

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Первомайська філія Національного університету кораблебудування
імені адмірала Макарова

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних дисциплін

М.Л. ГОРДІЄНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА II

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

**Методичні вказівки та завдання
до самостійного вивчення курсу**

Первомайськ
2021

УДК 517.3
ББК 22.16

*Рекомендовано до друку Науково-методичною радою Первомайської філії
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
(Протокол № _____ від ____ ____ р.)*

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних дисциплін

М.Л. Гордієнко

Вища математика II: Інтегральне числення: методичні вказівки та завдання до самостійного вивчення курсу/ Укладач: М.Л. Гордієнко. – Первомайськ: ПФ НУК, 2021. – 80 с.

Методичні вказівки до самостійного вивчення курсу відповідають робочій програмі дисципліни «Вища математика II». Методичні вказівки розроблено до змістового модуля «Інтегральне числення». Подано основні теоретичні відомості, зразки детального розв'язування основних типових задач з повним аналізом розв'язку, завдання для самостійної і індивідуальної роботи студентів, питання і завдання для самоперевірки.

Для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти заочної форми навчання спеціальностей 131 Прикладна механіка, 142 Енергетичне машинобудування, 144 Теплоенергетика, 051 Економіка, 071 Облік і оподаткування, 076 Підприємництво, торгівля та біржова діяльність.

УДК 517.3
ББК 22.16

© М.Л. Гордієнко
© Первомайська філія
Національного університету
кораблебудування, 2021

ВСТУП

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з наступних елементів: вивчення теоретичного матеріалу, розв'язування задач, самоперевірка, виконання контрольних робіт. Завершальним етапом вивчення курсу є іспит.

Робота над теоретичним матеріалом

1. Опрацьовуючи теоретичний матеріал, слід переходити до наступного питання тільки після правильного розуміння попереднього, виконуючи на папері всі тотожні перетворення і всі необхідні ілюстрації.

2. Особливу увагу необхідно звертати на визначення основних понять. Студент повинен ретельно розбирати приклади, які пояснюють такі поняття, і уміти будувати аналогічні приклади самостійно.

3. При вивченні теоретичного матеріалу корисно вести конспект, до якого рекомендується записувати означення, формули, рівняння тощо. На полях конспекту слід відмічати питання для одержання консультації викладача.

4. Письмове оформлення роботи студента має виключно важливе значення. Записи в конспекті повинні бути зроблені чисто, акуратно і розташовані в певному порядку. Гарне зовнішнє оформлення конспекту по вивченому матеріалу не тільки привчить студента до необхідного в роботі порядку, але і дозволить йому уникнути багатьох помилок, які появляються по причині неохайних, безсистемних записів.

5. Висновки, одержані у вигляді формул, рекомендується в конспекті підкреслювати або обводити рамкою, щоб при перечитуванні конспекту вони виділялись і краще запам'ятовувались. Досвід показує, що багатьом студентам допомагає в роботі складання листа, що містить найважливіші та найчастіше використовувані формули. Такий лист не тільки допомагає запам'ятати формули, а і може служити постійним довідником для студента.

Розв'язування задач

1. Опрацювання теоретичного матеріалу повинно супроводжуватись розв'язанням задач, для чого рекомендується завести спеціальний зошит.

2. При розв'язанні задач необхідно обґрунтовувати кожний етап розв'язку виходячи з теоретичних положень курсу. Якщо студент бачить кілька шляхів розв'язку, то він повинен порівняти їх і вибрати найкращий. Корисно до початку обчислень скласти короткий план розв'язку.

3. Розв'язок задач і прикладів потрібно викладати ретельно, обчислення розташовувати у строгому порядку, відокремлюючи допоміжні обчислення від основних. Креслення можна виконувати від руки, але акуратно, у відповідності з даними умови. Якщо креслення вимагає особливо ретельного виконання (наприклад, при графічній перевірці розв'язку, одержаного шляхом обчислень), потрібно користуватись лінійкою, транспортиром, лекалом і при цьому вказувати масштаб.

