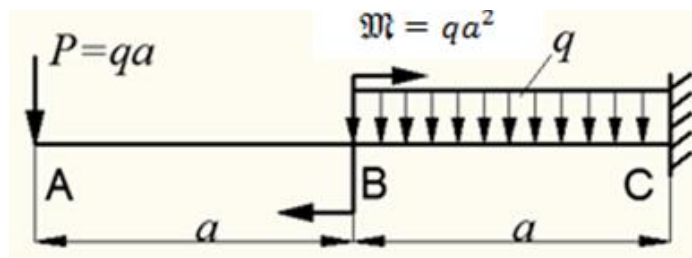
$$\theta_c = -\frac{111qa^3}{32EI_y}; w_0 = \frac{115qa^4}{96EI_y} \quad (8.54)$$

З даних виразів випливає, що в точці C посередині прогону балки переріз переміщується вгору і повертається за напрямком руху годинникової стрілки.

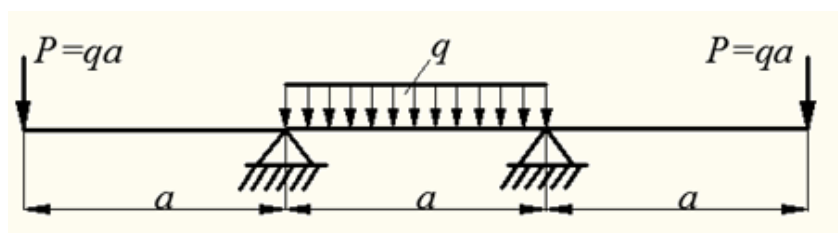
Завдання для індивідуальної роботи

За методом початкових параметрів у пропонованих завданнях необхідно:

Задача 8.9.1. Визначити прогин і кут повороту перерізу балки в точці B .



Задача 8.9.2. Визначити прогин посередині балки і кути повороту на кінцях консолей.



8.9.5 Обчислення переміщень балки енергетичними методами

Вище були розглянуті аналітичні методи визначення переміщень в перерізах балки, що дають точне рішення задачі на основі інтегрування виразів для поперечної сили і згинального моменту. Однак часто нас цікавить не вся пружна лінія балки, а тільки переміщення в конкретному перерізі. Тоді для визначення прогину або кута повороту переріза балки зручно користуватися іншим підходом. Такий підхід ґрунтується на застосуванні енергетичних методів, що дають в загальному випадку хоча і наближені рішення, але прийнятні з практичної точки зору. Енергетичні методи ґрунтуються на застосуванні виразу для потенціальної енергії пружної деформації балки при згинанні.

8.9.5.1 Потенціальна енергія пружної деформації балки при згинанні

Згідно із законом збереження енергії робота зовнішніх сил A в положенні рівноваги тіла дорівнює потенціальній енергії його пружної деформації V :

$$A = V \quad (8.55)$$

У загальному випадку робота зовнішньої сили для балки можна визначити так:

$$V = \frac{1}{2} P \cdot \delta, \quad (8.56)$$

де P – узагальнена сила (наприклад зосереджена сила P , зовнішній момент $\mathfrak{M}$ та ін.); δ – узагальнене переміщення, що відповідає узагальненій силі (прогин w , кут повороту перерізу балки θ).

Для випадків навантаження балки (рис. 8.40): $P, \mathfrak{M}$ – зосереджені зовнішні зусилля; w, θ – зосереджені переміщення.

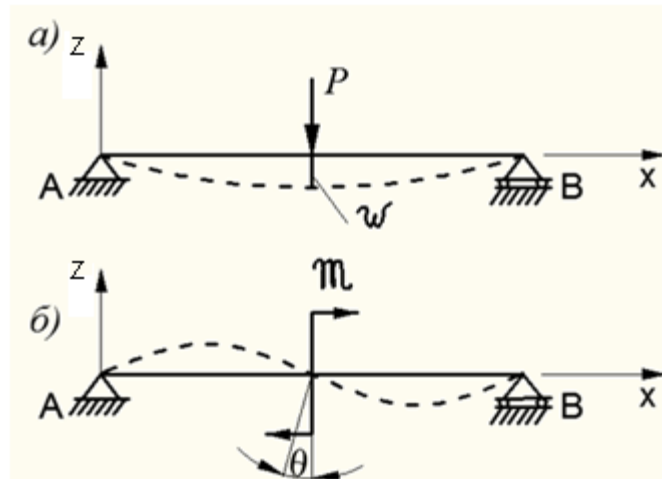


Рисунок 8.25 - Зосереджені зусилля та зосереджені переміщення балки

Узагальнена сила відповідає узагальненому переміщенню коли їх доданок визначає роботу.

При поперечному згиннанні балки користуються наступним наближеним виразом для потенціальної енергії (без урахування поперечних сил, що дає малу добавку):

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI_y}, \quad (8.57)$$

де $M = M(x)$ – згинаючий момент у перерізі балки довжиною l ;

EI_y – згинальна жорсткість балки.

Використання виразу для потенціальної енергії пружної деформації балки (8.57) дозволяє розрахувати переміщення в

конкретному перерізі балки x за допомогою енергетичних методів на основі теореми Кастільяно або інтегралу Мора.

8.9.5.2 Теорема Кастільяно

Теорема формулюється таким чином: частинна похідна від потенціальної енергії по одній з незалежних зовнішніх сил дорівнює переміщенню, що відповідає цій силі.

Так, прогин балки w в точці прикладання зосереджувальної сили P (див. рис.8.41,а) визначається як:

$$w = \frac{\partial V}{\partial P} = \int_0^l \frac{M dx}{EI_y} \cdot \frac{\partial M}{\partial P}, \quad (8.58)$$

де M – вираз для згинального моменту на ділянці прогону балки. Кут повороту перерізу θ , де діє зовнішній момент $\mathfrak{M}$, розраховується так:

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{M}} = \int_0^l \frac{M dx}{EI_y} \cdot \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}}. \quad (8.59)$$

Розглянемо застосування теореми Кастільяно для простих випадків навантаження балки.

Приклад 8.9.6 Розрахувати прогин кінця балки в точці B (рис.8.41).

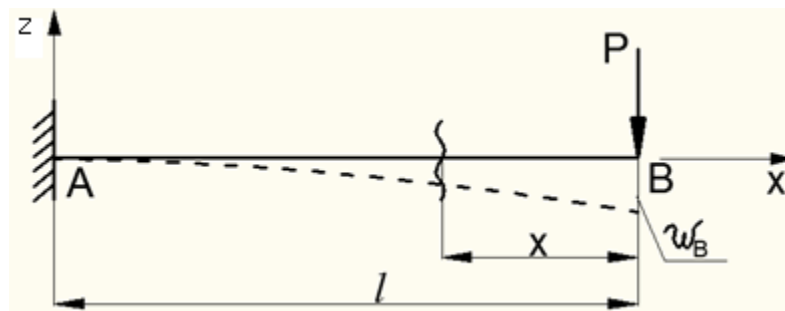


Рисунок 8.26– До визначення прогину балки на краю консолі

Рішення

Початок координат доцільно прийняти в точці В (рис. 8.41), про що вже йшла мова раніше. Тоді згинальний момент у перерізі балки x визначається як

$$M = -P \cdot x,$$

а частинна похідна $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$. Тоді, використовуючи вираз (8.58), прогин балки в точці В буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} w_B &= \int_0^l \frac{M dx}{EI_y} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{1}{EI_y} \int_0^l -P \cdot x \cdot -x dx = \\ &= \frac{P}{EI_y} \int_0^l x^2 dx = \frac{P}{EI_y} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{Pl^3}{3EI_y}. \end{aligned}$$

Знак “плюс” у отриманому результаті відповідає прогину балки у напрямку дії зосередженої сили P . Його величина відповідає точному рішення, отриманому раніше шляхом інтегрування диференціального рівняння пружної лінії балки (див. п.8.9.2).

Приклад 8.9.7. Визначити кут повороту перерізу балки в точці В (рис. 8.42).

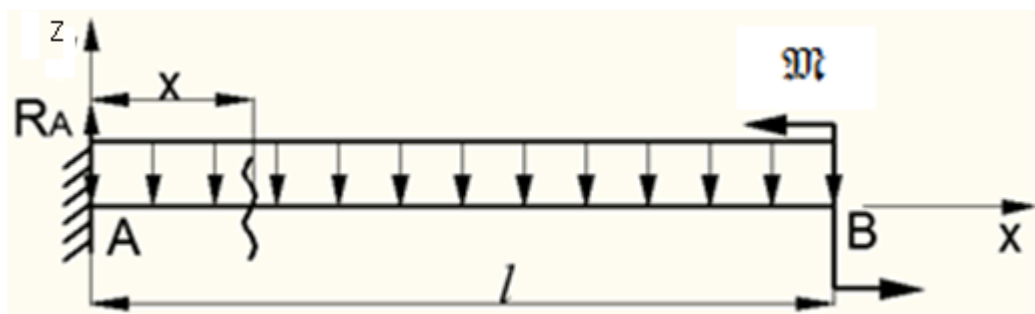


Рисунок 8.27– До визначення кута повороту в точці В

Рішення

Згинальний момент у перерізі балки x визначається як

$$M = M_x = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2},$$

де R_A – реакція балки на опорі A , яка за умовою рівноваги статки буде дорівнювати:

$$R_A = \frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{l}.$$

Тоді:

$$M = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2} + \frac{\mathfrak{M}}{l} \cdot x - \frac{qx^2}{2}; \quad \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}} = \frac{x}{l}.$$

За формулою (8.59) отримуємо:

$$\begin{aligned} \theta_B = \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{M}} &= \int_0^l \frac{M dx}{EI_y} \cdot \frac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}} = \frac{1}{EI_y} \int_0^l \left(\frac{ql}{2} \cdot x + \frac{\mathfrak{M}x}{l} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{l} dx = \\ &= \left(\frac{1}{EI_y} \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{\mathfrak{M}}{l^2} \cdot \frac{x^3}{2} - \frac{qx^4}{2l \cdot 4} \right) \Big|_0^l = \frac{1}{EI_y} \frac{ql^3}{24} + \frac{\mathfrak{M}l}{3}. \end{aligned}$$

Знак «плюс» в кінцевому результаті для θ свідчить про поворот перерізу балки в точці B за напрямком дії зовнішнього моменту $\mathfrak{M}$.

Примітка: 1. У цьому методі прогин балки в точці вздовж її осі можна визначити тільки у разі наявності в цій точці зосередженої сили P , а кут повороту перерізу – тільки у разі наявності в перерізі зовнішнього моменту $\mathfrak{M}$.

2. При декількох ділянках вздовж балки, де згинальні моменти описуються різними виразами, інтегрування в формулах (8.58) і (8.59), необхідно проводити окремо по кожній ділянці.

3. Якщо необхідно знайти переміщення в перерізі балки, де відсутня відповідна узагальнена сила, то в цьому перерізі подумки прикладається додаткова узагальнена сила (P_d або M_d), яка приймається рівною нулю після диференціювання по ній під знаком інтеграла.

8.9.5.3 Інтеграл Мора

Інтеграл Мору дозволяє обчислювати лінійні та кутові переміщення перерізів балки. Для цього необхідно замінити визначення похідних від згинального моменту у виразах теореми Кастільяно обчисленням згинального моменту від одиничного навантаження M_0 :

$$w = w(x) = \int_0^l \frac{M \cdot M_0}{EI_y} dx, \quad M_0 = \frac{\partial M}{\partial P_1}; \quad (8.60)$$

$$\theta = \theta(x) = \int_0^l \frac{M \cdot M_0}{EI_z} dx, \quad M_0 = \frac{\partial M}{\partial M_1}, \quad (8.61)$$

де $M = M(x)$ - вираз для згинального моменту на ділянці балки від заданих сил в прийнятому перерізі; M_0 – вираз для згинального моменту у прийнятому перерізі від дії сили $P_1 = 1$ або одиничного моменту $M_1 = 1$.

Так для консольної балки (рис 8.43), для випадку 1 (рис. 8.43) M_0 буде визначатись як

$$M_0 = -1 \cdot x = -x.$$

Тоді

$$w_B = \int_0^l \frac{M \cdot M_0}{EI_y} dx = \int_0^l \frac{-P \cdot x \cdot -x}{EI_y} dx = \frac{P}{EI_y} \int_0^l x^2 dx =$$

$$= \frac{P}{EI_y} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{Pl^3}{3EI_y}.$$

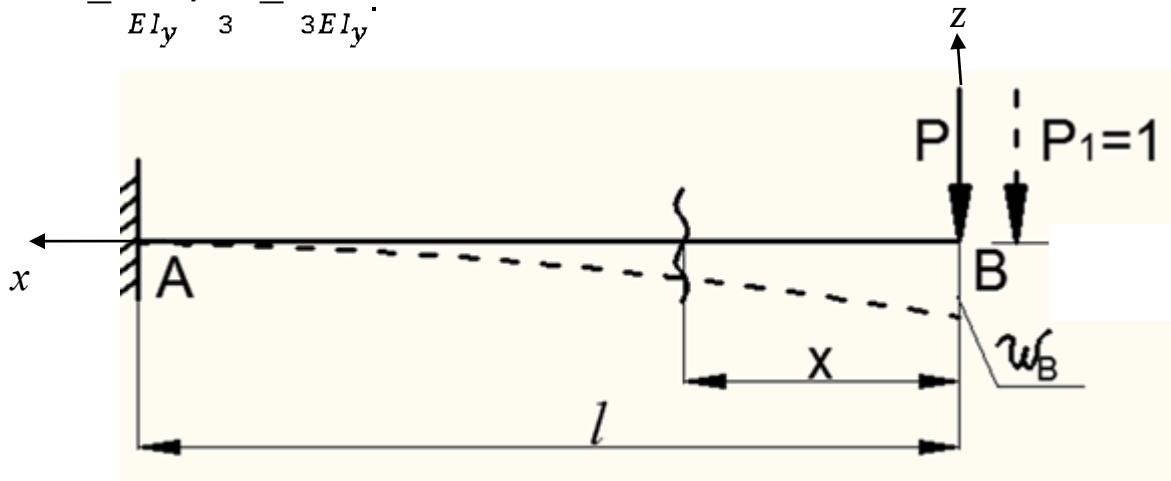


Рисунок 8.28 - До розрахунку переміщення з використанням інтегралу Мора

Як видно, результат розв'язку за теоремою Кастільяно і з використанням інтегралу Мора співпадають.

Одним з підходів рішення задач за допомогою інтеграла Мора є графоаналітичний спосіб Верещагіна, описаний, наприклад, в джерелах [1, 4, 10].

8.9.6 Рішення типових задач з визначення переміщень балки енергетичними методами. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 8.9.8. Для балки (рис.8.44), жорстко затисненою одним кінцем та завантаженою на іншому кінці з осереджувальною силою P , визначити кут повороту в точці B за теоремою Кастільяно.

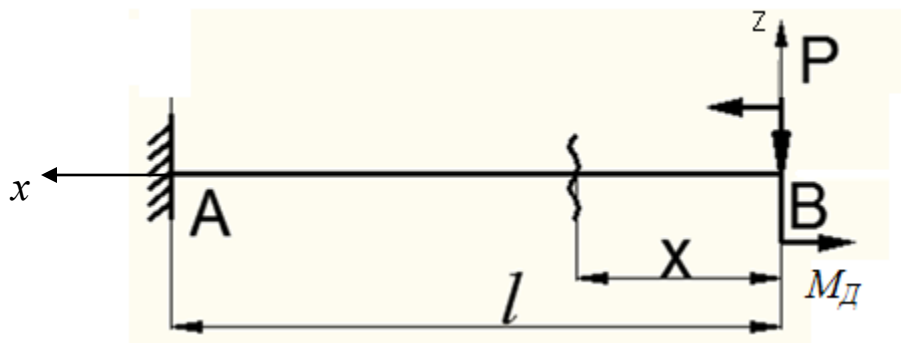


Рисунок 8.29 – До визначення кута повороту кінця переріза консолі

Рішення

Безпосередньо застосувати теорему Кастільяно до визначення кута повороту кінця консолі не можна, оскільки в цьому перерізі немає узагальненої сили у вигляді зовнішнього моменту. Тому вводиться в цьому перерізі уявний додатковий момент M_d (див. рис. 8.44), який направлено будь-як. Тому що в остаточних розрахунках він приймається рівним нулю.

За теоремою Кастільяно кут повороту переріза балки у точці B за формулою (8.59) буде дорівнювати:

$$\theta_B = \int_0^l \frac{M dx}{EI_y} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_d}.$$

Формула для згинального моменту у перерізі x (його доцільно відраховувати від краю консолі) описується залежністю $M = M(x) = M_d - P \cdot x$, $\frac{\partial M}{\partial M_d} = 1$. Границі інтегрування при відрахуванні x від кінця консолі складатимуть 0 и l . Тоді кут повороту кінця консолі відповідає залежності:

$$\theta_B = \int_0^l (M_d - P \cdot x) dx.$$

Враховуючи те, що додаткове навантаження M_d введено умовно, тобто його насправді не існує, то під знаком інтегралу це навантаження треба прийняти рівним нулю ($M_d = 0$):

$$\theta_B = \int_0^l -P \cdot x dx = -\frac{Pl^2}{2EI_y}.$$

Знак “мінус” в отриманому результаті свідчить про те, що переріз кінця консолі від сили P обертається за напрямком руху годинникової стрілки.

Приклад 8.9.9. Для балки, заданої на рис. 8.45, знайти кут повороту перерізу в точці C за теоремою Кастільяно.

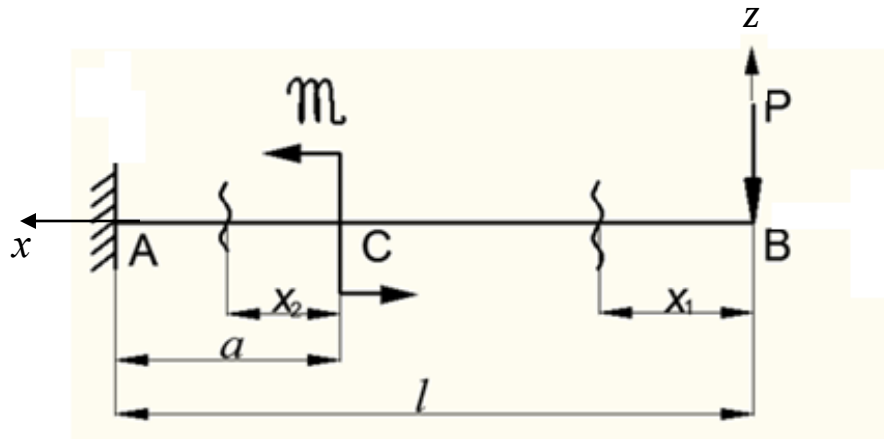


Рисунок 8.30 - До визначення кута повороту балки за теоремою Кастільяно

Рішення

В точці C балки прикладено зовнішній момент $\mathfrak{M}$, тому в цьому перерізі можливо знайти кут повороту за теоремою Кастільяно.

Точка прикладення моменту $\mathfrak{M}$ поділяє балку на дві ділянки: BC і AC . Тому кут повороту перерізу балки в точці C визначимо для цих двох ділянок:

$$\theta_c = \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{M}} = \int_0^l \frac{M_1 dx}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial \mathfrak{M}} + \int_0^l \frac{M_2 dx}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \mathfrak{M}}$$

де $M_1 = M_1(x)$ і $M_2 = M_2(x)$ – згинальні моменти у перерізі точки C відповідно для першої та другої ділянки.

Границі інтегрування по ділянках доцільно вказувати тоді, коли буде вирішено, від яких точок по довжині балки зручно відлічувати координату x перерізів по ділянках.

Для першої ділянки BC координату $0 \leq x_1 \leq l - a$ раціонально відраховувати від точки B через те, що у формулу

для згинального моменту в цьому перерізі не входять інші силові фактори (зовнішній момент $\mathfrak{M}$, реактивні зусилля в затисненні точки A). Тоді $M_1 = -P \cdot x_1$; $\frac{\partial M_1}{\partial \mathfrak{M}} = 0$. Звідки перший інтеграл для θ_c буде дорівнювати нулю.

При встановленні виразу для згинального моменту на другій ділянці AC координату x_2 зручно відлічувати від точки C ($0 \leq x_2 \leq a$), щоб нижня границя другого інтеграла дорівнювала б нулю. Тоді, відкидаючи умовно праву частину балки від перерізу, вираження для згинального моменту на другій ділянці буде таким:

$$M_2 = -P l - a + x_2 + \mathfrak{M}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial \mathfrak{M}} = 1.$$

Визначившись з межами інтегрування на другій ділянці, отримуємо:

$$\begin{aligned} \theta_c &= 0 + \int_0^a \frac{M_2 dx}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \mathfrak{M}} = \\ &= \frac{1}{EI_y} \int_0^a (-P l - a + x_2 + \mathfrak{M}) dx = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{P(2l-a)}{2} + \mathfrak{M}a \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, розрахуємий кут повороту перерізу балки в точці C є сумою двох складових: першої, викликаногі силою P і спрямованої за годинниковою стрілкою (кут від'ємний) і другої – від моменту $\mathfrak{M}$ при куті повороту перерізу проти руху годинникової стрілки (кут додатний).

Завдання для індивідуальної роботи

За теоремою Кастільяно та інтегралу Мора визначити переміщення в точках балок:

Задача 8.9.3. Визначити прогин і кут повороту вільного кінця A консолі, зображеній на рис.8.46.

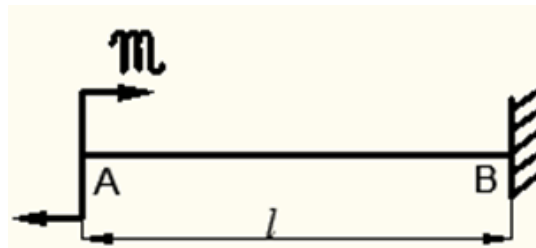


Рисунок 8.31

Задача 8.9.4. Визначити прогин і кут повороту вільного кінця B консолі рис.8.47.

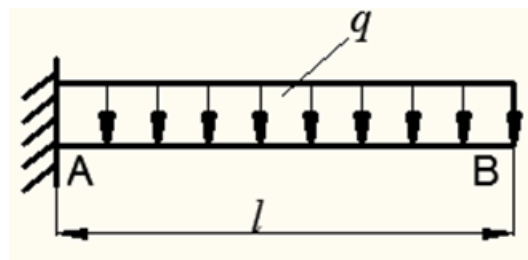


Рисунок 8.32

Задача 8.9.5. Визначити прогин посередині прольоту і кут повороту опорного перерізу A (рис.8.48).

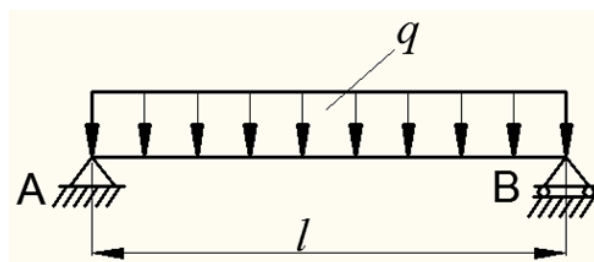


Рисунок 8.48

Задача 8.9.6. Визначити прогин посередині прогону і кут повороту опорного перерізу в точці B балки, зображеної на рис.8.49.

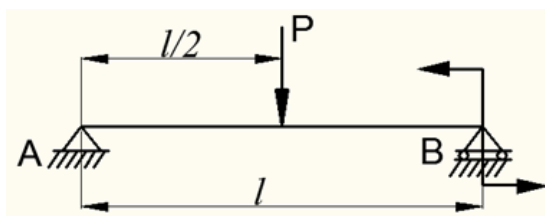


Рисунок 8.49

8.9.7 Розрахунок згинання статично невизначуваних балок

8.9.7.1 Однопрогонові балки

Статично невизначуваними будуть балки, у яких усі реакції не можуть бути визначені з одних лише рівнянь рівноваги статички. Так, балка на рис. 8.50,а має три невідомі реактивні зусилля R_A , R_B , і $M_{зА}$, а для неї можна скласти два рівняння статички $M_A = 0$ і $M_B = 0$. А для балки на рис. 8.50, б невідомих реакцій чотири: R_A , R_B , $M_{зА}$ і $M_{зВ}$. Число ж рівнянь рівноваги статички, як і у попередньому випадку, теж два.

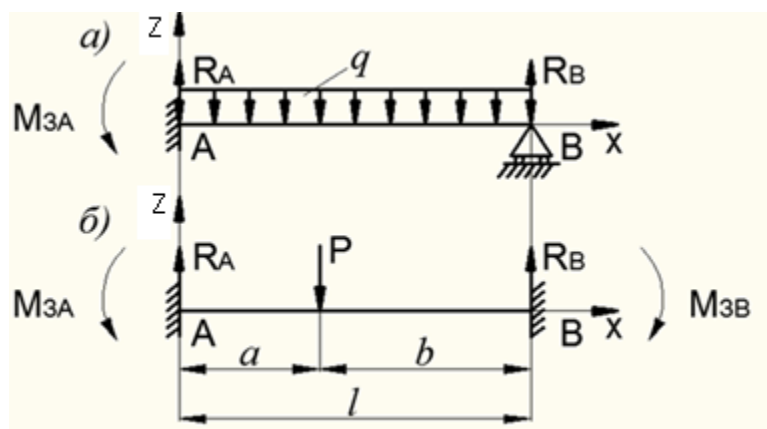


Рисунок 8.33 - Статично невизначені однопрогонні балки

Різниця між числом реактивних зусиль n і числа рівнянь статички m називається *ступенем статичної невизначеності балки* ($n - m$).

Для балки на рис. 8.50, *а* ступінь статичної невизначуваності складатиме: $n - m = 3 - 2 = 1$, тобто балка один раз статично невизначувана. А балка на рис. 8.50, *б* має різницю $n - m = 4 - 2 = 2$, тобто вона двічі статично невизначена. Таким чином, у статично невизначуваних балок є, так звані, «зайві невідомі» по відношенню до кількості рівнянь рівноваги статички. Для їх визначення використовуються умови сумісності переміщень (деформацій), складання яких розглянемо у наступних прикладах.

Приклад 8.9.8. Розкрити статичну невизначуваність і побудувати епюри M для балки (рис.8.51, *а*).

