

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Л. І. КОРОСТИЛЬОВ, В. М. СОКОВ

**ПРАКТИКУМ З ВИКОНАННЯ
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ
З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою НУК



ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА

2024

УДК 539.4

K68

Автори: Л. І. Коростильов, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри будівельної механіки та конструкції корпусу корабля НУК імені адмірала Макарова;

В. М. Соков, старш. викладач кафедри будівельної механіки та конструкції корпусу корабля НУК імені адмірала Макарова

Рецензенти: М. Р. Ткач, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри інженерної механіки та технології машинобудування НУК імені адмірала Макарова;

О. В. Щедролюсєв, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри суднобудування та ремонту суден Херсонського навчально-наукового інституту НУК імені адмірала Макарова;

А. В. Коноплєв, д-р техн. наук, професор, зав. кафедри машинознавства та інженерної механіки Одеського національного морського університету

Рекомендовано Вченою радою НУК імені адмірала Макарова

як навчальний посібник

(протокол № 07 від 30.06.2023 р.)

Коростильов Л. І.

K68 Практикум з виконання розрахунково-графічних робіт з опору матеріалів : навчальний посібник / Л. І. Коростильов, В. М. Соков. – Миколаїв : НУК, 2024. – 176 с.

ISBN 978-966-321-467-2

Вміщено теоретичні відомості, послідовність розрахунків та приклади виконання й оформлення розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Опір матеріалів».

Призначено для студентів галузі знань 13 «Механічна інженерія» спеціальності 135 «Суднобудування».

УДК 539.4

© Коростильов Л. І., Соков В. М., 2024

© Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, 2024

ISBN 978-966-321-467-2

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	5
ВСТУП.....	6
1. РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКОГО ПЕРЕРІЗУ СКЛАДНОЇ ФОРМИ.....	7
1.1. Геометричні характеристики простих фігур.....	7
1.2. Розрахунок геометричних характеристик складеної плоскої фігури.....	15
1.3. Приклад.....	29
2. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ.....	37
2.1. Класичний метод перерізів.....	37
2.2. Визначення границь та довжин ділянок.....	38
2.3. Кінематичні параметри.....	41
2.4. Урахування розподіленого навантаження.....	42
2.5. Перевірка епюри за скачками.....	44
3. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТУПІНЧАСТОГО БРУСА ПІД ЧАС ОСЬОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ.....	45
3.1. Приклад А.....	45
3.2. Приклад Б.....	52
3.3. Приклад В.....	54
4. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТЕРЖНЕВОЇ СИСТЕМИ З ЖОРСТКИМ БРУСОМ.....	59
4.1. Приклад.....	59
5. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ З'ЄДНАНИХ ВАЛІВ З КРУГЛИМ ПЕРЕРІЗОМ.....	72
5.1. Приклад.....	72
6. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ ПІД ЧАС ЗГИНАННЯ.....	88
6.1. Метод перерізів для згину.....	88
6.2. Метод початкових параметрів.....	93
6.3. Приклад.....	97
7. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ВАЛА ПІД ЧАС ЗГИНАННЯ З КРУЧЕННЯМ.....	123

7.1. Приклад.....	123
8. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПІД ЧАС ЗГИНАННЯ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ, БАГАТОПРОГОНОВОЇ БАЛКИ НА ЖОРСТ- КИХ ОПОРАХ.....	144
8.1. Приклад.....	144
9. ПРОЄКТУВАННЯ СТИСНУТОГО СТОЯКА ЗА УМОВИ СТІЙКО- СТІ.....	163
9.1. Приклад.....	163
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	175

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

РГР – розрахунково-графічна робота
ЦМ – центр мас
МПП – метод початкових параметрів
ДР – диференціальне рівняння
ГУ – граничні умови
НО – нейтральна ось / осі
 ΣFX – сума проєкції сил на вісь x
 ΣFY – сума проєкції сил на вісь y
 ΣFZ – сума проєкції сил на вісь z
 ΣMX – сума моментів зусиль у проєкції на вісь x
 ΣMY – сума моментів зусиль у проєкції на вісь y
 ΣMZ – сума моментів зусиль у проєкції на вісь z
 ΣMBY – сума моментів зусиль відносно точки B у проєкції на вісь y

ВСТУП

Навчальний посібник створений на допомогу студентам під час виконання розрахунково-графічних робіт (РГР), які пропонуються при вивченні курсу дисципліни «Опір матеріалів», яка викладається в НУК ім. адмірала Макарова, у рамках робочої програми курсу в галузі знань 13 «Механічна інженерія» спеціальності 135 «Суднобудування». У навчальному посібнику розглянуто послідовність виконання наступних РГР: «Розрахунок геометричних характеристик плоского перерізу складної форми», «Розрахунок на міцність і жорсткість ступінчастого бруса під час осьового навантаження», «Розрахунок на міцність і жорсткість стержневої системи з жорстким брусом», «Розрахунок на міцність і жорсткість з'єднаних валів з круглим перерізом», «Розрахунок на міцність і жорсткість статично визначуваної балки під час згинання», «Розрахунок на міцність і жорсткість вала під час згинання зі крученням», «Розрахунок на міцність під час згинання статично невизначуваної, багатопрогонової балки на жорстких опорах», «Проектування стиснутого стояка за умови стійкості».

Посібник містить мінімальну кількість необхідного теоретичного матеріалу, потрібного для виконання практичних робіт. Самі практичні роботи розглянуті у вигляді прикладів. Приділено увагу нетиповим випадкам, особливостям і тонкощам.

1. РОЗРАХУНОК ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКОГО ПЕРЕРІЗУ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

1.1. Геометричні характеристики простих фігур

1.1.1. Основні геометричні характеристики плоскої фігури

До основних геометричних характеристик плоскої фігури відносяться її площа і два осьових головних центральних моменти інерції цієї площі [1, 2, 3, 6, 7, 8]. Ці характеристики використовуються загалом під час розрахунку стержневих систем, де попередньо необхідне обчислення характеристик поперечних перерізів цих стержнів. Поперечні перерізи стержнів або твердих тіл взагалі є плоскими фігурами. Викладена тут теорія може бути застосована як для однозв'язних плоских фігур, так і для багатозв'язних.

Для пояснення геометричних характеристик скористаємось рис. 1.1, на якому зображена довільна плоска фігура у довільних осях порівняння xOy . У точці $A(x, y)$ виділена елементарна площадка $dF = dx \cdot dy$, центр мас (ЦМ) якої (площадки) відстоїть на x, y від осей порівняння xOy . Точка A є центром мас елементарної площадки dF . Використовується права координатна система.

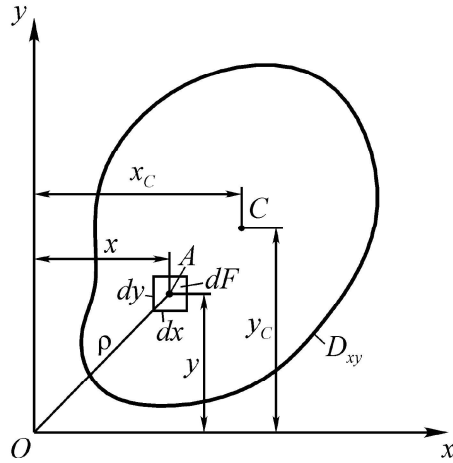


Рис. 1.1. Плоска фігура

Площа плоскої фігури F , м^2 – це сума елементарних площ (або сума площ елементарних площадок), що становлять собою фігуру, яка може бути обчислена за формулою

$$F = \int_F dF = \iint_{D_{xy}} dx dy. \quad (1)$$

Статичний момент (площі) S , м^3 – це сума добутків площ елементарних площадок на відстані від центра мас цих площадок до відповідної осі порівняння. Осьові статичні моменти обчислюються за формулами

$$S_x = \int_F y dF = \iint_{D_{xy}} y dx dy, \quad S_y = \int_F x dF = \iint_{D_{xy}} x dx dy, \quad (2)$$

де S_x , S_y – статичні моменти площі відносно осей x та y .

Координати центра мас $C(x_C, y_C)$ усієї фігури визначаються залежностями

$$x_C = \frac{S_y}{F}, \quad y_C = \frac{S_x}{F}. \quad (3)$$

Якщо осі порівняння xO проходять через ЦМ фігури, то статичні моменти (3) у цьому випадку дорівнюють нулю.

Осьовий момент інерції I , m^4 , площі фігури – це сума добутків площ елементарних площадок на квадрат відстані від центра мас цих площадок до відповідної осі порівняння. Осьові моменти інерції знаходяться за формулами

$$I_x = \int_F y^2 dF = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy, \quad I_y = \int_F x^2 dF = \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy, \quad (4)$$

де I_x, I_y – осьові моменти інерції площі фігури відносно осей x та y .

Відцентровий момент інерції I_{xy} , m^4 , площі фігури – це сума добутків площ елементарних площадок на відстані від центра мас цих площадок до обох осей порівняння, котрий може бути обчислений виразом

$$I_{xy} = \int_F xy dF = \iint_{D_{xy}} xy dx dy. \quad (5)$$

Полярний момент інерції I_ρ , m^4 , площі фігури – це сума добутків площ елементарних площадок на квадрат відстані від центра мас цих площадок до декотрого полюса. Полярний момент інерції може бути обчислений за формулами

$$\left. \begin{aligned} I_\rho &= \int_F \rho^2 dF = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy, \\ I_\rho &= I_x + I_y \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Власними (або *центральними*) осями називаються осі, що проходять через ЦМ фігури. Цих осей у фігури нескінченна кількість.

Власними (або *центральними*) *моментами інерції* (площі фігури) називаються моменти інерції (як осьові, так і відцентровий) визначені відносно власних / центральних осей.

Головними осями називаються такі осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Будь-які осі завжди можна повернути так, щоб вони стали головними. Кут повороту α_0 , рад, на який необхідно повернути вихідні осі, щоб вони стали головними, визначають за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right). \quad (7)$$

Для правої координатної системи додатній напряму кута α_0 – проти годинникової стрілки.

Головними моментами інерції (площі фігури) називаються осові моменти інерції відносно головних осей.

Головними центральними осями (або *центральними головними осями*) називаються осі, які одночасно є головними і центральними, тобто проходять через ЦМ фігури, а відцентровий момент інерції відносно них дорівнює нулю.

Головними центральними моментами інерції (площі фігури) називаються осові моменти інерції відносно головних центральних осей.

Під час повороту вихідних координатних осей $x'y'O$ на кут β , рад (рис. 1.2,*a*), значення моментів інерції відносно нових повернутих координатних осей $x'y'O$ запишуться у вигляді

$$\left. \begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2 \beta + I_y \sin^2 \beta - I_{xy} \sin 2\beta, \\ I_{y'} &= I_x \sin^2 \beta + I_y \cos^2 \beta + I_{xy} \sin 2\beta, \\ I_{x'y'} &= I_{xy} \cos 2\beta - \frac{1}{2}(I_y - I_x) \sin 2\beta \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Додатній кут напряму кута β – проти годинникової стрілки. Формули під час повороту координатних осей (8) придатні для будь-яких осей.

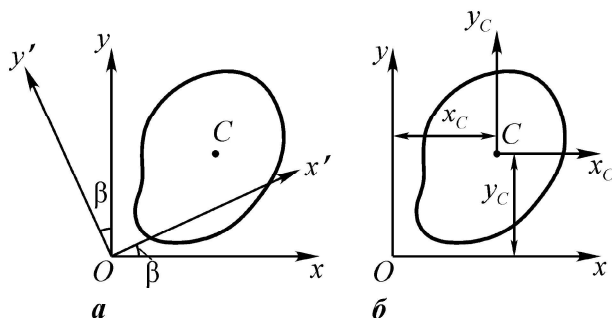


Рис. 1.2. Операції з координатними осями:
а – поворот осей; **б** – паралельний зсув осей

Якщо взяти довільні координатні осі xuO , які паралельні деяким центральним осям $x_c y_c C$ фігури, і відстоять на відстань x_c уздовж осі x , і на y_c уздовж осі y (рис. 1.2,б), значення моментів інерції в координатних осях xuO становлять

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_{x_c} + y_c^2 F, \\ I_y &= I_{y_c} + x_c^2 F, \\ I_{xy} &= I_{x_c y_c} + x_c y_c F \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

У разі відомих моментів інерції I_x, I_y, I_{xy} відносно довільних осей порівняння значення центральних / власних моментів інерції визначаються залежностями, які отримані на основі (9)

$$\left. \begin{aligned} I_{x_c} &= I_x - y_c^2 F, \\ I_{y_c} &= I_y - x_c^2 F, \\ I_{x_c y_c} &= I_{xy} - x_c y_c F \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

де $I_{x_c}, I_{y_c}, I_{x_c y_c}$ – значення центральних моментів інерції відносно центральних осей $x_c y_c C$; x_c, y_c – координати центра мас відносно осей порівняння xuO .

Головні центральні моменти інерції I_u, I_v обчислюються за формулами

$$\left. \begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left((I_{x_c} + I_{y_c}) \pm \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} \right), \\ I_v &= \frac{1}{2} \left((I_{x_c} + I_{y_c}) \mp \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

де верхні знаки необхідно брати при $I_{x_c} > I_{y_c}$, а нижні – при $I_{x_c} < I_{y_c}$.

Кінцевою метою розрахунку геометричних характеристик плоскої фігури є знаходження її площі F , двох головних центральних моментів інерції I_u, I_v і положення головних центральних осей відносно осей порівняння.

Для контролю правильності розрахунку головних центральних моментів інерції I_u, I_v можна використовувати наступну формулу:

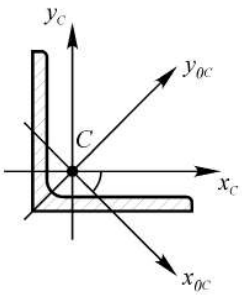
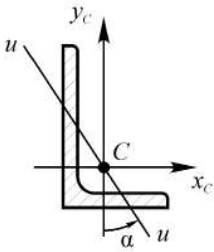
$$I_u + I_v = I_{x_c} + I_{y_c}, \quad (12)$$

де I_{x_c}, I_{y_c} – будь-які центральні моменти інерції; I_u, I_v – головні центральні моменти інерції.

1.1.2. Деякі особливості під час визначення відцентрового моменту інерції

Часто в довідниках для декотрих фігур представлені тільки центральні осьові моменти інерції, але не дано значення центральних відцентрових. **Якщо осі фігури проходять хоча б через одну вісь симетрії, то її відцентровий момент дорівнює нулю.** Якщо у фігури немає ні однієї осі симетрії, то невідомі відцентрові моменти інерції в цьому випадку можна обчислити, використовуючи формули (7) та (8) і додаткову інформацію про симетрію фігури або кут нахилу центральних осей фігури до головних центральних осей цієї же фігури. У табл. 1.1 показані характерні приклади обчислення невідомих відцентрових моментів інерції за відомими осьовими, де C – ЦМ кутника.

Таблиця 1.1. До визначення відцентрових моментів інерції кутників

№ з/п	Вид кутника	Формули для відцентрових моментів інерції
1		$I_{x_c y_c} = -\frac{1}{2} (I_{x_0 \max} - I_{y_0 \min}),$ де $x_{0c} y_{0c}$ – головні центральні осі
2	Нерівнополочний кутник 	$I_{x_c y_c} = \frac{1}{2} (I_{y_c} - I_{x_c}) \operatorname{tg} 2\alpha,$ де α – кут нахилу головних центральних осей $u v C$ до центральних осей $x_c y_c C$

Загалом для кутників (як рівнополочних, так і нерівнополочних) відцентрові моменти інерції відносно центральних осей, показаних у табл. 1.1, є від'ємними.

1.1.3. Зміна орієнтації осей

Під час зміни орієнтації осей фігури з лівої на праву або з правої на ліву (без їх зсуву та повороту), значення осьових моментів інерції не змінюються, але знак відцентрового моменту інерції потрібно змінити на протилежний. Це положення справедливо для будь-яких осей фігури.

Наприклад, для фігури, зображеної на рис. 1.3 (точка C – ЦМ фігури), показано варіанти зміни орієнтації власних осей.

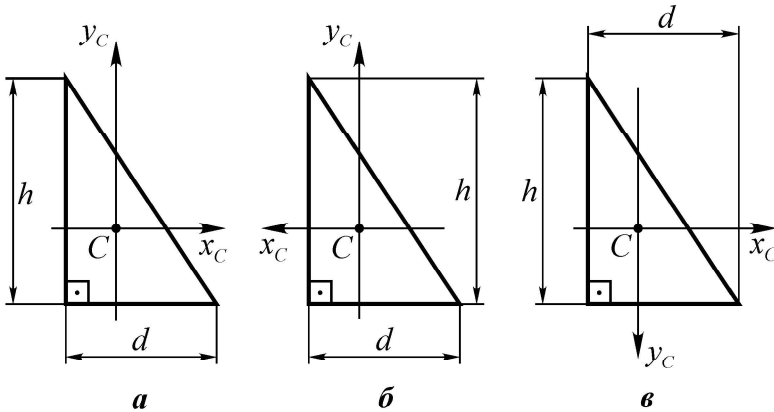


Рис. 1.3. Орієнтація власних осей простої фігури:

a – права координатна система; *б, в* – ліва координатна система

Власні моменти інерції фігури, зображеної на рис. 1.3 у правій координатній системі (рис. 1.3,*a*):

$$I_x = \frac{dh^3}{36}, \quad I_y = \frac{d^3h}{36}, \quad I_{xy} = -\frac{d^2h^2}{72}.$$

У лівій координатній системі значення власних моментів інерції (рис. 1.3,*б, в*)

$$I_x = \frac{dh^3}{36}, \quad I_y = \frac{d^3h}{36}, \quad I_{xy} = \frac{d^2h^2}{72}.$$

1.1.4. Переворот фігури або віддзеркалення

Під час будь-якого перевертання фігури (або віддзеркалення) відносно власних осей, як це показано на рис. 1.4 (точка *C* – ЦМ фігури), значення осьових моментів інерції залишаються незмінними, але знак відцентрового моменту інерції необхідно змінити на протилежний. Під час перевертання фігури положення та орієнтація власних осей цієї фігури не змінюється.

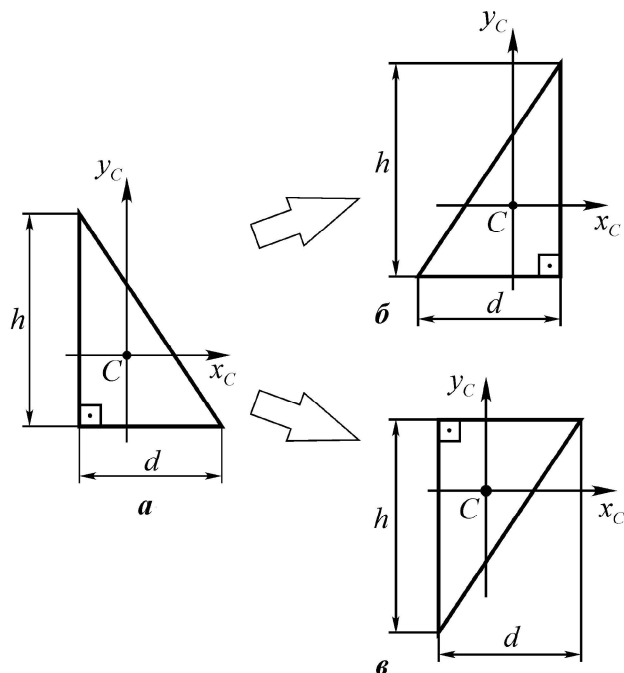


Рис. 1.4. Способи перевороту фігури відносно власних осей:
 a – початкове положення; $б$ – перший спосіб перевороту;
 $в$ – другий спосіб перевороту

Отже, однократна зміна орієнтації осей та однократний переворот фігури приводять лише до зміни знаку відцентрового моменту інерції на протилежний.

1.2. Розрахунок геометричних характеристик складеної плоскої фігури

1.2.1. Два загальних етапи розрахунку

Складеною плоскою фігурою називається плоска фігура, яка складена з декількох простих елементарних фігур, до яких можна віднести і пустоти. Розрахунок геометричних характеристик для складеної фігури складається з двох частин:

перша частина є «творчою», де обробляється складена плоска фігура та готуються вихідні дані, які беруться з довідників (наприклад з [6, 7]), або знаходяться інтегруванням; друга частина являє собою математичну обробку вихідних даних, яка відбувається за чітко встановленим однозначним алгоритмом. Якщо перша частина розрахунку допускає декілька реалізацій, то друга частина – ні. Чим якісніше виконана перша «творча» частина: уведення осей, розбиття складеної фігури на прості і т. д., тим менш трудомісткий розрахунок, і тим більша ймовірність правильного розрахунку взагалі. Навички в першій «творчій» частині розрахунку набуваються з досвідом.

1.2.2. Послідовність розрахунку складеної фігури

Розрахунок геометричних характеристик плоскої складеної фігури полягає у виконанні наступних кроків:

1. Зобразити в масштабі плоску складену фігуру та показати на ній усі мінімально необхідні для розрахунку розміри, як лінійні, так і кутові.

2. Ввести довільні прямокутні декартові *осі порівняння* для всієї складеної фігури, відносно яких буде відбуватися подальший розрахунок. Осі порівняння можна розташовувати будь-яким чином; орієнтацію осей можна брати праву або ліву. Для спрощення розрахунків є прийоми розташування осей порівняння, які зменшують об'єм обчислень. Один з них – провести осі порівняння через ЦМ однієї з елементарних фігур, на які розбивається початкова складена фігура (див. крок 3 нижче), і направити осі порівняння вздовж власних осей цієї елементарної фігури, або по змозі направити хоча б одну вісь осей порівняння вздовж осі симетрії елементарної фігури. Якщо вся складена фігура має хоча б одну вісь симетрії, то бажано, щоб одна з осей порівняння співпадала з цією віссю симетрії, якщо складена фігура має дві осі симетрії, то і дві осі порівняння треба направити вздовж цих осей симетрії, розмістивши початок осей порівняння на перехресті осей симетрії.

Кроки 2 і 3 є взаємопов'язані, незалежні і рівнозначні. Можна було б крок 3, представлений нижче, поставити на місце цього кроку. Взаємодію кроків 2 і 3 можна представити наступним чином: розбиваючи складену фігуру одним зі способів, розглядаємо декілька варіантів розміщення осей порівняння, дотримуючись рекомендацій, представлених вище, або застосовуючи власний досвід. Якщо видно, що введені осі порівняння обіцяють ускладнення або незручність подальших розрахунків, то ми розбиваємо складену фігуру в інший спосіб і знову намагаємося ввести декілька осей порівняння. З усіх опрацьованих варіантів розбиття складеної фігури й осей порівняння обираємо той варіант, який нам обіцяє мінімум затрат на обчислення. З набуттям досвіду обчислень розраховувач може виробити власні рекомендації або стилі розрахунку.

3. Розбити складену фігуру на більш прості елементарні фігури, таким чином, щоб ЦМ кожної з цих фігур, площа та власні моменти інерції могли б бути легко визначені за допомогою довідника або безпосередньо інтегруванням. Причому пустоти теж необхідно віднести до простих фігур. Якщо елементарна фігура є пустотою, то перед значенням площі та власних моментів інерції треба поставити знак мінус. Щоб відрізнити, які фігури є заповненими, а які пустотами введемо декотрий показник, який назовемо *статусом фігури* s . Для заповнених фігур статус $s = 1$, а для пустот $s = -1$. Додатково необхідно дослідити необхідність *переворотів* для кожної з простих фігур та відмітити їх кількість n . Про перевороти буде сказано нижче. Прості фігури, на які розбито складений переріз, необхідно показати на ескізі та пронумерувати і для зручності (хоча і необов'язково) – дати назви.

4. Для кожної простої фігури необхідно показати ЦМ та власні осі, використовуючи довідники, у яких зазвичай проста фігура зображена разом зі своїми власними осями. Також можна використати інтегральні обчислення. Необхідно узгодити орієнтацію власних осей простих фігур з осями порівняння, так, щоб орієнтація власних осей усіх простих фігур

та осей порівняння були однакові, а на ескізі показувати вже узгоджені осі (про узгодження осей див. нижче).

5. Для кожної i -ї елементарної фігури з ескізу складеної фігури встановити:

- кут β між осями порівняння та власними осями елементарної фігури (про цей кут буде сказано нижче);
- відстані (x, y) від центра мас кожної з елементарних фігур до осей порівняння.

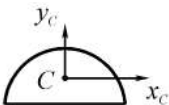
6. Для кожної i -ї елементарної фігури вписати з довідника або знайти інтегруванням:

- площу $F^{\text{дов}}$;
- власні моменти інерції: два осьових $I_{x_c}^{\text{дов}}, I_{y_c}^{\text{дов}}$ і відцентровий $I_{x_c y_c}^{\text{дов}}$.

Величини $F^{\text{дов}}, I_{x_c}^{\text{дов}}, I_{y_c}^{\text{дов}}, I_{x_c y_c}^{\text{дов}}$ на цьому кроці обчислюються для простих фігур без урахування кількості переворотів n , кута нахилу осей β , статусу фігури s (пустота або повна). Тобто ці величини вписуються із довідника так, як є, а наступна їх обробка, з урахуванням n, β, s буде виконана пізніше.

Після цього визначені величини рекомендується занести до таблиці у формі табл. 1.2, у яку заносяться дані, отримані з довідника (індекс «дов») та з ескізу.

Таблиця 1.2. Попередні вихідні дані для елементарних фігур

№ фігури	Ескіз фігури з довідника	Попередні вихідні дані для кожної простої фігури
I		$F^{\text{дов}} = \dots; I_{x_c}^{\text{дов}} = \dots; I_{y_c}^{\text{дов}} = \dots; I_{x_c y_c}^{\text{дов}} = \dots$ $x = \dots; y = \dots; \beta = \dots; s = \dots; n = \dots$
II	...	...

У табл. 1.2 застосовані наступні позначення для кожної з простих елементарних фігур, де індекс «дов» означає, що величину необхідно визначати з довідника (або інтегруванням):

$F^{\text{дов}}$ – площа, м^2 ;

$I_{x_c}^{\text{дов}}$ – власний / центральний осьовий момент інерції відносно осі x_c ;

$I_{y_C}^{\text{дов}}$ – власний / центральний осьовий момент інерції відносно осі y_C ;

$I_{x_C y_C}^{\text{дов}}$ – власний / центральний відцентровий момент інерції відносно осей x_C, y_C ;

β – кут нахилу власних осей до осей порівняння, рад;

x, y – координати ЦМ елементарної фігури відносно осей порівняння;

s – «статус» фігури, який при заповненій фігурі $s = 1$, а при пустоті $s = -1$;

n – кількість переворотів.

7. Для кожної i -ї елементарної фігури провести попередню обробку величин $F^{\text{дов}}, I_{x_C}^{\text{дов}}, I_{y_C}^{\text{дов}}, I_{x_C y_C}^{\text{дов}}$ з урахуванням переворотів та пустот і отримати нові значення площі F та моментів інерції $I_{x_C}, I_{y_C}, I_{x_C y_C}$, використовуючи залежність

$$\left. \begin{aligned} I_{x_C} &= s \cdot I_{x_C}^{\text{дов}}; \\ I_{y_C} &= s \cdot I_{y_C}^{\text{дов}}; \\ I_{x_C y_C} &= s \cdot (-1)^n \cdot I_{x_C y_C}^{\text{дов}}; \\ F &= s \cdot F^{\text{дов}} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

де s – статус фігури ($s = 1$ – якщо повна; $s = -1$ – якщо пустота).

8. Центральні / власні осі кожної i -ї елементарної фігури повернути на кут β , щоб вони стали паралельними осям порівняння. Як результат, отримаємо нові значення моментів інерції $I_{x'_C}, I_{y'_C}, I_{x'_C y'_C}$ відносно нових повернутих центральних осей, використовуючи формули (8), котрі з урахуванням наших позначень запишуться:

$$\left. \begin{aligned} I_{x'_C} &= I_{x_C} \cos^2 \beta + I_{y_C} \sin^2 \beta - I_{x_C y_C} \sin 2\beta, \\ I_{y'_C} &= I_{x_C} \sin^2 \beta + I_{y_C} \cos^2 \beta + I_{x_C y_C} \sin 2\beta, \\ I_{x'_C y'_C} &= I_{x_C y_C} \cos 2\beta - \frac{1}{2} (I_{y_C} - I_{x_C}) \sin 2\beta \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

де $I_{x'_C}, I_{y'_C}, I_{x'_C y'_C}$ – моменти інерції, визначені в попередньому кроці.

Попередню обробку значень геометричних характеристик кожної з елементарних фігур зручно проводити в табличному вигляді. Для цього пропонується форма табл. 1.3 або табл. 1.4, які представлені нижче. Таблиці 1.3 та 1.4 – це одне і те ж, але різної форми. Під час виконання розрахунків необхідно обрати одну з форм: або табл. 1.3, або табл. 1.4.

Таблиця 1.3. Попередньо оброблені значення геометричних характеристик елементарних фігур

№ з/п	Найменування величини	Позначення	Значення	
			I	II
1	Номер фігури	№ фігури	I	II
2	Площа, м ²	$F^{\text{дов}}$	...	...
3	Центральний осьовий момент інерції відносно осі x_C , м ⁴ , з довідника	$I_{x_C}^{\text{дов}}$		
4	Центральний осьовий момент інерції відносно осі y_C , м ⁴ , з довідника	$I_{y_C}^{\text{дов}}$		
5	Центральний відцентровий момент інерції, м ⁴ , з довідника	$I_{x_C y_C}^{\text{дов}}$		
6	Кут нахилу центральних осей фігури до осей порівняння, рад	β		
7	Статус фігури	s		
8	Кількість переворотів	n		
9	Площа, м ² , з урахуванням статусу	$F = s \cdot F^{\text{дов}}$		
10	Центральний осьовий момент інерції відносно осі x_C , м ⁴ , з урахуванням статусу s	$I_{x_C} = s \cdot I_{x_C}^{\text{дов}}$		
11	Центральний осьовий момент інерції відносно осі y_C , м ⁴ , з урахуванням статусу	$I_{y_C} = s \cdot I_{y_C}^{\text{дов}}$		

Продовж. табл. 1.3

№ з/п	Найменування величини	Позначення	Значення	
12	Центральний відцентровий момент інерції, м ⁴ , з урахуванням статусу та кількості переворотів	$I_{x_c y_c} = s \cdot (-1)^n \cdot I_{x_c y_c}^{\text{дов}}$		
13	Центральний осьовий момент інерції відносно осі x_c , м ⁴ , з урахуванням повороту осей на кут β	$I_{x'_c} = I_{x_c} \cos^2 \beta + I_{y_c} \sin^2 \beta - I_{x_c y_c} \sin 2\beta$		
14	Центральний осьовий момент інерції відносно осі y_c , м ⁴ , з урахуванням повороту осей на кут β	$I_{y'_c} = I_{x_c} \sin^2 \beta + I_{y_c} \cos^2 \beta + I_{x_c y_c} \sin 2\beta$		
15	Центральний відцентровий момент інерції, м ⁴ , з урахуванням повороту осей на кут β	$I_{x'_c y'_c} = I_{x_c y_c} \cos 2\beta - \frac{1}{2}(I_{y_c} - I_{x_c}) \sin 2\beta$		

9. Площа всієї складеної фігури F^B визначається залежністю

$$F^B = \Sigma_1 = \sum_{i=1}^{i=N} F_i, \quad (15)$$

де N – кількість елементарних фігур; F_i – площа i -ї елементарної фігури, яка визначається за останньою формулою (13).

10. Обчислити статичні моменти всієї складеної фігури відносно осей порівняння

$$S_x^B = \Sigma_2 = \sum_{i=1}^{i=N} y_i \cdot F_i; \quad S_y^B = \Sigma_3 = \sum_{i=1}^{i=N} x_i \cdot F_i, \quad (16)$$

де x_i, y_i – координати центра мас i -ї елементарної фігури відносно осей порівняння.

Таблиця 1.4. Попередньо оброблені значення геометричних характеристик елементарних фігур (інша форма табл. 1.3)

№ фігури	Площа $F^{дов}$, см ² та центральні (власні) моменти інерції з довідника, см ⁴				Кут нахилу власних осей β	Статус s	Кількість переворотів n	Площа F та центральні (власні) моменти інерції з урахуванням статусу s та кількості переворотів n (формули (13))				Центральні (власні) моменти інерції з урахуванням повороту своїх власних осей (формули (14))			
	$F^{дов}$	$I_{x_c}^{дов}$	$I_{y_c}^{дов}$	$I_{x_c y_c}^{дов}$				F	I_{x_c}	I_{y_c}	$I_{x_c y_c}$	$I_{x'_c}$	$I_{y'_c}$	$I_{x'_c y'_c}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
I	...														
II	...														

11. Обчислити положення центра мас усієї фігури $G(x_G, y_G)$ відносно осей порівняння

$$x_G = \frac{S_y^B}{F^B} = \frac{\Sigma_3}{\Sigma_1}, \quad y_G = \frac{S_x^B}{F^B} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}. \quad (17)$$

12. Обчислити суми переносних та власних моментів інерції

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \Sigma_4 = \sum_{i=1}^{i=N} (y_i^2 \cdot F_i + I_{x'_C}^{(i)}); \\ I_y &= \Sigma_5 = \sum_{i=1}^{i=N} (x_i^2 \cdot F_i + I_{y'_C}^{(i)}); \\ I_{xy} &= \Sigma_6 = \sum_{i=1}^{i=N} (x_i y_i \cdot F_i + I_{x'_C y'_C}^{(i)}) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

де $I_{x'_C}^{(i)}, I_{y'_C}^{(i)}, I_{x'_C y'_C}^{(i)}$ – власні моменти інерції визначені за (14), тобто вже після повороту координатних осей.

13. Обчислити значення центральних моментів інерції $I_{x_G}, I_{y_G}, I_{x_G y_G}$ відносно центральних осей, що проходять через ЦМ G усієї фігури та паралельні осям порівняння

$$\left. \begin{aligned} I_{x_G} &= \Sigma_4 - y_G^2 \Sigma_1, \\ I_{y_G} &= \Sigma_5 - x_G^2 \Sigma_1, \\ I_{x_G y_G} &= \Sigma_6 - x_G y_G \Sigma_1 \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

14. Обчислити головні центральні моменти інерції I_u, I_v за формулою (11), які з урахуванням прийнятих тут позначень запишуться у вигляді

$$\left. \begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left((I_{x_G} + I_{y_G}) \pm \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} \right), \\ I_v &= \frac{1}{2} \left((I_{x_G} + I_{y_G}) \mp \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

де верхні знаки потрібно брати при $I_{x_G} > I_{y_G}$, а нижні – при $I_{x_G} < I_{y_G}$.

15. За потреби обчислити допоміжні величини: нахил головних центральних осей до центральних за (7), осьові моменти опору, радіуси інерції [1, 2, 3, 6, 7, 8] тощо.

Безпосередній розрахунок геометричних характеристик можна виконувати в табличному вигляді, наприклад, у формі табл. 1.5. Дані для табл. 1.5 беруться з табл. 1.3 (або 1.4) наступним чином:

Параметри табл. 1.5	Інші таблиці
Площа F , колона 2	← з табл. 1.3, рядок 9; (з табл. 1.4, колона 9)
Власний момент інерції $I_{x'_C}$, колона 8	← з табл. 1.3, рядок 13; (з табл. 1.4, колона 13)
Власний момент інерції $I_{y'_C}$, колона 10	← з табл. 1.3, рядок 14; (з табл. 1.4, колона 14)
Власний момент інерції $I_{x'_C y'_C}$, колона 12	← з табл. 1.3, рядок 15; (з табл. 1.4, колона 15)

Якщо на одному ескізі графічної інформації доволі багато і це ускладнює сприйняття інформації на ескізі, то можна створити декілька ескізів, на одному з них, наприклад, показавши розміри і центри мас, на іншому – власні осі кожної з простих фігур та іншу інформацію.

Таблиця 1.5. Розрахунок геометричних характеристик складеної фігури

№ фігури	Площа F , см ²	Відстані від ЦМ фігур до осей порівняння, см		Статичні моменти, см ³		Переносні та власні моменти інерції, см ⁴					
						I_x		I_y		I_{xy}	
		x	y	$S_x = y \cdot F$	$S_y = x \cdot F$	$y^2 \cdot F$	I_{x_C}	$x^2 \cdot F$	I_{y_C}	$xy \cdot F$	$I_{x_C y_C}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	...										
II	...										
Σ	$\Sigma_1 =$			$\Sigma_2 =$	$\Sigma_3 =$	$\Sigma_4 =$		$\Sigma_5 =$		$\Sigma_6 =$	

1.2.3. Узгодження орієнтації осей

Якщо орієнтація власних осей будь-якої елементарної фігури не співпадає з орієнтацією осей порівняння, то необхідно змінити орієнтацію власних осей елементарної фігури (див. розділ 1.1.3. «Зміна орієнтації осей»). Таким чином орієнтація осей порівняння та власних осей усіх елементарних фігур повинна бути однаковою.

1.2.4. Урахування просторового положення елементарної фігури

Елементарна фігура як частина складеної фігури займає довільне просторове положення, яке загалом є відмінним від її положення в довіднику. Досягнення дійсного просторового положення цією елементарною фігурою від положення в довіднику можливо досягти шляхом *повороту* та *перевороту*. Якщо шляхом тільки повороту неможливо досягти дійсного просторового положення, то застосовується переворот фігури (див. розділ 1.1.4. «Переворот фігури») з наступним (якщо це потрібно) знову поворотом.

Пояснимо необхідність переворотів на наступному прикладі, використовуючи рис. 1.5.

Нехай задана декотра складена фігура, показана на рис. 1.5,*а*, з осями порівняння xuO . Для несиметричного кутника визначимо необхідність перевороту і одночасно визначимо положення його центральних осей $x_c u_c C$ по відношенню до осей порівняння xuO , так як це буде потрібно в подальшому для визначення кута нахилу центральних осей $x_c u_c C$ кутника до осей порівняння xuO . Положення кутника в довіднику є таким, як це показано на рис. 1.5,*б*. Шляхом повороту кутника рис. 1.5,*б*, узятого з довідника, неможливо досягнути його реального положення на рис. 1.5,*а*. Тому потрібно виконати переворот кутника в порівнянні з довідником, як це показано на рис. 1.5,*в*. Тоді шляхом повороту перевернутого кутника (рис. 1.5,*в*) можливо дійти до реального положення цього кут-

ника (рис. 1.5,*а*). Центральні осі кутника після цього перевороту вже будуть мати вигляд, як це показано на рис. 1.5,*б, г*. Орієнтація центральних осей фігури під час перевороту не змінюється.

