МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Ю. К. Грєшнов

АНАЛІЗ СИЛОВОЇ СИСТЕМИ

Методичні вказівки по виконанню розрахунково-графічних робіт та контрольних завдань

Рекомендовано Методичною радою НУК

Електронне видання на CD-ROM

Миколаїв 2010

УДК 531.31

Рецензент доктор технічних наук, проф. Ткач М.Р.

Електронний аналог друкованого видання:

Грєшнов Ю.К. Аналіз силової системи: Методичні вказівки по виконанню розрахунково-графічних робіт та контрольних завдань. – Миколаїв: НУК, 2010. – 25 с.

Кафедра теоретичної механіки

Методичні вказівки призначені для самостійного вивчення основних понять і характеристик, потрібних для аналізу силової системи.

Метою вказівок є навчити студентів приводити силову систему до найпростішого виду. Вказівки містять 30 варіантів завдань для розрахунків по спрощенню силової системи і приклад їх виконання.

Ці завдання можна використати, як для розрахунково-графічних робіт при курсі в три семестри, так і для контрольних здань в кредитно-модульній системі при курсі в два семестри.

Вказівки також містять 30 питань для тест-контролю знань.

УДК 531.31

1. ВСТУП

Теоретична механіка вивчає механічний стан матеріальних тіл, які знаходяться під дією сил. Можливі такі випадки механічного стану під дією сил, прикладних до тіла:

a) тіло перебуває в стані спокою;

b) тіло рухається без прискорення його точок;

c) тіло рухається з прискоренням точок, тобто швидкості точок змінюються.

Розглянемо конкретний приклад – рух корабля (рис.1).

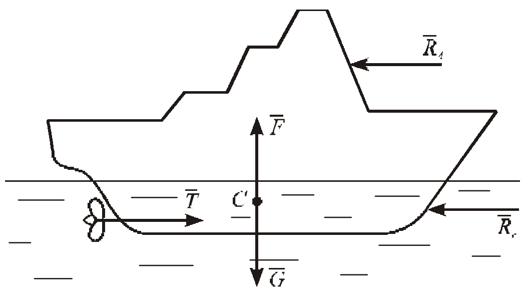

Рис. 1

На ходу на нього діють такі сили:

$\overline{G}$ – сила тяжіння;

$\overline{F}$ – сила підтримання, яка у водовиміщувальному режимі залежить від зануреного об'єму корпуса;

$\overline{R}_A$ – аеродинамічний опір, який для великих швидкостей залежить від швидкості руху;

$\overline{R}_Г$ – гідродинамічний опір, який залежить від швидкості руху;

$\overline{T}$ – рушійна сила, упор гвинта.

Розглянемо такі випадки:

1) $\overline{G} > \overline{F}$ – корпус корабля буде занурюватись, доки сила тяжіння не зрівняється з силою підтримання $\overline{G} = \overline{F}$;

2) $\overline{G} < \overline{F}$ – корпус корабля буде вспливати, доки сила тяжіння не зрівняється з силою підтримання $\overline{G} = \overline{F}$;

3) $\overline{T} > \overline{R}_A + \overline{R}_Г$ – корабель почне набирати швидкість, доки упор гвинта не зрівняється з буксировальним опором $\overline{T} = \overline{R}_A + \overline{R}_Г$;

4) $\overline{T} < \overline{R}_A + \overline{R}_Г$ – корабель буде скидати швидкість, доки упор гвинта не зрівняється з буксировальним опором $\overline{T} = \overline{R}_A + \overline{R}_Г$;

5) $\overline{T} = \overline{R}_A + \overline{R}_Г$ – корабель буде рухатися зі сталою швидкістю.

Таким чином від властивостей силової системи $(\overline{G}, \overline{F}, \overline{T}, \overline{R}_A, \overline{R}_Г)$ залежить поведінка матеріального тіла "корабель".

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Сила – це фундаментальне поняття механіки. Сила характеризує міру механічної взаємодії матеріальних тіл і визначає інтенсивність, напрямок та точку, через яку відбувається ця взаємодія.

Таким чином, сила – векторна величина.

Пряма лінія, на якій лежить вектор сили, називається ***лінією дії сили***.

Для того, щоб задати точку прикладення сили, користуються радіусом-вектором, який проведений з початку координат в точку прикладення сили (рис. 2).

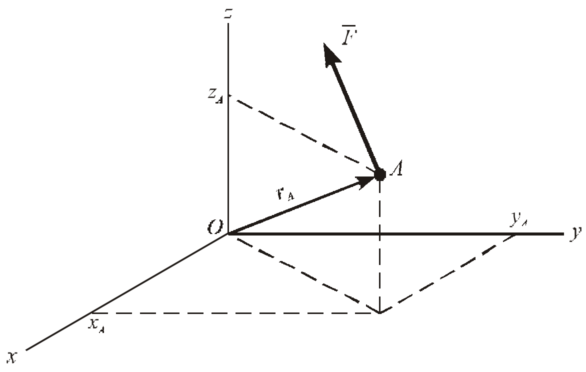

Рис. 2

Якщо спроектувати на координатні осі радіус-вектор $\overline{r}_A$, то отримаємо координати точки А прикладення сили x_A, y_A, z_A.

Сукупність всіх сил, що діють на дане тіло, називається ***силовою системою***. Силові системи поділяються на типи в залежності від розташування в просторі ліній дії сил.

Якщо лінії дії сил перетинаються в одній точці (вузлі), тоді силова система називається ***збіжною***.

Якщо лінії дії сил паралельні між собою, тоді силова система називається ***паралельною***.

Якщо лінії дії сил розташовані в просторі довільно, тоді силова система називається ***довільною***.

Ці три типи силових систем можуть бути як на площині, так і в просторі, і тоді вони відповідно називаються ***плоскими***, або ***просторовими***.