Рішення

Як було зазначено у попередніх прикладах, початок координат краще приймати на правій опорі балки в точці B .

Якщо за зайву невідому прийняти реактивну силу R_B , то при уявному відкиданні опори B повинна виконуватись така умова сумісності переміщень в перерізі B між балкою і опорою

$$w_B^{\delta} = w_B^{\text{оп}} ,$$

де прогин балки w_B^{δ} є сумою прогинів від розподіленого навантаження w_{B_q} (рис. 8.51 *б*) і реактивної сили w_{B_R} (рис. 8.51, *в*), а $w_B^{\text{оп}}$ є переміщення опори. Так як опора є жорсткою, тобто $w_B^{\text{оп}} = 0$, то, враховуючи знаки між прогинами w_{B_q} і w_{B_R} , із умови сумісності переміщень маємо

$$w_{Bq} = w_{BR}, \quad (8.63)$$

Визначимо ці прогини, користуючись інтегралом Мора.

При розрахунку прогину в точці B від розподіленого навантаження q уявно введемо додаткову одиничну силу P_d (див. рис. 8.51, з). Тоді в перерізі x згинальні моменти $M = M(x)$ і M_0 визначаються як

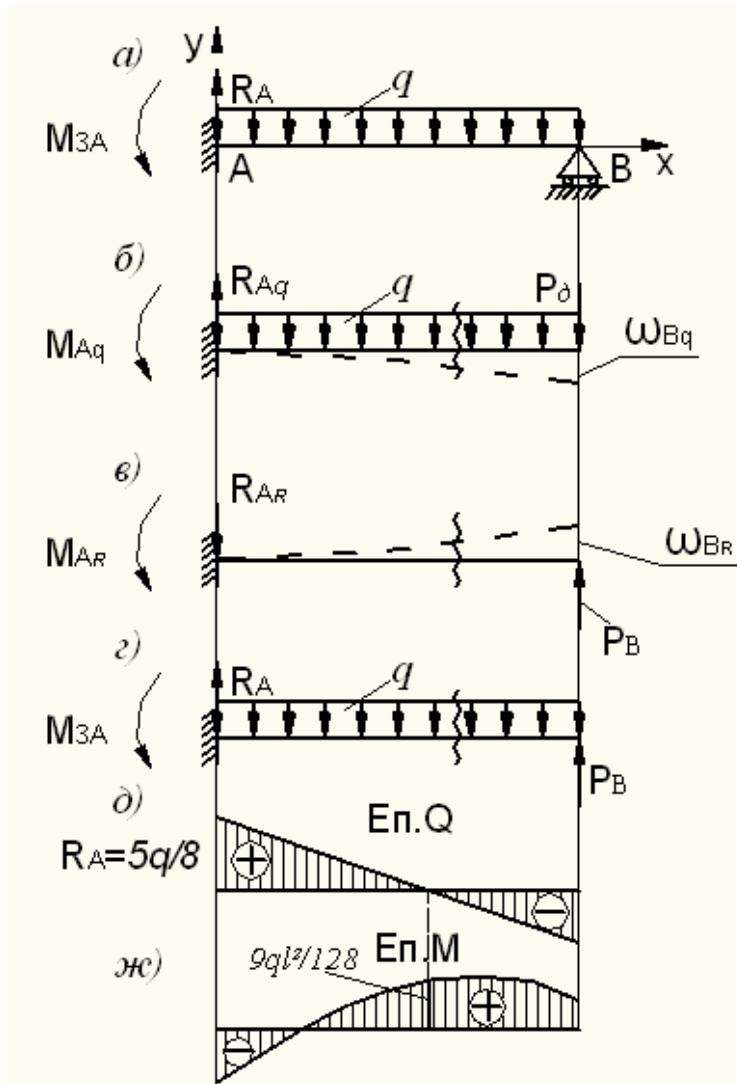


Рисунок 8.51 - До розрахунку статично невизначуваної балки

$$M = -\frac{qx^2}{2} - P_d \cdot x; \quad M_0 = -1;$$

$$w_{Bq} = \int_0^l \frac{M \cdot M_0}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2} - P_d \cdot x \right) \cdot (-1) dx =$$

$$= \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(\frac{qx^3}{2} + P_A^0 \cdot x^2 \right) dx = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{qx^4}{8} \Big|_0^l = \frac{ql^4}{8EI_z}. \quad (8.64)$$

Прогин краю консолі від реактивної сили R_B визначиться за аналогічною процедурою (див. рис. 8.54, *в*):

$$\begin{aligned} M &= R_B \cdot x; \quad M_0 = 1; \\ w_{B_R} &= \int_0^l \frac{M \cdot M_0}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^l R_B \cdot x^2 dx = \frac{R_B}{EI_y} \int_0^l x^2 dx \quad (8.65) \\ &= \frac{R_B \cdot x^3}{3EI_y} \Big|_0^l = \frac{R_B \cdot l^3}{3EI_y} \end{aligned}$$

Тоді з умови (8.63) з урахуванням прогинів балки у точці B (8.64), (8.65) маємо

$$\begin{aligned} \frac{ql^4}{8EI_y} &= \frac{R_B \cdot l^3}{3EI_y}; \quad \frac{ql}{8} = \frac{R_B}{3}, \quad \text{звідки} \\ R_B &= \frac{3}{8}ql. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Отримавши R_B , маємо статично визначувану балку (8.51, *д*), яка згинається від розподільного навантаження інтенсивністю q та вже визначеною силою (реакцією) R_B . Для цієї балки будуємо епюри $Q(x)$ і $M(x)$ (рис. 8.54, *ж, з*).

З епюри Q маємо

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q = qx - R_B; \\ \text{при } x = 0 \quad Q &= -R_B = -\frac{3}{8}ql; \\ \text{при } x = l \quad Q &= ql - \frac{3}{8}ql = \frac{5}{8}ql. \end{aligned}$$

Відкладаємо отримані ординати на епюрі Q та з'єднуємо їх прямою – лінійна залежність епюри Q (див.рис. 8.45, ж).

Для епюри M маємо:

$$M(x) = M = -\frac{qx^2}{2} + R_B \cdot x;$$

$$\text{при } x = 0 \quad M = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad M = -\frac{ql^2}{2} + -\frac{3}{8}ql^2 = -\frac{ql^2}{8}.$$

Як видно з вираження для $M(x)$, епюра згинального моменту відповідає квадратичній параболі відносно координати x . Дві її ординати в точках A та B вже визначені. Для знаходження координати x максимуму епюри M , де $Q=0$, проводимо додаткові обчислення.

З умови екстремуму функції M отримуємо:

$$\frac{dM}{dx} = 0; \quad -\frac{2qx}{2} + R_B = 0; \quad -qx + R_B = 0; \quad x = \frac{R_B}{q} = \frac{3ql}{8q} = \frac{3}{8}l.$$

У перерізі балки при $x = \frac{3}{8}l$ маємо екстремум функції M у прогоні балки:

$$\begin{aligned} M_{max} &= -\frac{qx^2}{2} + R_B \cdot x \Big|_{x=\frac{3}{8}l} = -\frac{q}{2} \left(\frac{3}{8}l\right)^2 + \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3}{8}l \\ &= -\frac{9ql^2}{128} + \frac{9ql^2}{64} = \frac{9ql^2}{128}. \end{aligned}$$

Отриману ординату M_{max} відкладено на епюрі M при $x = \frac{3}{8}l$ (див. рис. 8.54, з).

Приклад 8.9.9. Для балки, яка затиснена обома кінцями (рис. 8.52, а) і згинається від зосередженої сили P , розкрити статичну невизначуваність і побудувати епюри Q і M .

Рішення

Як було вказано вище, така балка двічі статично невизначувана: невідомих реактивних зусиль - чотири ($n=4$), а умов рівноваги статички - два ($m=2$).

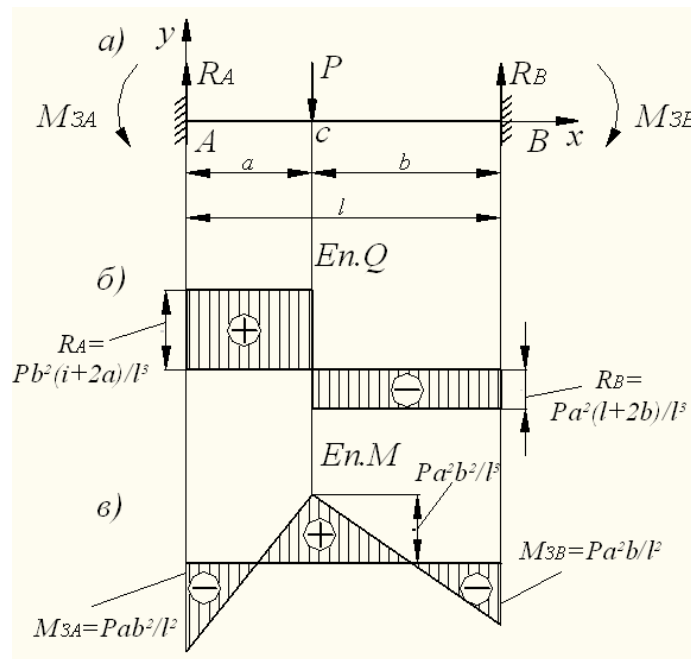


Рисунок 8.34 - До розрахунку статично невизначуваної балки

З умов рівноваги статички маємо:

$$Z = 0; \quad R_A - P + R_B = 0; \quad (8.67)$$

$$M_A = 0; \quad -R_B \cdot l + M_{3B} + P \cdot a - M_{3A} = 0.$$

Враховуючи, що кут повороту і прогин опорного перерізу в точці B дорівнюють нулю, отримуємо два додаткових рівняння для визначення реакцій – умови спільності переміщень:

$$\left. \begin{aligned} -M_{3A} \cdot l + R_A \frac{l^2}{2} - P \frac{b^2}{2} &= 0; \\ -M_{3A} \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{6} - P \frac{b^3}{6} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.68)$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь (8.67) і (8.68), знаходимо реактивні зусилля:

$$\left. \begin{aligned} R_A &= P \frac{b^2}{l^3} \frac{1 + 2a}{1}; \quad R_B = P \frac{a^2}{l^3} \frac{1 + 2b}{1}; \\ M_{3A} &= P \frac{ab^2}{l^2}; \quad M_{3B} = P \frac{a^2 b}{l^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.69)$$

Тепер легко побудувати епюри поперечних сил $Q(x)$ і згинальних моментів $M(x)$. Для цього обчислюємо згинальний момент, в перерізі під силою P :

$$\begin{aligned} M_C &= -M_{3A} + R_A \cdot a = -P \frac{ab^2}{l^2} + P \frac{ab^2}{l^3} \frac{l + 2a}{1} = \\ &= P \frac{2a^2 b^2}{l^3}. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Епюри $Q(x)$ та $M(x)$ надані на рис. 8.55, б, в.

8.9.7.2 Нерозрізні багатопрогонові балки

Нерозрізними багатопрогоновими називаються балки, що мають більше одного прогону. Вони є статично невизначуваними і розкриття їх статичної невизначуваності при великій кількості

прогонів зручно виконувати за теоремою *трьох моментів*. На простому прикладі розглянемо суть цього методу.

Приклад 9.9.10. Для балки (рис. 8.53, *а*) окрім кінцевих шарнірних опор є проміжна опора. При згинанні такої балки невідомими в розрахунку згину такої балки є три реактивні сили на опорах, а умов рівноваги статички – два. Тож ця балка буде один раз статично невизначуваною.

При розкритті статичної невизначуваності за теоремою трьох моментів за зайву невідому величину обирають опорні згинальні моменти M на проміжній опорі 2. При умовному розрізанні її на проміжній опорі і розділенні балки на дві однопрогонові (рис.8.53, *б*) ці опорні моменти визначаються з умови сумісності кутових переміщень:

$$\theta_{2,1} = \theta_{2,3}, \quad (8.71)$$

де $\theta_{2,1}$ – кут повороту правого опорного перерізу 2 однопрогоновій балки між опорами 2 і 1; $\theta_{2,3}$ – кут повороту лівого опорного перерізу 2 однопрогонової балки між опорами 2 і 3.

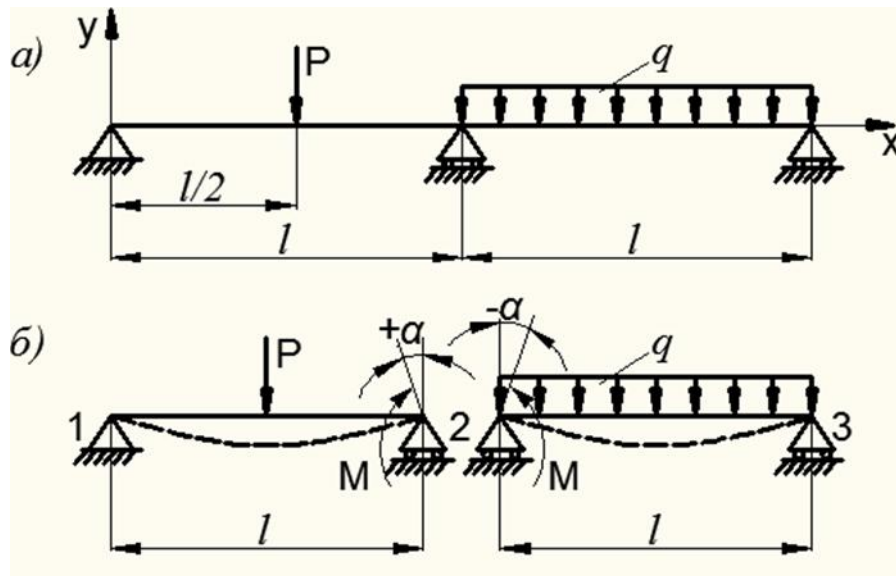


Рисунок 8.35 - До розрахунку двопрогової балки за теоремою трьох моментів

Ці кути повороту з урахуванням правила знаків для них (див. рис. 8.53, б) виражаються через зовнішнє навантаження і опорні моменти:

$$\begin{aligned} \theta_{2,1} &= \theta_{2,1} P + \theta_{2,1} M ; \\ \theta_{2,3} &= \theta_{2,3} q + \theta_{2,3} M , \end{aligned} \quad (8.72)$$

де

$$\begin{aligned} \theta_{2,1} P &= \frac{Pl^2}{16EI_y}; \quad \theta_{2,1} M = -\frac{Ml}{3EI_y}; \\ \theta_{2,3} q &= -\frac{ql^3}{24EI_y}; \quad \theta_{2,3} M = \frac{Ml}{3EI_y}. \end{aligned} \quad (8.73)$$

На підставі умови (8.71) і виразів (8.72) і (8.73) отримуємо рівняння для визначення невідомого опорного моменту:

$$\frac{Pl^2}{16EI_y} - \frac{Ml}{3EI_y} = -\frac{ql^3}{24EI_y} + \frac{Ml}{3EI_y}, \quad (8.74)$$

звідки

$$M = \frac{ql^2}{16} + \frac{3Pl}{32}. \quad (8.75)$$

Після знаходження опорного моменту M кожен прогін балки розглядається як статично невизначувана балка, завантажена окрім зовнішнього навантаження вже відомим опорним моментом M .

Метод розкриття статичної невизначуваності багатопрогонових балок за теоремою трьох моментів називається так тому, що при великій кількості прогонів балки k в кожне рівняння сумісності кутових переміщень типу (8.74) входить не більше трьох опорних моментів для даної проміжної опори за умови типу (8.71).

Розрахунок параметрів згинання кожного з прогонів, як статично невизначуваної балки, виконується методом накладання (підсумовування) від зовнішнього прогонового навантаження і вже відомих опорних моментів. Так, в даному прикладі результуюча еюра моментів $M_{рез}$ для кожного прольоту балки, отримана шляхом накладення епюрми M від заданого навантаження $M_{прог}$ на епюру опорного моменту $M_{о.м.}$.

$$M_{рез} = M_{прог} + M_{о.м.} \quad (8.76)$$

Для розглянутого прикладу вона показана заштрихованою на рис. 8.54.

$$\text{Для першого прогону } M_{прог}^{max} = \frac{P \cdot l}{4}, \text{ для другого } - M_{прог}^{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}.$$

За такою процедурою накладання розраховуються реакція на проміжній опорі і будується еюра поперечної сили Q .

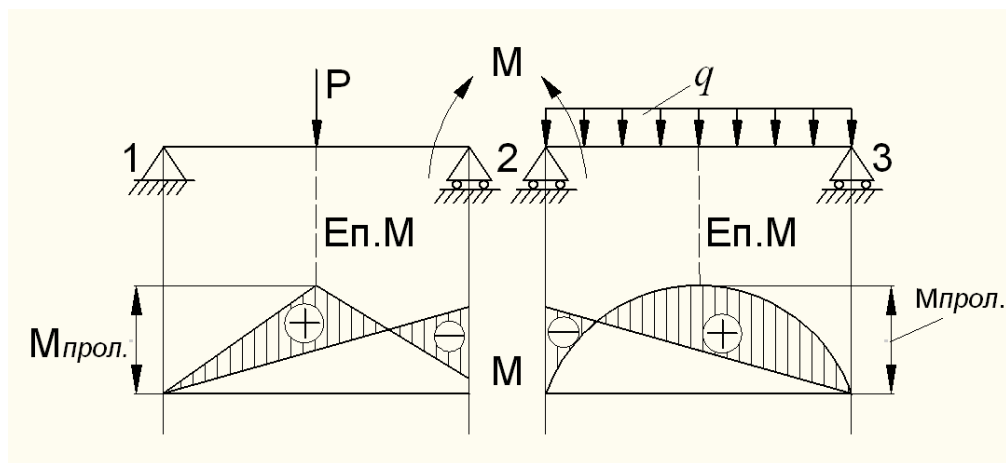


Рисунок 8.36 – Побудова результуючої епюри згинального моменту методом накладання

9 СКЛАДНИЙ ОПІР БРУСА

9.1 Загальні положення про складний опір

Вище розглядалися окремі найпростіші види деформацій, при яких в поперечних перерізах брусів (балок) виникав один тип внутрішніх силових факторів від розтягування (стискання), зсуву, зминання, кручення, чистого згинання. Виняток становить пряме поперечне згинання балок, коли в перерізах виникають два внутрішніх силових фактори – поперечна сила і згинальний момент. Однак і цей вид деформації відносять до найпростіших, так як, в основному, розрахунки на міцність елементів конструкцій ведуть за згинальним моментом, який дозволяє розрахувати найбільші нормальні напруження.

У той же час на практиці низка елементів машин, механізмів та конструкцій піддаються одночасно дії декількох видів

деформацій. Так, наприклад, колінчасті вали машин і механізмів зазнають дії згинання і кручення, стійки підкранових балок – стискання і згинання. Подібні випадки, що супроводжуються виникненням комбінації найпростіших деформацій, називають складним опором. При цьому в поперечних перерізах брусів (балок) буде діяти більш одного внутрішнього силового фактора.

У розрахунках на складний опір виходять з принципу незалежності дії сил, коли результат спільної дії декількох видів деформацій отримують підсумовуванням результатів від кожного виду деформацій окремо.

Досвід показує справедливність такого принципу в пружній області роботи матеріалу конструкцій.

Розглянемо кілька видів складного опору: косе згинання; поєднання згинання з розтягуванням (стисканням); спільну дію згинання і кручення.

9.2 Косе згинання

Косим згинанням називають такий вид згинання, при якому площина дії згинального моменту в даному поперечному перерізі бруса не проходить ні через одну з головних центральних осей інерції цього перерізу. Розрізняють плоске косе згинання (всі зовнішні сили лежать в одній площині, а пружна лінія – плоска крива) і просторове згинання (зовнішні сили діють в різних площинах, пружна лінія – просторова крива).

Розглянемо найбільш простий випадок плоского косого згинання, яке в подальшому будемо називати просто косим згинанням.

Нехай брус прямокутного поперечного перерізу, затиснений одним кінцем, згинається силою P , яка діє перпендикулярно до його осі на вільному кінці і прикладена під кутом φ до осі z (рис.9.1). Розкладемо силу P на дві складові проекції:

$$P_z = P \cos \varphi ; P_y = P \sin \varphi . \quad (9.1)$$

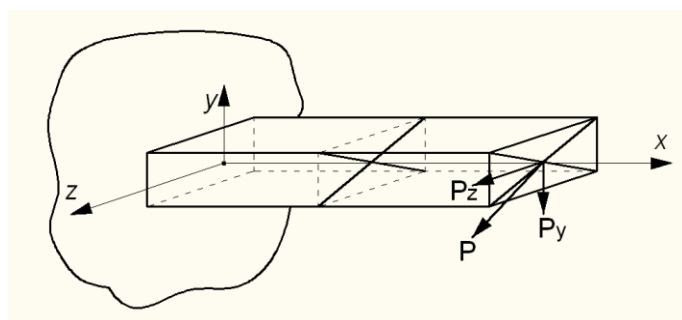


Рисунок 9.1 – Косе згинання бруса

Тоді абсолютні значення згинальних моментів від цих проекцій сили P в перерізі x будуть:

$$\begin{aligned} M_z &= P_y \cdot x = P \cdot x \sin \varphi = M \cdot \sin \varphi ; \\ M_y &= P_z \cdot x = P \cdot x \cos \varphi = M \cdot \cos \varphi , \end{aligned} \quad (9.2)$$

де M_y – згинальний момент, що діє навколо осі y в площині xOz ; M_z – згинальний момент, що діє навколо осі z в площині xOy ; M – результуючий згинальний момент в перерізі x , який визначається як

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = P \cdot x.$$

Моменти M_y і M_z діють в головних площинах перерізу бруса. Напруження і прогини від кожного з цих моментів, взятих окремо, вже визначалися раніше. Користуючись принципом незалежності дії сил, можна знайти напруження і прогини при одночасній дії моментів M_y і M_z . Таким чином, випадок косого згинання (рис. 9.2, а) можна звести до двох плоских (поперечних), або, як кажуть, до простих згинань.

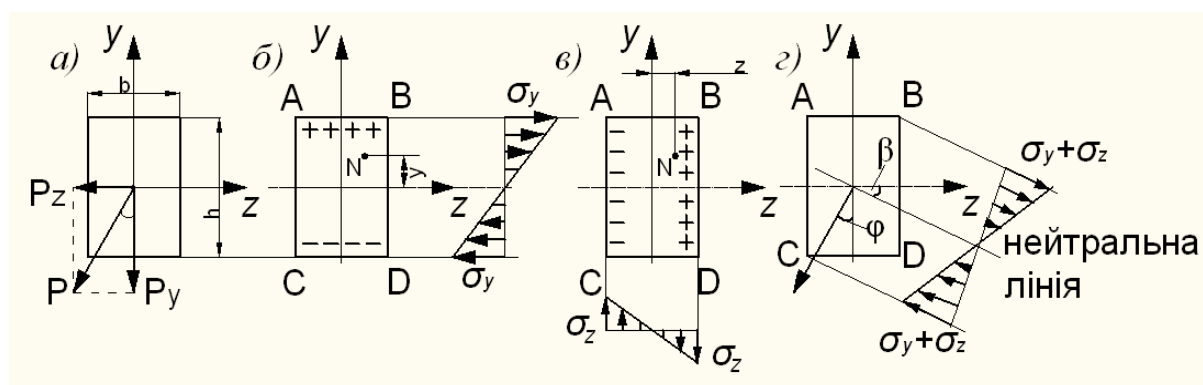


Рисунок 9.2 - Навантаження і напруження при косому згинанні

Від дії тільки одного моменту M_z нейтральною лінією буде вісь y (рис. 9.2, б) і нормальні напруження для будь-якої точки N з координатами y і z , взятої в першому квадранті перерізу (див. рис. 9.2, б), визначаються за формулою:

$$\sigma_z = \frac{M_y \cdot z}{I_y}. \quad (9.3)$$

Напруження в тій же точці від дії моменту M_z (рис. 9.2, в) розраховується як

$$\sigma_y = \frac{M_z \cdot y}{I_z}. \quad (9.4)$$

При одночасній дії двох моментів M_y і M_z напруження в будь-якій точці перерізу дорівнюватиме алгебраїчній сумі напружень σ_y і σ_z , тобто

$$\sigma = \sigma_y + \sigma_z = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}. \quad (9.5)$$

У цю формулу координати y і z точок перерізу і згинальні моменти M_y і M_z підставляються зі своїми знаками. Якщо момент діє таким чином, що в 1-й чверті, де координати y і z додатні, він створює розтягання, то йому приписується знак «+», а якщо стискання, – то «-».

Найбільше сумарне напруження в даному випадку буде в точці B і C : в т. $B(z > 0, y > 0)$ – напруження розтягування, а в точці C ($z < 0, y < 0$) – напруження стискання. Рівняння нейтральної лінії (рис. 8.50, z) отримаємо, порівнюючи до нуля праву частину формули (9.5):

$$\frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} = 0, \quad (9.6)$$

або

$$\frac{M \cdot y \cos \varphi}{I_z} + \frac{M \cdot z \sin \varphi}{I_y} = 0,$$

звідки

$$\frac{y \cos \varphi}{I_z} + \frac{z \sin \varphi}{I_y} = 0.$$

Цьому рівнянню прямої лінії задовольняють значення $y = 0$ і $z = 0$. Отже, нейтральна лінія проходить через центр ваги поперечного перерізу.

Визначивши з останнього виразу відношення $\frac{y}{z}$, знайдемо тангенс кута β , що складається нейтральної лінією і додатним напрямом осі z (рис. 9.2, z):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{y} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_y}{I_z}. \quad (9.7)$$

З формули (9.7) видно, що для перерізів, у яких $I_z = I_y$ (квадрат, коло), нейтральна лінія буде перпендикулярна до площини дії згинального моменту, в якому і буде відбуватися деформація згинання.

У тих же випадках, коли $I_z \neq I_y$ і $\varphi \neq 0$ або $\varphi \neq 90^\circ$, нейтральна лінія не буде перпендикулярна до площини дії згинального моменту.

З розглянутого прикладу випливає, що найбільш напруженими будуть точки В і С перерізу бруса в місці його затиснення, як найбільш віддалені від нейтральній лінії. Тоді умова міцності для небезпечної точки запишеться у вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max} \cdot y_B}{I_z} + \frac{M_y^{\max} \cdot z_B}{I_y} \leq \sigma, \quad (9.8)$$

де y_B, z_B - координати небезпечної точки В.

