МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

А. Н. КУЗНЕЦОВ, А. Л. ЧОРНЫЙ

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ "ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА"

Рекомендовано Методическим советом НУК

Электронное издание комбинированного
использования на DVD-ROM

НИКОЛАЕВ • НУК • 2014

УДК 517(075.8)
ББК 22.11я73
К 89

Автори:
А. М. Кузнецов, кандидат фізико-математичних наук, професор НУК;
О. Л. Чорний, викладач

Рецензент Є. Ю. Нєдєлько, кандидат технічних наук, доцент

Кузнецов А. М.

К 89 Практикум з розв'язування задач по темі "Векторна функція скалярного аргументу" / А. М. Кузнецов, О. Л. Чорний. – Миколаїв : НУК, 2014. – 89 с.

У даному практикумі розглядаються наступні питання: диференціювання векторної функції скалярного аргументу, лінії у просторі, довжина дуги просторової лінії, поверхні, скалярне поле, градієнт, похідна за напрямом.

Призначено для студентів технічних вузів.

УДК 517(075.8)
ББК 22.11я73

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВ Альберт Миколайович
ЧОРНИЙ Олександр Леонідович

ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМІ "ВЕКТОРНА ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ"

(*російською мовою*)

Редактор *Н. О. Шайкіна*
Комп'ютерне верстання *А. Й. Лихіна*
Коректор *М. О. Паненко*

© Кузнецов А. М., Чорний О. Л., 2014
© Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, 2014

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 5,2. Об'єм даних 1696 кб.
Тираж 15 прим. Вид. № 7. Зам. № 221.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025, e-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие относится к серии РЕШЕБНИК и посвящено одним из важных и трудных разделов математического анализа – векторной функции скалярного аргумента; линиям в пространстве; длине дуги пространственной линии; поверхностям; скалярному полю; градиенту; производной по направлению.

Пособие содержит около 100 задач, и все они взяты из популярного "Сборника задач по математическому анализу" Г.Н. Бермана. Номера этих задач указаны в практикуме в круглых скобках.

Такой ПРАКТИКУМ дает возможность студенту в условиях перехода на кредитно-модульную систему обучения решать столько задач, сколько ему необходимо, чтобы приобрести устойчивые навыки по указанной тематике.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов-иностранцев и будет полезно студентам всех инженерных специальностей университета, а также молодым преподавателям.

1. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

1 (3360). Доказать формулы дифференцирования:

а) $\dfrac{d}{dt}(\overline{u}\overline{v})=\overline{u}\cdot\dfrac{d\overline{v}}{dt}+\overline{v}\cdot\dfrac{d\overline{u}}{dt}$;   б) $\dfrac{d}{dt}(\overline{u}\times\overline{v})=\overline{u}\times\dfrac{d\overline{v}}{dt}+\dfrac{d\overline{u}}{dt}\times\overline{v}$.

Здесь $\overline{u}$ и $\overline{v}$ – векторные функции скалярного аргумента t.

Доказательство

а) 1. Приращение $\Delta(\overline{u}\overline{v})=(\overline{u}+\Delta\overline{u})(\overline{v}+\Delta\overline{v})-\overline{u}\overline{v}=\overline{u}\overline{v}+\overline{u}\cdot\Delta\overline{v}+\Delta\overline{u}\cdot\overline{v}+$ $+\Delta\overline{u}\cdot\Delta\overline{v}-\overline{u}\overline{v}=\Delta\overline{u}\cdot\overline{v}+\overline{u}\cdot\Delta\overline{v}+\Delta\overline{u}\cdot\Delta\overline{v}$;

2. $\dfrac{\Delta(\overline{u}\cdot\overline{v})}{\Delta t}=\overline{u}\cdot\dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}+\overline{v}\cdot\dfrac{\Delta\overline{u}}{\Delta t}+\Delta\overline{u}\cdot\dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}$;

3. $\dfrac{d(\overline{u}\cdot\overline{v})}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta(\overline{u}\cdot\overline{v})}{\Delta t}=\overline{u}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}+\overline{v}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\overline{u}}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\Delta\overline{u}\cdot\dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}\right)=$

$=\overline{u}\dfrac{d\overline{v}}{dt}+\overline{v}\dfrac{d\overline{u}}{dt}+0\cdot\dfrac{d\overline{v}}{dt}\Rightarrow\underline{\underline{\dfrac{d(\overline{u}\cdot\overline{v})}{dt}=\overline{u}\dfrac{d\overline{v}}{dt}+\overline{v}\dfrac{d\overline{u}}{dt}}}$ ($\Delta\overline{u}\to 0$ при $\Delta t\to 0$, так как $\overline{u}=\overline{u}(t)$ считается непрерывной векторной функцией скалярного аргумента t), ч. т. д.

б) 1. Приращение $\Delta(\overline{u}\times\overline{v})=(\overline{u}+\Delta\overline{u})\times(\overline{v}+\Delta\overline{v})-\overline{u}\times\overline{v}=\overline{u}\times\overline{v}+$ $+\overline{u}\times\Delta\overline{v}+\Delta\overline{u}\times\overline{v}+\Delta\overline{u}\times\Delta\overline{v}-\overline{u}\times\overline{v}$;

2. $\dfrac{\Delta(\overline{u}\times\overline{v})}{\Delta t}=\overline{u}\times\dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}+\dfrac{\Delta\overline{u}}{\Delta t}\times\overline{v}+\Delta\overline{u}\times\dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}$;

3. $\dfrac{d(\overline{u}\times\overline{v})}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta(\overline{u}\times\overline{v})}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\overline{u}\times\dfrac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}\right)+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\dfrac{\Delta\overline{u}}{\Delta t}\times\overline{v}\right)+$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta\bar{u}\times\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}\right)=\bar{u}\times\frac{d\bar{v}}{dt}+\frac{d\bar{u}}{dt}\times\bar{v}+\bar{0}\times\frac{d\bar{v}}{dt}\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d(\bar{u}\times\bar{v})}{dt}=\bar{u}\times\frac{d\bar{v}}{dt}+\frac{d\bar{u}}{dt}\times\bar{v}}},$$

ч. т. д.

2 (3361). Дано $\bar{r}=\bar{r}(t)$. Найти производные:

а) $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}^2\right)$; б) $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\right)$; в) $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)$; г) $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)$.

Решение

Применяем формулы предыдущего номера.

а) $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\cdot\bar{r}\right)=\frac{d\bar{r}}{dt}\bar{r}+\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}=2\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot$

С другой стороны, $\bar{r}^2=\bar{r}\cdot\bar{r}=|\bar{r}|\cdot\bar{e}\cdot|\bar{r}|\cdot\bar{e}=|\bar{r}|^2\bar{e}\cdot\bar{e}=|\bar{r}|^2$ ($\bar{e}$ – орт). Тогда

$$\frac{d\left(\bar{r}^2\right)}{dt}=\frac{d\left(|\bar{r}|^2\right)}{dt}=2|\bar{r}|\frac{d|\bar{r}|}{dt}.$$

Итак, $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}^2\right)=\underline{\underline{2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}=2|\bar{r}|\frac{d|\bar{r}|}{dt}}}$.

б) $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}+\bar{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\underline{\underline{\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2+\bar{r}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}}}$.

в) $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d\bar{r}}{dt}+\bar{r}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\underline{\underline{\bar{r}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}}}\ \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d\bar{r}}{dt}=0\right)$.

г) $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)$.

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t) = (x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тогда

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \quad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Смешанное произведение: $\bar{r}\,\frac{d\bar{r}}{dt}\,\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = x\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} +$

$$+ y\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + z\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - z\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\,\frac{d\bar{r}}{dt}\,\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} + y\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + z\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - z\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \right.$$

$$\left. - x\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Продифференцируем каждое слагаемое отдельно:

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} + x\frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^2z}{dt^2} + x\frac{dy}{dt}\frac{d^3z}{dt^3};$$

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{dz}{dt}\frac{d^3x}{dt^3};$$

$$\frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{dx}{dt}\frac{d^3y}{dt^3};$$

$$\frac{d}{dt}\left(-z\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\frac{dz}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^2x}{dt^2} - z\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3};$$

$$\frac{d}{dt}\left(-x\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{dz}{dt}\frac{d^3y}{dt^3};$$

$$\frac{d}{dt}\left(-y\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)=-\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2z}{dt^2}-y\frac{dx}{dt}\frac{d^3z}{dt^3}.$$

Сложив шесть указанных выше уравнений, после сокращения подобных членов получим

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)=x\frac{dy}{dt}\frac{d^3z}{dt^3}+y\frac{dz}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}+z\frac{dx}{dt}\frac{d^3y}{dt^3}-z\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}-$$

$$-x\frac{dz}{dt}\frac{d^3y}{dt^3}-y\frac{dx}{dt}\frac{d^3z}{dt^3}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^3x}{dt^3} & \frac{d^3y}{dt^3} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix}=\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}.$$

Таким образом, $\frac{d}{dt}\left(\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)=\underline{\underline{\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}}}.$

3 (3362). Дано, что при всех значениях t векторы $\bar{r}(t)$ и $\frac{d\bar{r}}{dt}$ коллинеарны. Доказать, что векторы $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2},\ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3},\ldots,\ \frac{d^n\bar{r}}{dt^n}$ коллинеарны вектору $\bar{r}(t)$.

Доказательство

Условие коллинеарности векторов $\bar{r}(t)$ и $\frac{d\bar{r}}{dt}$: $\frac{d\bar{r}}{dt}=\alpha(t)\bar{r}$. Тогда

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt} = \alpha'(t)\bar{r} + \alpha(t)\frac{d\bar{r}}{dt} = \alpha'(t)\bar{r} + \alpha^2(t)\bar{r} = \underbrace{\left[\alpha'(t) + \alpha^2(t)\right]}_{\beta(t)}\bar{r} = \beta(t)\bar{r} \Rightarrow$$

$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ и $\bar{r}$ – коллинеарны. Аналогично $\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}$ и $\bar{r}$ коллинеарны и т. д.

Можно рассуждать иначе. Поскольку, с одной стороны, вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ направлен по касательной к годографу вектора $\bar{r}$, а по условию $\frac{d\bar{r}}{dt}$ и $\bar{r}$, коллинеарны, то годографом $\bar{r}$ есть прямая линия и, естественно, $\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ и т. д. направлены вдоль этой прямой, т. е. векторы $\bar{r}$, $\frac{d\bar{r}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ и т. д. между собою коллинеарны.

4 (3363). Доказать, что если $|\bar{r}|$ функции $\bar{r}(t)$ остается постоянным для всех значений t, то $\frac{d\bar{r}}{dt} \perp \bar{r}$. Каков геометрический смысл этого факта? Имеет ли место обратная теорема?

Доказательство

Рассмотрим скалярное произведение $\bar{r}\cdot\bar{r} = |\bar{r}|^2 = \text{const}$. Тогда $2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} = 0$ и $\bar{r} \perp \frac{d\bar{r}}{dt}$. Годографом $\bar{r}(t)$ являются кривые, принадлежащие сфере радиуса $R = |\bar{r}(t)|$. Векторы $\frac{d\bar{r}}{dt}$, направленные по касательным к годографу, будут перпендикулярными к $\bar{r}(t)$.

Обратное утверждение также справедливо, что доказывается от противного.

5 (3364). Дано $\bar{r} = \bar{a}\cos\omega t + \bar{b}\sin\omega t$, где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – постоянные величины. Доказать, что 1) $\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \omega\,\bar{a} \times \bar{b}$ и 2) $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \omega^2\bar{r} = 0$.

Доказательство

1) $\frac{d\bar{r}}{dt} = -\bar{a}\omega\sin\omega t + \bar{b}\omega\cos\omega t$, векторное произведение $\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} =$

$$= \left(\bar{a}\cos\omega t + \bar{b}\sin\omega t\right) \times \left(-\bar{a}\omega\sin\omega t + \bar{b}\omega\cos\omega t\right) = -\bar{a} \times \bar{a}\omega\cos\omega t\sin\omega t -$$

$$-\bar{b} \times \bar{a}\omega\sin^2\omega t + \bar{a} \times \bar{b}\omega\cos^2\omega t + \bar{b} \times \bar{b}\omega\sin\omega t\cos\omega t = \bar{a} \times \bar{b}\omega\sin^2\omega t +$$

$$+\bar{a} \times \bar{b}\omega\cos^2\omega t = \omega\,\bar{a} \times \bar{b}\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) = \underline{\underline{\omega\,\bar{a} \times \bar{b}}}.$$

2) $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\bar{a}\omega^2\cos\omega t - \bar{b}\omega^2\sin\omega t$;

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \omega^2\bar{r} = -\bar{a}\omega^2\cos\omega t - \bar{b}\omega^2\sin\omega t + \bar{a}\omega^2\cos\omega t + \bar{b}\omega^2\sin\omega t = \underline{\underline{0}}.$$

6 (3365). Доказать, что если $\bar{e}$ – единственный вектор направления $\bar{E}$, то $\bar{e} \times d\bar{e} = \frac{\bar{E} \times d\bar{E}}{E^2}$.

Доказательство

$$\bar{E} = \left|\bar{E}\right|\bar{e} = E \cdot \bar{e}, \quad d\bar{E} = Ed\bar{e}, \quad \bar{E} \times d\bar{E} = \left(E \cdot \bar{e}\right) \times \left(Ed\bar{e}\right) = E^2\bar{e} \times d\bar{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{e} \times d\bar{e} = \frac{\bar{E} \times d\bar{E}}{E^2}}},$$ ч.т.д.

7 (3666). Доказать, что если $\bar{r} = \bar{a}e^{\omega t} + \bar{b}e^{-\omega t}$, где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – постоянные векторы, то $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} - \omega^2\bar{r} = 0$.

Доказательство

$$\frac{d\overline{r}}{dt}=\overline{a}\omega e^{\omega t}-\overline{b}\omega e^{-\omega t};\ \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\overline{a}\omega^2 e^{\omega t}+\overline{b}\omega^2 e^{-\omega t};$$

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}-\omega^2\overline{r}=\overline{a}\omega^2 e^{\omega t}+\overline{b}\omega^2 e^{-\omega t}-\overline{a}\omega^2 e^{\omega t}-\overline{b}\omega^2 e^{-\omega t}=\underline{\underline{0}},$$ ч. т. д.

8 (3367). $\overline{u}=\alpha(x,y,z,t)\overline{i}+\beta(x,y,z,t)\overline{j}+\gamma(x,y,z,t)\overline{k}$, где x, y, z – функции от t. Доказать, что $\frac{d\overline{u}}{dt}=\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$.

Доказательство

$u=f(x,y,z,t)$ и нам нужно найти полную производную:

$$\frac{d\overline{u}}{dt}=\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\underline{\underline{\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}}},$$

ч. т. д.

9 (3368). Дано: $\overline{r}=\overline{r}(u)$; $u=\varphi(x)$. Выразить производные $\frac{d\overline{r}}{dx}$, $\frac{d^2\overline{r}}{dx^2}$, $\frac{d^3\overline{r}}{dx^3}$ через $\frac{d\overline{r}}{du}$, $\frac{d^2\overline{r}}{du^2}$, $\frac{d^3\overline{r}}{du^3}$.

Решение

$$\frac{d\overline{r}}{dx}=\frac{d\overline{r}}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\underline{\underline{\frac{d\overline{r}}{du}\varphi'}};$$

$$\frac{d^2\overline{r}}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\overline{r}}{du}\varphi'\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\overline{r}}{du}\right)\varphi'+\frac{d\overline{r}}{du}\frac{d}{dx}(\varphi')=\frac{d}{du}\left(\frac{d\overline{r}}{du}\right)\frac{du}{dx}\varphi'+\frac{d\overline{r}}{du}\varphi''=$$

$$=\underline{\underline{\frac{d^2\overline{r}}{du^2}\varphi'^2+\frac{d\overline{r}}{du}\varphi''}};$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\bar{r}}{du^2}\varphi'^2+\frac{d\bar{r}}{du}\varphi''\right)=\frac{d^3\bar{r}}{du^3}\varphi'^3+2\frac{d^2\bar{r}}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{d^2\bar{r}}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{d\bar{r}}{du}\varphi'''=$$

$$=\underline{\underline{\frac{d^3\bar{r}}{du^3}\varphi'^3+3\frac{d^2\bar{r}}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{d\bar{r}}{du}\varphi'''.}}$$

10 (3369). Доказать, что если для векторной функции $\bar{r}=\bar{r}(t)$ имеет место соотношение $\dfrac{d\bar{r}}{dt}=\alpha\bar{r}$, где $\alpha=\text{const}$, то годографом функции $\bar{r}(t)$ является луч, выходящий из полюса.

Доказательство

Условие $\dfrac{d\bar{r}}{dt}=\alpha\bar{r}$ является условием коллинеарности векторов $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ и $\bar{r}$. Вектор $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ направлен по касательной к годографу функции $\bar{r}(t)$, но поскольку $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ и $\bar{r}$ коллинеарны, то годографом функции $\bar{r}(t)$ является луч, выходящий из полюса.

11 (3370). Пусть функция $\bar{r}(t)$ определена, непрерывна и дифференцируема в интервале (t_1, t_2), причем $\bar{r}(t_1)=\bar{r}(t_2)$. Применить теорему Ролля к функции $\bar{a}\bar{r}$, где $\bar{a}$ – произвольный постоянный вектор. Объяснить результат геометрически.

Решение

Теорема Ролля (о корнях производной): если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и на концах $x=a$ и $x=b$ принимает равные значения, то существует, по крайней мере, одна такая точка $c\in(a,b)$, что $f'(c)=0$.

Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{r}=f(t)$. По теореме Роля, существует, по крайней мере, одна такая точка $\tau\in(t_1,t_2)$, что $f'(\tau)=0$:

$$f'(t)=\frac{d\bar{a}}{dt}\bar{r}+\bar{a}\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{a}\frac{d\bar{r}}{dt};\ f'(\tau)=0\Rightarrow\bar{a}\cdot\frac{d\bar{r}(\tau)}{dt}=0\Rightarrow\bar{a}\perp\frac{d\bar{r}(\tau)}{dt}.$$

В силу равенства $\bar{r}(t_1)=\bar{r}(t_2)$ следует, что годограф $\bar{r}(t)$ есть замкнутая линия. Поскольку $\bar{a}\perp\dfrac{d\bar{r}(\tau)}{dt}$, то на этой линии найдется такая точка τ, в которой касательная перпендикулярна к любому наперед заданному направлению $\bar{a}$.