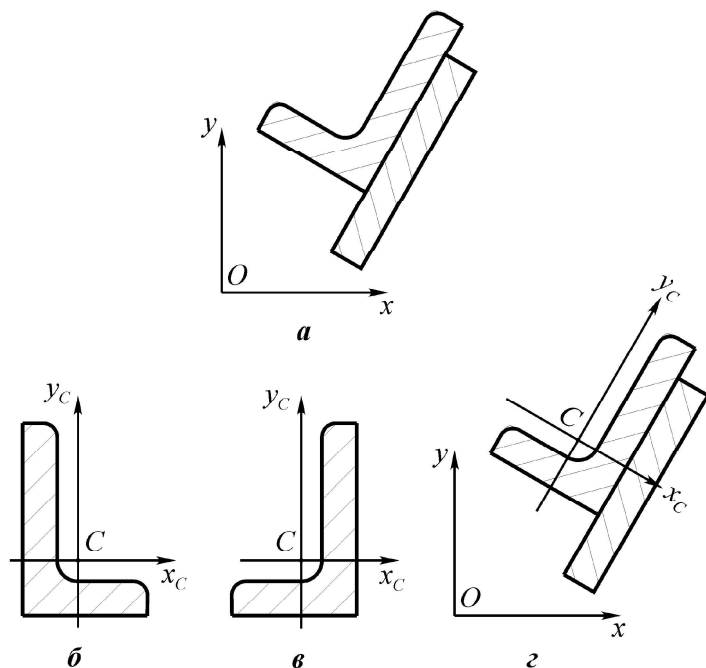


Рис. 1.5. Реалізація перевороту плоскої фігури

Необхідно відмітити, що під час **повороту** фігури, маючи намір досягнути її реального положення, її власні осі жорстко пов'язані з фігурою і повертаються разом з фігурою, як це і показано на рис. 1.5,*б, г*, під час повороту від стану на рис. 1.5,*а*, до стану на рис. 1.5,*г*.

Одного перевороту завжди достатньо, щоб потім шляхом повороту плоскої фігури досягнути реального її положення. Однак можна застосовувати декілька переворотів, щоб досягти реального положення фігури. На рис. 1.6 показано, як зі стану рис. 1.6,*а* можна досягнути стану рис. 1.6,*б* двома переворотами.

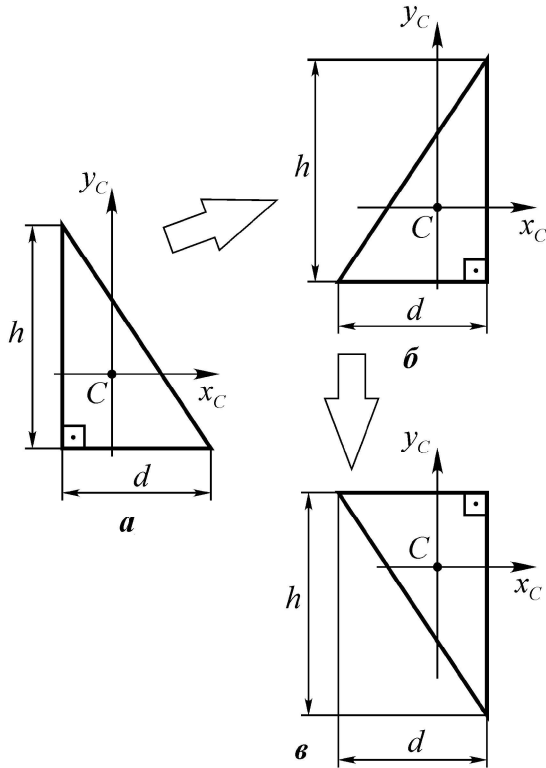


Рис. 1.6. Декілька переворотів

Також стану рис. 1.6,в можна досягнути поворотом фігури. Різниця буде в тому, що під час перевороту орієнтація осей не змінюється, як це і показано на рис. 1.6,в, а під час повороту осі жорстко зв'язані з фігурою і повертаються разом з нею. Який шлях обирати – це справа розрахувача.

Наявність переворотів та їх кількість необхідно відмітити.

1.2.5. Кут нахилу β власних осей елементарної фігури до осей порівняння

Одним з етапів розрахунку геометричних характеристик складених фігур є поворот власних осей усіх елементарних фі-

гур на кут β , щоб усі вони стали паралельні осям порівняння. Згаданий вище кут нахилу β власних осей елементарної фігури до осей порівняння визначається наступним чином: суміщаємо початки центральних осей елементарної фігури й осей порівняння в одній точці та вимірюємо кут β між відповідними осями (тобто між x і x_c або y і y_c) за найкоротшим шляхом, а також визначаємо знак цього кута за правилом нижче.

Якщо осі порівняння праві, то знак кута β визначається наступним чином: якщо **напря́м** повороту за **найкоротшим шляхом** від відповідної власної осі фігури до відповідної осі порівняння проти годинникової стрілки, то знак кута β – «плюс», якщо за годинниковою, то знак β – «мінус» (рис. 1.7, де $xуA$ – осі порівняння; $x_cу_cA$ – власні осі фігури).

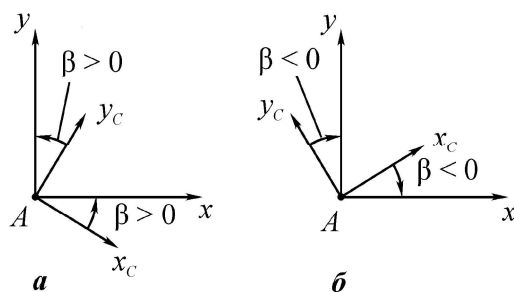


Рис. 1.7. До правила визначення кута між власними осями елементарної фігури та осями порівняння для правої координатної системи:

a – додатній напрям β ; *б* – від'ємний напрям β

Якщо осі порівняння ліві, то правило для визначення знака кута β протилежне в порівнянні з правою координатною системою.

1.3. Приклад

Розрахувати геометричні характеристики плоскої складеної фігури на рис. 1.8, де розміри в мм.

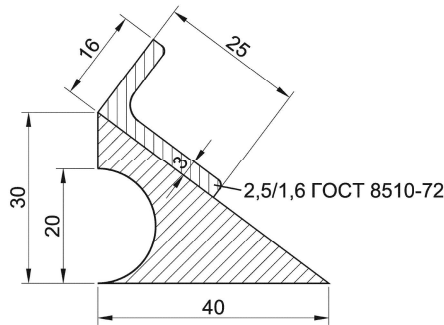


Рис. 1.8. Задана фігура

Рішення. Розрахунок геометричних характеристик виконуємо згідно з алгоритмом розділу 1.2.2. Ескіз у масштабі показано на рис. 1.9 (розміри в мм), де пронумеровані елементарні фігури, визначені координати ЦМ кожної з них та показані власні осі кожної з елементарних фігур.

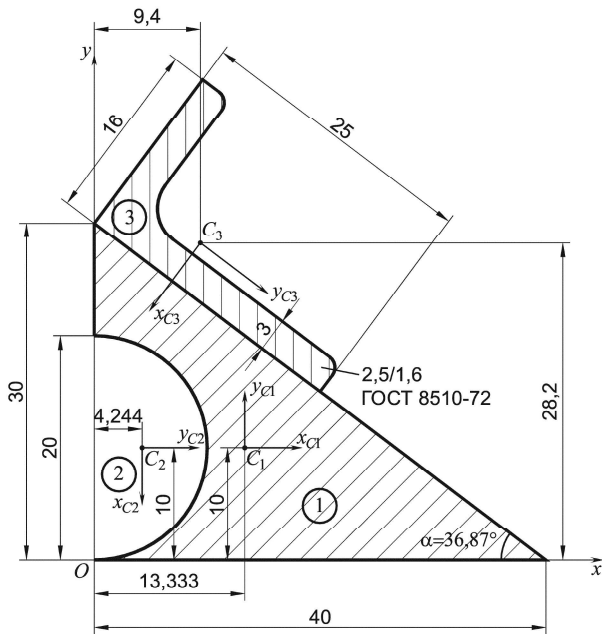
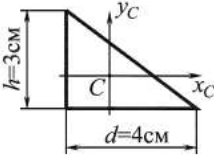
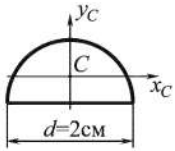


Рис. 1.9. Елементарні фігури та положення їхніх ЦМ

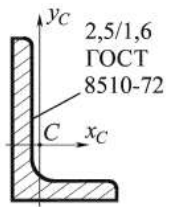
Номера елементарних фігур обведено окружностями. У нашому випадку перша фігура – це прямокутний трикутник з розмірами катетів 30×40 мм; друга фігура – це півколо, яке є пустотою з діаметром 20 мм; третя фігура – це сортаментний прокат: кутник нерівнобічний 2,5/1,6 ГОСТ 8510-72, який повністю відповідає нерівнополічному кутнику 25×16×3 ДСТУ 8769:2018. У табл. 1.6 подано попередні вихідні дані.

Геометричні характеристики для перших двох фігур були взяті з довідників [6, 7], а для третьої фігури – з таблиці сортаменту. Кутник потрібно було один раз перевернути, а потім шляхом повороту досягти того положення, яке він займає на рис. 1.9.

Таблиця 1.6. Попередні вихідні дані для елементарних фігур

№ фігури	Ескіз фігури з довідника	Попередні вихідні дані для кожної простої фігури
1		$F^{\text{дов}} = \frac{1}{2} dh = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 = 6 \text{ см}^2$ $I_{x_C}^{\text{дов}} = \frac{dh^3}{36} = \frac{4 \cdot 3^3}{36} = 3 \text{ см}^4$ $I_{y_C}^{\text{дов}} = \frac{d^3 h}{36} = \frac{4^3 \cdot 3}{36} = 5, (3) \text{ см}^4$ $I_{x_C y_C}^{\text{дов}} = -\frac{d^2 h^2}{72} = -\frac{4^2 \cdot 3^2}{72} = -2 \text{ см}^4$ $x = 1, (3) \text{ см}; y = 1 \text{ см}; \beta = 0; s = 1; n = 0$
2		$F^{\text{дов}} = \frac{\pi \cdot d^2}{8} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{8} = 1,5708 \text{ см}^2$ $I_{x_C}^{\text{дов}} = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) = \frac{2^4}{16} \left(\frac{3,14}{8} - \frac{8}{9 \cdot 3,14} \right) = 0,1098 \text{ см}^4$ $I_{y_C}^{\text{дов}} = \frac{\pi \cdot d^4}{128} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{128} = 0,3927 \text{ см}^4$ $I_{x_C y_C}^{\text{дов}} = 0$ $x = 0,424 \text{ см}; y = 1 \text{ см}; \beta = 1,5708 \text{ рад};$ $s = -1; n = 0$

Продовж. табл. 1.6

№ фігури	Ескіз фігури з довідника	Попередні вихідні дані для кожної простої фігури
3		$F^{\text{дов}} = 1,16 \text{ см}^2$ $I_{x_C}^{\text{дов}} = 0,70 \text{ см}^4$ $I_{y_C}^{\text{дов}} = 0,22 \text{ см}^4$ $I_{x_C y_C}^{\text{дов}} = \frac{1}{2} (I_{y_C} - I_{x_C}) \operatorname{tg} 2\alpha =$ $= \frac{1}{2} (0,22 - 0,70) \cdot 0,926 = -0,2222 \text{ см}^4$ $x = 0,94 \text{ см}; y = 2,82 \text{ см}; \beta = 2,2143 \text{ рад};$ $s = 1; n = 1$

У табл. 1.7 подано обробку даних з табл. 1.6. Обчислення в табл. 1.7 проводилися за формулами

$$\left. \begin{aligned}
 I_{x_C} &= s \cdot I_{x_C}^{\text{дов}}, \\
 I_{y_C} &= s \cdot I_{y_C}^{\text{дов}}, \\
 I_{x_C y_C} &= s \cdot (-1)^n \cdot I_{x_C y_C}^{\text{дов}}, \\
 F &= s \cdot F^{\text{дов}}, \\
 I_{x'_C} &= I_{x_C} \cdot \cos^2 \beta + I_{y_C} \cdot \sin^2 \beta - I_{x_C y_C} \cdot \sin 2\beta, \\
 I_{y'_C} &= I_{x_C} \cdot \sin^2 \beta + I_{y_C} \cdot \cos^2 \beta + I_{x_C y_C} \cdot \sin 2\beta, \\
 I_{x'_C y'_C} &= I_{x_C y_C} \cdot \cos 2\beta - \frac{1}{2} (I_{y_C} - I_{x_C}) \sin 2\beta
 \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

У табл. 1.8 представлено безпосередній розрахунок геометричних характеристик складеної фігури.

Таблиця 1.7. Попередньо оброблені значення геометричних характеристик елементарних фігур

№ фігури	Площа $F_{\text{дов}}$, см^2 та центральні (власні) моменти інерції з довідника, см^4			Кут нахилу власних осей, рад	Статус s	Кількість переворотів n	Площа F та центральні (власні) моменти інерції, см^4 , з урахуванням статусу s та кількості переворотів n (формули 13)					Центральні (власні) моменти інерції, см^4 , з урахуванням повороту своїх власних осей (формули 14)		
	$F_{\text{дов}}$	$I_{x_c}^{\text{дов}}$	$I_{y_c}^{\text{дов}}$	$I_{x_c y_c}^{\text{дов}}$								$I_{x'_c}$	$I_{y'_c}$	$I_{x'_c y'_c}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	6	3	5,3333	-2	0	1	0	6	3	5,3333	-2	3	5,3333	-2
2	1,5708	0,1098	0,3927	0	1,5708	-1	0	-1,5708	-0,1098	-0,3927	0	-0,3927	-0,1098	0
3	1,16	0,7	0,22	-0,2222	2,2143	1	1	1,16	0,7	0,22	0,2222	0,6061	0,3139	-0,2926

Таблиця 1.8. Розрахунок геометричних характеристик складеної фігури

№ фігури	Площа F , см ²	Відстані від ЦМ фігур до осей порівняння, см	Статичні моменти, см ³		Переносні та власні моменти інерції, см ⁴			
			$S_x = y \cdot F$	$S_y = x \cdot F$	I_x		I_y	
		x	y	$y^2 \cdot F$	$x^2 \cdot F$	$I_{x'_C}$	$x^2 \cdot F$	$I_{y'_C}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	1,333	1	6	7,998	6	3	10
2	-1,5708	0,4244	1	-1,5708	-0,6667	-1,5708	-0,3927	5,3333
3	1,16	0,94	2,82	3,2712	1,0904	9,2248	0,6061	-0,1098
Σ	$\Sigma_1 =$		$\Sigma_2 =$	$\Sigma_3 =$	$\Sigma_4 =$	$\Sigma_5 =$	$\Sigma_6 =$	
	5,5892		7,7004	8,4217	16,8674	16,9408	8,1136	

Площа всієї складеної фігури становить

$$F = \Sigma_1 = 5,5892 \text{ см}^2.$$

Положення центра мас усієї фігури відносно осей порівняння:

$$x_G = \frac{\Sigma_3}{\Sigma_1} = \frac{8,4217}{5,5892} = 1,5068 \text{ см}; \quad y_G = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} = \frac{7,7004}{5,5892} = 1,3777 \text{ см}.$$

Значення центральних моментів інерції всієї фігури відносно центральних осей $x_G y_G$, паралельних осям порівняння

$$I_{x_G} = \Sigma_4 - y_G^2 \Sigma_1 = 16,8674 - 1,3777^2 \cdot 5,5892 = 6,2583 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_G} = \Sigma_5 - x_G^2 \Sigma_1 = 16,9408 - 1,5068^2 \cdot 5,5892 = 4,2510 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_G y_G} = \Sigma_6 - x_G y_G \Sigma_1 = 8,1136 - 1,5068 \cdot 1,3777 \cdot 5,5892 = -3,4892 \text{ см}^4.$$

Кут нахилу α_0 головних центральних осей uvG до центральних осей $x_G y_G$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}} = \frac{2 \cdot (-3,4892)}{4,2510 - 6,2583} = 3,4765;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(3,4765) = 1,2907 \text{ рад} \approx 74^\circ.$$

Центральні осі $x_G y_G$ необхідно повернути проти годинникової стрілки на $1,2907$ рад (74°), щоб вони стали головними центральними осями uvG (рис. 1.10, де розміри в мм).

Так як $I_{x_G} > I_{y_G}$, то у (20) треба взяти верхні знаки:

$$I_u = \frac{1}{2} \left((I_{x_G} + I_{y_G}) + \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} \right) = 8,8854 \text{ см}^4;$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left((I_{x_G} + I_{y_G}) - \sqrt{(I_{x_G} - I_{y_G})^2 + 4I_{x_G y_G}^2} \right) = 1,6240 \text{ см}^4.$$

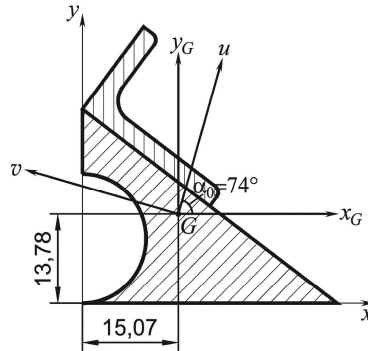


Рис. 1.10. Положення головних центральних осей

Головні радіуси інерції

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{\Sigma_1}} = \sqrt{\frac{8,8854}{5,5892}} = 1,26 \text{ см}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{\Sigma_1}} = \sqrt{\frac{1,6240}{5,5892}} = 0,54 \text{ см}.$$

Відповідь: основні геометричні характеристики складеної фігури на рис. 1.8 становлять: площа $F = 5,5892 \text{ см}^2$; головні центральні моменти інерції $I_u = 8,8854 \text{ см}^4$; $I_v = 1,6240 \text{ см}^4$; положення головних центральних осей та центра мас G зображено на рис. 1.10.

2. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ

2.1. Класичний метод перерізів

Під час використання класичного методу перерізів [1, 2, 3, 6, 7, 8] увесь розрахунок ведеться у глобальній нерухомій системі координат. Початок координат фіксується один раз і не зміщується впродовж розрахунку. Усі закони внутрішніх зусиль та параметрів деформування записані у глобальній системі координат.

Під час розгляду розтягу-стиску або кручення дії отриманих двох уявних частин одна на одну замінюються реакціями внутрішніх зусиль, як це показано на рис. 2.1, де N – осьові зусилля; M – крутні моменти.

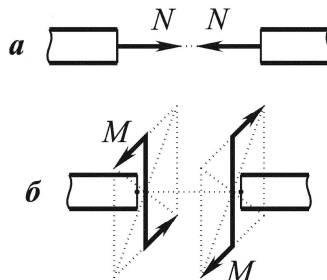


Рис. 2.1. Додатні напрями або правила знаків внутрішніх зусиль:
 a – для розтягу-стиску N ; b – для кручення M

2.2. Визначення границь та довжин ділянок

Усі пояснення будемо вести для розтягу-стиску, які можуть бути розповсюджені й узагальнені для решти видів деформування.

Границі ділянок проводять через наступне:

- 1) початок та кінець стержня;
- 2) зосереджені зусилля;
- 3) початок та кінець будь-якого розподіленого закону;
- 4) початок та кінець певного закону зміни геометрії поперечного перерізу;
- 5) «скачки» геометрії поперечного перерізу;
- 6) перехід від одного матеріалу до іншого.

Хоча п'яте правило є надлишковим і витікає з четвертого правила.

На рис. 2.2 подано стержень у загальному випадку, де ділянки виділені за всіма вказаними правилами. На цьому ж рисунку показано положення границь ділянок (відстані d_i) відносно глобальної координатної системи Ox у рамках класичного методу перерізів.

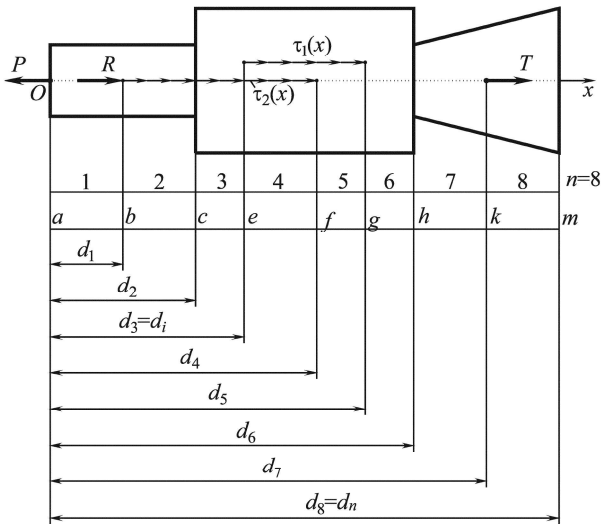


Рис. 2.2. Виділення ділянок

На рис. 2.2 $\tau_{1,2}(x)$ – це деякі розподілені закони (осьового навантаження, температурного поля тощо). Маємо $n = 8$ ділянок. Лінії $a, b, c, e, f, g, h, k, m$ є границями ділянок. Коментуючи виділення ділянок, можна сказати, що деякі границі ділянок можуть бути виділені за декількома правилами одночасно. Наприклад, лінія a виділена за першим та другим правилами одночасно. Лінія b – за другим та третім правилами одночасно тощо. Під час розрахунку певної i -ї ділянки координата x визначається між d_{i-1} та d_i ($d_0 = 0$). Наприклад, перша ділянка визначена в межах $0 \leq x < d_1$; друга ділянка визначена в межах $d_1 \leq x < d_2$; третя – $d_2 \leq x < d_3$ і т. д.

Розглядаючи кожну з ділянок, ми (уявно) розділюємо тіло (стержень) у межах цієї ділянки на дві частини, а дії розділених частин одна на одну замінюємо внутрішніми зусиллями взаємодії між цими частинами (осьові зусилля N). На рис. 2.3 показано розрахункові схеми для визначення N для другої ділянки. Лінія розділу лежить у межах $d_1 \leq x < d_2$.

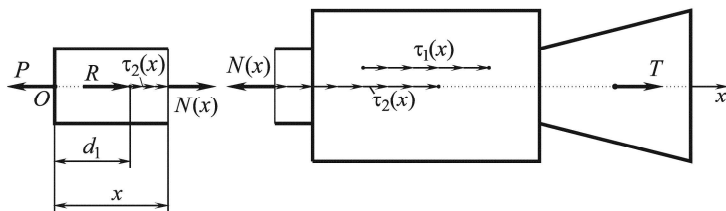


Рис. 2.3. Механізм розділення для другої ділянки

Під час установа закону внутрішніх осьових сил $N(x)$ (рис. 2.3) з рівнянь рівноваги можна розглядати як праву, так і ліву частини. Результати до того ж отримуються однаковими.

Під час виділення ділянок рекомендується через середину довжини ділянки провести лінію розподілу і позначити там внутрішнє зусилля згідно з правилом знаків, як це показано на рис. 2.4, де номери внутрішніх осьових зусиль N відповідають номерам ділянок. На рис. 2.4 реалізовано варіант, коли ми поступово йдемо зліва направо в розрахунках ділянок, кожен раз розглядаючи ліву частину, а тому всі осьові зусилля направлені в один бік за правилом знаків на рис. 2.1, 2.3 для лівої частини.

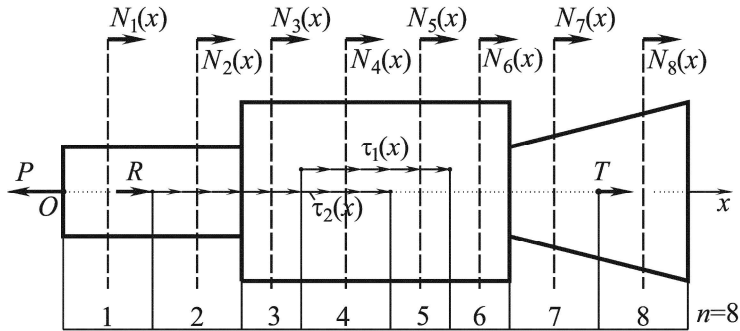


Рис. 2.4. Рекомендація для складання розрахункових схем для методу перерізів

На рис. 2.5 показано перші три схеми відповідно для першої, другої та третьої ділянок, які створені на базі рис. 2.4, під час визначення внутрішніх зусиль N .

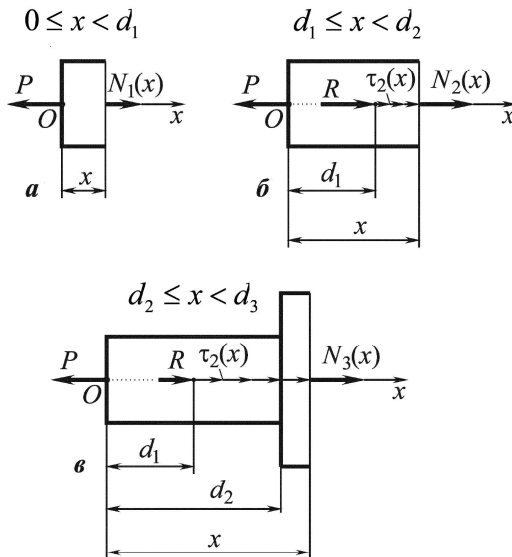


Рис. 2.5. Розрахункові схеми для визначення осевих внутрішніх зусиль N згідно з класичним методом перерізів для перших трьох ділянок:

a – перша ділянка; b – друга ділянка; v – третя ділянка

Складаючи рівняння рівноваги сил у проєкції на вісь x , визначаємо закони осьових (внутрішніх) сил $N_{1,2,3}$ (рис. 2.5). Кожен з цих законів буде записаний у глобальних координатах Ox .

2.3. Кінематичні параметри

Під час розтягу-стиску для i -ї ділянки, осьові деформації ε_i та переміщення u_i знаходяться за наступними формулами:

$$\varepsilon_i(x) = \frac{N_i(x)}{EF_i(x)}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

$$u_i(x) = u_{i-1}(d_{i-1}) + \int_{d_{i-1}}^x \varepsilon_i(s) ds; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$\varepsilon_i(s) = \varepsilon_i(x),$$

де i – індекс розглядуваної ділянки; $i-1$ – індекс попередньої ділянки; d_{i-1} – довжина попередньої ділянки; n – кількість ділянок; $N_i(x)$ – осьові зусилля внутрішніх сил; $F_i(x)$ – площа поперечного перерізу; E – модуль пружності під час розтягу.

Пояснюючи запис $\varepsilon_i(s) = \varepsilon_i(x)$ у формулі (2) і в наступних подібних формулах, треба відмітити, що строго математично не дозволяється, щоб позначення однієї із границь інтегрування співпадало з позначенням змінної підінтегрального виразу. Вираз $\varepsilon_i(s)$ – той самий, що і закон $\varepsilon_i(x)$, де замість змінної x застосована s . Замість s можна застосовувати будь-який інший символ, але такий, щоб він не співпадав з позначеннями границь інтегрування.

При $i = 1$ у (2) з'являється величина u_0 , яка визначається з кінематичних умов уже після того, як записані всі вирази для u .

Під час кручення для i -ї ділянки погонний кут закручування θ_i , рад/м та кути повороту φ_i , рад знаходяться за наступними формулами:

$$\theta_i(x) = \frac{M_i(x)}{GI_{pi}(x)}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3)$$

$$\varphi_i(x) = \varphi_{i-1}(d_{i-1}) + \int_{d_{i-1}}^x \theta_i(s) ds; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (4)$$

$$\theta_i(s) = \theta_i(x),$$

де i – індекс розглядуваної ділянки; $i-1$ – індекс попередньої ділянки; d_{i-1} – довжина попередньої ділянки; n – кількість ділянок; $M_i(x)$ – крутні моменти внутрішніх сил; $I_{pi}(x)$ – полярний момент інерції; $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль зсуву; μ – коефіцієнт Пуассона.

При $i = 1$ у (4) з'являється величина φ_0 , яка визначається з кінематичних умов уже після того, як записані всі вирази для φ .

2.4. Урахування розподіленого навантаження

По-перше, треба зазначити, що закони розподілених навантажень (осьових, силових або моментних) за замовчуванням вважаються заданими відносно глобальної координатної системи. Якщо для завдання розподіленого навантаження використовується якась інша координатна система, відмінна глобальної, то про це повинно бути повідомлено. Перед початком розрахунку всі розподілені закони повинні бути записані відносно глобальної координатної системи, яка використовується для розрахунку.

Є два випадки врахування розподіленого навантаження. У першому випадку розподілений закон перебуває в межах ділянки, що розглядається (рис. 2.6,*а*). У другому – у попередніх ділянках (рис. 2.6,*б*).

Якщо закон $\tau(x)$ розподіленого осьового навантаження знаходиться в межах розглядуваної ділянки (рис. 2.6,*а*), то в рівняння рівноваги включається наступна складова $T(x)$ (функція), викликана цим розподіленим навантаженням,

$$T(x) = \int_a^x \tau(s) ds; \quad \tau(s) = \tau(x), \quad (5)$$

де закон $\tau(s)$ у формулі (5) такий самий, як і закон $\tau(x)$, де символ x замінено на s .

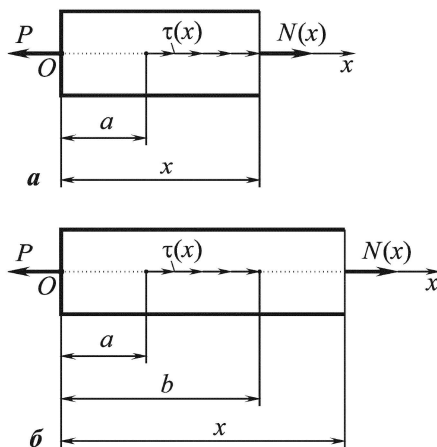


Рис. 2.6. Місцеположення розподілених законів:
a – розподілений закон у розглядуваній ділянці;
б – розподілений закон у попередніх ділянках

Рівняння рівноваги для схеми на рис. 2.6,**a** з використанням (5) запишуться у вигляді

$$\sum FX = 0 : -P + T + N(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -P + \int_a^x \tau(s) ds + N(x) = 0,$$

де $\sum FX$ – сума всіх сил у проєкції на ось x .

Якщо закон $\tau(x)$ розподіленого осьового навантаження знаходиться в попередніх ділянках (рис. 2.6,**б**), то в рівняння рівноваги включається наступна складова T (значення), викликана цим розподіленим навантаженням,

$$T = \int_a^b \tau(x) dx. \quad (6)$$

Рівняння рівноваги для схеми на рис. 2.6,**б** з використанням (6) запишуться у вигляді

$$\sum FX = 0 : -P + T + N(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -P + \int_a^b \tau(x) dx + N(x) = 0.$$

Аналогічні пояснення для розподіленого крутного моментного навантаження. Загалом для будь-яких розподілених законів (наприклад, для розподіленого температурного поля) границі інтегрування такі ж як у формулах (5), (6) для випадків на рис. 2.6,*а* та 2.6,*б*.

2.5. Перевірка епюри за скачками

Епюри внутрішніх зусиль можна перевіряти за так званими «скачками».

Скачок – це різка зміна значення внутрішнього зусилля в місці прикладення зовнішніх зосереджених сил. Типові приклади скачків показані на рис. 2.7, де позицією 1 позначено базову лінію.

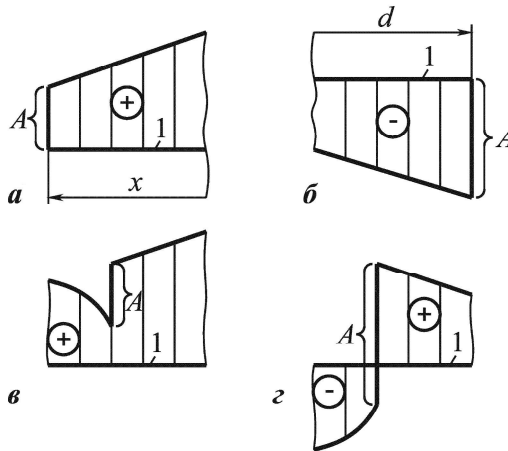


Рис. 2.7. Скачки епюр силових факторів:
а – на початку стержня; *б* – у кінці стержня;
в, з – усередині стержня

Значення скачка A дорівнює за модулем значенню сумарної зовнішньої зосередженої сили, прикладеної в цьому перерізі. Якщо сил у даному перерізі декілька, то сумарна зовнішня сила дорівнює сумі цих сил.

З іншими варіантами методу перерізів можна ознайомитися в [4, 5].

3. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТУПІНЧАТОГО БРУСА ПІД ЧАС ОСЬОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

3.1. Приклад А

Провести перевірку міцності ступінчастого стержня (рис. 3.1) під час осьового навантаження, виконуючи розрахунок у наступній послідовності:

1. Методом перерізів знайти закони і побудувати епюри: осьових внутрішніх сил, деформацій, напружень, переміщень.

2. Перевірити міцність стержня за допустимими напруженнями.

Матеріал сталь: сталь Ст3, $\sigma_T = 235$ МПа, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.
Відношення площ поперечних перерізів ступенів – $F_1:F_2 = 3:2$.
Діаметр 1-го ступеня – $d_1 = 15$ мм.

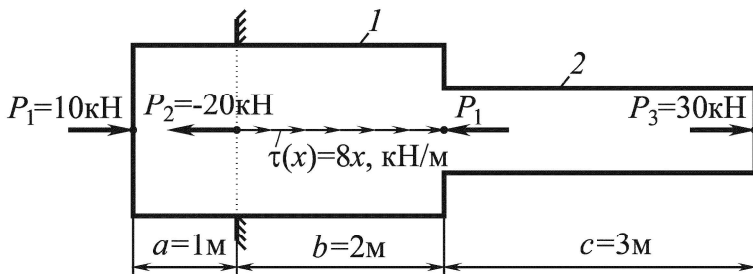


Рис. 3.1. Початкова схема

Рішення. Площа поперечного перерізу 1-го ступеня становить $F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (15 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 1,7671 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Площа поперечного перерізу 2-го ступеня – $\frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow F_2 = \frac{2}{3} F_1 \Rightarrow F_2 = \frac{2}{3} \cdot 1,7671 \cdot 10^{-4} = 1,1781 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

1. Розрахунок параметрів розтягу-стиску методом перерізів.

Відкидаємо в'язі й замінюємо систему статично еквівалентною, вводячи замість жорсткого защемлення осьову реакцію R довільного напрямку, паралельну осі x (рис. 3.2). Закон $\tau(x)$ задано відносно глобальної координатної системи Ox (рис. 3.2).

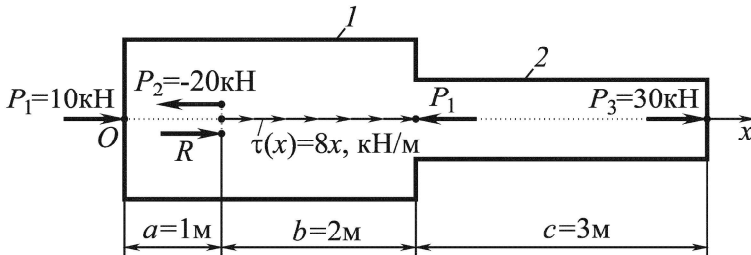


Рис. 3.2. Статично еквівалентна розрахункова схема

З рівнянь рівноваги знаходимо невідому реакцію R

$$\sum FX = 0: P_1 - P_2 + R + \int_a^{a+b} \tau(x) dx - P_1 + P_3 = 0 \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow R = -82 \text{ кН.}$$

У табл. 3.1 подано розрахунок параметрів розтягу-стиску класичним методом перерізів: закони осьових внутрішніх зусиль $N(x)$, осьових деформацій $\varepsilon(x)$, осьових переміщень $u(x)$ та нормальних напружень $\sigma(x)$.

Закон осьових внутрішніх зусиль $N_i(x)$ i -ї ділянки стержня визначається з рівнянь рівноваги для кожної з виділених ділянок.

Нормальні напруження $\sigma_i(x)$ i -ї ділянки розраховуються за формулою

$$\sigma_i(x) = \frac{N_i(x)}{F_i(x)}, \quad (2)$$

де $F_i(x)$ – площа поперечного перерізу.

Лінійні осьові деформації $\varepsilon_i(x)$ i -ї ділянки визначаються залежністю

$$\varepsilon_i(x) = \frac{N_i(x)}{EF_i(x)}, \quad (3)$$

де $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па – модуль пружності під час розтягу для сталі.

Осьові переміщення $u_i(x)$ i -ї ділянки за класичним методом перерізів знаходяться за виразом

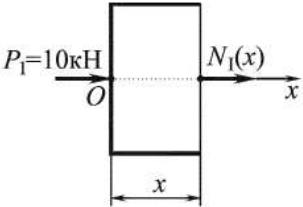
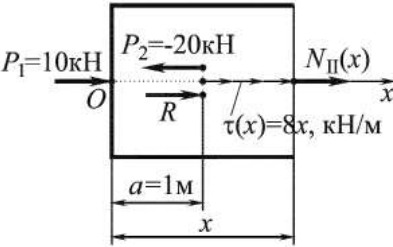
$$u_i(x) = u_{i-1}(d_{i-1}) + \int_{d_{i-1}}^x \varepsilon_i(s) ds; \quad \varepsilon_i(s) = \varepsilon_i(x), \quad (4)$$

де d_{i-1} – довжина попередньої ділянки у глобальній системі координат.

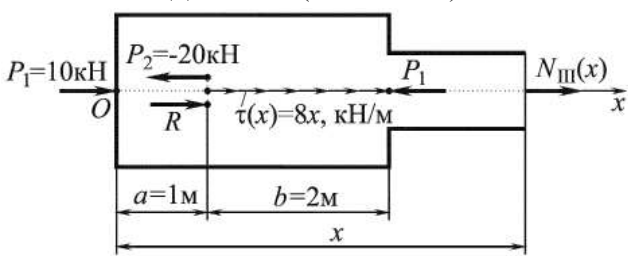
Для статично визначених систем під час визначення переміщень $u(x)$, ми вважаємо, що початок координат прикріплено до лівого торця, на якому переміщення завжди рівні нулю, незважаючи на те, що жорстке защемлення може знаходитися всередині стержня (як у нашому випадку), і переміщення там мали би бути рівні нулю. Для статично визначених систем це питання не принципове. На основі сказаного вище при $i = 1$ у формулі (4) переміщення $u_0 = 0$.

Для зручності побудови епюр та контролю результатів закони параметрів розтягу виписані в табл. 3.2.