Прогини при косому згинанні визначаються як геометрична сума прогинів в координатних площинах:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}, \quad (9.9)$$

де f_y і f_z - прогини бруса в площинах відповідно yOx і zOx , які обчислюються як при плоскому згинанні.

9.3 Згинання з розтяганням(стисканням)

Вид деформації, коли на балку діє поперечне навантаження і подовжні сили розтягування або стискання вздовж її осі, називається *поздовжньо-поперечним* або *складним згинанням*. Так, для балки, показаної на рис. 9.3, поперечне навантаження інтенсивністю q викликає поперечне згинання, а розтягуюча сила P – розтягання (у разі дії стискаючої сили P балка зазнає згин і стиск). Тоді в поперечному перерізі балки з координатою x матимуть місце два види найпростіших деформацій, які спричиняють нормальні напруження (дотичними напруженнями нехтують через їх малу величину):

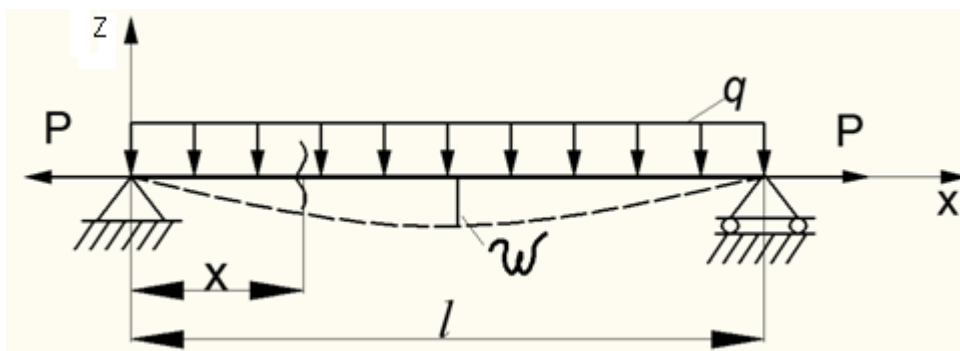


Рисунок 9.3 – Поздовжньо-поперечне згинання балки

1) згинання, що призводить до нормальних напружень

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{M \cdot z}{I_y};$$

2) розтягання, при якому

$$\sigma_{\text{р}} = \frac{P}{F},$$

де M – згинальний момент в поперечному перерізі з координатою x ; z – ордината по висоті перерізу балки; F - площа поперечного перерізу балки.

Тоді на основі принципу незалежності дії сил повне напруження в будь-якій точці по висоті перерізу дорівнює:

$$\sigma = \sigma_B + \sigma_p = \frac{M \cdot z}{I_y} + \frac{P}{F}. \quad (9.10)$$

Покажемо на рис. 9.4 розподіл напружень по висоті прямокутного перерізу балки (див. рис. 9.3):

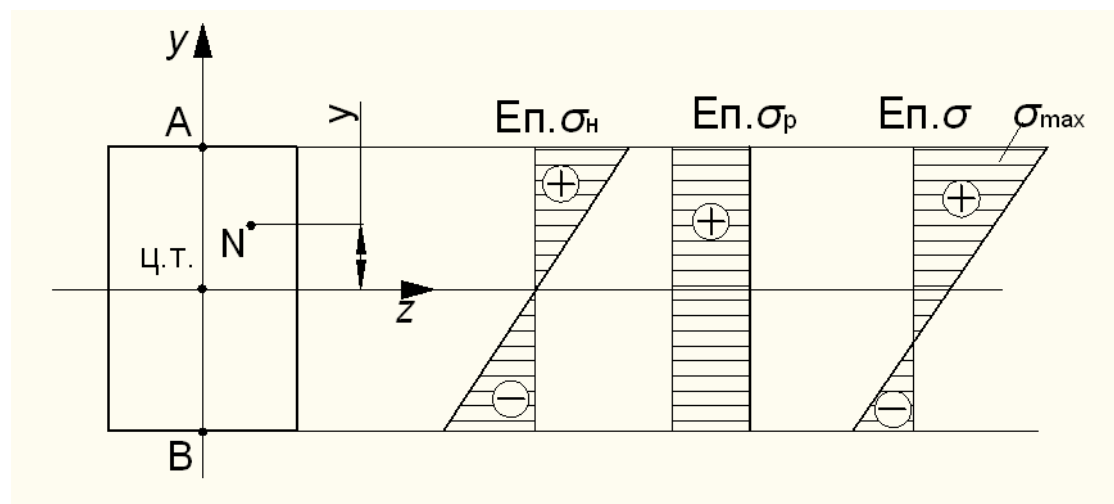


Рисунок 9.4 – Розподіл нормальних напружень при поздовжньо-поперечному згинанні балки

Із рисунка видно, що найбільші сумарні напруження від згинання і розтягування будуть в найбільш віддаленій точці A від центра ваги перерізу балки, тож умова міцності матиме вигляд:

$$\sigma_z = \sigma_B^{max} + \sigma_p = \frac{M_{max}}{W_{min}} + \frac{P}{F} \leq \sigma, \quad (9.11)$$

де M_{max} – максимальний згинальний момент у небезпечному перерізі балки; W_{min} – мінімальний осьовий момент опору перерізу балки $W_{min} = \frac{I_y}{h/2}$; σ – допустимі напруження.

У цьому випадку передбачається, що балка настільки жорстка і мало прогинається. Тож поздовжня сила P весь час діє паралельно осі балки без урахування її викривлення.

При стискаючій поздовжній силі P стискаючі нормальні напруження балки будуть $\sigma_p = -\frac{P}{F}$ і найбільш навантаженою точкою по висоті перерізу буде точка B (див.рис.9.4), а умова міцності матиме вигляд:

$$\sigma_{max} = -\frac{M_{max}}{W_{min}} - \frac{P}{F} \leq \sigma \quad (9.12)$$

У загальному випадку розтягуючої або стискаючої подовжньої сили P умова міцності при поздовжньо-поперечному згинанні балки має вигляд:

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_{max}}{W_{min}} \pm \frac{P}{F} \leq \sigma \quad (9.13)$$

Прогини балки при поздовжньо-поперечному згині можна отримати, інтегруючи диференціальне рівняння пружної лінії балки:

$$EI_y w'''' = M, \quad (9.14)$$

де M - згинальний момент від поперечного і поздовжнього навантаження балки $M = M_z + P \cdot w$. Тут перша складова відповідає згинальному моменту від поперечного навантаження, а

друга – згинальному моменту від поздовжньої сили; $w = w(x)$ – функція прогину балки.

Для коротких і жорстких балок ($l \leq 10h$) максимальний сумарний прогин w від згинання і поздовжнього навантаження можна приблизно вважати рівним згину від поперечного навантаження, який розраховується будь-яким аналітичним або енергетичним методами.

9.4 Згинання з крученням

На практиці деформація кручення часто супроводжується згинанням. З таким складним видом деформування доводиться зустрічатися, наприклад, при розрахунку валів машин і механізмів, коли сили, що передаються валу, не проходять через його вісь. Нехай на вал (рис. 9.5) насаджено зубчасте колесо, яке передає окружне зусилля P від іншого зубчастого колеса на відстані R від центру валу.

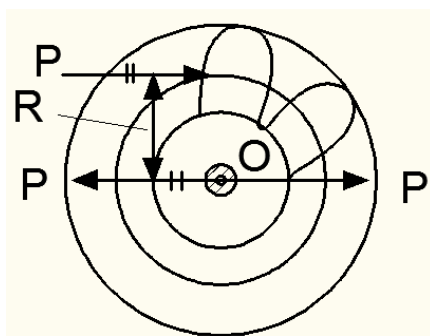


Рисунок 9.5 - Спільна дія згинання і кручення валу

Зазначимо у перерізі вала дві, спрямовані у протилежні сторони рівні сили P , які не порушують умову рівноваги по силам. Тоді для вала отримаємо пару сил з моментом $P \cdot R$ (сили, що

складають цю пару, на рисунку перекреслені двома рисками), які скручують вал, і силу P , що прикладена в центрі вала і викликає його згинання.

Відповідно до принципу незалежності дії сил напруження у валу від згинання і кручення розраховуються окремо. При згинанні в перерізах вала виникають нормальні напруження σ і дотичні напруження τ , а при крученні – тільки дотичні напруження $\tau_{кр}$. Дотичними напруженнями τ від згинання в розрахунку валів зазвичай нехтують, так як ці напруження значно менше дотичних напружень від кручення $\tau_{кр}$.

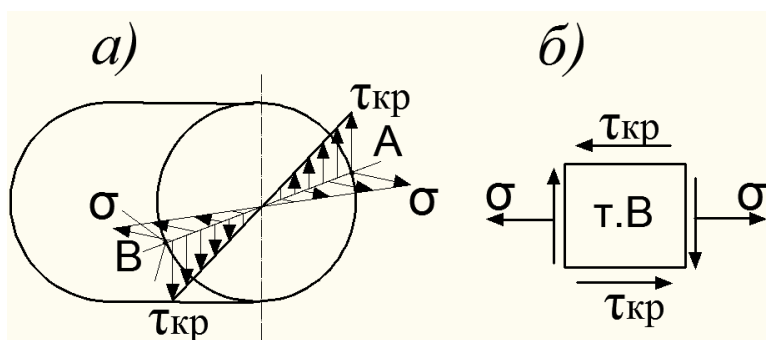


Рисунок 9.6 – Розподіл напружень σ і $\tau_{кр}$ в перерізі вала

Напруження σ від згинання вала розподіляються за лінійним законом і досягають максимальних значень в точках A та B на поверхні вала (рис. 9.6):

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad (9.15)$$

де M – згинальний момент в перерізі вала; W – осьовий момент опору перерізу (для круглого вала $W = \frac{\pi d^3}{32}$).

Дотичні напруження від кручення вала $\tau_{кр}$ також розподіляються за лінійним законом і досягають максимуму на поверхні вала (див. рис. 9.6):

$$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (9.16)$$

де $M_{кр}$ – крутний момент в перерізі вала (для перерізу вала на рис. 9.5 $M_{кр} = P \cdot R$); W_p – полярний момент опору перерізу (для круглого вала $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$).

Кожне з цих напружень, узятє окремо, може бути менше допустимого напруження для відповідного виду деформування. Однак одночасна їх дія в найбільш напружених точках перерізу може виявитися небезпечним для вала (рис. 9.6). У цих умовах для перевірки міцності використовують зведені (еквівалентні) напруження $\sigma_{екв}$. Наприклад, по 3-й теорії найбільших дотичних напружень умова міцності матиме вигляд:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_{кр}^2} \leq \sigma, \quad (9.17)$$

де σ і $\tau_{кр}$ – напруження при згинанні і крученні, що розраховуються за формулами (9.15) і (9.16); σ – нормальне допустиме напруження.

9.5 Рішення типових задач на складний опір. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 9.1 *Косе згинання бруса.* На брус прямокутного поперечного перерізу, затисненого лівим кінцем (Рис.9.7) діє вертикальна і горизонтальна сили P , кожна величиною $P = 2,5$ кН.

Розмір $a = 2$ м, а співвідношення розмірів прямокутного перерізу бруса $\frac{h}{b} = 2$. Визначити розміри перерізу, якщо допустиме напруження матеріалу бруса $\sigma = 1,0 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

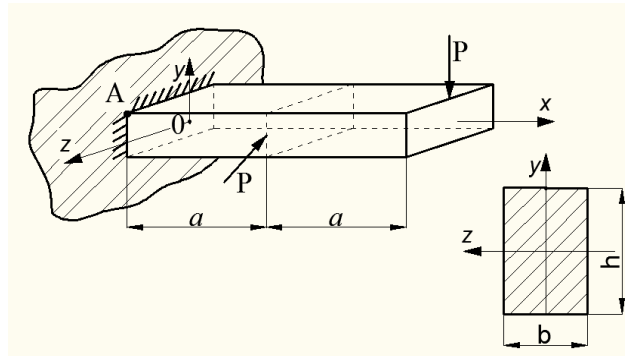


Рисунок 9.7 – Косе згинання бруса

Рішення

Максимальне нормальне напруження σ при згинанні бруса буде в точці A його перерізу в місці затискання, тож умова міцності має вигляд

$$\sigma_A = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma, \quad (9.18)$$

де M_y – згинаючий момент бруса в площині xOz ,

$$M_y = P \cdot 2a;$$

M_z – згинальний момент бруса в площині yOz ,

$$M_z = P \cdot a;$$

W_y, W_z – моменти опору перерізу бруса відносно координатних осей

$$W_y = \frac{bh^2}{6}, \quad W_z = \frac{hb^2}{6}.$$

Тоді формула (9.18) для визначення розмірів перерізу бруса з урахуванням співвідношення його сторін $h = 2b$, приймає вигляд:

$$\sigma_A = \frac{P \cdot 2a}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{P \cdot a}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{6Pa}{b^3} = \sigma,$$

Звідки

$$b = \sqrt[3]{\frac{6Pa}{\sigma}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2,5 \cdot 200}{1}} = 14,2 \text{ см.}$$

Тоді

$$h = 2b = 2 \cdot 14,2 = 28,4 \text{ см.}$$

Округлюючи розміри перерізу бруса у більшу сторону, приймаємо: $b \times h = 15 \times 30 \text{ см.}$

Приклад 9.2 *Згинання з розтягуванням балки.* Для сталеві балки коробчастого поперечного перерізу, затисненої лівим кінцем (рис. 9.8, а), підібрати розміри поперечного перерізу. Вихідні дані: $P_1 = 8 \text{ кН}; \quad P_2 = 6 \text{ кН}; \quad l_1 = 2 \text{ м}; \quad l_2 = 3 \text{ м}; \quad \sigma = 210 \text{ МПа.}$

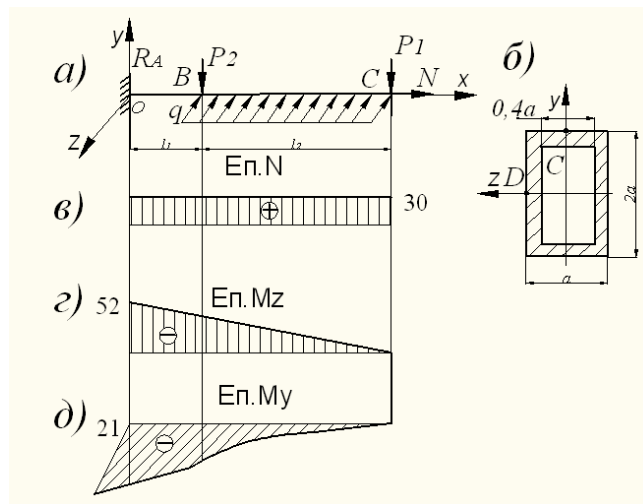


Рисунок 9.8- Згинання балки в двох площинах з розтягуванням

Рішення

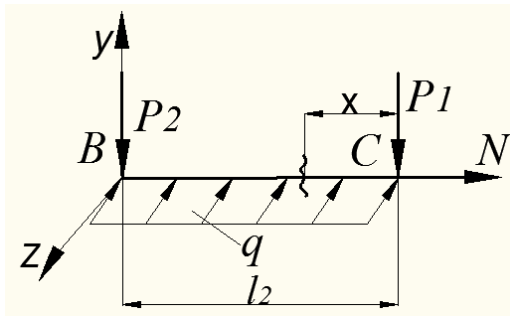
1. Умова міцності балки при згинанні з розтягуванням має вигляд

$$\sigma = \frac{T}{H} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} \leq \sigma , \quad 9.19$$

де T – осьове розтягуюче зусилля; M_z, M_y – згинальні моменти балки в площинах відповідно xOy і xOz ; I_z, I_y – моменти інерції перерізу балки відносно осей координат.

2. Небезпечним перерізом балки при згинанні буде місце її затиснення в точці O , а небезпечними точками цього перерізу будуть точки C (при згинанні у вертикальній площині xOy) і D (при згинанні в горизонтальній площині xOz) – див. рис. 9.8, б.

3. Запишемо вирази для внутрішніх зусиль N, M_z, M_y на ділянках балки з визначенням їх значень в характерних перерізах (початок координат в точці C , див. рис. 9.8):



Ділянка CB:

$$0 \leq x \leq 3 \text{ м}; T = 30 \text{ кН};$$

$$M_z = -P_1 \cdot x = -8 \cdot x;$$

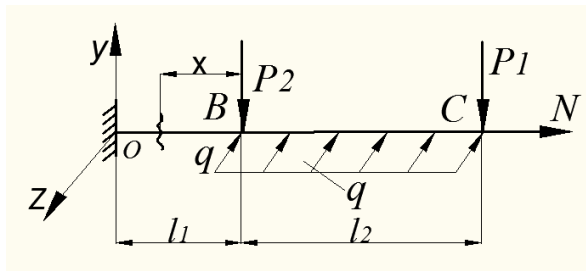
$$\text{при } x = 0 \quad M_z = 0;$$

$$\text{при } x = 3 \text{ м } M_z = -8 \cdot 3 = -24 \text{ кНм},$$

$$M_y = -2 \frac{x^2}{2} = -x^2;$$

$$\text{при } x = 0 \quad M_y = 0;$$

$$\text{при } x = 3 \text{ м } M_z = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Ділянка OB:

$$0 \leq x \leq 2 \text{ м}; \quad T = 30 \text{ кН};$$

$$M_z = -P_1 \cdot 3 + x - P_2 \cdot x = -8 \cdot 3 + x - 6 \cdot x = -24 - 14x;$$

$$\text{при } x = 0 \quad M_z = -24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x = 2 \text{ м } M_z = -52 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y = -q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} + x = -2 \cdot 3 \cdot 1,5 + x = -9 - 6x;$$

$$\text{при } x = 0 \quad M_y = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \text{при } x = 2 \text{ м } M_y = -21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Будуємо епюри N, M_z, M_y (рис. 9.8, б, в, г).

5. Аналізуємо епюри N, M_z, M_y і знаходимо максимальні за абсолютною величиною внутрішні зусилля в жорсткому затисненні балки:

$$N_{max} = 30 \text{ кН}; \quad M_z^{max} = 52 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_y^{max} = 21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

6. Визначимо необхідні геометричні характеристики поперечного перерізу (див. рис. 9.8, б):

$$F = a \cdot 2a - 0,4a \cdot a = 1,6a^2;$$

$$I_z = \frac{a \cdot 2a^3}{12} - \frac{0,4 \cdot a \cdot a^3}{12} = 0,6667a^4 - 0,333a^4 = 0,3333a^4;$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{0,6333a^4}{a} = 0,6333a^3;$$

$$I_y = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{a(0,4a)}{12} = 0,1667a^4 - 0,0053a^4 = 0,1613a^4;$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{0,1613a^4}{0,5a} = 0,3227a^3.$$

7. Підставивши значення F, W_z, W_y в ліву частину умови міцності (9.19), отримаємо

$$\sigma_{\max} = \frac{30}{1,6a^2} + \frac{5200}{0,6333a^3} + \frac{5200}{0,6333a^3} = 21 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Вирішивши це рівняння відносно розміру перерізу балки a , знайдемо $a \approx 9$ см.

Приклад 9.3 На валі, який приводиться до руху двигуном M , насаджено посередині шків вагою $P = 5$ кН з діаметром $D = 1,2$ м (рис. 9.9). Натяг провідної частини паска надітого на шків $P_{H1} = 6$ кН, а веденої $P_{H2} = 3$ кН. Визначити діаметр вала d , якщо допустиме напруження його матеріалу $\sigma = 5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, а відстань між опорами вала $l = 1,2$ м.

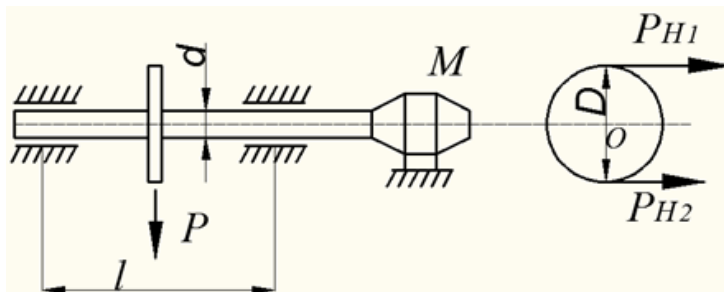


Рисунок 9.9 - Спільна дія на вал згинання і кручення

Рішення

Перенісши сили натягу паску до центру вала в точку O , знаходимо, що на вал діє горизонтальна сила величиною

$$P_{\Gamma} = P_{H1} + P_{H2} = 6 + 3 = 9 \text{ кН і крутний момент}$$

$$M_{\text{кр}} = P_{H1} \cdot \frac{D}{2} - P_{H2} \cdot \frac{D}{2} = 6 \cdot \frac{120}{2} - 3 \cdot \frac{120}{2} = 180 \text{ кН} \cdot \text{см.}$$

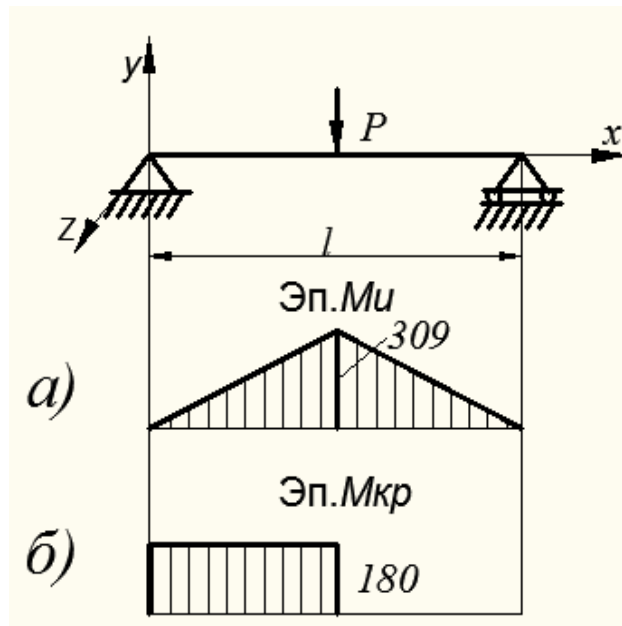


Рисунок 9.10 - Епюри моментів від згинання і кручення вала

Горизонтальна сила $P_{\Gamma} = 9 \text{ кН}$ і вертикальна сила, що є вагою шківа $P_{\text{в}} = 5 \text{ кН}$, діють в одному перерізі вала. Їх рівнодіюча P визначиться як:

$$P = \sqrt{P_{\Gamma}^2 + P_{\text{в}}^2} = \sqrt{9^2 + 5^2} = 10,3 \text{ кН.}$$

Максимальний згинальний момент від цієї рівнодіючої буде знаходитися посередині валу і його величина складе:

$$M_z = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{10,3 \cdot 120}{4} = 309 \text{ кН} \cdot \text{см.}$$

Епюри M_z і $M_{\text{кр}}$ представлені на рис.9.12, а, б.

За 3-ю теорією міцності найбільших дотичних напруження умова міцності вала має вигляд

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma .$$

Виразивши напруження через згинальний і крутний моменти і маючи на увазі, що полярний момент перерізу W_p у двічі більший за осьовий

$$\frac{1}{W} \sqrt{M_z^2 + M_{\text{кр}}^2} \leq \sigma ,$$

звідки знаходимо момент опору перерізу валу:

$$W \geq \frac{\sqrt{M_z^2 + M_{\text{кр}}^2}}{\sigma} = \frac{\sqrt{309^2 + 180^2}}{5} = 71,6 \text{ см}^3.$$

Оскільки для круглого перерізу $W = 0,1d^3$, знаходимо необхідний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W}{0,1}} = \sqrt[3]{716} = 8,95 \text{ см.}$$

Приймаємо $d = 9 \text{ см.}$

Завдання для індивідуальної роботи

Задача 9.1 Перевірити міцність сталевого бруса, який жорстко закріплений одним кінцем і знаходиться в умовах особого згинання (рис. 9.11), якщо допустиме напруження $\sigma = 15 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, вертикальна і горизонтальна сили однакові за величиною ($P = 20 \text{ кН}$), значення горизонтального розміру

$a = 0,5$ м, а розміри поперечного перерізу бруса $b \times h = 30 \times 15$ см.

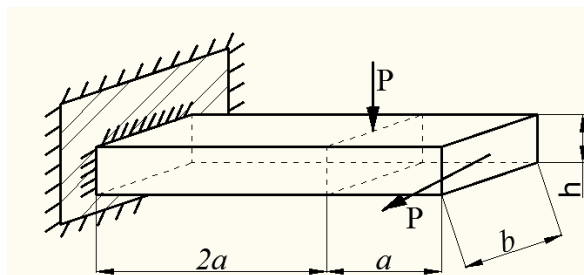


Рисунок 9.11- Косе згинання бруса

Задача 9.2 Сталева консольна балка прямокутного перерізу (рис. 9.12) навантажена вертикальною і горизонтальною силами. Вибрати розміри поперечного перерізу балки і перевірити її міцність в найбільш напруженій точці цього перерізу при наступних вихідних даних: $P = 2$ кН; $N = 9,6$ кН; $l = 1,32$ м; $b \times h = 30 \times 80$ мм; $\sigma = 15 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$. Побудувати епюри напружень в небезпечному перерізі балки.

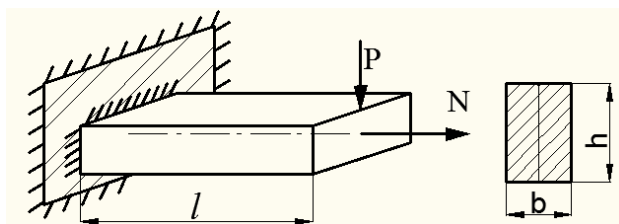


Рисунок 9.12- Згинання і розтягування балки

Задача 9.3 Скориставшись 3-ою теорією міцності, підібрати діаметр суцільного вала (рис. 9.15), який навантажений моментами від ремінних передач, що призводять як до горизонтальної, так і вертикальної рівнодіючим K і P . Врахувати

наявність згинання в двох площинах і кручення, побудувати епюри згинальних і крутних моментів при наступних початкових даних: $D = 60$ см; $K = P = 1$ кН; $r = 20$ см; $a = 0,5$ м; $\sigma = 80$ МПа.