4. Одержану відповідь слід перевіряти способами, що витікають із сутності даної задачі. Якщо, наприклад, розв'язувалась задача з конкретним фізичним або геометричним змістом, то корисно перевірити розмірність одержаної відповіді. Корисно також, якщо можливо, розв'язати задачу кількома способами і порівняти одержані результати.

5. Розв'язок задач одного типу необхідно продовжувати до одержання твердих навичок у їх виконанні.

Самоперевірка

1. Після вивчення певної теми і розв'язання достатньої кількості відповідних задач студенту рекомендується відновити в пам'яті означення, виведення формул, формулювання та доведення теорем.

2. Іноді недостатність засвоєння того чи іншого питання з'ясовуються при вивченні подальшого матеріалу. В цьому випадку необхідно повернутись назад і повторити погано засвоєний розділ.

3. Важливим критерієм засвоєння теорії є вміння розв'язувати задачі на пройдений матеріал. В той же час правильне розв'язання задач ще не є гарантією засвоєння теорії, оскільки розв'язок задачі міг бути механічним використанням формул, без розуміння матеріалу.

1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Однією із задач інтегрального числення є задача знаходження функції, для якої відома похідна або диференціал.

1.1. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на інтервалі (a, b) , якщо для всіх $x \in (a, b)$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x), \text{ або } dF = f(x)dx. \quad (1.1)$$

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на інтервалі (a, b) , то *будь-яка інша первісна* для $f(x)$ має вигляд $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – довільна стала.

Множину всіх первісних для функції $f(x)$ на інтервалі (a, b) виду $F(x) + C$ ($C = \text{const}$) називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на (a, b) і позначають символом $\int f(x)dx$, де $\int$ – знак невизначеного інтеграла, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція. Якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.2)$$

Операцію знаходження первісної або невизначеного інтеграла від функції $f(x)$ називають *інтегруванням* функції $f(x)$.

Теорема. Для будь-якої неперервної на інтервалі (a, b) функції $f(x)$ існує на цьому інтервалі первісна, а отже, і невизначений інтеграл

Зауваження. Невизначений інтеграл від елементарної функції не завжди є елементарною функцією. Наведемо приклади таких інтегралів:

1. $\int e^{-x^2} dx$ – інтеграл Пуассона.
2. $\int \sin(x^2) dx, \int \cos(x^2) dx$ – інтеграли Френеля.
3. $\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм.
4. $\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx$ – інтегральні синус, косинус і експонента.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$
2. $d \int f(x) dx = f(x) dx, \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$
3. $\int [af(x) + b\varphi(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int \varphi(x) dx (a, b - \text{const}).$

Таблиця невизначених інтегралів

Нехай u – незалежна змінна або неперервно диференційована функція, тоді справедливі формули ($C = \text{const}$):

- | | |
|---|---|
| 1. $\int 0 dx = C;$ | 2. $\int du = u + C;$ |
| 3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$ | 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C;$ |
| 5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$ | 6. $\int e^u du = e^u + C;$ |
| 7. $\int \sin u du = -\cos u + C;$ | 8. $\int \cos u du = \sin u + C;$ |
| 9. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C;$ | 10. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C;$ |
| 11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$ | 12. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$ |
| 13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C \\ -\arccos \frac{u}{a} + C \end{cases};$ | 14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases};$ |
| 15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln u + \sqrt{u^2 \pm a^2} + C;$ | 16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + C.$ |

Для перевірки правильності інтегрування необхідно обчислити похідну від отриманого результату, яка повинна дорівнювати підінтегральній функції:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

1.2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

1.2.1. Безпосереднє інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей і таблиці інтегралів називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад 1.1