Таблиця 3.1. Параметри розтягу-стиску за класичним методом перерізів у глобальній системі координат

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
1	Ділянка I ($0 \leq x < a$)  $\sum FX = 0 : P_I + N_I(x) = 0 \Rightarrow N_I(x) = -10 \text{ кН};$ $\varepsilon_I(x) = \frac{N_I(x)}{EF_I(x)} = F_I(x) = F_I = \frac{-10 \cdot 10^3}{EF_I} = -2,8294 \cdot 10^{-4};$ $u_I(x) = u_0 + \int_0^x \varepsilon_I(s) ds = u_0 = 0 = \int_0^x \frac{-10 \cdot 10^3}{EF_I} ds =$ $= \frac{-10 \cdot 10^3 x}{EF_I} = -2,8294 \cdot 10^{-4} x, \text{ м};$ $\sigma_I(x) = \frac{N_I(x)}{F_I(x)} = \frac{-10 \cdot 10^3}{F_I} = -5,6588 \cdot 10^7 \text{ Па}$
2	Ділянка II ($a \leq x < a + b$)  $\sum FX = 0 : P_I - P_2 + R + \int_a^x \tau(s) ds + N_{II}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{II}(x) = -4x^2 + 56, \text{ кН},$

Продовж. табл. 3.1

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
2	де $\int_a^x \tau(s) ds = \int_1^x 8s ds = \frac{8 \cdot s^2}{2} \Big _{s=1}^{s=x} = \frac{8 \cdot (x^2 - 1)}{2}, \text{ кН};$ $\varepsilon_{\text{II}}(x) = \frac{N_{\text{II}}(x)}{EF_{\text{II}}(x)} = F_{\text{II}}(x) = F_1 = \frac{(-4x^2 + 56) \cdot 10^3}{EF_1} =$ $= -1,1318 \cdot 10^{-4} x^2 + 1,5845 \cdot 10^{-3};$ $u_{\text{II}}(x) = u_1(a) + \int_a^x \varepsilon_{\text{II}}(s) ds = \frac{-10 \cdot 10^3}{EF_1} + \int_{a=1}^x \frac{(-4s^2 + 56) \cdot 10^3}{EF_1} ds =$ $= \frac{-10 \cdot 10^3}{EF_1} + \frac{-1,333 x^3 + 56x - 54,667}{EF_1} =$ $= -1,8297 \cdot 10^{-3} - 3,7726 \cdot 10^{-5} x^3 + 1,5845 \cdot 10^{-3} x, \text{ м};$ $\sigma_{\text{II}} x = \frac{N_{\text{II}}(x)}{F_{\text{II}}(x)} = \frac{(-4x^2 + 56) \cdot 10^3}{F_1} = -2,2635 \cdot 10^7 x^2 +$ $+ 3,169 \cdot 10^8, \text{ Па}$
3	Ділянка III ($a \leq x < a + b$)  $\sum FX = 0: P_1 - P_2 + R + \int_a^{a+b} \tau(x) dx - P_1 + N_{\text{III}}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{\text{III}}(x) = 30, \text{ кН},$ де $\int_a^{a+b} \tau(x) dx = \int_1^3 8x dx = \frac{8x^2}{2} \Big _{x=1}^{x=3} = \frac{8 \cdot (9 - 1)}{2} = 32 \text{ кН};$

Продовж. табл. 3.1

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
3	$\varepsilon_{III}(x) = \frac{N_{III}(x)}{EF_{III}(x)} = F_{III}(x) = F_2 = \frac{30 \cdot 10^3}{EF_2} = 1,2732 \cdot 10^{-3};$ $u_{III}(x) = u_{II}(a+b) + \int_{a+b}^x \varepsilon_{III}(s) ds = \frac{67,333 \cdot 10^3}{EF_1} + \int_{a+b=3}^x \frac{30 \cdot 10^3}{EF_2} ds =$ $= \frac{67,333 \cdot 10^3}{EF_1} + \frac{(30x-90) \cdot 10^3}{EF_2} = -1,9146 \cdot 10^{-3} + 1,2732 \cdot 10^{-3} x, \text{ м}$ $\sigma_{III}(x) = \frac{N_{III}(x)}{F_{III}(x)} = \frac{30 \cdot 10^3}{F_2} = 2,5465 \cdot 10^8, \text{ Па}$

Таблиця 3.2. Параметри розтягу-стиску за класичним методом перерізів

№ з/п	Ділянка	$N(x)$, кН	$\varepsilon(x)$	$u(x)$, м	$\sigma(x)$, МПа
1	I, $x \in [0; a = 1 \text{ м})$	-10	$-2,8294 \cdot 10^{-4}$	$-2,8294 \cdot 10^{-4} x$	-56,6
2	II, $x \in [a = 1 \text{ м}; a + b = 3 \text{ м})$	$-4x^2 + 56$	$-1318 \cdot 10^{-4} x^2 + 1,5845 \cdot 10^{-3}$	$-1,8297 \cdot 10^{-3} - 3,7726 \cdot 10^{-5} x^3 + 1,5845 \cdot 10^{-3} x$	$-22,6 x^2 + 316,9$
3	III, $x \in [a + b = 3; a + b + c = 6 \text{ м})$	30	$1,2732 \cdot 10^{-3}$	$-1,9146 \cdot 10^{-3} + 1,2732 \cdot 10^{-3} x$	254,7

На рис. 3.3 показані епюри параметрів розтягу-стиску.

Перевіряючи епюру $N(x)$, знаходимо, що скачок при $x = a = 1 \text{ м}$ становить 62 кН за модулем, який (за модулем) дорівнює результуючій зосередженій силі в цьому ж перерізі: $R - P_2 = -82 - (-20) = -62 \text{ кН}$. При $x = a + b = 3 \text{ м}$ скачок становить 10 кН, який за модулем дорівнює результуючій зосередженій силі $P_1 = 10 \text{ кН}$ у цьому ж перерізі. На лівому торці $|N(0)| = 10 \text{ кН} = P_1 = 10 \text{ кН}$. На правому торці $|N(x = 6)| = 30 \text{ кН} = P_3 = 30 \text{ кН}$.

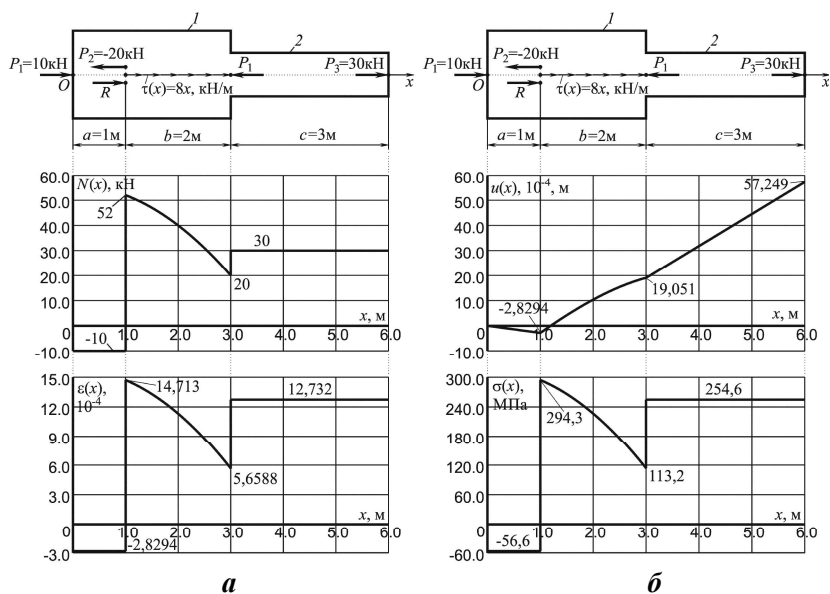


Рис. 3.3. Параметри розтягу-стиску

2. Перевірка міцності стержня.

Умова міцності стержня записується у вигляді

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma], \quad (5)$$

де $[\sigma] = \frac{\sigma_{\tau}}{n_{\tau}} = \frac{235}{1,5} \approx 160\text{ МПа}$ – допустимі напруження; $n_{\tau} = 1,4 \div 1,6$ – коефіцієнт запасу міцності по границі плинності.

$|\sigma|_{\max} = 294,3\text{ МПа}$ – найбільші напруження за модулем, що мають місце в небезпечному перерізі стержня (при $x = a = 1\text{ м}$), які можуть бути визначені із залежностей табл. 3.2, колона $\sigma(x)$, або з епюри рис. 3.3, б.

У нашому випадку умова міцності (2) не виконується, тому що

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma] \Rightarrow |\sigma|_{\max} = 294,3\text{ МПа} > [\sigma] = 160\text{ МПа}.$$

У цьому випадку треба рекомендувати застосувати матеріал з більш висою границею плинності, не менше $|\sigma|_{\max} \cdot n_T = 294,3 \cdot 1,5 = 442 \text{ МПа}$. Іншим варіантом подолання цієї проблеми може бути збільшення площі поперечного перерізу стержня. Проте це вже проєктувальний розрахунок.

3.2. Приклад Б

Підібрати діаметр призматичного стержня (рис. 3.4) з умови міцності під час осьового навантаження, виконуючи розрахунок у наступній послідовності:

1. Методом перерізів знайти закони і побудувати епюри осьових внутрішніх сил.
2. Підібрати діаметр стержня з умови міцності.
3. Для стержня з визначеним поперечним перерізом знайти закони і побудувати епюри: деформацій, напружень, переміщень.

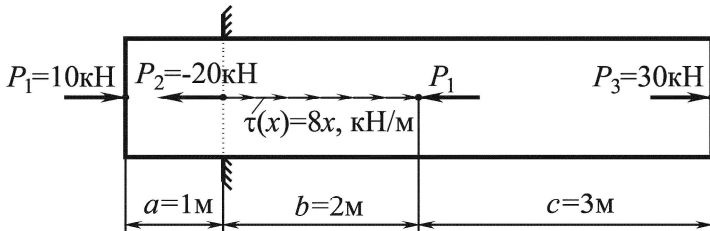


Рис. 3.4. Початкова схема

Рішення. Пропонований стержень має ті ж самі навантаження, що і у прикладі 3.1, але є одноступінчастим, а тому під час подальших пояснень будемо спиратися на приклад 3.1.

1. Визначення осьових внутрішніх зусиль.

Закони розподілу внутрішніх сил зовсім не залежать від особливостей геометрії поперечного перерізу стержня. Закони осьових внутрішніх зусиль визначені в табл. 3.2 прикладу 3.1.

2. Підбір діаметра стержня з умов міцності.

Умова міцності в небезпечному перерізі стержня записується у вигляді

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma], \quad (6)$$

де $[\sigma] = \frac{\sigma_{\tau}}{n_{\tau}} = \frac{235}{1,5} \approx 160$ МПа – допустимі напруження; $n_{\tau} = 1,4 \div 1,6$ – коефіцієнт запасу міцності по границі плинності; $|\sigma|_{\max} = \frac{|N|_{\max}}{F}$ – найбільші напруження за модулем, які визначені в небезпечному перерізі; $|N|_{\max}$ – найбільше за модулем значення осьових сил, яке визначене в небезпечному перерізі; F – площа поперечного перерізу.

Небезпечний переріз визначається в тому місці, де осьові зусилля внутрішніх сил за модулем приймають своє найбільше значення, тобто там, де $|N| = |N|_{\max}$. У нашому випадку небезпечний переріз визначений при $x = 1$ м, де $|N|_{\max} = 52$ кН.

З урахуванням наведених вище формул, мінімально необхідна площа $F_{\min}$ поперечного перерізу визначається залежністю

$$F_{\min} = \frac{|N|_{\max}}{[\sigma]}. \quad (7)$$

Обчислюючи $F_{\min}$ за (7), отримуємо

$$F_{\min} = \frac{|N|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{52 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 3,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Знаючи мінімальну площу $F_{\min}$, можна обчислити характерний розмір поперечного перерізу будь-якої форми. Мінімальний діаметр стержня становить

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{4 \cdot F_{\min}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,25 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 2,034 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 20,34 \text{ мм}.$$

Далі необхідно згідно з обраним стандартом підібрати діаметр стержня, але таким чином, щоб підібраний діаметр стержня був не меншим за розрахований $d_{\min}$.

3. Побудова епюр деформацій, напружень, переміщень.

Використовуючи закони деформацій, напружень, переміщень з табл. 3.2 прикладу 3.1, покладаючи $F_1 = F_2 = F_{\min}$, знаходимо закони та будуємо епюри цих величин.

Відповідь: необхідний мінімальний діаметр стержня з умови міцності на рис. 3.4 за заданих розмірах, зовнішнього навантаження та матеріалі становить $d_{\min} = 20,34$ мм.

3.3. Приклад В

Підібрати діаметри ступінчастого стержня (рис. 3.1) з умови міцності під час осового навантаження, виконуючи розрахунок у наступній послідовності:

1. Методом перерізів знайти закони і побудувати епюри осових внутрішніх сил.
2. Підібрати діаметри ступенів стержня з умови міцності.
3. Для ступінчастого стержня з визначеними поперечними перерізами знайти закони і побудувати епюри: деформацій, напружень, переміщень.

Матеріал сталь: сталь Ст3, $\sigma_T = 235$ МПа, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Відношення площ поперечних перерізів ступенів – $F_1:F_2 = 3:1$.

Рішення. Пропонований стержень має ті ж самі розміри і навантаження, що і в прикладі 3.1, а тому під час подальших пояснень будемо спиратися на приклад 3.1.

1. Визначення осових внутрішніх зусиль.

Закони розподілу внутрішніх сил зовсім не залежать від особливостей геометрії поперечного перерізу стержня. Закони осових внутрішніх зусиль визначені в табл. 3.2 прикладу 3.1. Особливість розрахунків ступінчастих стержнів полягає в тому, що для кожного ступеня повинні бути визначені закони внутрішніх зусиль. Тобто кожний ступінь стержня виступає як окремий стержень.

2. Підбір діаметрів ступенів з умов міцності.

Для кожного ступеня визначаємо небезпечний переріз, де значення за модулем осових внутрішніх сил $N(x)$ приймає своє найбільше значення.

У табл. 3.3 подано необхідні вихідні дані для подальшого розрахунку, де найбільші значення осьової сили $|N|_{\max}$ для кожного зі ступенів взяті з епюри $N(x)$ на рис. 3.3,*a*. Також ці $|N|_{\max}$ можуть бути визначені із законів $N(x)$, які представлені в табл. 3.2 прикладу 3.1.

Таблиця 3.3. Необхідні дані для подальшого розрахунку

№ ступеня, j	Положення небезпечного перерізу x_j , м у глобальній системі координат	Значення осьової сили за модулем $ N _{\max}$, кН у небезпечному перерізі	Площа поперечного перерізу стержня F_j виражена через решту площ
1	1	52	$F_1 = \frac{3}{1} F_2$
2	3	30	$F_2 = \frac{1}{3} F_1$

Якщо б ступенів було більше ніж 2, то в кожній ячeyці останньої колонки ми б мали список F_j , де площа поперечного перерізу j -го ступеня була би виражена через решту площ, окрім цього j -го номера. Наприклад, для 2-го ступеня за наявних 4-х ступенів, ми б мали таке: $F_2 = k_1 \cdot F_1$; $F_2 = k_2 \cdot F_3$; $F_2 = k_4 \cdot F_4$, де k – коефіцієнти, які виводяться зі співвідношень площ, що можуть бути задані, наприклад, у вигляді: $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 3:2:5:4$.

Алгоритм розрахунку ступінчастих стержнів загалом за заданих співвідношень площ можна подати наступним чином:

1. Для k -го ступеня підібрати мінімальне значення площі $F_{\min k}$ з умов міцності за формулою

$$F_{\min k} = \frac{|N|_{\max k}}{[\sigma]}, \quad (8)$$

де $|N|_{\max k}$ – найбільше значення осьової сили за модулем, яке визначається в небезпечному перерізі k -го ступеня.

2. Перевірити умову міцності решти ступенів, окрім k -го, за формулою

$$\frac{|N|_{\max j}}{F_j} \leq [\sigma], \quad j = 1, 2, \dots, s; \quad j \neq k, \quad (9)$$

де s – кількість ступенів (не плутати з кількістю ділянок методу перерізів); F_j – площі поперечних перерізів визначені через $F_{\min k}$ за заданими співвідношеннями площ.

3. Якщо під час перевірки міцності в пункті 2 якийсь стержень, наприклад, з номером m , зазнає невдачі, то необхідно повторити розрахунок з пункту 1 по 3, поклавши $k = m$. В іншому випадку необхідно йти до пункту 4.

4. Якщо в пункті 2 всі стержні проходять перевірку міцності, то розрахунок на цьому завершено. Усі значення площ поперечних перерізів F_j , отримані в пункті 2, беруться за остаточні, і за їх значеннями можна визначити характерні розміри поперечних перерізів.

Пункти 1–3 виконуються допоки не буде забезпечена міцність усіх стержнів у пункті 2. Для першої ітерації в пункті 1 можна брати $k = 1$. Площі поперечних перерізів беруться за останньою ітерацією.

Представлений алгоритм може бути застосований не тільки для розтягу-стиску, але і для всіх інших видів деформування, де завдано співвідношення значень характерних геометричних характеристик (площ, моментів інерції тощо).

Зазвичай розрахунок ступінчастих стержнів є допоміжною частиною більш комплексних розрахунків механізмів, де співвідношення площ або моментів інерції може коригуватися. Це можливо під час розрахунку редукторів, коробок передач, механізмів загалом тощо.

Іноді забезпечення міцності всіх ступенів можливо для декількох варіантів. У цьому випадку можливо брати варіант, який забезпечує мінімальну масу стержня.

Виконаємо алгоритм розрахунку ступінчастого стержня для нашого випадку.

Перша ітерація

1. Необхідна мінімальна площа для 1-го стержня $F_{\min 1}$ з умов міцності становить

$$F_{\min 1} = \frac{|N|_{\max 1}}{[\sigma]} = \frac{52 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 3,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Площа поперечного перерізу 2-го ступеня (решти ступенів) з табл. 3.3 становить

$$F_2 = \frac{1}{3} F_{\min 1} = \frac{1}{3} \cdot 3,25 \cdot 10^{-4} = 1,0833 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

2. Перевіряємо міцність 2-го ступеня (решти ступенів)

$$\begin{aligned} \frac{|N|_{\max 2}}{F_2} &= \frac{30 \cdot 10^3}{1,0833 \cdot 10^{-4}} = 2,7692 \cdot 10^8 \text{ Па} = \\ &= 276,9 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{|N|_{\max 2}}{F_2} &= 276,9 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

3. Міцність 2-го ступеня не забезпечена, а тому потрібна друга ітерація, де ми будемо підбирати площу з умови міцності для 2-го ступеня, а міцність решти ступенів (тобто 1-го) перевіряти.

Друга ітерація

1. Необхідна мінімальна площа для 2-го стержня $F_{\min 2}$ з умов міцності становить

$$F_{\min 2} = \frac{|N|_{\max 2}}{[\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Площа поперечного перерізу 1-го ступеня (решти ступенів) з табл. 3.3 становить

$$F_1 = 3F_{\min 2} = 3 \cdot 1,875 \cdot 10^{-4} = 5,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

2. Перевіряємо міцність 1-го ступеня (решти ступенів)

$$\begin{aligned}\frac{|N|_{\max 1}}{F_1} &= \frac{52 \cdot 10^3}{5,625 \cdot 10^{-4}} = 9,2444 \cdot 10^7 \text{ Па} = \\ &= 92,4 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{|N|_{\max 1}}{F_1} &= 92,4 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

3. Так як міцність усіх ступенів забезпечена, то йдемо до пункту 4.

4. Розрахунок завершено. За результатами другої ітерації, прийняті площі становлять

$$F_1 = 5,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; F_2 = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Маючи значення площ поперечних перерізів, можна знайти їх характерні розміри (у нашому випадку діаметри). Діаметри ступенів становлять

$$\begin{aligned}d_1 &= \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5,625 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 2,6762 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 26,8 \text{ мм}; \\ d_2 &= \sqrt{\frac{4 \cdot F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,875 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 1,5451 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 15,5 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Відповідь: розраховані діаметри ступенів стержня на рис. 3.1 за заданих розмірах, зовнішнього навантаження, відношенню площ та матеріалі становлять: $d_1 = 26,8 \text{ мм}$; $d_2 = 15,5 \text{ мм}$.

4. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТЕРЖНЕВОЇ СИСТЕМИ З ЖОРСТКИМ БРУСОМ

4.1. Приклад

Перевірити міцність стержнів статично невизначеної стержневої системи (рис. 4.1), розв'язуючи задачу в наступній послідовності:

1. Проаналізувати статичну сторону задачі на основі рівнянь рівноваги.

2. Розглянути геометричну сторону задачі й записати рівняння сумісності переміщень.

3. Розібрати фізичну сторону задачі, у результаті чого встановити зв'язок між переміщеннями та факторами, які викликають напружено-деформований стан.

4. Провести синтез, скомпонувавши статичні, геометричні та фізичні рівняння, і знайти невідомі реакції.

5. Виконати перевірку міцності стержнів.

Матеріал сталь: сталь Ст3, $\sigma_T = 235$ МПа, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Коефіцієнт лінійного розширення – $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹. Зовнішні зусилля: $P = 10$ кН; $M = -12$ кН·м.

Таблиця 4.1. Вихідні початкові дані

№ стержня	Діаметр стержня d , мм	Неточність виготовлення δ , мм	Температурний вплив ΔT , К
1	8	-1,5	30
2	10	0,8	-25
3	12	-1,0	45

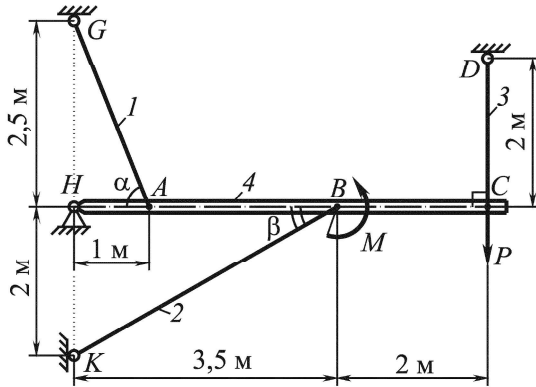


Рис. 4.1. Початкова схема

Рішення. Початкова схема подана на рис. 4.1, де позначено наступне: 1, 2, 3 – стержні, які працюють на розтяг-стиск; 4 – жорсткий брус, який не зазнає деформування і повинен розглядатися як абсолютно тверде недеформівне тіло.

У табл. 4.1, $\delta = -1,5$ мм означає, що стержень виготовлено на 1,5 мм коротшим, а $\delta = 0,8$ означає, що стержень на 0,8 мм довший. Запис $\Delta T = 30$ K означає, що стержень нагрівається на 30 K, а $\Delta T = -25$ K означає, що стержень охолоджується на 25 K.

Будь-які задачі опору матеріалів та механіки твердого деформівного тіла розв'язуються в наступній послідовності: а) проаналізувати статичну сторону задачі, де складаються рівняння рівноваги і визначається ступінь статичної невизначеності; б) розглянути геометричну сторону задачі, де встановлюються взаємозв'язки між кінематичними параметрами; в) розібрати фізичну сторону задачі, де встановлюються залежність між факторами, що спричинили напружено-деформований стан, і кінематичними параметрами; д) провести синтез на основі статичної, геометричної та фізичної сторони задачі, де формується система рівнянь для розв'язання задачі.

1. Статична сторона задачі. Відкидаючи в'язі в точках G, K, D початкової схеми (рис. 4.1) і вводячи відповідні реакції

замість відкинутих в'язей, створюємо статично еквівалентну розрахункову схему (рис. 4.2). Вводимо довільну систему координат, але бажано зручну для обчислень. У нашому випадку ось x паралельна осі бруса 4. Реакції на кінцях стержнів 1, 2, 3 відповідно в точках G , K , D рекомендується направляти вздовж стержнів, таким чином, щоб усі стержні працювали на розтяг.

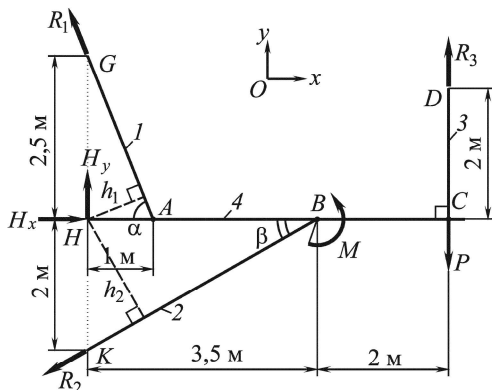


Рис. 4.2. Статично еквівалентна схема

Характерні розміри між точками схеми становлять: $HA = 1$ м; $AB = 2,5$ м; $BC = 2$ м; $HG = 2,5$ м; $HK = 2$ м; $CD = 2$ м; $HB = 3,5$ м; $CH = 5,5$ м. Довжини стержнів: $l_1 = \sqrt{1^2 + 2,5^2} = 2,6926$ м; $l_2 = \sqrt{3,5^2 + 2^2} = 4,0311$ м; $l_3 = 2$ м. Кути: $\alpha = \arctg\left(\frac{2,5}{1}\right) = 1,1003$ рад $= 68,20^\circ$; $\beta = \arctg\left(\frac{2}{3,5}\right) = 0,5191$ рад $= 29,7^\circ$. Площі поперечних перерізів стержнів: $F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 5,0265 \cdot 10^{-5}$ м²; $F_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (10 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 7,8540 \cdot 10^{-5}$ м²; $F_3 = \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (12 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 11,3097 \cdot 10^{-5}$ м².

Рівняння рівноваги для статично еквівалентної схеми на рис. 4.2 запишуться наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \sum FX = 0 : H_x - R_1 \cdot \cos \alpha - R_2 \cdot \cos \beta &= 0; \\ \sum FY = 0 : H_y + R_1 \cdot \sin \alpha - R_2 \cdot \sin \beta + R_3 - P &= 0; \\ \sum MZ_H = 0 : R_1 \cdot h_1 - R_2 \cdot h_2 + M + R_3 \cdot HC - P \cdot HC &= 0; \\ h_1 = AH \cdot \sin \alpha; \quad h_2 = HB \cdot \sin \beta \end{aligned} \right\} \cdot (1)$$

Маємо п'ять невідомих: R_1, R_2, R_3, H_x, H_y . Кількість рівнянь статичності = 3. Ступінь статичної невизначеності $5 - 3 = 2$. Система 2 рази статично невизначена. Необхідно ще 2 додаткових незалежних рівнянь, щоб розв'язати цю задачу і знайти всі невідомі.

2. Геометрична сторона задачі. У рамках геометричної сторони задачі розглядуваної системи необхідно надати кінематично можливе (з точки зору накладених в'язей) мале відхилення від положення рівноваги. Напрямок відхилення – довільний.

Так як ми працюємо в геометрично лінійній постановці задачі, то нижче наведено деякі правила і спрощення для побудови відхиленого стану.

1. Якщо дійсна траєкторія руху розглядуваної точки є дугою окружності, то ця окружність замінюється прямою лінією, яка є дотичною до дійсної траєкторії в початковий момент відхилення (рис. 4.3). Така заміна можлива, тому що за малого відхилення елементарна дуга окружності майже співпадає з прямою лінією, як це показано на рис. 4.3. На рис. 4.3 показано наступне: 1 – початковий стан; 2 – відхилений стан; A – розглядувана точка в початковому стані; A_1 – положення точки A після відхилення на прямій; A_2 – положення точки A після відхилення на окружності. Як бачимо на рис. 4.3, навіть для великих відхилень, точки A_1, A_2 майже співпадають.

2. Напрямок прямої співпадає з вектором швидкості руху розглядуваної точки в початковий момент відхилення. Тобто зобразивши дійсну траєкторію руху точки, потрібно відмітити початкову точку руху на цій траєкторії, а потім через

початкову точку провести дотичну лінію до траєкторії руху. У нашому випадку на рис. 4.3 траєкторією руху точки A є окружність, сама точка A є початковою точкою руху, через яку проведено дотичну до окружності.

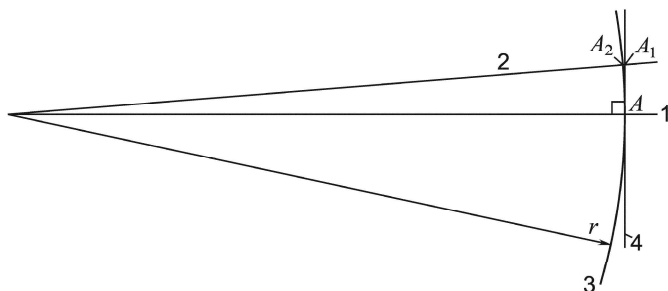


Рис. 4.3. Відхилений стан

3. Напрямок відхилення може бути довільним, але можливим з точки зору накладених кінематичних в'язей. Наприклад, нерухомий шарнір дозволяє тільки обертання і не дозволяє лінійних зміщень.

4. Досліджувані стержні (у нашому випадку – це стержні 1, 2, 3 на рис. 4.1, 4.2) вважаються частиною механізму і змінюють свою довжину. Жорстка балка – це тверде недеформівне тіло, яке не розраховується на міцність.

Є декілька способів побудови відхиленого стану, вони показані на рис. 4.4, 4.5. Спосіб на рис. 4.4 є загальним та інтуїтивно зрозумілим, що може використовуватися для лінійних та нелінійних систем. Спосіб відхилення на рис. 4.5 може бути застосований тільки для геометрично лінійних систем за дуже малих відхилень. На рис. 4.4, 4.5 штриховими лініями показано відхилений стан.

На рис. 4.4, 4.5 лінії a , b , c – це траєкторії руху відповідно точок A , B , C , які являють собою прямі лінії, перпендикулярні до осі бруса в початковому невідхиленому стані. Точки A_1 , B_1 , C_1 – це кінцеві положення точок A , B , C після відхилення. Кінцева мета геометричної сторони задачі полягає у знаходженні

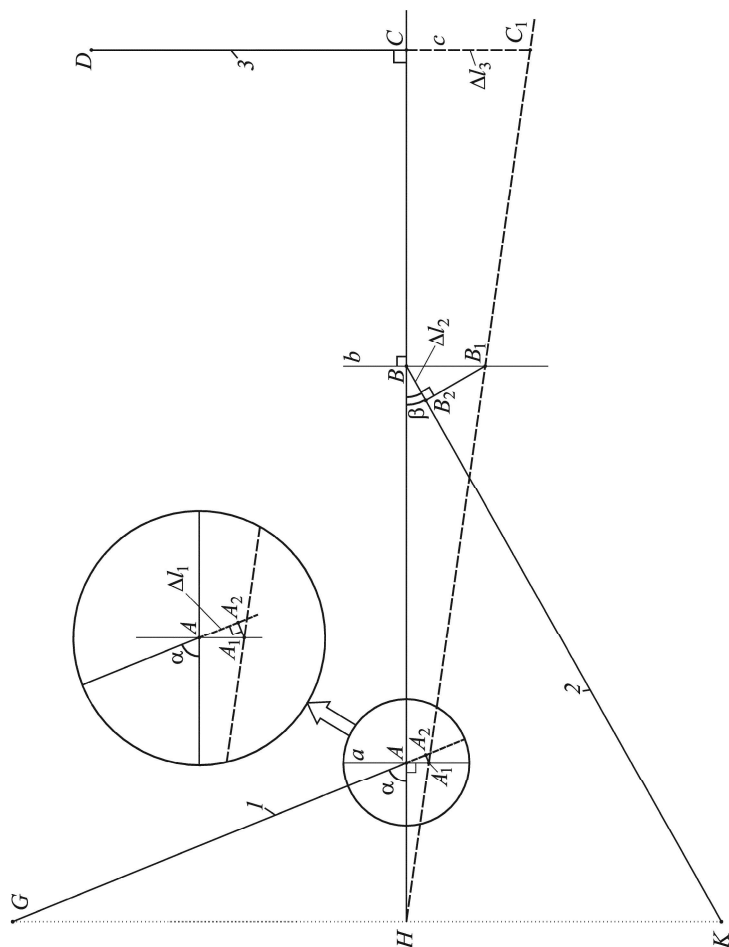


Рис. 4.5. Другий спосіб відхилення

У рамках першого способу (рис. 4.4) ми після відхилення проводимо перпендикуляр або з початкової точки або з кінцевого положення точки після відхилення (які мають індекс I), до лінії стержня (або початкового, або відхиленого стану) таким чином, щоб відсікти частину стержня і отримати ΔI . Наприклад, для стержня I ми з точки A (з початкової точки)

проводимо перпендикуляр до лінії стержня 1 у відхиленому стані, відсікаючи таким чином $\Delta l_1 = A_1 A_2$. Для стержня 2 ми з точки B_1 (що відповідає кінцевому положенню точки B) проводимо перпендикуляр до початкової лінії стержня 2, відсікаючи таким чином $\Delta l_2 = B B_2$. Для стержня 3 – $\Delta l_3 = C C_1$. Вимірявши безпосередньо на кресленні (рис. 4.4) довжини $\Delta l_{1,2,3}$, можна встановити взаємозв'язок між ними. Представлений перший спосіб є точнішим, якщо вимірювати $\Delta l_{1,2,3}$ безпосередньо. Проте їх можна знайти аналітично, що буде показано нижче.

У рамках другого способу (рис. 4.5) ми також даємо відхилення системи, як у першому випадку, за винятком зображення відхиленого стану стержнів 1, 2, 3. Замість цього необхідно продовжити прямі лінії стержнів. Для визначення $\Delta l_{1,2,3}$ порядок дій аналогічний до описаного в першому способі, тільки перпендикуляр проводиться до продовженої лінії стержня.

Під час пошуку співвідношень між $\Delta l_{1,2,3}$ можна використовувати схеми як на рис. 4.4, так і на рис. 4.5, вважаючи, що стержні як у початковому, так і у відхиленому (рис. 4.4) є паралельними. Результати до того ж отримуються однаковими.

Використаємо рис. 4.5. Як бачимо з рис. 4.5: 1-й стержень розтягується, 2-й – стискається, 3-й – розтягується. Тому можна записати

$$\Delta l_1 = A A_2, \quad \Delta l_2 = -B_1 B_2, \quad \Delta l_3 = C C_1; \quad (2)$$

$$\Delta H A A_1 \propto \Delta H B B_1 \Rightarrow \frac{H A}{H B} = \frac{A A_1}{B B_1}; \quad (3)$$

$$\frac{A A_2}{A A_1} = \sin \alpha \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{A A_1} = \sin \alpha \Rightarrow A A_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha}; \quad (4)$$

$$\frac{B_1 B_2}{B_1 B} = \sin \beta \Rightarrow \frac{-\Delta l_2}{B_1 B} = \sin \beta \Rightarrow B B_1 = \frac{-\Delta l_2}{\sin \beta}. \quad (5)$$

Підставляючи (4), (5) в (3), отримаємо

$$\frac{HA}{HB} = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha} : \frac{-\Delta l_2}{\sin \beta} = -\frac{\Delta l_1 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \Delta l_2} \Rightarrow \Delta l_1 = -\frac{HA \cdot \sin \alpha}{HB \cdot \sin \beta} \Delta l_2; \quad (6)$$

$$\Delta HCC_1 \propto \Delta HBB_1 \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{BB_1}{CC_1}. \quad (7)$$

Підставляючи (5) і третій вираз (2), отримаємо наступне:

$$\frac{HB}{HC} = \frac{-\Delta l_2}{\sin \beta} : \Delta l_3 \Rightarrow \frac{HB}{HC} = -\frac{\Delta l_2}{\Delta l_3 \cdot \sin \beta} \Rightarrow \Delta l_2 = -\frac{HB \cdot \sin \beta}{HC} \Delta l_3. \quad (8)$$

Можна було б встановити інші комбінації залежностей між $\Delta l_{1,2,3}$. Підставляючи числові значення у формули (6), (8), отримуємо

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= -\frac{HA \cdot \sin \alpha}{HB \cdot \sin \beta} \Delta l_2 = -\frac{1 \cdot \sin 1,903}{3,5 \cdot \sin 0,5191} \Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_1 = \\ &= -0,5347 \cdot \Delta l_2; \\ \Delta l_2 &= -\frac{HB \cdot \sin \beta}{HC} \Delta l_3 = -\frac{3,5 \cdot \sin 0,5191}{5,5} \Delta l_3 \Rightarrow \Delta l_2 = \\ &= -0,3157 \cdot \Delta l_3 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

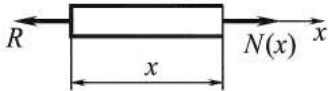
Залежності (9) – це кінцеві геометричні залежності, які будуть задіяні в подальших розрахунках.

Необхідно зазначити, що якщо б виміряти величини $\Delta l_{1,2,3}$ з рис. 4.5, то їх співвідношення точно відповідало б співвідношенням (9). До того ж величина відхилення для рис. 4.5 не має значення. Для схеми на рис. 4.4 відношення між $\Delta l_{1,2,3}$ залежать від величини відхилення від стану рівноваги. Чим більше це відхилення, тим менш точними стають відношення між $\Delta l_{1,2,3}$. Тому іншим способом знаходження співвідношень між $\Delta l_{1,2,3}$ є зображення в масштабі (наприклад, в одній з САД систем) відхиленого стану за способом на рис. 4.5; вимірювання абсолютних значень $\Delta l_{1,2,3}$ та знаходження співвідношень між ними у формі, наприклад, (9).

3. Фізична сторона задачі. У фізичній стороні задачі встановлюється залежність між факторами, які спричиняють напружено-деформований стан та переміщеннями стержнів, які досліджуються на міцність. Цими факторами є зовнішні зусилля, температурне поле, неточність виготовлення стержня.

Розглянемо будь-який зі стержнів із 1, 2, 3 (рис. 4.2) методом перерізів. У табл. 4.2 подано розрахунок параметрів розтягу-стиску для стержня, який розраховується на міцність, де Δl_R – переміщення від реакції R – зовнішнього зусилля, Δl_T – переміщення від (зміни) температурного поля ΔT ; F – площа поперечного перерізу стержня; E – модуль пружності під час розтягу.

Таблиця 4.2. Розрахунок параметрів розтягу-стиску для стержня

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
1	 $\sum FX = 0: -R + N(x) = 0 \Rightarrow N(x) = R;$ $\Delta l_R = u_0 + \int_0^l \frac{N(x)}{EF} dx = \left \begin{array}{l} u_0 = 0; \\ N(x) = R. \end{array} \right = \frac{R \cdot x}{EF} \Big _{x=0}^{x=l} = \frac{Rl}{EF};$ $\Delta l_T = \int_0^l \alpha_T \cdot \Delta T(x) dx = \left \begin{array}{l} \Delta T(x) = \\ \Delta T = \text{const} \end{array} \right = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot x \Big _{x=0}^{x=l} =$ $= \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l$

Таким чином, переміщення i -го стержня Δl_i визначається залежністю

$$\Delta l_i = \frac{R_i \cdot l_i}{EF_i} + \alpha_T \cdot \Delta T_i \cdot l_i + \delta_i, \quad (10)$$

де δ_i – неточність виготовлення i -го стержня.

Для досліджуваних стержнів 1, 2, 3 на основі (10) маємо

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{R_1 \cdot l_1}{EF_1} + \alpha_T \cdot \Delta T_1 \cdot l_1 + \delta_1; \\ \Delta l_2 &= \frac{R_2 \cdot l_2}{EF_2} + \alpha_T \cdot \Delta T_2 \cdot l_2 + \delta_2; \\ \Delta l_3 &= \frac{R_3 \cdot l_3}{EF_3} + \alpha_T \cdot \Delta T_3 \cdot l_3 + \delta_3 \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Залежності (11) – це кінцеві фізичні залежності, які будуть задіяні в подальших розрахунках.

4. Синтез. У розділі «синтез» відбувається синтез або поєднання рівнянь статичної, геометричної та фізичної сторін, у результаті чого будується система рівнянь для знаходження невідомих.

Підставляючи (11) в (9), отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= -0,5347 \cdot \Delta l_2 \Rightarrow \frac{R_1 \cdot l_1}{EF_1} + \alpha_T \cdot \Delta T_1 \cdot l_1 + \delta_1 = \\ &= -0,5347 \cdot \left(\frac{R_2 \cdot l_2}{EF_2} + \alpha_T \cdot \Delta T_2 \cdot l_2 + \delta_2 \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (12)$$

$$2,6784 \cdot 10^{-7} R_1 - 5,3067 \cdot 10^{-4} = -1,3722 \cdot 10^{-7} R_2 + 2,1887 \cdot 10^{-4};$$

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= -0,3157 \cdot \Delta l_3 \Rightarrow \frac{R_2 \cdot l_2}{EF_2} + \alpha_T \cdot \Delta T_2 \cdot l_2 + \delta_2 = \\ &= -0,3157 \cdot \left(\frac{R_3 \cdot l_3}{EF_3} + \alpha_T \cdot \Delta T_3 \cdot l_3 + \delta_3 \right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (13)$$

$$2,5663 \cdot 10^{-7} R_2 - 4,0934 \cdot 10^{-4} = -2,7916 \cdot 10^{-8} R_3 - 2,5258 \cdot 10^{-5}.$$

Доповнюючи (12), (13) рівняннями рівноваги (1), отримуємо систему рівнянь для знаходження невідомих: R_1, R_2, R_3, H_x, H_y .

Але так як власне реакції H_x , H_y нам не потрібні, то із рівнянь рівноваги (1) достатньо використати тільки третє, яке не містить H_x , H_y .