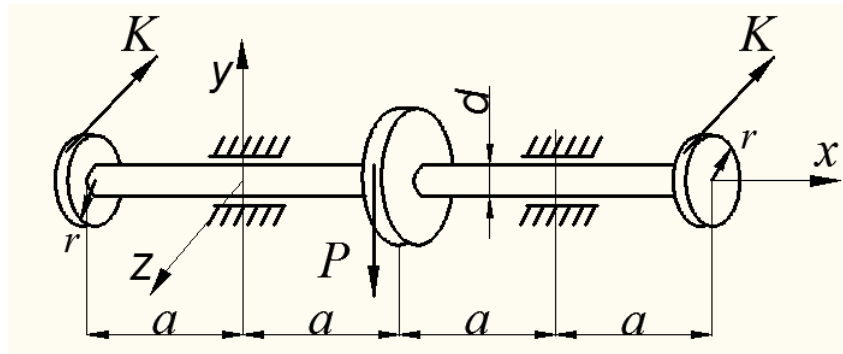


Рисунок 9.13- Спільна дія на вал згину і кручення

10 СТІЙКІСТЬ ПРЯМОЛІНІЙНИХ СТЕРЖНІВ

10.1 Суть явища втрати стійкості стержня

Досі розглядалися види деформування, коли параметри напружено-деформованого стану залежали від навантаження. При цьому у міру збільшення навантаження відповідні деформації збільшувалися без різкого стрибка і характер напруженого стану не змінювався. Проте на практиці зустрічаються випадки, коли при поступовому збільшенні навантаження різко змінюється вихідна форма рівноваги і напружений стан, внаслідок чого може статися раптова зміна початкової рівноваги і він навіть може зруйнуватися. Так, якщо стискати подовжніми силами прямолінійний стержень, то до певної величини центрально прикладеної подовжньої сили стержень знаходиться в умовах звичайного звичайне стискання і його вісь залишається прямолінійною. Проте при досягненні стискуючої силою деякої небезпечної величини стержень несподівано викривиться, тобто з'явиться додатковий вид деформування. В результаті згинання в перерізах стержня виникає згинальний момент, який спричинений додатковими напруженнями і стержень може несподівано отримати значний рівень деформацій та зміщуватись.

Викривлення згинання довгих стержнів, що центрально стискаються подовжніми силами, будемо називати *подовжнім згином*.

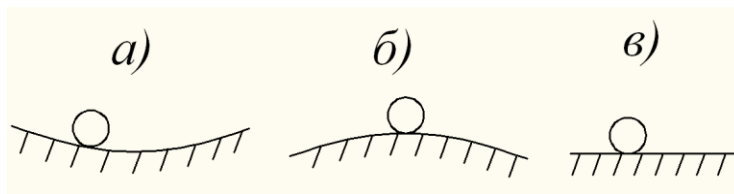


Рисунок 10.1 – Стійке (а), нестійке (б) і байдуже (нейтральне, в) положення рівноваги тіла

У теоретичній механіці при вивченні положення рівноваги твердого тіла під дією прикладених до нього сил (рис.10.1) вводиться поняття стійкої (а), нестійкою (б) і байдужої (нейтральною, в) видів рівноваги.

В задачах опору матеріалів має місце аналогія з описаним вище явищем. Так, наприклад, розглянемо стискування осьовою силою P тонкого довгого сталевого стержня, який жорстко затиснений одним кінцем. прикладена стискаюча сила P , що діє по осі стержня (рис. 10.2).

Стержень під дією стискаючої сили P_1 , строго прикладеної по його осі, спочатку тільки стискатиметься, і його вісь при цьому залишатиметься прямолінійною (рис. 10,2, а).

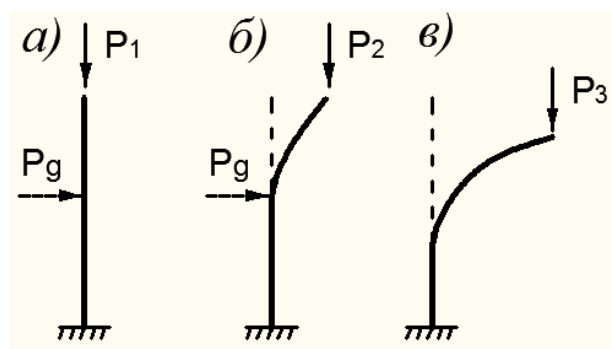


Рисунок 10.2- Форми рівноваги центрально стислого стержня

Якщо стержень вивести з прямолінійного стану, відхиливши його додатковою поперечною силою P_g , то після припинення дії цієї сили внутрішні зусилля стержня знову повернуть його до початкового прямолінійного стану. Так буде до тих пір, поки стискаюча сила P_1 не стане більше деякої критичної величини. Прямолінійна форма рівноваги стержня в цій стадії поздовжнього вигинання буде *стійка*.

При досягненні стискаючої сили критичного значення P_2 (рис.10.2, б) будуть можливі дві форми пружної рівноваги : перша – прямолінійна форма, а друга – криволінійна. Це означає, що якщо до стержня прикласти додаткову поперечну силу P_g , то після її зняття він не повернеться до прямолінійної форми рівноваги і залишиться зігнутим. Говорять, що *стержень* знаходиться у байдужому (нейтральному) стані рівноваги. Навіть у пружній області при такому стані рівноваги його деформації будуть небезпечними для подальшої експлуатації стержня. У цій другій стадії поздовжнього згинання навіть невелике збільшення стискаючої сили веде до значного згину стержня.

Якщо ще збільшити стискаючу силу за критичний рівень до величини P_3 , то внутрішні сили стержня вже не зможуть урівноважити зовнішнє навантаження і внаслідок цього в стержні станеться додаткове велике викривлення (рис. 10.2, в), що вказує на його нестійкий стан рівноваги.

Критичне значення стискаючої сили, при якій прямолінійний стан рівноваги переходить в нестійкий стан,

називається *ейлеровою силою* P_e , коли деформації стержня знаходяться границі пропорційності матеріалу. У разі появи у стержні пластичних деформації таку силу прийнято називати дійсною критичною силою P_{KP} .

При проектуванні стержнів та стержневих систем втрату стійкості стержнів обов'язково необхідно забезпечувати, надавая їм стійкість. У практиці спостерігалися значні катастрофи (руйнування великих залізничних мостів і інших інженерних споруд) внаслідок втрати стійкості стержнів конструкцій. Руйнування при поздовжньому згинанні особливо небезпечні, оскільки відбуваються зазвичай несподівано.

Якщо позначити небезпечну стискаючу силу $P_{нб}$ (P_e або $P_{кр}$), а силу, що допускається при експлуатації $P_{доп}$, то відношення $\frac{P_{нб}}{P_{доп}} > 1$ називається *коефіцієнтом запасу стійкості*. Запас стійкості для менш однорідних матеріалів береться вище, ніж для однорідних. Так, коефіцієнт запасу стійкості для дерев'яних конструкцій приймається рівним близько 2,5 і вище, для чавунних 5 - 6, а для сталевих 1,8 - 3.

10.2 Ейлерова сила і її обчислення при різних граничних умовах закріплення стержнів. Ейлерове напруження

Як вище зазначено, найменше значення центрально прикладеної стискаючої сили, при якій стан прямолінійної форми рівноваги стержня стає байдужим в пружній області деформування, називається *ейлеровою силою* P_e . У такій

постановці задача шарнірно обпертого в кінцевих перерізах призматичного стержня була вперше вирішена відомим механіком і математиком Леонардом Ейлером – членом Петербурзької Академії Наук – у 1744 році і тому її часто називають задачею Ейлера. Формулу для ейлерової сили можна отримати з диференціального рівняння пружної лінії стержня при поздовжньому згині (рис. 10.3) :

$$EIw(x)'''' = M(x), \quad (10.1)$$

де $M(x)$ – згинаючий момент у перерізі x стержня, рівний $M(x) = -P \cdot w(x)$; $w(x)$ – прогин стержня.

Інтегруючи рівняння (10.1) і визначаючи сталі інтегрування з граничних умов можливої криволінійної форми стержня, отримуємо *формулу Ейлера*:

$$P_e = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}, \quad (10.2)$$

де E – поздовжньої модуль пружності матеріалу; I_{min} – мінімальний момент інерції поперечного перерізу стержня відносно головної центральної осі інерції; l – довжина стержня.

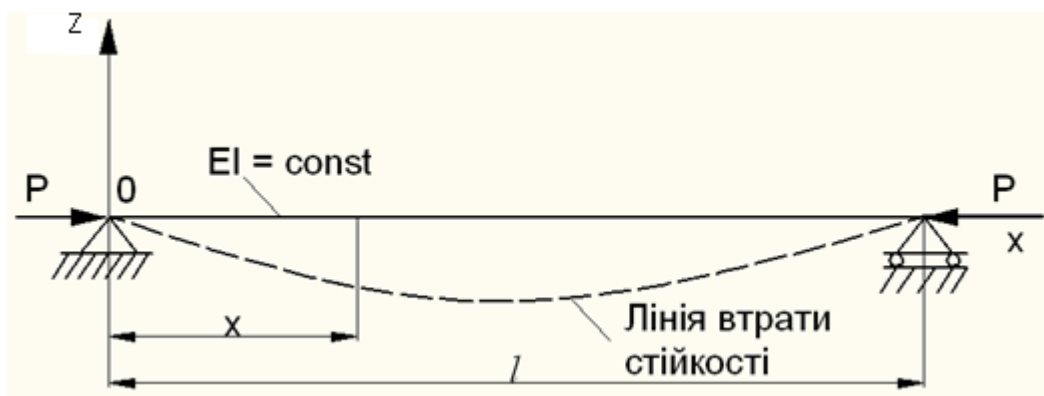


Рисунок 10.3 - Поздовжнє згинання центрально стисненого призматичного стержня

При втраті стійкості прямолінійної форми (викривленості стержня) згин відбувається, як правило, в площині, перпендикулярній до головної центральної осі інерції, відносно якої момент інерції мінімальний. Ця площина називається *площиною найменшої жорсткості* (рис. 10.4).

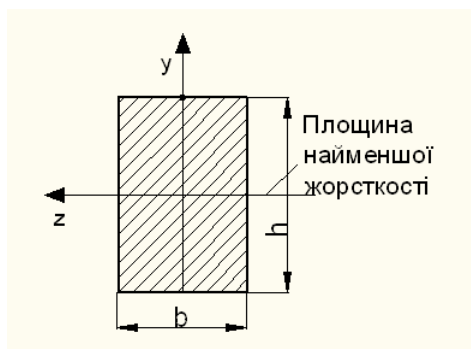


Рисунок 10.4 - Площина найменшої жорсткості для поперечного перерізу стержня прямокутної форми

Для прямокутного поперечного перерізу стержня (див. рис. 10.4) осьові центральні моменти інерції визначаються за формулами:

$$I_y = I_{min} = \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (10.3)$$

Таким чином, при поздовжньому згианні стержня (див. рис. 10.3) у момент втрати стійкості поперечний переріз стержня обертається навколо тієї осі, відносно якої момент інерції поперечного перерізу стержня мінімальний.

Значення ейлерової сили є *чисельною характеристикою* стійкості стержня при пружних деформаціях:

- при $P < P_e$ стержень стійкий;

при
 $P \geq P_e$ стержень втрачає стійкість прямолінійної форми.

Формула Ейлера (10.2) узагальнюється на інші випадки граничних умов стержня введенням поняття приведеної довжини стержня :

$$l_{пр} = \mu \cdot l, \quad (10.4)$$

де μ – коефіцієнт довжини запропонованою проф. Ясинським Ф.С., який залежить від умов закріплення кінців стержня (рис.10.5).

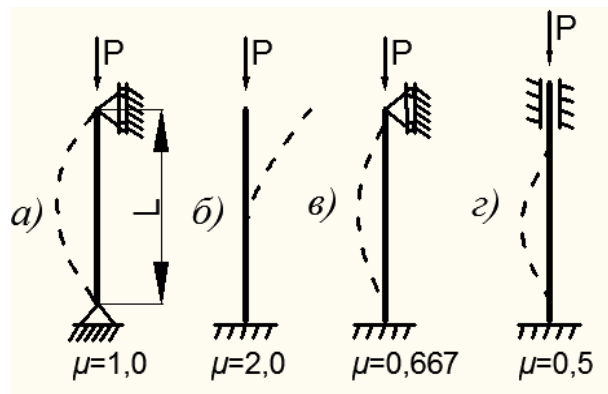


Рисунок 10.5 – Значення коефіцієнтів довжини залежно від граничних умов стержня

Тоді формула Ейлера набуде такого загального вигляду:

$$P_{\text{э}} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2}, \quad 10.5$$

Нормальні напруження, що відповідають ейлеровій силі, називається *ейлеровими напруженнями*:

$$\sigma_{\text{э}} = \frac{P_{\text{э}}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (10.6)$$

де λ – гнучкість стержня, яка визначається формулою

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}, \quad (10.7)$$

а i_{min} - мінімальний радіус інерції перерізу стержня

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}}. \quad (10.8)$$

З аналізу формул (10.5) і (10.6) можна вказати шляхи підвищення стійкості стержня :

- 1) використання матеріалів з більш високими пружними властивостями (E);
- 2) збільшенн осьового моменту інерції перерізу стержня (I_{min});
- 3) зменшення довжини стержня (l);
- 4) збільшення жорсткості опорних закріплень стержня (наприклад, при жорсткому затисненні кінців стержня σ_e збільшується в два рази в порівнянні з шарнірним опиранням).

10.3 Критичні напруження і способи їх визначення

Л. Ейлер при виведенні своєї формули для визначення критичної сили для стискаючого стержня (10.2), припускав, що матеріал стержня до пружний і підкоряється закону Гука.

Як відомо, такий закон справедливий тільки до тих пір, поки напруження в матеріалі не перевищує границі пропорційності. Отже, формула Ейлера для різних матеріалів повинна мати свої границі застосування. Вона справедлива тільки до тих пір, поки ейлерові напруження в стержні не перевищують границю пропорційності матеріалу: $\sigma_e \leq \sigma_{пц}$.

Аналіз формули (10.6) показує, що ейлерові напруження залежить від геометричних параметрів стержня, які уособлюються його гнучкістю λ . Так, для коротких стержнів ейлерове напруження (10.6) може виявитись вище границі пропорційності. Тому для таких стержнів формула Ейлера не справедлива, бо дає завищені значення P_e .

Область застосування формули (10.6) знайдемо, прирівнявши σ_e і $\sigma_{пц}$:

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{гр}^2} = \sigma_{пц},$$

де $\lambda_{гр}$ - граничне значення гнучкості стержня, що показує границю справедливості формули Ейлера з точки зору геометричних параметрів стержня, звідки

$$\lambda_{гр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (10.9)$$

Так, формула Ейлера (10.6) справедлива при

$$\lambda \geq \lambda_{пр} \quad (10.10)$$

За даними механічних характеристик матеріалів знайдемо наближені граничні значення гнучкості для сталі $\lambda_{гр} \approx 100$; для чавуну $\lambda_{гр} \approx 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{гр} \approx 75$; для дюралюмінію $\lambda_{гр} \approx 60$.

При меншій гнучкості від $\lambda_{гр}$, втрата стійкості стержня відбувається в області появи пластичних деформацій, де порушується закон Гука і не можна користуватись формулами

Ейлера (10.5) і (10.6). В цьому випадку використовуються наближені $\sigma_{кр}$.

Дійсне критичне напруження у суднобудуванні для суднокорпусних сталей визначається за узагальненим графіком акад. Ю.А. Шиманського (рис. 10.6). Визначивши ейлерове напруження σ_e за формулою (10.6) і знаючи границю плинності матеріалу σ_s , за графіком знаходять величину $\sigma_{кр}$:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_s} \rightarrow \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_s} \rightarrow \sigma_{кр}.$$

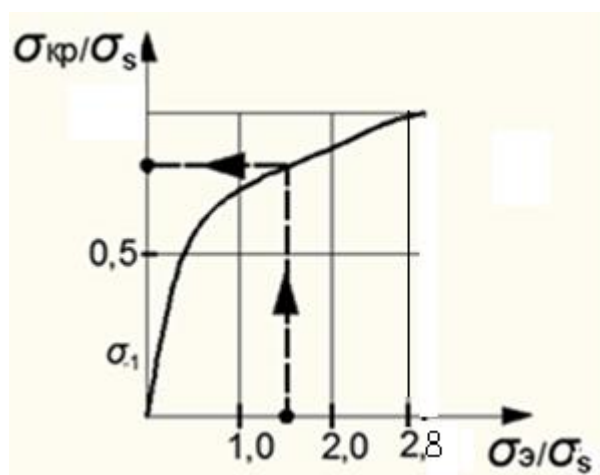


Рисунок 10.6 – Узагальнений графік акад. Ю.А. Шиманського для визначення дійсного критичного напруження

У машинобудуванні критичне напруження обчислюють за емпіричною формулою проф. Ф.С. Ясинського:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2, \quad (10.11)$$

де a , b , c – коефіцієнти в розмірності напруження, які залежать від матеріалу і приймаються за довідковими даними.

Для сталевих і дюралюмінієвих стержнів формула Ясинського застосовна при гнучкостях λ , що знаходяться в діапазоні

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{гр}}, \quad (10.12)$$

де λ_0 - значення гнучкості, при якому критичне напруження дорівнює границі плинності матеріалу стержня. При гнучкості, меншій λ_0 , критичне напруження приймається сталим і рівним границі плинності.

Певні значення довідкових коефіцієнтів для різних матеріалів наступні:

- для сталі $a = 33 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $b = 0,114 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $c = 0$; $\lambda_0 = 59$;
- для дюралюмінію $a = 40,6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $b = 0,283 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $c = 0$; $\lambda_0 = 30$;
- для дерева (сосна, ялина)
 $a = 2,93 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $b = 0,0194 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $c = 0$.
- для чавуну $a = 77,6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $b = 1,2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$; $c = 0,0053 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

Співвідношення ейлерових і дійсних критичних напружень в різних областях деформацій такі:

а) в пружній області $\sigma_e = \sigma_{\text{кр}}$;

б) в області пластичних деформацій $\sigma_{\text{кр}} < \sigma_e$.

Дійсна критична сила обчислюється за формулою

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot F. \quad (10.13)$$

Допустимі напруження при поздовжньому згинанні $\sigma_{\text{доп}}$ до границі пропорціональності і за границею пропорціональності залежать від матеріалу і гнучкості стержня. Такі допустимі напруження можна розглядати як деяку частину φ від допустимих напружень при простому стисканню σ . Тоді

$$\sigma_{\text{доп}} = \varphi \sigma \quad (10.14)$$

Коефіцієнт φ завжди менше одиниці. Він називається *коефіцієнтом зменшення основних допустимих напружень* для стислих стержнів. Коефіцієнт φ залежить від гнучкості стержня λ і матеріалу. Таким чином, вводячи коефіцієнт φ , поздовжній згин можна проводити як і у разі простого стискання, але зі зменшенням допустимих напружень при стисканні стержнів.

Значення коефіцієнта φ залежно від гнучкості стержня λ і для основних конструкційних матеріалів наводяться в таблиці 10.1:

Таблиця 10.1 - Значення коефіцієнта φ при поздовжньому згинанні стержня

Гнучкість, λ	Матеріал			
	Сталь, $\sigma_s < 300$ МПа	Сталь $\sigma_s \geq 300$ МПа	Чавун	Деревина
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,97	0,95	0,91	0,97
30	0,95	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,84	0,57	0,80
60	0,86	0,78	0,44	0,71

Продовження табл. 10.1

70	0,81	0,71	0,34	0,60
80	0,75	0,63	0,26	0,48
90	0,69	0,54	0,20	0,38

100	0,60	0,46	0,16	0,31
110	0,52	0,39	-	0,25
120	0,45	0,33	-	0,22
130	0,40	0,29	-	0,18
140	0,36	0,25	-	0,16
150	0,32	0,23	-	0,14
160	0,29	0,21	-	0,12
170	0,26	0,19	-	0,11
180	0,23	0,17	-	0,10
190	0,21	0,15	-	0,09
200	0,19	0,13	-	0,08

Виділяють два основних типи розрахунку при повздовжньому згинанні: визначення допустимого рівня навантажень і підбір перерізу стержня.

10.4 Рішення типових задач за розрахунком стійкості стержнів. Завдання для індивідуальної роботи

Приклад 10.1. *Розрахунок допустимої величини навантаження стискуючого стержня.* Визначити величину стискуючої сили $P_{\text{доп}}$ навантаження для стійки з шарнірним закріпленням кінців (рис. 10.7, а) і прямокутною формою поперечного перерізу (рис. 10.7, б). Матеріал стійки Ст.3, допустиме напруження при стисканні $\sigma = 160$ МПа, коефіцієнт запасу стійкості $k = 2$.

Рішення

Такий тип задачі рекомендується вирішувати в такій послідовності:

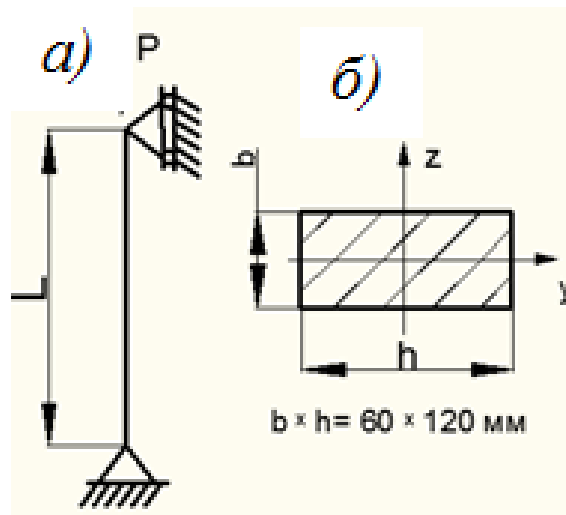


Рисунок 10.7- Стійка при поздовжньому згинанні

1. Визначається площа поперечного перерізу стійки :

$$F = b \cdot h = 6 \cdot 12 = 72 \text{ см}^2.$$

2. Розрахується величина мінімального моменту інерції перерізу стійки за формулою (10.3) :

$$I_y = I_{min} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 216 \text{ см}^4.$$

3. Визначається мінімальний радіус поперечного перерізу стійки за виразом (10.8) :

$$i_{min} = \frac{\overline{I_{min}}}{\overline{F}} = \frac{216}{72} = 1,732 \text{ см.}$$

4. Знаходиться гнучкість стійки (10.7), прийнявши коефіцієнт довжини для граничних умов стійки $\mu = 1,0$ (див. рис. 10.5, а)

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 200}{1,732} = 115,5.$$

Оскільки гнучкість стійки більше граничної гнучкості для сталевих матеріалів $\lambda = 115,5 > \lambda_{гр} = 100$, то критичну стискаючу силу можна розрахувати за формулою Ейлера (10.5) :

$$P_e = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 216}{(1 \cdot 200)^2} = 1065 \text{ кН.}$$

5. Розраховується величина допустимого стискаючого навантаження для стійки, як відношення ейлерової сили до заданого коефіцієнту запасу стійкості :

$$P_{доп} = \frac{P_e}{k} = \frac{1065}{2} = 532,5 \text{ кН.}$$

Таким чином, в роботі стійки величину стискаючого навантаження не слід допускати більше $P_{доп} = 532,5 \text{ кН.}$

Величину допустимого навантаження можна визначити також з використанням коефіцієнта зменшення допустимого напруження при стисканні φ :

$$P_{доп} = \varphi \cdot F \cdot \sigma ,$$

де коефіцієнт φ залежить від величини гнучкості λ і матеріалу стійки. Для сталі з $\sigma_T < 300 \text{ МПа}$ приймається рівним $\varphi = 0,475$ (використовується інтерполяція значень таблиці. 10.1).

Тоді

$$P_{доп} = 0,475 \cdot 72 \cdot 16 = 547,2 \text{ кН.}$$

Як видно з розрахунків, величини допустимих навантажень за різними підходами, виявились близькими, що цілком прийнятно для практичних розрахунків.

Приклад 10.2. Розрахунок допустимого навантаження стиснутого стержня. Визначити допустиму стискаючу силу для стержня із сталі Ст.3 завдовжки $l = 30$ см і діаметром стержня $d = 1$ см, якщо верхній кінець стержня шарнірно опертий, а нижній затиснений. Допустимі напруження при стисканні $\sigma = 160$ МПа. Коефіцієнт запасу стійкості $k = 2$.

Рішення

1. Розраховується площа поперечного перерізу стержня :

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1^2}{4} = 0,785 \text{ см}^2.$$

2. Визначається момент інерції перерізу відносно центральної осі :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05 \cdot d^4 = 0,05 \cdot 1^4 = 0,05 \text{ см}^4.$$

3. Розраховується радіус інерції перерізу стержня :

$$i = \frac{\overline{I}}{\overline{F}} = \frac{0,05}{0,785} = 0,25 \text{ см.}$$

4. Визначається гнучкість стержня, якщо прийнято коефіцієнт приведеної довжини стержня $\mu = 0,7$ (див. рис. 10.5, в) :

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{0,667 \cdot 30}{0,25} = 80.$$

Так як гнучкість стержня менша граничної величини $\lambda_{\text{гр}} = 100$, то для цього стержня критичну стискаючу силу не можна визначати за формулою Ейлера. Розрахуємо її, користуючись таблицею коефіцієнтів φ (див. таблицю.10.1). Для

гнучкості $\lambda = 80$ і матеріалу стержня (сталь з $\sigma_T < 300$ МПа) коефіцієнт зменшення допустимого напруження $\varphi = 0,75$.