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{2 - \sqrt[3]{x} - 2x + 3x^2 + x^2 3^x}{x^2} dx &= 2 \int x^{-2} dx - \int x^{-\frac{5}{3}} dx - 2 \int \frac{dx}{x} + \\ &+ 3 \int dx + \int 3^x dx = 2 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} - 2 \ln|x| + 3x + \frac{3^x}{\ln 3} + C = \\ &= -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^{2/3}} - 2 \ln|x| + 3x + \frac{3^x}{\ln 3} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 1.2

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{16 + 4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{2^2 + x^2} = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \blacksquare$$

Приклад 1.3

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{5}{2}} \right| + C. \blacksquare$$

Приклад 1.4

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C. \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.2. Метод заміни змінної (метод підстановки)

Нехай інтеграл $\int f(x) dx$ не є табличним. Введемо підстановку $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, що має обернену функцію. Отримаємо формулу заміни змінної інтегрування:

$$\int f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right\} = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt. \quad (1.3)$$

Після обчислення інтеграла в правій частині формули необхідно повернутися до змінної x , виразивши t через x із формули $x = \varphi(t)$.

Приклад 1.5

$$\blacktriangleright \int (2x-3)^9 dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x-3 \\ dt = 2dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int t^9 dt = \frac{t^{10}}{20} + C = \frac{(2x-3)^{10}}{20} + C. \blacksquare$$

Приклад 1.6

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \sqrt[5]{(2-3x)^4} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = 2-3x \\ dt = -3dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int t^{4/5} dt = -\frac{5}{27} t^{9/5} + C = \\ &= -\frac{5}{27} (2-3x)^{9/5} + C. \end{aligned}$$

Приклад 1.7

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = a \int \frac{\cos t dt}{[a^2 (1 - \sin^2 t)]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= a \int \frac{\cos t dt}{[a^2 \cos^2 t]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} + C = \\ &= \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

У багатьох випадках формулу (1.3) записують у вигляді:

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right\} = \int f(t) dt, \quad (1.4)$$

тобто, якщо під інтегралом одночасно присутні функція $\varphi(x)$ та її диференціал $d\varphi = \varphi'(x)dx$, то використовується підстановка $t = \varphi(x)$.

Наведемо приклади застосування формули (1.4).

Приклад 1.8

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int (2x^4 + 3)^{19} x^3 dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = 2x^4 + 3 \\ dt = 8x^3 dx \end{array} \right\} = \frac{1}{8} \int t^{19} dt = \frac{1}{8} \frac{t^{20}}{20} + C = \\ &= \frac{1}{160} (2x^4 + 3)^{20} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 1.9

$$\blacktriangleright \int e^{3\sin^2 x} \sin 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 3\sin^2 x \\ dt = 3 \cdot 2 \sin x \cos x dx = 3 \sin 2x dx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{3\sin^2 x} + C. \blacksquare$$

Приклад 1.10

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin^2 3x} dx}{\sqrt{1-9x^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \arcsin 3x \\ dt = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int t^{2/3} dt = \frac{t^{5/3}}{5} + C = \\ &= \frac{1}{5} \arcsin^{5/3} 3x + C. \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.3. Інтегрування частинами

Якщо на множині $\{X\}$ функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із похідними, то має місце *формула інтегрування частинами*:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1.5)$$

Розглянемо три групи інтегралів, для обчислення яких застосовується формула (1.5). Нехай $P_n(x)$ – многочлен степеня n , а множником під інтегралом є одна з функцій, поданих у фігурних дужках. Рекомендований вибір u і dv наведений у дужках після знака рівності.

1. Інтеграли виду

$$\int P_n(x) \{a^{bx}; \cos bx; \sin bx\} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = P_n(x); du = P'_n(x) \cdot dx \\ dv = \{...\} dx; v = \int \{...\} dx \end{array} \right\}.$$

Однократне застосування формули (1.5) дозволяє знизити на одиницю степінь многочлена під інтегралом, n -кратне застосування формули (1.5) зводить дані інтеграли до табличних.