Система рівнянь для знаходження невідомих R_1 , R_2 , R_3 запишеться у вигляді

$$\left. \begin{aligned} 0,9285 \cdot R_1 - 1,7365 \cdot R_2 + 5,5 \cdot R_3 - 6,7 \cdot 10^4 &= 0; \\ 2,6784 \cdot 10^{-7} R_1 - 5,3067 \cdot 10^{-4} &= -1,3722 \cdot 10^{-7} R_2 + 2,1887 \cdot 10^{-4}; \\ 2,5663 \cdot 10^{-7} R_2 - 4,0934 \cdot 10^{-4} &= -2,7916 \cdot 10^{-8} R_3 - 2,5258 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

де перше рівняння – це третє рівняння (1), а друге та третє – це відповідно (12) та (13).

Вирішуючи систему (14), отримуємо

$$R_1 = 2689,1 \text{ Н}; \quad R_2 = 213,5 \text{ Н}; \quad R_3 = 11795,3 \text{ Н}. \quad (15)$$

Підставляючи знайдені значення R_1 , R_2 , R_3 з (15) у перші два рівняння (1), знайдемо H_x , H_y

$$H_x = 1184,1 \text{ Н}; \quad H_y = -4186,1 \text{ Н}. \quad (16)$$

Для перевірки правильності обчислення сил R_1 , R_2 , R_3 , H_x , H_y можна підставити їх значення в рівняння рівноваги (1) або скласти нове рівняння рівноваги моментів відносно будь-якої точки, відмінної від H .

5. Перевірка міцності стержнів. Необхідна умова міцності записується у вигляді

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma], \quad (17)$$

де $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{235}{1,5} \approx 160 \text{ МПа}$ – допустимі напруження; $n_T = 1,4 \div 1,6$ – коефіцієнт запасу міцності по границі плинності.

$|\sigma|_{\max}$ – найбільші напруження за модулем, що мають місце в небезпечному перерізі стержня, які визначаються формулою

$$|\sigma|_{\max} = \frac{R}{F}, \quad (18)$$

де R – одна із реакцій R_1, R_2, R_3 ; F – площа поперечного перерізу стержня.

У табл. 4.3 представлено перевірку міцності стержнів.

Таблиця 4.3. Перевірка міцності стержнів

№ стержня	Найбільші напруження у стержні $ \sigma _{\max}$, Па	Значення $ \sigma _{\max}$ у МПа	Виконання умови міцності $ \sigma _{\max} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}$
1	$ \sigma _{\max 1} = \frac{R_1}{F_1} = \frac{2689,1}{5,0265 \cdot 10^{-5}} = 5,3498 \cdot 10^7 \text{ Па}$	53,5	так
2	$ \sigma _{\max 2} = \frac{R_2}{F_2} = \frac{213,5}{7,8540 \cdot 10^{-5}} = 2,7189 \cdot 10^6 \text{ Па}$	2,7	так
3	$ \sigma _{\max 3} = \frac{R_3}{F_3} = \frac{11795,3}{11,3097 \cdot 10^{-5}} = 1,0429 \cdot 10^8 \text{ Па}$	104,3	так

Відповідь: міцність усіх трьох стержнів на рис. 4.1 за заданих умов навантаження, температурного поля, неточностей виготовлення і матеріалі забезпечена.

5. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ З'ЄДНАНИХ ВАЛІВ З КРУГЛИМ ПЕРЕРІЗОМ

5.1. Приклад

Виконати проєктувальний розрахунок статично визначеного одноступінчастого циліндричного вала (рис. 5.1,*a*) з умов міцності і жорсткості, розв'язуючи задачу в наступній послідовності:

1. Методом перерізів знайти закони та побудувати епюри: крутних моментів внутрішніх сил, погонних та повних кутів закручування.

2. Підібрати діаметри суцільного та трубчатого перерізів з умови міцності та жорсткості за відносним кутом закручування.

3. Зробити порівняльний аналіз затрат матеріалу для трубчатого та суцільного вала.

4. Побудувати епюри напружень для небезпечного перерізу.

5. Підібрати діаметри болтів для муфти з умов забезпечення міцності на зріз та зминання.

Матеріал: сталь; $\sigma_T = 235$ МПа; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па. Допустимий відносний кут закручування – $[\theta] = 0,01$ рад/м. Відношення діаметрів вала для трубчатого перерізу – $\alpha = 0,99$. Кількість болтів муфти – 6. Положення муфти – посередині довжини вала.

Діаметр муфти – 300 мм. Товщина муфти – 15 мм.

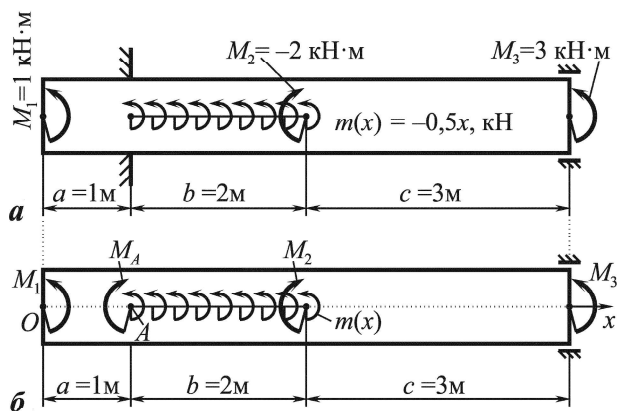


Рис. 5.1. Розглядуваний вал:

a – початкова схема; *б* – статично еквівалентна схема

Рішення. Ця задача може бути розв’язана принаймні двома способами. Для першого варіанта, якщо точно відомо положення муфти та є впевненість, що її положення буде незмінним, то потрібно розглядати як би два вали розділених муфтою: один вал іде зліва до муфти, а інший – від муфти до правого торця. Кожен з цих двох валів має свій небезпечний переріз відносно якого підбирається діаметр з умов міцності і жорсткості. У такому випадку після розрахунку ми отримаємо розраховані діаметри цих двох валів, за яких забезпечується найменша металомісткість складеного вала. Проте в ході конструктивних змін можлива зміна положення муфти, а тому попередній розрахунок може не забезпечувати міцності або жорсткості складеного вала в цілому. Щоб уникнути цього, необхідно розраховувати один вал (визначений від правого кінця до лівого, не беручи до уваги муфту) з одним небезпечним перерізом. До того ж металоємність загалом буде підвищеною в порівнянні з попереднім варіантом, проте результати за показниками міцності і жорсткості завжди будуть надійними, які не залежать від положення муфти. Саме другий варіант показано як приклад розрахунку.

На рис. 5.1 показаний розглядуваний вал. Закон крутного розподіленого навантаження $m(x)$ заданий відносно координатних осей Ox . Зосереджені моменти та розподілене крутне навантаження вважається додатнім, якщо їх (найкоротший) поворот з вершини осі x видно проти годинникової стрілки.

1. Визначення законів крутних моментів, погонних та повних кутів закручування.

Відкидаємо в'язі та замінюємо систему статично еквівалентною (рис. 5.1,б). Тобто замість защемлення на рис. 5.1,а ставимо реактивний момент у довільному напрямку: за годинниковою чи проти годинникової стрілки. Невідомий крутний момент M_A знаходимо з рівняння рівноваги

$$\sum MX = 0 : M_1 - M_A + \int_a^{a+b} m(x) dx - M_2 + M_3 = 0 \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow M_1 - M_A + \int_1^3 -0,5x dx - M_2 + M_3 = 0 \Rightarrow M_A = 4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

де $M_m = \int_a^{a+b} m(x) dx = \int_1^3 -0,5x dx = \left. \frac{-0,5x^2}{2} \right|_{x=1}^{x=3} = -0,25 \cdot (9-1) =$
 $= -2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ – головний момент розподіленого навантаження.

Виконуючи перевірку, маємо

$$\sum MX = 0 : M_1 - M_A + M_m - M_2 + M_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 4 + (-2) - (-2) + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0,$$

це означає, що M_A знайдено правильно.

Погонний кут закручування θ , рад/м, i -ї ділянки визначається залежністю

$$\theta_i(x) = \frac{M_i(x)}{GI_{pi}(x)}, \quad (2)$$

де $G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2(1+0,3)} = 7,7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ – модуль зсуву; I_p – полярний момент інерції, м^4 .

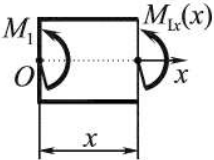
Абсолютний кут закручування φ , рад, i -ї ділянки за класичним методом перерізів розраховується за формулою

$$\varphi_i(x) = \varphi_{i-1}(d_{i-1}) + \int_{d_{i-1}}^x \theta_i(s) ds; \quad \theta_i(s) = \theta_i(x), \quad (3)$$

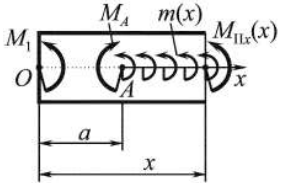
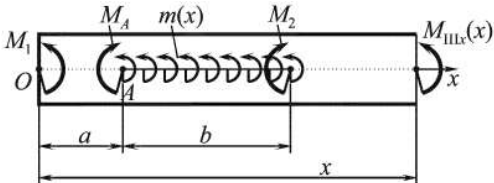
де d_{i-1} – довжина попередньої ділянки, що завжди відмірюється від початку координат глобальної координатної системи, а при $i = 0$, $d_{i-1} = 0$; для статично визначених систем при $i = 1$, $\varphi_0 = 0$.

У нашому випадку вал є постійного діаметра вздовж всієї довжини, що спрощує розрахунок кінематичних параметрів за формулами (2), (3) і дозволяє отримати їх вирази до визначення необхідного діаметра. У табл. 5.1 подано обчислення параметрів кручення з використанням класичного методу перерізів.

Таблиця 5.1. Параметри кручення розраховані за класичним методом перерізів у глобальній системі координат

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
1	Ділянка I ($0 \leq x < a$)  $\Sigma MX = 0: M_1 + M_{lx}(x) = 0 \Rightarrow M_1(x) = -1, \text{ кН} \cdot \text{м};$ $\theta_1(x) = \frac{M_{lx}(x)}{GI_p} = \frac{-1000}{GI_p}, \text{ рад/м};$ $\varphi_1(x) = \varphi_0 + \int_0^x \theta_1(s) ds = \int_0^x \frac{-1000}{GI_p} ds = \frac{-1000x}{GI_p}, \text{ рад}$

Продовж. табл. 5.1

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
2	Ділянка II ($a \leq x < a + b$)  $\Sigma MX = 0: M_1 - M_A + \int_{a=1}^x m(s) ds + M_{IIx}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{IIx}(x) = 0,25 x^2 + 2,75, \text{ кН} \cdot \text{м};$ $\theta_{II}(x) = \frac{M_{IIx}(x)}{GI_p} = \frac{250 x^2 + 2750}{GI_p}, \text{ рад/м};$ $\varphi_{II}(x) = \varphi_1(a) + \int_{a=1}^x \theta_{II}(s) ds = \frac{-1000}{GI_p} + \int_{a=1}^x \frac{250 s^2 + 2750}{GI_p} dx =$ $= \frac{-1000}{GI_p} + \frac{83,3 x^3 + 2750 x - 2833,3}{GI_p}, \text{ рад}$
3	Ділянка III ($a + b \leq x < a + b + c$)  $\Sigma MX = 0: M_1 - M_A + \int_{a=1}^{a+b=3} m(x) dx - M_2 + M_{IIIx}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{IIIx}(x) = 3, \text{ кН} \cdot \text{м};$ $\theta_{III}(x) = \frac{M_{IIIx}(x)}{GI_p} = \frac{3000}{GI_p}, \text{ рад/м};$ $\varphi_{III}(x) = \varphi_{II}(a+b) + \int_{a+b}^x \theta_{III}(s) ds = \frac{6666,6}{GI_p} + \int_{a+b=3}^x \frac{3000}{GI_p} ds =$ $= \frac{6666,6}{GI_p} + \frac{3000 x - 9000}{GI_p}, \text{ рад}$

У табл. 5.2 подано параметри кручення, виписані з табл. 5.1.

Таблиця 5.2. Параметри кручення за класичним методом перерізів

№ з/п	Ділянка	$M_x(x)$, кН	$\theta(x)$, рад/м	$\varphi(x)$, рад
1	I, $x \in [0; a = 1 \text{ м})$	-1	$\frac{-1000}{GI_p}$	$\frac{-1000 x}{GI_p}$
2	II, $x \in [a = 1 \text{ м}; a + b = 3 \text{ м})$	$0,25x^2 + 2,75$	$\frac{250 x^2 + 2750}{GI_p}$	$\frac{-1000}{GI_p} + \frac{83,3(3)x^3}{GI_p} + \frac{2750x - 2833,3(3)}{GI_p}$
3	III, $x \in [a + b = 3; a + b + c = 6 \text{ м})$	3	$\frac{3000}{GI_p}$	$\frac{6666,6(6)}{GI_p} + \frac{3000x - 9000}{GI_p}$

Використовуючи закони табл. 5.2, будуємо епюри крутних моментів $M(x)$, погонних $\theta(x)$ та повних $\varphi(x)$ кутів закручування, які представлені на рис. 5.2.

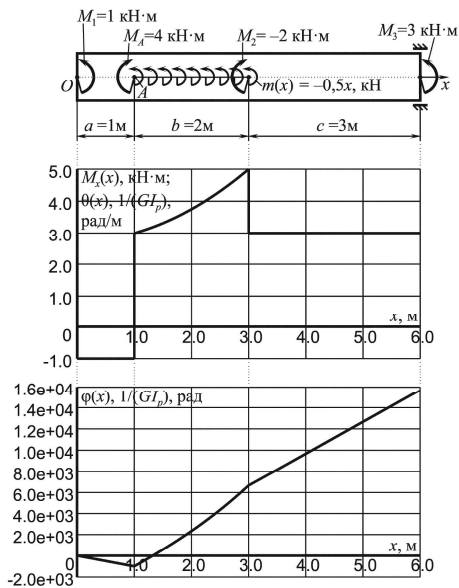


Рис. 5.2. Епюри параметрів кручення

2. Підбір діаметрів валів з умов міцності і жорсткості.

Умова забезпечення міцності вала виглядає таким чином:

$$|\tau|_{\max} \leq [\tau], \quad (4)$$

де $[\tau] = \frac{\tau_{\tau}}{n_{\tau}} = \frac{132}{1,5} = 88 \approx 90$ МПа – допустимі напруження під час зсуву; $n_{\tau} = 1,4 \div 1,6$ – коефіцієнт запасу міцності по границі

плинності; $\tau_{\tau} = 0,56 \cdot \sigma_{\tau} = 0,56 \cdot 235 = 132$ МПа – границя плинності під час зсуву; $|\tau|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_p}$ – найбільші дотичні напру-

ження за модулем в небезпечному перерізі; W_p – полярний момент опору, м³; $|M_x|_{\max} = 5$ кН·м – найбільше за модулем значення крутного моменту, що визначене в небезпечному пере-

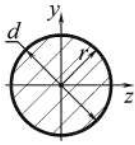
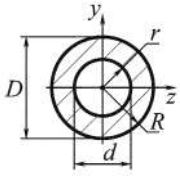
різі, який має місце при $x = 3$ м.

З урахуванням останніх формул і виразу (4) залежність для мінімально необхідного полярного моменту опору $W_{p \min}$ запишеться наступним чином:

$$W_{p \min} = \frac{|M_x|_{\max}}{[\tau]}. \quad (5)$$

Для суцільного круглого та кільцевого перерізів у табл. 5.3 подано формули необхідних геометричних характеристик, які потрібні для розрахунку міцності й жорсткості вала.

Таблиця 5.3. Мінімально необхідні геометричні характеристики перерізів вала

№ з/п	Назва величини	Позначення	Форми плоских фігур	
			круг	кільце
1	Ескіз перерізу	–		

Продовж. табл. 5.3

№ з/п	Назва величини	Позначення	Форми плоских фігур	
			круг	кільце
2	Полярний момент інерції, м ⁴	I_p	$\frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}$	$\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4),$ $\alpha = r / R = d / D$
3	Полярний момент опору, м ³	W_p	$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}$	$\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \alpha^4),$ $\alpha = r / R = d / D$
4	Площа, м ²	F	$\frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$	$\frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \pi R^2 (1 - \alpha^2),$ $\alpha = r / R = d / D$

Підставляючи у (5) замість $W_{p \min}$ значення W_p з табл. 5.3, виражене через діаметр або радіус, отримуємо формули для мінімально необхідного діаметра з умов міцності для суцільно круглого або кільцевого перерізу.

Мінімально необхідний діаметр $d_{\min}$ суцільного круглого перерізу з умови міцності визначається залежністю

$$W_{p \min} = \frac{|M_x|_{\max}}{[\tau]} \Rightarrow \frac{\pi d^3}{16} = \frac{|M_x|_{\max}}{[\tau]} \Rightarrow d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_x|_{\max}}{[\tau] \cdot \pi}}. \quad (6)$$

Аналогічно мінімально необхідний діаметр $D_{\min}$ кільцевого перерізу з умови міцності визначається залежністю

$$D_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_x|_{\max}}{[\tau] \cdot \pi \cdot (1 - \alpha^4)}}. \quad (7)$$

Умова забезпечення жорсткості вала за погонним кутом закручування виглядає наступним чином:

$$|\theta|_{\max} \leq [\theta], \quad (8)$$

де $[\theta] = 0,01$ рад/м – заданий допустимий відносний кут закручування; $|\theta|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{G \cdot I_p}$ – найбільший за модулем відносний

кут закручування, який для циліндричного вала визначається в тому ж самому місці, що й найбільший за модулем крутний момент $|M_x|_{\max}$.

З урахуванням останніх формул і виразу (8), залежність для мінімально необхідного полярного моменту інерції $I_{p \min}$ запишеться наступним чином:

$$I_{p \min} = \frac{|M_x|_{\max}}{G \cdot |\theta|_{\max}}. \quad (9)$$

Підставляючи у (9) замість $I_{p \min}$ значення I_p з табл. 5.3, виражене через діаметр або радіус, отримуємо формули для мінімально необхідного діаметра з умов *жорсткості* для суцільно круглого або кільцевого перерізу.

Мінімально необхідний діаметр $d_{\min}$ суцільного круглого перерізу з умови *жорсткості* визначається залежністю

$$I_{p \min} = \frac{|M_x|_{\max}}{G \cdot |\theta|_{\max}} \Rightarrow \frac{\pi d^4}{32} = \frac{|M_x|_{\max}}{G \cdot |\theta|_{\max}} \Rightarrow d_{\min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot |M_x|_{\max}}{G \cdot |\theta|_{\max} \cdot \pi}}. \quad (10)$$

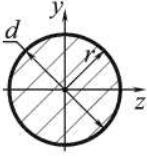
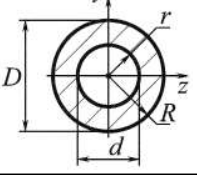
Аналогічно мінімально необхідний діаметр $D_{\min}$ кільцевого перерізу з умови *жорсткості* визначається залежністю

$$D_{\min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot |M_x|_{\max}}{G \cdot |\theta|_{\max} \cdot \pi \cdot (1 - \alpha^4)}}. \quad (11)$$

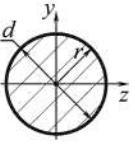
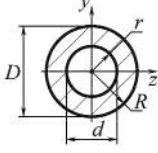
У табл. 5.4 наведено формули для обчислення діаметрів валів з умов міцності та жорсткості для суцільного круглого та кільцевого перерізів, а в табл. 5.5 проведено відповідні обчислення згідно з формулами табл. 5.4.

Після прийняття зовнішнього діаметра D для трубчатого валу згідно з нормативним документом, установлюється реальна товщина трубчатого перерізу за сортаментом трубчатого або листового прокату (якщо вал планується виготовляти з листів металу), яка повинна бути не меншою ніж $(R - r)$, та відбувається перерахунок відношення $\alpha = r/R$ і всіх пов'язаних величин.

Таблиця 5.4. Формули для розрахунку діаметрів валів з умов міцності й жорсткості

№ з/п	Назва величини	Форми плоских фігур	
		круг	кільце
1	Ескіз		
2	Діаметр вала з умови міцності	$d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_x _{\max}}{[\tau] \cdot \pi}}$	$D_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_x _{\max}}{[\tau] \cdot \pi \cdot (1 - \alpha^4)}}$
3	Діаметр вала з умови жорсткості	$d_{\min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_x _{\max}}{G \cdot \theta _{\max} \cdot \pi}}$	$D_{\min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_x _{\max}}{G \cdot \theta _{\max} \cdot \pi \cdot (1 - \alpha^4)}}$

Таблиця 5.5. Розрахунок діаметрів валів з умов міцності й жорсткості

№ з/п	Назва величини	Форми плоских фігур	
		круг	кільце
1	Ескіз		
2	Діаметр вала з умови міцності, мм	$d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5000}{90 \cdot 10^6 \cdot 3,14}} = 6,565 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 65,65 \text{ мм}$	$D_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5000}{90 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot (1 - 0,99^4)}} = 1,9292 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 192,92 \text{ мм}$
3	Діаметр вала з умови жорсткості, мм	$d_{\min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5000}{7,7 \cdot 10^{10} \cdot 0,01 \cdot 3,14}} = 9,018 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 90,18 \text{ мм}$	$D_{\min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5000}{7,7 \cdot 10^{10} \cdot 0,01 \cdot 3,14 \cdot (1 - 0,99^4)}} = 2,0241 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 202,41 \text{ мм}$
4	Більший діаметр вала, мм	90,18	202,41
5	Прийнятий діаметр вала, мм	Згідно із заданим нормативним документом, але не менше більшого діаметра	Згідно із заданим нормативним документом, але не менше більшого діаметра

У реальних розрахунках діаметри валів можуть коригуватися з огляду на критичні резонансні частоти крутильних (згинально-крутильних) коливань, параметри втомної міцності тощо.

3. Порівняльний аналіз затрат матеріалу.

Порівняльний аналіз затрат матеріалу будемо виконувати згідно з даних табл. 5.5 для більших діаметрів (4-й рядок табл. 5.5). Так як вал циліндричний, то достатньо лише порівняти площі круглого суцільного та кільцевого поперечних перерізів. За формулами табл. 5.3 площі поперечних перерізів становлять:

площа круглого суцільного перерізу становить

$$F_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (9,018 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 6,387 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

площа кільцевого перерізу становить

$$F_2 = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot (2,0241 \cdot 10^{-1})^2}{4} (1 - 0,99^2) = 6,403 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Порівнюючи площі круглого суцільного F_1 та кільцевого F_2 перерізів, знаходимо, що кільцевий переріз у $\frac{F_1}{F_2} = \frac{6,387 \cdot 10^{-3}}{6,403 \cdot 10^{-4}} = 9,98 \approx 10$ разів легше за суцільний круглий переріз, що означає аналогічне відношення металоємності. Для остаточного прийняття рішення щодо можливості застосування того чи іншого перерізу необхідно додатково проаналізувати собівартість виготовлення вала зі вказаними перерізами вкупі з металоємністю.

4. Побудова епюр напружень.

Дотичні напруження τ від крутного моменту M_x у поперечному перерізі вала визначаються залежністю

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho, \quad (12)$$

ρ – радіус кільцевого рівня, де визначаються дотичні напруження τ від кручення (рис. 5.3), який для суцільного круглого перерізу (рис. 5.3,*а*) лежить у межах $\rho \in [0; r]$, а для кільцевого перерізу – у межах $\rho \in [r; R]$; $M_x = 5000 \text{ Н} \cdot \text{м}$ – значення крутного моменту внутрішніх сил зі своїм знаком, який діє у визначеному перерізі (у нашому випадку – це небезпечний переріз при $x = 3 \text{ м}$, там, де діє $|M_x|_{\max}$); I_p – полярний момент інерції, який визначається за формулами табл. 5.3.

Екстремальні значення дотичних напружень (12) обчислюються наступним чином:

$$|\tau|_{\max} = \frac{M_x}{W_p}, \quad (13)$$

де W_p – полярний момент опору, який визначається за формулами табл. 5.3.

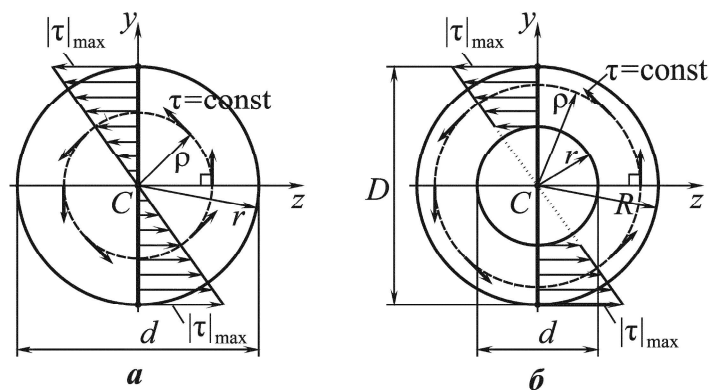
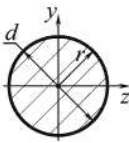
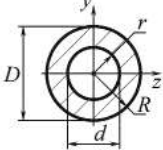


Рис. 5.3. Розподіл дотичних напружень:
а – у круглому перерізі; *б* – у трубчатому перерізі

Як видно з (12) знак напружень залежить лише від знаку крутного моменту M_x . У табл. 5.6 наведено розрахунок напружень для розглядуваних перерізів для більших діаметрів

(4-й рядок табл. 5.5), а на рис. 5.4 показані епюри напружень для суцільного круглого та кільцевого перерізів. Розподіл напружень для кільцевого вала є дещо умовним, бо товщина в порівнянні з діаметром є дуже малою, а тому відобразити дійсний розподіл у масштабі практично неможливо. Для трубчатого вала зміна напружень за товщиною згідно з формулою (12) є майже невідчутною, і для практичного використання можна брати, що напруження за товщиною стінки трубчатого вала є постійними, які дорівнюють верхній границі.

Таблиця 5.6. Розрахунок напружень

№ з/п	Назва величини	Форми плоских фігур	
		круг	кільце
1	Ескіз		
2	Діаметр, м	$d = 90,18$	$D = 202,41$
3	Полярний момент опору $W_p, \text{м}^3$	$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot (90,18 \cdot 10^{-3})^3}{16} = 1,440 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{3,14 \cdot (202,41 \cdot 10^{-3})^3}{16} (1 - 0,99^4) = 6,416 \cdot 10^{-5}$
4	Найбільші за модулем дотичні напруження, МПа	$ \tau _{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{5000}{1,440 \cdot 10^{-4}} = 3,472 \cdot 10^7 \text{ Па} = 34,72 \text{ МПа}$	$ \tau _{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{5000}{6,416 \cdot 10^{-5}} = 7,793 \cdot 10^7 \text{ Па} = 77,93 \text{ МПа}$
5	Знак напруження	+	+

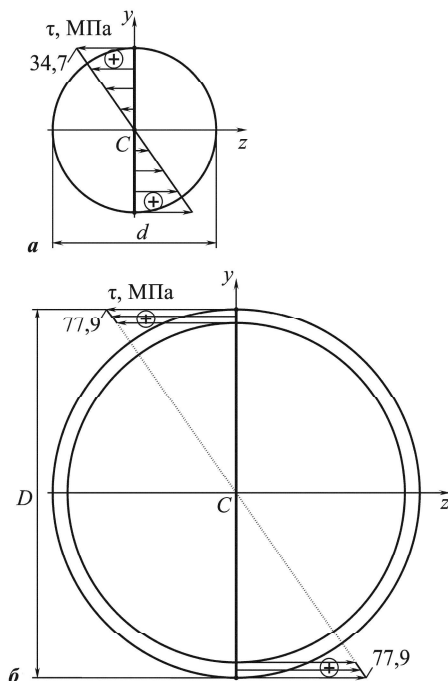


Рис. 5.4. Розподіл дотичних напружень:

a – для круглого суцільного перерізу; *б* – для кільцевого (або трубчатого) перерізу

5. Підбір діаметрів болтів муфти.

Діаметри болтів муфти підбираються з умов міцності на зріз та зминання. На рис. 5.5 подано спрощене креслення муфти, достатньо необхідне для проведення розрахунку болтів.

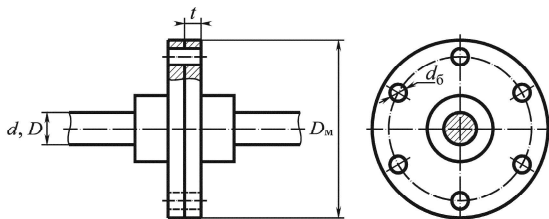


Рис. 5.5. Схематичне креслення муфти

Значення крутного моменту за модулем у перерізі, де встановлено муфту, становить $M_m = 5000 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Вважається, що всі болти приймають однакові зусилля. Дотична сила, що діє на кожен болт становить

$$P = \frac{M_m}{0,5 \cdot D_m \cdot n_6} = \frac{5000}{0,5 \cdot 0,3 \cdot 6} = 5555, (5) \text{ Н},$$

де $D_m = 0,3 \text{ м}$ – діаметр муфти; $n_6 = 6$ – кількість болтів муфти.

Умова забезпечення міцності на зріз має наступний вигляд:

$$\frac{P}{F_{зр}} \leq [\tau_{6зр}],$$

де $F_{зр} = \frac{\pi d_6^2}{4}$ – площа поперечного перерізу болта, що працює на зріз, м^2 ; $[\tau_{6зр}]$ – допустимі напруження для (матеріалу) болта під час роботи на зріз, які можуть визначатися з урахуванням динамічних та інших факторів, Па ; d_6 – діаметр болта, м .

Матеріал болтів беремо такий самий, як і матеріал вала з $\sigma_t = 235 \text{ МПа}$. Тоді можна взяти $[\tau_{6зр}] = [\tau] = 90 \text{ МПа}$. Допустимі нормальні напруження під час розтягання (знак «+») та стиснення (знак «-») становлять $[\sigma_6] = [\sigma_{6+}] = [\sigma_{6-}] = \frac{\sigma_t}{n_t} = \frac{235}{1,5} = 157 \approx 160 \text{ МПа}$ – допустимі напруження під час розтягання-стиснення; $n_t = 1,4 \div 1,6$ – коефіцієнт запасу міцності по границі плинності.

З урахуванням останніх формул, мінімально необхідний діаметр болта з умови забезпечення міцності на зріз визначається залежністю

$$d_{6зр} \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot [\tau_{6зр}]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5555, (5)}{3,14 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 8,865 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,9 \text{ мм}.$$

Умова забезпечення міцності на зминання має наступний вигляд:

$$\frac{P}{F_{зм}} \leq [\sigma_{\delta зм}],$$

де $F_{зм} = t \cdot d_{\delta}$ – площа поперечного перерізу болта, що працює на зминання, м²; $[\sigma_{\delta зм}] = (2 \div 2,5) \cdot [\sigma_{\delta}] = 2 \cdot 160 = 320$ МПа – допустимі напруження для (матеріалу) болта під час роботи на зминання, які можуть визначатися з урахуванням динамічних та інших факторів, Па; d_{δ} – діаметр болта, м.

З урахуванням останніх формул, мінімально необхідний діаметр болта з умови забезпечення міцності на зминання визначається залежністю

$$d_{\delta зм} \geq \frac{P}{t \cdot [\sigma_{\delta зм}]} = \frac{5555, (5)}{0,015 \cdot 320 \cdot 10^6} = 1,157 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,2 \text{ мм}.$$

У табл. 5.7 наведено діаметри болтів муфти.

Таблиця 5.7. Діаметри болтів муфти

№ з/п	Назва величини	Значення діаметра, мм
1	Діаметр болта з умови міцності на зріз	8,9
2	Діаметр болта з умови міцності на зминання	1,2
3	Більший діаметр	8,9
4	Прийнятий діаметр	Згідно із заданим нормативним документом, але не менше більшого діаметра

Відповідь: див. табл. 5.5, 5.7.

6. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ ПІД ЧАС ЗГИНАННЯ

6.1. Класичний метод перерізів для згину

6.1.1. Основні поняття

Під час використання класичного методу перерізів [1, 2, 3] весь розрахунок ведеться у глобальній нерухомій системі координат. Початок координат фіксується один раз і не зміщується впродовж розрахунку. Усі закони внутрішніх зусиль записані у глобальній системі координат. Під час знаходження законів внутрішніх зусиль балка розділяється на дві уявні частини. Під час розгляду поперечного згину дії отриманих двох уявних частин одна на одну замінюються реакціями внутрішніх зусиль, як це показано на рис. 6.1, де Q – зрізуючі зусилля; M – згинальні моменти.

Довжини ділянок d_i для класичного методу перерізів визначаються, як це показано на рис. 6.2.

Складаючи рівняння рівноваги, можливо отримати вирази для зрізуючих зусиль Q та згинальних моментів M внутрішніх сил. На рис. 6.3 показано перші три схеми відповідно для першої, другої та третьої ділянок під час визначення внутрішніх зусиль Q та M .

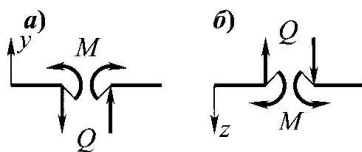


Рис. 6.1. Позитивні напрямки або правила знаків внутрішніх зусиль Q та M :

a – поперечна вісь угору; **б** – поперечна вісь униз

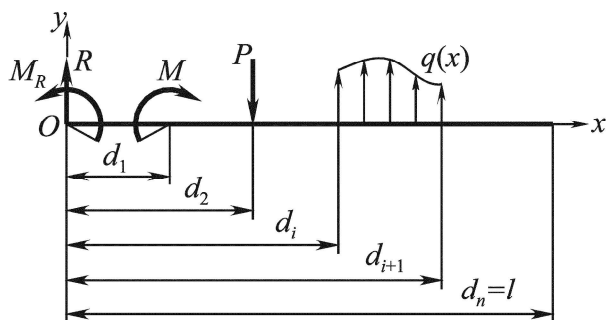


Рис. 6.2. Визначення довжин ділянок для класичного методу перерізів

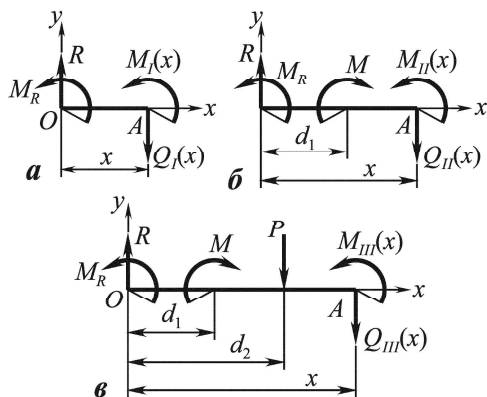


Рис. 6.3. Розрахункові схеми для визначення Q та M згідно з класичним методом перерізів для перших трьох ділянок:

a – перша ділянка; **б** – друга ділянка; **в** – третя ділянка

Складаючи рівняння рівноваги сил у проєкції на поперечну вісь y , визначаємо закони зрізуючих сил $Q_{I, II, III}$ (рис. 6.3). Складаючи рівняння рівноваги моментів відносно точки A , знаходимо закони згинальних моментів $M_{I, II, III}$. Кожен з цих законів буде записаний у глобальних координатах xOy .

Кінематичні параметри i -ї розглядуваної ділянки, такі як кути повороту α_i та прогини w_i , знаходяться за наступними формулами:

$$\alpha_i(x) = \alpha_{i-1}(d_{i-1}) + \int_{d_{i-1}}^x \frac{M_i(s)}{EI_i(s)} ds; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

$$M_i(s) = M_i(x); \quad I_i(s) = I_i(x);$$

$$w_i(x) = w_{i-1}(d_{i-1}) + \int_{d_{i-1}}^x \alpha_i(s) ds; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$\alpha_i(s) = \alpha_i(x),$$

де i – індекс розглядуваної ділянки; $i-1$ – індекс попередньої ділянки; d_{i-1} – довжина попередньої ділянки; n – кількість ділянок; $M_i(x)$ – згинальний момент внутрішніх сил; $I_i(x)$ – головний центральний осьовий момент інерції відносно поперечної осі до площини згину; E – модуль пружності під час розтягу.

Величини α_0 , w_0 (при $i = 1$) визначаються з кінематичних умов уже після того, як записані всі вирази для α та w .

6.1.2. Згинальний момент та сила від розподіленого зовнішнього поперечного навантаження

Момент від розподіленого навантаження у класичному методі перерізів необхідно розглядати для двох типових випадків: коли розподілене навантаження знаходиться в межах ділянки, де визначаються закони внутрішніх зусиль Q та M (рис. 6.4,*а*) та коли розподілене навантаження розташоване в попередніх ділянках (рис. 6.4,*б*).

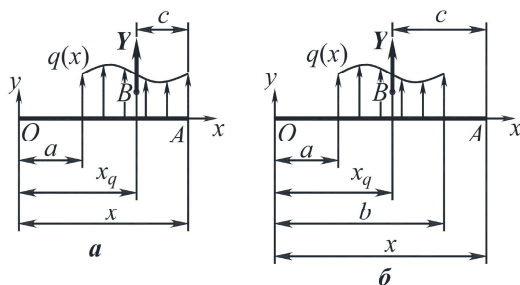


Рис. 6.4. Варіанти розміщення поперечного розподіленого навантаження:

a – розподілене навантаження в межах розглядуваної ділянки;

б – розподілене навантаження у поперечних ділянках

Розглянемо випадок на рис. 6.4,**a**. Момент від розподіленого навантаження $q(x)$ відносно точки A визначається наступною формулою:

$$M_{qA} = -Y \cdot c, \quad (3)$$

де $Y = \int_a^x q(s) ds$ – головний вектор $q(x) = q(s)$, який завжди направлений у бік додатного напрямку поперечної осі (осі y у нашому випадку);

$$x_q = \frac{\int_a^x s \cdot q(s) ds}{\int_a^x q(s) ds} = \frac{\int_a^x s \cdot q(s) ds}{Y} \quad \text{– це відстань від початку}$$

координат т. O до ЦМ т. B у місці прикладення вектора Y від розподіленого навантаження $q(x) = q(s)$, де фізичний зміст чисельника – статичний момент, а знаменника – площа;

$$c = x - x_q = x - \frac{\int_a^x s \cdot q(s) ds}{Y} \quad \text{– плече моменту.}$$

У підінтегральних виразах ми використали змінну s замість x , тому що одна з границь інтегрування позначена як x .

З урахуванням останніх формул, вираз (3) може бути переписаний наступним чином:

$$M_{qA} = -Y \cdot c = -Y \cdot \left(x - \frac{\int_a^x s \cdot q(s) ds}{Y} \right) = -x \cdot Y + \int_a^x s \cdot q(s) ds.$$

Остаточно момент M_{qA} відносно точки A від розподіленого навантаження $q(x)$ для випадку на рис. 6.4,**a** визначиться наступною формулою:

$$M_{qA} = -x \cdot \int_a^x q(s) ds + \int_a^x s \cdot q(s) ds, \quad (4)$$

де $q(s) = q(x)$, а змінна s введена для того, щоб відрізнити її від змінної x для підінтегральних виразів, коли одна з границь інтегрування позначена як x .