Таким чином існує шість типів силових систем.

Силова система, прикладена до твердого тіла, називається ***зрівноваженою***, якщо у точок тіла вона не викликає прискорень, тобто, або тіло знаходиться у стані спокою, або його точки рухаються рівномірно та прямолінійно. Зрівноважена силова система не змінює механічного стану тіла.

Незрівноважена силова система викликає прискорення точок тіла і воно починає змінювати свій механічний стан.

Силові системи, під дією яких тіло знаходиться в однаковому механічному стані, називаються ***еквівалентними***.

Якщо існує одна сила, яка еквівалентна всій силовій системі, то вона називається ***рівнодійною***.

Позначення:

$\left(\overline{F}_1 \ldots \overline{F}_i \ldots \overline{F}_n\right)$ – силова система, що складається з n сил;

$\sim$ – знак еквівалентності;

$\left(\overline{F}_1 \ldots \overline{F}_i \ldots \overline{F}_n\right) \sim \left(\overline{Q}_1 \ldots \overline{Q}_k \ldots \overline{Q}_m\right)$ – еквівалентні силові системи;

$\left(\overline{F}_1 \ldots \overline{F}_i \ldots \overline{F}_n\right) \sim \overline{R}$ – сила $\overline{R}$ рівнодійна;

$\left(\overline{F}_1 \ldots \overline{F}_i \ldots \overline{F}_n\right) \sim O$ – зрівноважена силова система.

3. ОБЕРТОВИЙ ЕФЕКТ СИЛИ

3.1. Алгебраїчний момент сили

Щоб оцінити спроможність сили обертати тіло навколо точки або осі, існують поняття ***моменту*** сили відносно точки, або осі.

Нехай на площині до плоскої фігури, у якій точка O закріплена, прикладена в точці A сила $\overline{F}$ (рис. 3).

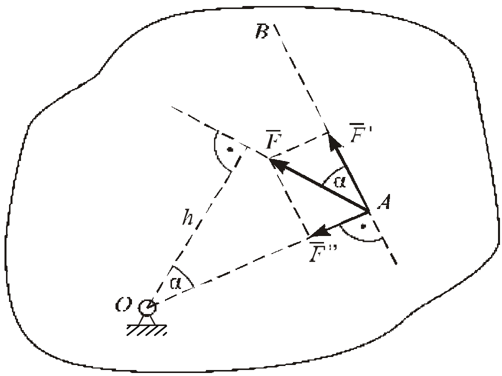

Рис. 3

Точка A може почати рух під дією сили лише в напрямку $AB \perp OA$. В цьому ж напрямку діє складова $\overline{F}'$ сили $\overline{F}$, яка і створює обертовий ефект навколо точки O.

Складова $\overline{F}''$, лінія дії якої проходить через точку O, не може обертати фігуру навколо точки O.

Чим більше модуль $\overline{F}'$ і більше відстань OA, тим обертовий ефект більше. Величина, яка враховує обидва ці фактори називається ***алгебраїчним моментом сили*** $\overline{F}$ відносно точки O і позначається $m_O(\overline{F})$.

Таким чином:

$$m_O(\overline{F}) = \pm F' \cdot OA = \pm(F\cos\alpha)\cdot OA = \pm F \cdot (OA \cdot \cos\alpha) = \pm F \cdot h.$$

Момент називається алгебраїчним, бо може бути додатнім та від'ємним.

В статиці чисто умовно прийнято: якщо сила намагається обертати тіло навколо точки проти годинникової стрілки, її момент додатній.

В динаміці же, якщо момент сили сприяє руху механічної системи, то він додатній, якщо заважає, то він від'ємний.

Щоб не розкладати силу на $\overline{F}'$ та $\overline{F}''$, загальноприйнята формула:

$$m_O\left(\overline{F}\right) = \pm F \cdot h.$$

Перпендикуляр h, проведений з точки O до лінії дії сили $\overline{F}$ називається ***плечем сили***. На практиці, коли визначення плеча сили потребує геометричних обчислень, користуються теоремою Варіньона, що ***момент рівнодійної сили дорівнює сумі моментів складових сил***. Тоді силу розкладають на такі складові, у яких плече визначається без ускладнень.

3.2. Вектор-момент сили

Обертовий ефект сили на тілі в просторі відносно точки O алгебраїчним моментом задати неможливо, так як треба ще задати площину, в якій лежать точка O і вектор сили $\overline{F}$ (рис. 4). Для цього існує вектор-момент сили, визначений формулою:

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r}_A \times \overline{F}.$$

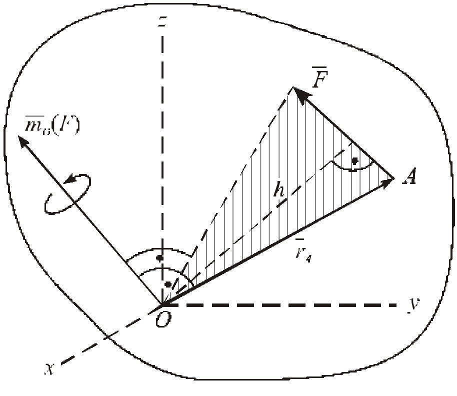

Рис. 4

За властивостями векторного добутку:

a) $\left|\overline{m}_O\left(\overline{F}\right)\right| = F \cdot h$, де h – плече сили $\overline{F}$;

b) площина обертового ефекту перпендикулярна до лінії дії вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$;

c) з кінця вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$ обертовий ефект спостерігається проти годинникової стрілки.

3.3. Момент сили відносно осі

Якщо спроектувати вектор-момент $\overline{m}_O(\overline{F})$ на координатну вісь (наприклад, на Oz), то отримаємо величину, яка називається ***моментом сили*** $\overline{F}$ ***відносно осі*** Oz і позначається $m_z(\overline{F})$.