12 (3371). Дан радиус-вектор движущейся в пространстве точки $\bar{r}\{a\sin t,\,-a\cos t,\,bt^2\}$ (t – время, a и b – постоянные). Найти годографы скорости и ускорения.

Решение

Годограф скорости $\bar{v}=\dfrac{d\bar{r}}{dt}=\{a\cos t,\,a\sin t,\,2bt\}$ – винтовая линия; годограф ускорения $\bar{w}=\dfrac{d\bar{v}}{dt}=\{-a\sin t,\,a\cos t,\,2b\}$ – окружность.

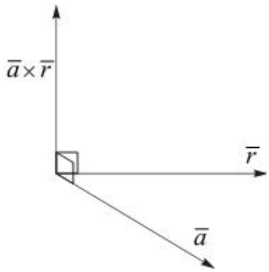
13 (3772). Найти траекторию движения, для которого радиус-вектор движущейся точки удовлетворяет условию $\dfrac{d\bar{r}}{dt}=\bar{a}\times\bar{r}$, где $\bar{a}$ – постоянный вектор.

Решение

Скалярное произведение $\bar{a}\dfrac{d\bar{r}}{dt}=\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{r})=0$ и $\bar{r}\dfrac{d\bar{r}}{dt}=\bar{r}\cdot(\bar{a}\times\bar{r})=0$, так как углы $(\bar{a}\wedge(\bar{a}\times\bar{r}))=90^\circ$ и $(\bar{r}\wedge(\bar{a}\times\bar{r}))=90^\circ$.

Из $\bar{a}\dfrac{d\bar{r}}{dt}=0\Rightarrow\bar{a}\bar{r}=\text{const}=c_1$. Если в последнем равенстве положить $\bar{a}=\{l,m,n\}$, $\bar{r}=\{x,y,z\}$, получим $lx+my+nz-c_1=0$ – уравнение плоскости.

Из $\bar{r}\frac{\bar{r}}{dt}=0 \Rightarrow \ \bar{r}^2=\text{const}=c_2>0$, откуда $x^2+y^2+z^2=c_2$ – уравнение сферы. Искомая траектория – окружность, плоскость которой перпендикулярна вектору $\bar{a}$.



14 (3773). Материальная точка движется по закону $\bar{r}=\bar{v}_0 t+\frac{1}{2}\bar{g}t^2$ ($\bar{r}$ – радиус-вектор этой точки в момент t; $\bar{v}_0$ и $\bar{g}$ – заданные векторы). Показать, что

1) кинетическая энергия материальной точки есть квадратичная функция времени:

$$T=\frac{mv^2}{2};\quad x=r_x=v_{0x}t+\frac{1}{2}g_x t^2;\quad y=r_y=v_{0y}t+\frac{1}{2}g_y t^2$$

Так как $g_x=0,\ g_y=g$,

$$v_x=\frac{dx}{dt}=v_{0x};\qquad v_y=\frac{dy}{dt}=v_{0y}+gt;$$

$$v^2=v_x^2+v_y^2=v_{0x}^2+\left(v_{0y}+gt\right)^2=g^2t^2+2gv_{0y}t+v^2;$$

$$T=\frac{m}{2}\left(g^2t^2+2gv_{0y}t+v^2\right),$$

2) $\bar{v}_0$ – начальная скорость, т. е. значение вектора скорости в момент времени $t=0$,

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{v}_0}{dt}t+\bar{v}_0+\frac{1}{2}\frac{d\bar{g}}{dt}t^2+\bar{g}t=\bar{v}_0+\bar{g}t.\quad \text{При } t=0\quad \bar{v}\Big|_{t=0}=v_0;$$

3) движение происходит с постоянным ускорением, равным вектору $\bar{g}$:

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{g}t;\qquad \bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d\bar{v}_0}{dt}+\bar{g}=\bar{g}=\text{const};$$

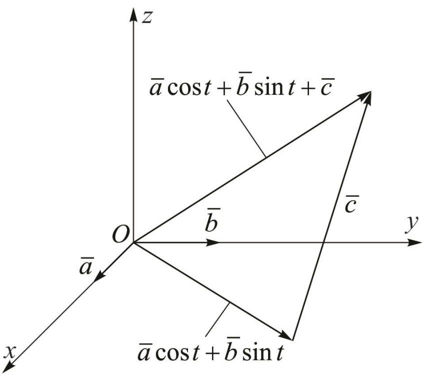
4) движение происходит по параболе (если векторы $\bar{v}_0$ и $\bar{g}$ не коллинеарны), ось которой параллельна вектору $\bar{g}$:

$$x = r_x = v_{0x}t + \frac{1}{2}g_x t^2 = v_{0x}t; \qquad y = r_y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Из первого уравнения получаем $t = \dfrac{x}{v_{0x}}$, тогда $y = \dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}x + \dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{v_{0x}^2}$ – уравнение параболы. Это уравнение преобразуется так: $y + \dfrac{1}{2g} = \dfrac{g}{2v_{0x}^2}\left(x + \dfrac{v_{0x}}{g}\right)^2$. Вершина параболы $O_1\left(-\dfrac{v_{0x}}{g}, -\dfrac{1}{2g}\right)$, ее ветви направлены вверх, т. е. ось параболы параллельна вектору $\bar{g}$, который направлен вертикально вниз.

15 (3774). Закон движения материальной точки задан формулой $\bar{r} = \bar{a}\cos t + \bar{b}\sin t + \bar{c}$, где векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Определить траекторию движения. В какие моменты скорость движения будет экстремальной? В какие моменты ускорение будет экстремальным?

Решение



Расположим ось Ox вдоль вектора $\bar{a}$, Oy – вдоль вектора $\bar{b}$.

Найдем проекции:

$$x = r_x = a\cos t + c_x;$$

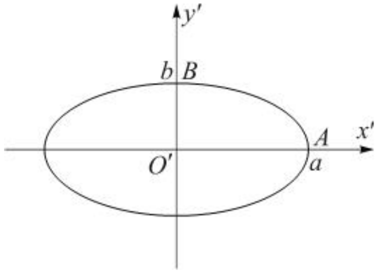
$$y = r_y = b\sin t + c_y;$$

$$z = r_z = c_z.$$

$$\underbrace{x - c_x}_{x'} = a\cos t; \ \underbrace{x - c_y}_{y'} = b\sin t;$$

$$\underbrace{z - c_z}_{z'} = 0.$$

Параметрические уравнения кривой: $x' = a\cos t$, $y' = b\sin t$. Это эллипс с полуосями a и b.



Найдем экстремальные значения скорости:

$v_x = -a\sin t,\ v_y = b\cos t,\ v_z = 0;$

$$v = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t};$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sin 2t\left(a^2 - b^2\right)}{2\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}},$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ при } 2t = k\pi\ \left(k \in z\right);$$

$$t = \frac{k}{2}\pi;\ t_1 = 0;\ t_{2,3} = \pm\frac{\pi}{2},\ \ldots$$

Точки экстремума вычисляем с помощью таблицы

t	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$	0	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$
v'_t	0	–	0	+	0	–
v		↘	min	↗	max	↘

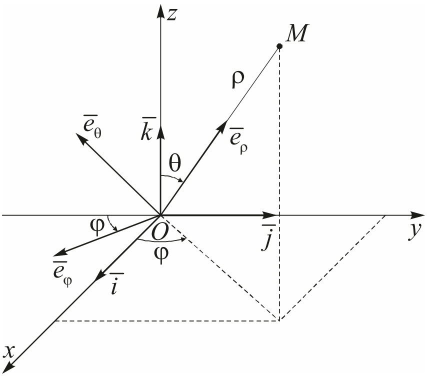
При $t = 0$ $x' = a$, $y' = 0$, т. е. в точке $A(a, 0)$ будет минимум скорости; при $t = \frac{\pi}{2}$ $x' = 0$, $y' = 0$, т. е. в точке $B(0, b)$ будет максимум скорости.

Теперь найдем экстремальное значение ускорения:

$$w_x = -a\cos t;\ w_y = -b\sin t;\ w_z = 0.$$

Аналогично можно показать, что в точке $A(a, 0)$ будет max ускорения, а в точке $B(0, b)$ – min ускорения.

16 (3375).Формулы преобразования декартовых координат в сферические имеют вид $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, где ρ – расстояние данной точки от полюса; θ – ее широта; φ – азимут или долгота. Найти компоненты скорости движения материальной точки в направлениях единичных ортогональных векторов $\bar{e}_\rho$, $\bar{e}_\theta$ и $\bar{e}_\varphi$.



Решение

$\bar{e}_\rho \perp \bar{e}_\theta$, $\bar{e}_\theta \perp \bar{e}_\varphi$, $\bar{e}_\varphi \perp \bar{e}_\rho$ и $\bar{e}_\varphi$ лежит в плоскости Oxy.

$\bar{e}_\rho = \sin\theta\cos\varphi\,\bar{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\bar{j} + {}$
$+ \cos\theta\,\bar{k}$, $\bar{e}_\varphi = \sin\varphi\,\bar{i} - \cos\varphi\,\bar{j}$,

$$\bar{e}_\theta = \bar{e}_\varphi \times \bar{e}_\rho =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos\varphi\cos\theta\,\bar{i} - \sin\varphi\cos\theta\,\bar{j} + \sin\theta\,\bar{k}.$$

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} =$$

$$= \left(\frac{d\rho}{dt}\sin\theta\cos\varphi + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi - \rho\sin\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)\bar{i} +$$

$$+\left(\frac{d\rho}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi + \rho\sin\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)\bar{j} + \left(\frac{d\rho}{dt}\cos\theta - \rho\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\bar{k}.$$

$$\text{Пр}_{\bar{e}_\rho}\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{e}_\rho = \frac{d\rho}{dt}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{d\theta}{dt} -$$

$$-\rho\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta\frac{d\theta}{dt} +$$

$$+\rho\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\cos^2\theta - p\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt} =$$

$$= \frac{d\rho}{dt}\left[\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \cos^2\theta\right] = \underline{\underline{\frac{d\rho}{dt}}}.$$

$$\text{Пр}_{\bar{e}_\varphi}\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{e}_\varphi = \frac{d\rho}{dt}\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + \rho\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{d\theta}{dt} -$$

$$-\rho\sin\theta\sin^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\rho}{dt}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi - \rho\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\theta}{dt} -$$

$$-\rho\sin\theta\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \underline{\underline{-\rho\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}}}.$$

$$\text{Пр}_{\bar{e}_\theta}\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{e}_\theta = -\frac{d\rho}{dt}\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta - \rho\cos^2\theta\cos^2\varphi\frac{d\theta}{dt} +$$

$$+\rho\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\frac{d\varphi}{dt} - \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\frac{d\rho}{dt} - \rho\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{d\theta}{dt} -$$

$$-\rho\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta\frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\sin\theta\frac{d\rho}{dt} - \rho\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \underline{\underline{-\rho\frac{d\theta}{dt}}}.$$

2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЛИНИИ

В задачах 17(3376)–24(3383) составить уравнение касательной прямой и нормальной плоскости для заданных линий в указанных точках.

17 (3376). $\bar{r}\left(\frac{t^4}{4};\frac{t^3}{3};\frac{t^2}{2}\right)$, т. е. $x=\frac{t^4}{4}$, $y=\frac{t^3}{3}$, $z=\frac{t^2}{2}$ в произвольной точке.

Решение

Уравнение касательной прямой для линии в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{\frac{dx}{ds}}=\frac{y-y_0}{\frac{dy}{ds}}=\frac{z-z_0}{\frac{dz}{ds}}.$$

Здесь x, y, z – текущие координаты на касательной, а x_0, y_0, z_0 – координаты точки касания, причем значения производных $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ берутся в точке касания:

$$dx=t^3dt;\ dy=t^2dt;\ dz=tdt;$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=t^2\sqrt{t^4+t^2+1}\,dt.$$

Подставив полученные значения dx, dy, dz и ds в уравнение касательной, получим

$$\underline{\underline{\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}}}.$$

Уравнение нормальной плоскости: $\frac{dx}{ds}(x-x_0)+\frac{dy}{ds}(y-y_0)+$ $+\frac{dz}{ds}(z-z_0)=0.$

В нашем случае имеем $\underline{\underline{t^2x + ty + z = \frac{t^6}{4} + \frac{t^4}{3} + \frac{t^2}{2}}}$.

18 (3377). $x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi,\quad z = \frac{k}{2\pi}\varphi$ в данной точке $M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{8}\right)$. Доказать, что касательная во всех точках линии составляет с осью Oz один и тот же угол.

Решение

$$dx = -a\sin\varphi\, d\varphi,\ dx = a\cos\varphi\, d\varphi,\ dz = \frac{k}{2\pi}d\varphi;$$

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi + \frac{k^2}{4\pi^2}}\, d\varphi = \sqrt{a^2 + \frac{k^2}{4\pi^2}}d\varphi;$$

$$\frac{k}{8} = \frac{k}{2\pi}\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4};\ x_M = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ y_M = a\sin\frac{\pi}{4} = a\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_M = \frac{k}{8};$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_M = -\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2 + \frac{k^2}{4\pi^2}}};\ \left(\frac{dy}{ds}\right)_M = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2 + \frac{k^2}{4\pi^2}}};\ \left(\frac{dz}{ds}\right)_M = \frac{k}{2\pi\sqrt{a^2 + \frac{k^2}{4\pi^2}}}.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\underline{\underline{\frac{x - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-a\sqrt{2}} = \frac{y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{z - \frac{k}{8}}{\frac{k}{\pi}}}}.$$

Уравнение касательной плоскости: $\frac{-a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2 + \frac{k^2}{4\pi^2}}}\left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) +$

$$+\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+\frac{k^2}{4\pi^2}}}\left(y-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{k}{2\pi\sqrt{a^2+\frac{k^2}{4\pi^2}}}\left(z-\frac{k}{8}\right)=0 \text{ или}$$

$$\underline{\underline{-x+y+\frac{k}{\pi a\sqrt{2}}z=\frac{k^2}{8\pi a\sqrt{2}}}}.$$

Направляющий вектор прямой: $\bar{e}=-a\sqrt{2}\bar{i}+a\sqrt{2}\bar{j}+\frac{k}{\pi}\bar{k}$.

Пусть $\overline{m}$ – вектор, направленный вдоль оси Oz. Тогда $\overline{m}=p\bar{k}$ ($p=\text{const}$),

$$\underline{\underline{\cos\gamma=\frac{\bar{e}\cdot\overline{m}}{|\bar{e}||\overline{m}|}=\frac{-a\sqrt{2}\cdot 0+a\sqrt{2}\cdot 0+\frac{k}{\pi}\cdot p}{\sqrt{4a^2+\frac{k^2}{\pi^2}}}=\text{const}.}}$$

19 (3378). $x=at,\ y=\frac{1}{2}at^2,\ z=\frac{1}{3}at^3$ в точке $M(6a,18a,72a)$.

Решение

$$6a=at \Rightarrow t=6;\quad dx=adt;\quad dy=atdt;\quad dz=at^2dt.$$

$$dx(M)=a;\quad dy(M)=6a;\quad dz(M)=36a.$$

$$ds=\sqrt{a^2+6^2a^2+36^2a^2}\,dt=\sqrt{1333}\,adt.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\underline{\underline{x-6a=\frac{y-18a}{6}=\frac{z-72a}{36}}}.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$(x-6a)\frac{1}{\sqrt{1333}}+(y-18a)\frac{6}{\sqrt{1333}}+(z-72a)\frac{36}{\sqrt{1333}}=0$$

или $\underline{\underline{x+6y+36z=2706a}}$.

20 (3379). $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=\varphi\sin\frac{t}{2}$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2}-1;\ 1;\ 2\sqrt{2}\right)$.

Решение

$$\varphi\sin\frac{t}{2}=2\sqrt{2}\Rightarrow\ \sin\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ и }\ t=\frac{\pi}{2};$$

$$dx=1-\cos t;\quad dy=\sin t;\quad dz=2\cos\frac{t}{2};$$

$$dx(M)=1;\quad dy(M)=1;\quad dz(M)=\sqrt{2}.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\underline{\underline{\frac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\underline{\underline{x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.}}$$

21 (3380). $y^2+z^2=25$, $x^2+y^2=10$ в точке $M(1;3;4)$.

Решение

Запишем уравнения данных круговых цилиндров таким образом:

$$F_1(x,y,z)=y^2+z^2-25;\ F_2(x,y,z)=x^2+y^2-10.$$

Уравнение касательной прямой к линии пересечения поверхностей в точке M записывается так:

$$\frac{x-x_0}{\underbrace{\begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}}_{\Delta_1}}=\frac{y-y_0}{\underbrace{\begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix}}_{\Delta_2}}=\frac{z-z_0}{\underbrace{\begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix}}_{\Delta_3}}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке M:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F'_{1x} & F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2x} & F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}=0.$$

$$F'_{1x}=0; \qquad F'_{1y}=2y; \quad F'_{1z}=2z.$$

$$F'_{2x}=2x; \qquad F'_{2y}=2y; \quad F'_{2z}=0.$$

В точке $M(1;3;4)$ эти производные равны соответственно: $F'_{1x}=0$; $F'_{1y}=6y$; $F'_{1z}=8$; $F'_{2x}=2$; $F'_{2y}=6$; $F'_{2z}=0$.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}=-48; \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=16; \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=-12.$$

Подставив найденные значения в уравнение касательной прямой, имеем $\frac{x-1}{-48}=\frac{y-3}{16}=\frac{y-4}{-12}$ или $\underline{\underline{\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}}}.$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}=0 \text{ или } \underline{\underline{12x-4y+3z-12=0}}.$$

22 (3381). $2x^2+3y^2+z^2=47$; $x^2+2y^2=z$ в точке $M(-2;\ 1;\ 6)$.