Якщо має місце випадок на рис. 6.4,**б**, то момент M_{qA} в цьому випадку визначається наступною залежністю:

$$M_{qA} = -x \cdot \int_a^b q(x) dx + \int_a^b x \cdot q(x) dx. \quad (5)$$

Для окремого випадку, коли $q(x) = q$, інтеграл (4), який визначає випадок на рис. 6.4,**a**, переписується наступним чином:

$$M_{qA} = -x \cdot \int_a^x q ds + \int_a^x q \cdot s ds = -\frac{q(x-a)^2}{2}, \quad (6)$$

а інтеграл (5), який визначає випадок на рис. 6.4,**б**, запишеться так:

$$M_{qA} = -x \cdot \int_a^b q(x) dx + \int_a^b x \cdot q(x) dx = -\frac{q \cdot (b-a)(2x-b-a)}{2}. \quad (7)$$

Під час складання рівняння рівноваги сил у проєкції на поперечну вісь y , головний вектор Y розподіленого навантаження $q(x)$ для схеми на рис. 6.4,**a** необхідно обчислювати за формулою

$$Y = \int_a^x q(s) ds. \quad (8)$$

А для схеми на рис. 6.4,**б** – за формулою

$$Y = \int_a^b q(x) dx. \quad (9)$$

Для окремого випадку, коли $q(x) = q$ формула (8), що відповідає схемі на рис. 6.4,**a**, переписється наступним чином:

$$Y = q \cdot (x - a), \quad (10)$$

а формула (9), що відповідає схемі на рис. 6.4,**б** запишеться таким чином:

$$Y = q \cdot (b - a). \quad (11)$$

З іншими формами та модифікаціями методу перерізів можна ознайомитися в [4, 5].

6.2. Метод початкових параметрів

6.2.1. Загальний опис

Метод початкових параметрів (МПП) – один з універсальних методів вирішення диференціальних рівнянь, який у випадку поперечного згину балок дає прості залежності для визначення параметрів деформування: згинальних моментів $M(x)$, зрізуючих сил $Q(x)$, кутів повороту $\alpha(x)$, прогинів $w(x)$. Метод початкових параметрів складається з основних залежностей, які є рішенням диференціального рівняння (ДР) поперечного

згину, або інтегралом цього рівняння та із залежностей, що становлять собою граничні умови (ГУ) та додаткові кінематичні умови (якщо такі є). Метод початкових параметрів може бути застосований і для непризматичних балок.

Під час складання розрахункової схеми в рамках розрахунку МПП необхідно дотримуватися наступних правил:

1. Якщо розподілене поперечне навантаження $q(x)$, Н/м не доходить до правого кінця балки, то це навантаження необхідно довести до правого кінця балки згідно з тим самим законом $q(x)$, а на ділянці, на якій ми доводили це навантаження, потрібно прикласти розподілене навантаження $q_1(x) = -q(x)$ за тим самим законом, але з протилежним знаком (рис. 6.5).

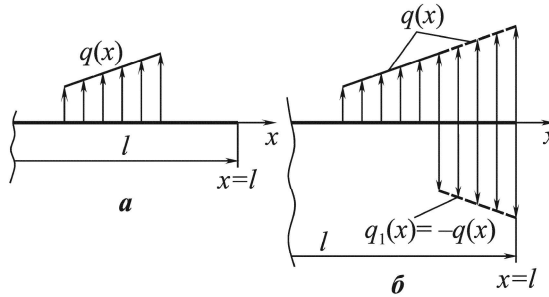


Рис. 6.5. Розподілене зовнішнє навантаження згідно з МПП:

a – задана схема; **б** – схема згідно з МПП

2. Якщо всередині прогону є шарніри, то їх треба відкинути, а замість них прикласти відповідні реакції – осьові зосереджені зусилля довільної спрямованості (вверх або вниз) паралельно напрямку поперечної осі. Додаткова кінематична умова до того ж, яка додається до основних чотирьох ГУ на місці відкинутих шарнірів, $w = 0$.

3. Закріплення на торцях не відкидаємо.

4. Зосереджені зусилля на торцях (моменти / сили) відносимо до ГУ і не включаємо в основні залежності МПП.

5. Зосереджені згинальні моменти всередині прогону включаємо до основних залежностей МПП з протилежним знаком.

Тобто якщо згинальний момент усередині прогону має напружок проти годинникової стрілки, то він включається до основних залежностей МПП зі знаком мінус. І навпаки.

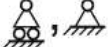
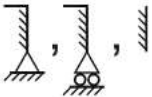
6. Зосереджені сили включаємо до основних залежностей МПП зі своїм знаком, як у рівняннях статки.

Загальні вирази для МПП можна знайти у [1, 2, 3].

6.2.2. Складення граничних умов

Потрібно звернути увагу на складання ГУ. У табл. 6.1 показані прості типи закріплень і відповідні ГУ, де R , M – реактивні зосереджені зусилля та моменти, які виникають на місці відкинутих в'язей.

Таблиця 6.1. Прості типи закріплень і відповідні ГУ

№ з/п	Назва	Ескіз закріплення	Відповідні реакції (у рамках ТТЗБ)	Вираз ГУ
1	Шарнір			$EIw'' = 0; \quad w = 0$
2	Жорстке защемлення			$w' = 0; \quad w = 0$
3	Вільний торець / кінець		–	$EIw''' = 0; \quad EIw'' = 0$

Необхідно зауважити, що ГУ поділяються на кінематичні та силові. До кінематичних ГУ відносять вирази, які містять кути повороту w' та прогини w . До силових ГУ відносять вирази, які містять вирази внутрішніх зусиль: зрізуючих сил EIw''' та згинальних моментів EIw'' . Якщо якийсь ГУ, яке містить вирази EIw''' , EIw'' , w' , w у табл. 6.1 не записано – це означає, що той вираз $\neq 0$, а відповідна ГУ є неоднозначною. Наприклад, для шарніру немає виразу для кута повороту w' , а це означає, що $w' \neq 0$; для вільного торця немає зовсім кінематичних ГУ, що рівносильно: $w' \neq 0$, $w \neq 0$, а це означає, що кінематичні умови неоднозначні.

Якщо ГУ складніші, наприклад, зосереджений момент або зусилля на торці балки, то під час складання ГУ необхідно виділяти елементарні об'єми торців і складати для них два рівняння рівноваги загалом (сил та моментів), додаючи до цих рівнянь два рівняння можливих кінематичних ГУ (із табл. 6.1). Із отриманих чотирьох рівнянь вибрати два однозначні.

Перед складанням рівнянь рівноваги розглядуваного торця необхідно відкинути на ньому в'язь, поставивши відповідну реакцію (див. табл. 6.1). Цю реакцію знаходити не потрібно, а лише її позначити. Якщо невідома реакція буде включена в будь-яке рівняння рівноваги, то отримане рівняння буде невизначеним (із-за невідомої реакції) і повинно бути відкинутим зі складу ГУ.

На рис. 6.6 показані виділені торцеві елементарні об'єми, а нижче – складені рівняння рівноваги за силами і моментами, які можна використати під час складання ГУ.

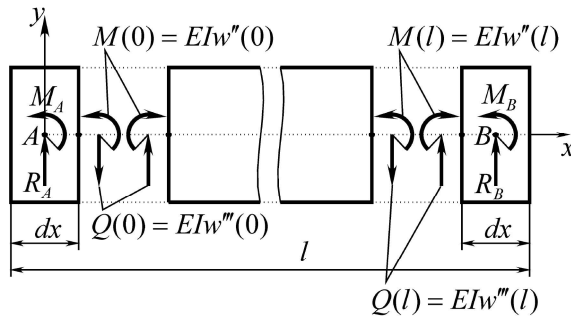


Рис. 6.6. Виділені торцеві елементарні об'єми

Силіві ГУ для лівого торця:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_Y = 0 : R_A - Q(0) = 0 &\Rightarrow R_A - EIw'''(0) = 0; \\ \sum M_A Z = 0 : M_A + M(0) - Q(0) \frac{dx}{2} = 0 &\Rightarrow M_A + EIw''(0) = 0 \end{aligned} \right\} \cdot (12)$$

$dx \rightarrow 0$

Силові ГУ для правого торця:

$$\left. \begin{aligned} \sum FY = 0: R_B + Q(l) = 0 \Rightarrow R_B + EIw'''(l) = 0; \\ \sum M_B Z = 0: M_B - M(l) - Q(l) \frac{dx}{2} = 0 \Rightarrow M_B - EIw''(l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$dx \rightarrow 0$

Для прикладу розглянемо складання ГУ для випадку на рис. 6.7,*а*, де M_1 – відомий зосереджений момент.

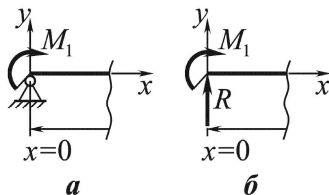


Рис. 6.7. Силові фактори для ГУ на лівому торці

Після відкидання шарніра отримуємо статичну еквівалентну схему (рис. 6.7,*б*), де R – невідома реакція, яку не треба знаходити. Згідно з рівняннями (12) для лівого торця запишемо дві силиві ГУ (два рівняння рівноваги), урахувавши те, що напрямок M_1 протилежний, ніж напрямок M_A на рис. 6.6:

$$R - EIw'''(0) = 0; \quad -M_1 + EIw''(0) = 0. \quad (14)$$

З табл. 6.1 визначаємо кінематичні ГУ:

$$w(0) = 0; \quad w'(0) \neq 0, \quad (15)$$

де вираз $w'(0) \neq 0$ означає, що шарнір не перешкоджає кутам повороту.

З чотирьох ГУ (14), (15) обираємо два однозначні: це другий вираз (14) та перший вираз (15). Практичне застосування МПП показано у наведеному нижче прикладі.

6.3. Приклад

Виконати проєктувальний розрахунок статично визначеної призматичної балки (рис. 6.8,*а*) з умов міцності, розв'язуючи задачу в наступній послідовності:

1. Методом перерізів знайти закони і побудувати епюри зрізуючих сил і згинальних моментів (кутів повороту та прогинів)¹.
2. Знайти небезпечний переріз балки, для якого підібрати профіль круглої, квадратної і двотаврової форми з умов міцності.
3. Побудувати епюри нормальних і дотичних напружень для кожного з підібраних перерізів у пункті 2.
4. Зробити порівняльний аналіз витрат матеріалу для вказаних перерізів.
5. Методом початкових параметрів знайти закони і побудувати епюри (згинальних моментів, зрізуючих сил) кутів повороту та прогинів.

Матеріал вала – сталь Ст3 ($\sigma_T = 235$ МПа, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па).

Рішення. На рис. 6.8 показана початкова схема, статично еквівалентна схема та схема згідно з методом початкових параметрів.

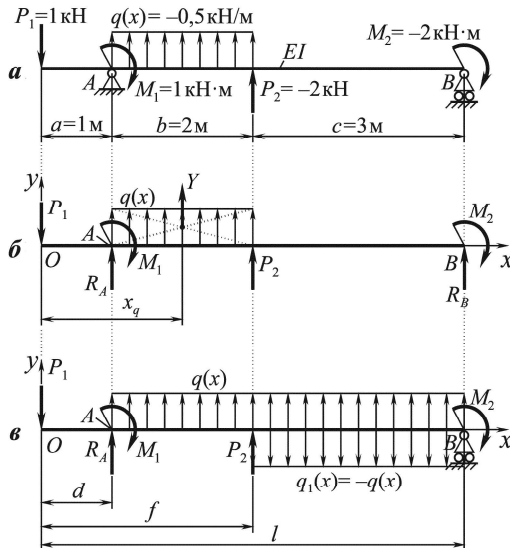


Рис. 6.8. Задана балка:

- a** – початкова схема; **б** – статично еквівалентна схема;
в – схема згідно з методом початкових параметрів

¹ Кути повороту та прогини в РГР не потрібно, але тут показано.

1. Установлення законів розподілу параметрів згину.

Класичним методом перерізів знаходимо закони розподілу: зрізуючих сил $Q(x)$, згинальних моментів $M(x)$, кутів повороту $\alpha(x)$ та прогинів $w(x)$.

Розрахунок внутрішніх зусиль. Відкидаємо в'язі та замінюємо систему статично еквівалентною (рис. 6.8,б). Під час поперечного згину осьові сили не беруться до уваги. Невідомими зусиллями є R_A та R_B , які можуть бути визначені з двох рівнянь статички. Цими двома рівняннями статички можуть бути: одне рівняння рівноваги сил та одне рівняння рівноваги моментів, або два рівняння рівноваги моментів, але записані відносно різних точок. Зупинимось на останньому варіанті, обравши як точки A і B .

Рівняння рівноваги за моментами запишуться наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_A Z = 0 : P_1 a - M_1 + Y(x_q - a) + P_2 b + R_B(b + c) - M_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_B = 0,6 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B Z = 0 : P_1(a + b + c) - M_1 - R_A(b + c) - Y(a + b + c - x_q) - \\ - P_2 c - M_2 = 0 \Rightarrow R_A = 3,4 \text{ кН} \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

де

$$Y = \int_a^{a+b} q(x) dx = \int_1^3 -0,5 dx = -1 \text{ кН}; \quad x_q = \frac{\int_a^{a+b} q(x) \cdot x dx}{Y} = 2 \text{ м}. \quad (17)$$

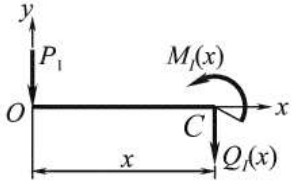
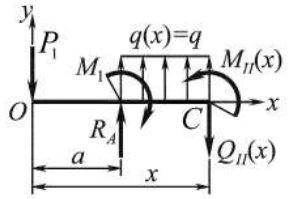
Виконаємо перевірку правильності знаходження R_A та R_B , використовуючи рівняння рівноваги за силами,

$$\begin{aligned} \Sigma F Y = 0 : -P_1 + R_A + Y + P_2 + R_B = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 + 3,4 + (-1) + (-2) + 0,6 = 0 \Rightarrow 0 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

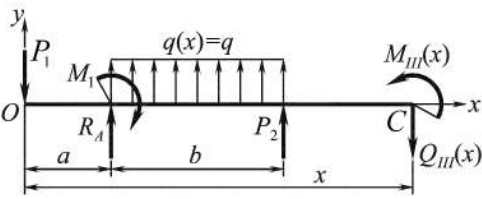
Перевірка (18) показала, що величини R_A та R_B знайдені правильно. Формули (17), (18) є універсальними та використовуються для всіх типів розподілених навантажень $q(x)$. До того ж розподілене навантаження $q(x)$ та границі інтегрування повинні бути визначені у глобальній координатній системі xOy (рис. 6.8,б).

Використовуючи класичний метод перерізів [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8], визначаємо внутрішні зусилля від згину $Q(x)$, $M(x)$, розрахунок яких подано в табл. 6.2. Інтеграли в табл. 6.2 записані як у загальному вигляді, що є більш зручним під час застосування математичних пакетів, так і для окремих випадків, коли $q(x) = q$ (див. розділ 6.1).

Таблиця 6.2. Розрахунок зрізуючих зусиль $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$ класичним методом перерізів

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
1	Ділянка I ($0 \leq x < a$)  $\Sigma F_Y = 0 : -P_1 - Q_I(x) = 0 \Rightarrow Q_I(x) = -1 \text{ кН};$ $\Sigma M_C Z = 0 : P_1 x + M_I(x) = 0 \Rightarrow M_I(x) = -1x, \text{ кН} \cdot \text{м}$
2	Ділянка II ($a \leq x < a + b$) 

Продовж. табл. 6.2

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
2	$\Sigma F_Y = 0 : -P_1 + R_A + \int_a^x q(s) ds - Q_{II}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -P_1 + R_A + qx - Q_{II}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{II}(x) = 2,9 - 0,5x \text{ кН};$ $\Sigma M_C Z = 0 : P_1x - M_1 - R_A(x-a) - x \int_a^x q(s) ds + \int_a^x s \cdot q(s) ds +$ $+ M_{II}(x) = 0 \Rightarrow P_1x - M_1 - R_A(x-a) - \frac{q(x-a)^2}{2} + M_{II}(x) =$ $= 0 \Rightarrow M_{II}(x) = 2,9x - 0,25x^2 - 2,65, \text{ кН} \cdot \text{м}$
3	Ділянка III ($a + b \leq x < a + b + c$)  $\Sigma F_Y = 0 : -P_1 + R_A + \int_a^{a+b} q(x) dx + P_2 - Q_{III}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -P_1 + R_A + qb + P_2 - Q_{III}(x) = 0 \Rightarrow Q_{III}(x) = -0,6 \text{ кН};$ $\Sigma M_C Z = 0 : P_1x - M_1 - R_A(x-a) - x \int_a^{a+b} q(x) dx + \int_a^{a+b} x \cdot q(x) dx -$ $- P_2(x-a-b) + M_{III}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow P_1x - M_1 - R_A(x-a) - qb \cdot \left(x - a - \frac{b}{2} \right) -$ $- P_2(x-a-b) + M_{III}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{III}(x) = 5,6 - 0,6x, \text{ кН} \cdot \text{м}$

Для зручності побудови епюр у табл. 6.3 в компактному вигляді виписано закони $Q(x)$ та $M(x)$, отримані класичним методом перерізів. Для кожної ділянки кожен з цих законів виписаний у глобальній системі координат. Початок координат завжди на лівому торці.

Таблиця 6.3. Закони $Q(x)$ та $M(x)$ за класичним методом перерізів

№ з/п	Ділянка	$Q(x)$, кН	$M(x)$, кН·м
1	I, $x \in [0; a = 1 \text{ м})$	-1	$-x$
2	II, $x \in [a = 1 \text{ м}; a + b = 3 \text{ м})$	$2,9 - 0,5x$	$2,9x - 0,25x^2 - 2,65$
3	III, $x \in [a + b = 3; a + b + c = 6 \text{ м})$	-0,6	$5,6 - 0,6x$

Отримані закони розподілу за класичним методом перерізів потрібно перевіряти за всіма ділянками, тому що закони внутрішніх сил для кожної ділянки визначаються незалежно одна від одної.

Виконаємо вибірккову перевірку законів $Q(x)$ та $M(x)$.

$$\begin{aligned} |Q_{\text{III}}(a + b + c = 6)| &= |R_B| \Rightarrow 0,6 = 0,6; \\ |M_{\text{III}}(a + b + c = 6)| &= |M_2| \Rightarrow 2 = 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Перевірка (19) задовольняється. На рис. 6.9 подано епюри $Q(x)$ та $M(x)$.

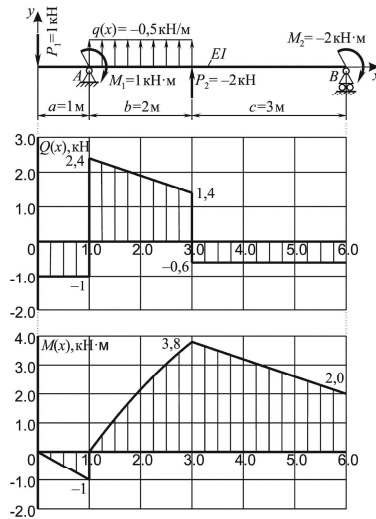


Рис. 6.9. Епюри зрізуючих зусиль $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$

Розрахунок кінематичних параметрів. Кут повороту α , рад та прогин w , м, поперечних перерізів згідно з класичним методом перерізів розраховується за формулами

$$\alpha_i(x) = \alpha_{i-1}(d_{i-1}) + \int_{d_{i-1}}^x \frac{M_i(s)}{EI_i(s)} ds; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (20)$$

$$M_i(s) = M_i(x); \quad I_i(s) = I_i(x),$$

$$w_i(x) = w_{i-1}(d_{i-1}) + \int_{d_{i-1}}^x \alpha_i(s) ds; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (21)$$

$$\alpha_i(s) = \alpha_i(x),$$

де i – індекс розглядуваної ділянки; $i-1$ – індекс попередньої ділянки; d_{i-1} – довжина попередньої ділянки; n – кількість ділянок.

Величини α_0, w_0 (при $i = 1$) визначаються з кінематичних умов уже після того, як записані всі вирази для α та w . Використовуючи закони $M(x)$ з табл. 6.3, запишемо вирази для кутів поворотів α та прогинів w , які визначені за класичним методом перерізів,

$$\alpha_1(x) = \alpha_0 + \int_0^x \frac{M_I(s)}{EI_I(s)} ds = \alpha_0 + \int_0^x \frac{-s}{EI} dx = \alpha_0 - \frac{500 x^2}{EI}, \text{ рад,}$$

$$w_1(x) = w_0 + \int_0^x \alpha_1(s) ds = w_0 + \int_0^x \left(\alpha_0 - \frac{500 s^2}{EI} \right) ds = w_0 + \alpha_0 x - \frac{166,7 x^3}{EI}, \text{ м,}$$

$$\alpha_2(x) = \alpha_1(a) + \int_a^x \frac{M_{II}(s)}{EI_{II}(s)} ds = \alpha_1(1) + \int_{a=1}^x \frac{2900 s - 250 s^2 - 2650}{EI} ds =$$

$$= \alpha_0 - \frac{500}{EI} + \frac{1450 x^2 - 83,3 x^3 - 2650 x + 1283,3}{EI}, \text{ рад;}$$

$$w_2(x) = w_1(a) + \int_{a=1}^x \alpha_2(s) ds = w_0 + \alpha_0 - \frac{166,6}{EI} +$$

$$+ \alpha_0(x-1) + \frac{483,3 x^3 - 20,8(3) x^4 - 1325 x^2 + 783,3 x + 79,1(6)}{EI}, \text{ м;}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3(x) &= \alpha_2(a+b) + \int_{a+b}^x \frac{M_{III}(s)}{EI_{III}(s)} ds = \alpha_2(3) + \int_3^x \frac{5600 - 600s}{EI} ds = \\
&= \alpha_0 + \frac{3633,3}{EI} + \frac{5600x - 300x^2 - 14100}{EI}, \text{ рад}; \\
w_3(x) &= w_2(a+b) + \int_{a+b=3}^x \alpha_3(s) ds = w_0 + 3\alpha_0 + \frac{1700}{EI} + \\
&+ \alpha_0(x-3) + \frac{8900 + 2800x^2 - 100x^3 - 10466,6x}{EI}, \text{ м}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Невідомі α_0 та w_0 знайдуться з наступних кінематичних умов:

$$\left. \begin{aligned} w(a) = 0 &\Rightarrow w_1(a=1) = 0; \\ w(l) = 0 &\Rightarrow w_3(a+b+c=6) = 0 \end{aligned} \right\}, \tag{23}$$

які фізично відповідають шарнірам.

Підпорядковуючи вирази (22) для кутів повороту α_i та прогинів w_i кінематичним умовам (23), знаходимо

$$\alpha_0 = -\frac{5433,3}{EI}, \quad w_0 = \frac{5600}{EI}. \tag{24}$$

Підставляючи (24) у (22) після спрощень, отримуємо наступні вирази для кутів повороту α_i та прогинів w_i для кожної i -ї ділянки, які представлені в табл. 6.4 і записані у глобальній координатній системі.

Таблиця 6.4. Закони $\alpha(x)$ та $w(x)$ у глобальних координатах

№ з/п	Ділянка	$\alpha(x)$, рад	$w(x)$, м
1	I, $x \in [0; a = 1 \text{ м})$	$\frac{-500x^2 - 5433,3}{EI}$	$\frac{5600 - 33,333x(5x^2 + 163)}{EI}$
2	II, $x \in [a = 1 \text{ м}; a + b = 3 \text{ м})$	$\frac{-83,3x^3 + 1450x^2}{EI} + \frac{-2650x - 4650}{EI}$	$\frac{-20,8(3)x^4 + 483,3x^3}{EI} + \frac{-1325x^2 - 4650x + 5512,5}{EI}$

Продовж. табл. 6.4

№ з/п	Ділянка	$\alpha(x)$, рад	$w(x)$, м
3	III, $x \in [a + b = 3; a + b + c = 6 \text{ м})$	$\frac{5600x - 300x^2 - 15900}{EI}$	$\frac{-100x^3 + 2800x^2}{EI} + \frac{-15900x + 16200}{EI}$

Виконаємо перевірку залежностей у табл. 6.4 відповідно до кінематичних умов (23)

$$\left. \begin{aligned} w_1(a=1) = 0 &\Rightarrow \frac{5600 - 33,333 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 1^2 + 163)}{EI} = 0; \\ w_3(a+b+c=3) = 0 &\Rightarrow \frac{-100 \cdot 6^3 + 2800 \cdot 6^2}{EI} + \\ &+ \frac{-15900 \cdot 6 + 16200}{EI} = 0 \end{aligned} \right\} . \quad (25)$$

Перевірка (25) свідчить про правильність виразів для кінематичних параметрів, наведених у табл. 6.4. Кінематичні параметри іноді бувають необхідні, коли ведеться розрахунок балки на жорсткість. Необхідно зазначити, що кінематичні параметри були визначені без урахування зсуву. Якщо відношення довжини балки l до її висоти h (вимірюної у площині згину) менше 10, тобто $l/h < 10$, то необхідно додатково брати до уваги деформації зсуву, які викликані поперечними зусиллями.

Епюри кутів повороту $\alpha(x)$ та прогинів $w(x)$, отримані методом перерізів, співпадають з відповідними епюрами $\alpha(x)$ та $w(x)$, які будуть отримані методом початкових параметрів (див. пункт 5).

2. Підбір поперечного перерізу. Підберемо поперечні перерізи з умов міцності. Умова міцності запишеться наступним чином:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (26)$$

де $[\sigma]$ – допустимі напруження, які визначаються за формулою

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\tau}}{n_{\tau}} = \frac{235}{1,5} = 160 \text{ МПа},$$

$\sigma_{\max}$ – максимальні нормальні напруження, що діють у перерізі, які визначаються виразом

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_{\min}}, \quad (27)$$

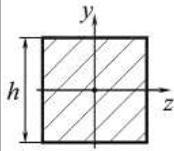
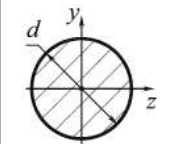
де $|M|_{\max} = 3,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ – найбільше за модулем значення згинального моменту, $\text{кН} \cdot \text{м}$, яке визначене в небезпечному перерізі; $W_{\min}$ – мінімальний осьовий момент опору, м^3 .

Беручи до уваги (26) і (27), отримаємо формулу для обчислення мінімального необхідного осьового моменту опору

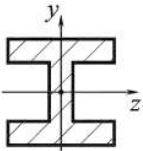
$$W_{\min} \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]}. \quad (28)$$

У табл. 6.5 наведено обрані геометричні характеристики деяких поперечних перерізів для подальших розрахунків, де I_z – головний центральний момент інерції відносно осі z ; $W_{z \min}$ – мінімальний осьовий момент інерції відносно осі z .

Таблиця 6.5. Обрані геометричні характеристики деяких поперечних перерізів

№ з/п	Назва	Переріз	I_z	$W_{z \min}$
1	Квадрат		$I_z = \frac{h^4}{12}$	$W_{z \min} = \frac{h^3}{6}$
2	Круг		$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_{z \min} = \frac{\pi d^3}{32}$

Продовж. табл. 6.5

№ з/п	Назва	Переріз	I_z	$W_{z \min}$
3	Двотавр		$I_z = \text{за сортамен-том}$	$W_{z \min} = \text{за сорта-МЕНТОМ}$

Використовуючи формулу (28) та формули табл. 6.5, знайдемо розміри квадратного, круглого та двотаврового перерізів.

Квадратний переріз

$$W_{\min} \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{h^3}{6} \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow h \geq \sqrt[3]{\frac{6|M|_{\max}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 3,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}} = 0,052 \text{ м.}$$

Круглий переріз

$$W_{\min} \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M|_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,062 \text{ м.}$$

Якщо планується застосування балок з квадратним, круглим або будь-яким іншим профілем, то розміри профілів необхідно скоригувати згідно з тим чи іншим сортаментом таким чином, щоб вони були не менше від розрахованих. У такому випадку треба писати: «беремо розмір квадратного профілю $h = 0,055 \text{ м} = 55 \text{ мм}$ згідно з таким-то стандартом».

Двотавровий переріз

Для профілів, що визначаються з сортаменту, послідовність дій наступна: спочатку визначається мінімальний необхідний осьовий момент опору відносно осі z (відносно головної центральної осі, яка поперечна площині згину) за (28).

$$W_{z \min} = \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{3,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,375 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 23,75 \text{ см}^3.$$

Значення осьового моменту опору прийнятого поперечного перерізу з сортаменту повинно мінімально перевищувати розраховане значення $23,75 \text{ см}^3$.

Беремо двотавр № 10 за ДСТУ 8768:2018 (ГОСТ 8239-72) з $W_{z \min} = 39,7 \text{ см}^3$. Під час виконання розрахунково-графічної роботи можна використовувати будь-який сортамент.

3. Побудова епюр нормальних і дотичних напружень.

Обчислення напружень для простих перерізів. Під час поперечного згину в (поперечних) перерізах балки виникають нормальні σ і дотичні τ напруження. Нормальні напруження σ (рис. 6.10) визначаються залежністю

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I_z}, \quad (29)$$

де M – значення згинального моменту внутрішніх сил зі своїм знаком у розглядуваному перерізі, Н·м; y – відстань від нейтральної осі до розглядуваної точки (зі своїм знаком), м; I_z – головний центральний момент інерції відносно поперечної осі до площини згину, м⁴.

Екстремальні значення нормальних напружень визначаються залежністю

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|}{W_{\min}}, \quad (30)$$

де $W_{\min}$ – мінімальний осьовий момент опору, м³.

Дотичні напруження τ (рис. 6.10) визначаються залежністю

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^*(y)}{I_z \cdot t(y)}, \quad (31)$$

де Q – значення зрізуючих зусиль внутрішніх сил зі своїм знаком у розглядуваному перерізі, Н; $t(y)$ – товщина виміряна вздовж лінії відсічі 2 для розглядуваної точки (т. А для рис. 6.10); $S_z^*(y)$ – значення статичного моменту відсіченої площі I (рис. 6.10) відносно НО 3, який визначається залежністю

$$S_z^*(y) = F_b \cdot y_c, \quad (32)$$

де F_b – площа відсіченої частини, або відсічена площа, м²; y_c – відстань від ЦМ відсіченої площі до НО, м.

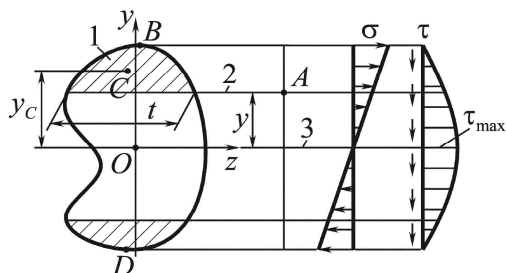


Рис. 6.10. Нормальні σ і дотичні τ напруження в поперечному перерізі балки, викликані поперечним згином в одній з головних площин

На рис. 6.10 показано наступне: zOy – головні центральні осі всього поперечного перерізу; B, D – найбільш віддалені точки від нейтральної осі (НО) z , уздовж осі y ; C – ЦМ відсіченої площі 1 , яка відсікається лінією відсічі 2 . Лінія відсічі 2 проводиться через розглядувану точку A паралельно до НО z . Необхідно зазначити, що відсічена площа (рис. 6.10) визначається між лінією відсічі та крайньою точкою перерізу (точки B або D) таким чином, щоб не перетнути НО.

Необхідні геометричні характеристики елементарних плоских фігур представлено в табл. 6.6.

Таблиця 6.6. Обрані геометричні характеристики деяких простих перерізів

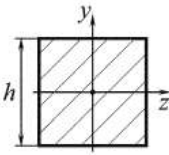
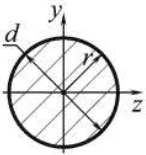
№ з/п	Назва величини	Позначення	Форми плоских фігур		
			квадрат	прямокутник	круг
1	Ескіз перерізу	–			
2	Характерний розмір, м	–	$h = 0,052$	–	$r = 0,031$
3	Головний центральний момент інерції, м^4	I_z	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$

Продовж. табл. 6.6

№ з/п	Назва величини	Позначення	Форми плоских фігур		
			квадрат	прямокутник	круг
4	Мінімальний осьовий момент опору, м ³	$W_{z \min}$	$\frac{h^3}{6}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$
5	Статичний момент відсіченої площі, м ³	$S_z^*(y)$	$\frac{h}{8}(h^2 - 4y^2),$ $y \in [0; h/2]$	$\frac{b}{8}(h^2 - 4y^2),$ $y \in [0; h/2]$	$\frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$ $y \in [0; r]$
6	Статичний момент відсіченої площі відносно НО, м ³	S_z^*	$\frac{h^3}{8}$	$\frac{bh^2}{8}$	$\frac{2}{3}r^3$
7	Товщина від y , м	$t(y)$	h	b	$2\sqrt{r^2 - y^2}$
8	Товщина на рівні НО, м	t	h	b	$d = 2r$

У небезпечному перерізі значення внутрішніх зусиль зі своїми знаками становить: $M = 3800 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $Q = 1400 \text{ Н}$. Значення параметрів простих геометричних фігур становить: розмір сторони квадрата – $h = 0,052 \text{ м}$; діаметр круга – $d = 0,062 \text{ м}$ (радіус круга – $r = 0,031 \text{ м}$). Підставляючи ці числові параметри в табл. 6.6, отримаємо наступні числові дані геометричних характеристик, які представлені в табл. 6.7.

Таблиця 6.7. Числові геометричні характеристики з табл. 6.6

№ з/п	Назва величини	Позначення	Форми плоских фігур	
			квадрат	круг
1	Ескіз перерізу	–		
2	Характерний розмір, м	–	$h = 0,052$	$r = 0,031$
3	Головний центральний момент інерції, м ⁴	I_z	$6,0930 \cdot 10^{-7}$	$7,2533 \cdot 10^{-7}$

Продовж. табл. 6.7

№ з/п	Назва величини	Позначення	Форми плоских фігур	
			квадрат	круг
4	Мінімальний осьовий момент опору, м ³	$W_{z \min}$	$2,3435 \cdot 10^{-5}$	$2,3398 \cdot 10^{-5}$
5	Статичний момент відсіченої площі, м ³	$S_z^*(y)$	$\frac{0,052}{8}(0,052^2 - 4y^2)$, $y \in [0; 0,026]$	$\frac{2}{3}(0,031^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$, $y \in [0; 0,031]$
6	Статичний момент відсіченої площі відносно НО, м ³	S_z^*	$1,7576 \cdot 10^{-5}$	$1,9861 \cdot 10^{-5}$
7	Товщина, м	$t(y)$	0,052	$2\sqrt{0,031^2 - y^2}$
8	Товщина на рівні НО, м	t	0,052	0,062

Маючи числові геометричні характеристики з табл. 6.7, у табл. 6.8 обчислено значення нормальних σ за формулою (29) та дотичних τ за формулою (31) напружень у характерних точках, де ці напруження приймають свої найбільші значення.

Таблиця 6.8. Обчислення екстремальних значень напружень для простих перерізів

№ з/п	Напруження, Па	Форми плоских фігур	
		квадрат	круг
1	σ у крайній верхній точці	$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I_z} =$ $= -\frac{3800 \cdot 0,026}{6,0930 \cdot 10^{-7}} =$ $= -1,6215 \cdot 10^8$	$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I_z} =$ $= -\frac{3800 \cdot 0,031}{7,2533 \cdot 10^{-7}} =$ $= -1,6241 \cdot 10^8$
2	σ у крайній нижній точці	$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I_z} =$ $= -\frac{3800 \cdot (-0,026)}{6,0930 \cdot 10^{-7}} =$ $= 1,6215 \cdot 10^8$	$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I_z} =$ $= -\frac{3800 \cdot (-0,031)}{7,2533 \cdot 10^{-7}} =$ $= -1,6241 \cdot 10^8$

Продовж. табл. 6.8

№ з/п	Напруження, Па	Форми плоских фігур	
		квадрат	круг
3	τ на рівні НО	$\tau = \frac{Q \cdot S_z^*}{I_z \cdot t} =$ $= \frac{1400 \cdot 1,7576 \cdot 10^{-5}}{6,0930 \cdot 10^{-7} \cdot 0,052} =$ $= 7,7663 \cdot 10^5$	$\tau = \frac{Q \cdot S_z^*}{I_z \cdot t} =$ $= \frac{1400 \cdot 1,9861 \cdot 10^{-5}}{7,2533 \cdot 10^{-7} \cdot 0,062} =$ $= 6,1829 \cdot 10^5$

У табл. 6.9 подано значення напружень з табл. 6.8 у МПа.

Таблиця 6.9. Значення екстремальних значень напружень для простих перерізів

№ з/п	Напруження, МПа	Форми плоских фігур	
		квадрат	круг
1	σ у крайній верхній точці	-162,2	-162,4
2	σ у крайній нижній точці	162,2	162,4
3	τ на рівні НО	0,8	0,6

Епюри напружень для квадратного та круглого перерізу подібні до тих, що зображені на рис. 6.10, а тому тут не показані. Необхідно зазначити, що у практичних розрахунках найбільшого дотичного напруження на рівні НО для круглого перерізу можна використовувати наступну формулу:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_z^*}{I_z \cdot t} = \frac{Q \cdot \frac{2}{3} r^3}{\frac{\pi r^4}{4} \cdot 2r} = \frac{Q \cdot \frac{4}{3}}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F},$$

де $F = \pi r^2$ – площа круга.

Аналогічно для прямокутного перерізу можна отримати формулу найбільших дотичних напружень на рівні НО

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_z^*}{I_z \cdot t} = \frac{Q \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{Q \cdot \frac{12}{8}}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F},$$

де $F = bh$ – площа прямокутника.

Напруження у двотавровому перерізі. Розрахунок складених тонкостінних перерізів, таких як двотавр, має свої особливості. На рис. 6.11, *a* показано симетричний двотавр, який має характерні точки 1, 2, 3, 4, а осі zOy є головними центральними. Точки 2 і 3 фізично співпадають і знаходяться на стику полки та стінки і введені для пояснення особливостей переходу від полиці до стінки.

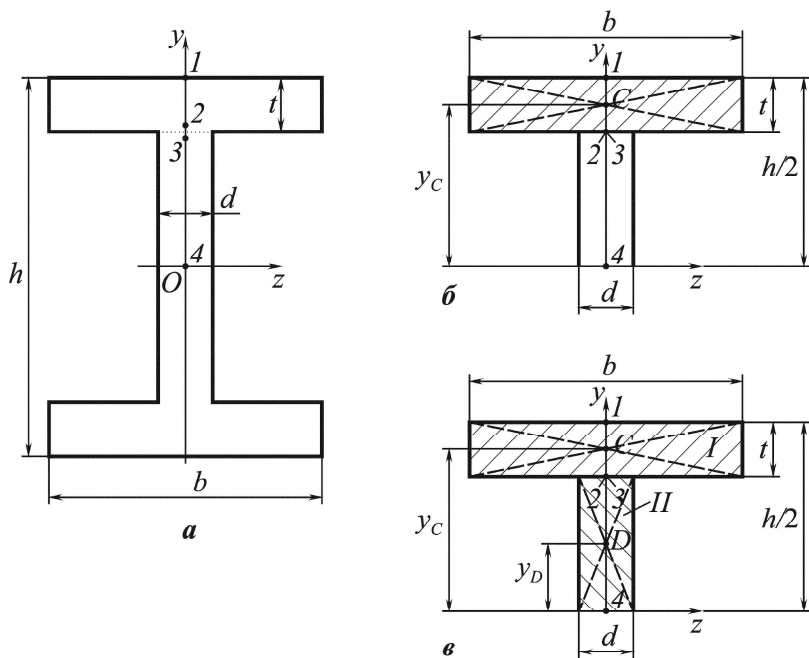


Рис. 6.11. Симетричний двотавр

Що стосується обчислення нормальних напружень σ за формулою (29), то координати у точок 1, 2, 3, 4 наступні: $y_1 = h/2$;

$y_2 = h/2 - t$; $y_3 = y_2$; $y_4 = 0$. У табл. 6.10 показано розрахунок нормальних напружень для точок 1, 2, 3, 4 для прийнятого поперечного перерізу № 10 за ДСТУ 8768:2018 (ГОСТ 8239-72) з наступним розмірами: $h = 100$ мм; $b = 55$ мм; $d = 4,5$ мм; $t = 7,2$ мм; $I_z = 198$ см⁴.