Приклад 1.11

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int (x^2 + 5x + 1) e^{2x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 5x + 1; \quad du = (2x + 5) dx \\ dv = e^{2x} dx; \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 5x + 1) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x + 5) e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x + 5; \quad du = 2 dx \\ dv = e^{2x} dx; \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 5x + 1) e^{2x} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (2x + 5) e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 2 \int e^{2x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 5x + 1) e^{2x} - \frac{1}{4} (2x + 5) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} (x^2 + 4x - 1) e^{2x} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

2. Інтеграли виду

$$\int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x; \arccos x; \\ \log_a^k x; \operatorname{arctg} x; \operatorname{arcctg} x \end{array} \right\} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \{ \dots \}; \quad du = \{ \dots \}' dx \\ dv = P_n(x) dx; \quad v = \int P_n(x) dx \end{array} \right\}.$$

Приклад 1.12

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int (x+1) \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = (x+1) dx; \quad v = \frac{x^2}{2} + x \end{array} \right\} = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \\ - \int \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \frac{dx}{x} &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \ln x - \frac{1}{4} x^2 - x + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 1.13

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \operatorname{arctg} x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx; \quad v = x \end{array} \right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \\ = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln t + C = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \blacksquare \end{aligned}$$

3. Інтеграли виду

$$I = \int e^{ax} \{ \sin bx; \cos bx \} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax}; \quad du = a e^{ax} dx \\ dv = \{ \dots \} dx; \quad v = \int \{ \dots \} dx \end{array} \right\}.$$

Це так звані “циклічні” інтеграли. Після двократного інтегрування частинами у правій частині рівності одержимо початковий інтеграл I з деяким коефіцієнтом. Із отриманого лінійного рівняння треба знайти I .

Приклад 1.14

$$\blacktriangleright I = \int e^{ax} \cos bx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax}; \quad du = a e^{ax} dx \\ dv = \cos bx dx; \quad v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^{ax}}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax}; \quad du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin bx dx; \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^{ax}}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \left[-\frac{e^{ax}}{b} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \right].$$

У правій частині одержали початковий інтеграл. Перепишемо останню рівність у вигляді:

$$I = \frac{e^{ax}}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I.$$

З цього рівняння знайдемо I

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C. \blacksquare$$

Зауваження. Зазначені три групи інтегралів не охоплюють усіх інтегралів, що беруться за допомогою інтегрування частинами.

1.3. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Розглянемо інтеграли виду

$$I_1 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx; I_2 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx. \quad (1.6)$$

Схема обчислення інтегралів (1.6):

- 1) винести за знак інтеграла коефіцієнт a при x^2 ;
- 2) виділити повний квадрат у квадратному тричлені (для цього зручно ввести нову змінну, що дорівнює половині похідної квадратного тричлена);
- 3) розбити інтеграл, що утворився, на два інтеграли, поділивши вираз у чисельнику на знаменник.

Приклад 1.15

$$\blacktriangleright \int \frac{2x+1}{3x^2+6x+9} dx = \frac{1}{3} \int \frac{2x+1}{x^2+2x+3} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x^2+2x+3)' = x+1 \\ x = t-1; dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{[2(t-1)+1]dt}{(t-1)^2+2(t-1)+3} = \frac{1}{3} \int \frac{(2t-1)dt}{t^2+2} = \frac{1}{3} \int \frac{2tdt}{t^2+2} - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(\sqrt{2})^2+t^2} =$$

$$\begin{aligned}
= \left\{ \begin{array}{l} z = t^2 + 2 \\ dz = 2t dt \end{array} \right\} &= \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \ln |z| - \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \\
&= \frac{1}{3} \ln |x^2 + 2x + 3| - \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \blacksquare
\end{aligned}$$

