

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**Н. О. РОМАНЧУК,
О. О. ГАЙША, О. В. МАЙБОРОДА**

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник для студентів,
які навчаються за скороченим терміном

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв • НУК • 2018

УДК 517(075.8)

Р 69

Автори:

Н. О. Романчук, кандидат педагогічних наук, доцент;

О. О. Гайша, кандидат технічних наук, доцент;

О. В. Майборода, кандидат економічних наук, доцент

Рецензент В. Д. Будак, доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України, заслужений діяч науки і техніки України

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як навчальний посібник*

Романчук Н. О.

Р 69 Диференціальні рівняння : навчальний посібник для студентів, які навчаються за скороченим терміном / Н. О. Романчук, О. О. Гайша, О. В. Майборода. – Миколаїв : НУК, 2018. – 136 с.

Представлено методичні розробки для проведення практичних занять з розділу "Диференціальні рівняння". Розроблено п'ять практичних занять, для кожного з яких викладено основні теоретичні відомості, подано завдання для аудиторної, самостійної роботи студентів та їх розв'язки.

Призначено для студентів, які вивчають вищу математику за скороченим терміном, та викладачів.

УДК 517(075.8)

© Романчук Н. О., Гайша О. О.,
Майборода О. В., 2018

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2018

ВСТУП

Навчальний посібник "Диференціальні рівняння" створено для проведення практичних занять студентам, які навчаються за скороченим терміном, з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки і посилення прикладної спрямованості курсу.

Розроблений посібник передбачає вивчення студентами основних розділів математичного аналізу в ході навчання та має за мету допомогти їм у самостійному оволодінні теоретичними знаннями і необхідними практичними навичками.

Навчальний матеріал посібника подано у вигляді п'яти практичних занять, кожне з яких містить основні теоретичні відомості, завдання для аудиторної, самостійної роботи студентів, а також відповіді та вказівки до їх розв'язання.

Посібник може бути корисним як для студентів, що навчаються за скороченим терміном, так і для викладачів при підготовці до практичних занять.

Практичне заняття 1

Диференціальні рівняння першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння

I. Основні теоретичні відомості

Означення 1. Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду $F(x, y, y') = 0$, яке пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y' .

Якщо рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв'язати відносно y' , тобто $y' = f(x, y)$, то таке рівняння є диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням у нормальній формі.

Рівняння $y' = f(x, y)$ можна записати так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{або} \quad -f(x, y)dx + dy = 0.$$

Якщо помножити останнє рівняння на функцію $Q(x, y) \neq 0$, то отримане рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y)$

і $Q(x, y)$ – відомі функції, буде диференціальним рівнянням першого порядку, записаним у диференціальній формі.

Означення 2. Розв'язком диференціального рівняння першого порядку на деякому інтервалі $(a; b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в дане рівняння обертає його в тотожність по x на $(a; b)$, тобто

$$\forall x \in (a; b): \quad \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Означення 3. Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою цього рівняння.

Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку).

Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені й неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0; y_0) \in G$, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє умову $y = y_0$ при $x = x_0$, тобто $\varphi(x_0) = y_0$.

Геометрична інтерпретація теореми Коші: через кожную точку $(x_0; y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива; якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0 , не виходячи при цьому з області G , то отримуватимемо різні інтегральні криві (рис. 1.1).

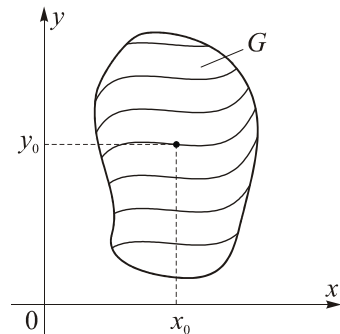


Рис. 1.1

Означення 4. Умова, згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0 , називається початковою умовою розв'язку і записується так: $y|_{x=x_0} = y_0$,

або $y(x_0) = y_0$. Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову, називається *задачею Коші*.

Означення 5. Якщо права частина диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ задовольняє в області G умови теореми Коші, тоді функція $y = \varphi(x, C)$ називається *загальним розв'язком* даного диференціального рівняння за наступних умов:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C ;

2) для довільної точки $(x_0; y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову: $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Означення 6. *Частинним розв'язком* рівняння $y' = f(x, y)$ називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Означення 7. Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено у неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ у цьому випадку називають *частинним інтегралом* рівняння.

Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій, то говорять, що *диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах* або *зводиться до квадратур*.

Розглянемо окремі класи диференціальних рівнянь, які інтегруються в квадратурах.

Рівняння з відокремлюваними змінними

– це рівняння вигляду

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y), \quad (1)$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції.

Якщо в рівнянні (1) замінити $y' = \frac{dy}{dx}$, поділити обидві частини рівності на $\varphi(y)$, вважаючи, що $\varphi(y) \neq 0$, і помножити на dx , то отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx;$$

– рівняння з відокремленими змінними, яке розв'язується в квадратурах:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

– це рівняння вигляду $y' = f(x, y)$, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Функція $f(x, y)$ буде однорідною функцією n -го виміру відносно змінних x та y , якщо виконується тотожність

$$f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y), \quad t \neq 0.$$

Однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою $y = ux$, де $u = u(x)$ – невідома функція.

II. Завдання для аудиторної роботи

Завдання 1. Перевірити, чи буде задана функція розв'язком даного диференціального рівняння:

а) $y = Ce^{-2x}$, $y' + 2y = 0$;

б) $y = C_1x + C_2x^2$, $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Розв'язання

а) знаходимо похідну даної функції: $y' = -2Ce^{-2x}$. Підставляючи знайдену похідну в дане рівняння, переконуємося, що воно перетворюється на тотожність: $-2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = 0$, $0 \equiv 0$. Отже, функція $y = Ce^{-2x}$ є розв'язком даного рівняння.

б) двічі диференціюючи функцію $y(x)$, знаходимо: $y' = C_1 + 2C_2x$, $y'' = 2C_2$. Далі отримуємо

$$x^2 \cdot 2C_2 - 2x(C_1 + 2C_2x) + 2(C_1x + C_2x^2) = 0,$$

$$2C_2x^2 - 2C_1x - 4C_2x^2 + 2C_1x + 2C_2x^2 = 0.$$

Тому $0 \equiv 0$ – тотожність, отже, задана функція є розв'язком диференціального рівняння.

Завдання 2. Знаючи загальний розв'язок $4x^2 + y^2 = C^2$ диференціального рівняння першого порядку, знайти і побудувати його інтегральні криві, що проходять через точки $B_1(-1; 0)$, $B_2(0; -3)$, $B_3(2; 0)$.

Розв'язання

Підставляючи в загальний розв'язок диференціального рівняння координати точок B_1 , B_2 , B_3 , отримуємо значення

параметра C , за якого із загального розв'язку одержується рівняння інтегральної кривої, що проходить через точки B_1, B_2, B_3 відповідно:

т. $B_1(-1; 0): C^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4;$

т. $B_2(0; -3): C^2 = 9 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 9;$

т. $B_3(2; 0): C^2 = 16 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 16.$

Одержані рівняння визначають інтегральні криві, які проходять через точки B_1, B_2, B_3 і являють собою концентричні еліпси (рис. 1.2).

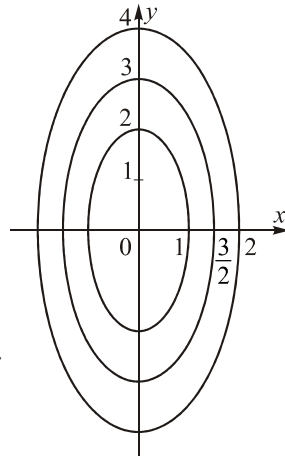


Рис. 1.2

Завдання 3. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0;$

б) $1 + (1 + y') \cdot e^y = 0;$

в) $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0;$

г) $y - xy' = x + yy';$

д) $y dy + (x - 2y)dx = 0;$

е) $y dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$

Розв'язання

Рівняння (а–в) – це рівняння з відокремлюваними змінними, а рівняння (г–е) – однорідні.

$$a) (y + xy)dx + (x - xy)dy = 0;$$

$$y(1+x)dx - x(y-1)dy = 0; \quad \frac{y-1}{y}dy = \frac{1+x}{x}dx;$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy = \int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx; \quad y - \ln|y| = x + \ln|x| + C;$$

$$\underline{y - x - \ln|xy| = C.}$$

$$б) 1 + (1 + y') \cdot e^y = 0;$$

$$1 + y' = -\frac{1}{e^y}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e^y} - 1; \quad dy = -\frac{1 + e^y}{e^y}dx;$$

$$\int \frac{e^y}{1 + e^y} dy = -\int dx; \quad \ln(1 + e^y) = -x + C_1; \quad 1 + e^y = e^{-x + C_1};$$

$$1 + e^y = e^{-x} \cdot C, \quad \text{де } C = e^{C_1};$$

$$\underline{(1 + e^y) \cdot e^x = C.}$$

$$в) 2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0;$$

$$\frac{3^x}{3^{2y}} \cdot y' = -2^x \cdot 2^y; \quad \frac{1}{9^y \cdot 2^y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{2^x}{3^x};$$

$$\int 18^{-y} dy = -\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx; \quad -\frac{18^y}{\ln 18} = -\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + C_1;$$

$$\frac{18^y}{\ln 18} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} = C, \quad \text{де } C = -C_1.$$

г) $y - xy' = x + yu';$

$$(y + x) \cdot y' = y - x; \quad y' = \frac{y - x}{y + x}.$$

Позначимо $y = ux$, тоді $y' = u'x + u$. Тому

$$u'x + u = \frac{ux - x}{ux + x}; \quad u'x = \frac{u - 1}{u + 1} - u;$$

$$u'x = \frac{u - 1 - u^2 - u}{u + 1}; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = -\frac{1 + u^2}{u + 1};$$

$$\int \frac{u + 1}{1 + u^2} du - \int \frac{dx}{x}.$$

Обчислюємо

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u + 1}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{2u}{1 + u^2} du + \int \frac{du}{1 + u^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + \operatorname{arctg} u + \ln C. \end{aligned}$$

Отже, отримуємо

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C = -\ln|x|;$$

$$\ln \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot C|x| + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0;$$

$$\ln C \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

$$д) y dy + (x - 2y) dx = 0;$$

$$y dy = (2y - x) dx; \quad y' = \frac{2y - x}{y}.$$

Застосуємо підстановку: $y = ux$, $y' = u'x + u$, тоді

$$u'x + u = \frac{2ux - x}{ux}; \quad u'x = \frac{2u - 1}{u} - u;$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{2u - 1 - u^2}{u}; \quad - \int \frac{u du}{u^2 - 2u + 1} = \int \frac{dx}{x};$$

$$I = - \int \frac{u - 1}{u^2 - 2u + 1} - \int \frac{du}{(u - 1)^2} = - \frac{1}{2} \int \frac{(2u - 1) du}{u^2 - 2u + 1} + \frac{1}{u - 1} =$$

$$= - \frac{1}{2} \ln(u - 1)^2 + \frac{1}{u - 1} - \ln C = - \ln(u - 1) + \frac{1}{u - 1} - \ln C;$$

$$- \ln(u - 1) + \frac{1}{u - 1} - \ln C = \ln|x|; \quad \frac{1}{\frac{y}{x} - 1} = \ln C \cdot |x| \cdot \left(\frac{y}{x} - 1 \right);$$

$$\frac{x}{y - x} = \ln C(y - x);$$

$$\underline{x = (y - x) \cdot \ln C(y - x)}.$$

$$\text{е) } y \, dx + (2\sqrt{xy} - x) \, dy = 0;$$

$$(x - 2\sqrt{xy}) \, dy = y \, dx; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - 2\sqrt{xy}}.$$

Підстановка: $y = ux$, $y' = u'x + u$, тоді $u'x + u = \frac{ux}{x - 2x\sqrt{u}}$;

$$u'x = \frac{u}{1 - 2\sqrt{u}} - u; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{u - u + 2u\sqrt{u}}{1 - 2\sqrt{u}};$$

$$\int \frac{1 - 2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}} \, du = \int \frac{dx}{x}; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|u| = \ln|x| \cdot C;$$

$$-\frac{1}{\sqrt{u}} = \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \ln C|x|; \quad -\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln Cy;$$

$$\underline{\sqrt{y} \ln Cy + \sqrt{x} = 0.}$$

Завдання 4. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють початкові умови:

$$\text{а) } y' \sin x = y \ln y, \, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e; \quad \text{б) } 2(1 + e^x)yy' = e^x, \, y(0) = 0;$$

$$\text{в) } \frac{y - xy'}{x + yy'} = 2, \, y(1) = 1.$$

Розв'язання

$$\text{а) } y' \sin x = y \ln y;$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \ln |\ln y| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln C; \quad \ln y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Застосуємо початкові умови: $\ln e = C \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, звідки $C = 1$;

$$\ln y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \text{або} \quad \underline{y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}}.$$

$$\text{б) } 2(1 + e^x) \cdot yy' = e^x;$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + e^x}; \quad 2 \int y dy = \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}; \quad y^2 = \ln(1 + e^x) + C.$$

Якщо $y(0) = 0$, то $0 = \ln 2 + C \Rightarrow C = -\ln 2$;

$$y^2 = \ln(1 + e^x) - \ln 2; \quad y^2 = \ln \frac{1 + e^x}{2}; \quad \frac{1 + e^x}{2} = e^{y^2};$$

$$\underline{1 + e^x = 2e^{y^2}}.$$

$$\text{в) } \frac{y - xy'}{x + yy'} = 2;$$

$$y - xy' = 2x + 2yy'; \quad (2y + x)y' = y - 2x; \quad y' = \frac{y - 2x}{2y + x};$$

$$y = ux, \quad y' = u'x + u; \quad u'x + u = \frac{ux - 2x}{2ux + x}; \quad u'x + u = \frac{u - 2}{2u + 1};$$

$$u'x = \frac{u - 2 - 2u^2 - u}{2u + 1}; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = -\frac{2 + 2u^2}{2u + 1};$$

$$\int \frac{2u+1}{2u^2+2} du = -\int \frac{dx}{x}; \quad \frac{1}{2} \int \frac{2u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+1} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u = -\ln|x| + C_1;$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln|x| = C_1;$$

$$\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2 \ln|x| = C, \quad \text{де } C = 2C_1;$$

$$\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) \cdot x^2 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C; \quad \ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C.$$

При заданих початкових умовах $y(1) = 1$ отримаємо

$$\ln 2 + \operatorname{arctg} 1 = C \Rightarrow C = \ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

Отже,

$$\ln(x^2+y^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

Завдання 5. Знайти залежність швидкості падіння тіла в повітрі від часу, якщо сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості v і площі S найбільшого перерізу тіла, перпендикулярного до напрямку руху, тобто $F = kSv^2$.

Розв'язання

Згідно з другим законом Ньютона та умовою задачі, диференціальне рівняння руху центра тяжіння падаючого тіла

$$\text{буде } m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kSv^2 \text{ або } \frac{dv}{dt} = g - av^2, \quad a = \frac{kS}{m}, \text{ де } m - \text{маса}$$

тіла; v – швидкість падіння тіла в момент часу t ; g – прискорення сили тяжіння.

Відокремлюючи змінні в отриманому диференціальному рівнянні, одержимо

$$\int \frac{dv}{g - av^2} = \int dt \Rightarrow t = \frac{1}{2\sqrt{ag}} \cdot \ln \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{a}}{\sqrt{g} - v\sqrt{a}} + C.$$

Застосовуємо початкові умови $v = 0$ і $t = 0$ і знаходимо значення $C = 0$. Тоді, розв'язавши рівняння відносно v , знаходимо шукану залежність швидкості падіння тіла від часу:

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{ag}} - 1}{e^{2t\sqrt{ag}} + 1}, \quad \text{або} \quad v = \sqrt{\frac{g}{a}} \left(1 - \frac{2}{e^{2t\sqrt{ag}} + 1} \right).$$

Завдання 6. Знайти форму дзеркала, яке відбиває всі промені, що виходять з даної точки, паралельно заданому напрямку.

Розв'язання

Перетнемо поверхню дзеркала площиною, яка проходить через дану точку паралельно заданому напрямку. Оберемо цю точку за початок прямокутної системи координат, направимо вісь Oy по заданому напрямку відбитих променів (рис. 1.3). Знайдемо рівняння кривої L , яка одержується при перетині шуканої поверхні вказаною площиною.

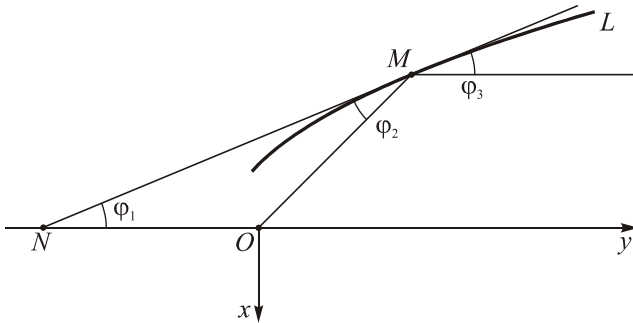


Рис. 1.3

Оскільки кут падіння дорівнює куту відбивання, то і $\angle \varphi_3 = \angle \varphi_2$. Але $\angle \varphi_3 = \angle \varphi_1$, тому $\triangle MON$ – рівнобедрений, $OM = ON$.

Рівняння дотичної MN : $Y - y = y'(X - x)$. Нехай $X=0$, тоді $Y = -ON = y - xy' < 0$. Довжина відрізка $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. $M(x; y)$.

