

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

А. О. Фоміна, Г. В. Павлов

**ТИПОВІ РОЗРАХУНКИ ДЛЯ СПЕЦКУРСУ
З МАТЕМАТИКИ**

Методичні вказівки

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2006

Фоміна А.О., Павлов Г.В. Типові розрахунки для спецкурсу з математики: Методичні вказівки. – Миколаїв: НУК, 2006. – 56 с.

Кафедра вищої математики

Кафедра комп'ютеризованих систем управління

Наведено структуру курсової роботи з курсу "Спеціальні розділи математики", основні вимоги до її виконання, теоретичні відомості, необхідні для побудови математичної моделі задачі електротехніки. Вказівки містять варіанти і завдання курсових робіт, а також довідник з початкових понять електротехніки, які застосовані в завданнях. Розглянуто зразок виконання курсової роботи.

Призначено для студентів спеціальності "Системи управління і автоматика" напряму 0914 "Комп'ютеризовані системи, автоматика і управління" та рекомендується для набуття навичок з операційного числення студентами інших спеціальностей.

Рецензенти:

Кузнєцов А.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики;

Обрубов А.В., старший викладач кафедри комп'ютеризованих систем управління

ВСТУП

Дані методичні вказівки призначені для допомоги студентам у виконанні курсової роботи з дисципліни "Вища математика" (спецкурс 8.091401).

Основна мета виконання цих курсових робіт – набуття студентом навичок побудови та розв'язання математичної моделі задачі електротехніки, закріплення знань про математичні методи, зокрема операційного числення і методу скінченних різниць.

Набутий досвід в результаті виконання курсових робіт допоможе студенту у подальшому вивченні таких дисциплін: електроніка і мікросхемотехніка; теорія інформації; теорія автоматичного управління; моделювання процесів і систем.

Методичні вказівки складаються з трьох розділів, в яких подано методику та зразок виконання курсової роботи; варіанти і завдання курсових робіт; двох додатків, які містять довідник з початкових понять електротехніки, що застосовані в завданнях курсових робіт, таблицю "Зображення – оригінал" та список використаної літератури.

Розділ 1. МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Кожний з варіантів методичних вказівок розд. 3 містить по три завдання.

В завданні 1 подається задача з електротехніки, для розв'язання якої треба побудувати математичну модель одним із двох методів: класичним (задача Коші) чи операційним (операторне рівняння або система операторних рівнянь). За бажанням студент розв'язує задачу обома методами і порівнює результати.

У загальному випадку при виконанні завдання класичним методом безпосередньо одержується шуканий параметр як розв'язок задачі Коші.

При виконанні завдання операційним методом спочатку знаходиться зображення $F(p)$ шуканого параметру $f(t)$, потім здійснюється перехід до оригіналу $f(t)$.

Під час оформлення *завдання 1* треба виділити такі етапи його виконання:

1. Постановка задачі.
2. Побудова математичної моделі.
3. Розв'язання моделі, знаходження шуканого параметру $f(t)$.
4. Побудова графіка $f(t)$ (якщо можливо).

В завданні 2 умова подається у вигляді задачі Коші – диференціальне рівняння відносно шуканого параметру, наприклад $y(t)$, і початкові умови.

Задачу Коші треба розв'язати обов'язково двома зазначеними вище методами. Результати повинні співпадати.

Завдання 3 містить задачу Діріхле відносно шуканої функції $U(x, y)$, яку треба розв'язати методом *скінченних різниць* (див. "зразок" другого розділу даних методичних вказівок і [6]).

Зауваження 1. Поданий склад курсової роботи дає можливість спрямувати самостійну роботу студента вказаної спеціальності на одержання необхідних знань за навчальною програмою.

Зауваження 2. Виконання завдань курсової роботи полегшать дод. 1, 2 та зразок виконання (див. розд. 2).

Розділ 2. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ВАРІАНТІВ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Зразок 1

Завдання 1

Постановка задачі

Знайти перехідні значення струму і напруг (I , U_R , U_C) в колі (рис. 1) при перемиканні рубильника Р з положення "1" в положення "2", якщо $U = 100$ В, $R = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ.

Побудова математичної моделі

1. Нехай до перемикання рубильника з "1" в "2" конденсатор C мав напругу джерела U . Якщо обхід кола прийняти за ходом стрілки годинника, то початкову напругу на конденсаторі $U_c(0)$ треба вважати додатною: $U_c(0) = U = 100$ В.

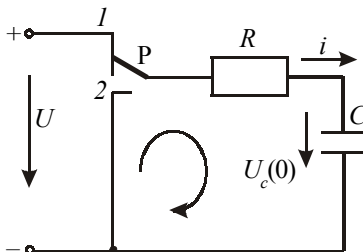


Рис. 1

Операторний опір кола $Z(p) =$

$$= R + \frac{1}{pC}. \text{ Зовнішніх джерел немає.}$$

Зображення початкової ЕРС ємності має вигляд

$$\frac{-U_c(0)}{p} = \frac{-U}{p} = \frac{-100}{p}.$$

За законом Ома

$$I(p) = \frac{-100}{p} \bigg/ Z(p) = \frac{-100C}{RCp + 1} = \frac{-100 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10 \cdot 10^{-6} p + 1} = \frac{-10^{-3}}{10^{-3} \cdot p + 1}.$$

Це і є операторне рівняння для перехідного процесу в даному колі.

Переходячи до оригіналу, маємо миттєве значення струму $i(t)$ перехідного процесу:

$$i(t) = -\frac{10^{-3}}{10^{-3}} e^{-1000t} = -e^{-1000t} \text{ А.}$$

Від'ємний знак струму означає, що при розряді конденсатора C через активний опір R струм $i(t)$ направлений у бік, протилежний напрямку обходу кола, обраного раніше.

Миттєве значення напруги на R в перехідному процесі також від'ємне:

$$U_R = Ri(t) = -100e^{-1000t} \text{ В.}$$

Миттєве значення перехідної напруги на конденсаторі (за другим законом Кірхгофа) знаходиться з рівняння

$$Ri(t) + U_C = 0 \Rightarrow U_C = -Ri(t) = -U_R \Rightarrow U_C = 100e^{-1000t} \text{ В.}$$

2. Складемо диференціальне рівняння для кола (див. рис. 1). Згідно з другим законом Кірхгофа,

$$Ri(t) + \frac{1}{C_0} \int i dt = U.$$

Це інтегральне рівняння відносно $i(t)$. Продиференціюємо його по t :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0.$$

Одержали диференціальне рівняння першого порядку відносно $i(t)$ з подільними змінними. Разом із початковими умовами це рівняння становить задачу Коші:

$$\begin{cases} R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0; \\ i(0) = -\frac{U_c(0)}{R}. \end{cases}$$

Розв'язуємо диференціальне рівняння:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0 \Rightarrow R \frac{di}{dt} = -\frac{1}{C} i(t) \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{dt}{CR};$$

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{1}{CR} \int dt \Rightarrow i = N e^{-\frac{t}{CR}},$$

де N – довільна стала.

$$\text{Згідно з початковою умовою } i(0) = -\frac{U_c(0)}{R}, \quad N = \frac{-100}{100} = -1.$$

$$\text{Миттєве значення струму перехідного процесу } i(t) = -e^{-\frac{t}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 100}} = -e^{-1000t} \text{ А.}$$

Очевидно, значення $i(t)$, одержані обома способами, співпадають.

Побудова графіків $i(t)$, U_c

Характер зміни $i(t)$ та U_c у перехідному режимі показано на рис. 2.

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку відносно $y(x)$ класичним і операційним методами:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y &= 1; \\ \begin{cases} y(0) = 3; \\ y'(0) = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

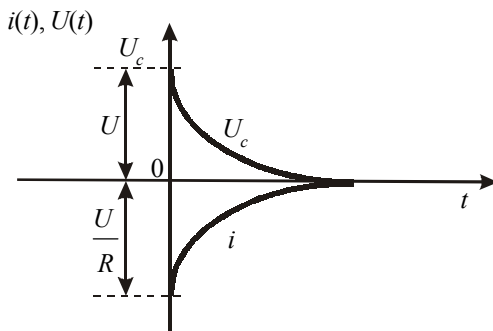


Рис. 2

Розв'язок

1. Класичний метод

Маємо звичайне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 1. \quad (1)$$

Запишемо відповідне однорідне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 0. \quad (2)$$

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k + 3 = 0$.

Знайдемо корені рівняння: $k_1 = -3$, $k_2 = -1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння (2) має вигляд

$$Y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок $\bar{y}(t)$ неоднорідного рівняння (1), користуючись методом невизначених коефіцієнтів:

$$\bar{y}(t) = A, \quad y'(t) = 0; \quad y''(t) = 0 \Rightarrow 3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1) має вигляд

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{3}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1):

$$y(t) = Y(t) + \bar{y}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{3}.$$

Знайдемо довільні сталі C_1 і C_2 при початкових умовах $y(0) = 3$;
 $y'(0) = -2$:

$$\begin{aligned} y(0) = 3 &\Rightarrow C_1 + C_2 + \frac{1}{3} = 3; \\ y'(t) \Big|_{t=0} &= -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t} \Big|_{t=0} = -2; \\ &-C_1 - 3C_2 = -2. \end{aligned}$$

Маємо систему відносно C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{8}{3} \\ -C_1 - 3C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2C_2 = \frac{2}{3} \\ C_1 + C_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_2 = -\frac{1}{3} \\ C_1 = 3 \end{matrix}.$$

Остаточно розв'язок задачі Коші має вигляд $y(t) = \frac{1}{3} + 3e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t}$.