Момент сили відносно осі характеризує спроможність сили створювати обертовий ефект навколо осі.

Практично момент сили відносно осі визначають наступним чином: проектують силу $\overline{F}$ на площину P, перпендикулярну до осі, а потім обчислюють алгебраїчний момент проекції $\overline{F}_p$ відносно точки перетину O площини P з віссю Oz (рис. 5).

$$m_z(\overline{F}) = m_O(\overline{F}_p) = \pm F_p \cdot h = \pm F \cdot h\cos\alpha.$$

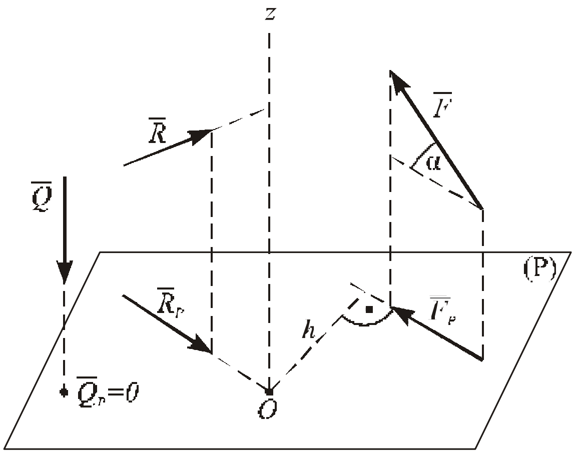

Рис. 5

Розглянемо два випадки, коли момент сили відносно осі дорівнює нулю.

1. Лінія дії сили $\overline{Q}$ паралельна осі Oz, тоді $m_z(\overline{Q}) = \pm Q_p \cdot h = 0$, так як $Q_p = 0$;

2. Лінія дії сили $\overline{R}$ перетинає вісь Oz, тоді $m_z(\overline{R}) = \pm R_p \cdot h = 0$, так як $h = 0$.

Тобто, ***сила, лінія дії якої паралельна осі, або перетинає вісь, моменту відносно цієї осі не створює.*** Це означає, що вона не спроможна обертати тіло навколо цієї осі.

3.4. Пара і динамічний гвинт

В статиці існують дві силові системи, які не можуть бути спрощені і які відіграють особливу роль – це пара і динамічний (силовий) гвинт.

Парою називаються дві антипаралельні сили з однаковими модулями (рис. 6).

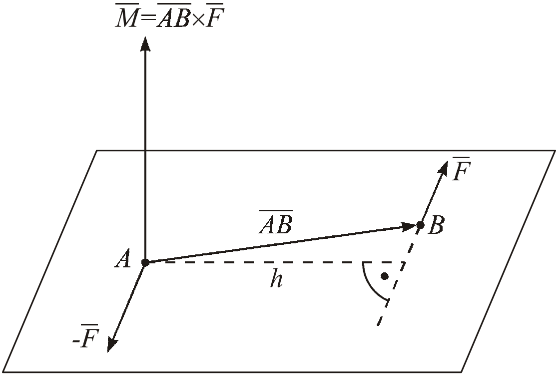

Рис. 6

Відстань між лініями дії сил називається ***плечем пари***. Величина $\overline{M} = \overline{AB}\times\overline{F}$ називається ***вектор-моментом пари***, який є вільним вектором. Це дозволяє розташовувати пару як завгодно в площині її дії, або переносити її в паралельну площину. Всі пари з однаковими вектор-моментами еквівалентні і створюють однаковий обертовий ефект.

Динамічним гвинтом називається силова система, яка складається з пари і сили, причому лінія дії сили перпендикулярна площині дії пари (рис. 7). Якщо силова система буде еквівалентна динамічному гвинту, то лінія CD називається ***центральною віссю*** силової системи.

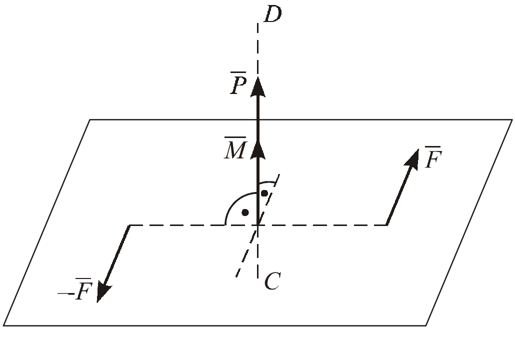

Рис. 7

4. ІНТЕГРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛОВОЇ СИСТЕМИ

Термін "інтегральна характеристика" означає, що вона залежить від всіх сил силової системи. Такими величинами є головний вектор, головний вектор-момент і статичний інваріант.

Нехай до тіла прикладена силова система $(\overline{F}_1 ... \overline{F}_i ... \overline{F}_n)$ (рис. 8).

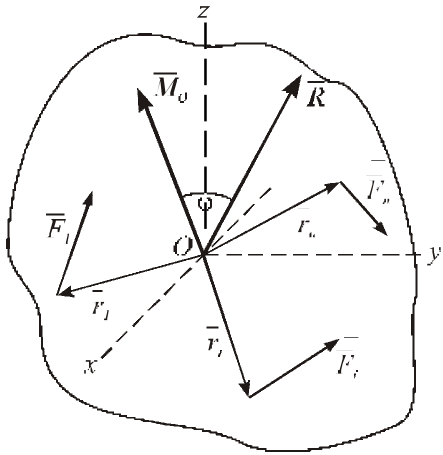

Рис. 8

Візьмемо довільну точку *O*, яка буде мати назву ***центр приведення***. Введемо координатну систему *Oxyz* з початком в точці *O*. Точки прикладення сил визначають радіуси-вектори $\overline{r}_1,...\overline{r}_i,...\overline{r}_n$, проведені з центра *O*.