Прирівнявши знайдені вирази ON і OM , одержимо диференціальне рівняння кривої L :

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{або} \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Розв'яжемо таке однорідне диференціальне рівняння:
 $y = ux, \quad y' = u'x + u;$

$$u'x + u = u + \sqrt{1 + u^2}; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{1 + u^2}; \quad \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|u + \sqrt{1 + u^2}| = \ln C_1 x; \quad u + \sqrt{1 + u^2} = C_1 x; \quad \sqrt{1 + u^2} = C_1 x - u;$$

$$1 + u^2 = C_1^2 x^2 + 2C_1 x u + u^2; \quad 1 = C_1^2 x^2 + 2C_1 x \cdot \frac{y}{x};$$

$$1 = C_1^2 x^2 + 2C_1 y; \quad 2C_1 y = 1 - C_1^2 x^2 \Rightarrow y = \frac{1 - C_1^2 x^2}{2C_1},$$

$$\text{або } y = \frac{x^2 - C^2}{2C} \quad \left(C = -\frac{1}{C_1} \right).$$

Одержане рівняння описує сімейство парабол, симетричних осі Oy із спільним фокусом у заданій точці O . Крива L буде однією з парабол цього сімейства. Оскільки крива L розміщена в довільній площині, яка проходить через вісь Oy , то шукана поверхня дзеркала – це параболоїд

$$y = \frac{x^2 + z^2 - C^2}{2C}.$$

III. Завдання для самостійної роботи студентів

Завдання 1. Перевірити, чи буде задана функція розв'язком даного диференціального рівняння:

а) $y = \sqrt{x}, \quad 2yy' = 1;$

б) $S = -t - \frac{1}{2} \sin 2t, \quad \frac{d^2 S}{dt^2} + \operatorname{tg} t \cdot \frac{dS}{dt} = \sin 2t.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0;$ б) $yy' + x = 1;$

в) $x^2(2yy' - 1) = 1;$

г) $y = x \left(y' - \sqrt[x]{e^y} \right);$

д) $y^2 + x^2 y' = xyy';$

е) $xy' = y \cdot \ln \frac{y}{x}.$

Завдання 3. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють початкові умови

а) $y^2 + x^2 y' = 0, \quad y(-1) = 1;$

б) $(1 + x^2)y^3 dx - (y^2 - 1)x^3 dy = 0, \quad y(1) = -1.$

Практичне заняття 2

Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах

I. Основні теоретичні відомості

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1)$$

де $p(x)$, $q(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції, називаються *лінійними диференціальними рівняннями першого порядку*.

Метод Бернуллі інтегрування рівнянь (1) полягає у відшукуванні розв'язку у вигляді добутку $y = uv$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції.

Ураховуючи, що $y' = u'v + uv'$, рівняння (1) набуде вигляду

$$u'v + uv' + p(x) \cdot uv = q(x). \quad (2)$$

Функцію $v(x)$ підберемо так, щоб

$$v' + p(x) \cdot v = 0, \quad (3)$$

звідки $v = e^{-\int p(x) dx}$ – один із розв'язків рівняння (3).

Тоді $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, $u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$.

Отже, $y = uv = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$ – загальний розв'язок рівняння (1).

Рівняння Бернуллі

– це рівняння вигляду $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^\alpha$, де $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного.

Рівняння в повних диференціалах

Рівняння вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \quad (5)$$

Для того щоб рівняння (4) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Загальний інтеграл рівняння (4) знаходимо у вигляді $u(x, y) = C$, де

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx = F(x, y) + \varphi(y), \quad (6)$$

$F(x, y)$ – первісна функції $P(x, y)$ по x ; $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція.

Диференціюючи рівність (6) по y та враховуючи, що $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, отримуємо рівняння для знаходження невідомої функції $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y).$$

II. Завдання для аудиторної роботи

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$; б) $(x^2 + 1) \cdot y' + 4xy = 3$;

в) $y dx - (3x + 1 + \ln y) dy = 0$; г) $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$;

д) $y' + y = x\sqrt{y}$; е) $(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy$;

є) $(x + \ln|y|)dx + \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0$.

Розв'язання

а) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$ – лінійне рівняння, тоді $y = uv$,
 $y' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' - uv \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x; \quad u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = \sin x;$$

$$v' - v \operatorname{ctg} x = 0; \quad v' = v \operatorname{ctg} x; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x dx;$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x| \Rightarrow v = \sin x;$$

$$u' \sin x = \sin x; \quad u' = 1 \Rightarrow u = x + C.$$

Отже,

$$y = uv = \underline{(x + C) \cdot \sin x}.$$

$$\text{б) } (x^2 + 1) \cdot y' + 4xy = 3;$$

$$y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{3}{x^2 + 1} \quad - \text{ лінійне рівняння, тоді } y = uv,$$

$$y' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' + \frac{4xuv}{x^2 + 1} = \frac{3}{x^2 + 1}; \quad u'v + u \left(v' + \frac{4xv}{x^2 + 1} \right) = \frac{3}{x^2 + 1};$$

$$v' + \frac{4xv}{x^2 + 1} = 0; \quad \int \frac{dv}{v} = - \int \frac{4x}{x^2 + 1} dx;$$

$$\ln|v| = -2 \ln(x^2 + 1) \Rightarrow v = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}; \quad u' \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3}{x^2 + 1};$$

$$\int du = 3 \int (x^2 + 1) dx \Rightarrow u = 3 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + C = x^3 + 3x + C.$$

$$\text{Таким чином, } y = uv = (x^3 + 3x + C) \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^2}, \text{ або}$$

$$\underline{y(x^2 + 1)^2 = x^3 + 3x + C}.$$

$$в) y dx - (3x + 1 + \ln y) dy = 0;$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3x + 1 + \ln y}{y} \text{ або } x' - \frac{3x}{y} = \frac{1 + \ln y}{y} - \text{лінійне рівняння,}$$

$$x = x(y), \text{ тоді } x = uv, \quad x' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{y} = \frac{1 + \ln y}{y}; \quad u'v + u \left(v' - \frac{3v}{y} \right) = \frac{1 + \ln y}{y};$$

$$v' - \frac{3v}{y} = 0; \quad \frac{dv}{v} = 3 \int \frac{dy}{y}; \quad \ln|v| = 3 \ln|y| \Rightarrow v = y^3;$$

$$u'y^3 = \frac{1 + \ln y}{y}; \quad \int du = \int \frac{1 + \ln y}{y^4} dy;$$

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{1 + \ln y}{y^4} dy = \left[\begin{array}{l} 1 + \ln y = t, \quad dt = \frac{1}{y} dy, \\ \frac{dy}{y^4} = ds, \quad s = \frac{y^{-3}}{-3} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1 + \ln y}{3y^3} + \frac{1}{3} \int \frac{1}{y^4} dy = -\frac{1 + \ln y}{3y^3} - \frac{1}{9y^3} + C = \\ &= -\frac{1}{3y^3} - \frac{\ln y}{3y^3} - \frac{1}{9y^3} + C = -\frac{4}{9y^3} - \frac{\ln y}{3y^3} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } x = uv = \left(-\frac{4}{9y^3} - \frac{\ln y}{3y^3} + C \right) \cdot y^3 = -\frac{4}{9} - \frac{\ln y}{3} + Cy^3 \text{ або}$$

$$\underline{x = Cy^3 - \frac{\ln y}{3} - \frac{4}{9}.$$

$$\Gamma) x^2 y^2 y' + xy^3 = 1;$$

$$y^2 y' + \frac{y^3}{x} = \frac{1}{x^2} \text{ або } y' + \frac{y}{x} = x^{-2} y^{-2} - \text{рівняння Бернул-}$$

лі ($\alpha = -2$), підстановка: $z = y^{1-\alpha} = y^3$.

$$\text{Тоді } z' = 3y^2 y' \Rightarrow y^2 y' = \frac{z'}{3}; \quad \frac{z'}{3} + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2}, \text{ або } z' + \frac{3z}{x} = \frac{3}{x^2} -$$

лінійне рівняння, $z = z(x)$, тоді $z = uv$, $z' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' + \frac{3uv}{x} = \frac{3}{x^2}; \quad u'v + u \left(v' + \frac{3v}{x} \right) = \frac{3}{x^2};$$

$$v' + \frac{3v}{x} = 0; \quad \int \frac{dv}{v} = -3 \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|v| = -3 \ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x^3};$$

$$u' \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{3}{x^2}; \quad u' = 3x; \quad \int du = 3 \int dx; \quad u = \frac{3x^2}{2} + C.$$

$$\text{Отже, } z = uv = \left(\frac{3x^2}{2} + C \right) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}.$$

Оскільки $z = y^3$, то

$$y = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}.$$

д) $y' + y = x\sqrt{y}$, або $\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{y}} = x$ – рівняння Бернуллі $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$.

Тоді підстановка: $z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$, $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' \Rightarrow \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$; $2z' + z = x$, або $z' + \frac{z}{2} = \frac{x}{2}$ – лінійне рівняння,

тому $z = uv$, $z' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' + \frac{uv}{2} = \frac{x}{2}; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{2}\right) = \frac{x}{2};$$

$$v' + \frac{v}{2} = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{2}; \quad \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \int dx;$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2}x \Rightarrow v = e^{-\frac{x}{2}};$$

$$u'e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}; \quad \frac{du}{dx} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2}; \quad \int du = \frac{1}{2} \int x e^{\frac{x}{2}} dx;$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \int x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = \left[\begin{array}{ll} x=t, & dx=dt, \\ e^{\frac{x}{2}} dx=ds, & s=2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(2xe^{\frac{x}{2}} - 2 \int e^{\frac{x}{2}} dx \right) = \frac{1}{2} \left(2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} \right) + C = \\ &= xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } z = uv = \left(xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + C \right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}}; \text{ ура-}$$

ховуючи, що $z = \sqrt{y}$, маємо

$$y = z^2 = \left(x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}} \right)^2.$$

$$\text{е) } (e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy;$$

$$(e^y + ye^x + 3)dx + (xe^y + e^x - 2)dy = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y + e^x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y + e^x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{рівняння в пов-}$$

них диференціалах.

$$\text{Знаходимо } u(x, y) = \int (e^y + ye^x + 3)dx + \varphi(y) =$$

$$= e^y x + ye^x + 3x + \varphi(y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^y + e^x + \varphi'(y).$$

$$\text{З того, що } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y), \text{ одержуємо}$$

$$xe^y + e^x + \varphi'(y) = xe^y + e^x - 2;$$

$$\varphi'(y) = -2 \Rightarrow \varphi(y) = -2y + C_1,$$

$$\text{тоді } u = xe^y + ye^x + 3x - 2y + C_1.$$

$$\text{Оскільки } u(x, y) = C_2, \text{ то } xe^y + ye^x + 3x - 2y + C_1 = C_2,$$

або

$$\underline{xe^{-y} + ye^x + 3x - 2y = C.}$$

$$\epsilon) (x + \ln|y|)dx + \left(1 + \frac{x}{y} + \sin y\right)dy = 0 - \text{рівняння в повних}$$

диференціалах, оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y}.$

Знаходимо

$$u(x, y) = \int (x + \ln|y|)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + x \ln|y| + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y} + \varphi'(y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \Rightarrow \frac{x}{y} + \varphi'(y) = 1 + \frac{x}{y} + \sin y;$$

$$\varphi'(y) = 1 + \sin y; \quad \varphi(y) = \int (1 + \sin y)dy = y - \cos y + C_1,$$

$$\text{тоді } u(x, y) = \frac{x^2}{2} + x \ln|y| + y - \cos y + C_1.$$

Оскільки $u(x, y) = C_2$, то

$$\underline{\frac{x^2}{2} + x \ln|y| + y - \cos y = C.}$$

Завдання 2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь за початкових умов:

$$\text{а) } xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b; \quad \text{б) } xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{в) } y dx + 2x dy = 2y\sqrt{x} \sec^2 y dy, \quad y(0) = \pi;$$

$$\text{г) } (2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Розв'язання

$$\text{а) } xy' + y - e^x = 0, \text{ або } y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x} - \text{ лінійне рівняння, тоді}$$

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{e^x}{x}; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{e^x}{x};$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x};$$

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}; \quad \int du = \int e^x dx; \quad u = e^x + C.$$

Отже, $y = uv = (e^x + C) \cdot \frac{1}{x}$ — загальний розв'язок рівняння.

Застосуємо початкову умову $y(a) = b$:

$$b = (e^a + C) \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow ab = e^a + C \Rightarrow C = ab - e^a;$$

$$\underline{y = \frac{1}{x} \cdot (e^x + ab - e^a)}.$$

$$\text{б) } xy' - \frac{y}{x+1} = x, \text{ або } y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1 - \text{ лінійне рівняння,}$$

тоді $y = uv$, $y' = u'v + vu'$;

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x(x+1)} = 1; \quad u'v + u \left(v' - \frac{v}{x(x+1)} \right) = 1;$$

$$v' - \frac{v}{x(x+1)} = 0; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x(x+1)}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x(x+1)};$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow A(x+1) + Bx = 1.$$

Нехай $x = 0$, тоді $A = 1$; якщо $x = -1$, то $B = -1$; отже,

$$\int \frac{dv}{v} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx; \quad \ln|v| = \ln|x| - \ln|x+1| \Rightarrow v = \frac{x}{x+1};$$

$$u' \cdot \frac{x}{x+1} = 1; \quad \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x};$$

$$\int du = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx; \quad u = x + \ln|x| + C.$$

Отже, $y = uv = (x + \ln|x| + C) \cdot \frac{x}{x+1}$ – загальний розв'язок

рівняння.

З початкової умови $y(1) = 0$ знаходимо C :

$$0 = (1 + C) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow C = -1, \text{ тоді } y = (x + \ln|x| - 1) \cdot \frac{x}{x+1} -$$

частинний розв'язок.

в) $y dx + 2x dy = 2y\sqrt{x} \sec^2 y dy$, або, поділивши на $y dy$,
 $\frac{dx}{dy} + \frac{2x}{y} = 2\sqrt{x} \sec^2 y$ – рівняння Бернуллі, $x = x(y)$, $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$z = x^{1-\alpha} = x^{\frac{1}{2}}; \quad z' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x' \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{x}} = 2z'.$$

Тоді $\frac{x'}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{y} = 2 \sec^2 y$ після підстановки буде:

$$2z' + \frac{2z}{y} = 2 \sec^2 y, \text{ або } z' + \frac{z}{y} = \sec^2 y \text{ – лінійне рівняння,}$$

тоді $z = uv$, $z' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' + \frac{uv}{y} = \sec^2 y; \quad u'v + u \left(v' + \frac{v}{y} \right) = \sec^2 y;$$

$$v' + \frac{v}{y} = 0; \quad \frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y}; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow v = \frac{1}{y};$$

$$u' \cdot \frac{1}{y} = \sec^2 y; \quad \int du = \int y \sec^2 y dy;$$

$$\int y \cdot \sec^2 y dy = \left[\begin{array}{ll} y = t, & dy = dt, \\ \sec^2 y dy = dv, & v = \operatorname{tg} y \end{array} \right] =$$

$$= y \operatorname{tg} y - \int \operatorname{tg} y dy = y \operatorname{tg} y + \ln |\cos y| + C;$$

$$u = y \operatorname{tg} y + \ln |\cos y| + C.$$

Тоді $z = uv = (y \operatorname{tg} y + \ln|\cos y| + C) \cdot \frac{1}{y}$. Оскільки $x = z^2$, то

$x = (y \operatorname{tg} y + \ln|\cos y| + C)^2 \cdot \frac{1}{y^2}$ – загальний розв'язок рівняння.

За початкової умови $y(0) = \pi$ знаходимо значення C :

$$0 = (\pi \operatorname{tg} \pi + \ln|\cos \pi| + C)^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow C = 0.$$

Отже, $x = (y \operatorname{tg} y + \ln|\cos y|)^2 \cdot \frac{1}{y^2}$, або

$$\underline{xy^2 = (y \operatorname{tg} y + \ln|\cos y|)^2}.$$

г) $(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0$ – рівняння в повних диференціалах, оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$.

Знайдемо функцію $u(x, y) = \int (2x + ye^{xy})dx + \varphi(y) =$

$$= x^2 + e^{xy} + \varphi(y); \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} + \varphi'(y). \text{ З того що } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y),$$

одержуємо: $xe^{xy} + \varphi'(y) = 1 + xe^{xy} \Rightarrow \varphi'(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y + C_1$.

Отже, $u(x, y) = x^2 + e^{xy} + y + C_1$; але $u(x, y) = C_2$, тоді $x^2 + e^{xy} + y + C_1 = C_2$, або $x^2 + e^{xy} + y = C$ – загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок за початкової умови $y(0) = 1$:

$$e^0 + 1 = C \Rightarrow C = 2; \text{ отже,}$$

$$\underline{x^2 + e^{xy} + y = 2.}$$

Завдання 3. Знайти лінію, у якої відрізок, що відтинається на осі ординат дотичною в довільній точці:

- пропорційний квадрату ординати точки дотику;
- пропорційний кубу ординати точки дотику.

Розв'язання

Відрізок ON , який відтинається дотичною до кривої, проведеної у т. $M(x, y)$ (рис. 2.1), знаходиться як сума $ON = OA + NA$. Оскільки $OA = y$, $AB = x$ і $NA = x \operatorname{tg} \beta$, то $ON = y + x \operatorname{tg} \beta$. Урахувавши, що $\beta = \pi - \alpha$, одержимо $ON = y - x \operatorname{tg} \alpha$.

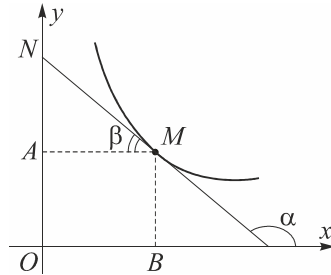


Рис. 2.1

а) За умовою задачі $|ON| = ky^2$, тобто $y - x \operatorname{tg} \alpha = ky^2$, або $y - xy' = ky^2$ ($\operatorname{tg} \alpha = y'$). Одержали рівняння Бернуллі:

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{k}{x} y^2 \quad (\alpha = 2), \text{ або } -\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{k}{x}, \text{ тоді підстанов-}$$

$$\text{ка: } z = y^{1-\alpha} = y^{-1}, z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'.$$

Отже, $z' + \frac{z}{x} = \frac{k}{x}$ – лінійне рівняння;

$$z = uv, z' = u'v + uv'; u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{k}{x}; u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{k}{x};$$

$$v' = -\frac{v}{x}; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x}; \quad u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{k}{x};$$

$$u' = k \Rightarrow u = kx + C. \quad \text{Тоді } z = uv = (kx + C) \cdot \frac{1}{x} = k + \frac{C}{x};$$

$$z = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y} = k + \frac{C}{x} \Rightarrow -\frac{C}{k} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{y} = 1, \text{ або}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1 - \text{шукане рівняння лінії,}$$

$$\text{де } a = -\frac{C}{k}, b = \frac{1}{k}.$$

б) Аналогічно $|ON| = ky^3$, тобто $y - xy' = ky^3$, або

$y' - \frac{y}{x} = -\frac{k}{x}y^3$ ($\alpha = 3$) – рівняння Бернуллі, тоді підстановка

$$z = y^{1-\alpha} = y^{-2}, \quad z' = -2y^{-3}y'.$$

$$\text{Отже, } \frac{z'}{2} + \frac{z}{x} = \frac{k}{x}, \text{ або } z' + \frac{2z}{x} = \frac{2k}{x} - \text{лінійне рівняння,}$$

тому $z = uv$, $z' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \frac{2k}{x}; \quad v' + \frac{2v}{x} = 0; \quad \int \frac{dv}{v} = -2 \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|v| = -2 \ln|x| \Rightarrow v = \frac{1}{x^2}; \quad u' \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2k}{x};$$

$$u' = 2kx \Rightarrow u = kx^2 + C; \quad z = uv = (kx^2 + C) \cdot \frac{1}{x^2} = k + \frac{C}{x^2}.$$

$$\text{Оскільки } z = \frac{1}{y^2}, \text{ то } \frac{1}{y^2} = k + \frac{C}{x^2} \Rightarrow -\frac{C}{k} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{k} \cdot y^2 = 1,$$

або

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1,$$

$$\text{де } a = -\frac{C}{k}, b = \frac{1}{k}.$$

Завдання 4. Знайти струм у котушці в момент t , якщо її опір R , коефіцієнт індуктивності L , початковий струм $i_0 = 0$, електрорушійна сила змінюється за законом $E = E_0 \sin \omega t$ (врахувати, що коли змінний електричний струм $i = i(t)$ протікає по провіднику з коефіцієнтом індуктивності L і опором R , то падіння напруги вздовж провідника дорівнює $L \frac{di}{dt} + Ri$).