Допустиме напруження при поздовжньому згинанні стержня визначиться як

$$\sigma_{\text{доп}} = \varphi \sigma = 0,75 \cdot 160 = 120 \text{ МПа.}$$

Розраховується допустима сила при стисканні стержня:

$$P_{\text{доп}} = \sigma_{\text{доп}} \cdot F = 12 \cdot 0,785 = 9,42 \text{ кН.}$$

Величину допустимого навантаження при стисканні можна також визначити, скориставшись формулою Ясинського (10.11), яка застосовується для критичних напружень при втраті стійкості стержня за границею пропорційності. Приймавши в цій формулі

для сталі (див. п.10.3) $a = 33 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, $b = 0,114 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$,

$c = 0$, з врахуванням $\lambda = 80 > \lambda_0 = 30$, отримаємо:

$$\sigma_{\text{кр}} = 33 - 0,114 \cdot 80 = 23,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Тоді допустиме навантаження, при стискуванні стержня буде

$$P_{\text{доп}} = \frac{P_{\text{кр}}}{k} = \frac{\sigma_{\text{кр}} \cdot F}{k} = \frac{23,9 \cdot 0,785}{2} = 9,33 \text{ кН.}$$

Отриманий результат практично співпадає з попереднім $P_{\text{доп}} = 9,42 \text{ кН.}$

Приклад 10.3. *Підбір перерізу стержня.* Підібрати переріз сталеві (Ст 3) двугаврової стійки (рис.10.8, а) завдовжки $l = 8$ м, яка стискається силою $P = 1200$ кН, якщо допустиме напруження $\sigma = 160$ МПа.

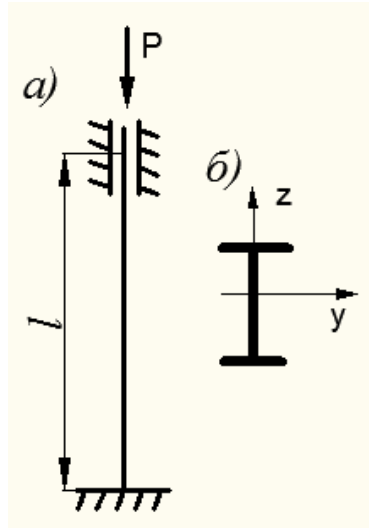


Рисунок 10.8 – Двугаврова стійка, що стискається

Рішення

1. Необхідна площа поперечного перерізу стійки визначається за формулою

$$F_{\text{необ}} \geq \frac{P}{\varphi \sigma},$$

де φ - коефіцієнт зменшення допустимого напруження, який невідомий і його у першому наближенні можна прийняти $\varphi = 0,60$.

2. По таблиці сортаменту (див. Додаток Ж) вибираємо найближчий номер двугавра - №60, площа перерізу якого

$F_1 = 131 \text{ см}^2$, мінімальний радіус інерції перерізу

$i_{\min} = 3,62 \text{ см}$ (викривлення стійки відбувається у напрямі осі y , оскільки момент інерції перерізу відносно цієї осі I_y значно менше моменту інерції I_z (див. рис. 10.8, б).

Для вибраного двугавра при $\mu = 0,5$ визначимо:

гнучкість тержня (див. рис. 10.5 з)

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{0,5 \cdot 800}{3,62} = 110;$$

– коефіцієнт зменшення допустимого напруження (див. табл. 10.1) $\varphi_1 = 0,52$;

– допустиме напруження при поздовжньому згинанні

$$\sigma_{доп1} = \varphi_1 \sigma = 0,52 \cdot 160 = 83,2 \text{ МПа} = 8,32 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

3. Розраховуємо стискаюче напруження в стійці:

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = \frac{1200}{131} = 9,18 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} > \sigma_{доп} = 8,32.$$

Так як $\sigma_1 > \sigma_{доп1}$, стійкість стержня не забезпечена і необхідно вибрати у другому наближенні номер двотавра із більшою площею. Вибираємо двотавр №65.

4. Нові показники прийнятого двотавра №65 за сортаментом :

$$F_2 = 151 \text{ см}^2, i_{min} = 3,79 \text{ см}.$$

Тоді гнучкість стійки

$$\lambda_2 = \frac{0,5 \cdot 800}{3,79} = 105;$$

– коефіцієнт $\varphi_2 = 0,56$ (див. таблицю.10.1);

– допустиме напруження

$$\sigma_{доп2} = \varphi_2 \sigma = 0,56 \cdot 160 = 89,6 \text{ МПа} = 8,96 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

5. Розраховуємо нові стискаючі напруження для вибраного двотавра:

$$\sigma_2 = \frac{P}{F_2} = \frac{1200}{151} = 7,96 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < \sigma_{доп2} = 8,96 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Так як $\sigma_2 < \sigma_{\text{доп}_2}$, стійка виявилася недовантаженою на 11,2%. Але з вибраним двотавром №65 можна погодитись, оскільки найближчий менший двутавр, як було встановлено, недостатній.

Завдання для індивідуальної роботи

Задача 10.1. Перевірити на стійкість соснову стійку (рис.10.9), якщо стискаюча сила $P = 100 \text{ кН}$, довжина стійки $l = 4 \text{ м}$, розміри перерізу стійки $a \times a = 120 \times 120 \text{ мм}$, допустиме напруження на стискування $\sigma = 10 \text{ МПа}$.

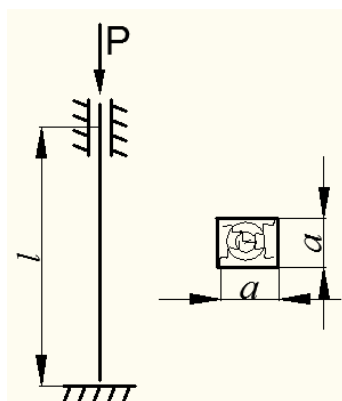


Рисунок 10.9

Завдання 10.2. Визначити допустиме навантаження стискання на стержень (рис.10.10), якщо його довжина $l = 1,8 \text{ м}$, розміри прямокутного поперечного перерізу $b \times h = 30 \times 60 \text{ мм}$, матеріал стержня сталь Ст.3, коефіцієнт запасу стійкості $k = 3$.

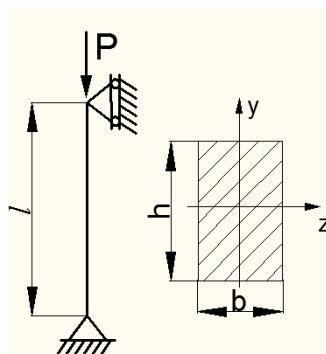


Рисунок 10.10

Завдання 10.3. Стійка двутаврового перерізу з шарнірним закріпленням кінців (рис.10.11) завдовжки $l = 2,4$ м стискається осьовою силою $P = 300$ кН. Підібрати необхідний номер двутавра, якщо допустиме напруження $\sigma = 160$ МПа.

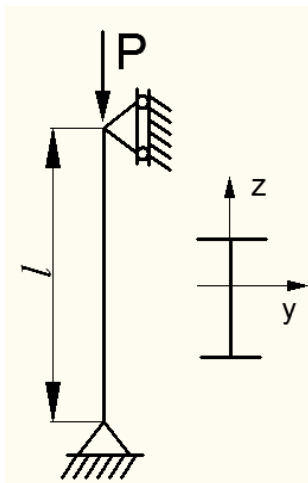


Рисунок 10.11

11 МІЦНІСТЬ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

11.1 Поняття про динамічну дію навантаження на елементи конструкцій. Сили інерції

Досі в усіх розглянутих нами задачах приймалось, що діючі навантаження є статичними, які повільно зростають від нуля до свого кінцевого значення і не змінюються з часом.

На практиці деталей машин і конструкцій часто сприймають змінні у часі навантаження. В таких випадках згадані тіла при русі і їх точки при деформуванні тіл отримують прискорення, які призводять до виникнення додаткових сил інерції. Від цих змінних у часі навантажень в тілах виникають так звані динамічні деформації і напруження.

Прикладами динамічних навантажень є дія морських хвиль на конструкції корпусів суден, нерівномірний рух поршня в циліндрі під час роботи суднової силової установки, дія падаючої "баби" при забиванні в ґрунт свай або молотка на виковувану деталь і ковадло, вибух порошу в стволі зброї та ін.

Динамічний розрахунок має за мету забезпечити необхідну міцність деталей або елементів конструкцій і не допустити значних їх деформацій.

Як відомо з теоретичної механіки, задачі динаміки можна вирішувати на основі принципу Даламбера, суть якого полягає в існуванні положення рівноваги для рухомої системи (точки) в будь-який момент часу. Сили інерції матеріальної точки

дорівнюють добутку маси цієї точки на її прискорення і спрямовані убік, протилежний напрямку прискорення.

Прикладом використання цього принципу є підняття вантажу на ланцюзі або тросі з прискоренням. Для розрахунку зусиль в ланцюзі (тросі) в цьому випадку мають бути враховані не лише вага переміщуваного вантажу, але і сили інерції від руху вантажу. Ці сумарні навантаження можуть бути значно більшими, від ваги самого вантажу.

У тих випадках коли виникають труднощі із визначенням прискорень (сил інерції), як, наприклад, в момент зіткнення падаючого на систему вантажу при ударі, для динамічних розрахунків використовують закон збереження енергії.

11.2 Визначення динамічних напружень і переміщень при ударі

Розглянемо будь-яку нерухому затиснену пружну систему, на яку з висоти h падає вантаж вагою P (рис.11, *а-г*). Пройшовши шлях h , вантаж, що рухається з деякою швидкістю, приходить в зіткнення з нерухомою системою. Це явище називається *ударом*. При вивченні такого явища в опорі матеріалів використовується *технічна теорія удару*, яка ґрунтується на наступних припущеннях:

а) при співударі зменшення кінетичної енергії падаючого вантажу дорівнює збільшенню потенційної енергії деформації тіла, що зазнає удару;

б) удар є не пружним, тобто вантаж після зіткнення з конструкцією рухається спільно з нею;

в) напруження в стержні при ударі не перевищують межі пропорційності, а тому при вивченні удару можна використовувати закон Гуку;

г) деформації в тілі, що зазнає удару, поширюються миттєво.

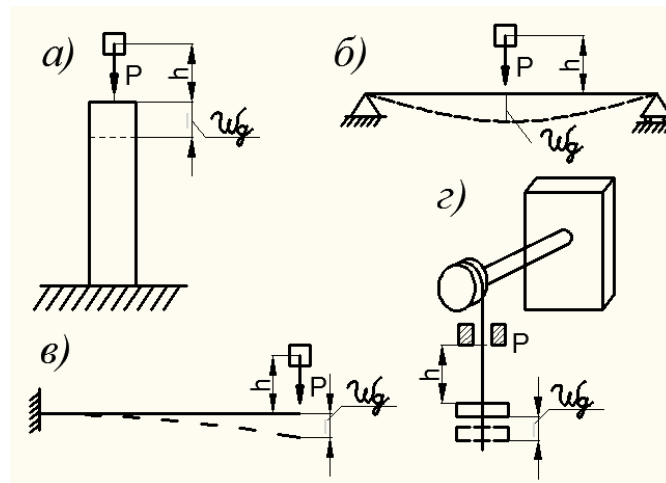


Рисунок 11.1 – Приклади систем, що зазнають удару

Система, що зазнає удару, може отримувати різні види деформацій: стискування (рис. 11.1, а); згинання (рис. 11.1, б, в); кручення із згинанням (рис. 11.1, г).

Метою розрахунку цих систем на удар є визначення напружень і переміщень, що виникають в результаті удару.

Наближена теорія удару припускає визначення динамічних напружень σ_d і переміщень w_d внаслідок удару через статичні напруження $\sigma_{ст}$ і переміщення $w_{ст}$ від статично прикладеної сили P через коефіцієнт динамічності k_d за формулами

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{ст}; \quad (11.1)$$

$$\omega_d = k_d \cdot \omega_{ст}. \quad (11.2)$$

Як видно з формул (11.1) і (11.2), коефіцієнт динамічності показує, в скільки разів динамічне напруження або переміщення більші за статичне ($k_d > 1$).

Коефіцієнт динамічності при ударі без урахування власної маси конструкції, що піддається удару, розраховується за формулою:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\omega_{ст}^2}}, \quad (11.3)$$

де h – висота падіння ударяючого вантажу.

В окремому випадку при миттєвому прикладенні сили $h = 0$ $k_d = 2$. Отже, при раптовій ударній дії як напруження, так і переміщення будуть удвічі більше, ніж при статичній дії навантаження.

11.3 Рішення типових задач при дії ударного навантаження. Індивідуальні завдання для розрахунку міцності при ударі

Приклад 11.1. Сталевий стержень круглого поперечного перерізу діаметром $d = 20$ мм і завдовжки $l = 1$ м розтягується вантажем, що подає з висоти $h = 200$ мм, масою $m = 12,5$ кг (рис. 11.2). Визначити динамічне напруження і подовження стержня.

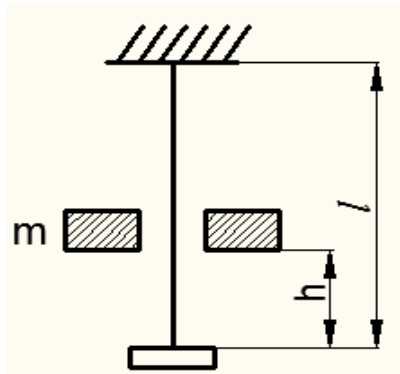


Рисунок 11.2 – Стержень, що зазнає ударного навантаження

1.Динамічне напруження в стержні при падінні вантажу дорівнює:

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{ст},$$

де $\sigma_{ст}$ – статичне напруження в стержні від статично прикладеного вантажу; k_d – коефіцієнт динамічності.

2.Статичне напруження розтягування від вантажу обчислюється за формулою

$$\sigma_{ст} = \frac{P}{F},$$

де P – сила ваги вантажу m ; F – площа поперечного перерізу стержня;

$$P = m \cdot g = 12,5 \cdot 9,8 = 125 \text{ Н} = 125 \cdot 10^{-3} \text{ кН};$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_{ст} = \frac{125 \cdot 10^{-3}}{3,14} = 39,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

3. Коефіцієнт динамічності розраховується за формулою

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{\text{ст}}}},$$

де $w_{\text{ст}}$ – переміщення стержня від статично прикладеного вантажу.

$$w_{\text{ст}} = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} = \frac{125 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^4 \cdot 3,14} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ см};$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20}{2 \cdot 10^4}} = 449.$$

Тоді динамічне напруження в стержні від падіння вантажу

$$\sigma_d = 449 \cdot 39,8 \cdot 10^{-3} = 17,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

а видовження стержня від падіння вантажу

$$w_d = k_d \cdot w_{\text{ст}} = 449 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 0,0898 \text{ см} = 0,898 \text{ мм}.$$

Приклад 11.2. На балку, складену з двох сталевих двотаврів ($I_{\text{min}} = 23800 \text{ см}^4, W = 721 \text{ см}^3$) прогоном $l = 2,4 \text{ м}$, подає вантаж $P = 20 \text{ кН}$ з висоти $h = 2 \text{ м}$ (рис. 11.3). Перевірити міцність балки, якщо допустиме напруження $\sigma = 28 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

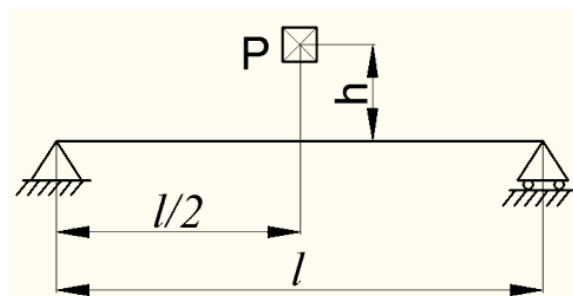


Рисунок 11.3 – Балка, що зазнає ударного навантаження

Рішення

1. Статичний прогин балки від вантажу дорівнює:

$$w_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EI_{\min}} = \frac{20 \cdot (240)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 23600} = 0,0121 \text{ см.}$$

2. Статичне найбільше напруження балки посередині прогону від сили P :

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{4 \cdot W} = \frac{20 \cdot 240}{4 \cdot 721} = 1,66 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

3. Коефіцієнт динамічності

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 200}{0,0121}} = 16,6.$$

4. Динамічне напруження у балці дорівнює:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}} = 16,6 \cdot 1,66 = 27,6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < \sigma = 28 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Отже, міцність балки при ударі забезпечена, оскільки динамічне напруження менше допустимого.

Завдання для індивідуальної роботи

Задача 11.1. На жорсткий диск сталевого стержня діаметром d і завдовжки l падає вантаж вагою Q з висоти h (рис. 11.4). Порівняти напруження, що виникають в поперечному перерізі стержня при статичній дії сили та при її раптовому прикладенні ($h = 0$) і при падінні вантажу з висоти h . Вихідні дані: $l = 60$ см; $d = 3$ см; $Q = 0,4$ кН; $h = 10$ см.

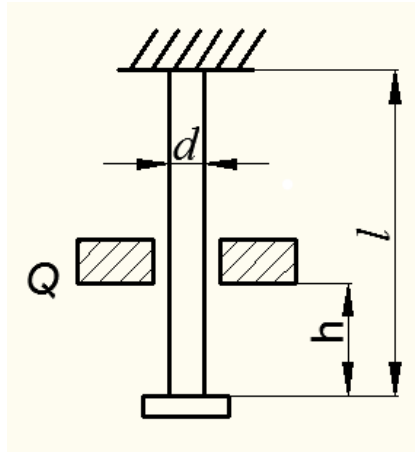


Рисунок 11.4

Задача 11.2. На двутаврову балку №18а (див. Додаток Ж) прольотом $l = 6$ м падає вантаж $Q = 1$ кН з висоти $h = 5$ см (рис.11.5). Визначити максимальне нормальне напруження в небезпечному перерізі балки, а також величину прогину посередині прогону.

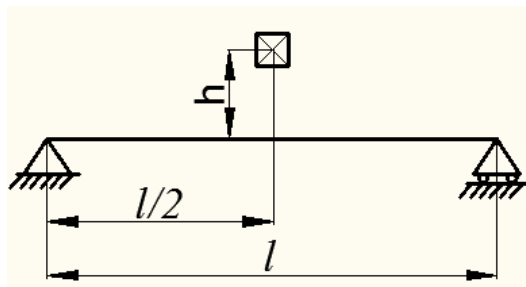


Рисунок 11.5

12 ДОДАТКОВІ ПИТАННЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

12.1 Явище концентрації напружень

Таке явище обумовлено різкою зміною поперечних перерізів тіл. *Концентрацією напружень* називається різке підвищення напружень невеликої області тіла. Місця концентрації напружень називаються *концентраторами* (наприклад, біля отворів, канавок, викружок).

Покажемо явище концентрації напружень на прикладі пластини з круглим отвором (рис.12.1) при її розтягуванні.

У перерізі 1-1, віддаленому від отвору і торця, розподіл нормальних напружень буде рівномірним по ширині пластини і рівним

$$\sigma = \frac{P}{F}, \quad (12.1)$$

де P – величина розтягуючої сили; F – площа поперечного перерізу пластини.

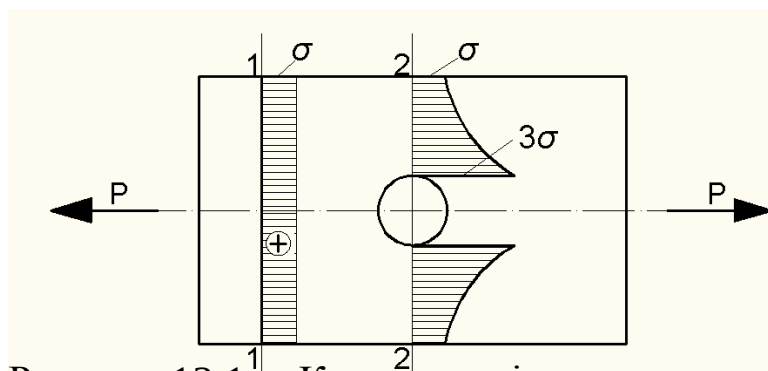


Рисунок 12.1 – Концентрація напружень в пластині з круговим отвором

У перерізі 2-2, що проходить через центр отвору, розподіл напружень є нерівномірним. при досить великій ширині пластини напруження на її кромці будуть дорівнювати σ , а у самого отвору - 3σ , тобто різко збільшуються.

Рівень концентрації напружень характеризується *теоретичним коефіцієнтом концентрації*

$$k_T = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_H}, \quad (12.2)$$

де σ_{max} - максимальна напруження у кромки концентратора;
 σ_H - напруження далеко від концентратора.

Для круглого отвору $k_T = 3,0$, для еліптичного, з розташуванням для більшої півосі перпендикулярно до напрямку дії розтягуючої сили P , ще більше. Величина k_T визначається теоретично і експериментально. У довідковій літературі є дані про величину k_T залежно від виду концентратора.

У розрахунках міцності деталей машин і елементів конструкцій з концентраторами напружень значення σ спочатку визначається без урахування явища концентрації (номінальне напруження), а потім з урахуванням величини k_T розраховуються максимальні напруження у концентратора з подальшою перевіркою міцності :

$$\sigma_{max} = k_T \cdot \sigma_H \leq \sigma . \quad (12.3)$$

Значна концентрація напружень особливо небезпечна для деталей машин і елементів конструкцій з крихких матеріалів, які руйнуються, в основному, в пружній області. Також концентрація напружень небезпечна для пластичних матеріалів (наприклад, для

сталі) в області низьких температур, коли з'являється тенденція до їх охрупчування. Для пластичних матеріалів в звичайних температурних умовах концентрація напружень менш небезпечна, оскільки при досягненні границі плинності відбувається перерозподіл (вирівнювання) епюри σ .

12.2 Втомна міцність деталей машин і елементів конструкцій

Більше 100 років тому було помічено, що деталі машин і елементи конструкцій, в яких тривалий час діють змінні напруження (наприклад, при змінному навантаженні типу розтягування-стискування), можуть зруйнуватись без помітних пластичних деформацій. У найбільш напруженому місці деталі, зазвичай в районі концентрації напружень відбуваються зміни фізико-механічних властивостей матеріалу, з'являються мікротріщини, які розвиваються і, охоплюючи весь переріз деталі, призводять до її руйнування у вигляді зламу. Це явище руйнування матеріалу (властиво, в основному, металам) називається *втомою матеріалу*.

Спроможність матеріалу сприймати повторно-змінні напруження без руйнування, які чинять опір руйнуванню, називається *витривалістю*.

Найбільше напруження циклу навантаження, при якому не відбувається втомного руйнування матеріалу після великої кількості повторень змінних напружень, називається *границею*

витривалості σ_r . Індекс r вказує на характеристику симетрії циклу напружень, тобто на *коефіцієнт симетрії*

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}, \quad (12.4)$$

де $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ - відповідно максимальні і мінімальні величини циклу напружень (рис.12.2).

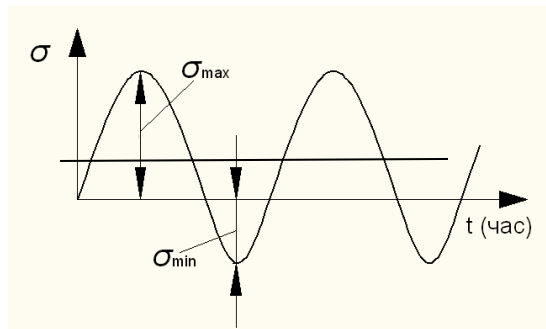


Рисунок 12.2 – Цикли напружень матеріалу

Залежно від значення r розрізняють такі цикли напружень:

1) *симетричний цикл*, коли найбільше і найменше напруження однакові за величиною і протилежні за знаком, ($r = -1$, границя витривалості σ_{-1});

2) *несиметричний (асиметричний) цикл* при різних за величиною найбільшого і найменшого напруження, $-1 < r < 1$, границя витривалості σ_r . При цьому використовуються поняття:

- амплітудного напруження

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}; \quad (12.5)$$

- середнього напруження

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad (12.6)$$

- розмаху напружень $\Delta\sigma = 2\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{min}$.

3) *віднульовий цикл*, у якого мінімальні напруження дорівнюють нулю ($r=0$, границя витривалості σ_0).

Границя витривалості за нормальними σ_R і аналогічно дотичними τ_R є основною характеристикою міцності матеріалів при змінному навантаженні. При симетричному циклі напружень границя витривалості має найнижче значення і тому такий цикл є найбільш небезпечним. Величина σ_{-1} і τ_{-1} визначається експериментально шляхом випробувань m однакових гладких (без концентраторів) зразків при доведенні їх змінним навантаженням до зламу при трьох видах деформування: осьове розтягнення-стискання, згинання і кручення. Кожен зразок випробовується зі зменшенням величин σ_{max} (τ_{max}) у порівнянні з попереднім експериментом і збільшеним при цьому числом циклів N до руйнування зразка. У результаті будується *крива витривалості*, асимптотичним значенням якої або близьким до нього буде границя витривалості σ_{-1} (рис.12.3).

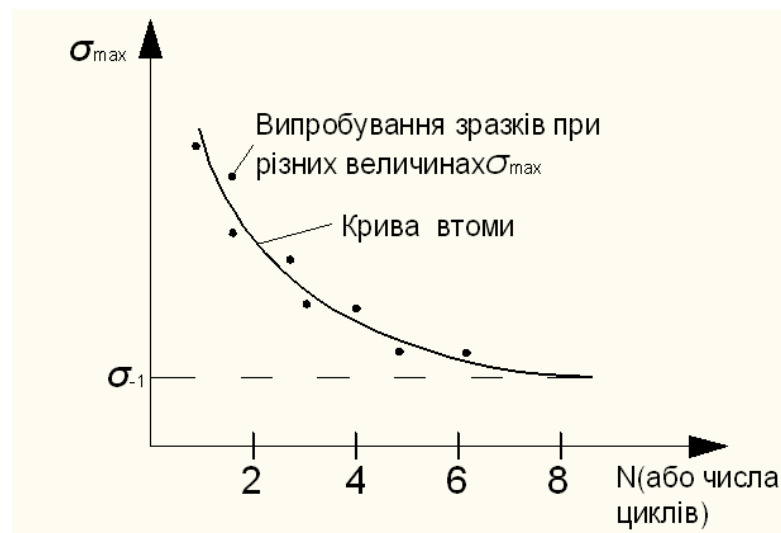


Рисунок 12.3 - Крива витривалості матеріалу

Орієнтовні значення границі витривалості сталей такі:

а) $\sigma_{-1} \approx 0,25 - 0,28 \sigma_B$ при осьовому розтягненні – стисканні;

б) $\sigma_{-1} \approx 0,4\sigma_B$ при згинанні;

в) $\tau_{-1} \approx 0,22\sigma_B$ при крученні

де σ_B – границя міцності матеріалу.