Решение

$$F_1(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-47;$$

$$F_2(x,y,z)=x^2+2y^2-z.$$

$$F'_{1x}=4x;\qquad F'_{1y}=6y;\qquad F'_{1z}=2z.$$

$$F'_{2x}=2x;\qquad F'_{2y}=4y;\qquad F'_{2z}=-1.$$

В точке M эти производные равны соответственно:

$$F'_{1x}=-8;\qquad F'_{1y}=6;\qquad F'_{1z}=12.$$

$$F'_{2x}=-4;\qquad F'_{2y}=4;\qquad F'_{2z}=-1.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\frac{x+2}{\begin{vmatrix}6 & 12\\ 4 & -1\end{vmatrix}}=\frac{y-1}{\begin{vmatrix}12 & -8\\ -1 & -4\end{vmatrix}}=\frac{z-6}{\begin{vmatrix}-8 & 6\\ -4 & 4\end{vmatrix}},$$

откуда $\dfrac{x+2}{-54}=\dfrac{y-1}{-56}=\dfrac{z-6}{-8}$ или $\underline{\underline{\dfrac{x+2}{27}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z-6}{4}}}.$

Уравнение касательной плоскости:

$$\begin{vmatrix}x+2 & y-1 & z-6\\ -8 & 6 & 12\\ -4 & 4 & -1\end{vmatrix}=0 \text{ или } \underline{\underline{27x+28y+4z+2=0}}.$$

23 (3382). $x^2+y^2=z^2;\ x=y$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$.

Решение

$$F_1(x,y,z)=x^2+y^2-z^2;\qquad F_2(x,y,z)=x-y.$$

$$F'_{1x}=2x;\qquad F'_{1y}=2y;\qquad F'_{1z}=-2z.$$

$$F'_{2x}=1;\qquad F'_{2y}=-1;\qquad F'_{2z}=0.$$

В точке M производные равны соответственно:

$$F'_{1x}=2x_0;\qquad F'_{1y}=2y_0;\qquad F'_{1z}=-2z_0.$$

$$F'_{2x}=1;\qquad F'_{2y}=-1;\qquad F'_{2z}=0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2y_0 & -2z_0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2z_0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2z_0 & 2x_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2z_0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x_0 - 2y_0.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\underline{\underline{\frac{x-x_0}{z_0} = \frac{y-y_0}{z_0} = \frac{z-z_0}{x_0+y_0}}}\,.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x-x_0)2z_0 - (y-y_0)2z_0 - 2(z-z_0)(x_0+y_0) = 0;$$

$$(x-x_0)z_0 + (y-y_0)z_0 + (z-z_0)(x_0+y_0) = 0 \text{ или } \underline{\underline{\frac{x+y}{x_0+y_0} + \frac{z}{z_0} = 2}}\,.$$

24 (3383). $x^3 + z^3 = a^3$, $y^3 + z^3 = b^3$ в произвольной точке $M(x, y, z)$.

$F_1(x,y,z) = x^3 + z^3 - a^3$; $\quad F_2(x,y,z) = y^3 + z^3 - b^3$.

$$F'_{1x} = 3x^2; \qquad F'_{1y} = 0; \qquad F'_{1z} = 3z^2.$$

$$F'_{2x} = 0; \qquad F'_{2y} = 3y^2; \quad F'_{2z} = 3z^2.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3z^2 \\ 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix} = -9y^2z^2; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3z^2 & 3x^2 \\ 3z^2 & 0 \end{vmatrix} = -9x^2z^2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{vmatrix} = 9x^2y^2.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\underline{\underline{\frac{x-x_0}{y_0^2z_0^2}=\frac{y-y_0}{x_0^2z_0^2}=\frac{z-z_0}{-x_0^2y_0^2}}}.$$

Аналогично уравнение касательной плоскости:

$$\underline{\underline{\frac{x-x_0}{x_0^2}+\frac{y-y_0}{y_0^2}-\frac{z-z_0}{z_0^2}=0}}.$$

25 (3384). На линии $\bar{r}\{\cos t, \sin t, e^t\}$ найти точку, касательная в которой параллельна плоскости $\sqrt{3}x+y-4=0$.

Решение

Направляющий вектор касательной к данной кривой $\bar{a}=\left\{(\cos t)', (\sin t)', (e^t)'\right\}=\{-\sin t, \cos t, e^t\}$.

Нормальный вектор плоскости $\bar{n}=\{\sqrt{3}, 1, 0\}$.

Следовательно, $\bar{a}\perp\bar{n}\Rightarrow\bar{a}\cdot\bar{n}=0;\ -\sqrt{3}\sin t+\cos t=0\Rightarrow\ \operatorname{tg} t=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow$ $\underline{t=\frac{\pi}{6}}$.

$$\bar{r}=\left\{\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}, e^{\frac{\pi}{6}}\right\}=\underline{\underline{\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, e^{\frac{\pi}{6}}\right\}}}.$$

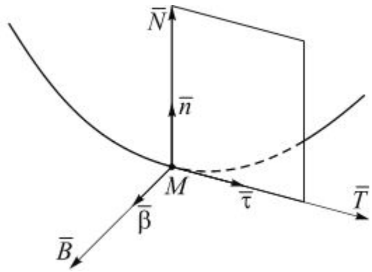
В задачах 26 (3385)–28 (3387) составить уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали к данным линиям в указанных точках.

Дадим некоторые определения.

Касательной к линии в данной точке M называется предельное положение секущей, проходящей через данную точку M и бесконечно близкую к ней точку линии.

Соприкасающейся плоскостью в данной точке M называется предельное положение плоскости, проходящей через касательную в данной точке и через бесконечно близкую к M точку кривой.

Всякая прямая, проходящая через данную точку M пространственной кривой и перпендикулярная касательной в этой точке, называется ***нормалью***.



Главной нормалью пространственной кривой в данной точке называется та нормаль, которая лежит в соприкасающейся плоскости.

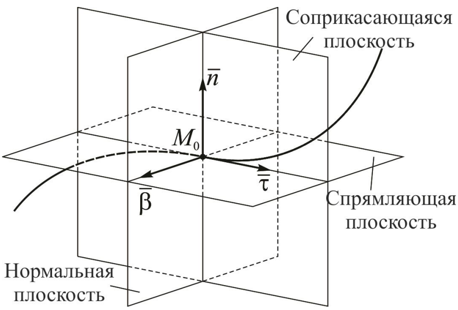
Бинормалью называется та нормаль, которая перпендикулярна соприкасающейся плоскости.

Во всякой неособой точке $M(x, y, x)$ пространственной кривой $\overline{r} = \overline{r}(t)$ можно построить три взаимно перпендикулярных вектора:

$\overline{T} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$ – направляющий вектор касательной;

$\overline{B} = \dfrac{d\overline{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ – направляющий вектор бинормали;

$\overline{N} = \overline{B} \times \overline{T}$ – направляющий вектор главной нормали.



Им соответствуют такие ***единичные*** векторы: $\overline{\tau} = \dfrac{\overline{T}}{\left|\overline{T}\right|}$; $\overline{\beta} = \dfrac{\overline{B}}{\left|\overline{B}\right|}$; $\overline{n} = \dfrac{\overline{N}}{\left|\overline{N}\right|}$, которые вычисляются по формулам:

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds};\ \overline{n} = \frac{\dfrac{d^2\overline{r}}{ds^2}}{\left|\dfrac{d^2\overline{r}}{ds^2}\right|};\ \overline{\beta} = \overline{\tau} \times \overline{n}.$$

Трехгранник с вершиной в точке M_0, ребрами которого служат касательная, главная нормаль и бинормаль, называется ***естественным трехгранником*** или ***трехгранником Френе*** пространственной кривой.

Уравнение главной нормали:

$$\frac{x-x_0}{N_x}=\frac{y-y_0}{N_y}=\frac{z-z_0}{N_z}, \tag{1}$$

где x, y, z – текущие координаты точки главной нормали; N_x, N_y, N_z – проекции главной нормали N.

Уравнение бинормали:

$$\frac{x-x_0}{B_x}=\frac{y-y_0}{B_y}=\frac{z-z_0}{B_z}. \tag{2}$$

Уравнение соприкасающейся плоскости:

$$B_x\left(x-x_0\right)+B_y\left(y-y_0\right)+B_z\left(z-z_0\right)=0. \tag{3}$$

Уравнение спрямляющей плоскости:

$$N_x\left(x-x_0\right)+N_y\left(y-y_0\right)+N_z\left(z-z_0\right)=0. \tag{4}$$

26 (3385). $y^2=x$, $x^2=z$ в точке $(1;1;1)$.

Решение

Пространственная кривая задается как пересечение двух поверхностей $\begin{cases} y^2=x, \\ x^2=z. \end{cases}$

Удобно рассматривать вместо векторов $\dfrac{d\overline{r}}{dt}$ и $\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ векторы $d\overline{r}=\{dx,\, dy,\, dz\}$ и $d^2\overline{r}=\{d^2x,\, d^2y,\, d^2z\}$, причем можно считать одну из переменных x, y, z независимой и ее второй дифференциал равным нулю.

$$\begin{cases} x-y^2=0, \\ z-x^2=0. \end{cases}$$

Дифференцируем данные уравнения, считая, например, x независимой переменной:

$$\begin{cases} dx-2y\,dy=0, \\ dz-2x\,dx=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -2\,dy^2-2y\,d^2y=0, \\ d^2z-2\,dx^2=0 \end{cases}$$

При $x=1$, $y=1$ и $z=1$ имеем:

$$\begin{cases} dx-2dy=0 \\ dz-2dx=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy=\dfrac{1}{2}dx \\ dz=2\,dx \end{cases}$$

$$-2\,dy^2-2\,d^2y=0; \qquad d^2y=-\frac{1}{4}dx^2; \qquad d^2z=2\,dx^2.$$

Следовательно, $d\bar{r}=\left\{dx,\ \dfrac{1}{2}dx,\ 2\,dx\right\}$; $d^2\bar{r}=\left\{0, -\dfrac{1}{4}dx^2,\ 2dx^2\right\}$.

Заменим эти векторы коллинеарными им: $\{2;\ 1;\ 4\}$ и $\{0;\ -1;\ 8\}$.

Тогда $\bar{T}=\{2;\ 1;\ 4\}$, $\bar{B}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix}=12\bar{i}-16\bar{j}-2\bar{k}=2\left(6\bar{i}-8\bar{j}-\bar{k}\right);$

$$\bar{N}=\bar{B}\times\bar{T}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 12 & -16 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-36\bar{i}-52\bar{j}+44\bar{k}=-2\left(31\bar{i}+26\bar{j}-22\bar{k}\right).$$

Отсюда находим:

уравнение соприкасающейся плоскости, по (3): $6(x-1)-8(y-1)-$ $-(z-1)=0$ или $\underline{\underline{6x-8y-z+3=0}}$;

уравнение главной нормали, по (1): $\underline{\underline{\dfrac{x-1}{31}=\dfrac{y-1}{26}=\dfrac{z-1}{-22}}}$;

уравнение бинормали, по (2): $\underline{\underline{\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z-1}{-1}}}.$

27 (3386). $x^2 = 2az$; $y^2 = 2bz$ в произвольной точке.

Решение

$$\begin{cases} x^2 - 2az = 0, \\ y^2 - 2bz = 0. \end{cases}$$

Выберем x в качестве параметра t, тогда из первого уравнения получим $z = \dfrac{t^2}{2a}$, а подставив z во второе, будем иметь $y = \sqrt{\dfrac{b}{a}}\,t$. Тогда

$$\bar{r} = \left\{t; \sqrt{\frac{b}{a}}\,t; \frac{t^2}{2a}\right\}; \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \left\{1; \sqrt{\frac{b}{a}}; \frac{t}{a}\right\} = \bar{T}; \quad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \left\{0; 0; \frac{1}{a}\right\};$$

$$\bar{B} = \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & \sqrt{\frac{b}{a}} & \frac{t}{a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\,\bar{i} - \frac{1}{a}\bar{j}, \text{ т. е. } \bar{B} = \left\{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}; -\frac{1}{a}; 0\right\};$$

$$\bar{N} = \bar{B} \times \bar{T} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & \sqrt{\frac{b}{a}} & \frac{t}{a} \\ \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} & -\frac{1}{a} & 0 \end{vmatrix} = \frac{t}{a^2}\bar{i} + \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{t}{a^2}\bar{j} + \left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a}\right)\bar{k}, \text{ т. е}$$

$$\bar{N} = \left\{\frac{t}{a^2}; \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{t}{a^2}; -\left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\right)\right\}.$$

Для записи требуемых уравнений воспользуемся векторами $\overline{B}_0=\left\{\sqrt{b};-\sqrt{a};0\right\}$ и $\overline{N}_0=\left\{t;\sqrt{\dfrac{b}{a}}t;-(a+b)\right\}=\left\{x_0;y_0;-(a+b)\right\}$, коллинеарными векторам бинормали и нормали соответственно.

Уравнение соприкасающейся плоскости согласно (3):

$$\underline{\underline{\sqrt{b}(x-x_0)-\sqrt{a}(y-y_0)=0}}.$$

Уравнение бинормали согласно (2): $\underline{\underline{\dfrac{x-x_0}{\sqrt{b}}=\dfrac{y-y_0}{-\sqrt{a}}=\dfrac{z-z_0}{0}}}$.

Уравнение главной нормали согласно (1): $\underline{\underline{\dfrac{x-x_0}{x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_0}=\dfrac{z-z_0}{-(a+b)}}}$.

28 (3387). $\bar{r}=\left\{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\right\}$ в точке $\left(e, e^{-1}, \sqrt{2}\right)$.

Решение

Запишем

$$\bar{r}=e^t\bar{i}+e^{-t}\bar{j}+t\sqrt{2}\bar{k};\quad \frac{d\bar{r}}{dt}=e^t\bar{i}-e^{-t}\bar{j}+\sqrt{2}\bar{k};\quad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=e^t\bar{i}+e^t\bar{j}+0\cdot\bar{k}.$$

$$\overline{T}=\left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{t=1}=e\bar{i}-e^{-1}\bar{j}+\sqrt{2}\,\bar{k};\ \left.\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|_{t=1}=e\bar{i}+e^{-1}\bar{j}:$$

$$\overline{B}=\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ e & -\dfrac{1}{e} & \sqrt{2}\\ e & \dfrac{1}{e} & 0\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{2}}{e}\bar{i}+\sqrt{2}e\,\bar{j}+2\bar{k};$$

$$\overline{N}=\overline{B}\times\overline{T}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{e} & \sqrt{2}e & 2\\ e & -\dfrac{1}{e} & \sqrt{2}\end{vmatrix}=\left(e+e^{-1}\right)2\bar{i}+\left(e+e^{-1}\right)2\,\bar{j}+\left(e^{-2}-e^{2}\right)\sqrt{2}\bar{k}.$$

При $t=1$ имеем $x=e,\ y=\frac{1}{e},\ z=\sqrt{2}$, тогда уравнение соприкасающейся плоскости, по (3): $-\frac{\sqrt{2}}{e}(x-e)+\sqrt{2}e\left(y-\frac{1}{e}\right)+2\left(z-\sqrt{2}\right)=0$ или $\frac{1}{e}(x-e)-e\left(y-\frac{1}{e}\right)-\sqrt{2}\left(z-\sqrt{2}\right)=0$, или $\underline{\underline{\frac{1}{e}x-ey-\sqrt{2}z+2=0.}}$

Уравнение главной нормали, по (1): $\frac{x-e}{2\left(e+e^{-1}\right)}=\frac{y-e^{-1}}{2\left(e+e^{-1}\right)}=$ $=\frac{z-\sqrt{2}}{-\left(e^{2}-e^{-2}\right)\sqrt{2}}$ или $\underline{\underline{\frac{x-e}{1}=\frac{y-e^{-1}}{1}=-\frac{z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\,\mathrm{sh}1}}}.$

Уравнение бинормали, по (2): $\underline{\underline{\frac{x-e}{-e^{-1}}=\frac{y-e^{-1}}{e}=-\frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}.$

29 (3388). Показать, что касательные, главные нормали и бинормали линии $\bar{r}=\left\{e^{t}\cos t;\ e^{t}\sin t;\ e^{t}\right\}$ составляют постоянные углы с осью Oz.

Решение

$$\bar{T}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\left\{e^{t}(\cos t-\sin t);\ e^{t}(\sin t+\cos t);\ e^{t}\right\}.$$

Рассмотрим вектор $\overline{T_0}=\{\cos t-\sin t;\ \sin t+\cos t;\ 1\}$, коллинеарный с $\bar{T}$. Угол между вектором $\overline{T_0}$ и осью Oz найдем из формулы

$$\cos\gamma_{\bar{T}}=\frac{T_{0z}}{\left|\overline{T_0}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \underline{\underline{\gamma_{\bar{T}}\approx 54{,}7^{\circ}=\mathrm{const}}}.$$

Вторая производная $\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \left\{-2e^t \sin t;\ 2e^t \cos t;\ e^t\right\}$, тогда направляющий вектор бинормали:

$$\overline{B} = \frac{d\overline{r}}{dt} \times \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2\sin t & 2\cos t & 1 \end{vmatrix} = (\sin t - \cos t)\overline{i} -$$

$$-(\cos t + \sin t)\overline{j} + 2\overline{k}.$$

Направляющий косинус вектора $\overline{B}$

$$\cos\gamma_{\overline{B}} = \frac{B_z}{\left|\overline{B}\right|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma_{\overline{B}} \approx 35{,}3^\circ = \text{const}}}.$$

Направляющий вектор главной нормали

$$\overline{N} = \overline{B} \times \overline{T} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \sin t - \cos t & -\cos t - \sin t & 2 \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \end{vmatrix} = -(3\sin t + 3\cos t)\overline{i} -$$

$$-(3\sin t - 3\cos t)\overline{j} + 0 \cdot \overline{k}.$$

Направляющий косинус вектора $\overline{N}$

$$\cos\gamma_{\overline{N}} = \frac{N_z}{\left|\overline{N}\right|} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma_{\overline{N}} = 90^\circ = \text{const}}}.$$

В задачах 30 (3389)–33 (3392) составить уравнения касательной прямой, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости к данным линиям в указанных точках.

30 (3389). $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ в точке $(1;\ 0;\ 1)$.

Решение

$x_0 = 1;\ y_0 = 0;\ z_0 = 1;$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = 2;\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = -1;\ \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = 3.$$

Уравнение касательной прямой: $\underline{\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{3}}}$.

Уравнение нормальной плоскости: $2(x-1)-y+3(z-1)=0$ или $\underline{\underline{2x-y+3z-5=0}}$.

$$\bar{r}=\left\{t^2;\, 1-t;\, t^3\right\}.$$

$$\left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{t=1}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k};\quad \left.\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|_{t=1}=2\bar{i}-0\cdot\bar{j}+6\bar{k}.$$

$$\bar{B}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 6\end{vmatrix}=-6\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}.$$

Уравнение бинормали, по (2): $\underline{\underline{\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}}}$.