Розв'язання

Закон падіння напруги вздовж провідника має вигляд

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri, E = E(t), E = E_0 + kt; \text{ закон зміни електрорушійної сили } E = E_0 \sin \omega t.$$

Отже, $E_0 \sin \omega t = L \frac{di}{dt} + Ri$, або $Li' + Ri = E_0 \sin \omega t$ – лінійне рівняння; $i = uv, i' = u'v + uv'$;

$$Lu'v + u(Lv' + Rv) = E_0 \sin \omega t; Lv' + Rv = 0 \Rightarrow v = e^{-\frac{R}{L}t};$$

$$\begin{aligned}
 E_0 \sin \omega t &= Lu' \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow u = \frac{E_0}{L} \int \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t} dt = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u_1 = \sin \omega t, \quad du_1 = \omega \cdot \cos \omega t dt, \\ dv_1 = e^{\frac{R}{L}t} dt, \quad v_1 = \frac{L}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}t} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{E_0}{L} \left(\frac{L}{R} \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L\omega}{R} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t dt \right) = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u_2 = \cos \omega t, \quad du_2 = -\omega \sin \omega t dt, \\ dv_2 = e^{\frac{R}{L}t} dt, \quad v_2 = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{E_0}{L} \left(\frac{L}{R} \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L^2\omega}{R^2} \cos \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t} - \frac{L^2\omega^2}{R^2} \int e^{\frac{R}{L}t} \cdot \sin \omega t dt \right).
 \end{aligned}$$

Звідси

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = \frac{R^2}{R^2 + L^2\omega^2} \left(\frac{L}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{\omega L^2}{R^2} \cos \omega t \right) + C.$$

$$\text{Тоді } u = \frac{E_0 R^2}{R^2 + L^2\omega^2} \left(\frac{1}{R} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{\omega L}{R^2} \cos \omega t \right) + \frac{E_0}{L} \cdot C, \text{ зна-}$$

$$\text{чить } i = uv = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + \frac{E_0}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot C.$$

Якщо $t = 0, i = 0$, то $C = \frac{\omega L^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$; отже,

$$i = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(\omega L e^{-\frac{R}{L}t} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t \right).$$

III. Завдання для самостійної роботи студентів

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $y' - y = e^x$; б) $y' + \frac{1-2x}{x^2} \cdot y = 1$; в) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

г) $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$; д) $(3x^2 y^2 + 7) dx + 2x^3 y dy = 0$;

е) $(2y - 3) dx + (2x + 3y^2) dy = 0$.

Завдання 2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь за початкових умов:

а) $(1-x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(2) = 0$;

б) $y' = 3x^2 y + x^5 + x^2$, $y(0) = 1$;

в) $t(1+t^2)dx = (x+xt^2-t^2)dt$, $x(1) = -\frac{\pi}{4}$.

Практичне заняття 3

Диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

I. Основні теоретичні відомості

Означення 1. Диференціальні рівняння, які містять похідні вищих порядків, називаються *диференціальними рівняннями вищих порядків*.

Порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у диференціальне рівняння, називається *порядком цього рівняння*.

Рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

є диференціальним рівнянням n -го порядку, записаним у неявному вигляді, де x – незалежна змінна; $y = y(x)$ – невідома функція; F – відома функція.

Рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

є нормальним або явним диференціальним рівнянням n -го порядку, розв'язаним відносно похідної $y^{(n)}$.

Означення 2. Розв'язком рівняння (2) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається n разів диференційовна на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в задане рівняння перетворює його на тотожність по x , тобто

$$\forall x \in (a; b): \varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Задача Коші полягає у знаходженні серед усіх розв'язків рівняння (2) такого розв'язку $y = y(x)$, $x \in (a; b)$, який при $x = x_0 \in (a; b)$ задовольняє наступні початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3)$$

Теорема 1 (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Якщо функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ та її частинні похідні по аргументах $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ – неперервні в деякій відкритій області G функції, то для всякої точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2), який задовольняє початкові умови (3).

Загальний розв'язок диференціального рівняння n -го порядку (2) містить n довільних сталих і має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (4)$$

Якщо загальний розв'язок рівняння записано в неявній формі, тобто

$$\Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (5)$$

то його називають *загальним інтегралом* рівняння (2).

Частинний розв'язок та частинний інтеграл знаходяться із загального, якщо у співвідношенні (4) або (5) кожній довільній сталій $C_1, C_2, \dots, C_n$ надати конкретного числового значення.

Рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

1) Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$, де $f(x)$ – задана неперервна функція, розв'язується шляхом n послідовних інтегрувань.

2) Рівняння другого порядку $F(x, y', y'') = 0$, яке не містить явно шуканої функції, перетворюється у рівняння першого порядку шляхом застосування підстановки $y' = z$, де $z = z(x)$, тоді $y'' = z'$.

3) Рівняння другого порядку $F(y, y', y'') = 0$, яке не містить явно незалежної змінної x , допускає зниження порядку, якщо застосувати підстановку $y' = z$, де $z = z(y)$, тоді

$$y'' = z'_y z y'' \left(y'' = \frac{d}{dx} (y') = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \cdot \frac{dz}{dy} \right).$$

II. Завдання для аудиторної роботи

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $y''' = e^{2x}$; б) $y''' = \frac{1}{x}$; в) $y'' = \arctg x$;

г) $x^2 y''' = (y'')^2$; д) $xy^{(5)} = y^{(4)}$.

Розв'язання

а) $y''' = e^{2x}$

Тричі проінтегрувавши, знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1; \quad y' = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1' x + C_2;$$

$$\underline{y = \frac{1}{8} e^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \text{ де } C_1 = \frac{C_1'}{2}.}$$

б) $y''' = \frac{1}{x}$

$$y'' = \ln|x| + C_1; \quad y' = \int \ln|x| dx + C_1' x;$$

$$\int \ln x dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = u, \quad \frac{1}{x} dx = du, \\ dx = dv, \quad v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C;$$

$$y' = x \ln x - x + C_1' \cdot \frac{x^2}{2} + C_2;$$

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} \ln x = u, \quad \frac{1}{x} dx = du, \\ x dx = dv, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C; \end{aligned}$$

$$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + C_1' \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

де $C_1 = -\frac{3}{4} + \frac{C_1'}{2}$.

в) $y'' = \operatorname{arctg} x$

$$y' = \int \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dx = dv, \quad v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1;$$

$$I_1 = \int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ x \, dx = dv, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C;$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \ln(1+x^2) dx = \left[\begin{array}{l} \ln(1+x^2) = u, \quad \frac{2x}{1+x^2} dx = du, \\ dx = dv, \quad v = x \end{array} \right] = \\
 &= x \cdot \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\
 &= x \cdot \ln(1+x^2) - 2(x - \operatorname{arctg} x) + C; \\
 y &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + \\
 &+ (x - \operatorname{arctg} x) + C_1 x + C_2 = \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2.
 \end{aligned}$$

$$\Gamma) \quad x^2 y''' = (y'')^2$$

Позначимо $y'' = u$, тоді $y''' = u' \Rightarrow x^2 u' = u^2$ – рівняння з відокремлюваними змінними.

Отже,

$$x^2 \cdot \frac{du}{dx} = u^2; \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x^2};$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{x} + C_1 \Rightarrow u = \frac{x}{1+C_1 x}; \quad y'' = \frac{x}{1+C_1 x}.$$

Двічі інтегруючи рівняння, знаходимо загальний розв'язок:

$$\begin{aligned} y' &= \int \frac{x}{1+C_1x} dx = \frac{1}{C_1} \int \left(1 - \frac{1}{1+C_1x}\right) dx = \\ &= \frac{1}{C_1} \left(x - \frac{1}{C_1} \ln|1+C_1x| \right) + C_2; \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{C_1} \int \left(x - \frac{1}{C_1} \ln|1+C_1x| \right) dx + C_2x;$$

$$\int \ln|1+C_1x| dx = \left[\begin{array}{ll} \ln|1+C_1x| = u, & du = \frac{C_1}{1+C_1x}, \\ dx = dv, & v = x \end{array} \right] =$$

$$= x \cdot \ln|1+C_1x| - \int \frac{C_1x}{1+C_1x} dx =$$

$$= x \ln|1+C_1x| - \int \left(1 - \frac{1}{1+C_1x}\right) dx =$$

$$= x \ln|1+C_1x| - x + \frac{1}{C_1} \ln|1+C_1x|;$$

$$y = \frac{x^2}{2C_1} - \frac{1}{C_1} \left(x \ln|1+C_1x| - x + \frac{1}{C_1} \ln|1+C_1x| \right) + C_2x + C_3 =$$

$$= \frac{x^2}{2C_1} + \left(\frac{1}{C_1} + C_2 \right) \cdot x + \left(\frac{1}{C_1} - \frac{x}{C_1} \right) \cdot \ln|1+C_1x| + C_3.$$

$$д) xy^{(5)} = y^{(4)}$$

Позначимо $y^{(4)} = u$, $y^{(5)} = u'$; тоді $xu' = u$; $\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$;

$$\ln|u| = \ln|x| \cdot C_1' \Rightarrow u = C_1'x.$$

Таким чином,

$$y^{(4)} = C_1'x; \quad y''' = C_1' \cdot \frac{x^2}{2} + C_2'; \quad y'' = C_1' \cdot \frac{x^3}{6} + C_2'x + C_3';$$

$$y' = C_1' \cdot \frac{x^4}{24} + C_2' \cdot \frac{x^2}{2} + C_3'x + C_4';$$

$$y = C_1' \cdot \frac{x^5}{120} + C_2' \cdot \frac{x^3}{6} + C_3' \cdot \frac{x^2}{2} + C_4'x + C_5';$$

$$\underline{y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5},$$

$$\text{де } C_1 = \frac{C_1'}{120}; \quad C_2 = \frac{C_2'}{6}; \quad C_3 = \frac{C_3'}{2}.$$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

$$а) xy'' = y'; \quad б) y'' = y' + x; \quad в) xy'' = y' \cdot \ln \frac{y'}{x};$$

$$г) 1 + (y')^2 = 2yy''; \quad д) (y')^2 + 2yy'' = 0;$$

$$е) yy'' - (y')^2 = y^2y'.$$

Розв'язання

Рівняння (а-в) не містять явно змінну y , підстановка: $y' = z$, $y'' = z'$; рівняння (г-е) не містять явно змінну x , підстановка: $y' = z$, $y'' = z'z$.

а) $xy'' = y'$; $y' = z$, $y'' = z' \Rightarrow xz' = z$ – рівняння з відокремлюваними змінними;

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|z| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow z = C_1'x; \quad y' = C_1'x;$$

$$y = C_1' \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 = \underline{C_1x^2 + C_2},$$

де $C_1 = \frac{C_1'}{2}$.

б) $y'' = y' + x$; $y' = z$, $y'' = z' \Rightarrow z' = z + x$, або $z' - z = x$ – лінійне рівняння, тоді $z = uv$; $z' = u'v + uv'$; $u'v + uv' - uv = x$;

$$v' = v; \quad \ln|v| = x \Rightarrow v = e^x; \quad u'e^x = x; \quad \int du = \int e^{-x} \cdot x dx;$$

$$\int e^{-x} \cdot x dx = \left[\begin{array}{ll} x = t, & dx = dt, \\ e^{-x} dx = dv, & v = -e^{-x} \end{array} \right] =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

$$u = -e^{-x}(x+1) + C_1; \quad z = uv = \left(-e^{-x}(x+1) + C_1\right) \cdot e^x =$$

$$= -x - 1 + C_1e^x; \quad y' = -x - 1 + C_1e^x;$$

$$y = \int (-x - 1 + C_1 e^x) dx = -\frac{x^2}{2} - x + C_1 e^x + C_2.$$

$$\text{в) } xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \quad y' = z; \quad y'' = z'; \quad xz' = z \ln \frac{z}{x} \text{ або } z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x} -$$

однорідне рівняння, тоді $z = ux$, $z' = u'x + u$;

$$u'x + u = \frac{ux}{x} \cdot \ln \frac{ux}{x}; \quad u'x + u = u \ln u; \quad u'x = u \ln u - u;$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = u(\ln u - 1); \quad \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln |\ln u - 1| = \ln x C_1 \Rightarrow \ln u - 1 = C_1 x;$$

$$\ln u = C_1 x + 1 \Rightarrow u = e^{C_1 x + 1}; \quad \frac{z}{x} = e^{C_1 x + 1};$$

$$z = x e^{C_1 x + 1}; \quad y' = x e^{C_1 x + 1}; \quad \int dy = \int x e^{C_1 x + 1} dx;$$

$$\begin{aligned} \int x e^{C_1 x + 1} dx &= \left[\begin{array}{l} x = u, \quad dx = du, \\ e^{C_1 x + 1} dx = dv, \quad v = \frac{1}{C_1} \cdot e^{C_1 x + 1} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1} \int e^{C_1 x + 1} dx = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_2 x + 1}; \end{aligned}$$

$$y = \left(\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \right) \cdot e^{C_1 x + 1} + C' = \underline{\underline{(Cx - C^2) \cdot e^{\frac{x}{C}} + C'}},$$

$$\text{де } C = \frac{1}{C_1}.$$

г) $1 + (y')^2 = 2yy''$; $y' = z$, $y'' = z'z$; $1 + z^2 = 2yz'z$ – рівняння з відокремлюваними змінними;

$$2yz \cdot \frac{dz}{dy} = 1 + z^2; \int \frac{2z dz}{1 + z^2} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\ln(1 + z^2) = \ln|y| \cdot C_1 \Rightarrow 1 + z^2 = C_1 y;$$

$$z = \pm \sqrt{C_1 y - 1}, \text{ тоді } y' = \pm \sqrt{C_1 y - 1}; \pm \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx;$$

$$\pm \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2 \Rightarrow \frac{4}{C_1^2} (C_1 y - 1) = (x + C_2)^2.$$

$$\text{д) } (y')^2 + 2yy'' = 0; y' = z, y'' = z'z; z^2 + 2yz'z = 0;$$

$$2z'z = -z; 2 \int \frac{dz}{z} = - \int \frac{dy}{y}; 2 \ln|z| = - \ln|y| \cdot C \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{Cy}};$$

$$z = \frac{C_1'}{\sqrt{y}} \left(C_1' = \frac{1}{\sqrt{C}} \right); y' = \frac{C_1'}{\sqrt{y}}; \int \sqrt{y} dy = C_1' \int dx;$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1' x + C_2'; y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} C_1' x + \frac{3}{2} C_2';$$

$$\underline{y = (C_1 x + C_2)^{\frac{2}{3}}},$$

$$\text{де } C_1 = \frac{3}{2} C_1'; C_2 = \frac{3}{2} C_2'.$$

$$\text{е) } yy'' - (y')^2 = y^2 y'; \quad y' = z; \quad y'' = z'z;$$

$$yz'z - z^2 = y^2 z, \text{ або } z' - \frac{z}{y} = y - \text{ лінійне рівняння, тоді}$$

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = y; \quad v' = \frac{v}{y}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\ln|v| = \ln|y| \Rightarrow v = y;$$

$$u'y = y; \quad u' = 1 \Rightarrow u = y + C_1; \quad z = y(y + C_1); \text{ отже,}$$

$$y' = y(y + C_1); \quad \int \frac{dy}{y(y + C_1)} = \int dx;$$

$$\frac{1}{y(y + C_1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y + C_1} \Rightarrow A(y + C_1) + By \equiv 1;$$

$$\text{знаходимо коефіцієнти } A \text{ і } B: \text{ якщо } y = 0, \quad AC_1 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{C_1};$$

$$\text{якщо } y = -C_1, \text{ то } -C_1 B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{C_1};$$

$$\int \frac{dy}{y(y + C_1)} = \int \left(\frac{1}{C_1 y} - \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{y + C_1} \right) dy = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right|;$$

$$\text{отже, } \underline{\frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| = x + C_2}.$$

Завдання 3. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

б) $xy'' + x \cdot (y')^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$;

в) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$;

г) $y^3 y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;

Розв'язання

а) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$; підстановка: $y' = z$, $y'' = z'$, тоді

$$z'(x^2 + 1) = 2xz; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2x dx}{x^2 + 1};$$

$$\ln|z| = \ln(x^2 + 1) \cdot C_1 \Rightarrow z = C_1(x^2 + 1);$$

$$z = y' \Rightarrow y' = C_1(x^2 + 1).$$

Застосуємо умову $y'(0) = 3 \Rightarrow C_1 = 3$, тоді $y' = 3(x^2 + 1)$;

$$y = 3 \int (x^2 + 1) dx; \quad y = 3 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + C_2; \quad y = x^3 + 3x + C_2.$$

За умови $y(0) = 1$ знаходимо $C_2 = 1$; отже,

$$\underline{y = x^3 + 3x + 1.}$$

б) $xy'' + x \cdot (y')^2 - y' = 0$; підстановка: $y' = z$, $y'' = z'$, тоді $xz' + xz^2 - z = 0$; $z' - \frac{z}{x} = -z^2$, або $-\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{zx} = 1$ – рівняння

Бернуллі ($\alpha = 2$), $p = z^{1-\alpha} = z^{-1}$, $p' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$.