Таблиця 6.10. Розрахунок нормальних напружень σ перерізу двотавра

№ i -ї точки	Координата y_i , м		Значення нормального напруження σ за формулою $\sigma_i = -\frac{M \cdot y_i}{I_z}$, МПа
	Формула	Значення	
1	$h/2$	0,05	-96,0
2	$h/2 - t$	0,0428	-82,1
3	$h/2 - t$	0,0428	-82,1
4	0	0	0,0

Значення нормальних напружень σ у нижній частині двотавра (нижче НО) будуть такі самі, як і для верхньої, але з протилежним знаком.

Розглянемо обчислення дотичних напружень за формулою (31), особливістю якої є обчислення статичного моменту відсіченої частини. Для крайніх точок дотичні напруження τ завжди дорівнюють нулю, тому що відсічена площа рівна нулю. А тому дотичні напруження в точці 1 дорівнюють нулю, тобто $\tau_1 = 0$.

Точка 2 (рис. 6.11,б). Площа F_g відсіченої частини становить $F_g = b \cdot t$. Відстань y_C від ЦМ відсіченої частини до НО дорівнює $y_C = \frac{h}{2} - \frac{t}{2}$. Статичний момент S_{z2}^* відсіченої частини для точки 2 визначається залежністю $S_{z2}^* = F_g \cdot y_C = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$.

Товщина t у формулі (31) (не слід плутати з t на рис. 6.11) дорівнює ширині полиці b , тому що точка 2 належить формально полиці.

Точка 3 (рис. 6.11,б). Точка 3 знаходиться фізично в тому ж самому місці, що і точка 2, а тому відсічена площа є такою ж, як для точки 2, тобто статичний момент відсіченої площі для точки 3 становить $S_{z2}^* = S_{z3}^*$. Проте товщина t у формулі (31) становить d , тому що точка 3 формально належить стінці.

Точка 4 (рис. 6.11,в). Точка 4 лежить на НО. Статичний момент відсіченої площі, як лінійна функція, має властивість суперпозиції. Скориставшись цим, розіб'ємо складену фігуру на дві прості фігури I та II (рис. 6.11,в), а статичний момент відсіченої частини для точки 4 може бути записано так: $S_{z4}^* = S_{zI}^* + S_{zII}^*$, де як видно з рис. 6.11,в, $S_{zI}^* = S_{z2}^* = S_{z3}^*$. Статичний момент S_{zII}^* обчислюється наступною залежністю:

$$S_{zII}^* = F_{eII} \cdot y_D = \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2,$$

де $y_D = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)$; площа відсіченої частини II фігури $F_{eII} = \left(\frac{h}{2} - t \right) d$. Товщина t у формулі (31) становить d для точки 4.

У табл. 6.11 показано розрахунок дотичних напружень τ для точок 1, 2, 3, 4 для прийнятого поперечного перерізу № 10 за ДСТУ 8768:2018 (ГОСТ 8239-72).

Таблиця 6.11. Розрахунок дотичних напружень τ перерізу двотавра

№ і-ї точки	Статичний момент відсіченої частини S_{zi}^* , м ³		Товщина (ширина) t , м		Значення дотичного напруження τ за формулою $\tau_i = \frac{Q \cdot S_{zi}^*}{I_z \cdot t}$, МПа
	Формула	Значення	Формула	Значення	
1	0	0	b	0,055	0,0
2	$bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$	$1,8374 \cdot 10^{-5}$	b	0,055	0,2
3	$bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$	$1,8374 \cdot 10^{-5}$	d	0,0045	2,9

Продовж. табл. 6.11

№ i -ї точки	Статичний момент відсіченої частини S_{zp}^* , м ³		Товщина (ширина) t , м		Значення дотичного напруження τ за формулою $\tau_i = \frac{Q \cdot S_{zi}^*}{I_z \cdot t}$, МПа
	Формула	Значення	Формула	Значення	
4	$\frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 + bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$	$2,2496 \cdot 10^{-5}$	d	0,0045	3,5

На рис. 6.12 показані епюри нормальних σ та дотичних τ напружень.

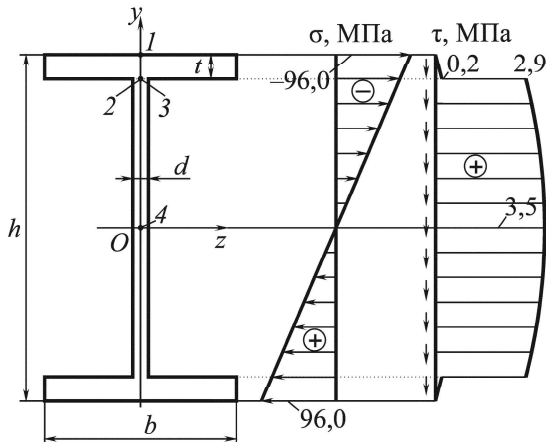


Рис. 6.12. Нормальні та дотичні напруження від поперечного згину в перерізі двотавра

Проведемо оцінку міцності двотавра у його характерних точках 1, 2, 3, 4 за третьою та четвертою теоріями міцності і зробимо відповідні висновки. Оцінка міцності двотаврового перерізу наведена в табл. 6.12, де $\sigma_{\text{пр}}$ – приведені напруження за однією з теорій міцності. Допустимі напруження $[\sigma] = 160$ МПа.

Таблиця 6.12. Оцінка міцності двотаврового перерізу в характерних точках

№ <i>i</i> -ї точки	σ_p , МПа	τ_p , МПа	3-я теорія міцності		4-а теорія міцності	
			$\sigma_{пр} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_{пр} \leq [\sigma]$	$\sigma_{пр} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$\sigma_{пр} \leq [\sigma]$
1	-96,0	0,0	95,96	так	95,96	так
2	-82,1	0,2	82,14	так	82,14	так
3	-82,1	2,9	82,34	так	82,29	так
4	0,0	3,5	7,07	так	6,12	так

Як бачимо з табл. 6.12, міцність двотавра за всіма характерними точками забезпечена для 3-ї та 4-ї теорій міцності. Необхідно зауважити, що для такого специфічного перерізу як двотавр потрібно враховувати дотичні напруження в горизонтальному напрямку на полицях. Детальніше про це див. у [1, с. 335].

4. Порівняльний аналіз витрат матеріалу. Порівняємо маси балок з квадратним, круглим та двотавровим перерізами. Так як задана балка є призматичною, то достатньо порівняти площі поперечних перерізів. У табл. 6.13 подано це порівняння.

Таблиця 6.13. Порівняння площ поперечних перерізів

№ з/п	Переріз	Характерний розмір	Площа F (формула)	Площа F (значення), м ²	Відношення площі до площі двотавра
1	Квадратний	$h = 0,052$ м	$F = h^2$	$2,728 \cdot 10^{-3}$	2,27
2	Круглий	$d = 0,062$ м	$F = \frac{\pi d^2}{4}$	$3,049 \cdot 10^{-3}$	2,54
3	Двотавр	–	з сортаменту	$12 \text{ см}^2 = 1,2 \cdot 10^{-3}$	1

З табл. 6.13 можна зробити висновок, що балка з квадратним перерізом у 2,27 разів важча, а балка з круглим перерізом у 2,54 рази важча за балку з двотавровим перерізом. Таким чином використання тонкостінних перерізів є доцільнішим,

тому що вони забезпечують ту ж саму міцність, маючи масу в рази меншу за суцільні перерізи. Вартість матеріалу тонкостінної балки буде у стільки ж разів менша, проте під час повного аналізу щодо прийняття рішення про використання того чи іншого поперечного перерізу треба враховувати вартість виготовлення та інші фактори.

Для бажаючих пропонується дослідити можливість застосування квадратного коробчастого перерізу та трубчатого круглого і порівняти їх з двотавром. Тут іде мова вже про порівняння тонкостінних перерізів між собою.

Іноді виникає потреба підібрати поперечний переріз балки з умов жорсткості. У цьому разі необхідно знаходити кінематичні параметри.

5. Застосування методу початкових параметрів. Розрахункова схема за методом початкових параметрів зображена на рис. 6.8,в.

Диференціальне рівняння згину балки на рис. 6.8,в запишеться наступним чином:

$$EIw^{IV}(x) = \parallel_d q(x) + \parallel_f q_1(x) = \parallel_d q - \parallel_f q. \quad (33)$$

Інтегруючи (33) один раз, отримаємо вираз для зрізуючих зусиль $Q(x)$

$$\begin{aligned} Q(x) = EIw'''(x) &= \parallel_d q(x) + \parallel_f q_1(x) = \parallel_d \int_d^x q ds - \parallel_f \int_f^x q ds + \parallel_d R_A + \parallel_f P_2 + A = \\ &= \parallel_d q(x-d) - \parallel_f q(x-f) + \parallel_d R_A + \parallel_f P_2 + A. \end{aligned} \quad (34)$$

Інтегруючи (34) один раз, отримаємо вираз для згинальних моментів $M(x)$

$$\begin{aligned} M(x) = EIw''(x) &= \parallel_d \int_d^x q(s-d) ds - \parallel_f \int_f^x q(s-f) ds + \parallel_d \int_d^x R_A ds + \\ &+ \parallel_f \int_f^x P_2 ds + \parallel_d M_1 + Ax + B = \\ &= \parallel_d \frac{q(x-d)^2}{2} - \parallel_f \frac{q(x-f)^2}{2} + \parallel_d R_A(x-d) + \parallel_f P_2(x-f) + \parallel_d M_1 + Ax + B. \end{aligned} \quad (35)$$

Якщо одна з границь інтегрування позначена як x (а в нашому випадку x – це верхня змінна межа у формулах (34), (35), то в підінтегральному виразі ми замінюємо символ x на будь-який інший, так щоб заміна не співпадала ні з однією границь інтегрування (ми замінили x на s), а далі звичайно інтегруємо.

Наприклад, інтеграл

$$\begin{aligned} \left\| \int_d^x q(s-d) ds \right. &= \left\| \begin{matrix} u = s-d \\ du = ds \end{matrix} \right\| = \left\| \int_{s=d}^x qu du \right. = \left. \frac{qu^2}{2} \right\|_{s=d}^{s=x} = \\ &= \left. \frac{q(s-d)^2}{2} \right\|_{s=d}^{s=x} = \frac{q(x-d)^2}{2} - \frac{q(d-d)^2}{2} = \frac{q(x-d)^2}{2}. \end{aligned}$$

Поділивши вираз (35) на EI , а потім проінтегрувавши отриманий результат один раз, отримаємо вираз для кутів повороту $\alpha(x)$

$$\begin{aligned} \alpha(x) = w'(x) = & \left\| \frac{q(x-d)^3}{6EI} - \right\|_f \frac{q(x-f)^3}{6EI} + \left\| \frac{R_A(x-d)^2}{2EI} + \right. \\ & \left. + \right\|_f \frac{P_2(x-f)^2}{2EI} + \left\| \frac{M_1(x-d)}{EI} + \frac{Ax^2}{2EI} + \frac{Bx}{EI} + C. \end{aligned} \quad (36)$$

Інтегруючи (36) один раз, отримаємо вираз для прогинів

$$\begin{aligned} w(x) = & \left\| \frac{q(x-d)^4}{24EI} - \right\|_f \frac{q(x-f)^4}{24EI} + \left\| \frac{R_A(x-d)^3}{6EI} + \right. \\ & \left. + \right\|_f \frac{P_2(x-f)^3}{6EI} + \left\| \frac{M_1(x-d)^2}{2EI} + \frac{Ax^3}{6EI} + \frac{Bx^2}{2EI} + Cx + D. \end{aligned} \quad (37)$$

A, B, C, D, R_A – невідомі, які потрібно знайти, підставивши отримані рішення (34) ÷ (37) у граничні умови (ГУ) та додаткові кінематичні умови.

Покажемо вивід ГУ в загальному випадку. Щоб записати ГУ потрібно розглядати рівновагу елементарного об'єму кожного з торців, розрахункові схеми яких зображено на рис. 6.13. Додатково треба розглядати кінематично можливі переміщення торців. Тобто для кожного з торців можна записати чотири

ГУ: два силові та два кінематичні. З чотирьох ГУ потрібно обрати два однозначні. Реакція R_B виникає від відкинутого шарніра і є невідомою, але шукати її не потрібно. Якщо R_B буде включено в якусь ГУ, то ця ГУ стане невизначеною, яку потрібно відкинути від подальшого розгляду.

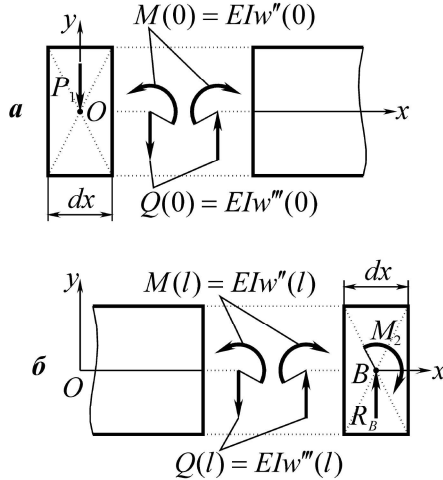


Рис. 6.13. Елементарні об'єми торців:
а – лівий торець; б – правий торець

Рівняння рівноваги та кінематичні параметри для лівого торця (рис. 6.13,а) запишуться наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_Y = 0 : -P_1 - Q(0) = 0 &\Rightarrow -P_1 - EIw'''(0) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow EIw'''(0) + P_1 = 0; \\ \sum M_O Z = 0 : -Q(0) \cdot \frac{dx}{2} + M(0) = 0 &\Rightarrow M(0) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow EIw''(0) = 0; \\ \alpha(0) \neq 0; \quad w(0) \neq 0 \end{aligned} \right\} . \quad (38)$$

З чотирьох умов (38) обираємо дві однозначні. Це умови перша та друга.

Рівняння рівноваги та кінематичні параметри для правого торця (рис. 6.13,б) запишуться:

$$\left. \begin{aligned} \sum FY = 0 : Q(l) + R_B = 0 ; \\ \sum M_B Z = 0 : -M(l) - Q(l) \cdot \frac{dx}{2} - M_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -M(l) - M_2 = 0 \Rightarrow -EIw''(l) - M_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow EIw''(l) + M_2 = 0 ; \\ \alpha(l) \neq 0 ; \quad w(l) = 0 \end{aligned} \right\} . \quad (39)$$

З чотирьох умов (39) обираємо дві однозначні. Це умови друга (силова) та четверта (кінематична).

На місці відкинутого шарніра додаткова кінематична умова – $w(d) = 0$. Граничні умови з додатковими кінематичними умовами

$$\left. \begin{aligned} EIw'''(0) + P_1 &= 0; \\ EIw''(0) &= 0; \\ EIw''(l) + M_2 &= 0; \\ w(l) &= 0; \\ w(d) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (40)$$

Підставляючи (34) ÷ (37) у (40), ураховуючи умовний знак Бубнова $\parallel$, будемо мати наступне:

$$EIw'''(0) + P_1 = 0 \Rightarrow (\text{використ. (34)}) \Rightarrow A + P_1 = 0 \Rightarrow A = -P_1. (41)$$

$$EIw''(0) = 0 \Rightarrow (\text{використ. (35)}) \Rightarrow B = 0. \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} EIw''(0) + M_2 = 0 \Rightarrow (\text{використ. (35)}) \Rightarrow \frac{q(l-d)^2}{2} - \frac{q(l-f)^2}{2} + \\ + R_A(l-d) + P_2(l-f) + M_1 + A \cdot l + B + M_2 = 0 \end{aligned} \right\} \cdot (43)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= -1000 \text{ Н}; \quad B = 0; \quad C = -\frac{5433,3}{EI} \text{ рад}; \\ D &= \frac{5600}{EI} \text{ м}; \quad R_A = 3400 \text{ Н} \end{aligned} \right\}. \quad (45)$$

Вирішуючи (43), (44), (45), отримуємо решту невідомих параметрів C, D, R_A . Остаточні знайдені невідомі A, B, C, D, R_A визначаються залежностями

$$w(l) = 0 \Rightarrow (\text{використ. (37)}) \Rightarrow \frac{Ad^3}{6EI} + \frac{Bd^2}{2EI} + Cd + D = 0. \quad (46)$$

Як бачимо з (46), значення C і D , які є відповідно кутом повороту та прогином на лівому торці, точно відповідають значенням куту повороту α_0 та прогину w_0 з (24).

Маючи закони елементів згину Q, M, α, w , визначені (34) ÷ (37) та знайдені невідомі визначені (46), можна побудувати епюри елементів згину. Епюри $Q(x), M(x)$ співпадають з епюрами, отриманими за допомогою методу перерізів. Епюри кінематичних параметрів $\alpha(x), w(x)$ зображено на рис. 6.14.

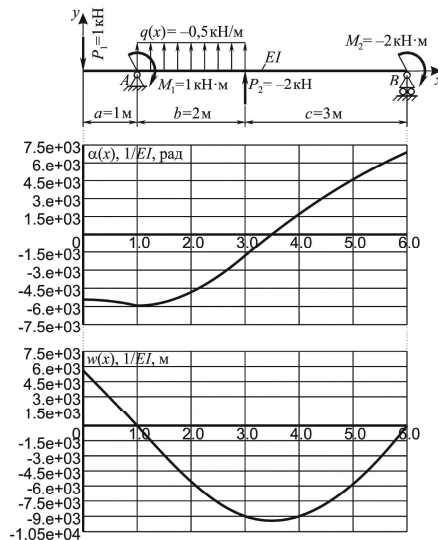


Рис. 6.14. Епюри кутів повороту $\alpha(x)$ та прогинів $w(x)$

7. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ ВАЛА ПІД ЧАС ЗГИНАННЯ З КРУЧЕННЯМ

7.1. Приклад

Виконати проектувальний розрахунок статично визначеної призматичної балки з круглим суцільним перерізом (рис. 7.1,*a*) з умов міцності, розв'язуючи задачу в наступній послідовності:

1. Методом перерізів знайти закони і побудувати епюри зрізуючих сил і згинальних моментів під час поперечного згину для двох головних площин, а також для крутних моментів.

2. Знайти закони і побудувати епюри: сумарних зрізуючих сил; сумарних згинальних моментів; приведених згинальних моментів.

3. Установити небезпечний переріз і відносно нього розрахувати розміри круглого суцільного перерізу балки з умов міцності.

4. Побудувати епюри напружень від кожного внутрішнього силового фактора окремо для небезпечного перерізу, знайденого в пункті 3.

Матеріал вала – сталь Ст3 ($\sigma_T = 235$ МПа, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па).

Рішення. На рис. 7.1,*a* зображено початкову схему. Для створення статично еквівалентної схеми необхідно виконати приведення сил.

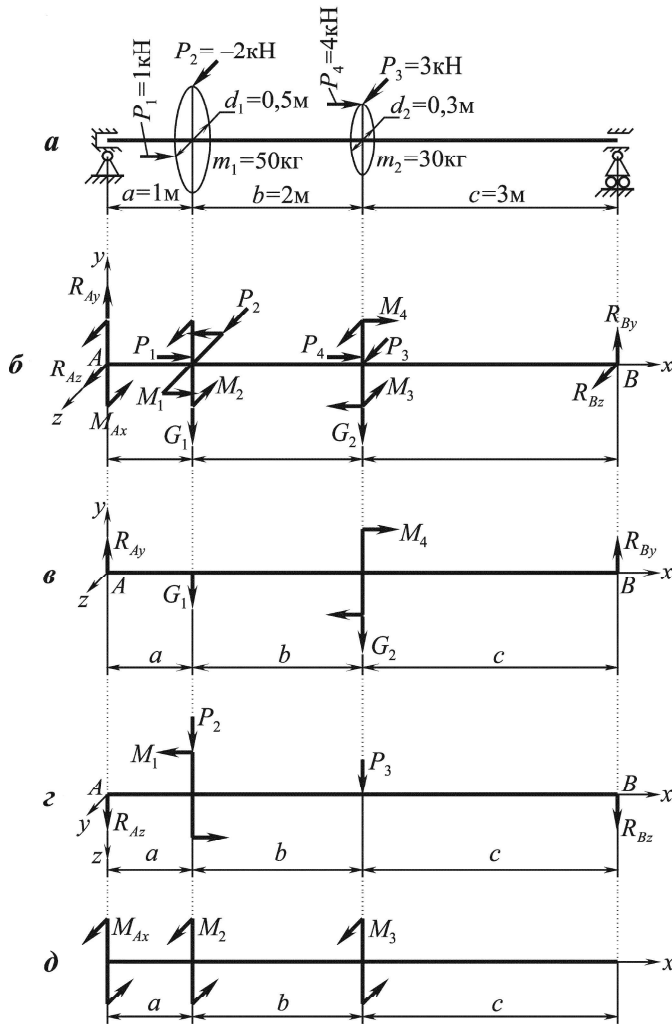


Рис. 7.1. Згин з крученням:

a – початкова схема; *б* – статично еквівалентна схема; *в* – схема для розрахунку згину у площині xAy ; *г* – схема для розрахунку згину у площині xAz ; *д* – схема для розрахунку кручення

На рис. 7.2 показані деякі приклади приведення сил, відомі з теоретичної механіки, де d – діаметр колеса.

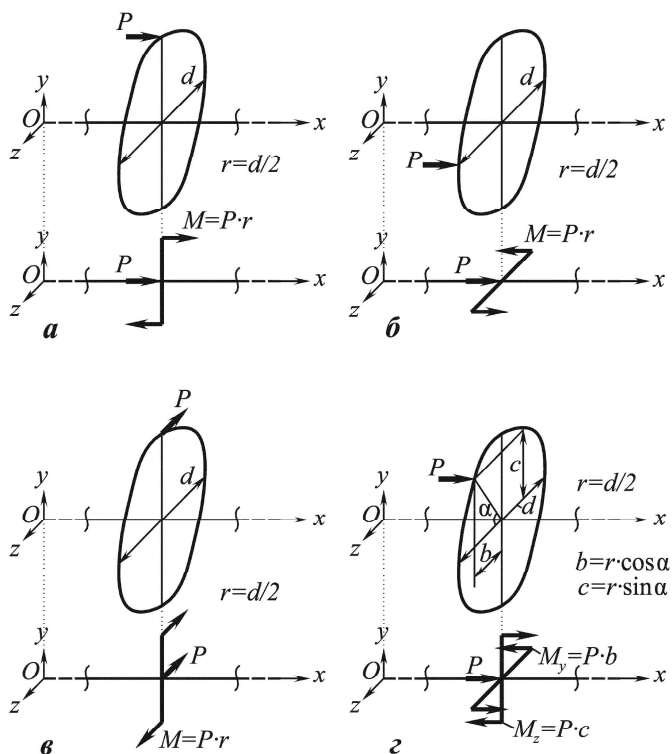


Рис. 7.2. Приклади приведення сил

Необхідно зауважити, що надалі буде використовуватися права координатна система. Тобто для впорядкованої трійки векторів (координатна система – це система з трьох векторів) *x*, *y*, *z* найкоротший поворот від 1-го вектора *x* до 2-го вектора *y* з вершини 3-го *z* повинно бути видно проти годинникової стрілки. Орієнтацію векторів під час розрахунку змінювати не можна. Увесь розрахунок повинен бути виконаний у правій або лівій координатній системі (рис. 7.3).

Для правої координатної системи вектор моменту направлено так, що з його кінця поворот моменту видно проти годинникової стрілки. Вектор моменту перпендикулярний до площини, у якій діє момент (рис. 7.4,*a*).

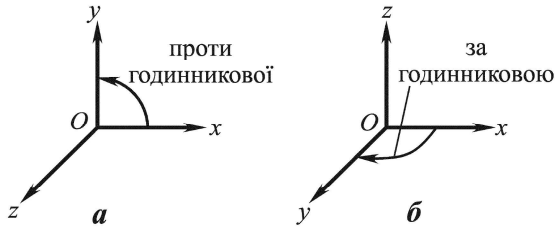


Рис. 7.3. Орієнтація осей для правої та лівої координатної систем:
 a – права координатна система; b – ліва координатна система

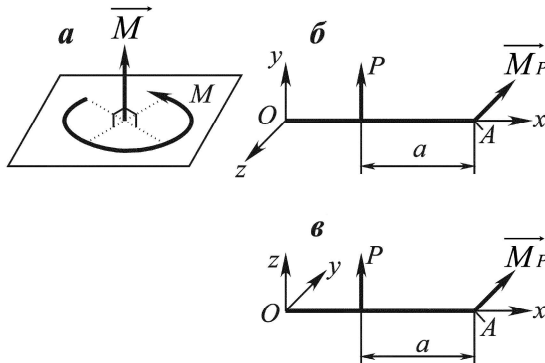


Рис. 7.4. Вектори моментів

Якщо момент викликаний дією зосередженої сили відносно деякої точки (момент $\vec{M}_P$ від сили P відносно точки A на рис. 7.4, b , v), то для правої координатної системи вектор моменту $\vec{M}_P$ повинен мати такий напрям, щоб з вершини цього вектора напрям повороту сили P було видно проти годинникової стрілки. Для рис. 7.4, b $\vec{M}_P$ у рівняння рівноваги буде включено зі знаком « $-$ » (тому що напрями z та $\vec{M}_P$ протилежні), а для рис. 7.4, v – зі знаком « $+$ ». Зауважимо, що координатні системи на рис. 7.4, b , v – праві.

Для розв'язання цієї задачі будемо використовувати принцип суперпозиції та принцип незалежності дії сил. Будемо окремо розглядати згин у площині xAy , xAz та кручення. Хоча можна розглядати цю тривимірну систему одночасно.

Загальна розрахункова схема представлена на рис. 7.1,б. Ця система є статично визначеною. Після приведення сил виникли нові силові фактори

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= m_1 g = 50 \cdot 9,81 \approx 500 \text{ Н}; \\ G_2 &= m_2 g = 30 \cdot 9,81 \approx 300 \text{ Н}; \\ M_1 &= P_1 \cdot \frac{d_1}{2} = 1000 \cdot \frac{0,5}{2} = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ M_2 &= P_2 \cdot \frac{d_1}{2} = -2000 \cdot \frac{0,5}{2} = -500 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ M_3 &= P_3 \cdot \frac{d_2}{2} = 3000 \cdot \frac{0,3}{2} = 450 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ M_4 &= P_4 \cdot \frac{d_2}{2} = 4000 \cdot \frac{0,3}{2} = 600 \text{ Н} \cdot \text{м} \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

1. Установлення законів розподілу внутрішніх зусиль.

Згин у площині xAy . Для обчислення згину у площині xAy на рис. 7.1,в подана відповідна схема. Знайдемо спочатку невідомі реакції R_{Ay} , R_{By} на місці відкинутих шарнірів з рівнянь рівноваги моментів

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A Z = 0 : -G_1 a - G_2 (a+b) - M_4 + R_{By} (a+b+c) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_{By} &\approx 0,333 \text{ кН}; \\ \sum M_B Z = 0 : -R_{Ay} (a+b+c) + G_1 (b+c) + G_2 c - M_4 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_{Ay} &\approx 0,467 \text{ кН} \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

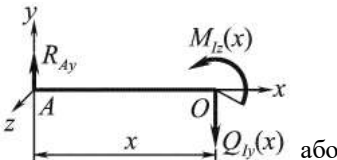
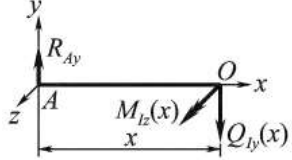
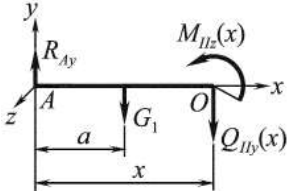
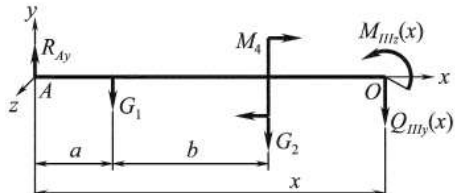
Виконаємо перевірку за рівнянням рівноваги сил

$$\sum F_Y = 0 : R_{Ay} - G_1 - G_2 + R_{By} = 0 \Rightarrow 0,333 - 0,5 - 0,3 + 0,467 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Як бачимо, останні рівняння рівноваги задовольняються, що свідчить про правильність знаходження реакцій R_{Ay} , R_{By} .

Класичним методом перерізів знаходимо закони і будуємо епюри зрізуючих зусиль $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$, розрахунок яких подано в табл. 7.1 у глобальній системі координат xAy .

Таблиця 7.1. Розрахунок $Q(x)$ та $M(x)$ під час згину у площині xAy

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
1	Ділянка I ($0 \leq x < a$)  або  $\Sigma F_Y = 0 : R_{Ay} - Q_{Iy}(x) = 0 \Rightarrow Q_{Iy}(x) = 0,467 \text{ кН};$ $\Sigma M_O Z = 0 : -R_{Ay} \cdot x + M_{Iz}(x) = 0 \Rightarrow M_{Iz}(x) = 0,467x, \text{ кН} \cdot \text{м}$
2	Ділянка II ($a \leq x < a + b$)  $\Sigma F_Y = 0 : R_{Ay} - G_1 - Q_{IIy}(x) = 0 \Rightarrow Q_{IIy}(x) = -0,033 \text{ кН};$ $\Sigma M_O Z = 0 : -R_{Ay} \cdot x + G_1(x - a) + M_{IIz}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{IIz}(x) = 0,5 - 0,033x, \text{ кН} \cdot \text{м}$
3	Ділянка III ($a + b \leq x < a + b + c$) 

Продовж. табл. 7.1

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
3	$\Sigma FY = 0 : R_{Ay} - G_1 - G_2 - Q_{IIIy}(x) = 0 \Rightarrow Q_{IIIy}(x) = -0,333 \text{ кН};$ $\Sigma M_O Z = 0 : -R_{Ay} \cdot x + G_1(x-a) + G_2(x-a-b) -$ $-M_4 + M_{IIIz}(x) = 0 \Rightarrow M_{IIIz}(x) = 2 - 0,333x, \text{ кН} \cdot \text{м}$

Отримані закони розподілу за класичним методом перерізів потрібно перевіряти за всіма ділянками, тому що закони внутрішніх сил для кожної ділянки визначаються незалежно одна від одної.

Виконаємо вибірку перевірку законів $Q(x)$ та $M(x)$

$$\begin{aligned} |Q_{IIIy}(a+b+c=6)| &= |R_{By}| \Rightarrow 0,333 = 0,333. & (\text{Похибки} \\ |M_{IIIz}(a+b+c=6)| &= 0 \Rightarrow 2 - 0,333 \cdot 6 = 0,002 \approx 0. & \text{округлення}) \end{aligned}$$

Перевірки задовольняються, а це означає, що закони внутрішніх зусиль $Q(x)$ та $M(x)$ знайдені правильно.

Згин у площині xAz . Зручно направити ось z вниз. Тоді напрям моментів буде проти годинникової стрілки. Для обчислення згину у площині xAz на рис. 7.1,2 подана відповідна схема. Знайдемо спочатку невідомі реакції R_{Az} , R_{Bz} на місці відкинутих шарнірів з рівнянь рівноваги моментів

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_A Y = 0 : -P_2 a + M_1 - P_3(a+b) - R_{Bz}(a+b+c) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_{Bz} &= -1,125 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B Y = 0 : R_{Az}(a+b+c) + P_2(b+c) + P_3 c + M_1 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_{Az} &= 0,125 \text{ кН} \end{aligned} \right\} \cdot (3)$$

Виконаємо перевірку за рівнянням рівноваги сил

$$\Sigma FZ = 0 : R_{Az} + P_2 + P_3 + R_{Bz} = 0 \Rightarrow 0,125 + (-2) + 3 + (-1,125) = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Як бачимо, останні рівняння рівноваги задовольняються, що свідчить про правильність знаходження реакцій R_{Az} , R_{Bz} .

Рекомендується ось z направляти вниз, так щоб вісь y дивилась на нас. Це пов'язано з тим, що ми повинні складати рівняння моментів у проєкції на поперечну вісь до розглядуваної площини згину (площина згину – xAz , поперечна вісь – y). Якщо поперечна вісь для правої системи дивиться на нас, то додатковий напрям для згинальних моментів буде проти годинникової стрілки, що є звичним для нас правилом. Звичайно можна довільно розміщувати систему у просторі, проте в цьому випадку, щоб не заплутатися, моменти (дуже) бажано зображати векторами (відмінними від векторів сил у позначенні), і далі використовувати звичайний апарат векторної алгебри / геометрії. Тобто якщо напрям вектора співпадає з напрямом осі, то він береться зі знаком «+» і навпаки.

Позитивні напрями (правила знаків) внутрішніх сил Q та M при цьому не змінюється. Це правило прив'язано до поперечної осі і може бути отримано дзеркальним відображенням (рис. 7.5).

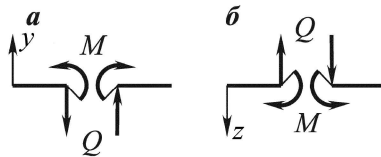


Рис. 7.5. Позитивні напрями внутрішніх зусиль Q та M

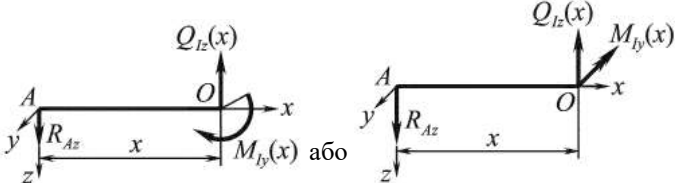
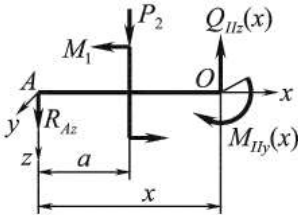
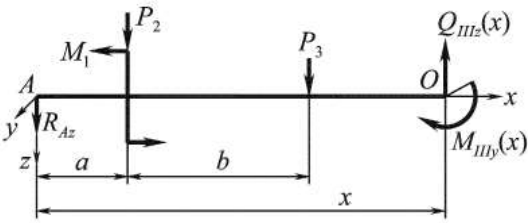
Розрахунок зрізуючих зусиль $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$ класичним методом перерізів у глобальній координатній системі xAz подано в табл. 7.2.

Виконаємо вибірку перевірку законів $Q(x)$ та $M(x)$

$$|M_{\text{III}y}(a + b + c = 6)| = 0 \Rightarrow 1,125 \cdot 6 - 6,75 = 0 \Rightarrow 0 = 0;$$

$$|Q_{\text{III}z}(c = 3)| = |R_{Bz}| \Rightarrow 1,125 = 1,125.$$

Таблиця 7.2. Розрахунок $Q(x)$ та $M(x)$ під час згину у площині xAz

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
1	Ділянка I ($0 \leq x < a$)  $\Sigma FZ = 0 : R_{Az} - Q_{Iz}(x) = 0 \Rightarrow Q_{Iz}(x) = 0,125 \text{ кН};$ $\Sigma M_O Y = 0 : R_{Az}x - M_{Iy}(x) = 0 \Rightarrow M_{Iy}(x) = 0,125x, \text{ кН} \cdot \text{м}$
2	Ділянка II ($a \leq x < a + b$)  $\Sigma FZ = 0 : R_{Az} + P_2 - Q_{IIz}(x) = 0 \Rightarrow Q_{IIz}(x) = -1,875 \text{ кН};$ $\Sigma M_O Y = 0 : R_{Az}x + P_2(x - a) + M_1 - M_{IIy}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{IIy}(x) = 2,25 - 1,875x, \text{ кН} \cdot \text{м}$
3	Ділянка III ($a + b \leq x < a + b + c$) 

Продовж. табл. 7.2

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
3	$\Sigma FZ = 0 : R_{Az} + P_2 + P_3 - Q_{\text{III}z}(x) = 0 \Rightarrow Q_{\text{III}z}(x) = 1,125 \text{ кН};$ $\Sigma M_{OY} = 0 : R_{Az}x + P_2(x-a) + P_3(x-a-b) +$ $+ M_1 - M_{\text{III}y}(x) = 0 \Rightarrow M_{\text{III}y}(x) = 1,125x - 6,75, \text{ кН} \cdot \text{м}$

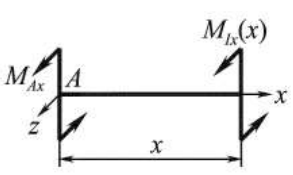
Перевірки задовольняються, а це означає, що закони внутрішніх зусиль $Q(x)$ та $M(x)$ знайдені правильно.

Кручення навколо осі x . Для обчислення кручення навколо осі x на рис. 7.1, δ подана відповідна схема. Знайдемо спочатку невідому реакцію – крутний момент M_{Ax} на місці відкинутого глухого підшипника з рівнянь рівноваги

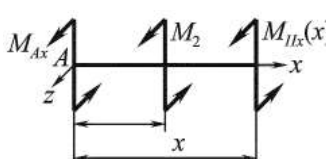
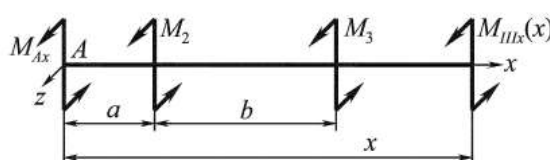
$$\Sigma MX = 0 : M_{Ax} + M_2 + M_3 = 0 \Rightarrow M_{Ax} = 0,05 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (4)$$

Розрахунок крутних моментів $M_x(x)$ класичним методом перерізів у глобальній координатній системі Ax подано в табл. 7.3.

Таблиця 7.3. Розрахунок крутних моментів $M_x(x)$

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
1	Ділянка I ($0 \leq x < a$)  $\Sigma MX = 0 : M_{Ax} + M_{lx}(x) = 0 \Rightarrow M_{lx}(x) = -0,05, \text{ кН} \cdot \text{м}$

Продовж табл. 7.3

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
2	Ділянка II ($a \leq x < a + b$)  $\Sigma MX = 0 : M_{Ax} + M_2 + M_{Ilx}(x) = 0 \Rightarrow M_{Ilx}(x) = 0,45, \text{ кН} \cdot \text{м}$
3	Ділянка III ($a + b \leq x < a + b + c$)  $\Sigma MX = 0 : M_{Ax} + M_2 + M_3 + M_{IIIx}(x) = 0 \Rightarrow M_{IIIx}(x) = 0, \text{ кН} \cdot \text{м}$

2. Установлення законів розподілу сумарних зрізуючих сил, сумарних згинальних моментів та приведених згинальних моментів. Сумарні зрізуючі сили Q_{Σ} визначаються залежністю

$$Q_{\Sigma} = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}. \quad (5)$$

Сумарні згинальні моменти M_{Σ} визначаються залежністю

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (6)$$

Для оцінки міцності необхідно розрахувати приведений момент, що враховує всі внутрішні силові фактори за однією з теорій міцності. За четвертою теорією міцності (Мізеса) приведений момент визначається наступною формулою:

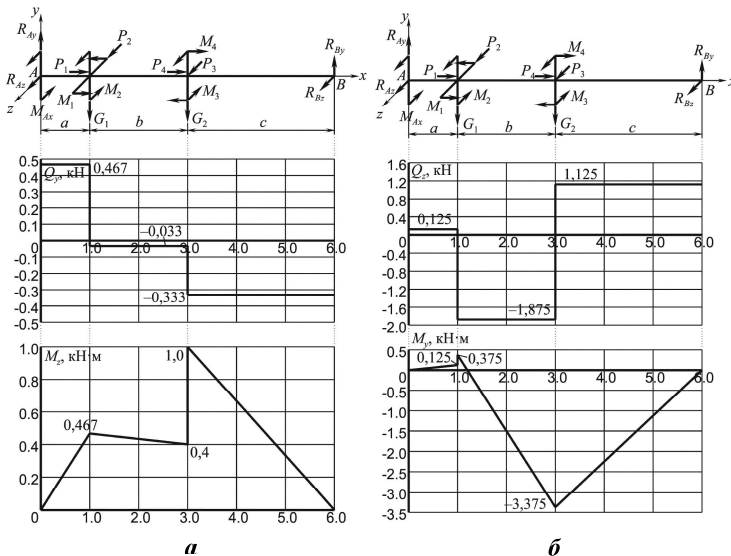
$$M_{\text{пр}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75M_x^2}. \quad (7)$$

Нижче в табл. 7.4 подані вирази для внутрішніх силових факторів за відповідними ділянками.