Якщо нема ніяких обмежень на розташування в просторі ліній дій сил, тоді це буде довільна просторова силова система.

4.1. Головний вектор

Головним вектором називається векторна сума всіх сил: $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$.

Обчислимо проекції головного вектора на координатні осі:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

Модуль головного вектора $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$. Орієнтацію в просторі лінії дії вектора $\overline{R}$ визначають напрямні косинуси кутів нахилу цієї лінії до координатних осей:

$$\cos\left(x,\overline{R}\right)=\frac{R_x}{R},\quad \cos\left(y,\overline{R}\right)=\frac{R_y}{R},\quad \cos\left(z,\overline{R}\right)=\frac{R_z}{R}.$$

4.2. Головний вектор-момент

Головним вектор-моментом відносно центра приведення O називається сума вектор-моментів всіх сил відносно точки O

$$\overline{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\overline{m}_O\left(\overline{F}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i.$$

Обчислимо проекції головного вектор-моменту на координатні осі:

$$M_{Ox}=\sum_{i=1}^{n}m_x\left(\overline{F}_i\right),\quad M_{Oy}=\sum_{i=1}^{n}m_y\left(\overline{F}_i\right),\quad M_{Oz}=\sum_{i=1}^{n}m_z\left(\overline{F}_i\right).$$

Модуль головного вектор-моменту

$$M_O=\sqrt{M_{Ox}^2+M_{Oy}^2+M_{Oz}^2}.$$

Орієнтацію в просторі лінії дії вектора $\overline{M}_O$ визначають напрямні косинуси:

$$\cos\left(x,\overline{M}_O\right)=\frac{M_{Ox}}{M_O},\quad \cos\left(y,\overline{M}_O\right)=\frac{M_{Oy}}{M_O},\quad \cos\left(z,\overline{M}_O\right)=\frac{M_{Oz}}{M_O}.$$

4.3. Статичні інваріанти

Визначення головного вектора та головного вектор-моменту відносно точки O називається ***приведенням силової системи до центра О***.

Величина, яка не змінює своє значення при приведенні силової системи до різних центрів називається ***статичним інваріантом*** (від французького invariant – незмінний).

Першим статичним інваріантом являється головний вектор, так як сума всіх сил не залежить від центра приведення. Головний вектор-момент не є статичним інваріантом, тому що при зміні центра приведення змінюються радіуси-вектори точок прикладення сил, а від того і суми вектор-моментів сил. Зміна головного вектор-моменту при приведенні до центрів O і B відбувається за формулою: $\overline{M}_B = \overline{M}_O + \overline{BO} \times \overline{R}$. Помножимо це рівняння скалярно на головний вектор $\overline{R} \cdot \overline{M}_B = \overline{R} \cdot \overline{M}_O + \overline{R}(\overline{BO} \times \overline{R})$, але $\overline{R}(\overline{BO} \times \overline{R}) = 0$, оскільки в змішаному добутку два однакових множника $\overline{R}$.

Таким чином $\overline{R} \cdot \overline{M}_B = \overline{R} \cdot \overline{M}_O = \text{const}$, тобто: с***калярний добуток головного вектора на головний вектор-момент є другим статичним інваріантом.***

Можна отримати інший різновид другого інваріанта. Для цього розкриємо скалярний добуток $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = R \cdot M_o \cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\overline{R}$ та $\overline{M}_O$.

Величина $M^* = M_O \cos\varphi$ - це проекція головного моменту $\overline{M}_O$ на лінію дії головного вектора $\overline{R}$, яка дорівнює $M^* = \dfrac{\overline{R} \cdot \overline{M}_O}{R} = \dfrac{\text{const}}{\text{const}} = \text{const}.$

Ця величина називається ***найменшим моментом*** і також є статичним інваріантом.

5. СПРОЩЕННЯ СИЛОВОЇ СИСТЕМИ

Коли на тіло діє багато сил, то неможливо зробити висновок, як воно буде себе поводити. Тому однією із основних задач статики є еквівалентне перетворення силової системи з метою заміни її еквівалентною силовою системою найпростішого виду.

Цю можливість надає основна теорема статики – теорема Пуансо: ***довільну силову систему можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, яка дорівнює головному вектору, і однієї пари, момент якої дорівнює головному вектор-моменту відносно обраного центра приведення.***

Таким чином, в загальному випадку, для довільної просторової силової системи має місце еквівалентність $(\overline{F}_1,...\overline{F}_i,...\overline{F}_n) \sim \overline{R}, \overline{M}_O$.

Але в окремих випадках можливе подальше спрощення після приведення силової системи до центра *O*, в залежності від того, які значення мають величини $\overline{R}$ та $\overline{M}_O$.

Розглянемо ці випадки.

1. $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O = 0$, тоді $(\overline{F}_1,...\overline{F}_i,...\overline{F}_n) \sim 0$, тобто система зрівноважена і вона неспроможна змінювати механічний стан тіла.
2. $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O \neq 0$, тоді $(\overline{F}_1,...\overline{F}_i,...\overline{F}_n) \sim \overline{M}_O$, силова система еквівалентна парі і намагається обертати тіло. В цьому випадку головний вектор-момент $\overline{M}_O$ буде статичним інваріантом.
3. $\overline{R} \neq 0, \overline{M}_O = 0$, тоді $(\overline{F}_1,...\overline{F}_i,...\overline{F}_n) \sim \overline{R}$, силова система еквівалентна рівнодійній силі, лінія дії якої проходить через центр приведення *O*.
4. $\overline{R} \neq 0, \overline{M}_O \neq 0$, але другий інваріант $\overline{R} \cdot \overline{M}_O = 0$. Звідси витікає, що $\overline{R} \perp \overline{M}_O$, і в цьому випадку $(\overline{F}_1,...\overline{F}_i,...\overline{F}_n) \sim \overline{R'}$, причому $R' = R$, але лінія дії рівнодійної сили $\overline{R'}$ не проходить через центр *O*, а віддалена від нього на відстань $d = \dfrac{M_O}{R}$.
5. $\overline{R} \neq 0, \overline{M}_O \neq 0$, і другий інваріант $\overline{R} \cdot \overline{M}_O \neq 0$. В цьому випадку між векторами $\overline{R}$ і $\overline{M}_O$ буде кут $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$. Тоді $(\overline{F}_1,...\overline{F}_i,...\overline{F}_n) \sim \overline{R'}, \overline{M}^*$, де $\overline{R'} \parallel \overline{M}^*$, тобто система еквівалентна динамічному гвинту і її центральна ось віддалена від центра *O* на відстань
$$d = \frac{M_O \sin\varphi}{R}.$$