Тоді $p' + \frac{p}{x} = 1$ – лінійне рівняння, $p = uv$, $p' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 1; \quad v' = -\frac{v}{x} \Rightarrow v = \frac{1}{x}; \quad u' \cdot \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$p = uv = \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) = \frac{x^2 + 2C_1}{2x}; \quad z = \frac{1}{p} = \frac{2x}{x^2 + 2C_1};$$

$$z = y' \Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2 + 2C_1}.$$

Якщо $y'(2) = 1$, то $1 = \frac{4}{4 + 2C_1} \Rightarrow C_1 = 0$, тоді $y' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$;

$$y = \int \frac{2}{x} dx; \quad y = 2 \ln|x| + C_2; \quad y = \ln x^2 + C_2.$$

За умови, що $y(2) = 2$, $C_2 = 2 - \ln 4$.

Отже, $y = \ln x^2 + 2 - \ln 4$, або

$$\underline{y = \ln \frac{x^2}{4} + 2}.$$

$$в) \quad yy'' = (y')^2 - (y')^3; \text{ підстановка: } y' = z, \quad y'' = z'z;$$

$$yz'z = z^2 - z^3; \quad \frac{zz'}{z^2(1-z)} = \frac{1}{y}; \quad \int \frac{dz}{z(z-1)} = -\int \frac{dy}{y};$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}; \quad A(z-1) + Bz \equiv 1;$$

$$z=1 \Rightarrow B=1, \quad z=0 \Rightarrow A=-1;$$

$$\int \frac{dz}{z(z-1)} = -\int \frac{dz}{z} + \int \frac{dz}{z-1} = -\ln|z| + \ln|z-1| = \ln\left|\frac{z-1}{z}\right|;$$

$$\ln\left|1 - \frac{1}{z}\right| = -\ln|y| \cdot C_1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{1}{C_1 y}; \quad \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{C_1 y};$$

$$\frac{1}{z} = \frac{C_1 y - 1}{C_1 y} \Rightarrow z = \frac{C_1 y}{C_1 y - 1}; \quad z = y' \Rightarrow y' = \frac{C_1 y}{C_1 y - 1}.$$

$$\text{За умови } y'(1) = -1 \text{ одержуємо: } -1 = \frac{C_1}{C_1 - 1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Отже,} \quad y' = \frac{\frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y - 1}; \quad y' = \frac{y}{y-2}; \quad \frac{y-2}{y} dy = dx;$$

$$\int \left(1 - \frac{2}{y}\right) dy = \int dx; \quad y - 2\ln|y| = x + C_2.$$

$$\text{Оскільки } y(1) = 1, \text{ то } 1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким чином, $y - 2 \ln y = x$, або

$$\underline{y - x = 2 \ln|y|}.$$

г) $y^3 y'' = -1$; підстановка $y' = z$, $y'' = z'z$;

$$y^3 z'z = -1; \int z dz = -\int \frac{1}{y^3} dy; \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + C_1; z^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1;$$

$$z = y' \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1.$$

Застосуємо умову $y'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Отже, } (y')^2 = \frac{1}{y^2} - 1; y' = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}; \int \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx;$$

$$-\sqrt{1 - y^2} = x + C_2.$$

З того, що $y(1) = 1$, знаходимо $C_2 = -1$, тоді $\sqrt{1 - y^2} = 1 - x$;

$1 - y^2 = (1 - x)^2$, звідки

$$\underline{y = \sqrt{2x - x^2}}.$$

Завдання 4. Локомотив рухається на горизонтальній ділянці шляху зі швидкістю 72 км/год. За який час і на якій відстані він буде зупинений, якщо опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 його ваги?

Розв'язання

За другим законом Ньютона диференціальне рівняння ру-

ху локомотива буде $m \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = -0,2mg$, де S – шлях, пройдений

за час t ; m – маса локомотива; g – прискорення сили тяжіння.

Інтегруючи двічі це рівняння, одержимо

$$\frac{dS}{dt} = -0,2gt + C_1, \quad S = -0,1gt^2 + C_1t + C_2.$$

Знаходимо значення сталих C_1 і C_2 , застосовуючи початкові умови. При $t = 0$, $S = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

Оскільки $v = \frac{dS}{dt} = 72 \text{ км/год} = 20 \text{ м/с}$, то $C_1 = 20$.

Отже, рівняння руху локомотива при заданих початкових умовах буде $\frac{dS}{dt} = v = 20 - 0,2gt \text{ (м/с)}$, $S = 20t - 0,1gt^2 \text{ (м)}$.

Поклавши $v = 0$, знайдемо час гальмування, за який локомотив буде зупинено:

$$t = \frac{20}{0,2g} \approx \underline{10,2 \text{ с.}}$$

Тоді гальмівний шлях буде таким:

$$S \approx 20 \cdot 10,2 - 0,1 \cdot 9,8 \cdot 10,2^2 \approx \underline{102 \text{ м.}}$$

Завдання 5. Куля входить у дошку товщиною 10 см зі швидкістю 200 м/с, а вилітає з дошки зі швидкістю 50 м/с. Скільки часу продовжувався рух кулі через дошку, якщо опір дошки руху кулі пропорційний квадрату її швидкості?

Розв'язання

Диференціальне рівняння руху кулі через дошку

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -k \cdot \left(\frac{dS}{dt} \right)^2, \text{ або } \frac{d^2 S}{dt^2} = -a \cdot \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \left(a = \frac{k}{m} \right), \text{ де } m -$$

маса кулі; S – шлях, пройдений нею через дошку за час t .

Позначимо $\frac{dS}{dt} = v$, тоді $\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Отже, маємо:

$$\frac{dv}{dt} = -av^2; \quad - \int \frac{dv}{v^2} = \int a \, dt; \quad \frac{1}{v} = at + C_1 \Rightarrow v = \frac{1}{at + C_1}.$$

З початкової умови $v = 200$ при $t = 0$ знаходимо $C_1 = \frac{1}{200}$.

Тоді швидкість руху кулі через дошку буде $v = \frac{200}{1 + 200at}$;

$$\frac{dS}{dt} = \frac{200}{200at + 1}; \quad \int dS = 200 \int \frac{dt}{200at + 1}; \quad S = \frac{1}{a} \ln(200at + 1) + C_2.$$

За умови, що $S = 0$ при $t = 0$, знаходимо $C_2 = 0$. Отже, шлях,

пройдений кулею через дошку, буде $S = \frac{1}{a} \ln(200at + 1)$. По-

клавши $v = 50$ м/с і $S = 10$ см = 0,1 м, отримаємо систему умов

$$50 = \frac{200}{200at + 1} \text{ і } 0,1 = \frac{1}{a} \ln(200at + 1), \text{ звідки знаходимо } a = 10 \ln 4$$

і шуканий час

$$t = \frac{3}{2000 \ln 4} \approx \underline{\underline{0,001 \text{ с}}}.$$

Завдання 6. Ланцюг, підвішений на гладкому крюці, сповзає вниз. На початку руху з одного боку крюка звисає 10 м ланцюга, а з іншого – 8 м. Знайти, за який час сповзе весь ланцюг і якою буде швидкість ланцюга в початковий момент його вільного падіння (опором знехтувати).

Розв'язання

Якщо в момент часу t довжина сповзаючої вниз ділянки ланцюга дорівнює S , то сила F , яка рухає ланцюг вниз, дорівнює різниці між масами частин ланцюга, які звисають по різні боки крюка, тобто $F = \delta g S - \delta g(18 - S)$, де δ – маса 1 м ланцюга; g – прискорення сили тяжіння.

За другим законом механіки диференціальне рівняння руху

ланцюга буде $18\delta \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = 2\delta g(S - 9)$, або $9 \frac{d^2 S}{dt^2} = g(S - 9)$ –

рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежну

змінну t , тоді $\frac{dS}{dt} = z$, $\frac{d^2 S}{dt^2} = z'z$, $z = z(S)$.

$$\text{Отже, } 9zz' = g(S - 9); \int 9z \, dz = \int g(S - 9) \, dS;$$

$$\frac{9}{2} z^2 = \frac{g}{2} (S - 9)^2 + \frac{C_1}{2} \Rightarrow 9z^2 = g(S - 9)^2 + C_1.$$

Оскільки за умовою задачі $S = 10$, $v = 0$, то $C_1 = -g$; тоді

$$9z^2 = g(S - 9)^2 - g \Rightarrow z = \frac{\sqrt{g}}{3} \cdot \sqrt{(S - 9)^2 - 1};$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{3} \sqrt{(S - 9)^2 - 1}; \int \frac{dS}{\sqrt{(S - 9)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{g}}{3} \int dt;$$

$$\ln \left| S - 9 + \sqrt{(S - 9)^2 - 1} \right| = \frac{\sqrt{g}}{3} t + C_2.$$

За початкової умови $t = 0$, $S = 10$ знаходимо $\ln 1 = C_2 \Rightarrow C_2 = 0$. Тоді час $t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln \left| S - 9 + \sqrt{(S - 9)^2 - 1} \right|$; при $S = 18$ отримаємо

$$t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + \sqrt{80}) \approx \underline{2,9 \text{ с.}}$$

Швидкість ланцюга в початковий момент вільного падіння

$$v = \frac{\sqrt{80g}}{3} \approx \underline{9,3 \text{ м/с.}}$$

III. Завдання для самостійної роботи студентів

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $y''' = 60x^2$; б) $y''' = \cos 2x$; в) $xy'' = y'$;

г) $(y'')^2 = y'$; д) $y'' = \frac{y'}{x} + x$; е) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;

є) $yy'' = (y')^2$; ж) $y(1 - \ln y) \cdot y'' + (1 + \ln y) \cdot (y')^2 = 0$.

Завдання 2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь за початкових умов:

а) $y'' = 3x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$;

в) $2(y')^2 = y'' \cdot (y - 1)$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.

Практичне заняття 4

Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння зі сталими коефіцієнтами. Неоднорідні рівняння зі спеціальною правою частиною

I. Основні теоретичні відомості

Означення 1. Рівняння

$$b_0(x) \cdot y^{(n)} + b_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + b_n(x) \cdot y = \varphi(x), \quad (1)$$

де $b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x), \varphi(x)$ – задані функції, а невідома функція $y = y(x)$ і всі її похідні лише в першому степені, називається *лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку*.

Функції $b_i(x), i = 0, 1, \dots, n$ називають коефіцієнтами рівняння, а $\varphi(x)$ – його вільним членом. Якщо $\varphi(x) = 0$, то рівняння (1) називають *однорідним*; якщо ж $\varphi(x) \neq 0$ – *неоднорідним*.

Означення 2. Рівняння

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = 0, \quad (2)$$

де $a_1(x), a_2(x)$ – задані функції, називаються *лінійними однорідними диференціальними рівняннями другого порядку*.

Теорема 1. Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (2), то функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де C_1, C_2 – довільні сталі, теж є розв'язком цього рівняння.

Означення 3. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними на проміжку $(a; b)$* , якщо

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0, \quad (3)$$

де α_1, α_2 – дійсні числа, справджується лише тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Якщо ж хоча б одне з чисел α_1 чи α_2 відмінне від нуля і виконується тотожність (3), то функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються *лінійно залежними на $(a; b)$* .

Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ тоді і тільки тоді лінійно залежні на проміжку $(a; b)$, коли існує таке стає число λ , що для всіх

$$x \in (a; b) \text{ виконується рівність } \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda, \text{ або } y_1(x) = \lambda y_2(x).$$

Означення 4. Якщо $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ – функції від x , то

$$\text{визначник } W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \text{ називається визнач-}$$

ником Вронського, або вронськіаном.

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – диференційовні і лінійно залежні на проміжку $(a; b)$, то визначник Вронського $W(x) \equiv 0$ на $(a; b)$.

Теорема 3. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (2) на проміжку $(a; b)$, то визначник Вронського цих функцій не дорівнює нулю в жодній точці цього проміжку.

Тепер можна сформулювати умови, згідно з якими функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ буде загальним розв'язком рівняння (2).

Теорема 4 (про структуру загального розв'язку однорідного рівняння). Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – два лінійно незалежні на проміжку $(a; b)$ розв'язки рівняння (2), то функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (4)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, є його загальним розв'язком.

Означення 5. Рівняння

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = f(x), \quad (5)$$

де $a_1(x), a_2(x), f(x)$ – задані і неперервні на $(a; b)$ функції, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку*. Ліву частину рівняння (5) називають відповідним йому однорідним рівнянням.

Теорема 5 (про структуру розв'язку неоднорідного рівняння). Загальним розв'язком рівняння (5) є сума його довільного частинного розв'язку y^* та загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння, тобто $y = y^*(x) + \bar{y}(x)$.

Метод варіації довільних сталих

Нехай

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (6)$$

– загальний розв'язок відповідного до (5) однорідного рівняння.

Якщо у формулі (6) замінити довільні сталі C_1, C_2 на невідомі функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$, то отримана функція

$$y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) \quad (7)$$

тоді буде частинним розв'язком рівняння (5), коли функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ задовольнятимуть систему умов:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (8)$$

Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Означення 6. Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (9)$$

де p, q – дійсні числа, називається *лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

За методом Ейлера частинні розв'язки рівняння (9) знаходяться у вигляді функцій $y = e^{kx}$, де k – стале число, яке є коренем відповідного *характеристичного рівняння*

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (10)$$

Позначимо через k_1, k_2 корені характеристичного рівняння (10).

Можливі три випадки:

I. Якщо k_1, k_2 – дійсні різні корені рівняння (10), то загальний розв'язок рівняння (9) знаходиться за формулою

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (11)$$

II. Якщо $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно-спряжені корені рівняння (10), тоді загальний розв'язок рівняння (9) запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (12)$$

III. Якщо $k_1 = k_2 = k$ – дійсні і рівні корені характеристичного рівняння (10), то загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2x). \quad (13)$$

Неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною

Означення 7. Рівняння вигляду

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (14)$$

де p, q – дійсні числа і $f(x) \neq 0$ – задана неперервна на деякому проміжку $(a; b)$ функція, називається *лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Загальний розв'язок рівняння (14) є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, який знаходиться за формулами (3–5), та довільного частинного розв'язку y^* , який можна знайти методом варіації довільних сталих.

Проте для рівнянь зі спеціальною правою частиною частинний розв'язок може бути знайдений значно простіше.

Розглянемо наступні випадки:

I. Якщо $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x), \quad (15)$$

де α – дійсне число; $P_n(x)$ – багаточлен степеня n від x , то частинний розв'язок рівняння (14) доцільно шукати у вигляді

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x). \quad (16)$$

У формулі (16) $Q_n(x)$ – багаточлен з невизначеними коефіцієнтами того ж степеня, що й $P_n(x)$, а r – кількість коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α ($r = 0, 1, 2$).

II. Завдання для аудиторної роботи

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь:

а) $3y'' - 2y' - 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

в) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; г) $y^{(4)} - 16y = 0$;

д) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$.

Розв'язання

а) $3y'' - 2y' - 8y = 0$;

$3k^2 - 2k - 8 = 0$ – характеристичне рівняння, $k_1 = -\frac{4}{3}$,

$k_2 = 2$ – його дійсні різні корені, тоді

$$y = C_1 \cdot e^{-\frac{4}{3}x} + C_2 \cdot e^{2x}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння.

б) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

$k^2 + 4k + 4 = 0$, або $(k + 2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -2$ – дійсні рівні корені характеристичного рівняння, отже,

$$y = e^{-2x}(C_1x + C_2)$$

– загальний розв'язок рівняння.

$$в) 4y'' - 8y' + 5y = 0;$$

$4k^2 - 8k + 5 = 0; D = -16; k_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2}i$ – комплексно-спряжені корені характеристичного рівняння, тому

$$y = e^x \left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} \right)$$

– загальний розв'язок.

$$г) y^{(4)} - 16y = 0;$$

$$k^4 - 16 = 0; (k^4 - 4)(k^2 + 4) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2; k_{3,4} = \pm 2i;$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

$$д) y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0;$$

$$k^4 + 2k^3 + k^2 = 0; k^2(k^2 + 2k + 1), \text{ або}$$

$$k^2(k+1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0; k_3 = k_4 = -1;$$

$$y = C_1 x + C_2 + e^{-x}(C_3 x + C_4).$$

Завдання 2. Знайти частинні розв'язки однорідних рівнянь за початкових умов:

$$а) y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10;$$

$$б) 4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0;$$

$$в) y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 0.$$

Розв'язання

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$;

$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 3$; $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ – загальний розв'язок; $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$.

За початкових умов $y(0) = 6$ і $y'(0) = 10$ одержуємо таку систему для знаходження C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Отже,

$$\underline{y = 4e^x + 2e^{3x}}$$

– частинний розв'язок рівняння.

б) $4y'' + 4y' + y = 0$;

$$4k^2 + 4k + 1 = 0, \text{ або } (2k + 1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 x + C_2), y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(C_1 x + C_2) + C_1 e^{-\frac{x}{2}} - \text{загальний розв'язок.}$$

З умови $y(0) = 2$ знаходимо $C_2 = 2$; тоді за умови, що

$$y'(0) = 0 \text{ і } C_2 = 2, \text{ знаходимо } C_1 = 1.$$

Отже, частинний розв'язок рівняння

$$\underline{y = e^{-\frac{x}{2}}(x + 2)}.$$

$$\text{в) } y'' + 4y' + 5y = 0;$$

$$k^2 + 4k + 5 = 0, k_{1,2} = -2 \pm i \Rightarrow y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$y' = -2e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Оскільки $y(0) = -3$, то $C_1 = -3$; тоді за умови, що $y'(0) = 0$ і $C_1 = -3$, знаходимо $C_2 = -6$. Отже,

$$y = e^{-2x} (-3 \cos x - 6 \sin x)$$

– частинний розв'язок.