Приклад 1.16

$$\begin{aligned}
&\blacktriangleright \int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{8+4x+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{4+2x+x^2}} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(4+2x+x^2)' = 1+x \\ x = t-1; \quad dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(2t+1)dt}{\sqrt{4+2t-2+t^2-2t+1}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(2t+1)dt}{\sqrt{t^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = \left\{ \begin{array}{l} z = t^2 + 3 \\ dz = 2t dt \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |t + \sqrt{t^2+3}| = \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |t + \sqrt{t^2+3}| = \\
&= \sqrt{8+4x+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x+4}| + C. \blacksquare
\end{aligned}$$

1.4. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Раціональною функцією $R(x)$ називається функція виду:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n} \quad (a_0, b_0 \neq 0), \quad (1.7)$$

де m і n – цілі додатні числа.

Якщо $n > m$, то $R(x)$ називається *правильним* дробом, якщо $m \geq n$ – *неправильним* дробом. Усякий неправильний дріб можна подати у вигляді суми многочлена і правильного дробу, поділивши чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів.

Приклад 1.17

$$\blacktriangleright \frac{x^4 - x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 1} = x^2 - x - 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + x + 1}.$$

$$\begin{array}{r}
x^4 + 0x^3 - x^2 + 3x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x + 1 \\ x^2 - x - 1 \end{array} \right. \\
\underline{-x^4 + x^3 + x^2} \\
-x^3 - 2x^2 + 3x \\
\underline{-x^3 - x^2 - x} \\
-x^2 + 4x + 4 \\
\underline{-x^2 - x - 1} \\
5x + 5. \blacksquare
\end{array}$$

Оскільки многочлен легко інтегрується, то надалі розглядатимемо лише правильні дробу.

Простими (елементарними) раціональними дробами 1-4 типів називаються дробу виду:

$$1) \frac{A}{x+a}; \quad 2) \frac{A}{(x+a)^k}; \quad 3) \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad 4) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

де A, B, a, p, q – сталі; k – ціле, $k \geq 2$; $p^2/4 - q < 0$.

Розкладемо многочлен $P_n(x)$ із дійсними коефіцієнтами, що стоїть у знаменнику дробу (1.7), на лінійні та квадратичні множники:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= a_0 (x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_r)^{m_r} (x^2+p_1x+q_1)^{k_1} \dots (x^2+p_jx+q_j)^{k_j} \\
(m_1 + \dots + m_r) + 2(k_1 + \dots + k_j) &= n \quad (p_i^2/4 - q_i < 0, \quad i = \overline{1, j}). \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Перші r множників у розкладі (1.8) відповідають дійсним кореням $x_1, \dots, x_r$ многочлена, решта j множників – парам комплексно-спряжених коренів. Показники степенів $m_1, \dots, m_r, k_1, \dots, k_j$ є кратностями відповідних коренів. Для простих коренів вони дорівнюють одиниці.

Теорема. Правильний раціональний дріб (1.7) із знаменником, поданим у вигляді (1.8), можна розкласти на суму простих дробів 1-4 типів. У цьому розкладанні кожному дійсному кореню x_i кратності m_i ($i = \overline{1, r}$) многочлена $P_n(x)$ відповідає сума m_i дробів 1, 2 типів:

$$\frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{A_{m_i}}{(x-x_i)^{m_i}} \quad (1.9)$$

Кожній парі комплексно-спряжених коренів кратності k_i відповідає сума k_i простих дробів 3, 4 типів:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{k_i}x + C_{k_i}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{k_i}} \quad (1.10)$$

Для обчислення коефіцієнтів A, B, C необхідно звести до спільного знаменника дробу, що стоять у правій частині розкладання, і потім прирівняти чисельник дробу, що утворився, до чисельника вихідного дробу $Q_m(x)$. Далі можна прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах тотожності або (що набагато зручніше), задаючи x конкретні числові значення, отримувати необхідну для визначення всіх коефіцієнтів кількість рівнянь.