Уравнение соприкасающейся плоскости, по (3):

$$3(x-1)+3y-(z-1)=0 \text{ или } \underline{\underline{3x+3y-z-2=0}}.$$

$$\bar{N}=\bar{B}\times\bar{T}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=8\bar{i}-11\bar{j}+9\bar{k}.$$

Уравнение главной нормали, по (1): $\underline{\underline{\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{-9}}}$.

Уравнение спрямляющей плоскости:

$8(x-1)-11y-9(z-1)=0$ или $\underline{\underline{8x-11y-9z+1=0}}$.

31 (3390). $x^2+y^2+z^2=3$; $x^2+y^2=2$ в точке $(1;1;1)$.

Решение

$$F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3,\ F_2(x,y,z)=x^2+y^2-2.$$

$$F'_{1x} = 2x, \quad F'_{1y} = 2y, \quad F'_{1z} = 2z.$$

$$F'_{2x} = 2x, \quad F'_{2y} = 2y, \quad F'_{2z} = 0.$$

Производные в точке $(1;\,1;\,1)$: $F'_{1x} = 2$, $F'_{1y} = 2$, $F'_{1z} = 2$, $F'_{2x} = 2$, $F'_{2y} = 2$, $F'_{2z} = 0$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение касательной прямой: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{0}$ или

$$\underline{\underline{\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}}}.$$

Уравнение нормальной плоскости: $-1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) = 0$ или

$\underline{\underline{x - y = 0}}.$

Дифференцируя данные уравнения поверхностей и считая x независимой переменной, получим:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \text{ и } x\,dx + y\,dy = 0;$$

$$dx^2 + dy^2 + y\,d^2y + dz^2 + z\,d^2z = 0;$$

$$dx^2 + dy^2 + y\,d^2y = 0.$$

При $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ имеем:

$$d^2y = -dx^2 - dy^2 = -dx^2 - dx^2 = -2dx^2;$$

$$d^2z = -dz^2 = 0.$$

Следовательно, $d\bar{r} = \{dx,\, -dx,\, 0\}$; $d^2\bar{r} = \{0,\, -2dx^2,\, 0\}$.

Заменим эти векторы векторами, коллинеарными им $(1;\,-1;\,0)$ и $(0;\,-2;\,0)$. Отсюда

$$\overline{T}=\{1,\,-1,\,0\};\ \overline{B}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\cdot\overline{i}+0\cdot\overline{j}-2\overline{k};$$

$$\overline{N}=\overline{B}\times\overline{T}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-2\overline{i}+2\overline{j}-0\cdot\overline{k}.$$

Уравнение бинормали, по (2): $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{-2}$ или $\underline{\underline{\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}}}$.

Уравнение соприкасающейся плоскости, по (3): $0\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0$ или $\underline{\underline{z=1}}$.

Уравнение главной нормали, по (1): $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{0}$ или $\underline{\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{0}}}$.

Уравнение спрямляющей плоскости, по (4): $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)=0$ или $\underline{\underline{x+y-2=0}}$.

32 (3391). $\overline{r}=\{\sin t,\,\cos t,\,\mathrm{tg}\,t\}$ в точке $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,1\right)$.

Решение

$$\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}.$$

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = \operatorname{tg} t.$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z-1}{2} \text{ или } \underline{\underline{\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{z-1}{4}}}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\sqrt{2}\right)\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4(z-1) = 0 \text{ или } \underline{\underline{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 4z = 4.}}$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left\{\cos t, -\sin t, \frac{1}{\cos^2 t}\right\};$$

$$\left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right\} \Rightarrow \bar{T} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j} + 2\bar{k}.$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \left\{-\sin t, -\cos t, \frac{2\sin t}{\cos^3 t}\right\}, \quad \left.\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 4\right\}.$$

$$\bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 8 \end{vmatrix} = -4\sqrt{2}\bar{i} - 12\sqrt{2}\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Уравнение бинормали, по (2): $\underline{\underline{\dfrac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{z-1}{1}}}.$

Уравнение соприкасающейся плоскости, по (3):

$$\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3\sqrt{2}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1(z-1)=0 \text{ или}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+z-5=0.}}$$

$$\overline{N}=\overline{B}\times\overline{T}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4\end{vmatrix}=13\sqrt{2}\bar{i}-3\sqrt{2}\bar{j}-8\bar{k}=\sqrt{2}\left(13\bar{i}-3\bar{j}-4\sqrt{2}\bar{k}\right).$$

Уравнение главной нормали, по (1): $\underline{\underline{\dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{13}=\dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-3}=\dfrac{z-1}{-4\sqrt{2}}}}.$

Уравнение спрямляющей плоскости:

$$13\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4\sqrt{2}(z-1)=0, \text{ или}$$

$13x-3y-4\sqrt{2}z-\sqrt{2}=0$, или $\underline{\underline{-13x+3y+4\sqrt{2}z+\sqrt{2}=0.}}$

33 (3392). $\bar{r}=\left\{t^3-t^2-5,\ 3t^2+1,\ 2t^3-16\right\}$ в точке, соответствующей значению параметра $t=2$.

Решение аналогичное предыдущему.

Уравнение касательной прямой: $\underline{\underline{\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-13}{3}=\dfrac{z}{6}.}}$

Уравнение нормальной плоскости: $\underline{\underline{2x+3y+6z-37=0.}}$

Уравнение бинормали: $\underline{\underline{\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-13}{2}=\dfrac{z}{-3}.}}$

Уравнение соприкасающейся плоскости: $\underline{\underline{6x+2y-3z-20=0}}$.

Уравнение главной нормали: $\underline{\underline{\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-13}{-6}=\dfrac{z}{2}}}$.

Уравнение спрямляющей плоскости: $\underline{\underline{3x-6y+2z+81=0}}$.

34 (3393). Показать, что линия $\bar{r}=\left\{2t+3;\ 3t-1;\ t^2\right\}$ имеет во всех точках одну и ту же соприкасающуюся плоскость. Объяснить этот факт геометрически.

Решение

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=2\cdot\bar{i}+3\cdot\bar{j}+3t\cdot\bar{k};\quad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=0\cdot\bar{i}+0\cdot\bar{j}+2\cdot\bar{k}.$$

Направляющий вектор бинормали $\overline{B}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 2t\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\cdot\bar{i}-4\cdot\bar{j}+0\cdot\bar{k}$.

Уравнение соприкасающейся плоскости, по (3):

$6(x-x_0)-4(y-y_0)=0$.

В произвольной точке, принадлежащей линии $\bar{r}$:

$x_0=2t_0+3$, $y_0=3t_0-1\Rightarrow 6(x-2t_0-3)-4(y-3t_0+1)=0$ или

$6x-4y-12t_0-18+12t_0-4=0$;

$6x-4y-22=0\Rightarrow \underline{\underline{3x-2y-11=0}}$, т. е. линия целиком лежит в этой плоскости.

35 (3394). Доказать, что линия $\bar{r}=\left\{a_1t^2+b_1t+c_1,\ a_2t^2+b_2t+c_2,\ a_3t^2+b_3t+c_3\right\}$ плоская, и составить уравнение той плоскости, в которой она расположена.

Решение

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=(2ta_1+b_1)\bar{i}+(2ta_2+b_2)\bar{j}+(2ta_3+b_3)\bar{k};\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=2a_1\bar{i}+2a_2\bar{j}+2a_3\bar{k}.$$

Направляющий вектор бинормали:

$$\overline{B}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2ta_1+b_1 & 2ta_2+b_2 & 2ta_3+b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2ta_2+b_2 & 2ta_3+b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}\bar{i}-$$

$$-\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_3+b_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_2+b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\bar{k}.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости:

$$\begin{vmatrix}2ta_2+b_2 & 2ta_3+b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}(x-x_0)-\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_3+b_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}(y-y_0)+$$

$$+\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_2+b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}(z-z_0)=0 \Rightarrow x_0=a_1t_0^2+b_1t_0+c_1,$$

$$y_0=a_2t_0^2+b_2t_0+c_2,\ z_0=a_3t_0^2+b_3t_0+c_3.$$

$$\begin{vmatrix}2ta_2+b_2 & 2ta_3+b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_3+b_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_2+b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}z=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}2ta_2+b_2 & 2ta_3+b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}a_1t_0^2-\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_3+b_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}a_2t_0^2+\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_2+b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}a_3t_0^2\right)+$$

$$+\left(\begin{vmatrix}2ta_2+b_2 & 2ta_3+b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}b_1t_0-\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_3+b_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}b_2t_0+\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_2+b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}b_3t_0\right)+$$

$$+\left(\begin{vmatrix}2ta_2+b_2 & 2ta_3+b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_3+b_3\\ a_1 & a_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}2ta_1+b_1 & 2ta_2+b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}c_3\right).$$

Применив свойства определителей к левой и правой частям последнего равенства, получим следующие уравнения соприкасающейся плоскости:

$$\underline{\underline{\begin{vmatrix}x & y & z\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}}}.$$

Как видим, уравнение соприкасающейся плоскости одно и то же для всех точек линии. В ней лежит данная линия $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

36 (3395). Найти радиус кручения линии $\bar{r} = \{\cos t;\ \sin t;\ \operatorname{ch} t\}$.

Решение

Кручением пространственной кривой в точке M называется число

$$\delta = \frac{1}{\rho} = \lim_{N \to M} \frac{\theta}{\Delta s},$$

где θ – угол поворота бинормали, соответствующий дуге MN. Величина ρ называется *радиусом кручения кривой.*

Если $\bar{r} = \bar{r}(s)$, то

$$\delta = \mp\left|\frac{d\beta}{ds}\right| = \frac{\dfrac{d\bar{r}}{ds} \cdot \dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2} \cdot \dfrac{d^3\bar{r}}{ds^3}}{\dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}},$$

где знак "минус" берется в том случае, когда векторы $\dfrac{d\bar{\beta}}{ds}$ и $\bar{r}$ имеют одинаковое направление, и знак "плюс" – в противном случае.

Если $\bar{r} = \bar{r}(t)$, то

$$\delta = \frac{\dfrac{d\bar{r}}{dt} \cdot \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} \cdot \dfrac{d^3\bar{r}}{dt^3}}{\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|^2},$$

где t – произвольный параметр.

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \{-\sin t,\ \cos t,\ \operatorname{sh} t\};\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \{-\cos t,\ -\sin t,\ \operatorname{ch} t\};$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = \{\sin t,\ -\cos t,\ \operatorname{sh} t\}.$$

Смешанное произведение:

$$\frac{d\bar r}{dt}\cdot\frac{d^2\bar r}{dt^2}\cdot\frac{d^3\bar r}{dt^3}=\begin{vmatrix}-\sin t & \cos t & \operatorname{sh} t\\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{ch} t\\ \sin t & -\cos t & \operatorname{sh} t\end{vmatrix}=\sin^2 t\operatorname{sh} t+\cos^2 t\operatorname{sh} t+$$

$$+\sin t\cos t\operatorname{ch} t+\sin^2 t\operatorname{sh} t-\sin t\cos t\operatorname{ch} t+\cos^2 t\operatorname{sh} t=2\operatorname{sh} t.$$

$$\frac{d\bar r}{dt}\times\frac{d^2\bar r}{dt^2}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ -\sin t & \cos t & \operatorname{sh} t\\ -\cos t & -\sin t & \operatorname{ch} t\end{vmatrix}=(\cos t\operatorname{ch} t\sin t\operatorname{sh} t)\bar i-(\cos t\operatorname{sh} t-\sin t\operatorname{ch} t)\bar j+$$

$$+\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\bar k=(\cos t\operatorname{ch} t\sin t\operatorname{sh} t)\bar i-(\cos t\operatorname{sh} t-\sin t\operatorname{ch} t)\bar j+\bar k.$$

$$\left|\frac{d\bar r}{dt}\times\frac{d^2\bar r}{dt^2}\right|^2=\cos^2 t\operatorname{ch}^2 t+2\cos t\sin t\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t+\sin^2 t+\operatorname{sh}^2 t+\cos^2 t\operatorname{sh}^2 t-$$

$$-2\cos t\sin t\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t+\sin^2 t\operatorname{ch}^2 t+1=\cos^2 t\left(\operatorname{ch}^2 t+\operatorname{sh}^2 t\right)+\sin^2 t\left(\operatorname{ch}^2 t+\operatorname{sh}^2 t\right)+$$

$$+1=\operatorname{ch}^2 t+\operatorname{sh}^2 t+1=2\operatorname{ch}^2 t.$$

$$\delta=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t},\quad \rho=\frac{1}{\delta}=\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} t}.$$

37 (3396). Найти радиус кривизны линии $\bar r=\left\{\ln\cos t;\ \ln\sin t;\ \sqrt{2}t\right\}$; $0<t<\dfrac{\pi}{2}$. Показать, что кручение в любой ее точке равно кривизне в этой точке.

Решение

Кривизна K пространственной кривой определяется аналогично кривизне плоской кривой. Если кривая задана уравнением $\bar r=\bar r(s)$, то

$$K=\frac{1}{R}=\left|\frac{d^2\bar r}{ds^2}\right|.$$

В случае общего параметрического задания кривой имеем

$$K=\frac{1}{R}=\frac{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3}.$$

Вычислим производные

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\left\{-\frac{\sin t}{\cos t},\ \frac{\cos t}{\sin t},\ \sqrt{2}\right\}=\left\{-\operatorname{tg} t,\ \operatorname{ctg} t,\ \sqrt{2}\right\};$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\left\{-\frac{1}{\cos^2 t},\ -\frac{1}{\sin^2 t},\ 0\right\}.$$

Векторное произведение и его модуль:

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -\operatorname{tg} t & \operatorname{ctg} t & \sqrt{2}\\ -\frac{1}{\cos^2 t} & -\frac{1}{\sin^2 t} & 0\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{\sin^2 t}\,\bar{i}-\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\,\bar{j}+\frac{2}{\sin t\cos t}\,\bar{k},$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|=\sqrt{\frac{2}{\sin^4 t}+\frac{2}{\cos^4 t}+\frac{4}{\sin^2 t\cos^2 t}}=\sqrt{2}\cdot\frac{4}{\sin^2 2t}.$$

Модуль первой производной:

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+2}=\frac{2}{\sin 2t};\quad \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3=\frac{8}{\sin^3 2t}.$$

Тогда $R=\frac{8\cdot\sin^2 2t}{\sin^3 2t\cdot 4\sqrt{2}}=\underline{\underline{\sqrt{2}\operatorname{cosec} 2t}}.$

Кривизна в любой точке кривой $\underline{\underline{K=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t}}.$

$$\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}=\left\{-\frac{2\sin t}{\cos^3 t},\ \frac{2\cos t}{\sin^3 t},\ 0\right\}.$$

Смешанное произведение

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}=2\begin{vmatrix}-\operatorname{tg}t & \operatorname{ctg}t & \sqrt{2}\\ -\dfrac{1}{\cos^2 t} & -\dfrac{1}{\sin^2 t} & 0\\ -\dfrac{\sin t}{\cos^3 t} & \dfrac{\cos t}{\sin^3 t} & 0\end{vmatrix}=$$

$$-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\cos t\sin^3 t}+\frac{1}{\sin t\cos^3 t}\right)=\frac{-2\sqrt{2}}{\cos^3 t\sin^3 t}=\frac{-16\sqrt{2}}{\sin^3 2t}.$$

Кручение $\delta=-\dfrac{16\sqrt{2}\sin^4 2t}{\sin^3 2t\cdot 32}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t}}.$

Кручение и кривизна численно равны.

38 (3397). Показать, что для линии $\bar{r}=\left\{e^t\cos t;\ e^t\sin t;\ e^t\right\}$ (см. задачу 29 (3388)) отношение кривизны к кручению остается постоянным.

Решение

Аналогично предыдущему примеру

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\left\{e^t(\cos t-\sin t);\ e^t(\sin t+\cos t);\ e^t\right\};$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\left\{-2e^t\sin t;\ 2e^t\cos t;\ e^t\right\};$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}=\left\{-2e^t(\sin t+\cos t);\ 2e^t(\cos t-\sin t);\ e^t\right\};$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\left((\sin t-\cos t)\bar{i}-(\cos t+\sin t)\bar{j}+2\bar{k}\right)e^{2t};$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|=\sqrt{\left(\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t+\cos^2 t+2\sin t\cos t+\sin^2 t+4\right)e^{4t}}=$$

$$=\sqrt{6}e^{2t};$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = e^t\sqrt{\cos^2 t - 2\cos t\sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t + 1} =$$

$$= e^t\sqrt{3};$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|^3 = 3\sqrt{3}e^{3t}.$$

Кривизна $K = \dfrac{\sqrt{6}e^{2t}}{3\sqrt{3}e^{3t}} = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}}}.$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = e^{3t}\begin{vmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t & 1 \\ -2\sin t & 2\cos t & 1 \\ -2(\sin t + \cos t) & 2(\cos t - \sin t) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3t}\big(-4\sin t(\cos t - \sin t) + 4\cos t(\sin t + \cos t) - 2(\cos t - \sin t)^2 -$$

$$- 2(\sin t + \cos t)^2 + 2\cos t(\cos t - \sin t) + 2\sin t(\cos t + \sin t)\big) =$$

$$= e^{3t}\big(2(\cos t - \sin t)(\cos t - 2\sin t) + 2(\cos t + \sin t)(\sin t + 2\cos t) -$$

$$- 2(\cos t - \sin t)^2 - 2(\sin t + \cos t)^2\big) = e^{3t}\big(2\cos^2 t - 4\cos t\sin t - 2\sin t\cos t +$$

$$+ 4\sin^2 t + 2\cos t\sin t + 2\sin^2 t + 4\cos^2 t + 4\sin t\cos t - 2\cos^2 t + 4\cos t\sin t -$$

$$- 2\sin^2 t - 2\sin^2 t - 4\sin t\cos t - 2\cos t\big) = e^{3t}\big(2\sin^2 t + 2\cos^2 t\big) = 2e^{3t}.$$

$$\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|^2 = 6e^{4t}; \qquad \delta = \frac{2e^{3t}}{6e^{4t}} = \frac{e^{-t}}{3}; \qquad \underline{\underline{\frac{K}{\delta} = \sqrt{2} = \text{const}.}}$$

39 (3398). Как выражается кривизна пространственной линии, заданной уравнениями $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$?