Завдання 3. Знайти загальні розв'язки неоднорідних рівнянь:

$$\text{а) } y'' + y' - 2y = 6x^2; \quad \text{б) } y'' + 4y = 5e^x;$$

$$\text{в) } y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x; \quad \text{г) } y'' - 2y = xe^{-x};$$

$$\text{д) } 2y'' + 5y' = 0,1e^{-2,5x} - 25 \sin 2,5x.$$

Розв'язання

$$\text{а) } y'' + y' - 2y = 6x^2;$$

$y'' + y' - 2y = 0$ – відповідне однорідне рівняння, $k^2 + k - 2 = 0$ – його характеристичне рівняння, корені якого $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, тоді $\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок заданого рівняння у вигляді функції $y^* = Ax^2 + Bx + C$ ($r = 0$); $(y^*)' = 2Ax + B$, $(y^*)'' = 2A$,

тоді $2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \equiv 6x^2$;

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + 2A + B - 2C \equiv 6x^2.$$

Порівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x , записуємо систему для знаходження A, B, C :

$$\begin{cases} -2A = 6, \\ 2A - 2B = 0, \\ 2A + B - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3, \\ B = -3, \\ C = -\frac{9}{2}. \end{cases}$$

Тоді частинний розв'язок $y^* = -3x^2 - 3x - \frac{9}{2}$, а загальний –

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2}.$$

б) $y'' + 4y = 5e^x$;

$k^2 + 4 = 0$, $k^2 = -4$, $k_{1,2} = \pm 2i$ – корені характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння;

$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ – його загальний розв'язок.

Знаходимо частинний розв'язок: $y^* = Ae^x$ ($r = 0$);

$$(y^*)' = (y^*)'' = Ae^x, \quad Ae^x + 4Ae^x = 5e^x \Rightarrow A = 1, \quad \text{тоді } y^* = e^x.$$

Отже,

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^x$$

– загальний розв'язок.

$$в) y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x;$$

$$k^2 + 6k + 9 = 0, k_1 = k_2 = -3 \Rightarrow \bar{y} = e^{-3x}(C_1x + C_2) - \text{загаль-}$$

ний розв'язок; $y^* = A \cos x + B \sin x$ ($r = 0$);

$$(y^*)' = -A \sin x + B \cos x; (y^*)'' = -A \cos x - B \sin x;$$

$$-A \cos x - B \sin x - 6A \sin x +$$

$$+ 6B \cos x + 9A \cos x + 9B \sin x \equiv 10 \sin x;$$

$$(8A + 6B) \cos x + (-6A + 8B) \sin x \equiv 10 \sin x;$$

$$\begin{cases} 8A + 6B = 0, \\ -6A + 8B = 10 \end{cases} \begin{cases} 4A + 3B = 0, \\ -3A + 4B = 5 \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{3}{5}, \\ B = \frac{4}{5}, \end{cases}$$

отже, $y^* = -\frac{3}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x$ – частинний розв'язок, тоді

$$y = \bar{y} + y^* = \underline{e^{-3x}(C_1x + C_2) - \frac{3}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x}$$

– загальний розв'язок.

$$г) y'' - 2y = xe^{-x};$$

$$k^2 - 2 = 0, k_{1,2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \bar{y} = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x};$$

$$y^* = (Ax + B) \cdot e^{-x} \quad (r = 0),$$

$$(y^*)' = -e^{-x}(Ax + B) + Ae^{-x} = e^{-x}(-Ax + A - B),$$

$$(y^*)'' = -e^{-x}(-Ax + A - B) - Ae^{-x} = e^{-x}(Ax + B - 2A);$$

$$e^{-x}(Ax + B - 2A) - 2e^{-x}(Ax + B) \equiv xe^{-x};$$

$$-Ax - B - 2A \equiv x, \text{ звідки } -A = 1, -B - 2A = 0; A = -1, B = 2;$$

$$y^* = (-x + 2) \cdot e^{-x}.$$

Отже,

$$y = \bar{y} + y^* = \underline{C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + (-x + 2) \cdot e^{-x}}$$

– загальний розв'язок.

$$\text{д) } 2y'' + 5y' = 0, 1e^{-2,5x} - 25 \sin 2,5x;$$

$$2k^2 + 5k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -2,5; \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-2,5x}.$$

Для знаходження частинного розв'язку y^* застосуємо теорему про накладання розв'язків, тобто $y^* = y_1^* + y_2^*$, де $y_1^* = Axe^{-2,5x}$ ($k_2 = -2,5, \alpha = -2,5 \Rightarrow r = 1$),

$$y_2^* = A \cos 2,5x + B \sin 2,5x; \left(y_1^* \right)' = Ae^{-2,5x} - 2,5Axe^{-2,5x},$$

$$\begin{aligned} \left(y_1^* \right)'' &= -2,5Ae^{-2,5x} - 2,5Ae^{-2,5x} + 6,25Axe^{-2,5x} = \\ &= -5Ae^{-2,5x} + 6,25Axe^{-2,5x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-10Ae^{-2,5x} + 12,5Axe^{-2,5x} + \\ &+ 5Ae^{-2,5x} - 12,5Axe^{-2,5x} \equiv 0, 1e^{-2,5x}; \end{aligned}$$

$$5A \equiv 0, 1 \Rightarrow A = 0,02, \text{ тоді } y_1^* = 0,02x \cdot e^{-2,5x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Знаходимо } (y_2^*)' &= -2,5A \sin 2,5x + 2,5B \cos 2,5x, \\
 (y_2^*)'' &= -6,25A \cos 2,5x - 6,25B \sin 2,5x; \\
 &\quad -12,5A \cos 2,5x - 12,5B \sin 2,5x - \\
 &\quad -12,5A \sin 2,5x + 12,5B \cos 2,5x \equiv -25 \sin 2,5x, \\
 (-12,5A + 12,5B) \cos 2,5x + (-12,5A - 12,5B) \sin 2,5x &\equiv \\
 &\quad \equiv -25 \sin 2,5x, \\
 \begin{cases} -12,5A + 12,5B = 0, \\ -12,5A - 12,5B = -25, \end{cases}
 \end{aligned}$$

звідки $A = B = 1$, тоді $y_2^* = \cos 2,5x + \sin 2,5x$.

Отже,

$$\begin{aligned}
 y &= \bar{y} + y_1^* + y_2^* = \\
 &= \underline{C_1 + C_2 e^{-2,5x} + 0,02x \cdot e^{-2,5x} + \cos 2,5x + \sin 2,5x}.
 \end{aligned}$$

Завдання 4. Знайти частинні розв'язки неоднорідних рівнянь, які задовольняють початкові умови:

а) $y'' + 9y = 15 \sin 2x$, $y(0) = -7$, $y'(0) = 0$;

б) $y'' - 3y' = 3x + x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{70}{27}$;

в) $y'' + y' = 2x^2 e^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0,5$.

Розв'язання

a) $y'' + 9y = 15 \sin 2x$;

$$k^2 + 9 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 3i \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x;$$

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x \quad (r = 0),$$

$$(y^*)' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$

$$(y^*)'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x;$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 9A \cos 2x + 9B \sin 2x \equiv 15 \sin 2x;$$

$$5A \cos 2x + 5B \sin 2x \equiv 15 \sin 2x \Rightarrow 5A = 0, \quad A = 0;$$

$$5B = 15, \quad B = 3; \quad y^* = 3 \sin 2x.$$

Отже,

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 3 \sin 2x$$

– загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови: $y(0) = -7 \Rightarrow C_1 = -7$;

$$y'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x + 6 \cos 2x,$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 3C_2 + 6 = 0, \quad C_2 = -2.$$

Тоді

$$\underline{y = -7 \cos 3x - 2 \sin 3x + 3 \sin 2x}$$

– частинний розв'язок рівняння.

$$\text{б) } y'' - 3y' = 3x + x^2;$$

$$k^2 - 3k = 0, k_1 = 0, k_2 = 3 \Rightarrow \bar{y} = C_1 + C_2 e^{3x};$$

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad (k_1 = 0, \alpha = 0 \Rightarrow r = 1),$$

$$(y^*)' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad (y^*)'' = 6Ax + 2B;$$

$$6Ax + 2B - 9Ax^2 - 6Bx - 3C \equiv 3x + x^2;$$

$$-9Ax^2 + (6A - 6B)x + 2B - 3C \equiv 3x + x^2;$$

$$\begin{cases} -9A = 1, \\ 6A - 6B = 3, \\ 2B - 3C = 0 \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{1}{9}, \\ B = -\frac{11}{18}, \\ C = -\frac{11}{27}; \end{cases} \quad y^* = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x.$$

Отже,

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x$$

– загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок за умови, що $y(0) = 0$,

тоді $C_1 + C_2 = 0$ і $y'(0) = \frac{70}{27}$, значить,

$$y'(x) = 3C_2 \cdot e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{9}x - \frac{11}{27},$$

$$\text{тобто } \frac{70}{27} = 3C_2 - \frac{11}{27} \Rightarrow C_2 = 1; C_1 = -C_2 = -1.$$

Тоді

$$y = -1 + e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x$$

– частинний розв'язок рівняння.

$$\text{в) } y'' + y' = 2x^2 e^x;$$

$$k^2 + k = 0, k_1 = 0, k_2 = -1 \Rightarrow \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x};$$

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x \quad (r = 0);$$

$$\begin{aligned} (y^*)' &= (2Ax + B) \cdot e^x + (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x = \\ &= (Ax^2 + (2A + B)x + B + C) \cdot e^x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y^*)'' &= (2Ax + 2A + B) \cdot e^x + (Ax^2 + (2A + B)x + B + C) \cdot e^x = \\ &= (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B + C) \cdot e^x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B + C) \cdot e^x + \\ &+ (Ax^2 + (2A + B)x + B + C) \equiv 2x^2 \cdot e^x; \end{aligned}$$

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C \equiv 2x^2;$$

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ 6A + 2B = 0, \\ 2A + 3B + 2C = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 1, \\ B = -3, \\ C = 3,5; \end{cases} \quad y^* = (x^2 - 3x + 3,5) \cdot e^x.$$

Отже,

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{-x} + (x^2 - 3x + 3,5) \cdot e^x$$

– загальний розв'язок.

За початкових умов $y(0) = 5$ і $y'(0) = 0,5$ знаходимо C_1 і C_2 :

$$5 = C_1 + C_2 + 3,5 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1,5;$$

$$y'(x) = -C_2 e^{-x} + (2x - 3) \cdot e^x + (x^2 - 3x + 3,5) \cdot e^x;$$

$$0,5 = -C_2 - 3 + 3,5 \Rightarrow C_2 = 0, \text{ тоді } C_1 = 1,5;$$

$$\underline{y = 1,5 + (x^2 - 3x + 3,5) \cdot e^x}$$

– частинний розв'язок.

Завдання 5. Скласти загальний розв'язок неоднорідних рівнянь, знаходячи їх частинні розв'язки методом варіації довільних сталих:

1) $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0;$

2) $y'' - y' = f(x),$ якщо:

а) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x};$ б) $f(x) = e^{2x} \cdot \sqrt{1 - e^{2x}};$

в) $f(x) = e^{2x} \cdot \cos e^x.$

Розв'язання

$$1) y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0, \text{ або } y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x;$$

$k^2 + 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm i$, $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок у вигляді функції $y^* = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$, тобто $y^* = C_1(x) \cdot \cos x + C_2(x) \cdot \sin x$, де невідомі функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знаходимо із системи

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0, \\ C_1'(x) \cdot (-\sin x) + C_2'(x) \cdot \cos x = -\operatorname{ctg}^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot \operatorname{tg} x, \\ C_2'(x) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sin x + C_2'(x) \cdot \cos x = -\operatorname{ctg}^2 x; \end{cases}$$

$$C_2'(x) \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x \right) = -\operatorname{ctg}^2 x; \quad C_2'(x) \cdot \frac{1}{\cos x} = -\operatorname{ctg}^2 x;$$

$$C_2'(x) = -\operatorname{ctg}^2 x \cdot \cos x; \quad C_2'(x) = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x};$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= -\int \frac{\cos x (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx = \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) d(\sin x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}; \end{aligned}$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \sin x;$$

$$C_1(x) = \int \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x;$$

$$y^* = C_1(x) \cdot \cos x + C_2(x) \cdot \sin x =$$

$$= \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x \right) \cdot \cos x + \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) \cdot \sin x =$$

$$= \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos^2 x + \sin^2 x + 1 = \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2;$$

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2.$$

$$2) y'' - y' = f(x);$$

$k^2 - k = 0$; $k_1 = 0$; $k_2 = 1$; $\bar{y} = C_1 + C_2 e^x$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Частинний розв'язок будемо шукати у вигляді $y^* = C_1(x) + C_2(x) \cdot e^x$.

$$a) \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot e^x = 0, \\ C_2'(x) \cdot e^x = \frac{e^x}{1 + e^x} \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{1+e^x};$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{1+e^x} = \left[\begin{array}{l} 1+e^x = t, \quad x = \ln|t-1|, \\ dx = \frac{dt}{t-1} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t(t-1)} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} = -\ln(1+e^x) + \ln e^x = x - \ln(1+e^x);$$

$$\left(\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}, \quad A(t-1)+Bt \equiv 1, \right.$$

$$\left. t=0 \Rightarrow A=-1, \quad t=1 \Rightarrow B=1; \quad \frac{1}{t(t-1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \right);$$

$$C_1'(x) = -\frac{e^x}{1+e^x}; \quad C_1(x) = -\int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = -\ln(1+e^x);$$

$$y^* = -\ln(1+e^x) + (x - \ln(1+e^x)) \cdot e^x =$$

$$= -\ln(1+e^x) + xe^x - e^x \cdot \ln(1+e^x) =$$

$$= xe^x - (e^x + 1) \cdot \ln(1+e^x);$$

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^x + xe^x - (e^x + 1) \ln(1+e^x) =$$

$$= \underline{C_1 + (C_2 + x) \cdot e^x - (e^x + 1) \ln(1+e^x)}.$$

$$6) \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot e^x = 0, \\ C_2'(x) \cdot e^x = e^{2x} \cdot \sqrt{1 - e^{2x}} \end{cases}$$

$$C_2'(x) = e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$C_2(x) = \int e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}} dx = \left[\begin{array}{l} e^x = t, \quad x = \ln t, \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right] =$$

$$= \int t \cdot \sqrt{1 - t^2} \cdot \frac{dt}{t} = \int \sqrt{1 - t^2} dt = \left[\begin{array}{l} t = \sin z, \\ dt = \cos z dz \end{array} \right] =$$

$$= \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cdot \cos z dz = \int \cos^2 z dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2z) dz = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{2} \sin 2z \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(z + \sin z \cdot \sqrt{1 - \sin^2 z} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arcsin t + t \cdot \sqrt{1 - t^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\arcsin e^x + e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}} \right);$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x) \cdot e^x = -e^{2x} \cdot \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 - e^{2x}} d(1 - e^{2x}) = \frac{1}{3} (1 - e^{2x}) \cdot \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$y^* = \frac{1}{3} (1 - e^{2x}) \cdot \sqrt{1 - e^{2x}} + \frac{1}{2} e^x \left(\arcsin e^x + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} \right);$$

$$y = \bar{y} + y^* =$$

$$= C_1 + C_2 x + \frac{1}{3}(1 - e^{2x})\sqrt{1 - e^{2x}} + \frac{1}{2}e^x \left(\arcsin e^x + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} \right).$$

$$\text{В)} \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot e^x = 0, \\ C_2'(x) \cdot e^x = e^{2x} \cdot \cos e^x \end{cases}$$

$$C_2'(x) = e^x \cdot \cos e^x;$$

$$C_2(x) = \int e^x \cdot \cos e^x dx = \int \cos e^x d(e^x) = \sin e^x;$$

$$C_1'(x) + e^{2x} \cdot \cos e^x = 0; \quad C_1'(x) = -e^{2x} \cdot \cos e^x;$$

$$C_1(x) = -\int e^{2x} \cdot \cos e^x dx = \left[\begin{array}{l} e^x = t, \\ e^x dx = dt \end{array} \right] =$$

$$= -\int t \cdot \cos t dt = \left[\begin{array}{ll} t = u, & dt = du, \\ \cos t dt = dv, & v = \sin t \end{array} \right] =$$

$$= -\left(t \sin t - \int \sin t dt \right) = -t \sin t - \cos t = -e^x \sin e^x - \cos e^x;$$

$$y^* = -e^x \cdot \sin e^x - \cos e^x + e^x \sin e^x = -\cos e^x;$$

$$y = \bar{y} + y^* = \underline{C_1 + C_2 e^x - \cos e^x}.$$

Завдання 6. Кулька котиться по гладкому жолобу, який вигнутий по циклоїді (рис. 4.1). Не враховуючи тертя і опору повітря, знайти залежність шляху, пройденого центром тяжіння кульки, від часу.

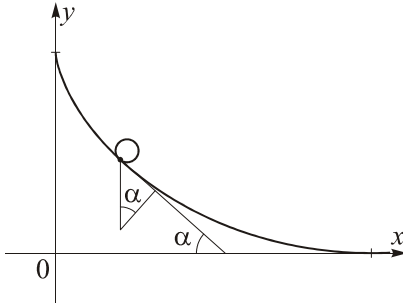


Рис. 4.1

Розв'язання

Якщо тіло масою m рухається на площині чи в просторі, то рівнодіюча сила $\vec{F}$ і прискорення $\vec{a}$ його центра тяжіння пов'язані, згідно з другим законом Ньютона, співвідношенням $\vec{F} = m\vec{a}$.

Проектуючи вектори $\vec{F}$ і $\vec{a}$ на довільну вісь, наприклад ω_k , можна отримати співвідношення, яке містить скалярні величини, тобто $F_k = m a_k$.

Проектуючи прискорення центра тяжіння кульки і діючу на неї силу на напрямок дотичної до циклоїди, отримаємо диференціальне рівняння руху центра тяжіння кульки:

$$m \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = mg \sin \alpha,$$

де $S = \overset{\cup}{AM}$ – шлях, пройдений центром тяжіння кульки за час t ; m – маса кульки; g – прискорення сили тяжіння.

Ураховуючи параметричні рівняння циклоїди $x = a(\varphi - \sin \varphi)$, $y = a(1 + \cos \varphi)$, виразимо $\sin \alpha$ через S :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-a \sin \varphi d\varphi}{a(1 - \cos \varphi) d\varphi} = -\frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Тоді диференціал дуги циклоїди

$$dS = \sqrt{1+(y')^2} dx = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Довжина її дуги AM

$$S = \int_0^{\varphi} 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_{\varphi}^0 = 4a \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right),$$

звідки $\cos \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{S}{4a}$.

З рис. 4.1 визначаємо $y' = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, тому

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \\ &= -\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} = \cos \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

тобто $\sin \alpha = 1 - \frac{S}{4a}$.