2. Застосування операційного числення

Нехай $y(t)$ – оригінал, $Y(p)$ – зображення:

$$1 \rightarrow \frac{1}{p}; \quad y(t) \rightarrow Y(p).$$

Тоді $y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0)$, $y''(t) \rightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$.

Операторне рівняння має вигляд

$$p^2Y(p) - p \cdot 3 + 2 + 4pY(p) - 4 \cdot 3 + 3Y(p) = \frac{1}{p};$$

$$(p^2 + 4p + 3)Y(p) = \frac{1}{p} + 3p + 10;$$

$$Y(p) = \frac{3p^2 + 10p + 1}{p(p^2 + 4p + 3)}.$$

Знайдемо відповідний оригінал $y(t)$. Для цього застосуємо другу теорему розкладання: $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \Rightarrow f(t) = \sum_{k=1}^N \frac{F_1'(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$, де p_k – прості корені $F_2(p)$;

$$F_1(p) = 3p^2 + 10p + 1; \quad F_2(p) = p(p+1)(p+3); \quad F_2'(p) = 3p^2 + 8p + 3;$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -1; \quad p_3 = -3.$$

Складаємо таблицю:

	$p_1 = 0$	$p_2 = -1$	$p_3 = -3$
$F_1(p) = 3p^2 + 10p + 1$	1	-6	-2
$F_2'(p) = 3p^2 + 8p + 3$	3	-2	6
$\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}$	$\frac{1}{3}$	3	$-\frac{1}{3}$

Остаточний вигляд рівняння:

$$Y(p) \leftarrow y(t) = \frac{1}{3}e^{0t} + 3e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t} = \frac{1}{3} + 3e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t}.$$

Результати, одержані обома методами, співпали.

Завдання 3

Використовуючи метод скінченних різниць (метод сіток), розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

з крайовими умовами $U(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$ і заданим кроком h .

Дано: Γ – границя області G , в середині якої $U(x, y)$ задовольняє рівнянню Лапласа, отже,

$$\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad \varphi(x, y) = 0,5(|x| + |y|); \quad h = 1.$$

Знайти $U(x, y)$.

Розв'язок

Одна зі схем для побудови скінченного різницевого рівняння така:

$$U(x, y) = \frac{1}{4} [U(x-h, y) + U(x+h, y) + U(x, y-h) + U(x, y+h)] \quad (3)$$

Використовуючи симетрію заданих граничних умов, будемо розв'язок лише в I квадранті (рис. 3), складемо таблицю значень x і y (з рівняння еліпса):

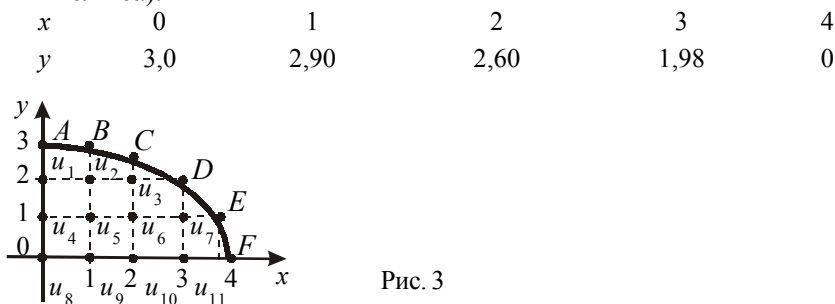


Рис. 3

Обчислюємо значення функції $U(x, y)$ на границі Γ :

Точки	$U(x, y)$
$A(0; 3)$	$0,5(0 + 3) = 1,5$
$B(1; 2,90)$	$0,5(1 + 2,9) = 1,95$
$C(2; 2,60)$	$0,5(2 + 2,6) = 2,3$
$D(3; 1,98)$	$0,5(3 + 1,98) = 2,49$
$E(3,77; 1)$	$0,5(3,77 + 1) = 2,39$
$F(4; 0)$	$0,5(4 + 0) = 2,0$

Для встановлення початкових значень функції $U(x, y)$ у внутрішніх точках складемо систему рівнянь, які містять ці значення. Згідно зі схемою (3):

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{4}(1,5 + U_4 + 2U_2); \quad U_2 = \frac{1}{4}(1,95 + U_1 + U_3 + U_5); \\
 U_3 &= \frac{1}{4}(4,79 + U_2 + U_6); \quad U_4 = \frac{1}{4}(U_1 + U_8 + 2U_5); \\
 U_5 &= \frac{1}{4}(U_4 + U_2 + U_6 + U_9); \quad U_6 = \frac{1}{4}(U_3 + U_5 + U_7 + U_{10}); \\
 U_7 &= \frac{1}{4}(4,88 + U_6 + U_{11}); \quad U_8 = \frac{1}{4}(4U_5); \\
 U_9 &= \frac{1}{4}(U_8 + U_{10} + 2U_5); \quad U_{10} = \frac{1}{4}(U_9 + U_{11} + 2U_6); \\
 U_{11} &= \frac{1}{4}(4,78 + 2U_6).
 \end{aligned}$$

Цю систему з одинадцяти рівнянь відносно одинадцяти невідомих можна розв'язати одним зі znаних способів, у тому числі на ЕОМ. Отримуємо $U_1 = 1,91$; $U_2 = 2,05$; $U_3 = 2,10$; $U_4 = 2,05$; $U_5 = 2$; $U_6 = 2,18$; $U_7 = 2,34$; $U_8 = 2,11$; $U_9 = 2,13$; $U_{10} = 2,19$; $U_{11} = 2,28$.

Не уточнюючи одержаних значень $U(x, y)$, залишаємо їх в якості результату розв'язання поставленої задачі.

Зразок 2

Завдання 1

Постановка задачі

Знайти перехідне значення струму $i_c(t)$ в конденсаторі (рис. 4) при перемиканні рубильника Р з положення "I" в "2", коли у контурі відомі величини: U, r_1, r_2, C, U_0 .

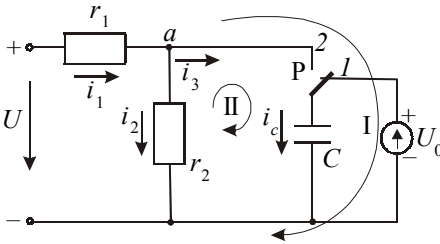


Рис. 4

Розв'язок

1. При ненульових початкових умовах у перехідному процесі наявний розгалужений контур. Тому закон Ома в операторній формі застосувати неможна. В цьому випадку доречний метод рівнянь Кірхгофа.

Нехай напруга конденсатора до перехідного процесу дорівнювала U_0 . Тоді для вузла a першого та другого контурів система операторних рівнянь відносно I_1, I_2, I_3 буде мати вигляд

$$\begin{cases} I_1(p) = I_2(p) + I_p(p); \\ r_1 I_1(p) + \frac{1}{pC} I_p(p) = \frac{U}{p} - \frac{U_0}{p}; \\ -r_2 I_2(p) + \frac{1}{pC} I_3(p) = -\frac{U_0}{p}. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему за допомогою методу Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & r_1 + r_2 & r_1 & \frac{U}{p} \\ 0 & -r_2 & \frac{1}{pC} & -\frac{U_0}{p} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{r_2 p C} & -\frac{U_0}{p r_2} \\ 0 & r_1 + r_2 & r_1 & \frac{U}{p} \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{r_2 p C} & -\frac{U_0}{p r_2} \\ 0 & 0 & \frac{r_1 r_2 p C + (r_1 + r_2)}{r_2 p C} & \frac{U}{p} - \frac{U_0}{p r_2} (r_1 + r_2) \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{C(U r_2 - U_0(r_1 + r_2))}{C p r_1 r_2 + (r_1 + r_2)}.$$

2. Тепер треба перейти до оригіналу: $I_3(p) \leftarrow i_c(t) = i_3(t)$.
Застосуємо теорему розкладання:

$$P(p) = C(U r_2 - (r_1 + r_2) U_0), \quad Q(p) = p C r_1 r_2 + (r_1 + r_2);$$

$$\alpha_1 = -\frac{r_1 + r_2}{C r_1 r_2}; \quad Q'(p) = C r_1 r_2;$$

$$i_c(t) = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} = \frac{C(U r_2 - (r_1 + r_2) U_0)}{C r_1 r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{C r_1 r_2} t} =$$

$$= \left[\frac{U}{r_1} - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) U_0 \right] e^{-\frac{r_1 + r_2}{C r_1 r_2} t}.$$

3. Залежність $i_3(t)$ наведена на рис. 5, де $M = \frac{U}{r_1} - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) U_0$.