Решение

Для произвольной точки $M(x, \varphi(x), \psi(x))$ кривой радиус-вектор запишется: $\bar{r} = \{x, y, z\}$, где $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

Кривизна кривой в этой точке

$$K = \frac{\left|\bar{r}' \times \bar{r}''\right|}{\left|\bar{r}'\right|^3}.$$

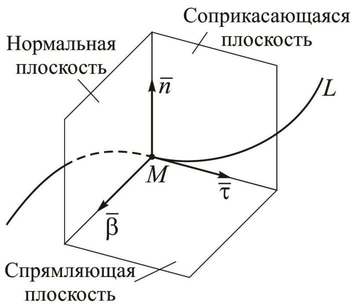
Производные $\bar{r}' = \{1,\ y',\ z'\}$, $\bar{r}'' = \{0,\ y'', z''\}$. Тогда

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & y' & z' \\ 0 & y'' & z'' \end{vmatrix} = \left(y'z'' - z'y''\right)\bar{i} - z''\,\bar{j} + y''\,\bar{k} \Rightarrow \left|\bar{r}' \times \bar{r}''\right| =$$

$$= \sqrt{\left(y'z'' - z'y''\right)^2 + z''^2 + y''^2}; \quad \left|\bar{r}'\right| = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

$$\text{и} \quad \underline{\underline{K = \sqrt{\frac{\left(y'z'' - z'y''\right)^2 + z''^2 + y''^2}{\left(1 + y'^2 + z'^2\right)^3}}}}.$$

40 (3399–3400). Выразить $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{\beta}$ через производные радиус-вектора точки на кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$.



Решение

Орты трехгранника Френе $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{\beta}$ и пространственная кривая L (ее радиус-вектор в точке M $\bar{r} = \bar{r}(t)$) изображены на рисунке.

Орт касательной $\bar{\tau}$ к кривой L определяется равенством $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{r}}{ds}$. Если $\bar{r}(t) = x\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$, то дифференциал дуги $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \left|\bar{r}'(t)\right|dt$. Тогда

$$\bar{\tau} = \frac{\dfrac{d\bar{r}}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}} = \frac{\bar{r}'(t)}{\left|\bar{r}'(t)\right|}.$$

Прямая, имеющая направление вектора $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ и проходящая через соответствующую точку кривой, называется *главной нормалью* кривой в данной точке. Единичный вектор этого направления обозначим через $\bar{n}$. $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| \cdot \bar{n}$, но $\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = K$ – кривизна кривой L в точке M. Вектор $\bar{n}$ перпендикулярен вектору $\bar{\tau}$. Таким образом,

$$\bar{n} = \frac{1}{K} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{ds}.$$

Плоскость, проходящая через касательную прямую и главную нормаль к заданной кривой в точке M, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*. Единичный вектор бинормали обозначим через $\bar{\beta}$ и определим как $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{n}$. Аналогично $\bar{n} = \bar{\beta} \times \bar{\tau}$, $\bar{\tau} = \bar{n} \times \bar{\beta}$, т. е. $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ и $\bar{\beta}$ образуют правую тройку единичных векторов.

Итак, $K = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| \cdot |\bar{\tau}| \sin\left(\bar{\tau}^\wedge \frac{d\bar{\tau}}{ds}\right) = \left|\bar{\tau} \times \frac{d\bar{\tau}}{ds}\right|$. По правилу дифференцирования сложной функции $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\bar{r}'}{s'}$, $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\bar{r}'}{s'}\right) =$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}'}{s'}\right)\frac{dt}{ds} = \left(\frac{\bar{r}'}{s'}\right)' \frac{1}{s'} = \frac{s'\bar{r}'' - s''\bar{r}'}{s'^3},$$ откуда $K = \left|\bar{\tau} \times \frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{\bar{r}'}{s'} \times \frac{s'\bar{r}'' - s''\bar{r}'}{s'^3}\right| =$

$$= \left|\frac{s'(\bar{r}' \times \bar{r}'') - s''(\bar{r}' \times \bar{r}')}{s'^4}\right| = \left|\frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{s'^3}\right| = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}.$$ Тогда $\bar{n} = \frac{1}{K} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{ds} =$

$$= \frac{|\bar{r}'|^3}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|} \cdot \frac{|\bar{r}'| \cdot \bar{r}'' - |\bar{r}''| \cdot \bar{r}'}{|\bar{r}'|^3}.$$

$$\overline{\beta}=\overline{\tau}\times\overline{n}=\frac{\overline{r}'}{s'}\times\overline{n}=\frac{\overline{r}'}{|\overline{r}'|}\times\frac{|\overline{r}'|^3}{|\overline{r}'\times\overline{r}''|}\cdot\frac{|\overline{r}'|\overline{r}''-|\overline{r}''|\overline{r}'}{|\overline{r}'|^3}=$$

$$=\frac{|\overline{r}'|(\overline{r}\times\overline{r}'')-|\overline{r}''|(\overline{r}'\times\overline{r}')}{|\overline{r}'|\cdot|\overline{r}'\times\overline{r}''|}=\frac{\overline{r}'\times\overline{r}''}{|\overline{r}'\times\overline{r}''|}.$$

$$\overline{n}=\overline{\beta}\times\overline{\tau}=\frac{(\overline{r}'\times\overline{r}'')}{|\overline{r}'\times\overline{r}''|}\times\frac{\overline{r}'}{|\overline{r}'|}=\frac{(\overline{r}'\times\overline{r}'')\times\overline{r}'}{|\overline{r}'\times\overline{r}''|\cdot|\overline{r}'|}.$$

Окончательно

$$\overline{\tau}=\frac{\overline{r}'(t)}{|\overline{r}'(t)|},\quad \overline{\beta}=\frac{\overline{r}'\times\overline{r}''}{|\overline{r}'\times\overline{r}''|},\quad \overline{n}=\frac{(\overline{r}'\times\overline{r}'')\times\overline{r}'}{|\overline{r}'\times\overline{r}''|\cdot|\overline{r}'|}.$$

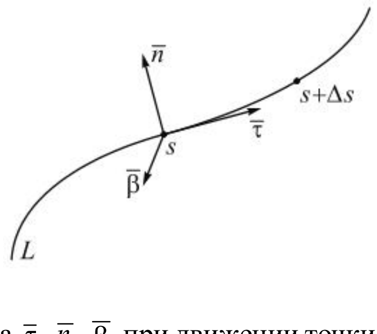
$$\overline{\tau}=\overline{n}\times\overline{\beta},\quad \overline{\beta}=\overline{\tau}\times\overline{n},\quad \overline{n}=\overline{\beta}\times\overline{\tau}.$$

41 (3401). Найти вектор $\overline{\omega}(s)$ (вектор Дарбу), удовлетворяющий условиям

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds}=\overline{\omega}\times\overline{\tau},\quad \frac{d\overline{n}}{ds}=\overline{\omega}\times\overline{n},\quad \frac{d\overline{\beta}}{ds}=\overline{\omega}\times\overline{\beta}. \qquad (5)$$

Решение

Отнесем кривую L к параметру s, тогда $\overline{r}=\overline{r}(s)$ и, очевидно, можем и векторы сопровождающего трехгранника считать однозначно определенными функциями s:



$$\overline{\tau}=\overline{\tau}(s),\quad \overline{n}=\overline{n}(s),\quad \overline{\beta}=\overline{\beta}(s).$$

Формулы Френе характеризуют вращение сопровождающего трехгранника $\overline{\tau}$, $\overline{n}$, $\overline{\beta}$ при движении точки касания вдоль пространственной кривой и дают разложение производных от указанных векторов по дуге s, т. е. $\dot{\overline{\tau}}$, $\dot{\overline{n}}$, $\dot{\overline{\beta}}$ по самим этим векторам:

$$\dot{\overline{\tau}} = \kappa\overline{n},$$
$$\dot{\overline{n}} = \chi\overline{b} - \kappa\overline{\tau}, \qquad (6)$$
$$\dot{\overline{b}} = -\chi\overline{n}.$$

Здесь кривизна $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$, где Δs – путь, пройденный по кривой, из данной точки; $\Delta\varphi$ – угол соответствующего поворота касательной $\overline{\tau}$: χ – кручение в данной точке. Вектор $\overline{\omega}(s)$ – вектор угловой скорости трехгранника $\overline{\tau}$, $\overline{n}$, $\overline{\beta}$. Разложим его по векторам $\overline{\tau}$, $\overline{n}$ и $\overline{\beta}$:

$$\overline{\omega} = \alpha\,\overline{\tau} + \beta\overline{n} + \gamma\,\overline{\beta}.$$

С учетом (5) и (6) имеем:

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \left(\alpha\,\overline{\tau} + \beta\overline{n} + \gamma\,\overline{\beta}\right)\times\overline{\tau} = \alpha\overline{\tau}\times\overline{\tau} + \beta\overline{n}\times\overline{\tau} + \gamma\overline{\beta}\times\overline{\tau} = 0 - \beta\cdot\overline{\beta} + \gamma\cdot\overline{n},$$
$$\frac{d\overline{n}}{ds} = \left(\alpha\,\overline{\tau} + \beta\overline{n} + \gamma\,\overline{\beta}\right)\times\overline{n} = \alpha\overline{\tau}\times\overline{n} + \beta\overline{n}\times\overline{n} + \gamma\overline{\beta}\times\overline{n} = \alpha\cdot\overline{\beta} + 0 - \gamma\cdot\overline{\tau}, \qquad (7)$$
$$\frac{d\overline{\beta}}{ds} = \left(\alpha\,\overline{\tau} + \beta\overline{n} + \gamma\,\overline{\beta}\right)\times\overline{\beta} = \alpha\overline{\tau}\times\overline{\beta} + \beta\overline{n}\times\overline{\beta} + \gamma\overline{\beta}\times\overline{\beta} = -\alpha\cdot\overline{n} + \beta\cdot\overline{\tau} + 0.$$

Из сравнения формул (6) и (7) получаем: $\alpha = \chi$, $\beta = 0$, $\gamma = \kappa$. Следовательно,

$$\underline{\underline{\overline{\omega} = \chi\,\overline{\tau} + \kappa\,\overline{\beta}.}}$$

Как видим, вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ лежит в плоскости $\overline{\tau}$, $\overline{n}$ и $\overline{\beta}$ разлагается лишь на две составляющие $\chi\,\overline{\tau}$ и $\kappa\,\overline{\beta}$.

3. ДЛИНА ДУГИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛИНИИ

В задачах 42(3402)–49(3409) найти длину дуги линий.

42 (3402). $\bar{r} = \left\{2t,\, \ln t,\, t^2\right\}$ от $t = 1$ до $t = 10$.

Решение

Длина дуги $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$; $x = 2t$; $x_t' = 2$; $y = \ln t$; $y_t' = \dfrac{1}{t}$;

$z = t^2$; $z_t' = 2t$. $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{4 + \dfrac{1}{t^2} + 4t^2} = \sqrt{\dfrac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2}} =$

$= \sqrt{\dfrac{\left(2t^2 + 1\right)^2}{t^2}} = \dfrac{2t + 1}{t}$; $l = \int\limits_1^{10} \dfrac{2t^2 + 1}{t} dt = \left(t^2 + \ln|t|\right)\Big|_1^{10} = 99 + \ln 10 = 99 +$

$+ 2{,}303 \approx \underline{\underline{101{,}3}}$.

43 (3403). $\bar{r} = \left\{a\cos t,\, a\sin t,\, a\ln\cos t\right\}$ от $(a;\, 0;\, 0)$ до $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{a}{2}\ln 2\right)$.

Решение

$x_t' = -a\sin t$; $y_t' = a\cos t$; $z_t' = -\dfrac{a\sin t}{\cos t}$.

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = a\sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}:$$

$$l=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{a\,dt}{\cos t}=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{a\,dt}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}=a\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right|\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}-\ln 1\right)=$$

$$=\underline{\underline{a\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}}.$$

44 (3404). $\bar{r}=\left\{e^t\cos t,\, e^t\sin t,\, e^t\right\}$ от точки $(1;\,0;\,1)$ до точки, соответствующей параметру t.

Решение

$$x_t'=e^t\cos t-e^t\sin t,\ y_t'=e^t\sin t+e^t\cos t,\ z_t'=e^t.\ \sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=$$

$$=e^t\sqrt{\cos^2 t-2\sin t\cos t+\sin^2 t+\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t+1}=e^t\sqrt{3}.$$

$$l=\int\limits_0^t\sqrt{3}e^t dt=\underline{\underline{\sqrt{3}\left(e^t-1\right)}}.$$

45 (3405). $x^2=3y,\ 2xy=9z$ от точки $(0;\,0;\,0)$ до точки $(3;\,3;\,2)$.

Решение

Данная линия – пересечение параболического цилиндра $x^2=3y$ с "седлом" $2xy=9z$.

Перейдем к параметрическому заданию линии: пусть $x=t$, тогда $y=\frac{t^2}{3};\ z=\frac{2}{27}t^3.$

$$x_t'=1;\ y_t'=\frac{2}{3}t;\ z_t'=\frac{2}{9}t^2:$$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{1+\frac{4}{9}t^2+\frac{4}{81}t^4}=\sqrt{\left(1+\frac{2}{9}t^2\right)^2}=1+\frac{2}{9}t^2.$$

$$l=\int\limits_0^3\left(1+\frac{2}{9}t^2\right)dt=\left(t+\frac{2}{27}t^3\right)\Bigg|_0^3=3+2=\underline{\underline{5}}.$$

46 (3406). $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$ от точки $(0;\,0;\,0)$ до точки $\left(2a, \dfrac{8a}{3}, 2a\right)$.

Решение

Пусть $z = t$, тогда $x = \dfrac{t^2}{2a}$; $y = \dfrac{4t^{3/2}}{3\sqrt{2a}}$ $x'_t = \dfrac{t}{a}$; $y'_t = 2\sqrt{\dfrac{t}{2a}}$; $z'_t = 1$:

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{\frac{t^2}{a^2} + \frac{2t}{a} + 1} = \sqrt{\frac{t^2 + 2at + a^2}{a^2}} = \frac{t+a}{a}.$$

$$l = \int_0^{2a} \frac{t+a}{a}\,dt = \frac{1}{a}\left(\frac{t^2}{2} + at\right)\Bigg|_0^{2a} = \underline{\underline{4a}}.$$

47 (3407). $4ax = (y+z)^2$, $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$ от начала координат до точки (x, y, z).

Решение

$$y + z = 2\sqrt{ax},\ \ 4x^2 = 3(z-y)(z+y) \Rightarrow 4x^2 = 6\sqrt{ax}(z-y).$$

$$\begin{cases} z + y = 2\sqrt{a}x^{1/2} \\ z - y = \dfrac{2}{3\sqrt{a}}x^{3/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3ax^{1/2} - x^{3/2}}{3\sqrt{a}}, \\ z = \dfrac{3ax^{1/2} + x^{3/2}}{3\sqrt{a}}. \end{cases}$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(ax^{-1/2} - x^{1/2}\right)dx, \quad dz = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(ax^{-1/2} + x^{1/2}\right)dx.$$

Примем переменную x за параметр. Тогда

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dx^2} = \sqrt{1 + \frac{a^2x^{-1} - 2a + x + a^2x^{-1} + 2a + x}{4a}}\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{1}{2}\left(ax^{-1/2} + x^{1/2}\right)dx.$$

$$l=\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left(ax^{-1/2}+x^{1/2}\right)dx=\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{1}{2}\left(2ax^{1/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}\right)=\sqrt{2}\underbrace{\frac{3ax^{1/2}+x^{3/2}}{3\sqrt{a}}}_{z}=$$

$$=\underline{\underline{\sqrt{2}z}}.$$

48 (3408). $y=\sqrt{2ax-x^2}$; $z=a\ln\frac{2a}{2a-x}$ от начала координат до точки (x,y,z).

Решение

Примем переменную x за параметр ($0\le x\le 2a$). Тогда

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2};\ dy=\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}dx;\ dz=a\frac{\frac{2a}{(2a-x)^2}}{\frac{2a}{2a-x}}dx=\frac{a\,dx}{2a-x}.$$

$$dl=\sqrt{1+\frac{a^2-2ax+x^2}{2ax-x^2}+\frac{a^2}{(2a-x)^2}}\,dx=\sqrt{\frac{2a^3}{(2a-x)^2x}}\,dx=\frac{a}{2a-x}\sqrt{\frac{2a}{x}}\,dx.$$

$$l=a\sqrt{2a}\int\limits_0^x\frac{dx}{(2a-x)\sqrt{x}}=\left[\begin{array}{ll|l}\sqrt{x}=t, & x & t\\ \hline x=t^2, & 0 & 0\\ dx=2t\,dt & x & \sqrt{x}\end{array}\right]=2a\sqrt{2a}\int\limits_0^{\sqrt{x}}\frac{dt}{2a-t^2}=$$

$$=a\ln\frac{\sqrt{2a}+t}{\sqrt{2a}-t}\Bigg|_0^{\sqrt{x}}=\underline{\underline{a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}}}.$$

49 (3409). $y=a\arcsin\frac{x}{a}$; $z=\frac{1}{4}a\ln\frac{a+x}{a-x}$ от начала координат до точки $\left(\frac{a}{2},\frac{a\pi}{6},\frac{a}{3}\ln 3\right)$.

Решение

Примем переменную x за параметр $\left(0 \le x \le \dfrac{a}{2}\right)$. Тогда

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},\; dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\; dz = \frac{1}{4}a\frac{\dfrac{2a}{(a-x)^2}}{\dfrac{a+x}{a-x}}\,dx = \frac{a^2dx}{2\left(a^2 - x^2\right)}.$$

$$dl = \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{4\left(a^2 - x^2\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2\left(a^2 - x^2\right)}\sqrt{9a^4 - 12a^2x^2 + 4x^2}\,dx =$$

$$= \frac{3a^2 - 2x^2}{2\left(a^2 - x^2\right)}dx.$$

$$l = \frac{1}{2}\int_0^{a/2}\frac{3a^2 - 2x^2}{a^2 - x^2}dx = \int_0^{a/2}dx + \frac{a^2}{2}\int_0^{a/2}\frac{dx}{a^2 - x^2} = \left(x + \frac{a}{4}\ln\frac{a+x}{a-x}\right)_0^{a/2} =$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{4}\ln 3 = \underline{\underline{\frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\ln 3\right)}}.$$

4. ПОВЕРХНОСТИ

В задачах 50(3410)–59(3419) для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках.