Приклад 1.18. Розкласти на елементарні дробу функцію

$$\frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2}.$$

► Многочлен у знаменнику дробу має один простий дійсний корінь $x = 1$ і один двократний $x = -2$, тому розклад має вигляд:

$$\frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Для обчислення коефіцієнтів A, B, C зведемо до спільного знаменника дробу у правій частині розкладання і прирівняємо чисельник дробу, що утворився, до чисельника вихідного дробу:

$$\frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2},$$

$$A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) \equiv 3x^2 + 9x - 3.$$

Якщо задати $x=1, x=-2, x=0$, то отримаємо систему для визначення коефіцієнтів A, B, C :

$$\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} 9A = 9; \\ -3C = -9; \\ 4A - 2B - C = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1; \\ B = 2; \\ C = 3. \end{array} \right.$$

Розклад на елементарні дробу:

$$\frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}. \blacksquare$$

Інтегрування елементарних дробів

$$1) \int \frac{A}{x+a} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x+a \\ dt = dx \end{array} \right\} = A \int \frac{dt}{t} = A \ln|t| + C = A \ln|x+a| + C;$$

$$2) \int \frac{A}{(x+a)^k} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x+a \\ dt = dx \end{array} \right\} = A \int t^{-k} dt = A \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ = \frac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}} + C;$$

$$3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x^2+px+q)' = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx; \quad x = t - p/2 \end{array} \right\} = \\ = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{\left(t - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(t - \frac{p}{2}\right) + q} dt = A \int \frac{tdt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} + \\ + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \ln \left| t^2 + q - \frac{p^2}{4} \right| + \\ + \frac{(B - Ap/2)}{\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{q - p^2/4}} + C = \\ = \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{(B - Ap/2)}{\sqrt{(q - p^2/4)}} \operatorname{arctg} \frac{x + p/2}{\sqrt{(q - p^2/4)}} + C;$$

$$4) \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x^2+px+q)' = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx; \quad x = t - p/2 \end{array} \right\} = \\ = A \int \frac{tdt}{\left[t^2 + \left(q - p^2/4\right)\right]^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{\left[t^2 + \left(q - p^2/4\right)\right]^k}.$$

Введемо позначення $s^2 = q - p^2/4$ й обчислимо інтеграли, що розташовані у правій частині.

$$\int \frac{tdt}{(t^2 + s^2)^k} = \left\{ \begin{array}{l} z = t^2 + s^2 \\ dz = 2tdt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-k)z^{k-1}} + C_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(1-k)(t^2 + q - p^2/4)^{k-1}} + C_1. \\
I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + s^2)^k} = \frac{1}{s^2} \int \frac{s^2 dt}{(t^2 + s^2)^k} = \frac{1}{s^2} \int \frac{(t^2 + s^2) - t^2}{(t^2 + s^2)^k} dt = \\
&= \frac{1}{s^2} \left[\int \frac{dt}{(t^2 + s^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + s^2)^k} \right] = \frac{1}{s^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2 + s^2)}{(t^2 + s^2)^k} \right] = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = \frac{d(t^2 + s^2)}{(t^2 + s^2)^k}; \quad v = \int (t^2 + s^2)^{-k} d(t^2 + s^2) = \frac{1}{(1-k)(t^2 + s^2)^{k-1}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{s^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{(1-k)(t^2 + s^2)^{k-1}} - \frac{1}{(1-k)} \int \frac{dt}{(t^2 + s^2)^{k-1}} \right) \right] + C_2 = \\
&= \frac{1}{s^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2(1-k)} \right) I_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2 + s^2)^{k-1}} \right] + C_2.
\end{aligned}$$

Інтеграл I_k ми виразили через більш простий інтеграл I_{k-1} , показник степеня знаменника якого на одиницю менший ніж у I_k . Продовжуючи цей процес, ми дійдемо до табличного інтеграла

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + s^2} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{t}{s} + C.$$

Отже, усі прості дробі інтегруються в елементарних функціях.