У випадках 2, 3, 4, 5 силова система незрівноважена і тому буде змінювати механічний стан тіла.

6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ

На рис. 9 наведені 6 схем призматичних тіл, до яких прикладена силова система $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{M})$. Тіла мають розміри $l_1 \times l_2 \times l_3$.

В таблиці наведені значення сил і пари. Для сили задано двома літерами точку прикладення і напрямок. Перша літера означає точку приладення, а послідовність літер – напрямок. Для пари задано площину дії послідовністю літер, яка визначає напрямок обертового ефекту.

Наприклад, на схемі 1, якщо площина дії пари позначена *CBLD*, то з кінця осі *Ox* обертовий ефект буде спостерігатися проти годинникової стрілки. Якщо площина позначена *DLBC*, то обертовий ефект – за годинниковою стрілкою. Кожна схема призначена для 5 варіантів.

В завданні необхідно:

1.Привести силову систему до центру *O*.

2.Привести силову систему до центру *B*.

3.Обчислити другий інваріант в центрах *O* і *B*.

4.Зробити висновок, до якого найпростішого виду привелася силова система.

Обчислення проводити для тригонометричних функцій з точністю 3-х знаків після коми, а для інших величин – 2-х знаків.

Про вірність розрахунків свідчить співпадіння значень другого інваріанту в центрах *O* і *B* з деякою точністю, тому що в процесі обчислень набігає похибка.