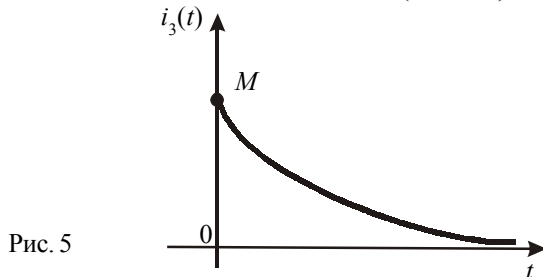


Рис. 5

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку $y(t)$ класичним і операційним методами:

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2 + t; \begin{cases} y(0) = 1; \\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

Розв'язок

1. Класичний метод

Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2 + t. \quad (4)$$

Запишемо для нього відповідне однорідне диференціальне рівняння: $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$. (5)

Для останнього запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + k + 1 = 0.$$

$$\text{Розв'язавши його, отримаємо: } k_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j; \quad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,$$

де $j = \sqrt{-1}$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (5) буде мати вигляд

$$Y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right), \text{ де } C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Шукаємо частинний розв'язок $y(t)$ диференціального рівняння (4) методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{y} &= at^2 + bt + c; \\ \bar{y}' &= 2at + b; \quad \bar{y}'' = 2a. \end{aligned}$$

Підставляючи $\bar{y}(t)$, $\bar{y}'(t)$, $\bar{y}''(t)$ у рівняння (4), отримуємо:

$$2a + 2at + b + at^2 + bt + c = t^2 + t;$$

$$\begin{aligned}
 at^2 + t(2a+b) + (2a+b+c) &= t^2 + t; \\
 \left. \begin{aligned} a &= 1, \\ 2a+b &= 1, \\ 2a+b+c &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow a = 1; \quad b = -1; \quad c = -1 \Rightarrow \\
 \bar{y}'(t) &= t^2 - t - 1.
 \end{aligned}$$

Загальний розв'язок рівняння (4):

$$y(t) = Y(t) + \bar{y}'(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + t^2 - t - 1.$$

Залишилося знайти частинний розв'язок рівняння (4), який задовольняє початковим умовам $y(t) = 1$; $y'(t) = -3$:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + t^2 - t - 1; \\
 y'(t) &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \\
 &+ e^{-\frac{t}{2}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + 2t - 1; \\
 \begin{cases} 1 = C_1 - 1 \\ -3 = -\frac{1}{2} C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 - 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Розв'язок задачі Коші:

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + t^2 - t - 1.$$

2. Операторний метод

Задача Коші відносно $y(t)$:

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2 + t; \quad \begin{cases} y(0) = 1; \\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

Введемо поняття оригіналу $y(t)$ і зображення $Y(p)$: $y(t) \rightarrow Y(p)$.

Згідно з теоремою диференціювання оригінала,

$$\begin{aligned} y'(t) &\rightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \\ y''(t) &\rightarrow p^2Y(p) - py'(0) - y(0) = p^2Y(p) - p + 3. \end{aligned}$$

З таблиці "Зображення—оригінал" (див. дод. 2) маємо:

$$t \rightarrow \frac{1}{p^2}; \quad t^2 \rightarrow \frac{2}{p^3}.$$

Підставляємо та одержуємо операторне рівняння відносно $Y(p)$:

$$p^2Y(p) - p + 3 + pY(p) - 1 + Y(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2};$$

$$(p^2 + p + 1)Y(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + p - 2;$$

$$(p^2 + p + 1)Y(p) = \frac{2 + p + p^4 - 2p^3}{p^3}.$$

Остаточно маємо:

$$Y(p) = \frac{p^4 - 2p^3 + p + 2}{p^3(p^2 + p + 1)}.$$

Залишилося перейти до оригіналу $y(t)$. Розкладемо дріб, який знаходиться в правій частині рівності для $Y(p)$, на простіші дробі (за допомогою вищезгаданого методу невизначених коефіцієнтів):

$$\frac{p^4 - 2p^3 + p + 2}{p^3(p^2 + p + 1)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p^3} + \frac{B_p + C}{p^2 + p} = 1.$$

Склавши систему рівнянь відносно A_1, A_2, A_3, B і C , одержимо:

$$A_1 = A_2 = -1; \quad A_3 = 2; \quad B = 2; \quad C = 0;$$

$$Y(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{2p}{p^2 + p + 1};$$

$$\frac{2}{p^3} = t^2; \quad \frac{1}{p^2} = t; \quad \frac{1}{p} = 1.$$

Залишилося знайти оригінал для $\frac{2p}{p^2 + p + 1} = \frac{P_n(p)}{Q_m(p)}$.

Користуючись другою теоремою розкладання (операційного числення), отримуємо:

	$\alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}j}{2}$	$\alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}j}{2}$
$P_n(p) = 2p$ $Q_m(p) = 2p + 1$	$\frac{-1 + \sqrt{3}j}{\sqrt{3}j}$	$\frac{-1 - \sqrt{3}j}{-\sqrt{3}j}$
$A_k = \frac{P_n(\alpha_k)}{Q'_m(\alpha_k)}$	$\frac{-1 + \sqrt{3}j}{\sqrt{3}j}$	$\frac{1 + \sqrt{3}j}{\sqrt{3}j}$

Тут α_1, α_2 – корені знаменника $p^2 + p + 1$.

Оригінал:

$$f(t) = \sum_{k=1}^2 A_k e^{\alpha_k t};$$

$$A_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}j; \quad A_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}j \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(1 + \frac{j}{\sqrt{3}}\right) e^{\frac{-1 + \sqrt{3}j}{2}t} + \left(1 - \frac{j}{\sqrt{3}}\right) e^{\frac{-1 - \sqrt{3}j}{2}t} = \\ &= e^{-\frac{t}{2}} \left(2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{j}{\sqrt{3}} 2j \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = e^{-\frac{t}{2}} \left(2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + t^2 - t - 1.$$

Як і в попередньому випадку (зразок 1, завдання 2), відповіді, одержані обома методами, співпали.

Завдання 3

Використовуючи метод скінченних різниць (метод сіток), розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} = 0$$

з крайовими умовами $U(x, y)|_{\Gamma} = |x| + \frac{y^2}{2}$; $\Gamma: |x| = 4 - y^2$.

Розв'язок

$$\text{Розпишемо границю } \Gamma: 4 - y^2 = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4 - x \\ y^2 = 4 + x \end{cases}.$$

Маємо дві параболы, симетричні відносно осі Oy (рис. 6):

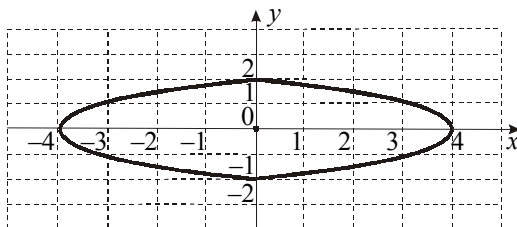
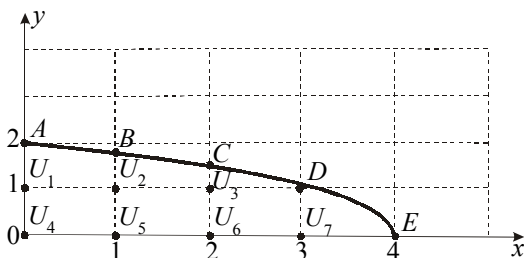


Рис. 6



Аналогічно розв'язанню завдання 3 зразка 1, користуючись симетрією граничних умов, будемо розв'язок лише в I квадранті (рис. 7).

Рис. 7

Складемо таблицю значень x , y та $U(x, y)$:

	A	B	C	D	E
X	0	1,0	2,0	3,0	4,0
Y	2,0	1,7	1,4	1,0	0
U	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0

Запишемо систему рівнянь виявлення значень у внутрішніх точках:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{1}{4}(2 \cdot 2,5 + 2U_5), \\ U_2 = \frac{1}{4}(U_4 + U_6 + 2 + 3), \\ U_3 = \frac{1}{4}(U_2 + U_6 + 3 + 3,5), \\ U_4 = \frac{1}{4}(4 U_4), \\ U_5 = \frac{1}{4}(2 U_1 + 2 U_3), \\ U_6 = \frac{1}{4}(2 U_2 + 2 \cdot 3,5), \\ U_7 = \frac{1}{4}(2 U_6 + 4 + 2 \cdot 3,5), \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4U_1 - 2U_5 = 5, \\ 4U_2 - U_4 - U_6 = 5, \\ -U_2 + 4U_4 = 0, \\ -2U_1 - 2U_3 + 4U_5 = 0, \\ -2U_2 + 4U_6 = 7, \\ -U_6 + 4U_7 = 11. \end{array} \right.$$

Розв'язуючи цю систему методом Гаусса, маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 + U_3 - 2U_5 = 0, \\ -U_2 + U_1 = 0, \\ -4U_3 + 6U_5 = 5, \\ -U_4 + 6U_5 - U_6 = 11,5 \\ -12U_5 + 6U_6 = -16, \\ 4U_7 = 6, \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} U_1 = \frac{2}{3}, \\ U_2 = 13,5, \\ U_3 = -3, \\ U_4 = -13,5, \\ U_5 = -\frac{7}{6}, \\ U_6 = -5, \\ U_7 = 1,5. \end{array}$$

Розділ 3. ВАРІАНТИ КУРСОВИХ РОБІТ

Варіант 1

Завдання 1

На рис. 8 наведено включення постійної ЕРС у коло. Знайти напругу на конденсаторі C , зобразити $u(t)$ графічно, якщо $L = 4$ гГн; $C = 10$ мкФ; $R_2 = 2$ кОм; $R_1 = 100$ Ом.