Таблиця 7.4. Внутрішні силові фактори за класичним методом перерізів у глобальних координатах

№ з/п	Силовий внутрішній фактор	Ділянки		
		I, $x \in [0; a = 1 \text{ м})$	II, $x \in [a = 1 \text{ м}; a + b = 3 \text{ м})$	III, $x \in [a + b = 3; a + b + c = 6 \text{ м})$
1	Q_y	0,467	-0,033	-0,333
2	M_z	$0,467x$	$0,5 - 0,033x$	$2 - 0,333x$
3	Q_z	0,125	-1,875	1,125
4	M_y	$0,125x$	$2,25 - 1,875x$	$1,125x - 6,75$
5	M_x	-0,05	0,45	0
6	Q_x	0,483	1,875	1,173
7	M_x	$0,483x$	$((0,5 - 0,033x)^2 + (2,25 - 1,875x)^2)^{0,5}$	$((2,0 - 0,333x)^2 + (1,125x - 6,75)^2)^{0,5}$
8	M_{np}	$\sqrt{0,2334x^2 + 1,875 \cdot 10^{-3}}$	$((0,5 - 0,033x)^2 + (2,25 - 1,875x)^2 + 0,151875)^{0,5}$	$((2,0 - 0,333x)^2 + (1,125x - 6,75)^2)^{0,5}$

Епюри силових факторів табл. 7.4 подано на рис. 7.6.



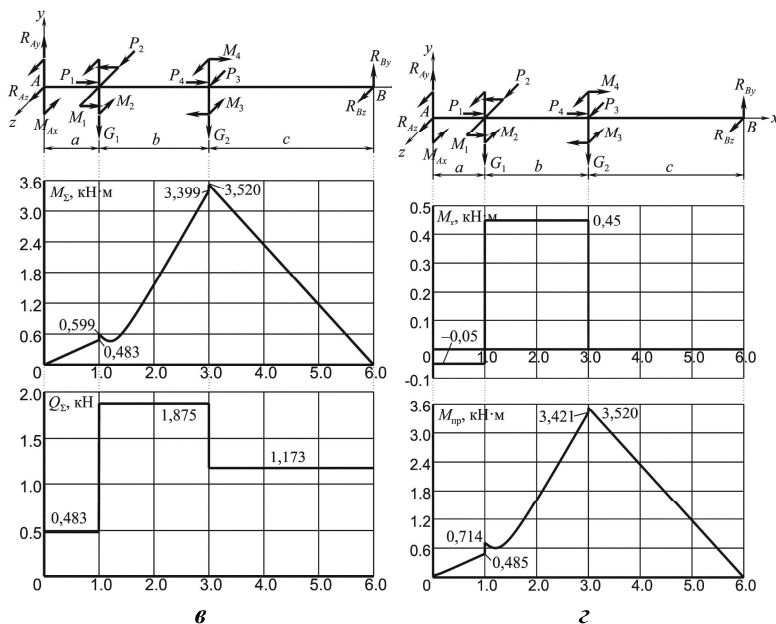


Рис. 7.6. Епюри внутрішніх силових факторів під час згину з крученням:

a – епюри Q_y, M_z ; $б$ – епюри Q_z, M_y ; $в$ – епюри M_z, Q_z ;
 $г$ – епюри $M_x, M_{пр}$

3. Підбір діаметра вала. Установлюємо небезпечний переріз, який визначається в тому місці, де приведений момент $M_{пр}$ бере своє найбільше значення. Згідно з епюрою $M_{пр}$ на рис. 7.6,г найбільше значення приведенного моменту $M_{пр \max} = 3,52 \text{ кН} \cdot \text{м}$, при $x = 3 \text{ м}$.

Умова міцності запишеться у вигляді

$$\sigma_{пр \max} \leq [\sigma], \quad (8)$$

де $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{235}{1,5} \approx 157 \text{ МПа}$ – допустимі напруження;

$\sigma_{пр \max} = \frac{M_{пр \max}}{W}$ – найбільші приведені напруження, Па;

$W = \frac{\pi d^3}{32}$ – осьовий момент опору круглого суцільного перерізу, м³.

Таким чином, мінімально необхідний осьовий момент опору і відповідно мінімально необхідний діаметр вала визначаються залежностями

$$\begin{aligned} W &\geq \frac{M_{\text{пр max}}}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{M_{\text{пр max}}}{[\sigma]} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{пр max}}}{\pi [\sigma]}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,52 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 157 \cdot 10^6}} = 0,0611 \text{ м} = 61,1 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (9)$$

Діаметр вала береться відповідно до нормативних документів і повинен бути не менший за мінімально розрахований. Беремо діаметр вала $d = 65$ мм.

4. Побудова епюр напружень. Розраховуємо напруження для небезпечного перерізу вала при $x = 3$ м, з прийнятим діаметром $d = 65$ мм від внутрішніх силових факторів $Q_y, M_z, Q_z, M_y, M_x, M_\Sigma$, які визначені з епюр на рис. 7.6 (або із законів табл. 7.4) і становлять

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= -0,333 \text{ кН}; & M_z &= 1,0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ Q_z &= -1,875 \text{ кН}; & M_y &= -3,375 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_x &= 0,45 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_\Sigma &= 3,520 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

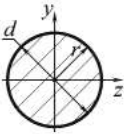
Напруження від згаданих силових факторів визначаються наступними залежностями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{M_z}{I} y; & \sigma_y &= -\frac{M_y}{I} z; \\ \tau_y &= \frac{Q_y \cdot S_z^*(y)}{I \cdot t(y)}; & \tau_z &= \frac{Q_z \cdot S_y^*(z)}{I \cdot t(z)}; \\ \tau_p &= \frac{M_x}{I_p} \rho; & \sigma_\Sigma &= \frac{M_\Sigma}{I} \eta \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

де σ^z, σ^y – нормальні напруження від згинальних моментів M_z, M_y ; τ_z, τ_y – дотичні напруження від зрізуючих зусиль Q_z, Q_y ; τ_ρ – дотичні напруження від крутного моменту M_x ; $\rho \in [0; r]$ – радіус кільцевого рівня, де визначаються дотичні напруження τ_ρ від кручення; σ_Σ – сумарні нормальні напруження; M_Σ – сумарний згинальний момент; $\eta \in [0; r]$ – координата вздовж нейтральної осі.

Решта параметрів для формули (11) визначена в табл. 7.5, беручи до уваги, що для круга геометричні властивості відносно осей y та z однакові.

Таблиця 7.5. Обрані геометричні характеристики круглого перерізу

№ з/п	Назва величини	Позначення	Величина	
			формула	значення
1	Ескіз перерізу		–	–
2	Діаметр, м	d	–	0,065
3	Радіус, м	r	$d/2$	0,0325
4	Головний центральний момент інерції, м ⁴	$I_z = I_y = I$	$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$	$8,7624 \cdot 10^{-7}$
5	Мінімальний осьовий момент опору, м ³	$W_{z\min} = W_{y\min} = W$	$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$	$2,6961 \cdot 10^{-5}$
6	Полярний момент інерції, м ⁴	I_p	$2I = \frac{\pi r^4}{2}$	$1,7525 \cdot 10^{-6}$
7	Полярний момент опору, м ³	W_p	$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}$	$5,3922 \cdot 10^{-5}$
8	Площа, м ²	F	πr^2	$3,3183 \cdot 10^{-3}$
9	Статичний момент відсіченої площі відносно осі z , м ³	$S_z^*(y)$	$\frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$ $y \in [0; r]$	$\frac{2}{3}(0,0325^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$ $y \in [0; 0,0325]$
10	Статичний момент відсіченої площі відносно осі y , м ³	$S_y^*(z)$	$\frac{2}{3}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}},$ $y \in [0; r]$	$\frac{2}{3}(0,0325^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$ $y \in [0; 0,0325]$

Продовж. табл. 7.5

№ з/п	Назва величини	Позначення	Величина	
			формула	значення
11	Товщина вздовж осі y , м	$t(y)$	$2\sqrt{r^2 - y^2}$	$2\sqrt{0,0325^2 - y^2}$
12	Товщина вздовж осі z , м	$t(z)$	$2\sqrt{r^2 - z^2}$	$2\sqrt{0,0325^2 - z^2}$

Напруження формули (11) пов'язані зі складовими σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} тензора напружень у точці наступним чином: напруження σ_z – це нормальне напруження σ_x , яке діє нормально / перпендикулярно до поперечного перерізу, від згинального моменту M_z (індекс z для σ_z і для M_z один і той же); аналогічно σ_y ; τ_z – дотичне напруження $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ від зрізуючих зусиль Q_z ; аналогічно τ_y – дотичне напруження $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ від зрізуючих зусиль Q_y ; напруження τ_ρ містять у собі складові τ_{xz} , τ_{xy} , а потім проєктуються на ці складові; σ_Σ – це нормальне напруження σ_x від сумарного згинального моменту M_Σ .

На рис. 7.7 подано додатні напрями внутрішніх силових факторів та відповідних напружень від цих факторів у довільній точці D круглого перерізу. На рис. 7.7,б можна прослідкувати відповідність напружень від силових факторів складовим тензором напружень, які показані справа зверху.

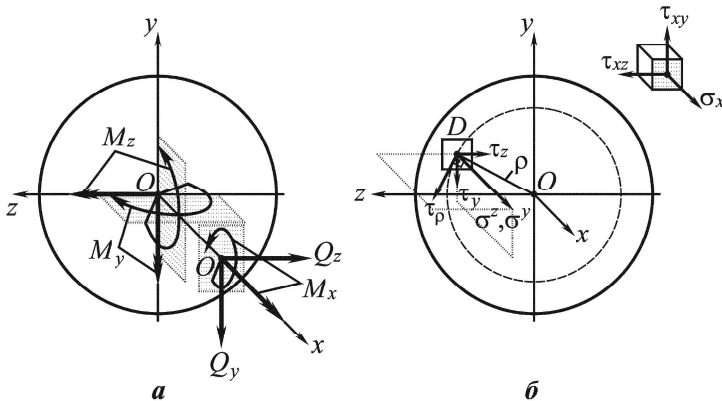


Рис. 7.7. Внутрішні силові фактори та відповідні напруження

Екстремальні значення напружень (11) обчислюються наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \left| \sigma_z \right|_{\max} &= \frac{M_z}{W} = \frac{1,0 \cdot 10^3}{2,6961 \cdot 10^{-5}} = 3,7090 \cdot 10^7 \text{ Па}; \\ \left| \sigma_y \right|_{\max} &= \frac{M_y}{W} = \frac{-3,375 \cdot 10^3}{2,6961 \cdot 10^{-5}} = 1,2518 \cdot 10^8 \text{ Па}; \\ \left| \tau_y \right|_{\max} &= \frac{4 Q_y}{3 F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{-0,333 \cdot 10^3}{3,3183 \cdot 10^{-3}} = 1,3380 \cdot 10^5 \text{ Па}; \\ \left| \tau_z \right|_{\max} &= \frac{4 Q_z}{3 F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{-1,875 \cdot 10^3}{3,3183 \cdot 10^{-3}} = 7,5340 \cdot 10^5 \text{ Па}; \\ \left| \tau_\rho \right|_{\max} &= \frac{M_x}{W_\rho} = \frac{0,45 \cdot 10^3}{5,3922 \cdot 10^{-5}} = 8,3453 \cdot 10^6 \text{ Па}; \\ \left| \sigma_\Sigma \right|_{\max} &= \frac{M_\Sigma}{W} = \frac{3,520 \cdot 10^3}{2,6961 \cdot 10^{-5}} = 1,3056 \cdot 10^6 \text{ Па} \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

де знак напружень необхідно визначати за (11).

У табл. 7.6 виписані значення екстремальних напружень у МПа, які розраховані за формулами (12). У табл. 7.6 знаки визначені за формулою (11). Знак для нормальних напружень σ_z, σ_y від згинальних моментів визначається при додатних значеннях y, z ; для дотичних напружень τ_z, τ_y від зрізуючих сил знак визначений на рівні НО; для дотичних напружень τ_ρ від крутного моменту знак встановлено для всієї епюри. Наприклад, знак для $\left| \sigma_y \right|_{\max}$ визначається наступним чином: напруження $\left| \sigma_y \right|_{\max}$, яке визначається за другою формулою (12) є екстремальним напруженням σ_y , яке зі свого боку визначається другою формулою (11). У другій формулі (11) $M_y = -3,375 \text{ кН} \cdot \text{м}$, тобто знак M_y від'ємний, або $\text{sgn } M_y = -1$; знак z – додатній за умови; знак I завжди додатній. Отже, знак для $\left| \sigma_y \right|_{\max}$ при додатному z визначиться наступним чином:

$$\text{sgn } \sigma_y = -\frac{\text{sgn } M_y}{\text{sgn } I} \cdot \text{sgn } z = -\frac{-1}{1} \cdot 1 = +1.$$

Таблиця 7.6. Екстремальні значення напружень

Позначення	$ \sigma^z _{\max}$	$ \sigma^y _{\max}$	$ \tau_y _{\max}$	$ \tau_z _{\max}$	$ \tau_\rho _{\max}$	$ \sigma_\Sigma _{\max}$
Значення, МПа	37,1	125,2	0,13	0,75	8,35	130,6
Знак	-1	+1	-1	-1	+1	потім

Кут β нахилу НО від осі z проти годинникової стрілки за найкоротшим шляхом визначається залежністю

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = -\frac{M_y}{M_z} = -\frac{-3,375}{1} = 3,375 \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta &= \arctg 3,375 = 1,2827 \text{ рад} = 73,5^\circ. \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 7.8 подано епюри напружень, розраховані за залежностями (11) та (12), де поздовжня вісь x іде від нас. Кожна з епюр визначена у своєму масштабі.

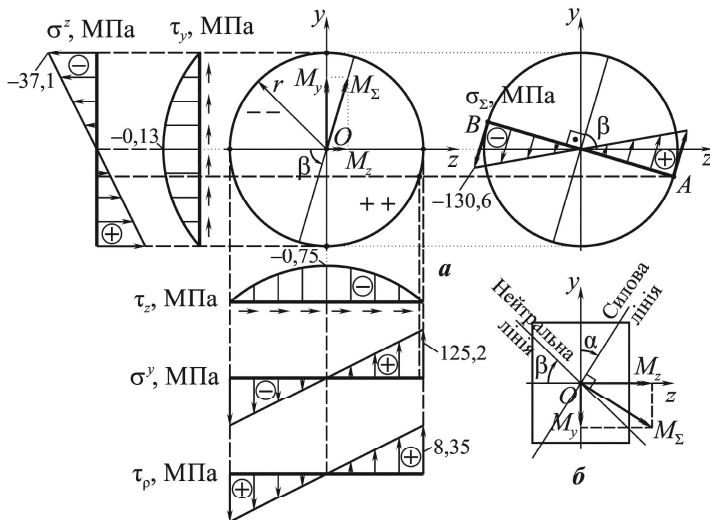


Рис. 7.8. Епюри напружень:

- a** – напруження в небезпечному перерізі розглядуваного вала;
б – додатні / стандартні напрямки величин під час розрахунку згину з крученням

Напруження в точці A від кожного силового фактора (10) окремо, з використанням залежностей (11) та формул табл. 7.5, подані в табл. 7.7. До того ж координати точки A , які треба підставити у формули (11), становлять

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= r \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = 0,0325 \cdot \cos(-16,5^\circ) = 3,1161 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ y_0 &= r \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = 0,0325 \cdot \sin(-16,5^\circ) = -9,2329 \cdot 10^{-3} \text{ м} \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Таблиця 7.7. Значення напружень у точці A

Позначення	σ^z	σ^y	τ_y	τ_z	τ_ρ	σ_Σ
Значення, МПа	10,54	120,02	-0,12	-0,06	8,35	130,6

Додавши напруження $\sigma^z + \sigma^y = 10,54 + 120,02 = 130,6$ МПа, знаходимо, що їх сума дорівнює сумарним напруженням $\sigma_\Sigma = 130,6$ МПа, що свідчить про правильність обчислення нормальних напружень та напрямку нейтральної осі / лінії. Приведені напруження в точці A загалом будуть завжди більшими за сумарні нормальні напруження σ_Σ , що викликано впливом дотичних напружень $\tau_y, \tau_z, \tau_\rho$. Це необхідно враховувати, наприклад, під час розрахунку втомної міцності валів.

За четвертою теорією міцності приведені напруження виначаються залежністю

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{zx})}. \quad (15)$$

Напруження (11) від силових факторів (10) приведемо до тензора напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, використовуючи рис. 7.9.

Необхідні напруження становлять

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\Sigma = 130,6 \text{ МПа}; \\ \tau_{xy} &= -\tau_y + \tau_\rho \cdot \sin \beta = -(-0,12) + 8,35 \cdot \sin 73,5^\circ = 8,12 \text{ МПа}; \\ \tau_{xz} &= -\tau_z + \tau_\rho \cdot \cos \beta = -(-0,06) + 8,35 \cdot \cos 73,5^\circ = 2,43 \text{ МПа}; \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

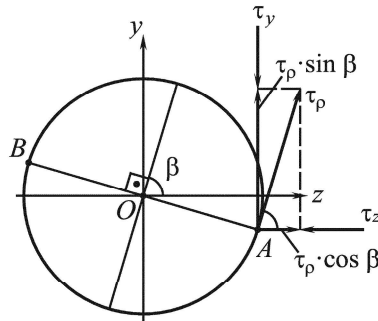


Рис. 7.9. Приведення напружень

Підставляючи (16) у (15), отримуємо значення приведеного напруження за четвертою теорією міцності

$$\sigma_{\text{пр}} = 131,4 \text{ МПа}, \quad (17)$$

які на 0,6 % більші за σ_{Σ} , що в нашому випадку не становить небезпеки. Зі збільшенням діаметра вала різниця між σ_{Σ} і $\sigma_{\text{пр}}$ зростає. При чому $\sigma_{\text{пр}}$ завжди більші за $|\sigma_{\Sigma}|$.

Відповідь: прийнятий діаметр вала становить $d = 65 \text{ мм}$ (мінімально необхідний діаметр – $d_{\text{min}} = 61,1 \text{ мм}$) за якого забезпечується умова міцності для балки, яка працює на згин з крученням (рис. 7.1), за заданого навантаження та матеріалу.

Примітка. Необхідно зауважити, що бувають випадки, коли для якоїсь площини під час розгляду згину або розгляду кручення окремо, кількість ділянок може виявитися різною. У цьому випадку необхідно визначити найбільшу кількість ділянок і тримати цю кількість під час розрахунку всіх силових факторів. Там, де кількість ділянок менша, треба ставити границю розділу, навіть якщо при цьому доведеться розглядати пусту ділянку. Для прикладу розглянемо схему на рис. 7.10.

Як бачимо з рис. 7.10, для площини xAy необхідно три ділянки, у той же час для площини xAz достатньо лише дві

ділянки. Проте під час розгляду згину у площині xAz вводимо допоміжну границю розділу в точці C і розрахунок ведемо для трьох ділянок. Це потрібно для узгодження розрахунків.

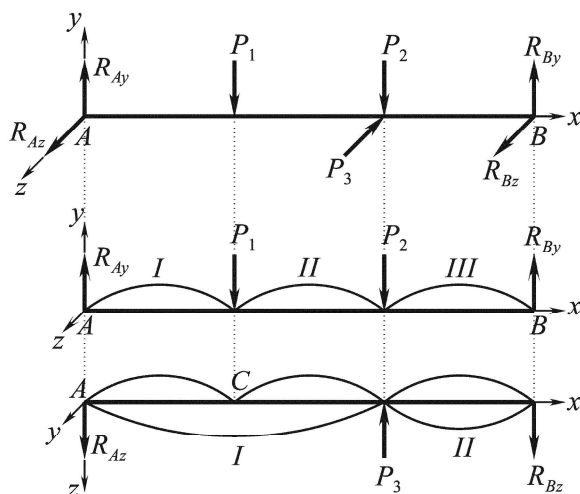


Рис. 7.10. Демонстрація взаємної узгодженості ділянок

8. РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПІД ЧАС ЗГИНАННЯ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ, БАГАТОПРОГОНОВОЇ БАЛКИ НА ЖОРСТКИХ ОПОРАХ

8.1. Приклад

Виконати перевірочний розрахунок статично невизначуваної балки (рис. 8.1,*a*) з квадратним суцільним перерізом за умови міцності, розв'язуючи задачу в наступній послідовності:

1. Розкрити статичну невизначеність балки, використовуючи теорему трьох моментів.

2. Знайти закони та побудувати епюри зрізуючих сил та згинальних моментів уздовж усієї довжини балки.

3. Установити небезпечний переріз і перевірити міцність балки для заданого поперечного перерізу.

4. Побудувати епюри нормальних і дотичних напружень для небезпечного перерізу, знайденого в пункті 4.

5. Зобразити наближено пружну вісь деформування балки.

Матеріал – сталь Ст3. Поперечний переріз усіх балок однаковий і являє собою квадрат розміром 50×50 мм. Конструктивні зміщення опор відсутні.

Рішення. Необхідно зауважити, що розкриття статичної невизначеності можна виконувати за допомогою канонічного методу сил, у якому необхідно знаходити податливості із застосуванням інтегралу Мора, що не завжди є зручним у прак-

тичних інженерних розрахунках. У даному прикладі пропонується вести розрахунок із застосуванням довідника, що значно пришвидшує розрахунок та закріплює навички роботи з довідниковою літературою. На рис. 8.1,*а* показана початкова схема.

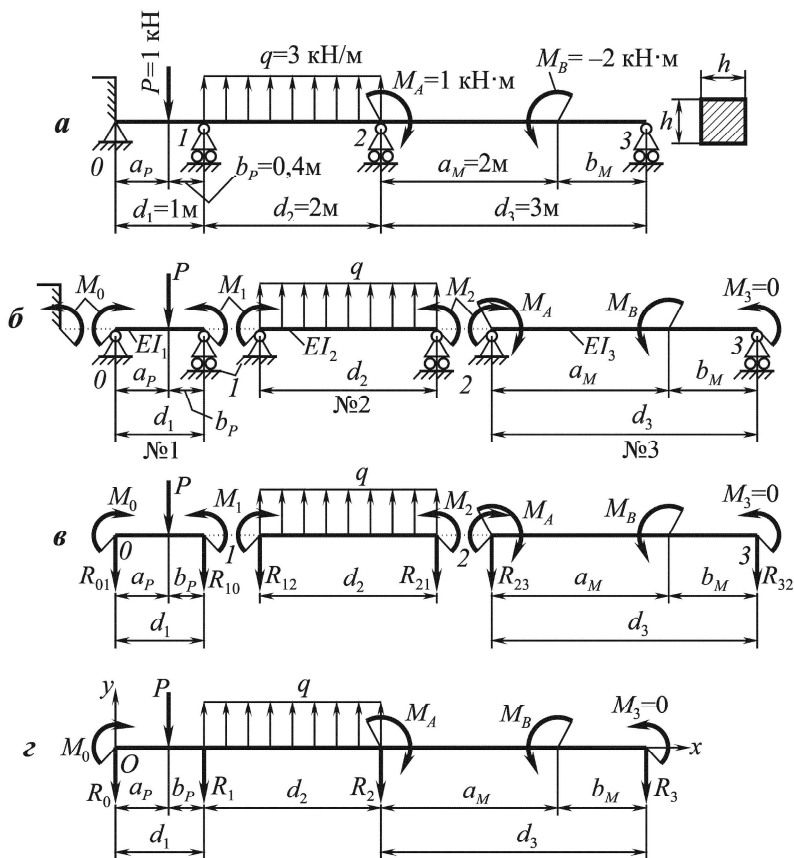


Рис. 8.1. Задана балка:

а – початкова схема; *б* – розрахункова схема; *в* – статично еквівалентна схема для окремих прогонів; *г* – статично еквівалентна схема для суцільної балки

Під час створення розрахункової схеми (рис. 8.1,*б*) згідно з теоремою трьох моментів необхідно дати назву вузлам та прогонам

(це можуть бути цифри, букви або навіть імена). Вузли визначаються на торцях та на шарнірах. Прогони визначаються між вузлами. Вузли пронумеровані від 0 до 3. Прогони пронумеровані від 1 до 3. Розділяємо (уявно) балку на окремі прогони, а силові дії прогонів один на одного замінюємо реактивними моментами. Усі прогони **розміщуються на шарнірах**, незважаючи на те, які закріплення ми маємо на торцях (окрім вільного). На кожному вузлі вводимо реактивні моменти M_0 , M_1 , M_2 . Реактивні моменти для обраного вузла обов'язково повинні мати протилежні напрямки для кожної з окремих балок. Причому на кожному вузлі моменти можуть бути направлені як це показано на рис. 8.2,*а* або на рис. 8.2,*б*.

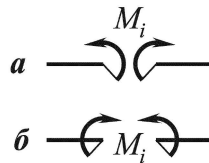


Рис. 8.2. Можливі напрями реактивних моментів у вузлі

Радиться брати напрямки реактивних моментів на всіх вузлах однотипним: або всі напрямки за рис. 8.2,*а* або всі напрямки за рис. 8.2,*б*. Для кожного прогону система координат починається на лівому торці; ось y – угору, а ось x – уздовж балки (на рис. 8.1 осі для окремих балок не показані).

Якщо на вузлі є зовнішній згинальний момент (наприклад, M_A на опорі 2, рис. 8.1,*а*), то під час складання розрахункової схеми цей момент потрібно відносити до одного з прогонів. У нашому випадку ми віднесли M_A до 3-го прогону. Звичайно можливі варіації, наприклад, можна віднести частину моменту M_A до 2-го прогону, а частину – до 3-го, так, щоб сума цих двох частин дорівнювала значенню M_A , проте на практиці рекомендується цього не робити.

Невідомими є реактивні моменти $M_{0,1,2}$. Для вузлів, де визначені невідомі моменти складаються рівняння сумісності кутів повороту, використовуючи загальну формулу

$$\alpha_{i,i-1} = \alpha_{i,i+1} . \quad (1)$$

На рис. 8.3 зображено фізичний зміст кутів повороту.

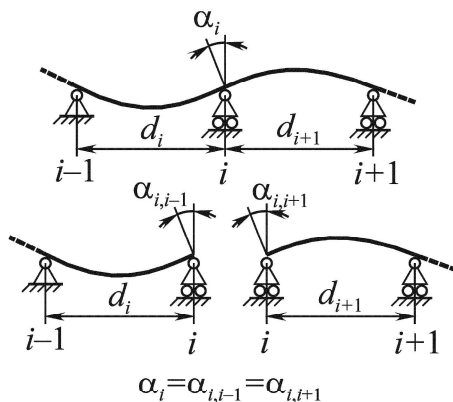


Рис. 8.3. Фізичний зміст кутів повороту

1. Розкриття статичної невизначеності за допомогою теореми трьох моментів. Для нашого випадку рівняння сумісності кутів повороту запишуться у вигляді

$$\alpha_{01} = 0; \quad \alpha_{10} = \alpha_{12}; \quad \alpha_{21} = \alpha_{23}. \quad (2)$$

Перший вираз у (2) $\alpha_{01} = 0$ означає, що там має місце жорстке защемлення. Далі кожен кут α_{ij} розпишемо через зовнішні зусилля (у т. ч. реактивні моменти), використовуючи принцип незалежності дії сил.

Кут повороту α_{01} . Кут повороту α_{01} розпишеться наступним чином:

$$\alpha_{01} = \alpha_{01}(M_0) + \alpha_{01}(M_1) + \alpha_{01}(P). \quad (3)$$

Опишемо знаходження кожної зі складових (3), використовуючи рис. 8.4 для пояснень.

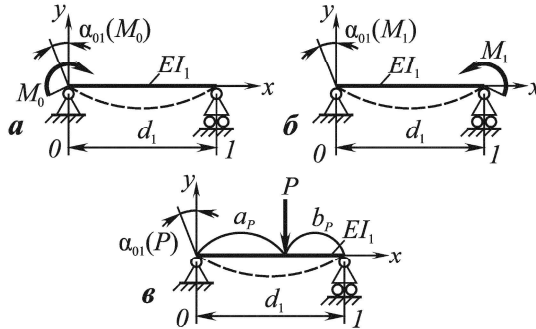


Рис. 8.4. Ілюстрація принципу суперпозиції під час обчислення сумарного кута α_{01} :

a – кут тільки від M_0 ; ***б*** – кут тільки від M_1 ; ***в*** – кут тільки від P

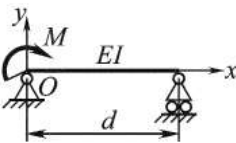
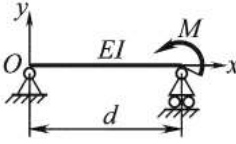
Кут $\alpha_{01}(M_0)$ – це кут повороту, спричинений дією тільки M_0 (рис. 8.4,*a*). Використовуючи довідник [6, 7] (або вирази табл. 8.1), знаходимо

$$\alpha_{01}(M_0) = -\frac{M_0 d_1}{3EI_1}. \quad (4)$$

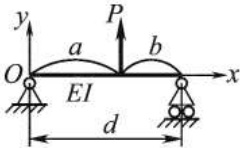
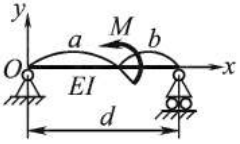
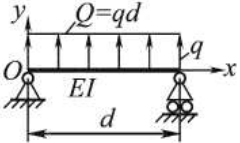
Для контролю результатів бажано зображати дійсну пружну вісь. На рис. 8.4 показано додатні напрями кутів.

Нижче в табл. 8.1 виписані вирази для кутів повороту для найбільш типових випадків.

Таблиця 8.1. Вирази для кутів повороту

№ з/п	Розрахункова схема	Вираз для кутів повороту
1		$\alpha(0) = -\frac{Md}{3EI}; \quad \alpha(d) = \frac{Md}{6EI}$
2		$\alpha(0) = -\frac{Md}{6EI}; \quad \alpha(d) = \frac{Md}{3EI}$

Продовж. табл. 8.1

№ з/п	Розрахункова схема	Вираз для кутів повороту
3		$\alpha(0) = \frac{Pab}{6EI} \left(1 + \frac{b}{d} \right);$ $\alpha(d) = -\frac{Pab}{6EI} \left(1 + \frac{a}{d} \right)$
4		$\alpha(0) = -\frac{Md}{6EI} \left(1 - 3 \frac{b^2}{d^2} \right);$ $\alpha(d) = -\frac{Md}{6EI} \left(1 - 3 \frac{a^2}{d^2} \right).$
5		$\alpha(0) = \frac{Qd^2}{24EI}; \quad \alpha(d) = -\frac{Qd^2}{24EI}$

Кут $\alpha_{01}(M_1)$ – це кут повороту, викликаний дією тільки M_1 (рис. 8.4,б). З довідника [6, 7] або табл. 8.1

$$\alpha_{01}(M_1) = -\frac{M_1 d_1}{6EI_1}. \quad (5)$$

Кут $\alpha_{01}(P)$ – це кут повороту, викликаний дією тільки P (рис. 8.4,в). З довідника [6, 7] або табл. 8.1

$$\alpha_{01}(P) = -\frac{P \cdot a_p \cdot b_p}{6EI_1} \left(1 + \frac{b_p}{d_1} \right). \quad (6)$$

Отже, вираз для кута α_{01} , визначений (3), запишеться наступним чином:

$$\alpha_{01} = -\frac{M_0 d_1}{3EI_1} - \frac{M_1 d_1}{6EI_1} - \frac{P \cdot a_p \cdot b_p}{6EI_1} \left(1 + \frac{b_p}{d_1} \right). \quad (7)$$

Кут повороту α_{10} . Кут повороту α_{10} розпишеться наступним чином:

$$\alpha_{10} = \alpha_{10}(M_1) + \alpha_{10}(M_0) + \alpha_{10}(P). \quad (8)$$

Для пояснення будемо використовувати рис. 8.5.

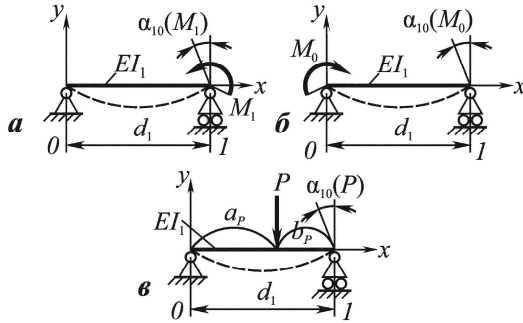


Рис. 8.5. Ілюстрація принципу суперпозиції під час обчислення сумарного кута α_{10} :

a – кут тільки від M_1 ; **б** – кут тільки від M_0 ; **в** – кут тільки від P

Кут $\alpha_{10}(M_1)$ – це кут повороту, викликаний дією тільки M_1 (рис. 8.5,**a**), який знайдеться за виразом з довідника

$$\alpha_{10}(M_1) = \frac{M_1 d_1}{3EI_1}. \quad (9)$$

Кут $\alpha_{10}(M_0)$ – це кут повороту, викликаний дією тільки M_0 (рис. 8.5,**б**), який знайдеться за виразом з довідника

$$\alpha_{10}(M_0) = \frac{M_0 d_1}{6EI_1}. \quad (10)$$

Кут $\alpha_{10}(P)$ – це кут повороту, викликаний дією тільки P (рис. 8.5,**в**), який знайдеться за виразом з довідника

$$\alpha_{10}(P) = \frac{P \cdot a_p \cdot b_p}{6EI_1} \left(1 + \frac{a_p}{d_1} \right). \quad (11)$$

Отже, вираз для кута α_{10} , визначений (8), запишеться наступним чином:

$$\alpha_{10} = \frac{M_1 d_1}{3EI_1} + \frac{M_0 d_1}{6EI_1} + \frac{P \cdot a_P \cdot b_P}{6EI_1} \left(1 + \frac{a_P}{d_1} \right). \quad (12)$$

Запишемо вирази для кутів повороту для решти прогонів

$$\begin{aligned} \alpha_{12} = \alpha_{12}(M_1) + \alpha_{12}(M_2) + \alpha_{12}(q) = & -\frac{M_1 d_2}{3EI_2} - \\ & -\frac{M_2 d_2}{6EI_2} + \frac{Q d_2^2}{24EI_2}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{21} = \alpha_{21}(M_2) + \alpha_{21}(M_1) + \alpha_{21}(q) = & \frac{M_2 d_2}{3EI_2} + \\ & + \frac{M_1 d_2}{6EI_2} - \frac{Q d_2^2}{24EI_2}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{23} = \alpha_{23}(M_2) + \alpha_{23}(M_3) + \alpha_{23}(M_A) + \alpha_{23}(M_B) = \\ = -\frac{M_2 d_3}{3EI_3} - \frac{M_3 d_3}{6EI_3} - \frac{M_A d_3}{3EI_3} - \frac{M_B d_3}{6EI_3} \left(1 - 3 \frac{b_M^2}{d_3^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

де Q – головний вектор розподіленого навантаження, який визначається залежністю

$$Q = q d_2. \quad (16)$$

Якщо у крайньому торці є вільний шарнір, то реактивний момент там рівний нулю. Тобто момент $M_3 = 0$. Якщо навіть там є зосереджений зовнішній згинальний момент, то реактивний момент усе одно там рівний нулю.

Отже, у розгорнутому вигляді рівняння сумісності кутів повороту (2) запишуться у наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{01} = 0 &\Rightarrow -\frac{M_0 d_1}{3EI_1} - \frac{M_1 d_1}{6EI_1} - \frac{P \cdot a_p \cdot b_p}{6EI_1} \left(1 + \frac{b_p}{d_1}\right) = 0; \\ \alpha_{10} = \alpha_{12} &\Rightarrow \alpha_{10} = \frac{M_1 d_1}{3EI_1} + \frac{M_0 d_1}{6EI_1} + \frac{P \cdot a_p \cdot b_p}{6EI_1} \left(1 + \frac{a_p}{d_1}\right) = \\ &= -\frac{M_1 d_2}{3EI_2} - \frac{M_2 d_2}{6EI_2} + \frac{Q d_2^2}{24EI_2}; \\ \alpha_{21} = \alpha_{23} &\Rightarrow \frac{M_2 d_2}{3EI_2} + \frac{M_1 d_2}{6EI_2} - \frac{Q d_2^2}{24EI_2} = \\ &= -\frac{M_2 d_3}{3EI_3} - \frac{M_3 d_3}{6EI_3} - \frac{M_A d_3}{3EI_3} - \frac{M_B d_3}{6EI_3} \left(1 - 3 \frac{b_M^2}{d_3^2}\right) \end{aligned} \right\} . \quad (17)$$

Підставляючи чисельні значення та вирішуючи систему рівнянь (17), знаходимо невідомі $M_{0,1,2}$, які становлять

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= -6,5663 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ M_1 &= 9,7725 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ M_2 &= 2,0455 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м} \end{aligned} \right\} . \quad (18)$$

Підставляючи значення знайдених реактивних моментів (18) у вирази для кутів повороту, знайдемо

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_{01} \approx 0; \\ \alpha_1 &= \alpha_{10} = \alpha_{12} = 2,691 \cdot 10^{-3} \text{ рад}; \\ \alpha_2 &= \alpha_{21} = \alpha_{23} = -5,1637 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \end{aligned} \right\} . \quad (19)$$

2. Установлення законів зрізуючих сил та згинальних моментів. Закони зрізуючих сил $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$ можна встановлювати будь-яким чином. Зокрема можливо використовувати метод початкових параметрів або

метод перерізів. Для встановлення законів розподілу $Q(x)$ та $M(x)$ використаємо метод перерізів.

Для отримання виразів зрізуючих зусиль $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$ загалом необхідно знати реакції від дії шарнірних опор. Кожен прогін на рис. 8.1,б є статично визначеним. Відкидаючи шарніри з прогонів на рис. 8.1,б, отримуємо статично еквівалентні схеми, представлені на рис. 8.1,в, з яких можливо обчислити невідомі реакції R_{ij} , використовуючи рівняння рівноваги, які можна записати наступним чином:

Прогін № 1:

$$\sum M_0 Z = 0 : -M_0 + M_1 - R_{10} \cdot d_1 - P \cdot a_p = 0 \Rightarrow R_{10} = 1,0339 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$\sum M_1 Z = 0 : -M_0 + M_1 + R_{01} \cdot d_1 + P \cdot b_p = 0 \Rightarrow R_{01} = -2,0339 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Прогін № 2:

$$\sum M_1 Z = 0 : -M_1 + M_2 - R_{21} \cdot d_2 + Q \cdot \frac{d_2}{2} = 0 \Rightarrow R_{21} = 2,6136 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$\sum M_2 Z = 0 : -M_1 + M_2 + R_{12} \cdot d_2 - Q \cdot \frac{d_2}{2} = 0 \Rightarrow R_{12} = 3,3864 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Прогін № 3:

$$\sum M_2 Z = 0 : -M_2 - M_A + M_B + M_3 - R_{32} \cdot d_3 = 0 \Rightarrow R_{32} = -1,0682 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$\sum M_3 Z = 0 : -M_2 - M_A + M_B + M_3 + R_{23} \cdot d_3 = 0 \Rightarrow R_{23} = 1,0682 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Сумарні реакції R_i (рис. 8.1,г) знайдуться за загальною формулою

$$R_i = R_{i,i-1} + R_{i,i+1}, \quad (20)$$

де i – номер вузла.