50 (3410). $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке $M_0(2;\,1;\,4)$.

Решение

Если уравнение поверхности задано в виде $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а нормали

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Значение производных в точке M_0: $z'_x = 4x$; $z'_y = -8y$; $z'_x(M_0) = 8$; $z'_y(M_0) = -8$.

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 4 = 8(x - 2) - 8(y - 1) \quad \text{или} \quad \underline{\underline{8x - 8y - z = 4}}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$\underline{\underline{\frac{x - 2}{8} = \frac{y - 1}{-8} = \frac{z - 4}{-1}}}.$$

51 (3411). $z = xy$ (гиперболический параболоид) в точке $M_0(1;1;1)$.

Решение

$$z'_x = y,\; z'_y = x,\; z'_x(M_0) = 1,\; z'_y(M_0) = 1.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = x - 1 + y - 1 \Rightarrow \underline{\underline{x + y - z - 1 = 0}}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$\underline{\underline{\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}}}.$$

52 (3412). $z=\dfrac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$ в точке $M_0(a,a,-a)$.

Решение

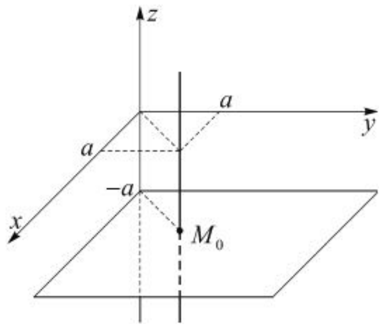
$$z'_x=\frac{1}{a^2}\left(3x^2-3ay\right);\ z'_y=\frac{1}{a^2}\left(-3ax+3y^2\right);\ z'_x(M_0)=0;\ z'_y(M_0)=0.$$

Уравнение касательной плоскости:

$\underline{\underline{z+a=0}}$.

Уравнение нормали: $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y-a}{0}=$

$=\dfrac{x+a}{-1}$ или $\underline{\underline{x=a}}$, $\underline{\underline{y=a}}$.



Положим $a>0$.

53 (3413). $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ в точке $M_0(3;4;-7)$.

Решение

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y;\ z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-x;\ z'_x(M_0)=-\frac{17}{5};\ z'_y(M_0)=-\frac{11}{5}.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z+7=-\frac{17}{5}(x-3)-\frac{11}{5}(y-4)\Rightarrow \underline{\underline{17x+11y+5z=60}}.$$

Уравнение нормали: $\underline{\underline{\dfrac{x-3}{17}=\dfrac{y-4}{11}=\dfrac{z+7}{5}}}$.

54 (3414). $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0\left(1;\,1;\,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение

$$z'_x=-\frac{y}{x^2+y^2};\ z'_y=\frac{x}{x^2+y^2};\ z'_x\left(M_0\right)=-\frac{1}{2};\ z'_y\left(M_0\right)=\frac{1}{2}.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\Rightarrow \underline{\underline{x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0}}.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}\ \text{или}\ \underline{\underline{\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}}}.$$

55 (3415). $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ в точке $M_0\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};\,\dfrac{b\sqrt{3}}{3};\,\dfrac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решение

Для неявного задания уравнения поверхности $F(x,y,z)=0$ уравнение касательной плоскости в M_0:

$$F'_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+F'_y\left(M_0\right)\left(y-y_0\right)+F'_z\left(M_0\right)\left(z-z_0\right)=0.$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\left(M_0\right)}=\frac{y-y_0}{F'_y\left(M_0\right)}=\frac{z-z_0}{F'_z\left(M_0\right)};$$

$$F'_x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2},\quad F'_z=\frac{2z}{c^2};\quad F'_x\left(M_0\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3a},\quad F'_y\left(M_0\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3b},$$

$$F'_z\left(M_0\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3c}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке M_0:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3a}\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3b}\left(y-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3c}\left(z-\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)=0 \text{ или}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}.$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\frac{x-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{a}}=\frac{y-\frac{b\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{b}}=\frac{z-\frac{c\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{c}} \quad \text{или}$$

$$\underline{\underline{a\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=b\left(y-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)=c\left(z-\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)}}.$$

56 (3416). $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ в $M_0(1;\ 2;\ -1)$.

Решение

$F'_x=3x^2+yz$; $F'_y=3y^2+xz$; $F'_z=3z^2+yz$; $F'_x(M_0)=1$; $F'_y(M_0)=11$; $F'_z(M_0)=5$.

Уравнение касательной плоскости в точке M_0:

$$x-1+11(y-2)+5(z+1)=0 \text{ или } \underline{\underline{x+11y+5z-18=0}}.$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\underline{\underline{\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}}}.$$

57 (3417). $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

Решение

$$F'_x=12x^3+4z^2y-4z^3;\ F'_y=-12y^2z+4z^2x;\ F'_z=-4y^3+8xyz-12z^2x;$$

$$F'_x(M_0)=12;\ F'_y(M_0)=-8;\ F'_z(M_0)=-8.$$

Уравнение касательной плоскости в точке M_0:

$$3(x-1)-2(y-1)-2(z-1)=0 \Rightarrow \underline{\underline{3x-2y-2z+1=0}}.$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\underline{\underline{\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-2}}}.$$

58 (3418). $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ в точке $M_0(1;\,1;\,2)$.

Решение

$$F'_x=z^3y-3x^2yz;\; F'_y=(z^2-x^2)xz-5y^4;\; F'_z=3z^2xy-x^3y;$$

$$F'_x(M_0)=2;\; F'_y(M_0)=1;\; F'_z(M_0)=11.$$

Уравнение касательной плоскости в точке M_0:

$$2(x-1)+(y-1)+11(z-2)=0 \text{ или } \underline{\underline{2x+y+11z-25=0}}.$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\underline{\underline{\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}}}.$$

59 (3419). $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$ в точке $M_0(2;\,3;\,6)$.

$$F(x,y,z)=4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x-y-z.$$

$$F'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1;\; F'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1;\; F'_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-1;$$

$$F'_x(M_0)=-\frac{5}{7};\; F'_y(M_0)=-\frac{4}{7};\; F'_z(M_0)=-\frac{1}{7}.$$

Уравнения касательной плоскости в точке M_0:

$$5(x-2)+4(y-3)+(z-6)=0 \text{ или } \underline{\underline{5x+4y+z-28=0}}.$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\underline{\underline{\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{1}.}}$$

60 (3420). Показать, что уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в любой его точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1. \qquad (8)$$

Решение

$F'_x=\frac{2x}{a^2}$; $F'_y=\frac{2y}{b^2}$; $F'_z=\frac{2z}{c^2}$; $F'_x(M_0)=\frac{2x_0}{a^2}$; $F'_y(M_0)=\frac{2y_0}{b^2}$; $F'_z(M_0)=\frac{2z_0}{c^2}$.

Уравнение касательной плоскости в точке M_0:

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \Rightarrow \frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}-$$

$$-\underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)}_{=1}=0 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1}}, \text{ ч.т.д.}$$

61 (3421). К эллипсоиду $x^2+2y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$.

Решение

$F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$; $F'_x=2x$; $F'_y=4y$; $F'_z=2z$. Если $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка касания плоскости к эллипсоиду, то $F'_x(M_0)=2x_0$; $F'_y(M_0)=4y_0$; $F'_z(M_0)=2z_0$. Согласно (8) уравнение касательной плоскости может быть записано так:

$$x_0 x+2y_0 y+z_0 z-1=0. \qquad (9)$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит эллипсоиду, тогда

$$x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1. \tag{10}$$

Из условия параллельности касательной и заданной плоскостей следует, что $\frac{x_0}{1} = \frac{2y_0}{-1} = \frac{z_0}{2} = k \Rightarrow x_0 = k$, $y_0 = -\frac{1}{2}k$, $z_0 = 2k$. Подставим эти значения в (10): $k^2 + \frac{1}{2}k^2 + 4k^2 = 1 \Rightarrow \frac{11}{2}k^2 = 1$, $k = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}$. Для $k_1 = \sqrt{\frac{2}{11}}$: $x_0 = \sqrt{\frac{2}{11}}$, $y_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$, $z_0 = 2\sqrt{\frac{2}{11}}$. Подставив эти значения в (9), получим $\underline{\underline{x - y + 2z = \sqrt{\frac{11}{2}}}}$. Для $k_2 = -\sqrt{\frac{2}{11}}$ получим второе уравнение: $\underline{\underline{x - y + 2z = -\sqrt{\frac{11}{2}}}}$.

62 (3422). К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ провести касательную плоскость, отсекающую на полуосях координат равные отрезки.

Решение

Если (x_0, y_0, z_0) – точка касания, то, согласно (8), уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

Отрезки, отсекаемые этой плоскостью на координатных полуосях, суть $\frac{a^2}{x_0}$, $\frac{b^2}{y_0}$ и $\frac{c^2}{z_0}$. По условию $\frac{a^2}{x_0} = \frac{b^2}{y_0} = \frac{c^2}{z_0} = k \Rightarrow x_0 = \frac{a^2}{k}$; $y_0 = \frac{b^2}{k}$; $z_0 = \frac{c^2}{k}$ и поскольку (x_0, y_0, z_0) принадлежит эллипсоиду, то

$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}+\frac{c^2}{k^2}=1 \Rightarrow k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Подставив значения x_0, y_0, z_0 и k в уравнение касательной плоскости, окончательно получим

$$\underline{\underline{x+y+z-\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0}}\cdot$$

63 (3424). Доказать, что все плоскости, касательные к поверхности $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$, пересекаются в одной точке.

Доказательство

Пусть $\frac{y}{x}=u$, тогда $z=f(u)\cdot x$, $z'_x=f(u)+xf'_u(u)u'_x$, $z'_y=xf'_u(u)u'_y$, $u'_x=-\frac{y}{x^2}$, $u'_y=\frac{1}{x}$. Если $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка касания, то $z'_x(M_0)=f(u_0)-$ $-\frac{y_0}{x_0}f'_u(u_0)$, $z'_y(M_0)=f'_u(u_0)$. Уравнение касательной плоскости в точке M_0:

$$z-z_0=\left(f(u_0)-\frac{y_0}{x_0}f'_u(u_0)\right)(x-x_0)+f'_u(u_0)(y-y_0). \qquad (11)$$

Так как точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит поверхности, то $z_0=f(u_0)x_0$. Если предположить, что все касательные плоскости пересекаются в начале координат $O(0;0;0)$, то из (11) будем иметь

$$z_0=x_0\,f(u_0)-y_0f'_u(u_0)+y_0f'_u(u_0)\Rightarrow z_0=x_0f(u_0).$$

Наше предположение справедливо.

64 (3425). Написать уравнение касательной плоскости и нормали к шару $\bar{r}\left\{u\cos v, u\sin v, \sqrt{a^2-u^2}\right\}$ в точке $\bar{r}_0\{x_0,y_0,z_0\}$.

Решение

$\bar{r}=u\cos v\cdot\bar{i}+u\sin v\cdot\bar{j}+\sqrt{a^2-u^2}\cdot\bar{k}$ – это уравнение сферы в векторно-параметрической форме. Здесь любой точке $M^*(u,v)\in D$

соответствует точка $M(x, y, z)$ на поверхности $F(x, y, z) = 0$. В дифференциальной геометрии доказывается, что при указанных условиях главная нормаль $\overline{N} = \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v$. В нашем случае $\overline{r}'_u = \cos v \cdot \overline{i} + \sin v \cdot \overline{j} - \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot \overline{k}$;

$\overline{r}'_v = -u \sin v \cdot \overline{i} + u \cos v \cdot \overline{j} + 0 \cdot \overline{k}$, тогда

$$\overline{N} = \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \cos v & \sin v & -\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{u^2 \cos v}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot \overline{i} +$$

$$+ \frac{u^2 \sin v}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot \overline{j} + u \cdot \overline{k}.$$

Уравнение нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{u^2 \cos v}{\sqrt{a^2 - u^2}} \right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{u^2 \sin v}{\sqrt{a^2 - u^2}} \right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{u_{M_0}} \Rightarrow$$

$$\frac{x - x_0}{(u \cos v)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{(u \sin v)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\sqrt{a^2 - u^2} \right)_{M_0}},$$

но $(u \cos v)_{M_0} = x_0$, $(u \sin v)_{M_0} = y_0$, $\left(\sqrt{a^2 - u^2} \right)_{M_0} = z_0$, т. е. уравнение нормали принимает вид

$$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{z_0} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}}}.$$

Справедливость последнего равенства вытекает из свойства производной пропорции: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$, и наоборот.

Уравнение касательной плоскости:

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_0x+y_0y+z_0z=a^2}}.$$

65 (3426). Написать уравнение касательной плоскости и нормали к гиперболическому параболоиду $\bar{r}\{a(u+v), b(u-v), uv\}$ в произвольной точке (x_0, y_0, z_0).

Решение

$r'_u = a\cdot\bar{i} + b\cdot\bar{j} + v\cdot\bar{k};\ r'_v = a\cdot\bar{i} - b\cdot\bar{j} + u\cdot\bar{k}.$

$$\overline{N} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & b & v \\ a & -b & u \end{vmatrix} = (bu+bv)\cdot\bar{i} - (au-av)\cdot\bar{j} - 2ab\cdot\bar{k}.$$

Уравнение нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{b(u+v)_{M_0}} = \frac{y-y_0}{-a(u-v)_{M_0}} = \frac{z-z_0}{-2ab}.$$

Поскольку $b(u+v)_{M_0} = \frac{b}{a}\underbrace{a(u+v)}_{x_0} = \frac{b}{a}x_0;\ a(u-v)_{M_0} = \frac{a}{b}\underbrace{b(u-v)}_{y_0} = \frac{a}{b}y_0,$

то $\dfrac{x-x_0}{\frac{b}{a}x_0} = \dfrac{y-y_0}{-\frac{a}{b}y_0} = \dfrac{z-z_0}{-2ab}$ или $\underline{\underline{\dfrac{a(x-x_0)}{bx_0} = \dfrac{b(y-y_0)}{-ay_0} = \dfrac{z-z_0}{-2ab}}}.$

Уравнение касательной плоскости:

$$\frac{b}{a}x_0(x-x_0) - \frac{a}{b}y_0(y-y_0) - 2ab(z-z_0) = 0 \Rightarrow \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 2(z-z_0) +$$

$$+\underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)}_{4z_0} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 2(z+z_0)}}.$$

Примечание. Если $x = a(u+v)$; $y = b(u-v)$; $z = uv$, тогда уравнение гиперболического параболоида должно иметь вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 4z$.

66 (3427). Доказать, что поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = ax$ и $x^2 + y^2 + z^2 = ay$ ортогональны друг другу.

Доказательство

Требуется доказать, что в точке пересечения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхностей нормали к поверхностям взаимно перпендикулярны.

Для первой поверхности $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - ax$ частные производные: $F'_x(M_0) = 2x_0 - a$, $F'_y(M_0) = 2y_0$, $F'_z(M_0) = 2z_0$.

Для второй поверхности $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - ay$: $F'_x(M_0) = 2x_0$, $F'_y(M_0) = 2y_0 - a$, $F'_z(M_0) = 2z_0$.

Уравнение нормального вектора первой поверхности: $\overline{N}_1 = \{2x_0 - a; 2y_0; 2z_0\}$; для второй поверхности: $\overline{N}_2 = \{2x_0; 2y_0 - a; 2z_0\}$. Их скалярное произведение: $\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 4x_0^2 - 2ax_0 + 4y_0^2 - 2ay_0 + 4z_0^2 =$ $= 2\underbrace{\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - ax_0\right)}_{=0} + 2\underbrace{\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - ay_0\right)}_{=0} = 0$. Значит, $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2$.

67 (3428). Показать, что касательная плоскость к поверхности $xyz = a^3$ в любой ее точке образует с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема. Найти этот объем.

Решение

Уравнение поверхности: $F(x,y,z) = xyz - a^3$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка касания касательной плоскости. Частные производные: $F'_x(M_0) = y_0 z_0$, $F'_y(M_0) = x_0 z_0$, $F'_z(M_0) = x_0 y_0$. Уравнение касательной плоскости в точке M_0:

$$(x - x_0)y_0 z_0 + (y - y_0)x_0 z_0 + (z - z_0)x_0 z_0 = 0 \Rightarrow y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3a^3.$$

Находим отрезки, отсекаемые касательной плоскостью на осях координат:

при $x=0,\ y=0\quad z=\dfrac{3a^3}{x_0y_0}$; при $x=0,\ z=0\quad y=\dfrac{3a^3}{x_0z_0}$; при $y=0$, $z=0\ x=\dfrac{3a^3}{y_0z_0}$.

Объем тетраэдра $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{27a^9}{6\cdot(x_0y_0z_0)^2}=\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{a^9}{a^6}=\dfrac{9}{2}a^3$, т. е. касательная плоскость образует тетраэдр постоянного объема $\underline{\underline{V=\dfrac{9}{2}a^3}}$.

68 (3429). Показать, что касательная плоскость к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ отсекает на координатных осях отрезки, сумма которых равна a.

Решение

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка касания касательной плоскости к поверхности.

Частные производные:

$$F'_x(M_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\quad F'_y(M_0)=\frac{1}{2\sqrt{y_0}},\quad F'_z(M_0)=\frac{1}{2\sqrt{z_0}}.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$(x-x_0)\frac{1}{2\sqrt{x_0}}+(y-y_0)\frac{1}{2\sqrt{y_0}}+(z-z_0)\frac{1}{2\sqrt{z_0}}=0.$$

Находим отрезки, отсекаемые касательной плоскостью на осях координат:

1) $x=0,\ y=0$: $\qquad z=\dfrac{\sqrt{z_0}}{2}+\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}+\dfrac{\sqrt{y_0}}{2}$;

2) $x=0,\ z=0$: $\qquad y=\dfrac{\sqrt{y_0}}{2}+\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}+\dfrac{\sqrt{z_0}}{2}$;

3) $y=0,\ z=0$: $\qquad x=\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}+\dfrac{\sqrt{y_0}}{2}+\dfrac{\sqrt{z_0}}{2}$.

Следовательно, $x+y+z=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\underline{\underline{a}}$.

69 (3430). Для поверхности $z=xy$ ("седло") написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной к прямой

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}.$$

Решение

Параметрические уравнения прямой: $x=2t-2$, $y=t-2$, $z=-t+1$. Подставляем полученные значения в уравнение поверхности: $-t+1=2t^2-6t+4$, откуда $2t^2-5t+3=0$, $t_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\dfrac{5\pm1}{4}$, $t_1=1$, $t_2=\dfrac{3}{2}$.