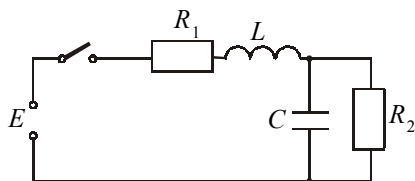


Рис. 8

Вказівка

Операторний опір кола має вигляд

$$z(p) = R_1 + pL + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 R_2 LC + p(L + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2}{pR_2 C + 1}.$$

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = \cos t; \quad \begin{cases} y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 0; \\ U(xy)|_C &= |x| + |y|; \\ C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Варіант 2

Завдання 1

Включення замкненого накоротко повітряного трансформатора на синусоїдну ЕРС наведено на рис. 9, де $e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$; m – коефіцієнт взаємної індукції двох кіл.

Знайти $i_1(t)$, $i_2(t)$, зобразити їх графічно при таких даних:

$$L_1 = L_2 = 2; \quad \frac{R_1}{\omega L_1} = \frac{R_2}{\omega L_2} = 0,02;$$
$$\psi = \frac{\pi}{2}.$$

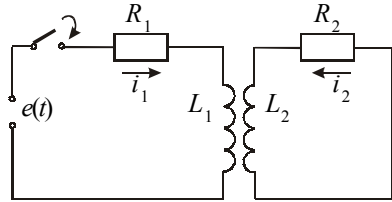


Рис. 9

Вказівка

Операторні рівняння для первинного і вторинного кіл мають вигляд

$$\begin{cases} (R_1 + pL_1)I_1(p) + pMI_2(p) = E(p), \\ (R_2 + pL_2)I_2(p) + pMI_1(p) = 0, \end{cases}$$

де R_1, R_2, L_1, L_2 – сумарні активні опори та індуктивності першого і другого кіл.

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' - 2y' - 3y = 2t; \quad \begin{cases} y(0) = 1; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$
$$U(xy)|_C = |x| + 2|y|;$$
$$C: x^2 + y^2 = 16.$$

Варіант 3

Завдання 1

Фізичний процес описується графіком $f(t)$ (рис. 10). Знайти зображення $f(t) \rightarrow F(p)$.

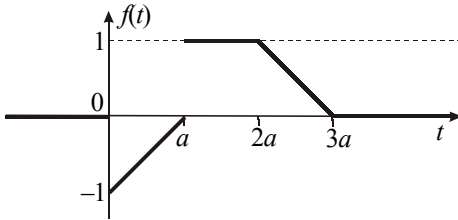


Рис. 10

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' + 5y' + 6y = e^t \cos t;$$

$$\begin{cases} y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| \cdot |y|;$$

$$C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Варіант 4

Завдання 1

На рис. 11 зображено включення П-схеми заміщення розімкнутої на кінці лінії передачі на синусоїдну ЕРС. Величини R_1 та L представляють активний опір та індуктивність генераторів і трансформаторів, які підключаються до лінії. Знайти $U_c(t)$ і графічно зобразити. $R_1 = 5,28 \text{ Ом}$; $R_2 = 11,27 \text{ Ом}$; $L_1 = 0,336 \text{ Гн}$; $L_2 = 0,466 \text{ Гн}$; $C = 3,0 \text{ мкФ}$; $\psi = 0$.

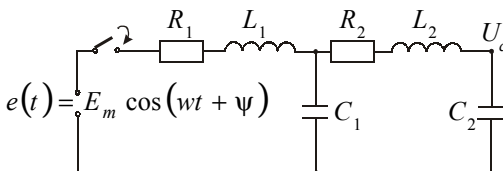


Рис. 11

Вказівка

Операторний опір має вигляд:

$$Z_{\text{вх}}(p) = R_1 + pL_1 + \frac{\frac{1}{pC} \left(R_2 + pL_2 + \frac{1}{pC} \right)}{\frac{2}{pC} + R_2 + pL_2}.$$

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' - 3y' + 2y = e'; \quad \begin{cases} y(0) = 1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| \cdot |y|;$$

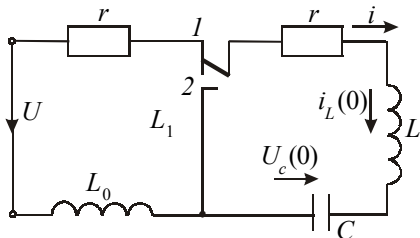
$$C: \begin{cases} |y| = 4 - x^2; \\ x \in [-2, 2] \end{cases}$$

Варіант 5

Завдання 1

Знайти перехідні значення струму $i(t)$ в колі (рис. 12), якщо рубильник перемикається з положення "1" в "2" в момент часу $t = 0$ і $U = 141 \sin(2500t + 105^\circ)$ В; $r = 1000$ Ом; $L = 1$ Гн; $L_0 = 0,2$ Гн; $C = 0,4$ мкФ.

Рис. 12



Вказівка

До перемикаання рубильника в колі протікає струм

$$i = I_m \sin(2500t + 105^\circ - \varphi) \text{ А};$$

на обкладинках конденсатора напруга

$$U_c = x_c I_m \sin(2500t + 105^\circ - \varphi - 90^\circ) \text{ В};$$

$\omega = 2500 \text{ рад/с}$ – кутова частота напруги джерела електричної енергії;

$\varphi = \arctg \frac{x}{2r}$ – кут зсуву фаз між напругою джерела і струмом в колі;

$$x = x_L - x_c = \omega(L + L_0) - \frac{1}{\omega C} = 3000 - 1000 = 2000 \text{ Ом} \Rightarrow \text{коло має}$$

індуктивний характер, причому $x_c = 100 \text{ Ом} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$; $U_m = 141 \text{ В}$;

$$I_m = \frac{U_m}{Z}; Z = \sqrt{(2r)^2 + x^2} = 2\sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ Ом}; I_m = \frac{141}{2\sqrt{2} \cdot 10^3} = 0,05 \text{ А};$$

$x_c I_m = 1000 \cdot 0,05 = 50 \text{ В} \Rightarrow i = 0,05 \sin(2500t + 60^\circ) \text{ А}; U_c = 50 \sin(2500t - 30^\circ) \text{ В};$ при $t = 0$ (момент, який передуює комутації) одержуємо $i_L(0) = 0,0433 \text{ А}; U_c(0) = -25 \text{ В}.$

Студенту пропонується скласти операторне рівняння для $I(p) \leftarrow i(t)$ з використанням довідки (дод. 2), розв'язати його відносно $I(p)$, після чого перейти до оригіналу $i(t)$ – миттєвому значенню струму перехідного процесу, зобразивши $i(t)$ на графіку.

Завдання 2

Знайти оригінал $f(t)$ для зображення $F(p) = \frac{1}{p^3 - 1}.$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| + |y|;$$

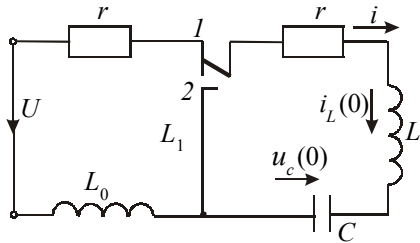
$$C: \begin{cases} |x| = 4 - y^2; \\ -4 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Варіант 6

Завдання 1

За умовою та вказівкою варіанта 5 завдання 1 знайти перехідні значення напруг (U_r , U_c , U_L) в колі (рис. 13) і зобразити графічно $u_r(t)$; $u_c(t)$; $u_L(t)$.

Рис. 13



Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2;$$

$$\begin{cases} y(0) = 1; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \quad U(xy)|_C = 2|x| + |y|;$$

$$C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Варіант 7

Завдання 1

Знайти струм в колі (рис. 14), якщо $u(0) = E$ при $R = 1$ Ом; $C = 0,5$ Ф; $L = 2$ Гн; $E = 1$ В.

Побудувати операторне рівняння для $I(p) \leftarrow i(t)$, розв'язати його, знайти оригінал, зобразити графік $i(t)$.