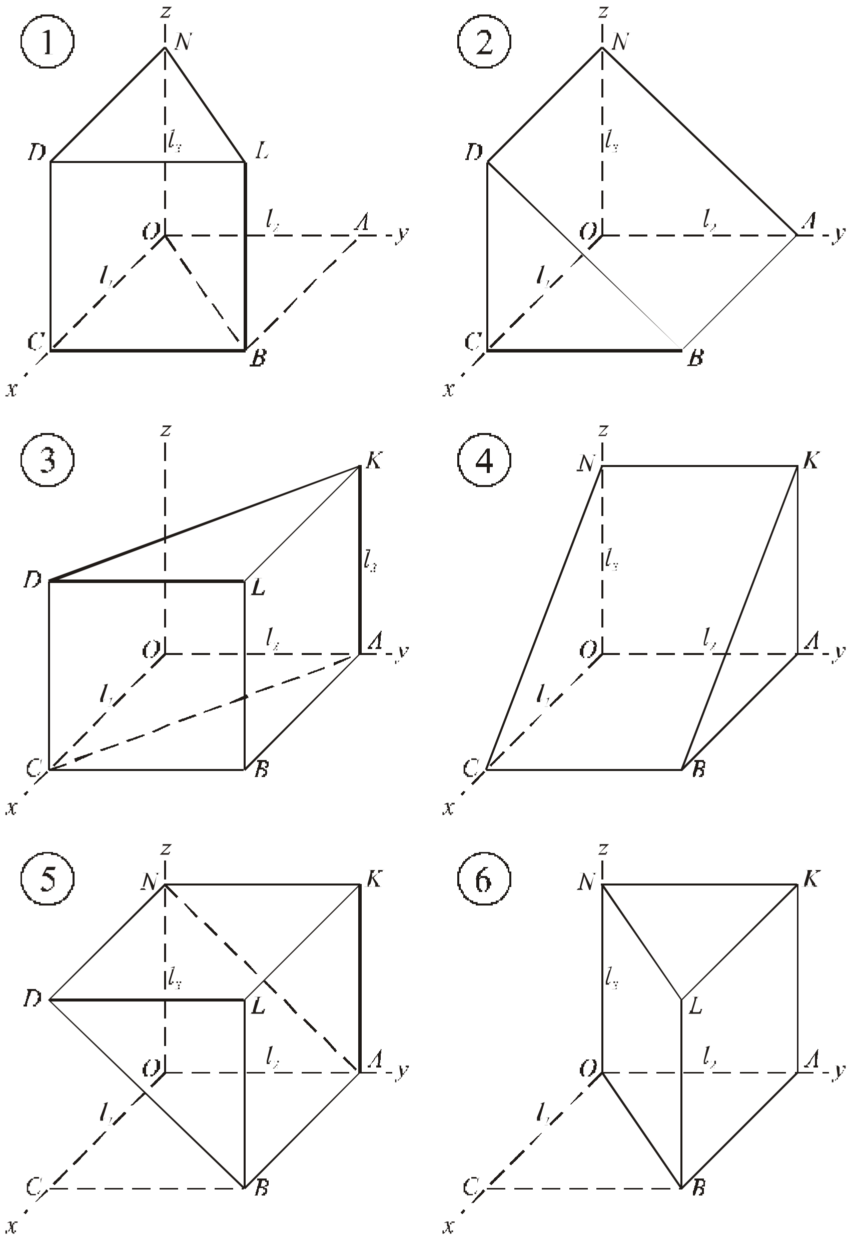

Рис. 9

Таблиця

Варіант	Схема	Розмір *м*			Сила						Пара	
					P_1		P_2		P_3		M	
		l_1	l_2	l_3	Модуль, *кН*	Напрямок	Модуль, *кН*	Напрямок	Модуль, *кН*	Напрямок	Момент *кН·м*	Площина дії
1	1	2,0	3,0	4,0	10	*CD*	15	*LN*	20	*DO*	100	*OBLN*
2	1	4,0	2,0	3,0	20	*CN*	15	*BC*	10	*DB*	200	*ONLB*
3	1	1,5	5,0	2,5	30	*OB*	20	*ND*	35	*BD*	300	*ONDC*
4	1	3,0	4,0	2,0	25	*OD*	10	*NL*	30	*DL*	150	*CDLB*
5	1	5,0	2,5	1,5	10	*NC*	25	*BO*	40	*CO*	250	*LND*
6	2	2,5	1,5	5,0	30	*DB*	15	*CN*	20	*BC*	100	*ANDB*
7	2	3,5	4,5	6,0	40	*NA*	20	*CA*	10	*DC*	200	*ABDN*
8	2	4,5	6,0	3,5	15	*NC*	25	*AN*	35	*BA*	250	*ONDC*
9	2	6,0	3,5	4,5	25	*BD*	40	*AC*	30	*ND*	300	*ABCO*
10	2	4,0	2,5	1,5	35	*DO*	30	*OB*	40	*AB*	150	*BDC*
11	3	2,5	4,0	1,5	50	*DK*	20	*AL*	30	*CB*	100	*AKDC*
12	3	1,5	2,5	4,0	40	*AC*	35	*DB*	20	*LB*	200	*ACDK*
13	3	4,0	2,5	1,5	30	*CA*	40	*KB*	35	*DL*	250	*BLDC*
14	3	2,5	1,5	4,0	35	*CL*	30	*KD*	40	*AK*	300	*AKLB*
15	3	3,0	4,0	1,5	20	*BK*	50	*LC*	25	*DC*	150	*KDL*
16	4	4,0	3,0	1,5	10	*NC*	20	*AN*	30	*BA*	100	*BKNC*
17	4	1,5	3,0	4,0	20	*KB*	30	*CA*	35	*NK*	200	*BCNK*
18	4	4,0	1,5	3,0	30	*BK*	35	*KO*	40	*CB*	250	*AKB*
19	4	3,0	4,0	1,5	35	*AC*	40	*NA*	10	*BC*	300	*AKNO*
20	4	1,5	4,0	3,0	40	*OK*	10	*CN*	20	*AB*	150	*AOCB*
21	5	2,0	3,0	6,0	10	*DB*	15	*KB*	20	*NK*	200	*ABDN*
22	5	3,0	2,0	6,0	15	*AN*	20	*DK*	30	*BL*	250	*ANDB*
23	5	6,0	2,0	3,0	20	*BK*	30	*NL*	40	*KA*	300	*BLD*
24	5	2,0	3,0	6,0	30	*KD*	10	*BD*	45	*AK*	350	*KNDL*
25	5	6,0	3,0	2,0	10	*NA*	15	*AL*	20	*DN*	100	*AKLB*
26	6	5,0	3,0	2,0	10	*NL*	15	*KB*	20	*AO*	150	*BLNO*
27	6	4,0	5,0	2,0	15	*LA*	20	*AN*	25	*BL*	200	*ONLB*
28	6	5,0	4,0	2,0	20	*LN*	25	*AL*	30	*KN*	250	*AKNO*
29	6	4,0	3,0	6,0	25	*NA*	30	*BK*	40	*KA*	300	*KNL*
30	6	3,0	5,0	4,0	30	*OB*	40	*KO*	10	*AK*	350	*AKLB*

7. ПРИКЛАД АНАЛІЗУ СИЛОВОЇ СИСТЕМИ

На призматичне тіло *OABCDL* (рис. 10) діє силова система $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{M})$. Розміри тіла $l_1 \times l_2 \times l_3$. Сила $\overline{P}_1$ прикладена в точці *D* в напрямку *DC*, $\overline{P}_2$ – в точці *L* в напрямку *LA*, $\overline{P}_3$ – в точці *B* в напрямку *BO*. Пара з моментом *M* діє в площині *OALD*, причому послідовність літер визначає напрямок обертового ефекту пари.

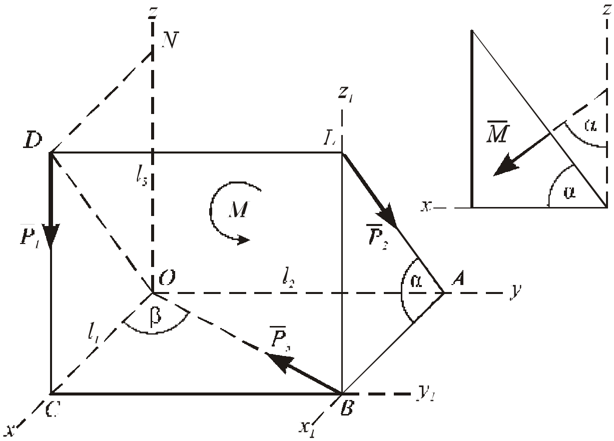

Рис. 10

Величини мають такі значення:

$$P_1 = 20\ kH,\ P_2 = 30\ kH,\ P_3 = 40\ kH,\ M = 150\ kH \cdot м,$$

$$l_1 = 2м,\ l_2 = 3м,\ l_3 = 4м.$$

В завдані необхідно:

1.Привести силову систему до центру *O* .

2.Привести силову систему до центра *B*.

3.Для перевірки на відсутність помилок обчислити другий інваріант в центрах *O* і *B*.

4.Зробити висновок, до якого найпростішого виду привелася силова система.