Точки пересечения прямой с поверхностью и уравнения касательных плоскостей:

$$x_1=0,\ y_1=-1,\ z_1=0;\ 2x+1(y-1)-1(z-0)=0\Rightarrow \underline{\underline{2x+y-z=1}};$$

$$x_2=1,\quad y_2=-\frac{1}{2},\quad z_2=-\frac{1}{2};\qquad 2(x-1)+1\left(y+\frac{1}{2}\right)-1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow$$

$\underline{\underline{2x+y-z=2}}$.

70 (3431). Показать, что для поверхности $x^2+y^2+z^2=y$ длина отрезка нормали между поверхностью и плоскостью xOy равна расстоянию от начала координат до следа нормали на этой плоскости.

Решение

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-y$; $\qquad F'_x(M_0)=2x_0$; $\qquad F'_y(M_0)=2y_0-1$; $F'_z(M_0)=2z_0$, где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка на данной поверхности.

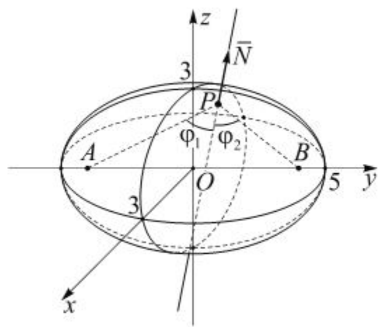
Уравнение нормали: $\dfrac{x-x_0}{2x_0}=\dfrac{y-y_0}{2y_0-1}=\dfrac{z-z_0}{2z_0}$ или, в параметрической форме: $x=2x_0t+x_0$, $y=(2y_0-1)t+y_0$, $z=2z_0t+z_0$.

В точке пересечения нормали с плоскостью xOy ($z=0$) имеем $0=2z_0t+z_0 \Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}$.

Координаты следа нормали: $x=0$, $y=\dfrac{1}{2}$, $z=0$. Длина отрезка нормали между поверхностью и плоскостью xOy $d_1=\sqrt{x_0^2+\left(y_0-\dfrac{1}{2}\right)^2+z_0^2}=$

$=\sqrt{\underbrace{\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2-y_0\right)}_{=0}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$. Расстояние от начала координат $O(0;\,0;\,0)$ до следа нормали на плоскости xOy $d_2=\sqrt{0+\dfrac{1}{4}+0}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \underline{\underline{d_1=d_2}}$.

71 (3432). Доказать, что нормаль к поверхности эллипсоида вращения $\dfrac{x^2+z^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ в любой его точке $P(x,y,z)$ образует равные углы с прямыми PA и PB, если $A(0;-4;0)$ и $B(0;4;0)$.



Решение

Пусть нормаль проведена в точке $P(x_0,y_0,z_0)$. Уравнение поверхности:

$F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}-1$, $F'_x(P)=\dfrac{2x_0}{9}$, $F'_y(P)=\dfrac{2y_0}{25}$, $F'_z(P)=\dfrac{2z_0}{9}$. Тогда вектор нормали $\overline{N}=\left\{\dfrac{2x_0}{9},\dfrac{2y_0}{25},\dfrac{2z_0}{9}\right\}$.

Координаты векторов: $\overline{PA}=\{-x_0,-4-y_0,-z_0\}$, $\overline{PB}=\{-x_0,4-y_0,-z_0\}$. Тогда

$$\cos\varphi_1=\frac{-\frac{2}{9}x_0^2-(4+y_0)\frac{2}{25}y_0-\frac{2}{9}z_0^2}{\sqrt{\frac{4}{91}x_0^2+\frac{4}{625}y_0^2+\frac{4}{81}z_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2+(4+y_0)^2+z_0^2}};$$

$$\cos\varphi_2=\frac{-\frac{2}{9}x_0^2+(4-y_0)\frac{2}{25}y_0-\frac{2}{9}z_0^2}{\sqrt{\frac{4}{91}x_0^2+\frac{4}{625}y_0^2+\frac{4}{81}z_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2+(4-y_0)^2+z_0^2}}.$$

Обозначим $x_0^2+y_0^2=a$, $\frac{2}{25}y_0=b$. Если углы равны, должно выполняться равенство

$$\frac{-\frac{2}{9}a-(4+y_0)b}{\sqrt{a+(4+y_0)^2}}=\frac{-\frac{2}{9}a+(4-y_0)b}{\sqrt{a+(4-y_0)^2}}.$$

Возведя обе части в квадрат, можно убедиться в правильности последнего равенства. Например, если положить $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=\frac{\sqrt{44}}{5}$, тогда $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2=0{,}6839$. Итак, $\underline{\underline{\varphi_1=\varphi_2}}$.

72 (3434). К поверхности $x^2-y^2-3z=0$ провести касательную плоскость, проходящую через точку $A(0;0;-1)$, параллельно прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

Решение

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка касания искомой плоскости к поверхности.

$$F'_x(M_0)=2x_0;\quad F'_y(M_0)=-2y_0;\quad F'_z(M_0)=-3.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$2x_0(x-x_0)-2y_0(y-y_0)-3(z-z_0)=0.$$

Так как указанная плоскость проходит через точку $A(0;\,0;\,-1)$, имеем

$$-2x_0^2+2y_0^2+3z_0+3=0.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_0^2-y_0^2-3z_0=0, \\ -2x_0^2+2y_0^2+3z_0+3=0, \\ 4x_0-2y_0-6=0. \end{cases}$$

Последнее уравнение получим из условия перпендикулярности векторов $\{2x_0;-2y_0;-3\}$ и $\{2;\,1;\,2\}$.

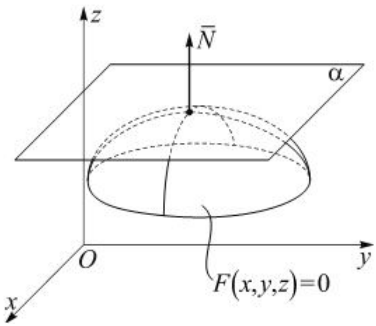
Из системы получаем: $x_0=2,\ y_0=1,\ z_0=1.$

Уравнение искомой плоскости:

$$\underline{\underline{4x-2y-3z=3.}}$$

73 (3435). На поверхности $x^2+y^2+z^2-6y+4z=12$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

Решение



Уравнение поверхности: $F(x,y,z)=$ $=x^2+y^2+z^2-6y+4z-12$. Частные производные: $F'_x=2x$, $F'_y=2y-6$, $F'_z=2z+4$. Если $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка касания на плоскости, то уравнение касательной плоскости:

$$2x_0(x-x_0)+(2y_0-6)(y-y_0)+(2z_0+4)(z-z_0)=0 \text{ или}$$

$$x_0(x-x_0)+(y_0-3)(y-y_0)+(z_0+2)(z-z_0)=0 \text{ (плоскость } \alpha).$$

Нормальный вектор плоскости $\overline{N} = \{x_0, y_0 - 3, z_0 + 2\}$.

Рассмотрим три случая:

1) $\alpha \parallel xOy$: $F'_x = 0$ и $F'_y = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 3$. Эти значения подставим в уравнение поверхности: $9 + z^2 - 18 + 4z = 12 \Rightarrow \underline{\underline{z^2 + 4z - 21 = 0}}$; $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5$; $\underline{\underline{z_1 = -7}}$; $\underline{\underline{z_2 = 3}}$.

2) $\alpha \parallel yOz$: $F'_y = 0$ и $F'_z = 0 \Rightarrow\ y = 3,\ z = -2$. Из уравнения поверхности получим $x^2 + 9 + 4 - 18 - 8 = 12 \Rightarrow\ \underline{\underline{x^2 = 25}},\ \underline{\underline{x = \pm 5}}$.

3) $\alpha \parallel xOz$: $F'_x = 0$ и $F'_z = 0 \Rightarrow x = 0,\ z = -2$. Из уравнения поверхности получим $y^2 + 4 - 6y - 8 = 12$, $\underline{\underline{y^2 - 6y - 16 = 0}} \Rightarrow y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+16} = 3 \pm 5$; $\underline{\underline{y_1 = 8}}$, $\underline{\underline{y_2 = -2}}$.

Таким образом, касательная плоскость к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ параллельна плоскости xOy в точках $(0;\ 3;\ 3)$ и $(0;\ 3;\ -7)$; плоскости yOz – в точках $(5; 3; -2)$ и $(-5; 3; -2)$; плоскости xOz – в точках $(0;\ -2;\ -2)$ и $(0;\ 8;\ -2)$.

74 (3436). Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3$ в произвольной точке. Выразить коэффициенты этого уравнения:

а) через значения параметров u_0 и v_0;

б) через координаты x_0, y_0, z_0 точки касания.

Решение

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 3u^2 \\ 2v & 3v^2 \end{vmatrix} = 6uv^2 - 6u^2v;$

$$B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 & 1 \\ 3v^2 & 1 \end{vmatrix} = 3u^2 - 3v^2;$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 1 & 2v \end{vmatrix} = 2v - 2u.$$

Тогда, определив значения A, B и C в точке M_0, находим:

$$6u_0v_0(v_0 - u_0)(x - (u_0 + v_0)) + 3(u_0 - v_0)(u_0 + v_0)\left(y - \left(u_0^2 + v_0^2\right)\right) +$$

$$+ 2(v_0 - u_0)\left(z - \left(u_0^3 + v_0^3\right)\right) = 0;$$

$$6u_0v_0x - 3(u_0 + v_0)y + 2z - 6u_0^2v_0 - 6u_0v_0^2 + 3u_0^3 + 3u_0v_0^2 + 3v_0u_0^2 +$$

$$+ 3v_0^3 - 2u_0^3 - 2v_0^3 = 0;$$

$$6u_0v_0x - 3(u_0 + v_0)y + 2z - 3u_0^2v_0 - 3u_0v_0^2 + u_0^3 + v_0^3 = 0;$$

$$6u_0v_0x - 3(u_0 + v_0)y + 2z + (u_0 + v_0)\left(u_0^2 - 4u_0v_0 + v_0^2\right) = 0\cdot$$

Таким образом, уравнение касательной плоскости имеет вид:

а) $\underline{\underline{6u_0v_0x - 3(u_0 + v_0)y + 2z + (u_0 + v_0)\left(u_0^2 - 4u_0v_0 + v_0^2\right) = 0}};$

б) $x_0^2 = u_0^2 + 2u_0v_0 + v_0^2,\ y_0 = u_0^2 + v_0^2 \Rightarrow u_0v_0 = \dfrac{x_0^2 - y_0}{2}.$ $3\left(x_0^2 - y_0\right)x -$

$- 3x_0y + 2z + x_0\left(y_0 - 2\left(x_0^2 - y_0\right)\right) = 0$ или

$$\underline{\underline{3\left(x_0^2 - y_0\right)x - 3x_0y + 2z - 2x_0^3 + 3x_0y_0 = 0.}}$$

75 (3437). Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные плоскости к параболоиду вращения $2pz = x^2 + y^2$.

Решение

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2pz$; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка касания плоскости к поверхности, и в этой точке $F'_x(M_0) = 2x_0$; $F'_y(M_0) = 2y_0$; $F'_x(M_0) = -2p$. Уравнение касательной плоскости:

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - p(z - z_0) = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через $O(0;0;0)$ перпендикулярно касательной плоскости и параллельно ее нормальному вектору $\overline{N}=\{x_0, y_0, -p\}$:

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{-p}=t \Rightarrow x=x_0 t; \quad y=y_0 t; \quad z=-pt.$$

Подставив найденные значения x, y, z в уравнение касательной плоскости, получим $t=\dfrac{z_0}{2z_0+p}$. Таким образом,

$$x=\frac{x_0 z_0}{2z_0+p}; \; y=\frac{y_0 z_0}{2z_0+p}; \quad z=-\frac{pz_0}{2z_0+p}.$$

Найдем связь между x, y и z, т. е. геометрическое место оснований перпендикуляров на касательной плоскости. Из предыдущих равенств вычислим координаты точки M_0: $x_0=\dfrac{x}{t}=\dfrac{x(2z_0+p)}{z_0}$; $y_0=\dfrac{y}{t}=\dfrac{y(2z_0+p)}{z_0}$;

$1=\dfrac{z}{-pt}=\dfrac{z(2z_0+p)}{-pz_0} \Rightarrow z_0=\dfrac{z(2z_0+p)}{-p}$. Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности $x^2+y^2=2pz$, то $F(x_0, y_0, z_0)=x_0^2+y_0^2-2pz_0=0$, откуда

$$\frac{x^2(2z_0+p)^2}{z_0^2}+\frac{y^2(2z_0+p)^2}{z_0^2}-2p\frac{z(2z_0+p)}{-p}=0;$$

$$\left(x^2+y^2\right)\frac{(2z_0+p)^2}{z_0^2}-2z\cdot\frac{p(2z_0+p)}{-p}=0;$$

$$p\left(x^2+y^2\right)+2z\cdot\frac{z_0^2}{(2z_0+p)^2}\left(2z_0 p+p^2\right)=0.$$

Так как $2z_0 p=x_0^2+y_0^2$, имеем

$$p\left(x^2 + y^2\right) + 2z \cdot \frac{z_0^2}{\left(2z_0 + p\right)^2}\left(x_0^2 + y_0^2 + p^2\right) = 0;$$

$$p\left(x^2 + y^2\right) + 2z \cdot \left(\frac{x_0^2 z_0^2}{\left(2z_0 + p\right)^2} + \frac{y_0^2 z_0^2}{\left(2z_0 + p\right)^2} + \frac{p^2 z_0^2}{\left(2z_0 + p\right)^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{p\left(x^2 + y^2\right) + 2z\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0.}}$$

5. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

5.1. Градиент

76 (3439). 1) $\psi(x,y)=x^2-2xy+3y-1$. Найти проекции градиента в точке $(1;2)$.

2) $u=5x^2y-3xy^3+y^2$. Найти проекции градиента в произвольной точке.

Решение

1) Градиент функции $\psi(x,y)$ в точке $M(x_0,y_0)$ есть вектор

$$\operatorname{grad}\psi=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M\bar{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M\bar{j}.$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=2x-2y,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-2x+3;\qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{(1;2)}=-2,\qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{(1;2)}=1;$$

$$\operatorname{grad}\psi=\underline{\underline{\{-2;1\}}}.$$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=10xy-3y^3,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=5x^2-9xy^2+2y;$

$$\operatorname{grad}u=\underline{\underline{\{10xy-3y^3;\ 5x^2-9xy^2+2y\}}}$$

77 (3440). 1) $z=x^2+y^2$. Найти $\operatorname{grad}z$ в точке $(3;\,2)$.

2) $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$. Найти $\operatorname{grad}z$ в точке $(2;1)$.

3) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Найти $\operatorname{grad}z$ в точке $(x_0;\ y_0)$.

Решение

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y;\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{(3;2)}=6,\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{(3;2)}=4;\ \operatorname{grad} z=\underline{\underline{6\bar{i}+4\bar{j}}}.$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}};\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{(2;1)}=\dfrac{2}{3},\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2;1)}=\dfrac{1}{3};$

$\operatorname{grad} z=\underline{\underline{\dfrac{1}{3}\left(2\bar{i}+\bar{j}\right)}}.$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2};\ \operatorname{grad} z=\underline{\underline{\dfrac{-y_0\bar{i}+x_0\bar{j}}{x_0^2+y_0^2}}}.$

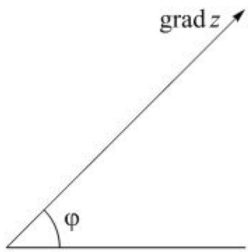
77 (3441). 1) Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z=\ln\left(x^2+4y^2\right)$ в точке $(6;\ 4;\ \ln 100)$.

2) Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z=x^y$ в точке $(2;\ 2;\ 4)$.

Решение

1) Наибольшая крутизна поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y,z)$ определяется как

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\operatorname{grad} z\right|.$$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+4y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{8y}{x^2+4y^2};$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=\frac{12}{100}=0{,}12,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=\frac{32}{100}=0{,}32;$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\operatorname{grad} z\right|=\sqrt{0{,}12^2+0{,}32^2}\approx 0{,}342;\ \underline{\underline{\varphi=\operatorname{arctg}0{,}342\approx 18^\circ 52'}}.$$

$$2)\ \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x;\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2\cdot 2 = 4,\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 4\ln 2 \approx 2{,}773.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{4^2 + 2{,}773^2} \approx 4{,}87,\ \underline{\underline{\varphi = \operatorname{arctg} 4{,}87 \approx 78^\circ 24'}}.$$

78 (3442). Каково направление наибольшего изменения функции $\varphi(x, y, z) = x\sin z - y\cos z$ в начале координат?

Решение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sin z,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\cos z,\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = x\cos z + y\sin z;$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_O = 0,\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_O = -1,\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_O = 0.$$

Направление наибольшего изменения функции в начале координат определяется градиентом функции в этой точке, т. е. $\operatorname{grad}\varphi = 0\cdot\bar{i} - 1\cdot\bar{j} + 0\cdot\bar{k} = \underline{\underline{-\bar{j}}}$ (отрицательная полуось y).

79 (3443). 1) $z = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$. Найти угол между градиентами этой функции в точках $(1;\,1)$ и $(3;\,4)$.

2) Даны функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке $(3;\,4)$.