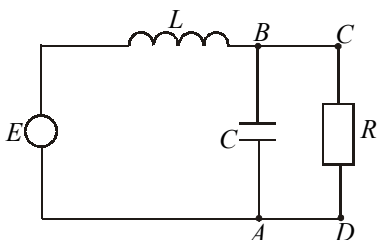


Рис. 14

Вказівка

Для ABCD маємо:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{\frac{1}{Cp}} + \frac{1}{R};$$

$$Z = Z_1 + Z_L = \frac{R + Lp^2 CR + Lp}{CpR + 1}.$$

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' - 2y' = t^2 + t - 3; \begin{cases} y(0) = 2; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| \cdot |y|;$$

$$C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Варіант 8

Завдання 1

Фізичний процес описується графіком $f(t)$ (рис. 15). Знайти зображення $F(p) \leftarrow f(t)$.

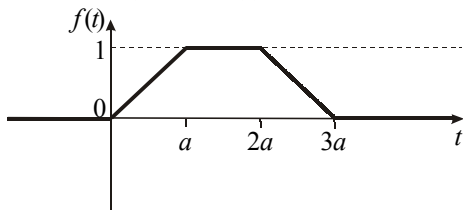


Рис. 15

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t; \begin{cases} y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| + |y|;$$

$$C: \begin{cases} |y| = 4 - x^2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Варіант 9

На рис. 16 наведена розрахункова схема, де $R = 18,1$ Ом; $L = 0,802$ Гн; $C = 4,25$ мкФ. Знайти і побудувати графік $u_c(t)$ при $U_c(0) = 0$.

Завдання 1

Записати операторне рівняння для $U_c(p) \leftarrow u_c(t)$. Розв'язавши його, перейти до оригіналу $u_c(t)$.

Завдання 2

Склавши диференціальне рівняння, яке визначає перехідний процес при $t > 0$, класичним методом розв'язати його відносно $u_c(t)$. Результати обох завдань порівняти.

Вказівка

З рівнянь $E_m \cos(\omega t + \psi) = R_i + L \frac{di}{dt} + U_c$, $i = C \frac{dU_c}{dt}$ маємо диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

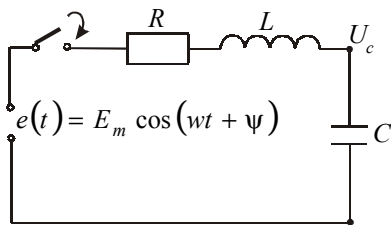


Рис. 16

$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0$. Треба знайти початкові умови задачі Коші другого порядку.

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$u(xy)|_C = 0,5|x| + |y|;$$

$$C: x^2 + y^2 = 16.$$

Варіант 10

Завдання 1, 2

Спрощена схема заміщення генератора імпульсних напруг у розрядному режимі представлена на рис. 17, де C_1 – ємність генератора в ударі, яка заряджується від стороннього джерела до напруги U_{10} ; L – паразитна індуктивність генератора; R_1, R_2 – флантові опори; R_3 – розрядний опір; C_2 – ємність об'єкту, який випробовується.

Знайти $\frac{u_2(t)}{U_{10}}$, побудувати графік $\frac{u_2(t)}{U_{10}}$ при таких значеннях

величин: $L = 100$ мкГн; $C_1 = 25000$ пФ; $C_2 = 3000$ пФ; $R_1 = 300$ Ом; $R_2 = 1000$ Ом; $R_3 = 2000$ Ом.

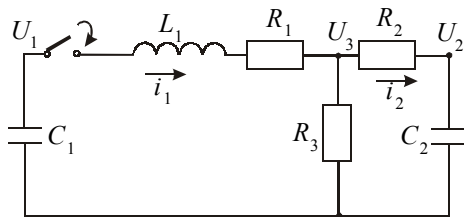


Рис. 17

Вказівка

Протікання процесу після пробію іскрового проміжку описується системою диференціальних рівнянь:

$$U_1 = U_3 + R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt};$$

$$U_3 = U_2 + R_2 i_2;$$

$$i_2 = C_2 \frac{dU_2}{dt}; i_1 = i_2 + \frac{U_3}{R_3}; i_1 = -C \frac{dU_1}{dt}.$$

Перейти до операторних рівнянь при початкових умовах ($t = 0$, $U_1 = U_{10}$, $U_2 = 0$, $i_1 = i_2 = 0$), одержати $U_2(p)$ і перейти до оригіналу $u_2(t)$. При цьому використовується друга теорема розкладання операційного числення.

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| + 0,5|y|;$$

$$C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Варіант 11

Завдання 1

Процес відключення короткого замикання вимикачем з шунтувальним опором можна поділити на два етапи. Перший розглянемо в цьому варіанті, другий – у варіанті 12.

Розглянемо схему (рис. 18). Вона являє собою найпростіший коливний контур, в якому ємність C зображує ємність лінії.

При розрахунку першого етапу процесу – введення в коло короткого замикання активного опору – необхідно прийняти нульові початкові умови для струму в індуктивності L і напруги на C . Треба:

1) скласти операторне рівняння для

$U_c(p) \leftarrow u_c(t)$, після чого перейти до оригіналу $u_c(t)$;

2) скласти диференціальне рівняння для контуру (див. рис. 18), розв'язати його класичним способом.

Для побудови графіка $u_c(t)$ можна взяти такі дані: $R = 400$ Ом; $L = 0,802$ Гн; $C = 4,25$ мкФ.

Завдання 2

Знайти розв'язок задачі Коші другого порядку класичним і опера-

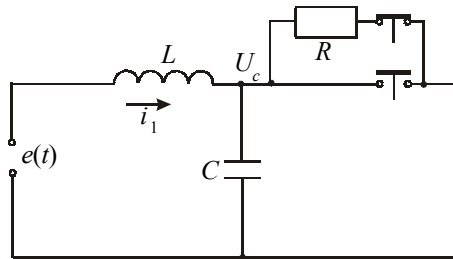


Рис. 18

ційним методами:

$$y'' + y = 2 \cos t; \begin{cases} y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| + \frac{y^2}{2};$$

$$C: \begin{cases} |x| = 4 - y^2; \\ -4 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Варіант 12

Завдання 1

Розглядається другий етап процесу відключення короткого замикання вимикачем із шунтувальним опором (див. варіант 11). Коливний контур на другому етапі має вигляд (рис. 19).

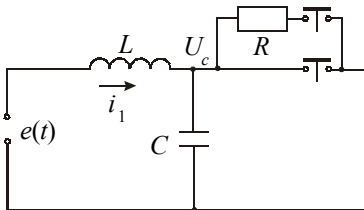


Рис. 19

Треба:

1) записати операторний вираз для $U_c(p) \leftarrow u_c(t)$, перейти до оригіналу $u_c(t)$;

2) записати диференціальне рівняння контуру після відключення опору, розв'язати його класичним методом. В якості вихідних даних для побудови графіка $u_c(t)$ взяти $L = 0,802$ Гн; $C = 4,25$ мкФ.

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$2y'' + 5y' = 29 \cos t; \begin{cases} y(0) = -1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| + |y|;$$

$$C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Варіант 13

Завдання 1

Знайти усталену напругу $u_{\text{уст}}(t)$ на ємності C в контурі (рис. 20), якщо джерело дає періодичну ЕРС вигляду (рис. 21)

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ t & 0 \leq t \leq 1; \\ 2 - t & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

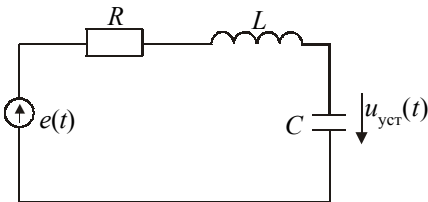


Рис. 20

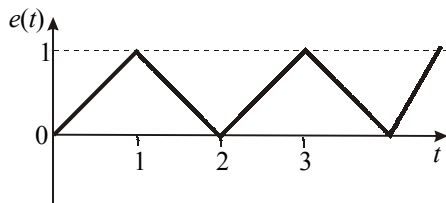


Рис. 21

Розв'язати операторне рівняння відносно $U(p)$, перейти до оригіналу $u(t)$.

Завдання 2

Знайти розв'язок задачі Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' - 4y' + 4y = \sin 2x; \quad \begin{cases} y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$
$$U(xy)|_C = 2|x| + 0,5|y|;$$
$$C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Варіант 14

Завдання 1

В колі з опором $R = 150$ Ом, індуктивністю $L = 30$ Гн підтримується постійна напруга $U = 300$ В (рис. 22). Треба:

1. Визначити силу струму $i(t)$ в колі у будь-який момент часу t .
2. Знайти, за який час з моменту замикання кола струм, що виникає в ньому, досягне 99 % своєї граничної величини.

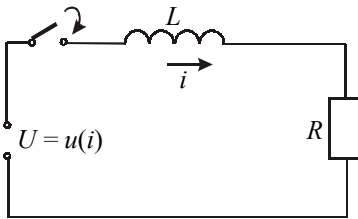


Рис. 22

Вказівка

Рівняння, яке описує це коло і виходить з другого закону Кирхгофа, має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + R_i = U; \quad U = \text{const}.$$

Початкові умови: $i(0) = 0$.

Розв'язати цю задачу класичним і операційним методами.