Якщо у (20) нижній індекс $(i - 1)$ або $(i + 1)$ виходять за межі нумерації вузлів, то відповідна реакція $R_{ij} = 0$. Наприклад, при $i = 0$ маємо $R_0 = R_{0,-1} + R_{0,1} \Rightarrow R_0 = R_{0,1}$; $R_{0,-1} = 0$, тому

що один з нижніх індексів дорівнює -1 , що виходить за межі нумерації вузлів від 0 до 3 .

Отже, реакції R_i знайдуться за наступними формулами:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= R_{01} = -2,0339 \cdot 10^3 \text{ Н}; \\ R_1 &= R_{10} + R_{12} = 4,4202 \cdot 10^3 \text{ Н}; \\ R_2 &= R_{21} + R_{23} = 3,6818 \cdot 10^3 \text{ Н}; \\ R_3 &= R_{32} = -1,0682 \cdot 10^3 \text{ Н} \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Виконаємо перевірку знайдених реакцій $R_{0,1,2,3}$, використовуючи декілька рівнянь рівноваги,

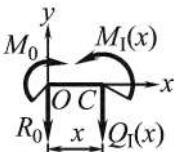
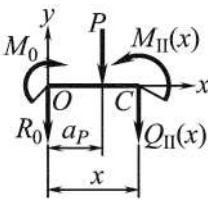
$$\left. \begin{aligned} \sum F_Y = 0 : & -R_0 - R_1 - R_2 - R_3 - P + Q = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow -(-2,0339 \cdot 10^3) - 4,4202 \cdot 10^3 - 3,6818 \cdot 10^3 - \\ & -(-1,0682 \cdot 10^3) - 1000 + 6000 \approx 0 \Rightarrow 0 = 0; \\ \sum M_0 Z = 0 : & -M_0 - P \cdot a_P + Q \left(d_1 + \frac{d_2}{2} \right) - M_A + \\ & + M_B + M_3 - R_1 \cdot d_1 - R_2(d_1 + d_2) - R_3(d_1 + d_2 + d_3) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow -(-6,5663 \cdot 10^2) - 1000 \cdot 0,6 + 6000 \left(1 + \frac{2}{2} \right) - 1000 + (-2000) + 0 - \\ & - 4,4202 \cdot 10^3 \cdot 1 - 3,6818 \cdot 10^3(1 + 2) - \\ & - (-1,0682 \cdot 10^3)(1 + 2 + 3) = 0 \Rightarrow 0 = 0; \\ \sum M_B Z = 0 : & -M_2 - M_A + M_B + M_3 + R_{23} \cdot a_M - R_{32} \cdot b_M = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow -(2,0455 \cdot 10^2) - 1000 + (-2000) + 0 + 1,0682 \cdot 10^3 \cdot 2 - \\ & - (-1,0682 \cdot 10^3) \cdot 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

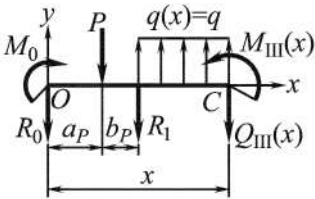
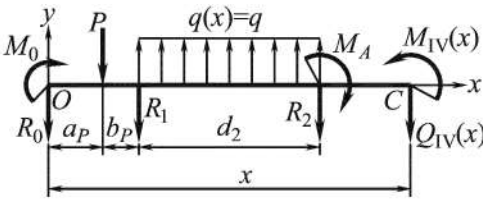
Останній запис у (22) означає, що рівняння рівноваги були записані для 3-го прогону відносно точки, де діє зосереджений момент M_B .

Як бачимо, рівняння рівноваги (22) задовольняються, що свідчить про правильність знаходження реакцій $R_{0,1,2,3}$.

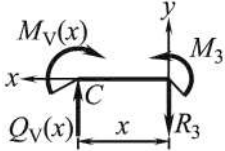
Використовуючи метод перерізів, можна отримати вирази для зрізуючих зусиль $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$. Для методу перерізів можна використовувати схему на рис. 8.1,в або на рис. 8.1,з. У нашому випадку буде використана схема на рис. 8.1,з, тому що там менше силових факторів. У табл. 8.2 подано розрахунок $Q(x)$ та $M(x)$ класичним методом перерізів.

Таблиця 8.2. Розрахунок $Q(x)$ та $M(x)$ класичним методом перерізів

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
1	Ділянка I ($0 \leq x < a_p$)  $\sum F_Y = 0: -R_0 - Q_1(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_1(x) = 2,0339 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_0 + R_0 x + M_1(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_1(x) = 2,0339 \cdot 10^3 x - 6,5663 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$
2	Ділянка II ($a_p \leq x < d_1 = a_p + b_p$)  $\sum F_Y = 0: -R_0 - P - Q_{II}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{II}(x) = 1,0339 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_0 + R_0 x + P(x - a_p) + M_{II}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{II}(x) = 1,0339 \cdot 10^3 x - 56,627 \text{ Н} \cdot \text{м}$

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
3	Ділянка III ($d_1 = a_p + b_p \leq x < d_1 + d_2$)  $\sum F_Y = 0: -R_0 - P - R_1 + q \cdot (x - d_1) - Q_{III}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{III}(x) = 3 \cdot 10^3 x - 6,3864 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_0 + R_0 x + P \cdot (x - a_p) + R_1 \cdot (x - d_1) -$ $- \frac{q \cdot (x - d_1)^2}{2} + M_{III}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{III}(x) = 1,5 \cdot 10^3 x^2 - 6,3864 \cdot 10^3 x + 5,8636 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$
4	Ділянка IV ($d_1 + d_2 \leq x < d_1 + d_2 + a_m$)  $\sum F_Y = 0: -R_0 - P - R_1 + q \cdot d_2 - R_2 - Q_{IV}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{IV}(x) = -1,0682 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_0 + R_0 x + P \cdot (x - a_p) + R_1 \cdot (x - d_1) -$ $- q \cdot d_2 \cdot (x - d_1 - 0,5 d_2) +$ $+ R_2 \cdot (x - d_1 - d_2) - M_A + M_{IV}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_{IV}(x) = 4,4091 \cdot 10^3 - 1,0682 \cdot 10^3 x \text{ Н} \cdot \text{м}$

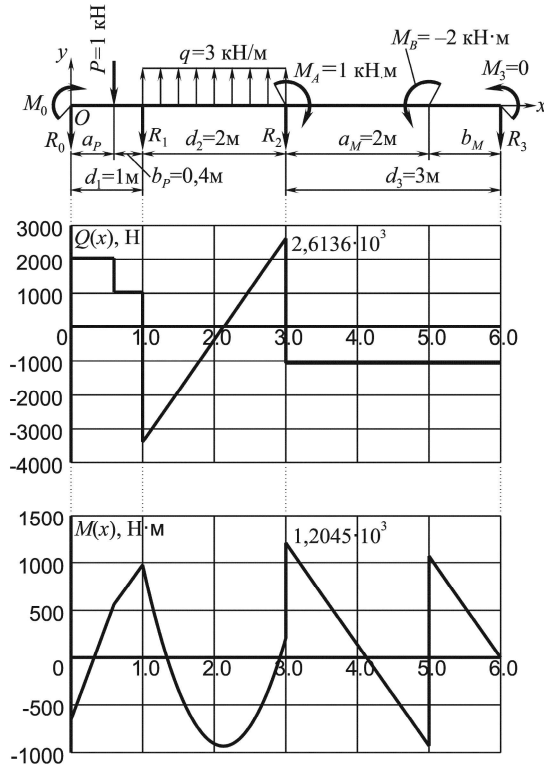
Продовж. табл. 8.2

№ з/п	Ескізи ділянок та закони параметрів деформування
5	Ділянка V ($0 \leq x < b_M$) (ідемо справа наліво)  $\sum F_Y = 0: -R_3 + Q_V(x) = 0 \Rightarrow Q_V(x) = -1,0682 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_V(x) + M_3 - R_3 x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_V(x) = 1,0682 \cdot 10^3 x \text{ Н} \cdot \text{м}.$ У координатній системі xOy $M_V(x) = 1,0682 \cdot 10^3 (d_1 + d_2 + d_3 - x) =$ $= 1,0682 \cdot 10^3 \cdot (6,0 - x)$

Таблиця 8.3. Закони $Q(x)$ та $M(x)$ у глобальних координатах, отримані класичним методом перерізів

№ з/п	Ділянка	$Q(x)$, Н	$M(x)$, Н·м
1	I, $x \in [0; a_p = 0,6 \text{ м})$	$2,0339 \cdot 10^3$	$2,0339 \cdot 10^3 x - 6,5663 \cdot 10^2$
2	II, $x \in [a_p = 0,6 \text{ м}; d_1 = 1 \text{ м})$	$1,0339 \cdot 10^3$	$1,0339 \cdot 10^3 x - 56,627$
3	III, $x \in [d_1 = 1 \text{ м}; d_1 + d_2 = 3 \text{ м})$	$3 \cdot 10^3 x - 6,3864 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3 x^2 - 6,3864 \cdot 10^3 x + 5,8636 \cdot 10^3$
4	IV, $x \in [d_1 + d_2 = 3 \text{ м}; d_1 + d_2 + a_m = 5 \text{ м})$	$-1,0682 \cdot 10^3$	$4,4091 \cdot 10^3 - 1,0682 \cdot 10^3 x$
5	V, $x \in [d_1 + d_2 + a_m = 5 \text{ м}; d_1 + d_2 + d_3 = 6 \text{ м})$	$-1,0682 \cdot 10^3$	$1,0682 \cdot 10^3 \cdot (6,0 - x)$

Нижче на рис. 8.6 показані епюри зрізуючих зусиль $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$.

Рис. 8.6. Епюри внутрішніх зусиль $Q(x)$ та $M(x)$

Закони внутрішніх зусиль $Q(x)$ та $M(x)$ можна отримати також за допомогою модифікованого методу перерізів [4]. У цьому методі кожна ділянка розглядається ізольовано від інших, маючи кожна свою локальну координатну систему. За великої кількості ділянок модифікований метод перерізів дає меншу трудомісткість у порівнянні з класичним методом. Модифікований метод перерізів дозволяє вести контроль правильності розрахунків на всіх ділянках, так як вони пов'язані між собою, на відміну від класичного методу, де закони внутрішніх зусиль для кожної ділянки визначаються незалежно одні від одних. У табл. 8.4 подано розрахунок $Q(x)$ та $M(x)$ модифікованим методом перерізів.

Таблиця 8.4. Розрахунок $Q(x)$ та $M(x)$ модифікованим методом перерізів

№ з/п	Ескізи ділянок	Закони параметрів деформування
1	Ділянка I ($0 \leq x < a_p$)	$\sum F_Y = 0: -R_0 - Q_I(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_I(x) = 2,0339 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_0 + R_0 x + M_I(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow M_I(x) = 2,0339 \cdot 10^3 x - 6,5663 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$
2	Ділянка II ($0 \leq x < b_p$)	$\sum F_Y = 0: Q_{II}(a_p) - P - Q_{II}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{II}(x) = 1,0339 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_I(a_p) - Q_{II}(a_p)x +$ $+ Px + M_{II}(x) = 0 \Rightarrow M_{II}(x) = 1,0339 \cdot 10^3 x +$ $+ 5,637 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$
3	Ділянка III ($0 \leq x < d_2$)	$\sum F_Y = 0: Q_{II}(b_p) - R_1 + qx - Q_{III}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{III}(x) = 3 \cdot 10^3 x - 3,3864 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_{II}(b_p) - Q_{II}(b_p)x + R_1 x -$ $- \frac{qx^2}{2} + M_{III}(x) = 0 \Rightarrow M_{III}(x) = 1,5 \cdot 10^3 x^2 -$ $- 3,3864 \cdot 10^3 x + 9,7725 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$
4	Ділянка IV ($0 \leq x < a_m$)	$\sum F_Y = 0: Q_{III}(d_2) - R_2 - Q_{IV}(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_{IV}(x) = -1,0682 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_{III}(d_2) - Q_{III}(d_2)x - M_A +$ $+ R_2 x + M_{IV}(x) = 0 \Rightarrow M_{IV}(x) = 1,2045 \cdot 10^3 -$ $- 1,0682 \cdot 10^3 x \text{ Н} \cdot \text{м}$
5	Ділянка V ($0 \leq x < b_m$)	$\sum F_Y = 0: Q_{IV}(a_m) - Q_V(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q_V(x) = -1,0682 \cdot 10^3 \text{ Н};$ $\sum M_C Z = 0: -M_{IV}(a_m) - Q_{IV}(a_m)x +$ $+ M_B + M_V(x) = 0 \Rightarrow M_V(x) = 1,0682 \cdot 10^3 -$ $- 1,0682 \cdot 10^3 x \text{ Н} \cdot \text{м}$

Таблиця 8.5. Закони $Q(x)$ та $M(x)$ у локальних координатах, отримані модифікованим методом перерізів

№ з/п	Ділянка	$Q(x)$, Н	$M(x)$, Н·м
1	I, $x \in [0; a_p = 0,6 \text{ м})$	$2,0339 \cdot 10^3$	$2,0339 \cdot 10^3 x - 6,5663 \cdot 10^2$
2	II, $x \in [0; b_p = 0,4 \text{ м})$	$1,0339 \cdot 10^3$	$1,0339 \cdot 10^3 x - 56,627 \cdot 10^2$
3	III, $x \in [0; d_2 = 2 \text{ м})$	$3 \cdot 10^3 x - 6,3864 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3 x^2 - 3,3864 \cdot 10^3 x + 9,7725 \cdot 10^3$
4	IV, $x \in [0; a_m = 2 \text{ м})$	$-1,0682 \cdot 10^3$	$1,2045 \cdot 10^3 - 1,0682 \cdot 10^3 x$
5	V, $x \in [0; b_m = 1 \text{ м})$	$-1,0682 \cdot 10^3$	$1,0682 \cdot 10^3 - 1,0682 \cdot 10^3 x$

3. Установлення небезпечного перерізу і перевірка його міцності. Небезпечним перерізом є переріз, де діє найбільший за модулем згинальний момент $|M|_{\max} = 1,2045 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Виконаємо перевірку міцності заданого квадратного перерізу розміром $50 \times 50 \text{ мм}$. Момент опору становить

$$W_{\min} = \frac{h^3}{6} = \frac{(50 \cdot 10^{-3})^3}{6} = 2,0833 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Найбільші напруження становлять

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_{\min}} = \frac{1,2045 \cdot 10^3}{2,0833 \cdot 10^{-5}} = 57,82 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 58 \text{ МПа}.$$

Допустимі напруження

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\tau}}{n_{\tau}} = \frac{235}{1,5} \approx 160 \text{ МПа}.$$

Необхідна умова міцності запишеться наступним чином:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma] \quad (23)$$

де $\sigma_{\text{пр}}$ – приведені напруження за однією з теорій міцності.

У нашому випадку для простого перерізу (квадрата) $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{пр}}$, а тому умова міцності (23) виконується наступним чином:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_{\max} \leq [\sigma] \Rightarrow 58 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

4. Побудова напружень. Для розглядуваного поперечного перерізу розраховуємо нормальні σ та дотичні τ напруження за відповідними формулами (29), (31) розділу 6, а потім будуємо епюри цих напружень. За потреби проводимо перевірку міцності обраних точок небезпечного перерізу.

5. Побудова пружної осі. Пружна вісь може бути визначена наближено з використанням інформації про кути повороту, які визначені залежностями (19) та законами внутрішніх зусиль, що подані в табл. 8.3 та зображені на рис. 8.6. У точках на осі x , де згинальний момент $M(x) = 0$, відбувається зміна кривизни пружної лінії на протилежну. На рис. 8.7 показана пружна вісь, отримана згідно з описаних рекомендацій.

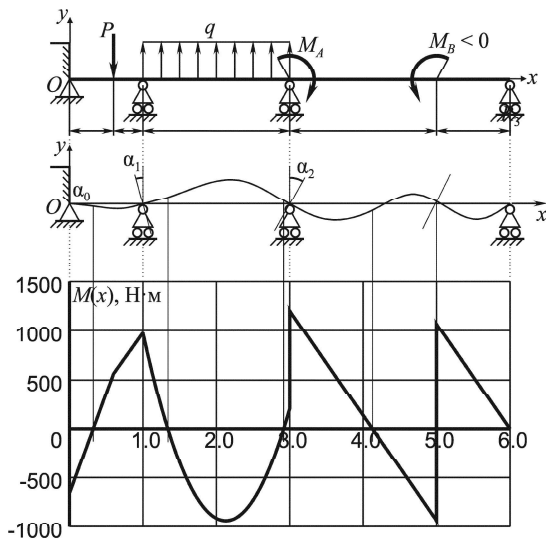


Рис. 8.7. Приблизна пружна вісь

Висновок: міцність балки на рис. 8.1 забезпечена за заданого зовнішнього навантаження, матеріалі та поперечному перерізі.

Якщо б поперечний переріз балки був би складений, то необхідно було б проводити повну перевірку небезпечного поперечного перерізу на міцність, ураховуючи дотичні напруження. Особливо це актуально для тонкостінних профілів.

Примітка. Якщо має місце конструктивне зміщення опор, то під час складання залежностей для кутів повороту додається складова від зміщення опор $\alpha_{ij}(w_i, w_j)$, яка визначається залежністю

$$\alpha_{ij}(w_i, w_j) = \alpha_{ji}(w_j, w_i) = \frac{w_j - w_i}{a},$$

де i, j – індекси опор, де індекс « j » розташований правіше, ніж індекс « i » (для правої системи координат, що прийнята в цьому прикладі, коли початок координат для окремих прогонів і балки загалом розміщується завжди на лівому торці); a – відстань між опорами.

9. ПРОЄКТУВАННЯ СТИСНУТОГО СТОЯКА ЗА УМОВИ СТІЙКОСТІ

9.1. Приклад

Виконати проєктувальний розрахунок стиснутого стояка за умови стійкості, постійного поперечного перерізу, розв'язуючи задачу в наступній послідовності:

1. Знайти в довіднику схему відповідно до заданого варіанта, визначити коефіцієнт довжини та підготувати таблицю залежності коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження (редукційного коефіцієнта) від гнучкості для обраного матеріалу, з якого планується виготовляти стояк.

2. Знайти мінімальну необхідну площу поперечного перерізу за заданої стискаючої сили за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження для квадратного поперечного перерізу.

3. Знайти мінімальну необхідну площу поперечного перерізу за заданої стискаючої сили за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження для двотаврового поперечного перерізу.

Матеріал – сталь з границею плинності $\sigma_T = 355$ МПа. Коефіцієнти зменшення основного допустимого напруження взяти як для сталі Ст5.

Рішення. На рис. 9.1 подана початкова схема стояка, який стискується осьовою центрально прикладеною силою $P = 1200$ кН.

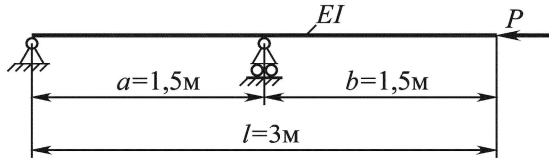


Рис. 9.1. Початкова схема

1. Підготовка вихідних даних. Підбір площі поперечного перерізу відбувається в результаті ітеративного процесу. З довідника [6, 7] знаходимо коефіцієнт довжини для схеми на рис. 9.1. Для нашого випадку для відношення довжин $a:l = 1:2 = 0,5$ з [6], табл. 8.4, с. 185, схема I, або з [7], табл. 45, с. 462, схема № 8, маємо $\mu = 1,35$.

Для розрахунку критичної сили $P_{\text{кр}}$, Н, використовується формула

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (1)$$

Для розрахунку мінімально необхідної площі поперечного перерізу використовується залежність

$$F \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_-]}, \quad (2)$$

де P – стискує зусилля; φ – редуційний коефіцієнт;

$[\sigma_-] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}^{\text{с}}} = \frac{355}{1,5} = 237 \text{ МПа}$ – допустимі напруження під час сти-

снення з умови **міцності**;

$n_{\text{т}}^{\text{с}} = 1,4 \div 1,6$ – коефіцієнт запасу для сталі за границею плинності.

Так як сталь є матеріалом ізотропним і має (майже) однакові механічні властивості під час розтягання і стиснення ($[\sigma_-] = [\sigma_+]$, де $[\sigma_+]$ – допустимі напруження під час розтягання), то беремо $n_{\text{т}}^{\text{с}} = 1,5$. Проте для таких матеріалів як дерево, бетон тощо, коефіцієнт $n_{\text{т}}^{\text{с}}$ повинен визначатися зі спеціальної літератури.

Як залежність редуційного коефіцієнта ϕ від гнучкості λ (тобто залежності $\phi = \phi(\lambda)$) будемо використовувати [1, табл. 22, с. 574].

Загальна послідовність проєктувального розрахунку. Загальна послідовність або алгоритм проєктувального розрахунку на стійкість з використанням коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження наступна:

1. Задати початкове значення редуційного коефіцієнта ϕ_1 .
2. Розрахувати мінімально необхідну площу поперечного перерізу за формулою

$$F \geq \frac{P}{\phi_1 \cdot [\sigma_-]}. \quad (3)$$

3. За мінімально необхідною площею F , що визначена за (3), установити мінімальний (головний центральний) момент інерції $I_{\min}$.

Якщо розглядається простий переріз (круг, квадрат, прямокутник), то необхідно встановити його характерний розмір, а потім за цим розміром обчислити мінімальний момент інерції. Наприклад, для круга, після того як встановили значення мінімальної площі за (3), установлюємо характерний розмір

(діаметр) $d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}}$. Далі за відомим діаметром установлюємо мінімальний момент інерції за залежністю $I_{\min} = \frac{\pi d^4}{64}$.

Якщо ж підбирається сортаментний прокат, то за таблицями сортаменту знаходимо номер профілю, який має площу мінімально більшу ніж обчислена за (3), і для цього ж номера профілю визначаємо мінімальний момент інерції $I_{\min}$.

4. Обчислити мінімальний радіус інерції за залежністю

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}. \quad (4)$$

5. Розрахувати гнучкість за формулою

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}. \quad (5)$$

6. За відомим значенням гнучкості λ , яке було обчислене за (5), використовуючи таблиці або залежності, що пов'язують редуційний коефіцієнт з гнучкістю $\varphi = \varphi(\lambda)$, наприклад, [1, табл. 22, с. 574], визначити (нове / уточнене) значення редуційного коефіцієнта φ'_1 .

7. Обчислити відносну різницю вхідного φ_1 та уточненого значення φ'_1 редуційних коефіцієнтів за формулою

$$\delta = \left| \frac{\varphi_1 - \varphi'_1}{\varphi_1} \right| \cdot 100\%, \quad (6)$$

де δ – відносна різниця.

8. Якщо розбіжність δ обчислена за (6) більше допустимої $[\delta]$, тобто якщо $\delta > [\delta]$, то необхідно обчислити уточнене значення редуційного коефіцієнта φ_2 за формулою

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} \quad (7)$$

і виконати новий розрахунок з пункту 1 до пункту 8, поклавши $\varphi_1 = \varphi_2$.

Якщо ж розбіжність δ обчислена за (6) менша або дорівнює допустимій $[\delta]$, тобто якщо $\delta \leq [\delta]$, то на цьому необхідно зупинитися і прийняти геометричні характеристики розраховані в цьому наближенні.

Пункт 8 можна записати наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \delta > [\delta] &\Rightarrow \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}, \\ \delta \leq [\delta] &\Rightarrow \text{вихід} \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Допустимо розбіжність або точність розрахунків $[\delta]$ можна покласти $[\delta] = 5 \%$.

На рис. 9.2 показано блок-схему описаного алгоритму.

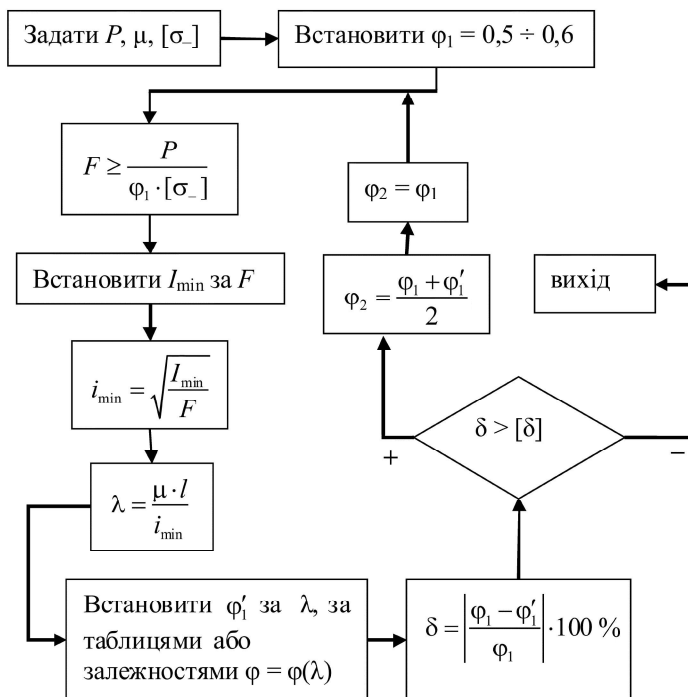


Рис. 9.2. Блок-схема проектувального розрахунку на стійкість

2. Підбір квадратного перерізу. Покажемо перше наближення, а решту обчислень виконаємо в табличному вигляді.

Перше наближення. Беремо $\phi_1 = 0,5$. Мінімально необхідна площа обчислюється наступним чином:

$$F \geq \frac{P}{\phi \cdot [\sigma_-]} = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 237 \cdot 10^6} = 1,0127 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

Сторона квадрата знайдеться так:

$$h = \sqrt{F} = \sqrt{1,0127 \cdot 10^{-2}} = 0,1006 \text{ м}.$$

Мінімальний (головний центральний) момент інерції обчислюється за формулою

$$I_{\min} = \frac{h^4}{12} = \frac{0,1006^4}{12} = 8,5456 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Мінімальний радіус інерції знайдеться наступним чином:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{8,5456 \cdot 10^{-6}}{1,0127 \cdot 10^{-2}}} = 2,905 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гнучкість стержня обчислюється за формулою

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1,35 \cdot 3}{2,905 \cdot 10^{-2}} = 139,4.$$

За табл. 22, с. 574, [1] шляхом лінійної інтерполяції встановлюємо нове значення φ' за щойно обчисленим значенням λ .

Значення $\lambda = 139,4$ знаходиться між $\lambda_A = 130$ та $\lambda_B = 140$; при $\lambda_A = 130$ значення редуційного коефіцієнта для сталі Ст5 становить $\varphi_A = 0,33$, а при $\lambda_B = 140 \rightarrow \varphi_B = 0,29$. Використовуючи формулу лінійної інтерполяції

$$\varphi(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_A)(\varphi_B - \varphi_A)}{\lambda_B - \lambda_A} + \varphi_A,$$

розраховуємо нове значення φ'_1

$$\varphi'_1 = \varphi(139,4) = \frac{(139,4 - 130)(0,29 - 0,33)}{140 - 130} + 0,33 = 0,2923.$$

Знаходимо різницю між φ_1 та φ'_1

$$\delta = \left| \frac{0,5 - 0,2923}{0,5} \right| \cdot 100\% = 41,5\%.$$

Як бачимо, різниця δ є досить великою. Тому необхідно продовжувати подальші розрахунки в наступних наближеннях. Нове значення редуційного коефіцієнта для другого наближення знайдеться

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,2923}{2} = 0,3962.$$

Далі знову повторюємо розрахунок, поклавши $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,3962$.

У табл. 9.1 наведено розрахунок решти наближень.

Таблиця 9.1. Розрахунок на стійкість балки з квадратним перерізом

№ з/п	Формула	Номер ітерації		
		1	2	3
1	φ	0,5	0,3962	0,3719
2	$F \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_-]}, \text{ М}^2$	$1,0127 \cdot 10^{-2}$	$1,278 \cdot 10^{-2}$	$1,3615 \cdot 10^{-2}$
3	$h = \sqrt{F}, \text{ М}$	0,1006	0,113	0,1167
4	$I_{\min} = \frac{h^4}{12}, \text{ М}^4$	$8,5456 \cdot 10^{-6}$	$1,361 \cdot 10^{-5}$	$1,5447 \cdot 10^{-5}$
5	$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}, \text{ М}$	$2,905 \cdot 10^{-2}$	$3,2634 \cdot 10^{-2}$	$3,3683 \cdot 10^{-2}$
6	$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$	139,4	124,1	120,2
7	φ' за [1, табл. 22, с. 574]	0,2923	0,3477	0,3593
8	$\delta = \left \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi} \right \cdot 100\%$	41,5	12,2	3,4
9	$\delta \leq [\delta] = 5\%$	ні	ні	так
10	$\varphi_{\text{next}} = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$	0,3962	0,3719	—

Отже, згідно з розрахунком стійкості в табл. 9.1 мінімально необхідний розмір квадратного перерізу h становить $h = 0,1167$ м. Беремо розмір квадратного перерізу $h = 0,120$ м = 120 мм. Прийнятий розмір завжди повинен бути не меншим за розрахований.

Виконаємо контрольний розрахунок окремо міцності і стійкості. Для прийнятого квадратного поперечного перерізу з розміром $h = 0,120$ м необхідні геометричні характеристики такі:

$$\begin{aligned} F &= h^2 = 0,120^2 = 0,0144 \text{ м}^2. \\ I_{\min} &= \frac{h^4}{12} = \frac{0,120^4}{12} = 1,728 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4. \\ i_{\min} &= \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{1,728 \cdot 10^{-5}}{0,0144}} = 3,4641 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \\ \lambda &= \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1,35 \cdot 3}{3,4641 \cdot 10^{-2}} = 116,9. \end{aligned}$$

Нормальні напруження σ під час дії стискуючої сили $P = 1200$ кН знайдуться наступним чином:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,0144} = 8,3333 \cdot 10^7 = 83,3 \text{ МПа}.$$

Ці напруження менше допустимих $[\sigma] = 237$ МПа, тобто

$$\sigma = 83,3 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 237 \text{ МПа},$$

що свідчить про виконання умови міцності.

Критичні напруження під час втрати стійкості визначаються залежністю

$$\sigma_{\text{кр}} = \begin{cases} \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, & \text{якщо } \lambda \geq \lambda_{\text{гр}}; \\ a - b \cdot \lambda, & \text{якщо } \lambda < \lambda_{\text{гр}}, \end{cases} \quad (9)$$

де $\lambda_{\text{гр}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пл}}}} = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{284 \cdot 10^6}} = 83$ – гранична гнучкість;

$\sigma_{\text{пл}} = 0,8 \cdot \sigma_{\text{т}} = 0,8 \cdot 355 = 284$ МПа – границя пропорційності.

У нашому випадку гнучкість становить $\lambda = 116,9$, що дає підставу застосувати верхню формулу для визначення критичних напружень $\sigma_{\text{кр}}$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{116,9^2} = 1,4441 \cdot 10^8 \text{ Па} = 144,4 \text{ МПа}.$$

Як бачимо, значення критичних напружень $\sigma_{\text{кр}} = 144,4$ МПа більші за значення діючих напружень $\sigma = 83,3$ МПа, що свідчить про виконання умови стійкості.

Коефіцієнт запасу стійкості η становить

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma} = \frac{144,4}{83,3} = 1,73.$$

Якщо прийняти точний розмір квадратного перерізу за розрахунком 3-го наближення (табл. 9.1), то

$$\sigma = 88,1 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\text{кр}} = 136,5 \text{ МПа}; \quad \eta = 1,55.$$

Відповідь: прийнятий мінімально необхідний розмір квадратного перерізу h становить $h = 120$ мм, за якого забезпечується одночасно міцність і стійкість для балки на рис. 9.1, виготовленої із заданої сталі.

3. Підбір двотаврового перерізу. Особливістю розрахунків сортаментних прокатів є необхідність використання довідкових таблиць, де наведені відповідні геометричні характеристики. Використовуючи схему на рис. 9.1, підберемо двотавровий переріз за ДСТУ 8768:2018 (ГОСТ 8239-72). Покажемо перше наближення, а решту обчислень виконаємо в табличному вигляді.

Перше наближення. Беремо $\varphi_1 = 0,5$. Мінімально необхідна площа обчислюється наступним чином:

$$F \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_-]} = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 237 \cdot 10^6} = 1,0127 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

За сортаментом визначаємо номер двотавра, площа поперечного перерізу якого мінімально більша за розраховану $F = 1,0127 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 101,3 \text{ см}^2$. Це № 55 з площею поперечного перерізу – $F = 118 \text{ см}^2 = 118 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Саме цю площу потрібно використовувати в подальших обчисленнях (у межах даного наближення).

Мінімальний (головний центральний) момент інерції двотавра № 55 з сортаменту становить

$$I_{\min} = 1356 \text{ см}^4 = 1356 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Мінімальний радіус інерції знайдеться наступним чином:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{1356 \cdot 10^{-8}}{118 \cdot 10^{-4}}} = 3,3899 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Гнучкість стержня обчислюється за формулою

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1,35 \cdot 3}{3,3899 \cdot 10^{-2}} = 119,5.$$

За табл. 22, с. 574, [1] шляхом лінійної інтерполяції встановлюємо нове значення φ' за щойно обчисленим значенням λ .

Значення $\lambda = 119,5$ знаходиться між $\lambda_A = 110$ та $\lambda_B = 120$; при $\lambda_A = 110$ значення редуційного коефіцієнта для сталі Ст5 становить $\varphi_A = 0,43$, а при $\lambda_B = 120 \rightarrow \varphi_B = 0,36$. Використовуючи формулу лінійної інтерполяції

$$\varphi(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_A)(\varphi_B - \varphi_A)}{\lambda_B - \lambda_A} + \varphi_A,$$

розраховуємо нове значення φ'_1 ,

$$\varphi'_1 = \varphi(119,5) = \frac{(119,5 - 110)(0,36 - 0,43)}{120 - 110} + 0,43 = 0,3637.$$

Знаходимо різницю між φ_1 та φ'_1

$$\delta = \left| \frac{0,5 - 0,3637}{0,5} \right| \cdot 100\% = 27,3\%.$$

Як бачимо, різниця δ є досить великою. Тому необхідно продовжувати подальші розрахунки в наступних наближеннях. Нове значення редуційного коефіцієнта для другого наближення знайдеться наступним чином:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,3637}{2} = 0,4318.$$

Далі знову повторюємо розрахунок, поклавши $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,4318$.

У табл. 9.2 наведено розрахунок решти наближень.

Таблиця 9.2. Розрахунок на стійкість балки з двотавровим перерізом

№ з/п	Формула	Номер ітерації		
		1	2	3
1	φ	0,5	0,4318	0,3977
2	$F \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_-]}, \text{ м}^2$	$1,0127 \cdot 10^{-2}$	$1,1726 \cdot 10^{-2}$	$1,2731 \cdot 10^{-2}$
3	№ профілю	55	55	60
4	F за сортаментом, м^2	$118 \cdot 10^{-4}$	$118 \cdot 10^{-4}$	$138 \cdot 10^{-4}$
5	$I_{\min}$ за сортаментом, м^4	$1356 \cdot 10^{-8}$	$1356 \cdot 10^{-8}$	$1725 \cdot 10^{-8}$
6	$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}$	$3,3899 \cdot 10^{-2}$	$3,3899 \cdot 10^{-2}$	$3,5355 \cdot 10^{-2}$
7	$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$	119,5	119,5	114,6
8	φ' за [1, табл. 22, с. 574]	0,3637	0,3637	0,3981
9	$\delta = \left \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi} \right \cdot 100\%$	27,3	15,8	0,1
10	$\delta \leq [\delta] = 5\%$	ні	ні	так
11	$\varphi_{\text{next}} = \frac{\varphi + \varphi'}{2}$	0,4318	0,3977	—

На основі розрахунків табл. 9.2 беремо двотавр № 60 за ДСТУ 8768:2018 (ГОСТ 8239-72).

Нормальні напруження σ під час дії стискувальної сили $P = 1200$ кН знайдуться наступним чином:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{1200 \cdot 10^3}{138 \cdot 10^{-4}} = 8,6957 \cdot 10^7 = 87 \text{ МПа.}$$

Ці напруження менше допустимих $[\sigma] = 237$ МПа, тобто

$$\sigma = 87 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 237 \text{ МПа,}$$

що свідчить про виконання умови міцності.

Критичні напруження у разі втрати стійкості визначаються верхньою формулою залежності (9)

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{114,6^2} = 1,5043 \cdot 10^8 \text{ Па} = 150,4 \text{ МПа.}$$

Як бачимо, значення критичних напружень $\sigma_{\text{кр}} = 150,4$ МПа більші за значення діючих напружень $\sigma = 87$ МПа, що свідчить про виконання умови стійкості.

Коефіцієнт запасу стійкості η становить

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma} = \frac{150,4}{87} = 1,73.$$

Відповідь: прийнято № 60 двотавра за ДСТУ 8768:2018 (ГОСТ 8239-72) за якого забезпечується одночасно міцність і стійкість для балки на рис. 9.1, виготовленої із заданої сталі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г. С., Агарев В. А., Квитка А. Л. и др. Сопротивление материалов : учеб. / под ред. Г. С. Писаренко. 5-е изд., перераб. и доп. Киев : Вища школа, 1986. 775 с.

2. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Є. С. Опір матеріалів : підруч. / за ред. Г. С. Писаренка. 2-ге вид., перероб. та доп. Київ : Вища школа, 2004. 655 с.

3. Коростильов Л. І., Лугінін О. Є., Спіхтаренко В. В., Коршиков Р. Ю., Клименков С. Ю., Терлич С. В. Опір матеріалів : навч. посіб. / за ред. Л. І. Коростильова. 2-ге вид., перероб. та доп. Миколаїв : НУК, 2019. 300 с.

4. Соков В. М. Модифицированный метод сечений для расчета внутренних усилий и перемещений деформируемых тел : зб. наук. пр. НУК. Миколаїв : НУК, 2015. № 3 (434). С. 3–10.

5. Пустынников В. И. Теория и практика построения эпюр (введение в сопротивление материалов). Харьков : Торнадо, 1999. 224 с.

6. Фесик С. П. Справочник по сопротивлению материалов. 2-е изд., перераб. и доп. Киев : Будівельник, 1982. 280 с.

7. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов / отв. ред. Г.С. Писаренко. 2-е изд., перераб. и доп. Киев : Наукова думка, 1988. 736 с.

8. Vitor Dias da Silva. Mechanics and Strength of Materials. New York : Springer Berlin Heidelberg, 2006. 531 p.

Навчальне видання

КОРОСТИЛЬОВ Леонтій Іванович
СОКОВ Валерій Миколайович

**ПРАКТИКУМ З ВИКОНАННЯ
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ
З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

Навчальний посібник

Комп'ютерна правка й коректура *О. Г. Костенко*
Комп'ютерне верстання *А. Д. Сорочинська*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 10,2. Тираж 100 прим. Вид. № 76. Зам. № 1904-06.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.