Решение

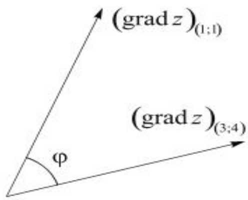
$$1)\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{(x+y)^2}}}\cdot\frac{x + y - x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)\sqrt{2xy + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{(x+y)^2}}}\cdot\frac{-x}{(x+y)^2}=-\frac{x}{(x+y)\sqrt{2xy+y^2}};\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(1,1)}=\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(1,1)}=-\frac{1}{2\sqrt{3}};\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(3,4)}=\frac{4}{7\sqrt{40}},\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(3,4)}=-\frac{3}{7\sqrt{40}}.$$

$$(\operatorname{grad} z)_{(1,1)}=\frac{\bar{i}}{2\sqrt{3}}-\frac{\bar{j}}{2\sqrt{3}};$$

$$(\operatorname{grad} z)_{(3,4)}=\frac{4\bar{i}}{7\sqrt{40}}-\frac{3\bar{j}}{7\sqrt{40}}.$$



Тогда $\cos\varphi=\dfrac{\dfrac{4}{14\sqrt{120}}+\dfrac{3}{14\sqrt{120}}}{\sqrt{\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}}\cdot\sqrt{\dfrac{16}{49\cdot 40}+\dfrac{9}{49\cdot 40}}}=\dfrac{7}{5\sqrt{2}}\approx 0{,}9899;$

$\underline{\underline{\varphi=\arccos 0{,}9899\approx 8^\circ}}.$

$$2)\ \left(\operatorname{grad}\sqrt{x^2+y^2}\right)_{(3,4)}=\left(\frac{x\bar{i}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y\bar{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_{(3,4)}=\frac{3}{5}\bar{i}+\frac{4}{5}\bar{j}.$$

$$\left(\operatorname{grad}\left(x-3y+\sqrt{3xy}\right)\right)_{(3,4)}=\left(\left(1+\frac{3y}{2\sqrt{3xy}}\right)\bar{i}+\left(-3+\frac{3x}{2\sqrt{3xy}}\right)\bar{j}\right)_{(3,4)}=2\bar{i}-\frac{9}{4}\bar{j}.$$

$$\left|\operatorname{grad}\sqrt{x^2+y^2}\right|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1.\ \left|\operatorname{grad}\left(x-3y+\sqrt{3xy}\right)\right|=\sqrt{4+\frac{81}{16}}\approx 3{,}01.$$

Тогда $\cos\varphi=\dfrac{\frac{6}{5}-\frac{9}{5}}{1\cdot 3{,}01}=-0{,}199$, $\underline{\underline{\varphi=\arccos(-0{,}199)\approx 101^\circ 30'}}.$

80 (3444). Найти точку, в которой градиент функции $z=\ln\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$ равен $\bar{i}-\dfrac{16}{9}\bar{j}$.

Решение

$$\operatorname{grad} z=\frac{1}{x+\frac{1}{y}}\bar{i}-\frac{\frac{1}{y^2}}{x+\frac{1}{y}}\bar{j}=\frac{y}{xy+1}\bar{i}-\frac{1}{y(xy+1)}\bar{j}.$$

$$\begin{cases}\dfrac{y}{xy+1}=1,\\ -\dfrac{1}{y(xy+1)}=-\dfrac{16}{9}\end{cases}\Rightarrow y^2=\frac{9}{16};\ y=\pm\frac{3}{4};\ x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=\frac{7}{3}.$$

Таким образом, условие задачи удовлетворяют точки $\underline{\underline{\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)}}$ и $\underline{\underline{\left(\frac{7}{3};-\frac{3}{4}\right)}}$.

81 (3445). Доказать следующие соотношения (φ и ψ – дифференцируемые функции, c – постоянная):

1) $\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi$.

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y}\bar{j}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{j}\right)=$$
$$=\underline{\underline{\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi}}.$$

2) $\operatorname{grad}(c+\varphi)=\operatorname{grad}\varphi$.

$$\operatorname{grad}(c+\varphi)=\underbrace{\operatorname{grad}c}_{=0}+\operatorname{grad}\varphi=\underline{\underline{\operatorname{grad}\varphi}}.$$

3) $\operatorname{grad}c\varphi=c\operatorname{grad}\varphi$.

$$\operatorname{grad}c\varphi=\frac{\partial(c\varphi)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial(c\varphi)}{\partial y}\bar{j}=c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}\right)=\underline{\underline{c\operatorname{grad}\varphi}}.$$

4) $\operatorname{grad}\varphi\psi = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$.

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y}\bar{j} = \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{i} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i}\right) + \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{j} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}\right) =$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{j}\right) + \psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}\right) = \underline{\underline{\varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi}}.$$

5) $\operatorname{grad}(\varphi^n) = n\varphi^{n-1}\operatorname{grad}\varphi$.

$$\operatorname{grad}(\varphi^n) = \frac{\partial(\varphi^n)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(\varphi^n)}{\partial y}\bar{j} = n\varphi^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + n\varphi^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} = \underline{\underline{n\varphi^{n-1}\operatorname{grad}\varphi}}.$$

6) $\operatorname{grad}(\varphi(\psi)) = \varphi'(\psi)\operatorname{grad}\psi$.

$$\operatorname{grad}(\varphi(\psi)) = \frac{\partial(\varphi(\psi))}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial(\varphi(\psi))}{\partial y}\bar{j} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{j} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{j}\right) = \underline{\underline{\varphi'(\psi)\operatorname{grad}\psi}}.$$

82 (3446). $z = \varphi(u, v)$; $u = \psi(x, y)$, $v = \xi(x, y)$. Показать, что $\operatorname{grad} z = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v$.

Решение

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\bar{j} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}\right)}_{\operatorname{grad} u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\bar{j}\right)}_{\operatorname{grad} v} = \underline{\underline{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v}}.$$

83 (3447). $u(x,y,z)=x^2y^2z$. Найти проекции $\operatorname{grad}u$ в точке (x_0,y_0,z_0).

Решение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}=\left(2xy^2z\right)_{M_0}=\underline{\underline{2x_0y_0^2z_0}};\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}=\underline{\underline{2x_0^2y_0z_0}};\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}=\underline{\underline{x_0^2y_0^2}}.$$

84 (3448). Показать, что функция $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ удовлетворяет соотношению $u=2\ln 2-\ln(\operatorname{grad}u)^2$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

$$(\operatorname{grad}u)^2=\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}u=\frac{4\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}=\frac{4}{x^2+y^2+z^2}.$$

$$2\ln 2-\ln\frac{4}{x^2+y^2+z^2}=2\ln 2-2\ln 2+\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)=\underline{\underline{u}}.$$

85 (3449). Доказать, что если x, y, z суть функции от t, то $\frac{d}{dt}f(x,y,z)=\operatorname{grad}f\cdot\frac{d\bar r}{dt}$, где $\bar r=x\cdot\bar i+y\cdot\bar j+z\cdot\bar k$.

Доказательство

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar i+\frac{\partial f}{\partial y}\bar j+\frac{\partial f}{\partial z}\bar k\right)\left(\frac{dx}{dt}\bar i+\frac{dy}{dt}\bar j+\frac{dz}{dt}\bar k\right)=\underline{\underline{\operatorname{grad}f\cdot\frac{d\bar r}{dt}}},\ \text{ч. т. д.}$$

86 (3450). Использовать доказанное в предыдущей задаче соотношение для нахождения градиента функции: 1) $f=\bar r^2$; 2) $f=|\bar r|$;

3) $f = F(\bar{r}^2)$; 4) $f = (\bar{a}\bar{r})(\bar{b}\bar{r})$; 5) $f = (\bar{a}\bar{b}\bar{c})$; где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – постоянные векторы.

Решение

1) $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{r}^2 = \bar{r}\cdot\bar{r} = x^2 + y^2 + z^2$, $\operatorname{grad}(\bar{r}^2) = 2(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \underline{\underline{2\bar{r}}}$.

2) $|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\operatorname{grad}|\bar{r}| = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \underline{\underline{\dfrac{\bar{r}}{|\bar{r}|}}}$.

3) $$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} F\big(\underbrace{\bar{r}^2}_{u}\big) = \operatorname{grad} F(u) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}\left(2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}\right) = \underline{\underline{2F'(\bar{r}^2)\bar{r}}} \quad (u = \bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

4) $$\operatorname{grad}\left((\bar{a}\bar{r})\cdot(\bar{b}\bar{r})\right) = \left(\frac{d}{dx}(\bar{a}\bar{r})\cdot(\bar{b}\bar{r}) + \frac{d}{dx}(\bar{b}\bar{r})\cdot(\bar{a}\bar{r})\right)\bar{i} + \left(\frac{d}{dy}(\bar{a}\bar{r})\cdot(\bar{b}\bar{r}) +\right.$$

$$\left.+ \frac{d}{dy}(\bar{b}\bar{r})\cdot(\bar{a}\bar{r})\right)\bar{j} + \left(\frac{d}{dz}(\bar{a}\bar{r})\cdot(\bar{b}\bar{r}) + \frac{d}{dz}(\bar{b}\bar{r})\cdot(\bar{a}\bar{r})\right)\bar{k} = \left(a_x\cdot(\bar{b}\bar{r}) + b_x\cdot(\bar{a}\bar{r})\right)\bar{i} +$$

$$+ \left(a_y\cdot(\bar{b}\bar{r}) + b_y\cdot(\bar{a}\bar{r})\right)\bar{j} + \left(a_z\cdot(\bar{b}\bar{r}) + b_z\cdot(\bar{a}\bar{r})\right)\bar{k} = \underbrace{\left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right)}_{\bar{a}}(\bar{b}\cdot\bar{r}) +$$

$$+ \underbrace{\left(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}\right)}_{\bar{b}}(\bar{a}\cdot\bar{r}) = \underline{\underline{\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{r}) + \bar{b}\cdot(\bar{a}\cdot\bar{r})}}.$$

5) $$f = (\bar{a}\bar{b}\bar{r}),\quad \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{r} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = a_x(b_y z - b_z y) - a_y(b_x z - b_z x) +$$

$$+ a_z(b_x y - b_y x).\ \operatorname{grad}(\bar{a}\bar{b}\bar{r}) = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \underline{\underline{\bar{a}\times\bar{b}}}.$$

.

5.2. Производная по направлению

87 (3451). 1) Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3;1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $K(6;5)$.

2) Найти производную функции $z = \operatorname{arctg} xy$ в точке $M(1;1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

Решение

1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M = \left(3x^2 - 6xy + 3y^2\right)_M = 18$; $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M = \left(-3x^2 + 6xy\right)_M = -9$,

$\overline{MK} = \{3;4\}$, $\left|\overline{MK}\right| = \sqrt{9+16} = 5$; $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$. $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M \cos\alpha +$

$+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M \cos\beta = 18\cdot\dfrac{3}{5} - 9\cdot\dfrac{4}{5} = \underline{\underline{0}}$.

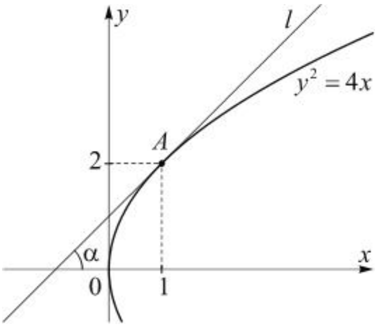
2) $\alpha = \beta = 45°$. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M = \left(\dfrac{y}{1+x^2y^2}\right)_M = \dfrac{1}{2}$; $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M = \left(\dfrac{x}{1+x^2y^2}\right)_M = \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}}$.

88 (3452). Найти производную функции $z = \ln(x+y)$ в точке $(1;2)$, принадлежащей параболе $y^2 = 4x$, по направлению этой параболы.

Решение

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y}$, $y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x}$ ($y > 0$), $y'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,



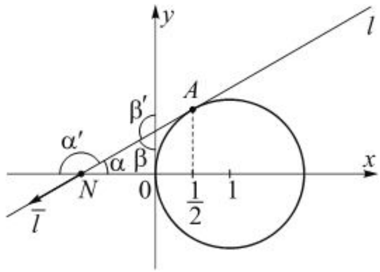
$\operatorname{tg}\alpha = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)_{x=1} = 1$, $\alpha = 45°$.

$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_A = \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_A = \dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}}$.

89 (3453). Найти производную функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, принадлежащей окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$, по направлению этой окружности.

Решение



$$y = \sqrt{2x - x^2} \ (y > 0); \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} =$$

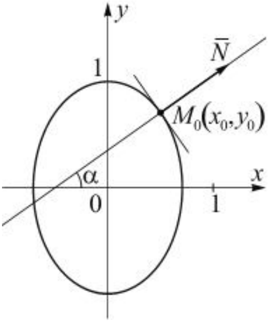
$$= -\frac{y}{x^2 + y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}\right)_A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°;$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos\beta = \frac{1}{2}; \ \frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}.$$

Замечание. Если движение по окружности будет против хода часовой стрелки и нужно брать вектор $\bar{l} = \overline{AN}$, то $\alpha' = 180° - \alpha$ и $\cos\alpha' = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta' = 180° - \beta$ и $\cos\beta' = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta = -\dfrac{1}{2}$. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

90 (3454). Доказать, что производная функции $z = \dfrac{y^2}{x}$ в любой точке эллипса $2x^2 + y^2 = 1$ по направлению нормали к эллипсу равна нулю.



Доказательство

Уравнение нормали к эллипсу в произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{(y')_{M_0}}(x - x_0).$$

Находим угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке M_0:

$$4x + 2y \cdot y' = 0; \quad y' = -\frac{2x}{y}; \quad y'(M_0) = -\frac{2x_0}{y_0}.$$

Перепишем уравнение нормали следующим образом: $\dfrac{x - x_0}{\dfrac{2x_0}{y_0}} =$

$= \dfrac{y - y_0}{1}$. Тогда нормальный вектор $\overline{N} = \left\{\dfrac{2x_0}{y_0}; 1\right\}$; $\left|\overline{N}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{2x_0}{y_0}\right)^2 + 1}$;

$\cos\alpha = \dfrac{2x_0}{y_0\left|\overline{N}\right|}$; $\quad \cos\beta = \dfrac{1}{\left|\overline{N}\right|}$. $\quad \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = -\dfrac{y_0^2}{x_0^2}$; $\quad \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = \dfrac{2y_0}{x_0}$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial N} =$

$= -\dfrac{2x_0 y_0^2}{x_0^2 y_0\left|\overline{N}\right|} + \dfrac{2y_0}{x_0\left|\overline{N}\right|} = \underline{\underline{0}}$, ч.т.д.

90 (3455). 1) Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке $M(1; 1; 2)$ в направлении, образующем с осями координат углы соответственно 60°, 45°, 60°.

2) Найти производную функции $w = xyz$ в точке $A(5; 1; 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(9; 4; 14)$.

Решение

1) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = \left(y^2 - yz\right)_M = -1;$ $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = \left(2xy - xz\right)_M = 0;$ $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M =$
$= \left(3z^2 - xy\right)_M = 11.$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -1 \cdot \cos 60° + 0 \cdot \cos 45° + 11 \cdot \cos 60° = \underline{\underline{5}}.$$

2) $\overline{AB} = \{4;\ 3;\ 12\}$, $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{16 + 9 + 144} = 13$. $\cos\alpha = \frac{4}{13}$, $\cos\beta = \frac{3}{13}$,
$\cos\gamma = \frac{12}{13}$. $\frac{\partial u}{\partial l} = (yz)_A \cdot \frac{4}{13} + (xz)_A \cdot \frac{3}{13} + (xy)_A \cdot \frac{12}{13} = \frac{1}{13}(8 + 30 + 60) = \underline{\underline{\frac{98}{13}}}.$

91 (3456). Найти производную функции $u = x^2 y^2 z^2$ в точке $A(1;\ -1;\ 3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(0;\ 1;\ 1)$.

Решение

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = \left(2xy^2z^2\right)_A = 18;$ $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A = \left(2x^2yz^2\right)_A = -18;$ $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A =$
$= \left(2x^2y^2z\right)_A = 6;$ $\overline{AB} = \{-1;\ 2;\ -2\}$; $\left|\overline{AB}\right| = 3$; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$;
$\cos\gamma = -\frac{2}{3}$. $\frac{\partial u}{\partial l} = 18 \cdot \frac{1}{3} - 18 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{-22}}.$

92 (3457). Доказать, что производная от функции $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в любой точке $M(x;\ y;\ z)$ в направлении от этой точки к началу координат равна $-\frac{2u}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

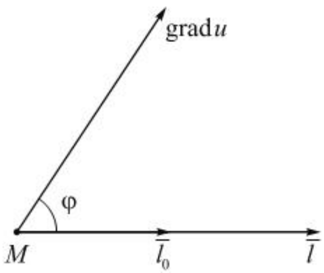
Доказательство

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{c^2};\quad \bar{l}=\{-x,-y,-z\}.\quad \cos\alpha=-\frac{x}{r},$$

$$\cos\beta=-\frac{y}{r},\ \cos\gamma=-\frac{z}{r};\ \frac{\partial u}{\partial l}=-2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\cdot\frac{1}{r}=\underline{\underline{-\frac{2u}{r}}}.$$

93 (3458). Доказать, что производная функции $u=f(x,y,z)$ в направлении ее градиента равна модулю градиента.

Доказательство



$$\left|\bar{l}_0\right|=1,\ \bar{l}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

$$\text{Пр}_{\bar{l}}\,\mathrm{grad}\,u=\left|\mathrm{grad}\,u\right|\cdot\cos\varphi=\left|\mathrm{grad}\,u\right|\cdot\left|\bar{l}_0\right|\cdot\cos\varphi=$$

$$=\mathrm{grad}\,u\cdot\bar{l}_0=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=$$

$=\dfrac{\partial u}{\partial l}$. Таким образом, $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\left|\mathrm{grad}\,u\right|\cdot\cos\varphi$ и при $\varphi=0$, когда направление градиента функции и направление $\bar{l}$ совпадают, $\underline{\underline{\dfrac{\partial u}{\partial l}=\left|\mathrm{grad}\,u\right|}}$, ч.т.д.

94 (3459). Найти производную функции $u=\dfrac{1}{r}$, где $r^2=x^2+y^2+z^2$, в направлении ее градиента.

Решение

Согласно 93 (3458) $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u\right|$.

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}; \qquad \operatorname{grad} u = -\frac{x}{r^3}\bar{i} - \frac{y}{r^3}\bar{j} - \frac{z}{r^3}\bar{k}; \qquad \frac{\partial u}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u\right| =$$

$$= \frac{1}{r^3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \underline{\underline{\frac{1}{r^2}}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2002. – 432 с.

2. **Гольдфайн, И. А.** Векторный анализ и теория поля [Текст] / И. А. Гольдфайн. – М. : Физматгиз, 1962. – 132 с.

3. **Кочин, Н. Е.** Векторное исчисление и начало тензорного исчисления [Текст] / Н. Е. Кочин. – М. : АН СССР, 1961. – 545 с.

4. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов [Текст] : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1968. – Т. 1. – 552 с.

5. **Пчелин, Б. К.** Векторный анализ для инженеров-электриков и радистов [Текст] / Б. К. Пчелин. – М. : Энергия, 1968. – 254 с.

СОДЕРЖАНИЕ