Завдання 2

Знайти розв'язок задачі Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' - 4y' + 5y = \cos x; \quad \begin{cases} y(0) = 1; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| + \frac{1}{2}|y|;$$

$$C: \begin{cases} |y| = 9 - x^2; \\ -3 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Варіант 15

Завдання 1

Послідовно включені джерело електроенергії з напругою U_0 , індуктивність L і опір R , який зростає за законом $R = R_0 + R'_0 t$. Знайти силу струму $i(t)$ в колі.

Вказівка

Диференціальне рівняння, яке описує даний контур, має вигляд

$$L \frac{di}{dt} + (R_0 + R'_0 t)i(t) = U_0. \quad (6)$$

Початкова умова: $i(0) = 0$.

Розв'язати задачу Коші класичним методом, потім операційним, маючи на увазі, що диференціальне рівняння (6) є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' - 2y' + 5y = 3 \cos 2x; \quad \begin{cases} y(0) = 2; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = \frac{1}{2}|x| + 2|y|;$$

$$C : x^2 + y^2 = 16.$$

Варіант 16

Завдання 1

В колі з опором R , індуктивністю L , ємністю C (заряд конденсатора в момент замикання кола дорівнює q_0) підтримується напруга $u(t)$. Знайти закон зміни струму в колі (рис. 23).

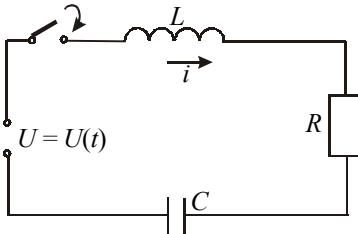


Рис. 23

Вказівка

Згідно з другим законом Кірхгофа, рівняння кола запишемо у вигляді

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{C} = \frac{dU}{dt}; \\ i(0) = i_0; \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{q}{CL}. \end{cases}$$

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' + 9y = \cos 3x; \quad \begin{cases} y(0) = 1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = 0,5|x| + |y|; C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Варіант 17

Завдання 1

Послідовно включені індуктивність L , опір R , конденсатор ємністю C , заряд якого в момент замикання ($t = 0$) дорівнює q_0 (рис. 24). Знайти силу струму в колі та частоту коливань, коли струм має періодичний характер: $i(0) = 0$.

Вказівка

В даному випадку конденсатор є джерелом електроенергії – генератором, напруга на якому в будь-який момент описується формулою

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0 - \int_0^t i dt}{C} = U_0 - \frac{\int_0^t i(t) dt}{C},$$

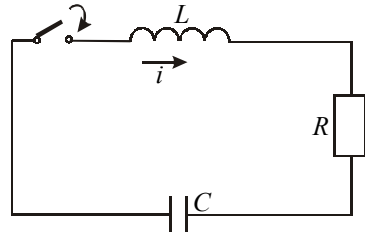


Рис. 24

де $U_0 = \frac{q_0}{C}$ – напруга на конденсаторі в момент $t = 0$.

$$\text{Отже, } L \frac{d^2 i}{dt^2} + Ri = U_0 - \frac{\int_0^t i(t) dt}{C}.$$

Продиференціювавши це рівняння по t , одержимо

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0. \quad (7)$$

Записати початкові умови для даної задачі $\left(i(0), \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} \right)$, одержати задачу Коші другого порядку, розв'язати її. Скласти операторне

рівняння для ланцюга (див. рис. 24) і, вирішивши його, одержати розв'язок задачі.

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x; \begin{cases} y(0) = 1; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 0; \\ U(xy)|_C &= 0,5|x| + 2|y|; \\ C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Варіант 18

Завдання 1

Конденсатор ємністю C включений у коло з напругою E і опором R (рис. 25). Визначити заряд q конденсатора в момент t після включення, склавши операторне рівняння для цього кола, а також за допомогою диференціального рівняння, яке одержується за законом Ома.

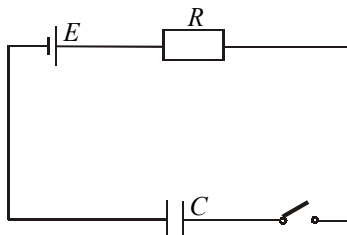


Рис. 25

Вказівка

В момент часу t заряд конденсатора q , струм $i = \frac{dq}{dt}$; ЕРС

в колі $U = E - \frac{q}{C} \Rightarrow$ диференціальне рівняння кола буде

$$R \frac{dq}{dt} = E - \frac{q}{C}.$$

Відповідь: $q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right)$

Завдання 2

Знайти розв'язок задачі Коші відносно $y(x)$ класичним і операційним методами:

$$2y'' + 5y' = 29 \cos t; \begin{cases} y(0) = -1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = 0,5|x| \cdot |y|;$$

$$C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Варіант 19

Завдання 1

Контур підключений до постійної ЕРС E_0 (рис. 26). При усталеному режимі включається рубильник P і накоротко замикає опір R_2 . Знайти вираз перехідного струму $i(t)$.

Відповідь: до включення рубильника

$$i(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-bt}), \quad b = \frac{R}{L}.$$

Після включення рубильника

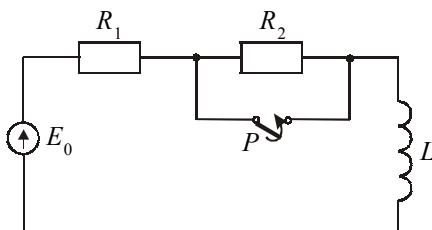


Рис. 26

$$i(t) = E_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_2 e^{-\frac{R_1 t}{L}}}{R_1 (R_1 + R_2)} \right).$$

Завдання 2

Знайти частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y'(x) = 3z(x) - y(x); \\ z'(x) = y(x) + z(x) + e^x \end{cases}$$

при початкових умовах $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Розв'язання провести класичним і операційним методами.

$$\text{Відповідь: } y(x) = \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - e^x; \quad z(x) = \frac{3}{4}e^{2x} - \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{2}{3}e^x.$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| \cdot |y|;$$

$$C: \begin{cases} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2, 2] \end{cases}.$$

Варіант 20

Завдання 1

У схемі (рис. 27) діє синусоїдна напруга $u(t) = U_0 \sin(\omega t + \psi)$.

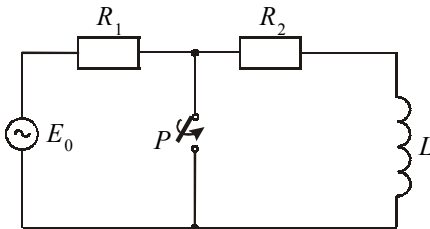


Рис. 27

В момент часу $t = 0$ рубильник P замикає коротко коло $R_2 L$. Знайти вираз для перехідних струмів. Розв'язання здійснити операційним методом.

$$\text{Відповідь: } i(t) = \frac{U_0 \sin(\psi - \varphi)}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}} e^{-\frac{R_2 t}{L}}; \quad \varphi = \arctg \omega L / (R_1 + R_2).$$

Завдання 2

Розв'язати систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y' - 2y - 4z = \cos x; \\ z' + y + 2z = \sin x \end{cases}$$

при початкових умовах $y(0) = 0$; $z(0) = 0$.

Задачу розв'язати операційним і класичним методами.

Відповідь: $y = 4x + 2 - 2 \cos x - 3 \sin x$; $z = 2 \sin x - 2x$.

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = \frac{1}{2}|x| + |y|;$$

$$C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Варіант 21

Завдання 1

Знайти перехідні значення напруг (U_r , U_c) в контурі (рис. 28) при перемиканні рубильника P з "1" в "2", якщо $\bar{U} = 100$ В, $r = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ.

Вказівка

Операторний опір кола має

вигляд $Z(p) = r + \frac{1}{pC}$.

За законом Ома $I(p) = \frac{-UC}{rCp + 1}$.

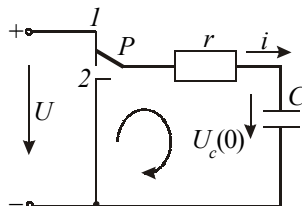


Рис. 28

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' + 4y = 2 \cos 2x;$$

$$\begin{cases} y(0) = 0; \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = |x| + |y|;$$

$$C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Варіант 22

Завдання 1

В контурі (рис. 29) напруга на конденсаторі E_0 (рубильник ввімкнутий), а струм через катушку індуктивності дорівнює E_0/R_2 . Коли рубильник вимикається, починається розряд конденсатора, в якому припускається наявність аперіодичних розрядів.

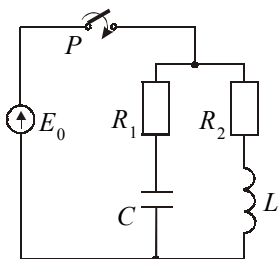


Рис. 29

Знайти напругу на конденсаторі C в момент t_0 .

Вказівка

Математичною моделлю цієї задачі являється задача Коші другого порядку:

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + C(R_1 + R_2) \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0; \\ u_c(0) = -E_0; \\ \frac{du_c(0)}{dt} = \frac{E_0}{CR_2}. \end{cases}$$

Тут $u_c(t)$ – напруга на конденсаторі в момент t .