Отже, $\frac{d^2 S}{dt^2} = g \left(1 - \frac{S}{4a}\right)$, або $4a \frac{d^2 S}{dt^2} + gS = 4ag$ — лінійне

неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $4ak^2 + g = 0$ має корені

$k_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{4a}} = \pm ri$, тоді загальний інтеграл відповідного однорідного рівняння $u = C_1 \cos rt + C_2 \sin rt$.

Частинний інтеграл S_1 неоднорідного рівняння складаємо за виглядом правої частини:

$$S_1 = A, \text{ тоді } gA \equiv 4ag \Rightarrow A = 4a; S_1 = 4a.$$

Загальний розв'язок: $S = u + S_1 = 4a + C_1 \cos rt + C_2 \sin rt$; значення констант C_1 і C_2 знаходимо з початкових умов

$$t = 0, S = 0, \frac{dS}{dt} = 0, 0 = 4a + C_1 \Rightarrow C_1 = -4a;$$

$$\frac{dS}{dt} = -C_1 r \sin rt + C_2 r \cos rt, 0 = C_2 r \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким чином, шукана залежність шляху, який проходить центр тяжіння кульки, від часу буде

$$S = 4a \left(1 - \cos t \cdot \sqrt{\frac{g}{4a}} \right).$$

III. Завдання для самостійної роботи студентів

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$;

в) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; г) $y''' + 6y'' + 25y' = 0$;

д) $y'' - 2y' + 2y = 2x$; е) $y'' + y = -8\cos 3x$;

є) $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Завдання 2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах:

а) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$;

г) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3,2$;

д) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5,5$;

е) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Практичне заняття 5

Системи диференціальних рівнянь

I. Основні теоретичні відомості

Означення 1. Нормальною системою диференціальних рівнянь називається система вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{array} \right. \quad (1)$$

або $x'_k = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Означення 2. Розв'язком системи (1) називають сукупність функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, які при підстановці у кожне рівняння даної системи обертають його на тотожність по x .

Якщо задано рівняння n -го порядку $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, розв'язане відносно старшої похідної, то за допомогою введення нових змінних $y = x_1, y' = x_2, \dots, y^{(n-1)} = x_n$ задане диференціальне рівняння можна звести до еквівалентної нормальної системи n рівнянь першого порядку:

$$x'_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad x'_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Зворотний перехід також можливий, тобто якщо продиференціювати по t будь-яке рівняння нормальної системи (1) і підставити в отриману рівність значення похідних $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, взяті з системи (1), то одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1' = f_1'(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_1'' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_1^{(n)} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2)$$

Якщо з перших $n - 1$ рівнянь системи (2) знайти, якщо це можливо, змінні

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_2(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(n-1)}) \\ x_3 &= \varphi_3(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (3)$$

Нехай функція

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі, – розв'язок рівняння (4). Продиференціювавши його $n-1$ разів і підставивши значення похідних $x'_1, x''_1, \dots, x_1^{(n-1)}$ в рівняння (3), дістанемо сукупність функцій

яка разом із функцією (5) буде загальним розв'язком системи (2).

Для нормальної системи (2) справедливою є **теорема Коші про існування і єдиність розв'язку**: якщо в деякій області G функції $f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($k=1, 2, \dots, n$) системи (2)

неперервні разом з усіма своїми похідним $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

то для будь-якої точки $(t_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ існує єдиний розв'язок $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, який задовольняє початкові умови $x_1(t_0) = x_{1_0}, x_2(t_0) = x_{2_0}, \dots, x_n(t_0) = x_{n_0}$.

Для інтегрування системи вигляду (2) застосовується метод виключення змінної, за допомогою якого ця система зводиться до рівняння (4).

Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему трьох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_3z, \\ \frac{dy}{dt} = b_1x + b_2y + b_3z, \\ \frac{dz}{dt} = c_1x + c_2y + c_3z, \end{cases} \quad (6)$$

де a_i, b_i, c_i – сталі. Цю систему методами виключення змінних завжди можна звести до одного лінійного однорідного рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо ще один спосіб розв'язування системи (6).

Знайдемо окремі розв'язки системи у вигляді

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}, \quad z = \gamma e^{kt}, \quad (7)$$

де α, β, γ, k – невизначені сталі, які потрібно знайти.

Підставивши функції (7) в систему (6) і скоротивши на $e^k \neq 0$, одержимо

$$\begin{cases} k\alpha = a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma, \\ k\beta = b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma, \\ k\gamma = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (a_1 - k)\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0, \\ b_1\alpha + (b_2 - k)\beta + b_3\gamma = 0, \\ c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - k)\gamma = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для того щоб отримана алгебраїчна однорідна система лінійних рівнянь (8) мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - k & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Розкривши визначник (9), одержимо алгебраїчне рівняння третього степеня відносно змінної k , яке називають характеристичним рівнянням системи (6).

Якщо рівняння (9) має три дійсні різні корені k_1, k_2, k_3 , то для кожного з цих коренів записуємо систему (8) і знаходимо невідомі $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Тоді загальний розв'язок системи (6) матиме вигляд

$$\begin{aligned} x &= C_1 \alpha_1 e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{k_2 t} + C_3 \alpha_3 e^{k_3 t}, \\ y &= C_1 \beta_1 e^{k_1 t} + C_2 \beta_2 e^{k_2 t} + C_3 \beta_3 e^{k_3 t}, \\ z &= C_1 \gamma_1 e^{k_1 t} + C_2 \gamma_2 e^{k_2 t} + C_3 \gamma_3 e^{k_3 t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Якщо рівняння (9) має кратні або комплексні корені, то розв'язки системи шукати значно складніше, такі випадки розглядати не будемо.

Характеристичне рівняння (9) системи (6) збігається з характеристичним рівнянням диференціального рівняння третього порядку, до якого ця система зводиться. Отже, якщо відомі корені рівняння (9), то завжди можна знайти загальний розв'язок рівняння третього порядку, до якого зводиться система (6), а потім і загальний розв'язок самої системи.

Таким чином, незалежно від структури коренів характеристичного рівняння, систему (6) завжди можна розв'язати, якщо тільки відомі ці корені.

II. Завдання для аудиторної роботи

Завдання 1. Розв'язати системи рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y; \end{array} \right. & \text{в)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z; \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{г)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}; \end{array} \right. & \text{д)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{array} \right. \end{array}$$

Розв'язання

а) Продиференціюємо перше рівняння системи $x'' = 2x' + y'$, підставимо в одержану рівність значення похідної $y' = 3x + 4y$ з другого рівняння системи і потім $y = x' - 2x$ з першого рівняння, отримаємо $x'' = 2x' + 3x + 4y$; $x'' = 2x' + 3x + 4(x' - 2x)$; $x'' - 6x' + 5x = 0$ – лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, $k^2 - 6k + 5 = 0$; $k_1 = 1$; $k_2 = 5$ – корені характеристичного рівняння. Отже, $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$ – загальний розв'язок.

Тоді $x' = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}$, а тому

$$y = x' - 2x = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{5t},$$

$$y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Остаточню отримали

$$\underline{x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}}, \quad \underline{y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}}.$$

б) Аналогічно $x'' = x' - 3y'$; $x'' = x' - 3 \cdot (3x + y)$;

$$x'' = x' - 9x - 3y; \quad x'' = x' - 9x + x' - x; \quad x'' - 2x' + 10x = 0;$$

$$k^2 - 2k + 10 = 0; \quad k_{1,2} = \pm 3i; \quad x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t);$$

$$x' = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) + e^t (-3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t);$$

$$y = \frac{1}{3}(x - x') = \frac{1}{3}e^t (3C_1 \sin 3t - 3C_2 \cos 3t) =$$

$$= e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t).$$

Отже,

$$\underline{x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)}, \quad \underline{y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)}.$$

в) Складемо для заданої системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 & -1 \\ -1 & 1-k & 1 \\ 1 & 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$k^3 - k^2 - 2k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 2.$$

Частинні розв'язки системи знаходимо так:

$$x_1 = \alpha_1 e^{k_1 t}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{k_2 t}, \quad x_3 = \alpha_3 e^{k_3 t};$$

$$y_1 = \beta_1 e^{k_1 t}, \quad y_2 = \beta_2 e^{k_2 t}, \quad y_3 = \beta_3 e^{k_3 t};$$

$$z_1 = \gamma_1 e^{k_1 t}, \quad z_2 = \gamma_2 e^{k_2 t}, \quad z_3 = \gamma_3 e^{k_3 t}.$$

Якщо $k_1 = 0$, то

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\beta_1 - \gamma_1 = 0, \\ -\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 - \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, тоді $x_1 = e^0 = 1$, $y_1 = 0$, $z_1 = e^0 = 1$.

Якщо $k_2 = -1$, то

$$\begin{cases} 2\alpha_2 - 2\beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ -\alpha_2 + 2\beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $\alpha_2 = 0$.

Нехай $\beta_2 = 1$, $\gamma_2 = -2$, тоді $x_2 = 0$, $y_2 = e^{-t}$, $z_2 = -2e^{-t}$.

Якщо $k_3 = 2$, то

$$\begin{cases} -\alpha_3 - 2\beta_3 - \gamma_3 = 0, \\ -\alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 - 3\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\alpha_3 = 3, \beta_3 = -2, \gamma_3 = 1$, тоді $x_3 = 3e^{2t}, y_3 = 2e^{2t}, z_3 = e^{2t}$.
Остаточно отримаємо

$$\underline{x(t) = C_1 + 3C_3e^{2t}},$$

$$\underline{y(t) = C_2e^{-t} - 2C_3e^{2t}},$$

$$\underline{z(t) = C_1 - 2C_2e^{-t} + C_3e^{2t}}.$$

г) Продиференціювавши перше рівняння системи, отримаємо $x'' = y'$; оскільки $y' = x + e^t + e^{-t}$, то $x'' = x + e^t + e^{-t}$, або $x'' - x = e^t + e^{-t}$ – лінійне неоднорідне рівняння другого порядку, $k^2 - 1 = 0$ – характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння; $k_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow x^* = C_1e^t + C_2e^{-t}$ – загальний розв'язок.

Знаходимо частинний розв'язок у вигляді

$$\bar{x} = Ate^t + Bte^{-t}; (\bar{x})' = (Ae^t - Be^{-t})t + Ae^t + Be^{-t};$$

$$(\bar{x})'' = (Ae^t + Be^{-t})t + 2(Ae^t - Be^{-t}); tAe^t + tBe^{-t} + 2Ae^t - 2Be^{-t} - Ate^t + Bte^{-t} \equiv e^t + e^{-t} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$x = x^* + \bar{x} = C_1e^t + C_2e^{-t} + t \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \underline{C_1e^t + C_2e^{-t} + t \cdot \operatorname{sh} t};$$

$$y = \frac{dx}{dt} = \underline{C_1e^t - C_2e^{-t} + \operatorname{sh} t + t \cdot \operatorname{ch} t}.$$

д) Аналогічно $x'' = 2y' - 5x' + e^t$;
врахуємо, що

$$y' = x - 6y + e^{-2t} \text{ і } y = \frac{1}{2}(x' + 5x - e^t),$$

тоді

$$x'' = 2x - 6x' - 30x + 6e^t + 2e^{-2t} - 5x' + e^t;$$

$$x'' + 11x' + 28x = 2e^{-2t} + 7e^t; \quad x'' + 11x' + 28x = 0$$

– відповідне однорідне рівняння,

$$k^2 + 11k + 28 = 0, \quad k_1 = -4, \quad k_2 = -7 \Rightarrow y^* = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}$$

– загальний розв'язок;

частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2; \quad \bar{x}_1 = Ae^{-2t}, \quad (\bar{x}_1)' = -2Ae^{-2t}, \quad (\bar{x}_1)'' = 4Ae^{-2t},$$

тоді

$$4Ae^{-2t} - 22Ae^{-2t} + 28Ae^{-2t} \equiv 2e^{-2t} \Rightarrow A = \frac{1}{5},$$

отже,

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{5}e^{-2t}; \quad \bar{x}_2 = Be^t, \quad (\bar{x}_2)' = (\bar{x}_2)'' = Be^t;$$

$$Be^t + 11Be^t + 28Be^t \equiv 7e^t \Rightarrow B = \frac{7}{40},$$

тоді

$$\bar{x}_2 = \frac{7}{40}e^t; \quad x = x^* + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{7}{40}e^t;$$

$$x' = -4C_1 e^{-4t} + 7C_2 e^{-7t} - \frac{2}{5} e^{-2t} + \frac{7}{40} e^t;$$

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{1}{40} e^t.$$

Завдання 2. Знайти частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь за початкових умов:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t, \\ \frac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(\pi) = 1, \quad y(\pi) = 2;$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \frac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z. \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0.$$

Розв'язання

а) Знайдемо загальний розв'язок системи. Диференціюємо перше рівняння системи та підставляємо в одержану рівність вирази для $y'(t)$ та $x'(t)$:

$$x'' + 2x' + y' = \cos t;$$

$$y'(t) = 4x + 2y + \cos t, \quad y(t) = -x' - 2x + \sin t,$$

тому

$$x'' + 2x' + 4x + 2(-x - 2x + \sin t) + \cos t = \cos t \Rightarrow$$

$$x'' + 2 \sin t = 0.$$

Двічі інтегруючи отримане рівняння, одержуємо

$$x = 2 \sin t + C_1 t + C_2.$$

Підставляємо $x(t)$, $x'(t) = 2 \cos t + C_1$ в перше рівняння системи, знаходимо

$$y = -2 \cos t - 3 \sin t - C_1(2t + 1) - 2C_2.$$

Сукупність $x(t), y(t)$ складає загальний розв'язок системи. Знайдемо частинний розв'язок, який відповідає початковим умовам $x(\pi) = 1, y(\pi) = 2$:

$$\begin{cases} C_1 \pi + C_2 = 1, \\ 2 - C_1(1 + 2\pi) - 2C_2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = 1 + 2\pi. \end{cases}$$

Отже,

$$\underline{x = 2 \sin t - 2t + 1 + 2\pi},$$

$$\underline{y = -2 \cos t - 3 \sin t + 2(2t + 1) - 2(1 + 2\pi)}.$$

– частинний розв'язок.

б) Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 1 & -1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0; k_1 = -2, k_2 = -1, k_3 = 2.$$

Якщо $k_1 = -2$, то

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 + 3\gamma_1 = 0, \end{cases}$$

звідки $\gamma_1 = 0, \alpha_1 = -\beta_1$.

При $\alpha_1 = 1, \beta_1 = -1, \gamma_1 = 0$: $x_1 = e^{-2t}, y_1 = -e^{-2t}, z_1 = 0$.

Якщо $k_2 = -1$, то

$$\begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 + \beta_2 + 2\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $\beta_2 = -\gamma_2, \alpha_2 = -\gamma_2$.

При $\beta_2 = 1, \gamma_2 = -1, \alpha_2 = 1$: $x_2 = e^{-t}, y_2 = e^{-t}, z_2 = -e^{-t}$.

Якщо $k_3 = 2$, то

$$\begin{cases} -3\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 - 3\beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $\beta_3 = \frac{1}{2}\gamma_3$.

При $\beta_3 = 1, \gamma_3 = 2, \alpha_3 = 1$: $x_3 = e^{2t}, y_3 = e^{2t}, z_3 = 2e^{2t}$.

Отже, загальний розв'язок системи такий:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \\ z(t) = -C_2 e^{-t} + 2C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Застосуємо початкові умови $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1, \\ -C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ -C_2 + 2C_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{1}{3}, \\ C_3 = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\underline{x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t},}$$

$$\underline{y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t},}$$

$$\underline{z(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}}$$

– частинний розв'язок системи.

Завдання 3. Дві кульки, маса кожної з яких m , сполучені легкою пружиною (її видовження пропорційне розтягуючій силі). Довжина нерозтягнутої пружини l_0 . Пружину розтягнуто до довжини l_1 , а потім у момент $t = 0$ обидві кульки, розміщені вертикально одна над одною, починають падати (опором середовища нехтуємо). Через час T довжина нитки скорочується до l_0 . Знайти закон руху кожної з кульок (рис. 5.1).

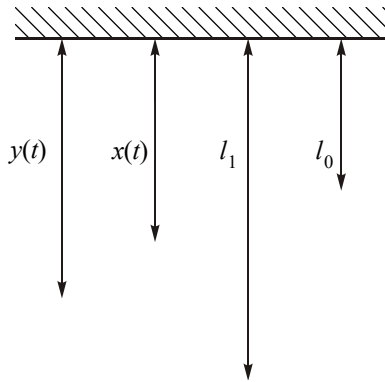


Рис. 5.1

Розв'язання

Для стану рівноваги $k(l - l_0) = mg$, звідки $k = \frac{mg}{l - l_0}$. Диференціальні рівняння руху кульок будуть такими:

$$\begin{cases} m(y - x - l_0)'' = -k(y - x - l_0), \\ m(y + x)'' = 2mg. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння першого диференціального рівняння: $mr^2 = -k$, $r^2 = -\frac{k}{m}$, $r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$.

Тоді

$$y - x - l_0 = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Для другого рівняння системи

$$y + x = gt^2 + C_3 t + C_4.$$

Застосуємо початкові умови

$$y(0) = l_1, \quad y'(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0:$$

$$(y - x - l_0)|_{t=0} = l_1 - l_0 = C_2;$$

$$(y - x - l_0)'|_{t=0} = (y' - x')|_{t=0} = 0 = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow C_1 = 0.$$

Тоді

$$y - x - l_0 = (l_1 - l_0) \cdot \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t.$$

З іншого боку,

$$(y + x)|_{t=0} = l_1 = C_4; \quad (y' + x')|_{t=0} = (2gt + C_3)|_{t=0} = C_3 = 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} y(t) - x(t) - l_0 = (l_1 - l_0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \\ y(t) + x(t) = gt^2 + l_1, \end{cases}$$

звідки

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(gt^2 + (l_1 + l_0) + (l_1 - l_0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right),$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(gt^2 + (l_1 - l_0) \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right).$$

Оскільки кульки здійснюють коливальний рух і чверть періоду коливання

$$T = \frac{2\pi}{4\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\pi}{2T},$$

то отримаємо:

$$\underline{x(t) = \frac{1}{2} \left(gt^2 + (l_1 - l_0) \left(1 - \cos \frac{\pi t}{2T} \right) \right)},$$

$$\underline{y(t) = \frac{1}{2} \left(gt^2 + (l_1 + l_0) + (l_1 - l_0) \cos \frac{\pi t}{2T} \right)}.$$

III. Завдання для самостійної роботи студентів

Розв'язати системи рівнянь за початкових умов:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1;$$

$$2) \begin{cases} \frac{du}{dx} + 4v = \cos 2x, \\ \frac{dv}{dx} + 4u = \sin 2x, \end{cases} \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 0,1.$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = z + x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases} \quad x_{t=0} = -1, \quad y_{t=0} = 1, \quad z_{t=0} = 0.$$

**Вказівки, розв'язання, відповіді
до завдань для самостійної роботи**

Практичне заняття 1

Завдання 1

а) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1; \quad 1 = 1.$

б) $\frac{dS}{dt} = \left(-1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2t \right) = -1 - \cos 2t; \quad \frac{d^2 S}{dt^2} = 2 \sin 2t.$

$$2 \sin 2t + \operatorname{tg} t \cdot (-1 - \cos 2t) = \sin 2t,$$

$$2 \sin 2t - 2 \operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t = \sin 2t,$$

$$2 \sin 2t - 2 \sin t \cdot \cos t = \sin 2t,$$

$$2 \sin 2t - \sin 2t = \sin 2t, \quad \sin 2t = \sin 2t.$$

Завдання 2

Рівняння (а–в) – з відокремлюваними змінними, (г–е) – однорідні.