На величину границі витривалості впливає ряд чинників:

а) *концентрація напружень* (отвори, надрізи, виточки) з введенням поняття *ефективного коефіцієнта концентрації напруження* :

$$k_\sigma = 1 + q (k_T - 1) , \quad (12.7)$$

де q - *коефіцієнт чутливості матеріалу до концентрації напруження*; k_T – теоретичний коефіцієнт концентрації (у довідковій літературі є графіки наближених значень q для матеріалів залежно від коефіцієнта k_T з різними типами концентраторів і матеріалів);

б) *масштабний чинник*, який відображає зменшення границі витривалості зі збільшенням розмірів деталі (наводиться в спеціальній літературі, наприклад, відношення границі витривалості зразка з виточкою до границі витривалості зразка без виточки діаметром 7 мм);

в) *стан і якість поверхні деталі*, що враховується за допомогою *коефіцієнта якості поверхні* $\varepsilon_T = \sigma_{-1п} / \sigma_{-1}$, як відношення границі витривалості зразка із заданою поверхнею при симетричному циклі вантаження $\sigma_{-1п}$ до границі витривалості

такого ж зразка з полірованою поверхнею σ_{-1} (значення цього коефіцієнту наводяться у спеціальній літературі).

Розрахунки на міцність при змінних напруженнях ґрунтуються на перевірці наступної умови в небезпечному перерізі деталі:

$$n > n , \quad (12.8)$$

де n - фактичний коефіцієнт запасу міцності;

n – допустимий коефіцієнт запасу міцності.

Значення n встановлюються нормативними документами.

Фактичний коефіцієнт запасу міцності залежить від таких чинників:

- границі плинності матеріалу;
- найбільшого амплітудного напруження циклу вантаження;
- границі витривалості матеріалу при симетричному циклі напружень;
- ефективного коефіцієнта концентрації напружень деталі;
- коефіцієнтів урахування впливу масштабного чинника, стану і якості поверхні деталі.

У спеціальній літературі можна знайти емпіричні (наближені) залежності, що враховують вплив перерахованих чинників на коефіцієнт запасу міцності n .

Більшість поломок деталей машин походять від витривалості матеріалу. Тому практичне значення мають заходи щодо підвищення втомної міцності і довговічності деталей. Основними з них є як конструктивні, так і технологічні.

Конструктивні заходи зводяться в основному до зменшення концентрації напружень в місцях, де зазвичай виникають втомні тріщини, що ведуть до поламки деталей і елементів конструкцій. Для зменшення концентрації напруження застосовують:

- а) скруглення кутів, використання в цих місцях потовщених накладок для елементів конструкцій;
- б) уварювання поясоків по контуру вирізів в елементах конструкцій;
- в) збільшення радіусів закруглень в галтелях (виточках) валів, осей і інших деталей;
- г) фрезерування вхідного кута канавки шпонки;
- д) збільшення діаметру валу під насадженою на нього втулкою та ін.

Технологічні заходи в деталях машин спрямовані, в основному, на захисті від корозії, яка знижує втомну міцність, а також в використанні глибокої механічної обробки поверхні деталей та зміцненні поверхні. Для цих цілей застосовують:

- а) шліфовку поверхні і спеціальну механічну обробку (термічну, термохімічну);
- б) нанесення зміцнених покриттів поверхні деталей.

12.3 Короткі відомості про повзучість і релаксацію матеріалів

Повзучістю називається спроможність матеріалу деформуватися в часі під дією постійних навантажень.

Явище повзучості властиво таким матеріалам, як бетон, полімери, деревина. Метали і їх сплави також виявляють цю властивість деформації, яка стає особливо помітною при високій температурі, а в кольорових металах (свинець, мідь та ін.) навіть при кімнатній температурі.

Чинник повзучості має істотне значення для роботи конструкцій. Досить відмітити, що напруження в арматурі залізобетонних конструкцій може в процесі повзучості збільшитися в 2-2,5 раз, а переміщення – в 3-4 рази. У машинобудуванні відомі випадки, коли сталеві котельні труби руйнувалися під дією внутрішнього тиску внаслідок повзучості матеріалу. На рис.12.4 показано руйнування труби із-за повзучості матеріалу (пунктиром на рисунку нанесені первинні розміри поперечного перерізу труби, що змінюються).

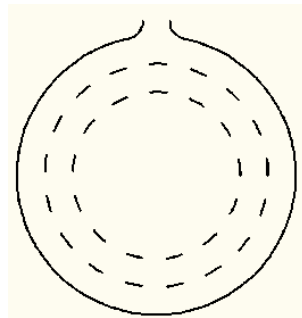


Рисунок 12.4 - Руйнування труби із-за повзучості матеріалу

Деформація повзучості ε може розглядатися як дуже повільна плинність матеріалу. Схематично *діаграму повзучості* можна зображувати спрощеною залежністю $\varepsilon = f t$, де t - час деформації матеріалу при повзучості (рис.12.5).

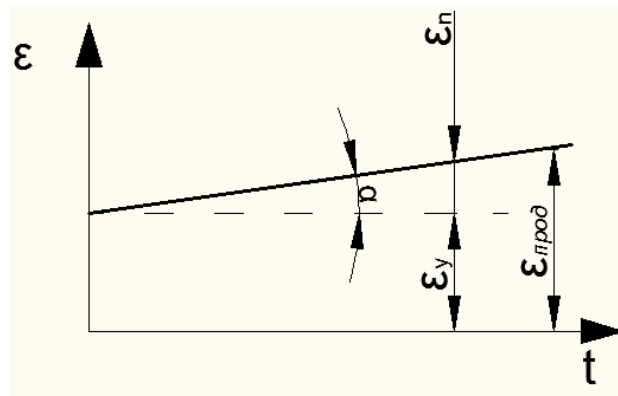


Рисунок 12.5 - Діаграма повзучості матеріалу

Нехтуючи часом на здійснення пружної деформації $\varepsilon_{пр}$, можна представити деформування металу у виді $\varepsilon \approx \varepsilon_{\pi}$, де ε_{π} - деформація повзучості в умовах повзучості матеріалу :

$$\varepsilon_{\pi} = v_{\pi} \cdot t, \quad (12.9)$$

де v_{π} - постійна швидкість повзучості, яка виражається у вигляді

$$v_{\pi} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_{\pi}}{dt} = tg\alpha,$$

α - кут нахилу умовної лінії повзучості (див. рис. 12.5).

Умова міцності при повзучості має вигляд

$$\sigma \leq \sigma_{\pi}, \quad (12.10)$$

де σ_{π} - границя повзучості, яка представляє найбільше напруження, при якому отримуємо малу швидкість повзучості і пластичну деформацію певної величини $\varepsilon_{прд}$ (див.рис. 12.5) за увесь термін служби матеріалу при заданій температурі.

У задачах розрахунку деталей машин на повзучість, окрім перевірки умови міцності (12.10), зазвичай визначається і термін служби деталі t_g , коли швидкість повзучості ε_{π} не перевершує

швидкість, що попускається $v_{\text{п}}$, при заданому граничному терміні служби деталі $t_{\text{г}}$.

Разом з повзучістю деталям властиве і таке явище, як релаксація. *Релаксацією* називається зменшення напружень в деталі в результаті постійного наростання пластичної деформації за рахунок пружної.

Завдяки релаксації щільність з'єднання деталей, скріплених за рахунок пружного натягу, може бути настільки ослаблена, що викличе порушення нормальної роботи конструкції. Так, наприклад, послаблення щільності болтового з'єднання фланців газопроводу або циліндрів високого тиску парової турбіни може привести до витоку газу або пари, якщо не проводити періодичні ремонтні роботи фланцевого з'єднання. Таким чином, з явищем релаксації необхідно рахуватись в процесі експлуатації машин і механізмів.

При релаксації має місце процес поступового зниження напруження в навантаженій деталі, повна деформація якої не може змінюватися в часі і дорівнює отриманій при вантаженні пружній деформації. При цьому зниження напруження відбувається внаслідок поступового зменшення пружної деформації і приросту на ту ж величину пластичної деформації на підставі залежностей:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_{\text{пр}} + \Delta l_{\text{п}} &= \Delta l_0 = \text{const}; \\ \varepsilon_{\text{пр}} + \varepsilon_{\text{п}} &= \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_{\text{т}}} = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

де Δl - зміна довжини деталі відповідно в пружній і пластичних областях при деформації ε ; σ_0 – первинне напруження в деталі; E_T – модуль пружності матеріалу при заданій температурі.

Диференціюючи другу залежність (12.11) за часом t і замінюючи $\frac{d\varepsilon_{\text{п}}}{dt}$ на $k\sigma_{\text{п}}$, отримуємо диференціальне рівняння, рішення якого дозволяє отримати функціональну залежність напруження в деталі від часу релаксації $\sigma = f(\sigma_0, E_T, k, n)$, де k, n – довідкові коефіцієнти, які залежать від властивостей матеріалу і температури експлуатації.

12.4 Основні поняття про розрахунок елементів конструкцій в області пластичних деформацій

12.4.1 Розрахунок елементів конструкції за несучою спроможністю

У викладених раніше розрахунках міцності елементів конструкцій в пружній області при статичному вантаженні використовувався метод допустимих напружень. За цим методом умови міцності елементу конструкції вважалися порушеними, якщо хоч би в одній точці цього елементу напруження досягали небезпечної величини – допустимого напруження (такий підхід іменується ще розрахунком по небезпечній точці).

Для розрахунку конструкцій з пластичних матеріалів (типу сталі) при статичному навантаженні можливий і інший підхід до оцінки їх міцності – *розрахунок за методом граничного стану*,

або *несучій спроможності*. При цьому вважається, що досягнення границі плинності в одній точці (точках) не призводить до виходу з ладу усієї конструкції і її стан не вважається граничним. Несуча спроможність конструкції буде вичерпана, коли вона перетворюється в геометрично змінювану систему з необмеженою деформацією при постійному навантаженні. Таке навантаження (сила або момент) вважається *граничним*, а стан конструкції іменується *граничним* і відповідає вичерпанню її несучої спроможності.

Розрахунок міцності елементів конструкції або її в цілому за такої умови називається *розрахунком за граничним станом*, або *розрахунком несучої спроможності*. Такий підхід є більш простим із урахуванням пластичних деформацій, які можуть виникнути в конструкції та їх елементах.

Умова міцності по граничному стану (навантаженню) записується у вигляді:

$$n = \frac{P_{\text{гр}}}{P} \geq n \quad \text{або} \quad n = \frac{M_{\text{гр}}}{M} \geq n, \quad (12.12)$$

де $P_{\text{гр}}, M_{\text{гр}}$ – граничне значення навантаження (сили або моменту), при якому несуча спроможність конструкції буде вичерпана; P, M – діюче навантаження на конструкцію; n – дійсний коефіцієнт запасу міцності; n – прийнятий (нормативний) коефіцієнт запасу міцності з несучої спроможності.

Часто розрахунки за несучою спроможністю базуються на тому, що матеріал конструкції є ідеально пружно-пластичним. Схематизована діаграма деформації такого матеріалу

представляється у вигляді спрощеної діаграми деформування (рис.12.5), яка складається з двох прямолінійних ділянок OA і AB . Зазвичай передбачається, що діаграма стискання така ж (в границях відносно малих пластичних деформацій), як і при розтяганні.

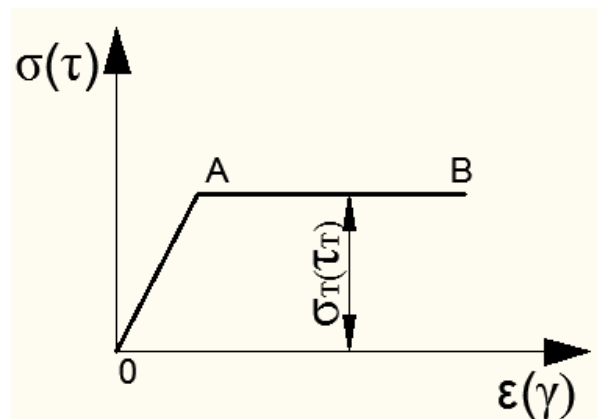


Рисунок 12.5 - Схематизована діаграма розтягування матеріалу

Ділянка OA відповідає пружній деформації матеріалу, яка відповідає закону Гуку. Передбачається, що крайнє значення ділянки – границя пропорційності матеріалу – дорівнює границі плинності, тобто $\sigma_{пц} = \sigma_T, \tau_{пц} = \tau_T$.

Друга ділянка діаграми AB відповідає стану плинності матеріалу, причому вважається, що її довжина має необмежену протяжність.

Застосування такої схематизованої діаграми Прандтля "напруження σ (τ)– деформації ε (γ)" істотно спрощує розрахунки за несучою спроможністю.

У статично визначуваних системах, елементи яких працюють на розтягування і стискування, результати розрахунку за несучою спроможністю співпадають з результати розрахунку міцності по

небезпечній точці. Дійсно, навантаження плинності виникає в усіх точках найбільш напруженого елемента конструкції і перехід в стан плинності усіх елементів перетворює систему на геометрично змінювану систему.

У статично невизначуваній системі, елементи якої в пружній стадії роботи навантажені по-різному, виникнення плинності в якому-небудь елементі не призводить до вичерпання усією системою несучої спроможності, оскільки інші елементи системи знаходяться в пружній стадії і ще здатні чинити опір зростаючому навантаженню. У цих випадках граничне навантаження $P_{гр}$ буде більше P_t , при якому плинність виникає тільки в одному елементі. Звідси витікає, що навантаження для статично невизначуваної системи, розрахованої за несучою спроможністю, буде більше, ніж за розрахунком цієї системи по небезпечній точці при однакових коефіцієнтах запасу міцності.

У загальному випадку коефіцієнти запасу при розрахунку за несучою спроможністю будуть вищі, ніж при розрахунку міцності по небезпечній точці.

Коли в пружній стадії роботи системи напруження в поперечних перерізах її елементів розподілені нерівномірно (наприклад, при крученні або згинанні), розрахунок за несучою спроможністю спроможності дає результат, відмінний від розрахунку по небезпечній точці, навіть якщо система статично визначувана.

12.4.2 Розрахунок за несучою спроможністю бруса при розтяганні (стисканні)

Приклад 12.1. Визначити за розрахунком несучої спроможності допустиму величину сили $P_{дон}$ для статично невизначуваного бруса (рис.12.7). Матеріал бруса Ст3 з границею плинності $\sigma_T = 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, прийнятий (нормативний) коефіцієнт запасу міцності $n = 2$.

Рішення

Позначивши реакції в затисненні кінців бруса R_A і R_B , складемо рівняння рівноваги :

$$R_A + R_B = P. \quad (12.13)$$

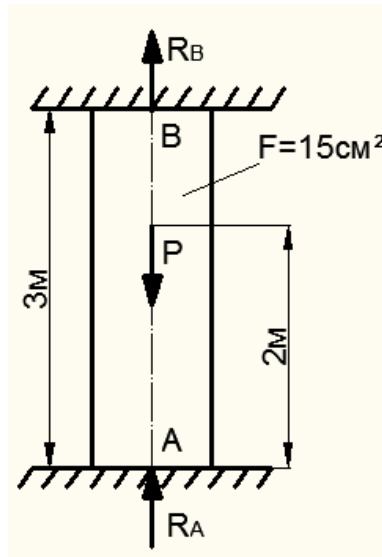


Рисунок 12.6 – До розрахунку бруса за несучою спроможністю

З умови навантаження бруса силою P (див. рис.12.7) видно, що верхня частина бруса від місця прикладення сили

розтягується зусиллям R_B , а нижня частина – стискується зусиллям R_A .

У граничному стані конструкції напруження в обох частинах бруса досягають границі плинності σ_T і звідси реакції дорівнюють:

$$R_A = R_B = \sigma_T \cdot F, \quad (12.14)$$

де F - площа поперечного перерізу бруса.

Підставляючи значення реакцій (12.14) в рівняння (12.13) і враховуючи, що в граничному стані зусилля P досягає свого граничного значення, маємо

$$\sigma_T \cdot F + \sigma_T \cdot F = P_T$$

або

$$2\sigma_T \cdot F = P_T, \quad (12.15)$$

звідки

$$P_T = 2 \cdot 24 \cdot 15 = 720 \text{ кН.}$$

З урахуванням прийнятого коефіцієнта запасу міцності $n = 2$ допустиме навантаження дорівнює:

$$P_{\text{доп}} = \frac{P_T}{n} = \frac{720}{2} = 360 \text{ кН.}$$

12.4.3 Розрахунок несучої спроможності балок при поперечному згині

У розрахунках згинання балки з пластичного матеріалу за методом допустимих напружень небезпечним вважається той стан балки, при якому в небезпечному перерізі по її довжині в

крайніх його точках A , B максимальне напруження досягають границі плинності матеріалу (рис. 12.8, б).

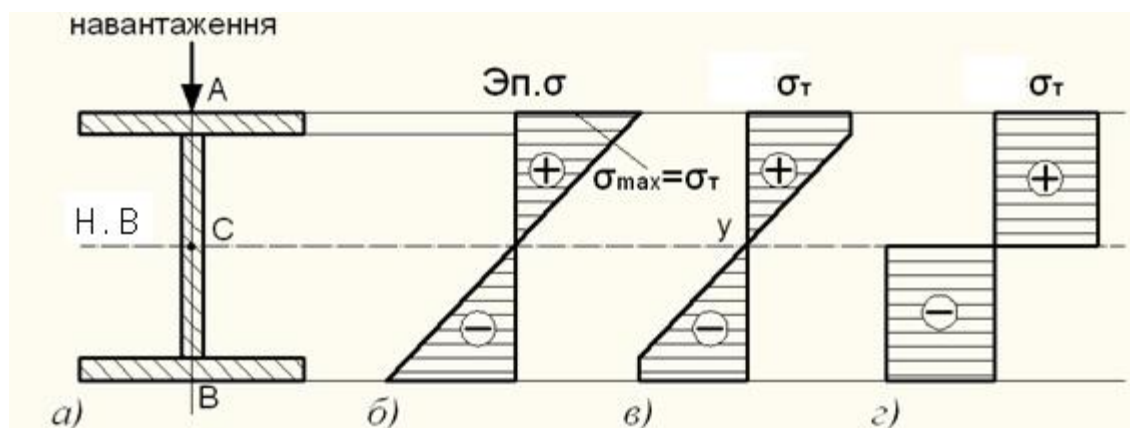


Рисунок 12.7 - Епюри нормальних напружень в перерізі балки при згинанні

При зростанні навантаження, а значить і величини згинального моменту в небезпечному перерізі балки, плинність охоплюватиме все більшу площу перерізу : одна його частина працюватиме пружно, а інша частина охоплена пластичними деформаціями при напруженні σ_T (рис.12.8, в). Нарешті, плинністю буде охоплена уся площа перерізу балки (рис.12.8, г). Це відповідає випадку, коли несуча спроможність балки буде вичерпана.

Виникнення повної плинності в небезпечному поперечному перерізі можна уподобати виникненню в цьому перерізі так званого *пластичного шарніра* (рис.12.9), який перетворює балку на геометрично змінювану систему, і її частини окремо обертаються в шарнірі одна відносно другої. При цьому поперечне навантаження відповідатиме своєму граничному значенню $P_{гр}$.

Величина згинального моменту балки в місці шарніра називається *граничним моментом* $M_{гр}$ (див.рис. 12.9), який дорівнює

$$M_{гр} = \sigma_T \cdot W_{гр}, \quad (12.16)$$

де $W_{гр}$ - граничний (пластичний) момент опору перерізу балки.

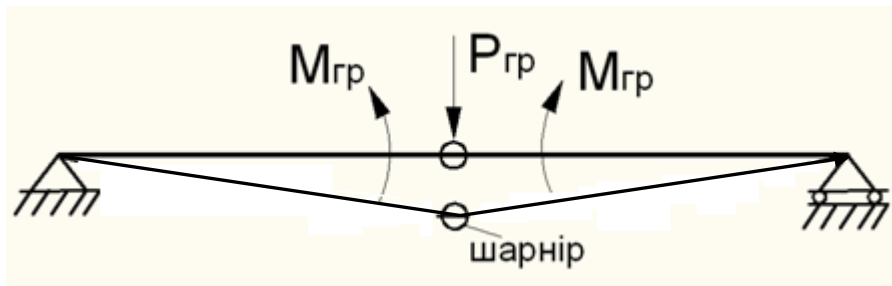


Рисунок 12.8 - Виникнення пластичного шарніра в балки при граничному стані

При симетричному перерізі балки відносно нейтральної осі (див. рис. 12.8) величина $W_{гр}$ дорівнює:

$$W_{гр} = 2S_{max}, \quad (12.17)$$

де S_{max} , - статичний момент половини перерізу балки відносно нейтральної осі.

Наприклад, для прямокутного поперечного перерізу балки (рис.12.10) граничний момент опору дорівнює:

$$W_{гр} = 2 \cdot \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}.$$

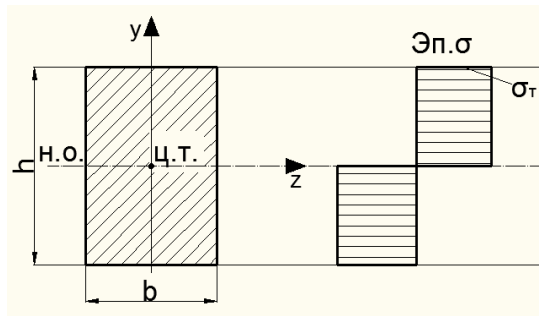


Рисунок 12.9 - До обчислення $W_{гр}$ для прямокутного перерізу

При несиметричному поперечному перерізі балки відносно нейтральної осі (рис.12.11) охоплення плинністю усього перерізу ділить його на дві рівновеликі за площею частини ($F_1 = F_2$) і граничний момент опору визначається за формулою

$$W_{гр} = S_1 + S_2, \quad (12.18)$$

де S_1 і S_2 - статичні моменти ($S_1 \neq S_2$) перерізів балки F_1 і F_2 відносно нейтральної осі (розраховуються за абсолютною величиною).

Граничний згинальний момент для цього перерізу розраховується за формулою (12.16).

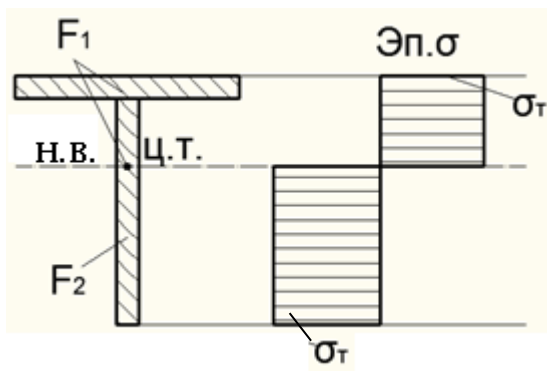


Рисунок 12.10 - До обчислення $W_{гр}$ для несиметричного перерізу балки

Згинальний момент балки, при якому максимальне напруження в найбільш віддаленій від нейтральної осі точки перерізу дорівнюють границі плинності матеріалу, є:

$$M_T = \sigma_T \cdot W, \quad (12.19)$$

де W - момент опору перерізу балки відносно його найбільш віддаленої точки.

Цей згинальний момент вважається небезпечним з позиції розрахунку балки за допустимим напруженням (небезпечній точці).

З наведених формул (12.16) і (12.19) отримаємо співвідношення $M_{гр}$ до M_T або $W_{гр}$ до W :

$$\alpha = \frac{M_{гр}}{M_T} = \frac{W_{гр}}{W}. \quad (12.20)$$

Величина цього відношення залежить від форми поперечного перерізу балки. Так, для балки прямокутного поперечного перерізу $\alpha = 1,5$, а для прокатного симетричного двотавра $\alpha = 1,15$.

Приклад 12.2. Визначити допустиму величину інтенсивності розподіленого навантаження q для двоопорної сталеві балки (рис.12.12, *а*), поперечний переріз якої зображено на рис.12.12, *б*. Границя плинності матеріалу $\sigma_T = 23 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, прийнятий коефіцієнт запасу $n = 1,6$, а розміри поперечного перерізу $h = 20 \text{ см}, t = 1 \text{ см}; b = 10 \text{ см}$.