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' - 3y' + 12y = 12e^{3t}; \quad \begin{cases} y(0) = 2; \\ y'(0) = 6. \end{cases}$$

Завдання 3

Знайти розв'язок задачі Діріхле в квадраті $OABC$ (рис. 30) для рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$C : OABC$.

$$U|_{OA} = 1; \quad U|_{BC} = y + 1; \quad U|_{OC} = 1; \quad U|_{AB} = x + 1.$$

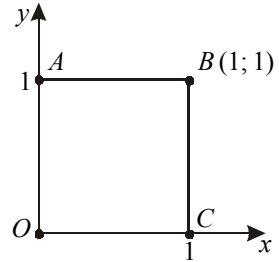


Рис. 30

Варіант 23

Завдання 1

За умовою і вказівкою до варіанту 5 завдання 1 (див. рис. 12) знайти перехідні значення напруг U_r , U_c , U_L .

$$\text{Вказівка: } U_r = r_i(t); \quad U_L = L \frac{di}{dt}; \quad U_c = -U_r - U_L.$$

Завдання 2

Розв'язати систему диференціальних рівнянь першого порядку відносно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 7y + 5z, \\ \frac{dz}{dt} = -2x - 4y - 2z \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = 0$; $y(0) = 3$; $z(0) = -2$.

Завдання 3

Знайти розв'язок задачі Діріхле у квадраті $OABC$: $O(0; 0)$, $A(0; 1)$,

$B(1; 1)$, $C(1; 0)$ (див. рис. 30) для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

з граничними умовами $U|_{OA} = 3 - 7y$; $U|_{BC} = 7 - 6y$; $U|_{OC} = 4x + 3$;
 $U|_{AB} = 5x - 4$.

Варіант 24

Завдання 1

За даним графіком $i(t)$ (рис. 31) знайти відображення $I(p) \leftarrow i(t)$.

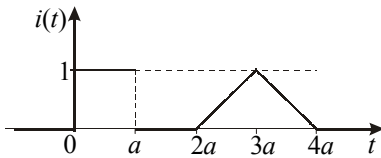


Рис. 31

Завдання 2

Розв'язати задачу Коші другого порядку класичним і операційним методами:

$$y'' + 3y' + 29y = e^{-2t}; \quad \begin{cases} y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Завдання 3

Розв'язати методом скінченних різниць задачу Діріхле:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

$$U(xy)|_C = 2|x| + |y|;$$

$$C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Варіант 25

Завдання 1

Фізичний процес описується залежностями

$$\begin{cases} x'(t) = 2x - y + z; \\ y'(t) = x + z; \\ z'(t) = -3x + y - 2z \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = 1$; $y(0) = 1$; $z(0) = 0$.

Знайти класичним методом $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$.

Завдання 2

За умовою завдання 1 знайти $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$ операційним методом.

Завдання 3

Розв'язати на сітці з 10 вузлів по x і 10 вузлів по y задачу Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

при граничних умовах $U(0, y) = 0$; $U(x, 0) = 0$; $U(1, y) = y$ ($0 \leq y \leq 1$);

$$U(x, 1) = x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

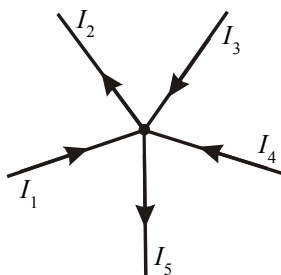
1. КОЛО ПОСТІЙНОГО СТРУМУ. ЗАКОНИ КІРХГОФА

1.1. Перший закон Кірхгофа

Алгебраїчна сума струмів вузла електричного контуру дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

Приклад 1.1



$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0.$$

Рис. 1.1

1.2. Другий закон Кірхгофа

Алгебраїчна сума ЕРС будь-якого замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі напруг на елементах цього контуру:

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{k=1}^m I_k R_k.$$

Приклад 1.2

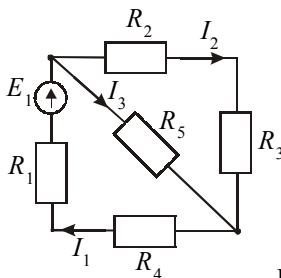


Рис. 1.2

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0;$$

$$E_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_2 R_3 + I_1 R_4;$$

$$E_1 = I_1 R_1 + I_3 R_5 + I_1 R_4;$$

$$0 = I_2 R_2 + I_2 R_3 - I_3 R_5.$$

2. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

2.1. Вмикання індуктивності на постійну напругу наведено на рис. 1.3.

За другим законом Кірхгофа

$$U = iR + \frac{d}{dt}(Li).$$

Якщо $L = \text{const}$, то $U - iR = L \frac{di}{dt}$;

$$\frac{U}{R} - i = \frac{L}{R} \frac{di}{dt} \Rightarrow e^{\frac{R}{L}t} = \frac{I - i}{A},$$

де $I = \frac{U}{R}$ – усталений струм (встановлюється у колі після закінчення перехідного явища);

$$i = I \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad i = I e^{-\frac{R}{L}t}.$$

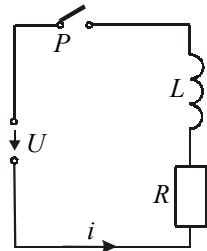


Рис. 1.3

2.2. На рис. 1.4 наведено коло заряду конденсатора. Рівняння кола

має вигляд $U = iR + U_c$. Якщо $i = C \frac{dU_c}{dt}$, то $U = RC \frac{dU_c}{dt} + U_c \Rightarrow$

$$U_c = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

де $\tau = RC$ – стала часу, що характеризує швидкість процесу (рис. 1.5).

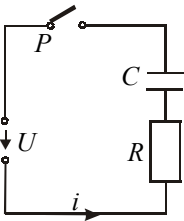


Рис. 1.4

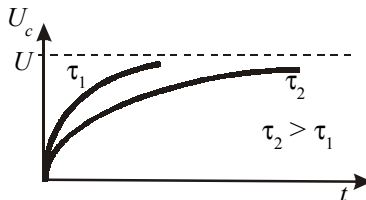


Рис. 1.5

Таблиця "Зображення–оригінал"

№ п/п	Оригінал	Зображення	№ п/п	Оригінал	Зображення
1	1	$\frac{1}{p}$	16	$\frac{1}{2} t^2 e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^3}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	17	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos at)$	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$
3	e^{qt}	$\frac{1}{p-q}$	18	$\frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1)$	$\frac{1}{p(p^2 - a^2)}$
4	$\frac{1}{a} e^{\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{1+ap}$	19	$\left(t + \frac{1}{2} at^2 \right) e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$
5	$\sin at$	$\frac{1}{p^2 + a^2}$	20	$\cos^2 at$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
6	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	21	$\operatorname{ch}^2 at$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
7	$\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$	22	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$

8	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{p(1+ap)}$	23	$\text{sh } at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
9	$t e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$	24	$\frac{1}{2}(\text{sh } at - \sin at)$	$\frac{a^3}{p^4 - a^4}$
10	$\frac{1}{a^2} t e^{\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1+ap)^2}$	25	$\frac{1}{2}(\text{ch } at - \cos at)$	$\frac{a^2 p}{p^4 - a^4}$
11	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	26	$\frac{1}{2}(\text{sh } at + \sin at)$	$\frac{ap^2}{p^4 - a^4}$
12	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	27	$\frac{1}{2}(\text{ch } at + \cos at)$	$\frac{p^3}{p^4 - a^4}$
13	$\text{ch } at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	28	$\sin at \cos at$	$\frac{2a^2 p}{p^4 + 4a^4}$
14	$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$	29	$\cos at \text{ch } at$	$\frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$
15	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$	30	$\sin at \text{ch } at$	$\frac{a(p^2 + 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$

№ п/п	Оригінал	Зображення	№ п/п	Оригінал	Зображення
31	$\cos at \operatorname{sh} at$	$\frac{a(p^2 - 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$	47	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
32	$\frac{1}{2}(\sin at - at \cos at)$	$\frac{a^3}{(p^2 + a^2)^2}$	48	$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
33	$\frac{t}{2}\sin at$	$\frac{ap}{(p^2 + a^2)^2}$	49	$\frac{1 + 2at}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{p+a}{p\sqrt{p}}$
34	$\frac{1}{2}(\sin at + at \cos at)$	$\frac{ap^2}{(p^2 + a^2)^2}$	50	$\frac{ate^{-at} + e^{-at} - 1}{t^2}$	$p \ln \left(1 + \frac{a}{p} \right) - a$
35	$\cos at - \frac{at}{2}\sin at$	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)^2}$	51	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{p-a} - \sqrt{p-b}$
36	$\frac{1}{2}(at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$	$\frac{a^3}{(p^2 - a^2)^2}$	52	$\frac{\sin at}{t\sqrt{2\pi t}}$	$\sqrt{\sqrt{p^2 - a^2} - p}$
37	$\frac{1}{2}t \operatorname{sh} at$	$\frac{ap}{(p^2 - a^2)^2}$	53	$\frac{1 - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p}$