Вводимо координатні системи *Oxyz* та Bx_1y_1z осі яких паралельні.

Обчислимо допоміжні величини – тригонометричні функції кутів нахилу векторів сил до координатних осей:

$$\sin\alpha = \frac{l_3}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,894;$$

$$\cos\alpha = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,447;$$

$$\sin\beta = \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 0,832;$$

$$\cos\beta = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 0,555.$$

Приведення силової системи до центра *O*

Проекції головного вектора

$$R_x = -P_2\cos\alpha - P_3\cos\beta = -30\cdot 0,447 - 40\cdot 0,555 = -35,61\ kH;$$

$$R_y = -P_3\sin\beta = -40\cdot 0,832 = -33,28\ kH;$$

$$R_z = -P_1 - P_2\sin\alpha = -20 - 30\cdot 0,894 = -46,82\ kH.$$

Модуль головного вектора

$$R_o = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-35,61)^2 + (-33,28)^2 + (-46,82)^2} = 67,58\ kH.$$

Напрямні косинуси кутів нахилу головного вектора до координатних осей

$$\cos(x, \overline{R}) = \frac{R_x}{R_o} = \frac{-35,61}{67,58} = -0,527;$$

$$\cos(y, \overline{R}) = \frac{R_y}{R_o} = \frac{-33,28}{67,58} = -0,492;$$

$$\cos(z, \overline{R}) = \frac{R_z}{R_o} = \frac{-46,82}{67,58} = -0,693.$$

Для перевірки на відсутність помилок скористуємося формулою

$$\cos^2(x,\overline{R}_o)+\cos^2(y,\overline{R}_o)+\cos^2(z,\overline{R}_o)=1$$

і дійсно:

$$(-0{,}527)^2+(-0{,}492)^2+(-0{,}693)^2=1.$$

Проекції головного вектор-моменту

$$M_x=-P_2 l_2\sin\alpha+M\sin\alpha=-30\cdot 3\cdot 0{,}894+150\cdot 0{,}894=53{,}64\ kH\cdot м;$$
$$M_y=P_1 l_1=20\cdot 2=40\ kH\cdot м;$$
$$M_z=P_2 l_2\cos\alpha-M\cos\alpha=30\cdot 3\cdot 0{,}447-150\cdot 0{,}447=-26{,}82\ kH\cdot м.$$

Модуль головного вектор-моменту

$$M_o=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}=\sqrt{53{,}64^2+40^2+(-26{,}82)^2}=72{,}09\ kH\cdot м.$$

Напрямні косинуси кутів нахилу головного вектор-моменту до координатних осей

$$\cos(x,\overline{M}_o)=\frac{M_x}{M_o}=\frac{53{,}64}{72{,}09}=0{,}744;$$
$$\cos(y,\overline{M}_o)=\frac{M_y}{M_o}=\frac{40}{72{,}09}=0{,}555;$$
$$\cos(z,\overline{M}_o)=\frac{M_z}{M_o}=\frac{-26{,}82}{72{,}09}=-0{,}372.$$

Перевірка: $0{,}744^2+0{,}555^2+(-0{,}372)^2=1.$

Обчислимо кут між головним вектором та головним вектор-моментом

$$\cos\varphi_0=\cos(x,\overline{R}_o)\cdot\cos(x,\overline{M}_o)+\cos(y,\overline{R}_o)\cdot\cos(y,\overline{M}_o)+\cos(z,\overline{R}_o)\times$$
$$\times\cos(z,\overline{M}_o)=(-0{,}527)\cdot 0{,}744+(-0{,}492)\cdot 0{,}555+(-0{,}693)\cdot(-0{,}372)=$$
$$=-0{,}407,\ \varphi_0=114^0.$$

Висновок: так як $\overline{R}_0 \neq 0, M_0 \neq 0,$ і кут між ними $\varphi_0 \neq 0,$ то силова система $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{M})$ привелася до динамічного гвинта, причому центральна ось віддалена від центра приведення *O* на відстань $d_0 = \dfrac{M_o \sin\varphi_0}{R_o} =$

$$= \frac{72{,}09 \cdot \sin 114^0}{67{,}58} = 0{,}97\, м.$$

Приведення силової системи до центра *B*

Так як головний вектор є першим інваріантом, то в центрі *B* він буде таким же, як і в центрі *O*.

$$R_{x1} = R_x = -35{,}61\ kH, \quad \cos\left(x_1, \overline{R}_B\right) = -0{,}527;$$
$$R_{y1} = R_y = -33{,}28\ kH, \quad \cos\left(y_1, \overline{R}_B\right) = -0{,}492;$$
$$R_{z1} = R_z = -46{,}82\ kH, \quad \cos\left(z_1, \overline{R}_B\right) = -0{,}693;$$
$$R_B = 67{,}58\ kH.$$

Головний вектор-момент відносно центру *B* обчислимо двома способами і якщо результати співпадуть, то це буде контроль вірності обчислень.

Перший спосіб – це безпосереднє обчислення, як і в попередньому випадку.

$$M_{x1} = P_1 l_2 + M \sin\alpha = -20 \cdot 3 + 150 \cdot 0{,}894 = 194{,}10\ kH \cdot м;$$
$$M_{y1} = -P_2 l_3 \cos\alpha = -30 \cdot 4 \cdot 0{,}447 = -53{,}64\ kH \cdot м;$$
$$M_{z1} = -M \cos\alpha = -150 \cdot 0{,}447 = -67{,}05\ kH \cdot м.$$

Модуль головного вектор-моменту

$$M_B = \sqrt{M_{x1}^2 + M_{y1}^2 + M_{z1}^2} = \sqrt{194{,}10^2 + (-53{,}64)^2 + (-67{,}05)^2} = 212{,}24\ kH \cdot м$$

Напрямні косинуси кутів нахилу головного вектор-моменту до координатних осей

$$\cos\left(x_1, \overline{M}_B\right) = \frac{M_{x1}}{M_B} = \frac{194{,}10}{212{,}24} = 0{,}915;$$

$$\cos\left(y_1, \overline{M}_B\right) = \frac{M_{y1}}{M_B} = \frac{-53{,}64}{212{,}24} = -0{,}253;$$

$$\cos\left(z_1, \overline{M}_B\right) = \frac{M_{z1}}{M_B} = \frac{-67{,}05}{212{,}24} = -0{,}316.$$

Перевірка: $0{,}915^2 + (-0{,}253)^2 + (-0{,}316)^2 = 1$.