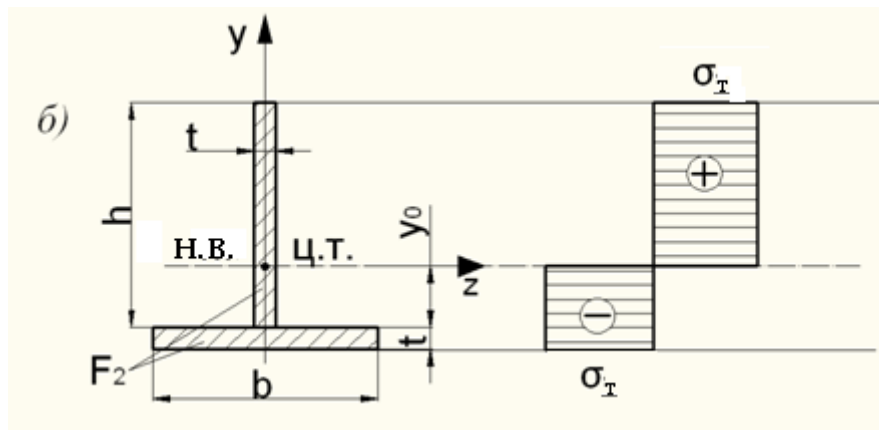


Рисунок 12.11 - До розрахунку несучої спроможності балки при згинанні

Рішення

1. Знаходимо положення нейтральної осі поперечного перерізу балки з тієї умови, що в граничному стані ця вісь ділить переріз на дві рівновеликі частини (див. рис. 12.12) :

$$F_1 = F_2; \quad (12.21)$$

$$F_1 = h \cdot t - y_0 \cdot t = 20 \cdot 1 - y_0 \cdot 1 = 20 - y_0,$$

$$F_2 = b \cdot t + y_0 \cdot t = 10 \cdot 1 + y_0 \cdot 1 = 10 + y_0.$$

Підставляємо отримані залежності в умову (12.21) і визначаємо положення нейтральної осі перерізу балки (координата y_0) в граничному стані:

$$20 - y_0 = 10 + y_0; 10 = 2y_0; y_0 = \frac{10}{2} = 5 \text{ см.}$$

2. Розраховуємо статичні моменти напівперерізів балки відносно нейтральної осі:

$$S_1 = F_1 \cdot \frac{h - y_0}{2} = 20 - 5 \cdot \frac{20 - 5}{2} = 112,5 \text{ см}^3$$

$$S_2 = S \cdot t_1 \cdot y_0 + \frac{t_1}{2} \cdot y_0 \cdot t \cdot \frac{y_0}{2} = 10 \cdot 1 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = 67,5 \text{ см}^3.$$

3. Граничний момент опору перерізу балки визначається як:

$$W_{\text{гр}} = S_1 + S_2 = 112,5 + 67,5 = 180 \text{ см}^3.$$

4. Граничний згинальний момент для балки:

$$M_{\text{гр}} = \sigma_{\text{т}} \cdot W_{\text{гр}} = 23 \cdot 180 = 41,2 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

5. Розраховуємо допустимий згинальний момент балки в граничному стані:

$$M_{\text{доп}} = \frac{M_{\text{гр}}}{n} = \frac{41,4 \cdot 10^2}{1,6} = 25,9 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}. \quad 12.22$$

6. Найбільший згинальний момент посередині прогону балки від заданого зовнішнього навантаження (див. рис.12.12, а) визначається за формулою

$$M_{\text{max}} = \frac{ql^2}{8}. \quad (12.23)$$

7. Приймаючи у формулі (12.23) зовнішнє навантаження $q=q_{\text{доп}}$, а $M_{\text{max}} = M_{\text{доп}}$ отримуємо

$$M_{\text{доп}} = \frac{q_{\text{доп}} \cdot l^2}{8},$$

звідки

$$q_{\text{доп}} = \frac{8M_{\text{доп}}}{l^2} = \frac{8 \cdot 25,9 \cdot 10^2}{400^2} = 0,1294 \frac{\text{кН}}{\text{см}}. \quad (12.24)$$

Завдання для індивідуальної роботи

Розрахувати допустиму довжину $l_{\text{доп}}$ двоопорної балки (рис.12.13, а), яка завантажена у прогоні зосередженою силою

$P = 100$ кН. Балка прямокутного поперечного перерізу $b \times h = 100 \times 200$ мм (рис.12.13, б), матеріал балки – Ст.3 з межею плинності $\sigma_T = 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, прийнятий коефіцієнт запасу $n = 1,8$.

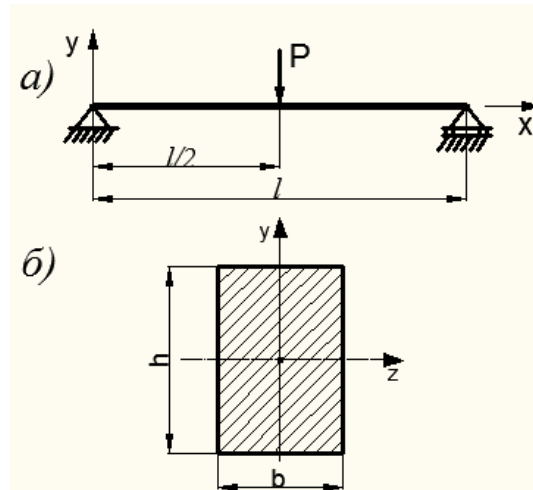


Рисунок 12.12

13 ТЕСТИ І КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАНЯ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

1. Що вивчає наука “Опір матеріалів”?

- а) теорію машин і механізмів;
- б) основи надійності деталей машин;
- в) основи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій.

2. Вчені, які зробили значний внесок у розвиток науки з опору матеріалів:

- а) Архімед;
- б) Галілео Галілей;
- в) Ньютон;
- г) Роберт Гук;
- д) С.П. Тимошенко.

3. Які тіла розглядаються в опорі матеріалів у відмінності від теоретичної механіки?

- а) абсолютно тверді тіла;
- б) деформовані тверді тіла.

4. На яких властивостях матеріалу побудовані основні розрахункові схеми елементів конструкцій в опорі матеріалів?

- а) пружності;
- б) пластичності;
- в) в'язкості.

5. Пояснити поняття міцності елементів конструкцій:

- а) мати прогини при навантаженні не більш допустимих;
- б) зберігати прямолінійну форму при стисканні;

в) не підлягати руйнації при дії зовнішніх сил.

6. Пояснити поняття жорсткості елементів конструкцій:

а) не підлягати руйнації при дії зовнішніх сил;

б) мати прогини при навантаженні не більш допустимих;

в) зберігати початкову форму при стисканні;

г) отримати малі деформації.

7. Пояснити поняття стійкості елементів конструкцій:

а) мати прогини при навантаженні не більш допустимих;

б) не підлягати руйнації при дії зовнішніх сил;

в) зберігати прямолінійну форму при стисканні.

8. Що називається пружністю деформованих тіл?

а) властивість зберігати деформацію після припинення дії зовнішніх сил;

б) властивість усувати деформацію після припинення дії зовнішніх сил.

9. Які гіпотези про деформованість тіл приймаються в опорі матеріалів?

а) пружності матеріалу;

б) суцільності;

в) плоских перерізів.

10. Які допущення про деформованість тіл приймаються в опорі матеріалів?

а) лінійності;

б) однорідності;

в) ізотропності;

г) принципи Сен-Венана, незалежності дії сил;

д) суцільності.

11. Види пружних тіл, які розглядаються в опорі матеріалів:

а) масивне тіло;

б) брус;

в) стержень;

г) балка;

д) пластина;

ж) оболонка.

12. Які види деформування розглядаються в опорі матеріалів?

а) повздовжнє розтягування-стискання бруса;

б) зріз і зм'яття з'єднувальних елементів;

в) закручування;

г) згинання;

д) руйнація.

13. Що називається деформацією в точці тіла?

а) збільшення або зменшення довжини волокна тіла;

б) відношення зміни довжини волокна тіла при навантаженні до його первинної довжини;

в) границя відношення зміни довжини волокна тіла при навантаженні до його первинної довжини.

14. Які розрізняють типи деформацій в точці тіла?

а) лінійні;

б) кутові;

в) об'ємні;

15. Які види зовнішніх сил (навантажень) розглядаються в опорі матеріалів?

- а) зосереджувальна сила P_i ;
- б) повздовжнє зусилля N , згинальний момент M , поперечна сила Q в розрахунках напружень;
- в) інтенсивність сил.
- г) зосереджувальний момент, який прикладений до конструкції.
- д) реактивний згинальний момент або сила.

16. Яка послідовність розрахунку міцності бруса при розтягненні (стисканні)?

- а) розрахунок нормальних напружень в поперечних перерізах бруса σ , змін довжини частин бруса Δl , повздовжніх внутрішніх зусиль N ;
- б) розрахунок змін довжин частин бруса Δl нормальних напружень в поперечних перерізах σ , повздовжніх внутрішніх зусиль N ;
- в) розрахунок повздовжніх внутрішніх зусиль N , нормальних напружень в поперечних перерізах σ , змін довжини частин бруса Δl .

17. Які геометричні характеристики поперечних перерізів розраховуються для елементів конструкцій?

- а) площа поперечного перерізу елемента;
- б) довжина елемента;
- в) статичні моменти частин перерізу;
- г) центр тяжіння площі поперечного перерізу;

д) моменти інерції перерізу.

18. Для чого необхідно мати геометричні характеристики перерізів елементів конструкцій?

а) для розрахунку деформації елементів;

б) для розрахунку напружень в поперечних перерізах;

в) для розрахунку жорсткості елементів конструкцій.

19. Як розраховуються статичний момент частини поперечного перерізу елемента конструкції відносно горизонтальної осі порівняння y :

а) $F_i \cdot z^2$; б) $F_i \cdot z$; в) $F_i \cdot y$; г) немає правильної відповіді.

20. Як розраховується осьовий момент інерції частини поперечного перерізу елемента конструкції відносно горизонтальної осі y :

а) $F_i \cdot z^2$; б) $F_i \cdot z$; в) $F_i \cdot y$;

21. Як розраховується полярний момент інерції поперечного перерізу елемента конструкції?

а) $\int_F z \cdot y dF$; б) $\int_F \rho^2 dF$; в) $\int_F y dF$; г) немає правильної відповіді.

22. Яка вісь відносно поперечного перерізу елемента конструкції називається центральною?

а) яка розміщена довільно відносно площі поперечного перерізу;

б) яка проходить через центр тяжіння площі поперечного перерізу;

в) яка повернута на кут α відносно осі порівняння;

г) паралельна осі, що проходить через центр тяжіння поперечного перерізу.

23. За якою формулою розраховується один з центральних моментів інерції, якщо паралельні осі y та y_1 розміщена одна від одної на відстані a :

а) $J_{y_1} = J_y - a^2 F$; б) $J_{y_1} = J_y + a^2 F$ в) немає правильної відповіді.

24. Напруження в точці тіла це:

а) міра інтенсивності внутрішніх зусиль;
б) зовнішня сила, яка припадає на одиницю площі;
в) границя відношення елементарної зовнішньої сили до елементарної площини.

г) немає правильної відповіді.

25. Які типи напружень розглядаються в опорі матеріалів?

а) октаедричні;
б) лінійні;
в) нормальні;
г) дотичні.

26. Для чого використовується метод перерізів розглядаючих елементів конструкцій?

а) для розрахунку внутрішніх зусиль;
б) для розрахунку деформацій;
в) для розрахунку видовжень або вкорочень елементів конструкцій при зовнішньому навантаженні.

27. За якою формулою розраховуються нормальні напруження в перерізах при розтягуванні (стисканні) бруса?

а) $\frac{Q \cdot S}{J \cdot b}$; б) $\frac{M}{W}$; в) $\frac{P}{F}$; г) немає правильної відповіді.

28. Закон Гука при розтягуванні (стисканні) бруса:

а) $\sigma = E \cdot \varepsilon$; б) $\tau = G \cdot \gamma$; в) немає правильної відповіді.

29. Від яких напружень виникає деформація зсуву?

а) нормальних напружень σ ;

б) дотичних напружень τ .

30. Закон Гука при деформації зсуву:

а) $\sigma = E \cdot \varepsilon$; б) $\tau = G \cdot \gamma$; в) немає правильної відповіді.

31. Від яких напружень виникає деформація зм'яття ?

а) нормальних напружень σ ;

б) дотичних напружень τ .

32. В яких випадках виникають деформації зсуву та зм'яття?

а) при розтягуванні (стисканні) бруса;

б) при розтягуванні заклепочних, шпоночних, болтових з'єднань листів;

в) при розтягуванні зварювальних з'єднань у флангових, лобових швах.

33. За якою формулою (1) і за яких напружень (2) розраховуються міцність на зсув заклепочних з'єднань?

1, а) $\frac{N}{F}$; 1, б) $\frac{P}{i \cdot \frac{\pi d^2}{4}}$; 2, а) нормальних; 2, б) дотичних.

34. За якою формулою (1) і за яких напружень (2) розраховуються міцність на зм'яття заклепочних з'єднань з i заклепками?

1, а) $\frac{P}{i \cdot \frac{\pi d^2}{4}}$; 1, б) $\frac{P}{i \cdot b \cdot d}$; 2, а) нормальних; 2, б) дотичних.

35. Закручуванням називається такий вид деформацій від напружень (1), коли в поперечних перерізах діє тільки внутрішні зусилля (2):

1, а) нормальних; 1, б) дотичних; 2, а) момент закручування; 2, б) згинальний момент.

36. За якими формулами розраховується напруження вала з при деформації закручування?

а) $\frac{M \cdot y}{J}$; б) $\frac{M_k \cdot \rho}{J_p}$; в) $\frac{M_k}{W_p}$; г) немає правильної відповіді.

37. Які характеристики розраховуються при закручуванні вала?

а) нормальні напруження; б) дотичні напруження; в) кут закручування.

38. Що визначається в розрахунках міцності при закручуванні вала?

- а) дотичні напруження в перерізах вала;
- б) кути закручування;
- в) діаметр вала;
- г) довжина вала.

39. За якою формулою розраховуються кути закручування вала при його подальшій експлуатації?

а) $\frac{Q \cdot S}{J \cdot b}$; б) $\frac{M_k \cdot \rho}{J_p}$; в) $\frac{M_{k_i} \cdot l_i}{G \cdot J_p}$.

40. Для чого необхідно визначати механічні характеристики матеріалу?

- а) для вибору матеріалу деталі, конструкції;
- б) для розрахунків міцності елементів конструкції;

41. За якими видами розрізняють механічні випробування матеріалів?

- а) з обсягу робіт;
- б) за характером випробувань;
- в) за видом деформації.

42. Які механічні характеристики матеріала визначають при статичних випробуваннях при розтяганні зразків:

- а) характерні напруження матеріалу;
- б) характеристики пластичності матеріалу;
- в) ударну в'язкість ;
- г) твердість.

43. З якою метою визначають допустимі напруження в розрахунках опору матеріалів?

- а) для оцінки стійкості елемента конструкції;
- б) для оцінки жорсткості елемента конструкції;
- в) для оцінки міцності елемента конструкції.

44) За якими напруженнями обчислюються їх допустима величина в розрахунках міцності елементів конструкції?

- а) напруження пружності;
- б) напруження пропорційності;
- в) напруження плинності ;
- г) границя міцності.

45. Які типи згинання балок розглядаються в опорі матеріалів?

- а) змішаний;

- б) об'ємний;
- в) чистий ;
- г) поперечний;
- д) косий.

46.Що приймається за пружну лінію балки?

- а) верхні волокна балки;
- б) нижні волокна;
- в) геометричне місце центрів тяжіння поперечних перерізів

при її згинанні балки.

47. На жорстких шарнірних опорах балки відсутні:

- а) вертикальні переміщення опорних перерізів;
- б) кути повороту опорних перерізів.

48. На жорсткому затисненні кінця балки відсутні:

- а) переміщення опорних перерізів;
- б) кути повороту опорних перерізів.

49. У статично визначуваних балках для розрахунку реакцій умов статики:

- а) достатньо;
- б) недостатньо.

50. Які умови статики використовуються для розрахунку реакцій при плоскому поперечному згинанні балки?

- а) сума усіх сил на вертикальну ось дорівнює нулю;
- б) сума моментів усіх силових факторів відносно довільної точки за довжиною балки дорівнює нулю;
- в) сума моментів усіх силових факторів відносно опор балки дорівнює нулю,

г) немає правильної відповіді.

51. Які внутрішні силові фактори розраховуються при згинанні балок?

а) температурне поле;

б) поперечна сила;

в) згинальний момент.

52. Поперечна сила Q в перерізі балки є рівнодіючою:

а) нормальних напружень;

б) дотичних напружень;

в) зовнішніх сил і моментів.

53. До згинального моменту M в перерізі балки призводять:

а) нормальні напруження;

б) дотичні напруження.

54. Правило знаків для поперечної сили Q при побудові її епюри, яке прийняте в опорі матеріалів:

а) додатна, якщо для її визначення зовнішні сили зорієнтовані вгору у напрямку вертикальної осі координат для лівої частини балки від проведеного перерізу;

б) додатна, якщо для її визначення зовнішні сили направлені вниз у протилежному напрямку до вертикальної осі координат для лівої частини балки від проведеного перерізу;

в) немає правильної відповіді.

55. Правило знаків для згинального моменту M при побудові його епюри в опорі матеріалів:

а) додатний, якщо він визиває стискання верхніх волокон балки при її прогині випуклістю вниз від розглядаючого перерізу;

б) додатний, якщо він визиває розтягання верхніх волокон балки від розглядає мого перерізу.

56. Що пов'язують між собою диференційні залежності між факторами згинання балки?

а) зовнішнє розподілене навантаження зі згинальним моментом у перерізі балки;

б) поперечні сили і згинальні моменти;

в) інтенсивність поперечного навантаження з поперечною силою і згинальним моментом в перерізі балки.

57. За якою формулою розраховуються нормальні напруження σ в поперечних перерізах балки при її згинанні:

а) $\frac{Q \cdot S}{J \cdot b}$; б) $\frac{M \cdot z}{J}$; в) $\frac{J}{z_{\max}}$.

58. В яких точках за висотою поперечного перерізу балки виникають максимальні нормальні напруження σ ?

а) у центрі тяжіння перерізу балки;

б) у найбільш віддалених точках від центру тяжіння;

в) в точках з'єднання стінки з поясками балки складеного профілю.

59. В яких точках по висоті поперечного перерізу балки виникають максимальні дотичні напруження τ ?

а) у центрі тяжіння перерізу балки;

б) у найбільш віддалених точках від центру тяжіння;

в) в точках змикання стінки з поясками балки складеного профілю.

60. За яким законом (показати на рисунку) розподіляються нормальні напруження σ по висоті поперечного перерізу балки?

- а) за законом квадратичної параболи;
- б) за лінійним законом.

61. За яким законом (показати на рисунку) розподіляються дотичні напруження τ по висоті поперечного перерізу балки?

- а) за законом квадратичної параболи;
- б) за лінійним законом.

62. Які параметри згинання балок відносяться до кінематичних?

- а) прогини і кути повороту перерізів балки;
- б) поперечні сили і згинальні моменти в перерізах балки.

63. Яке з диференціальних рівнянь характеризує пружну лінію балки при її згинанні? Пояснити величини в рівнянні:

- а) $EIw^{IV} = q$;
- б) $EIw'' = M$.

64. Які методи використовуються для розрахунку переміщень балок за їх довжиною?

- а) метод інтегрування диференціального рівняння пружної лінії;
- б) метод початкових параметрів;
- в) енергетичні методи.

65. З яких умов визначаються сталі інтегрування диференціального рівняння пружної лінії балки?

- а) за видом зовнішнього навантаження;
- б) за умов допустимих переміщень;
- в) з граничних умов на опорах.

66. Які недоліки має метод визначення переміщень балки при інтегруванні диференційного рівняння пружної лінії?

- а) трудомісткість розрахунків;
- б) необхідність визначення постійних інтегрування на кожній ділянці навантаження.

67. Які переваги має метод початкових параметрів у визначеності переміщень балок?

- а) наявність одного універсального рівняння для визначення переміщень балки;
- б) необхідність розрахунку лише чотирьох початкових параметрів за будь-якої кількості ділянок навантаження балки.

68. Якщо розподілене навантаження не доходить до правої кінцевої границі балки, то необхідно у методі початкових параметрів:

- а) використати без зміни навантаження універсальне рівняння для переміщень;
- б) уявно продовжити до правого кінця балки розподілене навантаження з урахуванням навантаження зворотнього напрямку.

69. Які з енергетичних методів використовуються у розрахунках переміщень балок?

- а) Лагранжа;
- б) Клапейрона;
- в) Кастільяно;
- г) Мора.

70. За якою формулою розраховується потенціальна енергія пружної деформації балки при її поперечному навантаженні?

а) $V = P \cdot l$ (P – узагальнена сила, l – довжина балки);

б) $V = \frac{1}{2} P \cdot \delta$ (P – узагальнена сила; δ – узагальнене переміщення).

71. Що розуміють під поняттям “узагальнене переміщення” в енергетичних методах для балки?

а) прогин;

б) кут повороту поперечного перерізу;

в) немає правильної відповіді.

72. Що розуміють під поняттям “узагальнена сила” в енергетичних методах для балки?

а) зосереджена сила;

б) поперечна сила;

в) згинальний момент;

г) немає правильної відповіді.

73. Якщо необхідно визначити прогин балки в перерізі, де не прикладена зосереджувальна сила, то в енергетичних методах необхідно:

а) уявно прикласти в перерізі балки додатковий згинальний момент M_0 , який в кінці розрахунків прийняти рівним нулю;

б) уявно прикласти в перерізі балки додаткову зосереджувальну силу P_0 , а в кінці розрахунків прийняти її рівною нулю.

74. Якщо необхідно визначити кут повороту перерізу балки, де не прикладений згинальний момент, то в енергетичних методах необхідно:

а) уявно прикласти в перерізі прийняти рівною нулю;

б) уявно прикласти в перерізі балки додатковий згинальний момент M_0 , який в кінці прийняти рівним нулю.

75. Записати формулу для визначення прогину балки за теоремою Кастільяно.

76. Записати формулу для визначення кута повороту поперечного перерізу балки за теоремою Кастільяно.

77. Записати формулу для визначення прогину балки за інтегралом Мора.

78. Записати формулу для визначення кута повороту поперечного перерізу балки за інтегралом Мора.

79. Для статично невизначуваних однопрогонних балок силових рівнянь статички для розрахунку параметрів згинання.

а) достатньо;

б) не достатньо.

80. Який метод розрахунку параметрів згинання використовується для багатопрогонних балок на жорстких шарнірних опорах? В чому його сутність.

81. Що входить в поняття “складний опір?”

а) косе згинання балки;

б) згинання балки від сумісного поперечного і подовжнього навантаження;

в) одночасне згинання і кручення вала.

82. Що розуміють під поняттям “косий згин” для балки?

а) коли при згинанні балки зовнішнє навантаження діє в одній з головних площин інерції;

б) коли площина дії зовнішніх сил не співпадає з площинами, які проходять через головні осі інерції.

83. Ким з видатних вчених була вперше вирішена задача про стійкість шарнірно обпертої балки?

а) Архімедом;

б) Галілеєм;

в) Ейлером.

84. Якій області деформації балки відповідає формула для ейлерової сили:

а) пружній області;

б) області пружнопластичних деформацій.

85. Записати формулу для ейлерової сили P_e при загальному випадку закріплення кінців однопрогонної балки.

86. Коли виникає необхідність в розрахунку дійсної критичної сили при стисканні однопрогонової балки?

а) при втраті стійкості в пружній області;

б) при втраті стійкості в області пружнопластичних деформацій.

87. Що означає втрата стійкості балки?

а) порушення міцності балки;

б) виникнення для первинної форми балки деформації згинання при стисканні.

88. Які підходи використовуються у розрахунковій практиці при визначенні дійсних критичних напружень для балки?

а) графік акад. Ю.А. Шиманського (показати на рисунку);

б) формула проф. Р.С. Ясинського (навести формулу з поясненнями).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов Текст : Учебник / Н.М. Беляев, 15-е издание перераб. и доп. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
2. Бурдун Е.Т. Сборник вопросов и задач по сопротивлению материалов для самостоятельной работы студентов Текст / Е.Т. Бурдун, А.В. Жижко. – Николаев: НКИ, 1993. – 34 с.
3. Дарков А.В. Сопротивление материалов Текст : Учебник / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро, 5-е издание перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1989. – 634 с.
4. Збірник задач з опору матеріалів [Текст]. За ред. М.І. Бобирия. – К.: Вища школа, 2008. – 356 с.
5. Кржечковский П.Г. Методические указания к выполнению расчетных работ по сопротивлению материалов Текст / П.Г. Кржечковский. – Николаев: НКИ, 1987. – 44 с.
6. Лапин В.Г. Пособие для самостоятельной работы студентов при изучении курса сопротивления материалов Текст / В.Г. Лапин. – Николаев: НКИ, 1990. – 83 с.
7. Лугінін О.Є. Навчально-методичний посібник з опору матеріалів для самостійної та індивідуальної роботи студентів [Текст] / О.Є. Лугінін, О.М. Дудченко. – Херсон: Видавництво ТОВ «Борисфен», 2016. – 272 с.
8. Миролубов И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов Текст / И.Н. Миролубов, С.А.

Енгальчев, Н.Д. Сергиевский, 5-е издание перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1985. – 399 с.

9. Писаренко Г.С. Опір матеріалів Текст : Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л.Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 1997. – 675 с.

10. Співтаренко В.В. Конспект лекцій з опору матеріалів у 2-х частинах Текст / В.В. Співтаренко. – Херсон: ХФ НУК, 2011. – Частина 1 – 32с. Частина 2 - 38с.

11. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - 10-е издание, перераб. и. доп. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. - 592 с.

12. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов Текст / С.П. Фесик. – К.: Будівельник, 1970. – 308 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А. ОРІЄНТОВНІ ЗНАЧЕННЯ ДОПУСТИМИХ НОРМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ МАТЕРІАЛІВ

Матеріал	Допустиме напруження, МПа	
	на розтягання	на стискання
Сталь Ст 3	160	
Вуглецева конструкційна сталь	60...250	60...250
Легована конструкційна сталь	100...400	і вище
Сірий чавун	28...80	
Мідь	30...120	
Латунь	70...140	
Бронза	60...120	
Алюміній	30...80	
Дюралюміній	80...150	
Текстоліт	30...40	
Бакелітова фанера	40...50	
Сосна (вздовж волокон)	7...10	10...12
Сосна (поперек волокон)	-	1,5...2
Дуб (вздовж волокон)	9...13	13...15
Дуб(поперек волокон)	-	2,0...3,5

ДОДАТОК Б. МОДУЛІ ПРУЖНОСТІ ТА КОЕФІЦІЄНТИ ПУАССОНА

Матеріал	Модуль пружності E , МПа	Модуль пружності G , МПа	Коефіцієнт Пуассона, μ
Вуглецеві сталі	$(2,0 \dots 2,1) \cdot 10^5$	$(8,0 \dots 8,1) \cdot 10^5$	0,24...0,28
Льоговані сталі	$(2,1 \dots 2,2) \cdot 10^5$	$(8,0 \dots 8,1) \cdot 10^5$	0,25...0,30
Сірий чавун	$(1,15 \dots 1,60) \cdot 10^5$	$45 \cdot 10^5$	0,23...0,27
Мідь (катан.)	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^5$	0,31...0,34
Бронза (катан.)	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^5$	0,32...0,35
Латунь	$(0,91 \dots 0,99) \cdot 10^5$	$(3,5 \dots 3,7) \cdot 10^5$	0,32...0,42
Алюміній (катан)	$0,69 \cdot 10^5$	$(2,6 \dots 2,7) \cdot 10^5$	0,32...0,36
Дюралюміній (прокат)	$0,71 \cdot 10^5$	$3,7 \cdot 10^5$	-
Свинець	$0,17 \cdot 10^5$	$0,70 \cdot 10^5$	0,42
Скло	$0,56 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^4$	0,25
Бетон марок 200, 400	$(0,20 \dots 0,26) \cdot 10^5$	-	0,16...0,18
Деревина (сосна, їль)			-
вздовж волокон	$(0,10 \dots 0,12) \cdot 10^5$	$0,55 \cdot 10^4$	-
поперек волокон	$(0,005 \dots 0,01) \cdot 10^5$		-
Текстоліт	$(0,06 \dots 0,1) \cdot 10^5$	-	-
Бакеліт	$43 \cdot 10^2$	-	0,36
Целулоїд	$(14,3 \dots 27,5) \cdot 10^5$	-	0,33...0,38

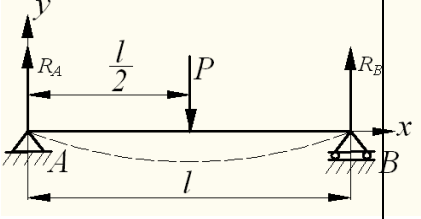
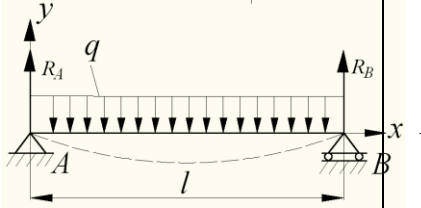
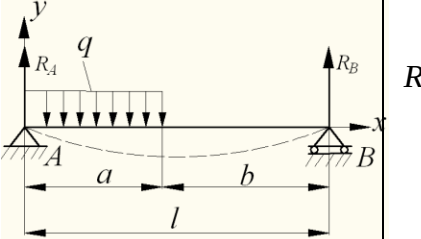
ДОДАТОК В. ДОПУСТИМІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ РОЗТЯГАННІ-ЗГИНАННІ МАТЕРІАЛУ

Матеріал	Допустиме напруження, МПа	
	на розтягання	на стискання
Сталь Ст 3	160	
Вуглецева конструкційна сталь	60...250	60...250
Легована конструкційна сталь	100...400	і вище
Сірий чавун	28...80	
Мідь	30...120	
Латунь	70...140	
Бронза	60...120	
Алюміній	30...80	
Дюралюміній	80...150	
Текстоліт	30...40	
Бакелітова фанера	40...50	
Сосна (вздовж волокон)	7...10	10...12
Сосна (поперек волокон)	-	1,5...2
Дуб (вздовж волокон)	9...13	13...15
Дуб(поперек волокон)	-	2,0...3,5

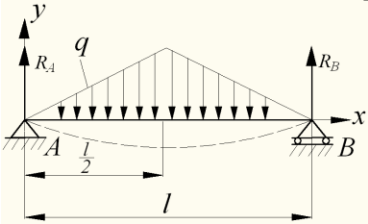
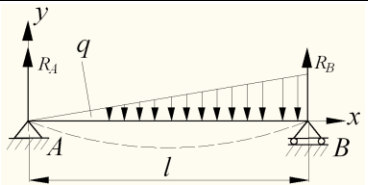
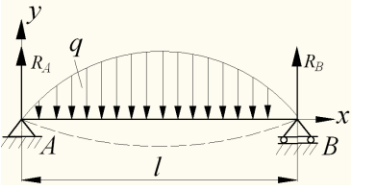
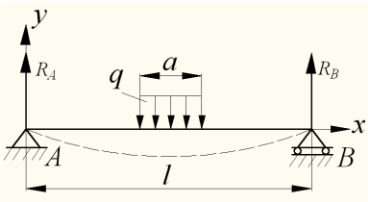
**ДОДАТОК Г. КОЕФІЦІЄНТИ ЛІНІЙНОГО
РОЗШИРЕННЯ МАТЕРІАЛІВ α (НА 1⁰С)**

Матеріал	α
Сталь	$(100-130) \cdot 10^{-7}$
Алюміній та магній	$255 \cdot 10^{-7}$
Бронза та латунь	$(170-220) \cdot 10^{-7}$
Деревина	$(20-50) \cdot 10^{-7}$
Кам'яна кладка	$(40-70) \cdot 10^{-7}$
Бетон	$(100-140) \cdot 10^{-7}$
Целюлоїд	$(16-20) \cdot 10^{-7}$

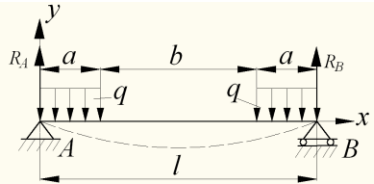
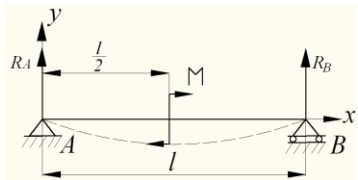
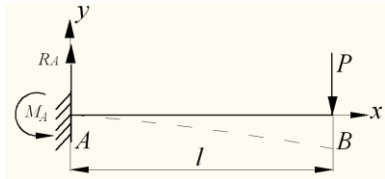
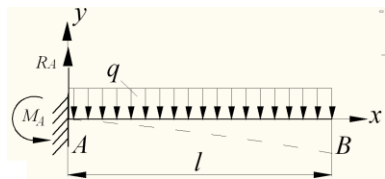
ДОДАТОК Д

№	Схеми балок та їх навантаження	Опорні реакції	Зрізуючі сили	Згинальні моменти	Прогин від згину	Кути повороту поперечних перерізів
1	2	3	4	5	6	7
1		$R_A = R_B = \frac{P}{2}$	$Q_{\max} = \left \frac{P}{2} \right $ при $x=0; \quad x=l$	$M_{\max} = \frac{Pl}{4}$ при $x=l/2$	$\omega_{\max} = -\frac{Pl^3}{48EI_z}$ при $x=l/2$	$\omega' = \pm \frac{Pl^3}{16EI_z}$ при $x=0$ та $x=l$
2		$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$	$Q_{\max} = \left \frac{ql}{2} \right $ при $x=0; \quad x=l$	$M_{\max} = \frac{ql^2}{4}$ при $x=l/2$	$\omega_{\max} = -\frac{ql^4}{384EI_z}$ при $x=l/2$	$\omega' = \left \frac{ql^3}{24EI_z} \right $ при $x=0$ та $x=l$
3		$R_A = \frac{qa}{l} \left(\frac{a}{2} + b \right);$ $R_B = \frac{qa^2}{2b}$	$Q_{\max} = \frac{qa}{2l} \left(a + 2b \right)$ при $x=0$	$M_{\max} = \frac{qa^2}{8} \left(2 - \frac{a}{l} \right)^2$ при $x = a + \frac{b^2}{2l}$	$\omega_{\max} = -\frac{qa^2b}{24EI_z} \times \left(4 - 3\frac{a}{l} \right)$ при $x=a$	$\omega' = -\frac{qa^2l}{6EI_z} \times \left(1 - \frac{a}{2l} \right)^2$ при $x=0;$ $\omega' = -\frac{qa^2l}{12EI_z} \times \left(1 - \frac{a^2}{2l^2} \right)$ при $x=l$

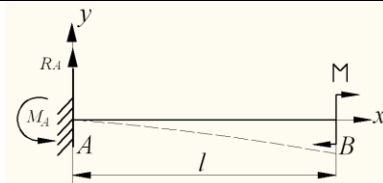
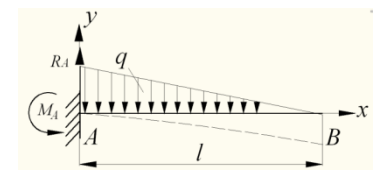
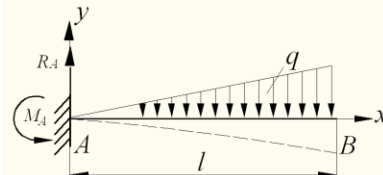
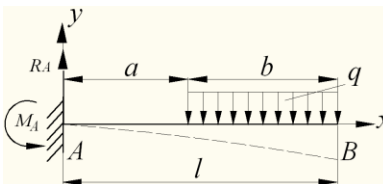
Продовження додатку Д

1	2	3	4	5	6	7
4		$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$	$Q_{\max} = \left \frac{ql}{4} \right $ при $x=0; \quad x=l$	$M_{\max} = \frac{ql^2}{4}$ при $x=l/2$	$\omega_{\max} = -\frac{ql^4}{120EI_z}$ при $x=l/2$	$\omega' = -\frac{5ql^3}{192EI_z}$ при $x=0$; $\omega' = \frac{5ql^3}{192EI_z}$ при $x=l$
5		$R_A = \frac{ql}{6};$ $R_B = \frac{ql}{3}$	$Q_{\max} = \left \frac{ql}{3} \right $ при $x=l$	$M_{\max} = \frac{ql^2}{15,6}$ при $x=0,577l$	$\omega_{\max} = -5\frac{ql^4}{768EI_z}$ при $x=0,519l$	$\omega' = -\frac{7ql^3}{360EI_z}$ при $x=0$; $\omega' = \frac{ql^3}{45EI_z}$ при $x=l$
6		$R_A = R_B = \frac{1}{\pi} q$	$Q_{\max} = \left \frac{1}{\pi} q \right $ при $x=0; \quad x=l$	$M_{\max} = \frac{ql^2}{\pi^2}$ при $x=l/2$	$\omega_{\max} = -\frac{ql^4}{\pi^4 EI_z}$ при $x=l/2$	$\omega' = -\frac{ql^3}{\pi^3 EI_z}$ при $x=0$; $\omega' = \frac{ql^3}{\pi^3 EI_z}$ при $x=l$
7		$R_A = R_B = \frac{qa}{2}$	$Q_{\max} = qa $ при $x=0; \quad x=l$	$M_{\max} = \frac{qa}{4} \left(l - \frac{a}{2} \right)$ при $x=l/2$	$\omega_{\max} = -\frac{ql^3}{48EI_z} \times$ $\times \left[1 - \frac{a^2}{2l} + \frac{l}{a} \cdot \left(1 - \frac{l-a}{l} \right) \right]$ при $x=l/2$	$\omega' = -\frac{ql^3}{48EI_z} \times \left(3 - \frac{a^2}{l^2} \right)$ при $x=0$; $\omega' = \frac{ql^3}{48EI_z} \times \left(3 - \frac{a^2}{l^2} \right)$ при $x=l$

Продовження додатку Д

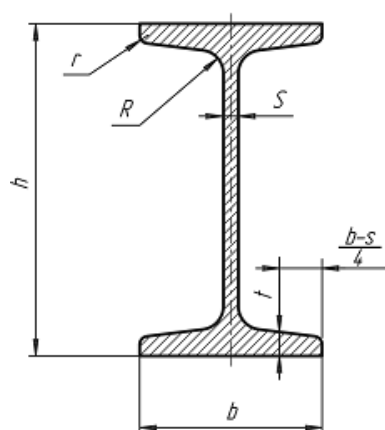
1	2	3	4	5	6	7
8		$R_A = R_B = \frac{qa}{2}$	$Q_{\max} = qa $ при $x = 0; \quad x = l$	$M_{\max} = \frac{qa^2}{2}$ при $a \leq x \leq (a+b)$	$\omega_{\max} = -\frac{ql^4}{48EI_z} \times$ $\times \left(3 - 2\frac{a^2}{l^2}\right)$ при $x = l/2$	$\omega' = -\frac{qa^2}{12EI_z} \times (l - 2a)$ при $x = 0;$ $\omega' = \frac{qa^2}{12EI_z} \times (3l - 2a)$ при $x = l$
9		$R_A = R_B = \frac{M}{l}$	$Q_{\max} = \left \frac{M}{l}\right $ при $x = 0; \quad x = l$	$M_{\max} = \left \frac{1}{2}M\right $ при $x = l/2$	$\omega_{\max} = \frac{Ml^2}{72\sqrt{3}EI_z}$ при $x = \frac{l}{2\sqrt{3}}$	$\omega' = \frac{Ml}{24EI_z}$ при $x = 0; \text{ та } x = l$
10		$R_A = P;$ $M_A = -P \cdot l$	$Q_{\max} = P$ при $x = 0; \quad x = l$	$M_{\max} = Pl $ при $x = 0$	$\omega_{\max} = -\frac{Pl^3}{3EI_z}$ при $x = l$	$\omega' = 0$ при $x = 0;$ $\omega' = -\frac{Pl^2}{2EI_z}$ при $x = l$
11		$R_A = ql;$ $M_A = -\frac{ql^2}{2}$	$Q_{\max} = ql$ при $x = l$	$M_{\max} = \left \frac{ql^2}{2}\right $ при $x = 0$	$\omega_{\max} = -\frac{ql^4}{8EI_z}$ при $x = l$	$\omega' = 0$ при $x = 0;$ $\omega' = -\frac{ql^3}{6EI_z}$ при $x = l$

Продовження додатку Д

1	2	3	4	5	6	7
12		$R_A = 0;$ $M_A = -M$	-	$M_{\max} = M$ при $x = 0; \quad x = l$	$\omega_{\max} = -\frac{Ml^2}{2EI_z}$ при $x = l$	$\omega' = 0$ при $x = 0;$ $\omega' = -\frac{Ml}{EI_z}$ при $x = l$
13		$R_A = \frac{ql}{2};$ $M_A = \frac{ql^2}{6}$	$Q_{\max} = \frac{ql}{2}$ при $x = l$	$M_{\max} = \left \frac{ql^2}{6} \right $ при $x = 0$	$\omega_{\max} = -\frac{ql^4}{30EI_z}$ при $x = l$	$\omega' = 0$ при $x = 0;$ $\omega' = -\frac{ql^2}{24EI_z}$ при $x = l$
		$R_A = \frac{ql}{2}$	$Q_{\max} = \frac{ql}{2}$ при $x = 0$	$M_{\max} = \left \frac{ql^2}{3} \right $ при $x = 0$	$\omega_{\max} = -\frac{11}{120} \frac{ql^4}{EI_z}$ при $x = l$	$\omega' = 0$ при $x = 0;$ $\omega' = -\frac{ql^3}{8EI_z}$ при $x = l$
		$R_A = \frac{qb}{2};$ $M_A = qb \left(a + \frac{b}{2} \right)$	$Q_{\max} = ql$ при $x = 0$	$M_{\max} = qb \left(a + \frac{b}{2} \right)$ при $x = 0$	$\omega_{\max} = -\frac{ql^4}{24EI_z} \times$ $\times \left(3 - 4 \frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} \right)$ при $x = l$	$\omega' = -\frac{ql^3}{6EI_z} \times$ $\times \left(1 - \frac{a^3}{l^3} \right)$ при $x = l$

ДОДАТОК Ж СОРТАМЕНТИ КАТАНИХ ПРОФІЛІВ

Балки двутаврові (двутаври) за ГОСТ 8239-89



h – висота двутавра;

b – ширина полки;

S – товщина стінки;

t – середня товщина полки;

R – радіус внутрішнього закруглення;

r – радіус закруглення полки.

№ балки	Розміри, мм				Маса 1м балки, кг	Кількість метрів в 1 тоні, м
	h	b	S	t		
10	100	55	4,5	7,2	9,456	105,7
12	120	64	4,8	7,3	11,54	86,62
14	140	73	4,9	7,5	13,68	73,09
16	160	81	5	7,8	15,89	62,94
18	180	90	5,1	8,1	18,35	54,50
18a	180	100	5,1	8,3	19,92	50,20
20	200	100	5,2	8,4	21,04	47,53
20a	200	110	5,2	8,6	22,69	44,08
22	220	110	5,4	8,7	24,04	41,60
22a	220	120	5,4	8,9	25,76	38,82
24	240	115	5,6	9,5	27,34	36,57
24a	240	125	5,6	9,8	29,40	34,02
27	270	125	6	9,8	31,53	31,71
27a	270	135	6	10,2	33,88	29,51
30	300	135	6,5	10,2	36,48	27,41
30a	300	145	6,5	10,7	39,17	25,53
33	330	140	7	11,2	42,25	23,67
36	360	145	7,5	12,3	48,55	20,60
40	400	155	8,3	13	56,96	17,56
45	450	160	9	14,2	66,50	15,04

Таблиця 1. Полособульб несиметричний для суднобудування. Сортамент (ГОСТ 21937-76)

Номер профіля	Елементи профіля						Елементи профіля з приєднанням пояском				
	Висота стілки	Товщина стілки	Ширина бульба	Площа	Момент інерції		Відстань від ЦВ, см	Загальна площа, см ²	Момент інерції, см ⁴	Найменший момент опору, см ³	Товщина приєд- наного пояска, мм
					см ²	см ⁴					
5	50	4	16	2,9	7,0	3,1	62,9	44	9	10	
5,5	55	4,5	17	3,5	10,2	3,4	63,5	61	12	10	
6	60	5	19	4,3	15,0	3,7	64,3	87	15	10	
7	70	5	21	5,1	24,1	4,4	65,1	137	20	10	
8	80	5	22	5,8	36,2	5,1	65,8	202	25	10	
9	90	5,5	24	7,0	55,6	5,7	67,0	295	33	10	
10	100	6	26	8,6	85,2	6,3	68,6	434	45	10	
12	120	6,5	30	11,2	158,0	7,6	71,2	767	68	10	
14a	140	7	33	14,0	274,0	8,8	74,0	1274	100	10	
14b	140	9	35	16,9	321,0	8,6	76,9	1398	112	10	
16a	160	9	36	18,0	468,0	10,0	108/78,0	2200/1980	147/140	15/10	
16b	160	10	38	21,2	527,0	9,8	111,2/81,2	2434/2190	165/159	15/10	
18a	180	9	40	22,2	724,0	11,2	112,2/82,2	3280/2860	200/188	15/10	
18b	180	11	42	25,8	837,0	10,8	115,8/85,8	3530/3130	218/206	15/10	
20a	200	10	44	27,4	1078	12,4	117,4	4730	268	15	
20b	200	12	46	31,4	1265	12,1	121,4	5110	296	15	
22a	220	11	48	32,8	1611	13,5	122,8	6500	343	15	
22b	220	13	50	37,2	1795	13,2	127,2	6930	372	15	
24a	240	12	52	38,8	2232	14,7	128,8	8720	434	15	
24b	240	14	54	43,6	2542	14,4	133,6	9250	466	15	

Таблиця 2. Полособульб симетричний для суднобудування. Сортамент (ГОСТ 9235-76)

Профіль	Елементи профіля				Елементи профіля з приєднаним пояском					
	Висота стінки	Товщина стінки	Ширина бульба	Площа профіля, см^2	Момент інерції, см^4	Відстань від ЦВ, см	Площа приєднаного пояса, см^2			
							50		100	
							$I, \text{см}^4$	$W, \text{см}^3$	$I, \text{см}^4$	$W, \text{см}^3$
			мм						200 і більше	
935	90	5,5	31,0	6,82	55	5,9	297	34	338	35
1035	100	5,5	35,5	8,53	84	6,6	450	47	512	50
1235	120	5,5	37,5	10,15	147	7,4	740	67	842	70
1446	140	6,0	42,0	13,10	257	9,3	1243	99	1426	104
1447	140	7,5	43,5	15,20	300	8,9	1339	108	1530	114
1646	160	6,5	48,5	16,47	422	10,7	1970	143	2190	146
1658	160	8,0	50,0	18,87	488	10,3	2120	155	2450	163
1857	180	7,0	55,0	20,20	656	12,1	2960	198	3420	205
1858	180	8,5	56,5	22,90	751	11,7	3120	212	3620	221
2068	200	8,4	60,4	26,06	1049	13,2	4250	270	5100	285
20610	200	10,0	62,0	29,26	1185	12,9	4510	280	5400	305
2268	220	8,0	64,0	28,24	1371	14,8	5570	327	6690	345
22610	220	10,0	68,0	33,14	1624	14,3	6010	362	7320	385
2468	240	8,5	71,0	33,17	1915	16,2	7530	420	9100	442
24710	240	10,5	75,5	38,65	2252	15,9	8100	464	9900	491
271010	270	10,0	102,0	41,74	3163	18,0	9100	480	11700	525
27812	270	12,0	82,0	48,33	3582	17,5	11600	622	13800	660
30810	300	10,0	89,0	51,00	4558	20,6	15900	800	20000	850
30812	300	12,0	91,0	57,00	5165	20,0	16400	835	20800	895

Примітка: Номер профіля: h – висота стінки, см ; b – ширина бульба, см ; S – товщина стінки, мм (в цілих числах)

Таблиця 3. Геометричні характеристики симетричних полособульбів 30810 (ГОСТ 9235-76)

Профіль	Елементи профіля				Елементи профіля з приєднаним пояком					
	Висота стінки, мм	Площа профіля, см ²	Момент інерції, см ⁴	Відстань від ЦВ, см	Площа приєднаного пояса, см ²					
					50		100		200 і більше	
					$I, \text{см}^4$	$W_3, \text{см}^3$	$I, \text{см}^4$	$W_3, \text{см}^3$	$I, \text{см}^4$	$W_3, \text{см}^3$
30810h180	180	39,0	1031	13,1	5100	411	6500	435	7390	446
30810h200	200	41,0	1423	14,4	6500	472	8100	499	9300	511
30810h220	220	43,0	1885	15,7	8040	534	10050	563	11500	578
30810h240	240	45,0	2425	17,5	9700	595	12200	633	14000	651
30810h250	250	46,0	2735	17,7	10650	628	13325	668	15375	687
30810h260	260	47,0	3046	18,2	11600	661	14550	704	16750	723
30810h280	280	49,0	3755	19,4	13600	730	17200	776	19800	798
30810h300	300	51,0	4558	20,6	15900	800	20000	850	23200	875
30810h320	320	53,0	5458	21,8	18200	860	23000	926	27800	963
30810h340	340	55,0	6462	23,0	21000	941	26500	1000	30800	1030
30810h360	360	57,0	7575	24,1	23800	1010	30100	1080	36400	1120
30810h380	380	59,0	8800	25,3	26900	1090	34000	1160	39700	1210
30810h400	400	61,0	10145	26,4	30100	1170	38000	1250	44700	1290
30810h420	420	63,0	11615	27,5	33600	1250	42500	1330	50000	1390

Вказані профілі одержані шляхом розкромлю полособульбів 30810, виготовлених в подвійному вигляді, загальною висотою профіля, рівною 600 мм.

Таблиця 4. Геометричні характеристики симетричних полособульбів 30812 (ГОСТ 9237-76)

Профіль	Елементи профіля				Елементи профіля з приєднанням пояком					
	Висота стінки, мм	Площа профіля, см ²	Момент інерції, см ⁴	Відстань від ЦВ, см	Площа приєднаного пояса, см ²					
					50		100		200 і більше	
					$I, \text{см}^4$	$W_3, \text{см}^3$	$I, \text{см}^4$	$W_3, \text{см}^3$	$I, \text{см}^4$	$W_3, \text{см}^3$
30812h180	180	42,6	1216	12,7	5300	425	6600	453	7600	465
30812h200	200	45,0	1645	14,0	6500	485	8000	507	9200	520
30812h220	220	46,4	2158	15,2	8200	554	10400	590	12000	610
30812h240	240	49,8	2762	16,5	10000	620	12600	663	14600	685
30812h250	250	51,3	3113	17,1	10950	656	13200	681	15850	700
30812h260	260	52,5	3460	17,7	11900	692	13800	700	19100	715
30812h280	280	54,6	4260	18,8	14100	765	17800	815	20700	845
30812h300	300	57,0	5165	20,0	16400	839	20800	895	24300	930
30812h320	320	59,4	6181	21,2	19000	915	24100	980	28200	1010
30812h340	340	61,8	7314	22,3	21700	990	27600	1060	32400	1100
30812h360	360	64,2	8568	23,4	24700	1070	31000	1150	37000	1195
30812h380	380	66,6	9949	24,5	27900	1150	35600	1240	42000	1290
30812h400	400	69,0	11461	25,7	31400	1230	40000	1330	47300	1390
30812h420	420	71,4	13110	26,8	35100	1320	44700	1420	53000	1490

Вказані профілі одержані шляхом розкрою полособульбів 30812, виготовлених в подвійному вигляді, загальною висотою профілю, рівною 600 мм.

Таблиця 5. Таври сталеві зварні для суден (РД5.9373-80)

Но- мер про- філя	Елементи профіля						Елементи профіля з приєднаним пояском						
	Стінка		Поясок		Пло- ща, см ²	Мо- мент інерції, см ⁴	Відстань від ЦВ, см	Площа приєданого пояса, см ²					
								50			100		200 і більше
	Висо- та	Тов- щина	Ши- рина	Тов- щина									
	мм												
14	140	4	80	6	10,4	10,4	1190	92	1380	92	—	—	
16б	160	5	100	8	16,0	12,2	1950	163	2550	169	—	—	
18б	180	5	100	10	19,0	13,9	3350	230	3800	235	—	—	
20б	200	6	100	10	22,0	14,7	4400	270	5050	280	—	—	
22б	220	6	120	12	27,6	17,0	6600	395	8000	400	—	—	
25а	250	6	120	12	29,4	17,3	10900	450	13000	470	—	—	
28а	280	7	120	12	34,0	20,2	11600	540	13600	560	—	—	
32а	320	8	140	12	45,2	23,2	18200	835	22200	870	26000	890	
32б	320	8	160	16	51,2	24,5	21000	970	25500	1000	30000	1020	
36а	360	8	160	16	54,4	26,8	26000	1120	34000	1180	39000	1220	
40а	400	10	180	14	65,2	27,9	35000	1370	42500	1430	50000	1480	
45а	450	10	200	14	73,0	31,4	46000	1700	58000	1770	70000	1820	
50а	500	12	220	16	95,2	34,5	68000	2350	87000	2600	108000	2750	
56а	560	14	250	18	123,4	38,5	99000	3000	128000	3600	160000	3880	
63а	630	14	300	20	148,2	44,8	142000	4600	175000	5100	235000	5400	
71а	710	16	360	22	198,2	50,7	220000	6600	280000	7100	365000	7600	
80а	800	18	360	22	223,2	54,7	290000	7700	380000	8500	490000	9200	

Примітка: При проміжному значенні величини площі приєданого пояса I і W визначаються лінійною інтерполяцією

Навчальне видання

Коростильов Леонтій Іванович – д.т.н., професор, НУК

Лугінін Олег Євгенович – к.т.н., професор НУК,
Херсонська філія НУК

Спіхтаренко Володимир Володимирович – доцент,
Херсонська філія НУК

Терлич Станіслав Володимирович – старший викладач
Херсонської філії НУК

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Навчальний посібник

2-е видання, перероблене та доповнене

Редакція авторів

Комп'ютерна правка та верстка авторів