а) $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0;$

$$\int \frac{dy}{(y-2)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^3}; \quad -\frac{1}{y-2} = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C_1;$$

$$\underline{\frac{1}{y-2} - \frac{1}{2(x+1)^2} = C, \quad \text{де } C = -C_1;}$$

б) $yy' + x = 1;$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 - x; \quad \int y \, dy = \int (1 - x) \, dx; \quad \frac{y^2}{2} = x - \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$\underline{y^2 = 2x + x^2 + C, \quad \text{де } C = 2C_1;}$$

в) $x^2(2yy' - 1) = 1;$

$$2yy' - 1 = \frac{1}{x^2}; \quad 2y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + 1; \quad \int 2y \, dy = \int \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx;$$

$$\underline{y^2 = -\frac{1}{x} + x + C;}$$

г) $y = x \left(y' - \sqrt[3]{e^y} \right);$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt[3]{e^y}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u;$$

$$u'x + u = u + e^u; \quad u'x = e^u; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = e^u;$$

$$e^{-u} du = \frac{dx}{x}; \quad -e^{-u} = \ln|x| + \ln C; \quad -e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx;$$

$$\underline{e^{-\frac{y}{x}} + \ln Cx = 0};$$

$$\text{д) } y^2 + x^2 y' = xy y';$$

$$(xy - x^2) \cdot y' = y^2; \quad y' = \frac{y^2}{xy - x^2}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u;$$

$$u'x + u = \frac{u^2 x^2}{x^2 u - x^2}; \quad u'x + u = \frac{u^2}{u - 1}; \quad u'x = \frac{u^2 - u^2 + u}{u - 1};$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{u}{u - 1}; \quad \int \frac{u - 1}{u} du = \int \frac{dx}{x}; \quad \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dx}{x};$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| + \ln C; \quad \frac{y}{x} = \ln \frac{y}{x} xC; \quad \frac{y}{x} = \ln Cy;$$

$$\underline{Cy = e^{\frac{y}{x}}};$$

$$\text{е) } xy' = y \cdot \ln \frac{y}{x};$$

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u; \quad u'x + u = u \ln u;$$

$$u'x = u \ln u - u; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = u(\ln u - 1); \quad \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| \cdot C; \quad \ln u - 1 = Cx; \quad \ln u = Cx + 1;$$

$$u = e^{Cx+1}; \quad \frac{y}{x} = e^{Cx+1};$$

$$\underline{y = x \cdot e^{Cx+1}}.$$

Завдання 3

а) $y^2 + x^2 y' = 0, \quad y(-1) = 1;$

$$-x^2 y' = y^2; \quad -\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C;$$

якщо $y(-1) = 1$, то

$$1 = 1 + C \Rightarrow C = 0,$$

отже, $\frac{1}{y} = -\frac{1}{x}$, або

$$\underline{x + y = 0};$$

б) $(1 + x^2)y^3 dx - (y^2 - 1)x^3 dy = 0, \quad y(1) = -1;$

$$\int \frac{y^2 - 1}{y^3} dy = \int \frac{1 + x^2}{x^3} dx; \quad \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} \right) dy = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$\ln|y| + \frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{2x^2} + \ln|x| + C \Rightarrow C = \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2x^2};$$

за умови, що $y(-1) = 1$, маємо:

$$C = \ln|-1| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

отже, $\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2x^2} = 1$, або

$$\underline{x^{-2} + y^{-2} = 2\left(1 + \ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)}.$$

Практичне заняття 2

Завдання 1

а) $y' - y = e^x$ – лінійне рівняння,

тоді $y = uv$, $y' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' - uv = e^x; \quad u'v + u(v' - v) = e^x; \quad v' - v = 0;$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx; \quad \ln|v| = x \Rightarrow v = e^x;$$

$$u'e^x = e^x; \quad u' = 1; \quad \int du = \int dx; \quad u = x + C;$$

отже,

$$y = uv = \underline{(x + C) \cdot e^x}.$$

$$\text{б) } y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1 - \text{лінійне рівняння,}$$

$$\text{тоді } y = uv, \quad y' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' + \frac{1-2x}{x^2} uv = 1; \quad u'v + u \left(v' + \frac{1-2x}{x^2} v \right) = 1;$$

$$v' + \frac{1-2x}{x^2} v = 0; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2x-1}{x^2} v; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x-1}{x^2} dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx; \quad \ln|v| = 2 \ln|x| + \frac{1}{x};$$

$$v = e^{\ln x^2 + \frac{1}{x}}; \quad v = x^2 e^{\frac{1}{x}}; \quad u'x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1;$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}}; \quad \int du = \int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$$

$$\int du = \int e^{-\frac{1}{x}} d\left(-\frac{1}{x}\right); \quad u = e^{-\frac{1}{x}} + C.$$

Отже,

$$y = uv = \left(e^{-\frac{1}{x}} + C \right) \cdot x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} = \underline{x^2 + Cx^2 e^{-\frac{1}{x}}}.$$

$$\text{в) } y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0;$$

$$y' + \frac{y}{x+1} = -y^2, \text{ або } -\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x+1} = 1$$

– рівняння Бернуллі ($\alpha = 2$); підстановка:

$$z = y^{1-\alpha} = y^{-1}, \quad z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y';$$

$$z' - \frac{z}{x+1} = 1 - \text{лінійне рівняння},$$

тоді $z = uv$, $z' = u'v + uv'$;

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x+1} = 1; \quad u'v + u \left(v' - \frac{v}{x+1} \right) = 1;$$

$$v' - \frac{v}{x+1} = 0; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x+1}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1};$$

$$\ln|v| = \ln|x+1| \Rightarrow v = x+1; \quad u'(x+1) = 1;$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x+1}; \quad u = \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Отже, } z = uv = (x+1)(\ln|x+1| + C).$$

$$\text{Оскільки } z = \frac{1}{y} \text{ то } y = \frac{1}{z}, \text{ тобто}$$

$$y = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + C)}.$$

$$\Gamma) \ x \, dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy;$$

$$x \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{y} - y^3; \quad xx' - \frac{x^2}{y} = -y^3, \text{ або } x' - \frac{x}{y} = -y^3 x^{-1}$$

– рівняння Бернуллі ($x = x(y)$), $\alpha = -1$, $z = x^{1-\alpha} = x^2$, $z' = 2xx'$.

$$\text{Тоді } \frac{z'}{2} - \frac{z}{y} = -y^3, \text{ або } z' - \frac{2z}{y} = -2y^3 \text{ – лінійне рівняння;}$$

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' - \frac{2uv}{y} = -2y^3;$$

$$u'v + u \left(v' - \frac{2v}{y} \right) = -2y^3; \quad v' - \frac{2v}{y} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{2v}{y};$$

$$\frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dy}{y}; \quad \ln|v| = 2 \ln|y| \Rightarrow v = y^2;$$

$$u'y^2 = -2y^3; \quad u' = -2y; \quad \frac{du}{dy} = -2y;$$

$$\int du = -2 \int y \, dy; \quad u = -y^2 + C.$$

$$\text{Отже, } z = uv = (C - y^2) \cdot y^2.$$

Оскільки $z = x^2$, то

$$\underline{x^2 = y^2(C - y^2)}.$$

д) $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3y dy = 0$ – рівняння в повних диференціалах, оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y$.

Знаходимо функцію

$$u(x, y) = \int (3x^2y^2 + 7)dx + \varphi(y) = x^3y^2 + 7x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y + \varphi'(y).$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, тобто $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y$, то

$$2x^3y + \varphi'(y) = 2x^3y \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C_1.$$

Отже,

$$u(x, y) = x^3y^2 + 7x + C_1; \quad u(x, y) = C_2;$$

$$x^3y^2 + 7x + C_1 = C_2,$$

або

$$\underline{x^3y^2 + 7x = C.}$$

е) $(2y - 3)dx + (2x + 3y^2)dy = 0$ – рівняння в повних диференціалах $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \right)$.

Знаходимо

$$u(x, y) = \int (2y - 3) dx + \varphi(y) = 2xy - 3x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + \varphi'(y).$$

З того, що $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 3y^2$, знаходимо

$$2x + \varphi'(y) = 2x + 3y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = y^3 + C_1.$$

Тоді

$$u(x, y) = 2xy - 3x + y^3 + C_1; \quad u(x, y) = C_2,$$

отже,

$$\underline{2xy - 3x + y^3 = C}.$$

Завдання 2

$$\text{а) } (1-x)(y' + y) = e^{-x}, \quad y(2) = 0;$$

$$y' + y = \frac{e^{-x}}{1-x} - \text{лінійне рівняння, тоді}$$

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x};$$

$$v' + v = 0; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int dx; \quad \ln|v| = -x \Rightarrow v = e^{-x};$$

$$u'e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}; \int du = \int \frac{dx}{1-x}; u = -\ln|1-x| + C;$$

$$y = uv = (-\ln|1-x| + C) \cdot e^{-x} - \text{загальний розв'язок.}$$

$$\text{За умови } y(2)=0: 0 = -\ln|-1| + C \Rightarrow C = 0, \text{ отже,}$$

$$\underline{y = -e^{-x} \ln|1-x|}$$

– частинний розв'язок рівняння.

$$\text{б) } y' = 3x^2y + x^5 + x^2, \quad y(0)=1;$$

$$y' - 3x^2y = x^5 + x^2 - \text{лінійне рівняння,}$$

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' - 3x^2uv = x^5 + x^2;$$

$$v' = 3x^2v; \quad \int \frac{dv}{v} = \int 3x^2 dx; \quad \ln|v| = x^3 \Rightarrow v = e^{x^3};$$

$$u'e^{x^3} = x^5 + x^2; \quad \int du = \int e^{-x^3} (x^5 + x^3) dx;$$

$$u = \int e^{-x^3} x^5 dx + \int e^{-x^3} x^2 dx;$$

$$I_1 = \frac{1}{3} \int e^{-x^3} (-x^3) \cdot (-3x^2) dx = \left[\begin{array}{l} -x^3 = t, \\ -3x^2 dx = dt \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int e^t \cdot t dt =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = t, & du = dt, \\ dv = e^t dt, & v = e^t \end{array} \right] = \frac{1}{3} (te^t - e^t) = \frac{1}{3} e^{-x^3} (-x^3 - 1),$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int e^{-x^3} x^2 dx = -\frac{1}{3} \int e^{-x^3} (-3x^2) dx = \\ &= -\frac{1}{3} \int e^{-x^3} d(-x^3) = -\frac{1}{3} e^{-x^3}. \end{aligned}$$

Отже,

$$u = I_1 + I_2 = -\frac{1}{3} e^{-x^3} (x^3 + 1) - \frac{1}{3} e^{-x^3} + C,$$

тоді

$$y = uv = \left(-\frac{1}{3} e^{-x^3} (x^3 + 2) + C \right) \cdot e^{x^3} = -\frac{1}{3} (x^3 + 2) + C e^{x^3}$$

– загальний розв'язок.

Якщо $y(0) = 1$, то

$$1 = -\frac{2}{3} + C \Rightarrow C = \frac{5}{3},$$

отже,

$$\underline{y = -\frac{1}{3} (x^3 + 2) + \frac{5}{3} e^{x^3}}$$

– частинний розв'язок рівняння.

$$\text{в) } t(1+t^2)dx = (x+xt^2-t^2)dt, \quad x(1) = -\frac{\pi}{4};$$

Поділивши обидві частини рівняння на $t(1+t^2)dt$, одержимо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(1+t^2)}{t(1+t^2)} - \frac{t^2}{t(1+t^2)}, \quad \text{або} \quad x' - \frac{x}{t} = -\frac{t}{1+t^2}$$

– лінійне рівняння;

$$x = uv, \quad x' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \frac{uv}{t} = -\frac{t}{1+t^2};$$

$$v' = \frac{v}{t}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dt}{t}; \quad \ln|v| = \ln|t| \Rightarrow v = t;$$

$$u't = -\frac{t}{1+t^2}; \quad \int du = -\int \frac{dt}{1+t^2}; \quad u = -\operatorname{arctg} t + C.$$

Отже,

$$x = uv = (-\operatorname{arctg} t + C)t$$

– загальний розв'язок рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння за умови, що

$$x(1) = -\frac{\pi}{4}:$$

$$-\frac{\pi}{4} = -\operatorname{arctg} 1 + C \Rightarrow C = 0,$$

$$\underline{y = -t \cdot \operatorname{arctg} t.}$$

Практичне заняття 3

Завдання 1

а) $y''' = 60x^2$; інтегруючи тричі, знаходимо розв'язок рівняння:

$$y'' = 20x^3 + C; \quad y' = 5x^4 + Cx + C_2; \quad y = x^5 + \frac{Cx^2}{2} + C_2x + C_3;$$

$$\underline{y = x^5 + C_1x^2 + C_2x + C_3, \text{ де } C_1 = \frac{C}{2}.}$$

$$\text{б) } y''' = \cos 2x; \quad y'' = \frac{1}{2} \sin 2x + C; \quad y' = -\frac{1}{4} \cos 2x + Cx + C_2;$$

$$\underline{y = -\frac{1}{8} \sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \text{ де } C_1 = \frac{C}{2}.}$$

$$\text{в) } xy'' = y'; \text{ позначимо } y' = u, \quad y'' = u', \text{ тоді}$$

$$xu' = u; \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|u| = \ln|x| \cdot C'_1 \Rightarrow u = C'_1 x; \quad y' = C'_1 x;$$

$$\underline{y = C_1 x^2 + C_2, \text{ де } C_1 = \frac{C'_1}{2}.}$$

$$\text{г) } (y'')^2 = y'; \text{ позначимо } y' = u, \quad y'' = u', \text{ тоді}$$

$$(u')^2 = u \Rightarrow u' = \pm \sqrt{u}; \quad \pm \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int dx;$$

$$\pm 2\sqrt{u} = x + C_1 \Rightarrow 4u = (x + C_1)^2 \Rightarrow u = \frac{1}{4}(x + C_1)^2;$$

$$u = y' \Rightarrow y' = \frac{1}{4}(x + C_1)^2;$$

$$\underline{y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2.}$$

$$\text{д) } y'' = \frac{y'}{x} + x; \text{ підстановка: } y' = z, \quad y'' = z', \text{ тоді } z' = \frac{z}{x} + x,$$

або $z' - \frac{z}{x} = x$ — лінійне рівняння,

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv'; \quad u'v - uv' - \frac{uv}{x} = x; \quad v' = \frac{v}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x;$$

$$u'x = x; \quad u' = 1; \quad u = x + C_1;$$

отже,

$$z = uz = (x + C_1) \cdot x = x^2 + C_1'x;$$

$$z = y' \Rightarrow y' = x^2 + C_1'x;$$

$$\underline{y = \frac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2, \text{ де } C_1 = \frac{C_1'}{2}.}$$

$$\text{е) } 2xy'y'' = (y')^2 + 1; \text{ підстановка: } y' = z, \quad y'' = z', \text{ тоді}$$

$$2xzz' = z^2 + 1; \quad \int \frac{2z}{z^2 + 1} dz = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln(z^2 + 1) = \ln x C_1 \Rightarrow z = \sqrt{C_1 x - 1}; \quad y' = \sqrt{C_1 x - 1};$$

$$\underline{y = \frac{2}{3C_1} (C_1 x - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2.}$$

є) $yy'' = (y')^2$; підстановка: $y' = z$, $y'' = z'z$, тоді

$$yz'z = z^2; \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dy}{y}; \ln|z| = \ln|y| + C_1 \Rightarrow z = C_1 y;$$

$$y' = C_1 y; \int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx; \ln|y| = C_1 x + C_2' \Rightarrow y = e^{C_1 x + C_2'} \Rightarrow$$

$$\underline{y = C_2 \cdot e^{C_1 x}}, \text{ де } C_2 = e^{C_2'}.$$

ж) $y(1 - \ln y) \cdot y'' + (1 + \ln y) \cdot (y')^2 = 0$; підстановка: $y' = z$,

$$y'' = z'z;$$

$$y(1 - \ln y) \cdot z'z + (1 + \ln y) \cdot z^2 = 0; \int \frac{dz}{z} = \int \frac{(1 + \ln y) dy}{y \cdot (\ln y - 1)};$$

$$\int \frac{(1 + \ln y) dy}{y(\ln y - 1)} = \left[\begin{array}{l} \ln y = u, \\ \frac{dy}{y} = du \end{array} \right] = \int \frac{u+1}{u-1} du =$$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{u-1} \right) du = u + 2 \ln|u-1| = \ln y + 2 \ln|\ln y - 1|;$$

$$\ln|z| = \ln y + 2 \ln|\ln y - 1| + C \Rightarrow z = y \cdot (\ln y - 1)^2 \cdot C_1;$$

$$y' = y(\ln y - 1)^2 \cdot C_1; \int \frac{dy}{y(\ln y - 1)^2} = C_1 \int dx;$$

$$\int \frac{d(\ln y - 1)}{(\ln y - 1)^2} = -\frac{1}{\ln y - 1} = \frac{1}{1 - \ln y};$$

$$\frac{1}{1 - \ln y} = C_1 x + C_2 \Rightarrow \underline{(1 - \ln y)(C_1 x + C_2) = 1}.$$

Завдання 2

а) $y'' = 3x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

$$y' = x^3 + C_1; \quad y'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1,$$

отже,

$$y' = x^3 + 1; \quad y = \frac{x^4}{4} + x + C_2;$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2; \quad \underline{y = \frac{x^4}{4} + x + 2}.$$

б) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

Підстановка:

$$y' = z, \quad y'' = z'; \quad z' - \frac{z}{x} = x^2 z^{-1}, \quad \text{або} \quad 2zz' - \frac{2z^2}{x} = 2x^2$$

– рівняння Бернуллі ($\alpha = -1$), тоді $p = z^{1-\alpha} = z^2$, $p' = 2zz'$;

отже, $p' - \frac{2p}{x} = 2x^2$ – лінійне рівняння,

$$p = uv, \quad p' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x^2;$$

$$v' = \frac{2v}{x} \Rightarrow v = x^2; \quad u'x^2 = 2x^2 \Rightarrow u = 2x + C_1;$$

тоді

$$p = uv = (2x + C_1) \cdot x^2; \quad z = \pm \sqrt{p} = \pm x \sqrt{2x + C_1}.$$

За умови що $y'(2) = 4$, маємо:

$$4 = \pm 2\sqrt{4 + C_1} \Rightarrow C_1 = 0,$$

тоді

$$z = x\sqrt{2x}; \quad y' = x\sqrt{2x};$$

$$y = \sqrt{2} \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{5} x^{\frac{5}{2}} + C_2 = \frac{2\sqrt{2}}{5} x^2 \sqrt{x} + C_2.$$

З того що $y(2) = 0$, знаходимо $C_2 = -\frac{16}{5}$, тоді

$$\underline{y = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{2x} - \frac{16}{5}}.$$

в) $2(y')^2 = y''(y-1), \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$

Підстановка:

$$y' = z, \quad y'' = z'z; \quad 2z^2 = z'z \cdot (y-1),$$

або

$$\frac{z'}{z} = \frac{2}{y-1}; \quad \int \frac{dz}{z} = 2 \int \frac{dy}{y-1};$$

$$\ln|z| = 2\ln|y-1| + \ln C_1 \Rightarrow z = (y-1)^2 \cdot C_1;$$

$$y' = C_1(y-1)^2.$$

Застосуємо початкову умову $y = 2, y' = -1 \Rightarrow C_1 = -1$,
тоді

$$y' = -(y-1)^2; \quad -\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx;$$

$$\frac{1}{y-1} = x + C_2 \Rightarrow y = \frac{1}{x+C_2} + 1.$$

Знаходимо C_2 за умови, що $y(1) = 2$:

$$2 = \frac{1}{C_2+1} + 1 \Rightarrow C_2 = 0,$$

отже,

$$\underline{y = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}}.$$

Практичне заняття 4

Завдання 1. Рівняння (а–г) – лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами, (д–є) – неоднорідні рівняння.