Обчислимо проекції вектор-моменту другим способом.

При зміні центра приведення з O на B головний вектор-момент змінюється за формулою

$$\overline{M}_B = \overline{M}_0 + \overline{BO} \times \overline{R}_0.$$

Розпишемо векторний добуток

$$\overline{BO} \times \overline{R}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -l_1 & -l_2 & O \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \left(-l_2 R_z\right)\bar{i} + l_1 R_z \bar{j} + \left(-l_1 R_y + l_2 R_x\right)\bar{k}.$$

Тоді отримаємо проекції головного вектор-моменту в точці B:

$$M_{x1} = M_x - l_2 R_z = 53{,}64 - 3 \cdot (-46{,}82) = 194{,}10\ kH \cdot м;$$

$$M_{y1} = M_y + l_1 R_z = 40 + 2 \cdot (-46{,}82) = -53{,}64\ kH \cdot м;$$

$$M_{z1} = M_z - l_1 R_y + l_2 R_x = -26{,}82 - 2 \cdot (-33{,}28) + 3 \cdot (-35{,}61) = -67{,}05\ kH \cdot м.$$

Співпадіння результатів свідчить про безпомилковість розрахунків.

Визначимо кут між головним вектором і головним вектор-моментом

$$\cos\varphi_B = \cos\left(x_1, \overline{R}_B\right) \cdot \cos\left(x_1, \overline{M}_B\right) + \cos\left(y_1, \overline{R}_B\right) \cdot \cos\left(y_1, \overline{M}_B\right) + \cos\left(z_1, \overline{R}_B\right) \times$$
$$\times \cos\left(z_1, \overline{M}_B\right) = (-0{,}527) \cdot 0{,}915 + (-0{,}492) \cdot (-0{,}253) + (-0{,}693) \cdot (-0{,}316) =$$
$$= -0{,}139,\ \varphi_B = 98^0.$$

Висновок: так як $\overline{R}_B \neq 0, M_B \neq 0$ і кут між ними $\varphi_B \neq 0$, то силова система $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{M})$ привелася до динамічного гвинта, причому центральна ось віддалена від центра приведення B на відстань

$$d_B = \frac{M_B \sin \varphi_B}{R_B} = \frac{212{,}24 \cdot \sin 98^0}{67{,}58} = 3{,}11 \text{ } м.$$

Для перевірки безпомилковості розрахунків обчислимо другий інваріант в центрах O і B, який дорівнює проекції головного вектор-моменту на напрямок головного вектора (найменший момент)

$$M_0^* = M_0 \cdot \cos \varphi_0 = 72{,}09 \cdot \cos 114^0 = -29{,}32 \text{ } kH \cdot м;$$
$$M_B^* = M_B \cdot \cos \varphi_B = 212{,}24 \cdot \cos 98^0 = -29{,}53 \text{ } kH \cdot м.$$

Співпадіння з похибкою до 0,7% свідчить про вірність розрахунків.

8. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

1. Що таке сила і які фактори її визначають?
2. За якою ознакою силові системи поділяються на типи? Назвати ці типи.
3. Яка силова система називається зрівноваженою?
4. Як реагує тіло на дію незрівноваженої силової системи?
5. Які силові системи називаються еквівалентними?
6. Що таке рівнодійна сила?
7. На тіло діє зрівноважена силова система. Чи означає це, що воно нерухоме?
8. Що таке алгебраїчний момент сили відносно точки на площині?
9. Коли алгебраїчний момент сили дорівнює нулю?
10. Чому в просторових задачах користуються не алгебраїчним моментом, а вектор-моментом сили?
11. Як побудувати вектор-момент сили відносно центру?
12. Що таке момент сили відносно осі?
13. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
14. Що таке пара і які її властивості?
15. Чому пара – незрівноважена силова система?
16. Яка силова система називається динамічним гвинтом?
17. Які інтегральні характеристики має силова система?

18. Що таке головний вектор?

19. Що таке головний вектор-момент?

20. Що означає привести силову систему до даного центру?

21. Як змінюється головний вектор-момент при зміні центру приведення?

22. Що таке статичний інваріант?

23. Які статичні інваріанти має силова система?

24. Які існують різновиди другого статичного інваріанта?

25. В чому суть основної теореми статики?

26. Назвати умови рівноваги силової системи.

27. При якій умові головний вектор-момент стає статичним інваріантом?

28. Назвати два випадки, коли силова система приводиться до рівнодійної сили.

29. Назвати умови приведення силової системи до динамічного гвинта.

30. Чому силова система, яка складається лише з пар не може бути приведена ні до рівнодійної, ні до динамічного гвинта?

ЗМІСТ

Навчальне видання

ГРЄШНОВ Юрій Костянтинович

АНАЛІЗ СИЛОВОЇ СИСТЕМИ

Методичні вказівки по виконанню розрахунково-графічних робіт та контрольних завдань

Коректор М.О. Паненко

Комп'ютерне верстання А.В. Платонова

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 1,4. Тираж 100 прим. Вид. № 24.
Зам. № 277.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54025, м. Миколаїв, пр. Героїв Сталінграда, 9.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2506 від 25.05.2006 р.