38	$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at + \operatorname{arch} at)$	$\frac{a p^2}{(p^2 - a^2)^2}$	54	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$
39	$\operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at$	$\frac{p^3}{(p^2 - a^2)^2}$	55	$2 \frac{\operatorname{sh} at}{t}$	$\ln \frac{p+a}{p-a}$
40	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	56	$\sigma(t-a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$
41	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	57	$\frac{\sin at}{t}$	$\operatorname{arctg} \frac{a}{p}$
42	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	58	$2 \frac{\sin at \cos bt}{t}$	$\operatorname{arctg} \frac{2ap}{p^2 - a^2 + b^2}$
43	$t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$	59	$\frac{e^{at} - 1}{t} \sin bt$	$\operatorname{arctg} \frac{p^2 - ap + b^2}{ab}$
44	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at - t$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 - a^2)}$	60	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{p}(\ln 4p + C)}$
45	$\sin(at+b)$	$\frac{p \sin bt + a \cos b}{p^2 + a^2}$	61	Рис. 2.1	$\frac{e^{-ap}}{p}$
46	$\cos(at+b)$	$\frac{p \cos bt - a \sin b}{p^2 + a^2}$	62	Рис. 2.2	$\frac{1 - e^{-ap}}{p}$

Продовж. таблиці

№ п/п	Оригінал	Зображення	№ п/п	Оригінал	Зображення
63	Рис. 2.3	$\frac{e^{-a p} - e^{-b p}}{p}$	70	Рис. 2.10	$\frac{1 - e^{-a p}}{p^2}$
64	Рис. 2.4	$\frac{(1 - e^{-a p})^2}{p}$	71	Рис. 2.11	$\frac{e^{-a p} + a p - 1}{a p^2}$
65	Рис. 2.5	$\frac{(e^{-a p} - e^{-b p})^2}{p}$	72	Рис. 2.12	$F(p) = \frac{L f(t)}{1 - e^{-a p}}$
66	Рис. 2.6	$\frac{(1 - e^{-a p})^2}{p^2}$	73	Рис. 2.13	
67	Рис. 2.7	$\frac{(e^{-a p} - e^{-b p})^2}{p^2}$	74	Рис. 2.14	$\frac{1 - e^{-a p}}{p(1 + e^{-a p})}$
68	Рис. 2.8	$\frac{b e^{-a p}}{p(p + b)}$	75	Рис. 2.15	$\frac{1}{p(1 + e^{-a p})}$
69	Рис. 2.9	$\frac{e^{-a p} - e^{-b p}}{p^2}$	76	Рис. 2.16	$\frac{1}{p(1 + e^{a p})}$

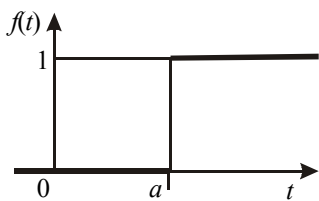


Рис. 2.1

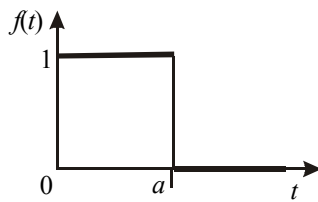


Рис. 2.2

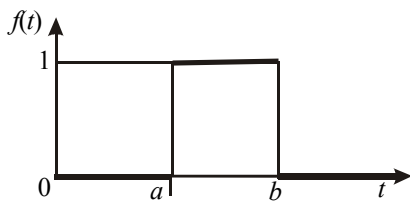


Рис. 2.3

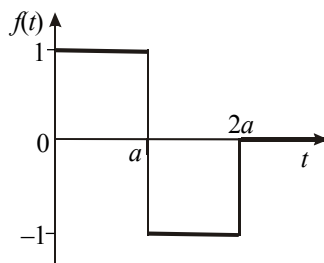


Рис. 2.4

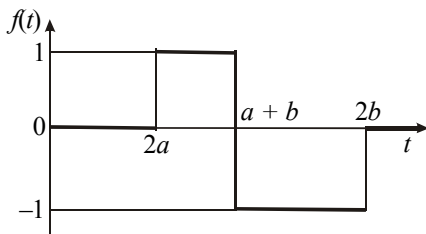


Рис. 2.5

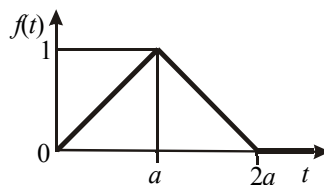


Рис. 2.6

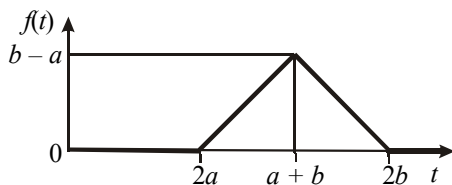


Рис. 2.7

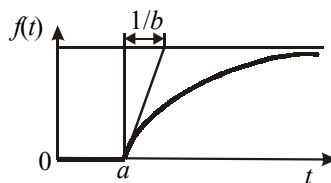


Рис. 2.8

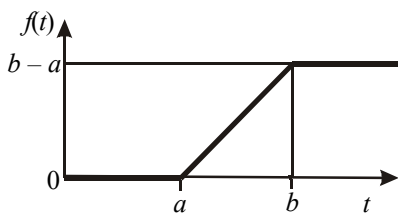


Рис. 2.9

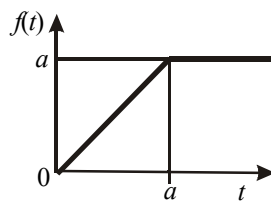


Рис. 2.10

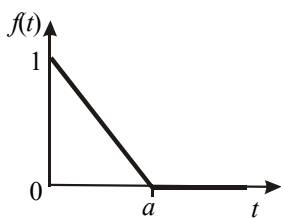


Рис. 2.11

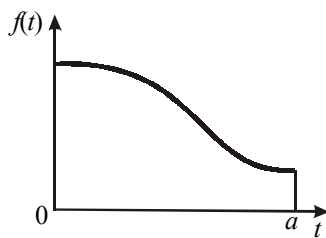


Рис. 2.12

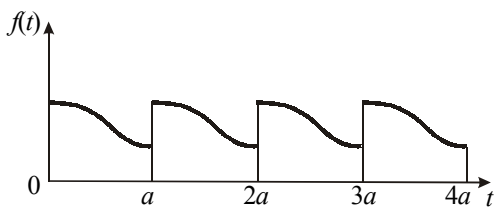


Рис. 2.13

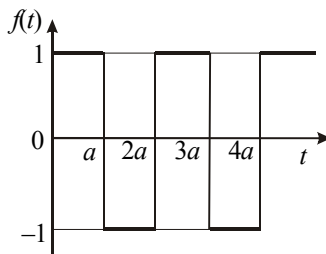


Рис. 2.14

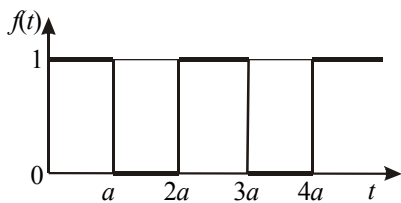


Рис. 2.15

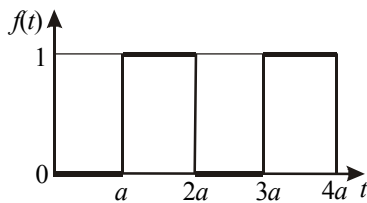


Рис. 2.16

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Высшая математика. Специальные главы / Под общ. ред. *П.И. Чинаева*. – К.: Вища школа, 1977. – 367 с.
2. Высшая математика / *П.Ф. Овчинников* и др. – К.: Вища школа, 1989. – 679 с.
3. *Левинштейн М.Л.* Операционное исчисление в задачах электротехники. – Л.: Энергия, 1972. – 358 с.
4. *Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф.* Загальна електротехніка: Теорія і практикум. – К.: Каравела, 2003.
5. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т. – М.: Наука, 1972. – Т. 2. – 573 с.
6. *Чемоданов Б.К.* Математические основы теории автоматического управления: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1977. – Т. 2. – 516 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. Методика виконання курсової роботи	4
РОЗДІЛ 2. Зразки виконання курсової роботи	5
РОЗДІЛ 3. Варіанти курсових робіт	20
Додаток 1	44
Додаток 2	46
Список використаної літератури	53

Навчальне видання

ФОМІНА Ася Олександрівна
ПАВЛОВ Геннадій Вікторович

ТИПОВІ РОЗРАХУНКИ ДЛЯ СПЕЦКУРСУ З МАТЕМАТИКИ

Методичні вказівки
(українською мовою)

Редактор *М.П. Фоміна*
Комп'ютерна правка та верстка *О.М. Черевата*
Коректор *Н.О. Шайкіна*

Свідectво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1150 від 12.12.2002 р.

Підписано до друку 05.01.06. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 3,2. Обл.-вид. арк. 3,4.
Тираж 100 прим. Вид. № 31. Зам. № 6. Ціна договірна.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5



для нотаток