а) $y'' - 5y' + 6y = 0; \quad k^2 - 5k + 6 = 0;$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3 \Rightarrow \underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}.$$

б) $y''' - 4y'' + 3y' = 0; \quad k^3 - 4k^2 + 3k = 0$, або $k(k^2 - 4k + 3) = 0;$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 3;$$

$$\underline{y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{3x}.$$

$$\text{в) } y''' - 3y'' + 3y' - y = 0;$$

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0, \text{ або } (k-1)^3 = 0; \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1;$$

$$\underline{y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

$$\text{г) } y''' + 6y'' + 25y' = 0;$$

$$k^3 + 6k^2 + 25k = 0, \text{ або } k(k^2 + 6k + 25) = 0;$$

$$k_1 = 0; \quad k_{2,3} = -3 \pm 4i;$$

$$\underline{y = C_1 + e^{-3x} (C_2 \cos 4x + C_3 \sin 4x).$$

$$\text{д) } y'' - 2y' + 2y = 2x;$$

$k^2 - 2k + 2 = 0$ – характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння;

$$k_{1,2} = 1 \pm i; \quad \bar{y} = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x);$$

$$y^* = Ax + B \quad (r=0), \quad (y^*)' = A, \quad (y^*)'' = 0; \quad -2A + 2Ax + 2B = 2x;$$

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1, \quad -2A + 2B = 0 \Rightarrow B = 1; \quad y^* = x + 1;$$

$$y = \bar{y} + y^* = \underline{e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1.}$$

$$е) y'' + y = -8 \cos 3x;$$

$$k^2 + 1 = 0; k_{1,2} = \pm i; \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$y^* = A \cos 3x + B \sin 3x \quad (r = 0);$$

$$(y^*)' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x; (y^*)'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x;$$

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x + A \cos 3x + B \sin 3x \equiv -8 \cos 3x;$$

$$-8A \cos 3x - 8B \sin 3x \equiv -8 \cos 3x;$$

$$A \cos 3x + B \sin 3x \equiv \cos 3x \Rightarrow A = 1, B = 0;$$

$$y^* = \cos 3x; y = \bar{y} + y^* = \underline{C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos 3x}.$$

$$е) y'' - 2y' + y = xe^x;$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0, \text{ або } (k - 1)^2 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow \bar{y} = e^x (C_1 + C_2 x);$$

$$y^* = (Ax + B) \cdot e^x x^2 = (Ax^3 + Bx^2) \cdot e^x \quad (k_1 = k_2 = 1, \alpha = 1 \Rightarrow r = 2);$$

$$\begin{aligned} (y^*)' &= (3Ax^2 + 2Bx) \cdot e^x + (Ax^3 + Bx^2) \cdot e^x = \\ &= (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx) \cdot e^x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y^*)'' &= (3Ax^2 + (6A + 2B)x + 2B) \cdot e^x + \\ &+ (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx) \cdot e^x; \end{aligned}$$

$$3Ax^2 + 6Ax + 2Bx + 2B + Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + \\ + 2Bx - 2Ax^3 - 6Ax^2 - 2Bx^2 - 4Bx + Ax^3 + Bx^2 \equiv x;^3$$

$$6Ax + 2B \equiv x \Rightarrow 6A = 1, A = \frac{1}{6}, B = 0;$$

$$y^* = \frac{1}{6}x^3e^x; \quad y = \bar{y} + y^* = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Завдання 2

а) $y'' - y = 0$; $k^2 - 1 = 0$, $k = \pm 1 \Rightarrow y = C_1e^{-x} + C_2e^x$ – загальний розв'язок рівняння;

$$y(0) = 0: C_1 + C_2 = 0; \quad y'(x) = -C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

Якщо $y'(0) = 1$, то $-C_1 + C_2 = 1$;

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

отже,

$$y = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$$

– частинний розв'язок.

б) $y'' + 2y' + 2y = 0$; $k^2 + 2k + 2 = 0$, $k_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow$

$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ – загальний розв'язок.

Якщо $y(0) = 1$, то $C_1 = 1$;

$$y'(x) = -e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x);$$

$$y'(0) = 1, \quad C_1 = 1 \Rightarrow -1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 2;$$

отже,

$$\underline{y = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x)}$$

– частинний розв'язок.

в) $y'' + y + \sin 2x = 0$, або $y'' + y = -\sin 2x$ – неоднорідне рівняння;

$y'' + y = 0$ – відповідне однорідне рівняння, $k^2 + 1$ – його характеристичне рівняння,

$$k_{1,2} = \pm i \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x, \quad (y^*)' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$

$$(y^*)'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x;$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + A \cos 2x + B \sin 2x \equiv -\sin 2x;$$

$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x \equiv -\sin 2x \Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad y^* = \frac{1}{3} \sin 2x,$$

отже,

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x$$

– загальний розв'язок рівняння.

Застосовуємо початкові умови $y(\pi) = y'(\pi) = 1$:

$$C_1 = -1; \quad y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3} \cos 2x;$$

$$1 = -C_2 + \frac{2}{3} \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3};$$

$$y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$$

– частинний розв'язок.

$$г) y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6;$$

$$y'' - 2y' + 10y = 0, \quad k^2 - 2k + 10 = 0,$$

$$k_{1,2} = 1 \pm 3i \Rightarrow \bar{y} = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

– загальний розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння; знаходимо частинний розв'язок у вигляді

$$y^* = Ax^2 + Bx + C, \quad (y^*)' = 2Ax + B, \quad (y^*)'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B + 10Ax^2 + 10Bx + 10C \equiv 10x^2 + 18x + 6;$$

$$10Ax^2 + (-4A + 10B)x + (2A - 2B + 10C) \equiv 10x^2 + 18x + 6;$$

$$\begin{cases} 10A = 10, \\ -4A + 10B = 18, \\ 2A - 2B + 10C = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 2,2, \\ C = 0,84, \end{cases}$$

тоді

$$y^* = x^2 + 2,2x + 0,84,$$

отже,

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84$$

– загальний розв'язок рівняння.

Знаходимо частинний розв'язок рівняння за початкових умов $y(0) = 1$, звідки

$$C_1 + 0,84 = 1, \quad C_1 = 0,16 \text{ і } y'(0) = 3,2,$$

тобто

$$y'(x) = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \\ + e^x (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + 2x + 2,2;$$

$$3,2 = C_1 + 3C_2 + 2,2;$$

$$C_1 = 0,16 \Rightarrow 3C_2 = 1 - 0,16 \Rightarrow C_2 = 0,28.$$

Отже,

$$y = e^x (0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84$$

– частинний розв'язок, який відповідає заданим початковим умовам.

$$\text{д) } 4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x};$$

$$4k^2 + 16k + 15 = 0, \quad k_1 = -\frac{3}{2}, \quad k_2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \bar{y} = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-\frac{5}{2}x};$$

$$y^* = A x e^{-\frac{3}{2}x} \quad (k_1 = -\frac{3}{2}, \quad \alpha = -\frac{3}{2}, \quad r = 1),$$

$$(y^*)' = A e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2} A x e^{-\frac{3}{2}x} = \left(A - \frac{3}{2} A x \right) \cdot e^{-\frac{3}{2}x},$$

$$(y^*)'' = -\frac{3}{2} A e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2} \left(A - \frac{3}{2} A x \right) \cdot e^{-\frac{3}{2}x};$$

$$-6Ae^{-\frac{3}{2}x} - 6Ae^{-\frac{3}{2}x} + 9Axe^{-\frac{3}{2}x} + \\ + 16Ae^{-\frac{3}{2}x} - 24Axe^{-\frac{3}{2}x} + 15Axe^{-\frac{3}{2}x} \equiv 4e^{-\frac{3}{2}x};$$

$$4A = 4 \Rightarrow A = 1,$$

тоді $y^* = xe^{-\frac{3}{2}x}$,

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^{-\frac{3}{2}x} + C_2e^{-\frac{5}{2}x} + xe^{-\frac{3}{2}x} = \\ = (C_1 + x) \cdot e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 \cdot e^{-\frac{5}{2}x}$$

– загальний розв'язок рівняння.

За початкових умов $y(0)=3$ і $y'(0)=-5,5$ знаходимо C_1 і C_2 :

$$y(0)=3: C_1 + C_2 = 3; \quad y'(x) = e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2}(C_1 + x) \cdot e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{5}{2}C_2 \cdot e^{-\frac{5}{2}x};$$

$$y'(0) = -5,5: -\frac{11}{2} = 1 - \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{2}C_2 \Rightarrow 3C_1 + 5C_2 = 13;$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ 3C_1 + 5C_2 = 13, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Отже,

$$y = (1 + x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x}$$

– частинний розв'язок рівняння.

$$\text{е) } y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3);$$

$$k^2 - 2k = 0, k_1 = 0, k_2 = 2 \Rightarrow \bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x};$$

$$y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^x; (y^*)' = (2Ax + B) \cdot e^x + (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x;$$

$$(y^*)'' = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + \\ + (Ax^2 + Bx + C)e^x = 2Ae^x + (4Ax + 2B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x;$$

$$2Ae^x + (4Ax + 2B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x - \\ - (4Ax + 2B)e^x - 2(Ax^2 + Bx + C)e^x \equiv e^x(x^2 + x - 3);$$

$$2A - (Ax^2 + Bx + C) \equiv x^2 + x - 3;$$

$$-Ax^2 - Bx + 2A - C \equiv x^2 + x - 3 \Rightarrow A = -1, B = -1, C = 1, \\ \text{тоді}$$

$$y^* = (-x^2 - x + 1)e^x; y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{2x} + (-x^2 - x + 1)e^x$$

– загальний розв'язок рівняння.

Застосуємо початкові умови:

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = C_1 + C_2 + 1, C_1 + C_2 = 1;$$

$$y'(x) = 2C_2 e^{2x} + (-2x - 1)e^x + (-x^2 - x + 1)e^x;$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = 2C_2 - 1 + 1 \Rightarrow C_2 = 1, \text{ тоді } C_1 = 0.$$

Отже,

$$\underline{y = e^{2x} + (-x^2 - x + 1)e^x}$$

– частинний розв'язок.

Практичне заняття 5

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0. \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння системи $x'' + 3x' + y' = 0$; з другого рівняння $y' = x - y$; отже, $x'' + 3x' + x - y = 0$. Підставивши з першого рівняння системи $y = -x' - 3x$, отримуємо $x'' + 3x' + x - (x' - 3x) = 0$, або $x'' + 4x' + 4x = 0$ – лінійне однорідне рівняння другого порядку, $k^2 + 4k + 4 = 0$ – характеристичне рівняння, $k_1 = k_2 = -2$ – його корені.

Отже,

$$\underline{x(t) = e^{-2t}(C_1 t + C_2)}.$$

Знаходимо $x'(t) = -2e^{-2t}(C_1 t + C_2) + C_1 \cdot e^{-2t}$, тоді

$$\begin{aligned} y = -x' - 3x &= -(-2e^{-2t}(C_1 t + C_2) + C_1 e^{-2t}) - \\ &- 3e^{-2t}(C_1 t + C_2) = -e^{-2t}(C_1 t + C_2) - C_1 e^{-2t}, \end{aligned}$$

отже,

$$\underline{y(t) = -e^{-2t}(C_1 t + C_2 - C_1)}.$$

Застосуємо початкові умови $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ і знаходимо з першої рівності $C_2 = 1$, з другої рівності $-1 = -(C_2 - C_1)$, звідки $C_1 = 0$, отже, $x(t) = e^{-2t}$, $y(t) = e^{-2t}$ – частинний розв'язок системи.

$$2) \begin{cases} \frac{du}{dx} + 4v = \cos 2x, \\ \frac{dv}{dx} + 4u = \sin 2x. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо $u'' + 4v' = \cos 2x$; врахувавши, що $v' = -4u + \sin 2x$, отримаємо

$$u'' + 4(-4u + \sin 2x) = -2 \sin 2x, \text{ або } u'' - 16u = -6 \sin 2x$$

– лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо загальний розв'язок у вигляді $u = \bar{u} + u^*$.

Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 16 = 0$, $k_{1,2} = \pm 4$ – розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння; $\bar{u} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Частинний розв'язок знайдемо у вигляді $u^* = A \cos 2x + B \sin 2x$, тоді

$$(u^*)' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, (u^*)'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x;$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 16A \cos 2x - 16B \sin 2x \equiv -6 \sin 2x,$$

звідки $-20A = 0$, $-20B = -6$, отже, $A = 0$, $B = 0,3$, тоді $u^* = 0,3 \sin 2x$;

$$u = \bar{u} + u^* = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x} + 0,3 \sin 2x.$$

Знайдемо v' з другого рівняння системи:

$v' = -4u + \sin 2x$; $v' = -4C_1e^{-4x} - 4C_2e^{4x} - 1,2 \sin 2x + \sin 2x$,
звідки

$$v(x) = -4\left(-\frac{1}{4}\right)C_1e^{-4x} - 4 \cdot \frac{1}{4}C_2e^{4x} + 0,2 \cdot \frac{1}{2}\cos 2x,$$

остаточно отримуємо

$$\underline{v(x) = C_1e^{-4x} - C_2e^{4x} + 0,1\cos 2x.}$$

За початкових умов $u(0) = 0$ і $v(0) = 0,1$ знаходимо частинний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} u(0) = 0: & C_1 + C_2 = 0, \\ v(0) = 0,1: & C_1 - C_2 + 0,1 = 0,1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = C_2 = 0$, тоді $u(x) = 0,3\sin 2x$, $v(x) = 0,1\cos 2x$.

$$3) x(t) = -e^{-t}, y(t) = e^{-t}, z(t) = 0.$$



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 382 с.
2. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1986. – Ч. 1. – 304 с.
3. **Дубовик, В. П.** Вища математика [Текст] : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001. – 648 с.
4. **Запорожец, Г. И.** Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] / Г. И. Запорожец. – М. : Высшая школа, 1966. – 464 с.
5. **Кузнецов, А. М.** Курс лекцій з математичного аналізу [Електронний ресурс] : навч. посіб. / А. М. Кузнецов, Н. О. Романчук. – Електронне видання на DVD-ROM. – Миколаїв : НУК, 2015.
6. **Кузнецов, А. Н.** Учебник задач по теме "Дифференциальные уравнения" [Текст] / А. Н. Кузнецов. – Николаев : НУК, 2006. – 312 с.
7. **Стрижак, Т. Г.** Математичний аналіз: приклади і задачі [Текст] : навч. посіб. / Т. Г. Стрижак, Н. Р. Коновалова. – К. : Либідь, 1995. – 240 с.

8. Юрченко, Т. А. Похідна функції, диференціал та їх застосування [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Т. А. Юрченко, Н. О. Романчук. – Електронне видання на DVD-ROM. – Миколаїв : НУК, 2011.

ЗМІСТ

Вступ	3
<i>Практичне заняття 1. Диференціальні рівняння першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння</i>	<i>4</i>
<i>Практичне заняття 2. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах</i>	<i>20</i>
<i>Практичне заняття 3. Диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку</i>	<i>38</i>
<i>Практичне заняття 4. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння зі сталими коефіцієнтами. Неоднорідні рівняння зі спеціальною правою частиною</i>	<i>58</i>
<i>Практичне заняття 5. Системи диференціальних рівнянь</i>	<i>84</i>
Вказівки, розв'язання, відповіді до завдань для самостійної роботи	102
Список літератури	132

Навчальне видання

РОМАНЧУК Наталя Олександрівна
ГАЙША Олександр Олександрович
МАЙБОРОДА Олександр Валерійович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник для студентів,
які навчаються за скороченим терміном

Редактор *А. О. Максименко*

Комп'ютерне складання та верстання *В. В. Москаленко*

Коректор *М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 7,9. Тираж 100 прим. Вид № 30. Зам. № 97.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.