Приклад 1.19. Обчислити інтеграл $\int \frac{(3x^2 + 3x + 2)dx}{x(x+1)(x+2)}$.

► Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дробі:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \\
&= \frac{A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}. \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Прирівняємо чисельники останнього й початкового дробів:

$$A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1) \equiv 3x^2 + 3x + 2. \quad (1.12)$$

Систему рівнянь для визначення коефіцієнтів можна одержати двома способами.

1-й спосіб. Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах тотожності (1.12):

$$(A + B + C)x^2 + (3A + 2B + C)x + 2A \equiv 3x^2 + 3x + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 : \quad A + B + C = 3, \\ x : (3A + 2B + C) = 3, \\ x^0 : \quad 2A = 2. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 4. \end{array} \right.$$

2-й спосіб. Підставимо в тотожність (1.12) замість x значення, що дорівнюють кореням знаменника: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = -2; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2A = 2, \\ -B = 2, \\ 2C = 8. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 4. \end{array} \right.$$

У даному випадку нам не довелося розв'язувати спільну систему трьох рівнянь, оскільки до кожного рівняння увійшов лише один невідомий коефіцієнт. Надалі користуватимемося лише другим способом.

Підставляючи в рівність (1.11) знайдені значення коефіцієнтів і інтегруючи, одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x^2 + 3x + 2)dx}{x(x+1)(x+2)} &= \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + 4 \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \ln|x| - 2\ln|x+1| + 4\ln|x+2| + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 1.20. Обчислити інтеграл $\int \frac{(3x^2 + 9x - 3)dx}{(x-1)(x+2)^2}$.

► Підінтегральна функція розкладена на елементарні дробі у прикладі 1.18:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}. \\ \int \frac{(3x^2 + 9x - 3)dx}{(x-1)(x+2)^2} &= \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} + 3 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \\ &= \ln|x-1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{x+2} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 1.21. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx$.

► Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дробби:

$$\frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

$$\begin{aligned} A(x-1)(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x-1)^2 &\equiv \\ &\equiv 4x^3 - 4x^2 - 7x + 1. \end{aligned}$$

Задаючи $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 2$, отримаємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3B = -6, \\ -A + B + D = 1, \\ -2A + B - 4C + 4D = 0, \\ 7A + 7B + 2C + D = 3. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -2, \\ -A + D = 3, \\ -A - 2C + 2D = 1, \\ 7A + 2C + D = 17. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 3, \\ D = 4. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx &= \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1} = \\ &= \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

Обчислимо останній інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1} &= \left\{ \begin{array}{l} t = x + 1/2 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{3(t-1/2) + 4}{(t-1/2)^2 + (t-1/2) + 1} dt = \\ &= 3 \int \frac{tdt}{t^2 + 3/4} + \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = 3 \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \\ &= 3 \ln |x^2 + x + 1| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Нарешті, одержимо:

$$I = \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + 3 \ln|x^2 + x + 1| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \blacksquare$$

1.5. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інтеграли від деяких ірраціональних функцій за допомогою заміни змінної вдасться звести до інтегралів від раціональних функцій.

1. Розглянемо інтеграл виду

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx, \quad (1.13)$$

де R – раціональна функція аргументів;

a, b – сталі;

m_i, n_i ($i = \overline{1, k}$) – цілі додатні числа.

Підінтегральну функцію можна раціоналізувати за допомогою підстановки $ax+b=t^n$, де $n = \text{НСК}(n_1, \dots, n_k)$ – найменше спільне кратне показників коренів.

Приклад 1.22

$$\begin{aligned} \blacktriangleright I &= \int \frac{(\sqrt{2x+1}-1)dx}{(\sqrt[3]{2x+1}+1)\sqrt{2x+1}} = \left\{ \begin{array}{l} 2x+1=t^6 \\ 2dx=6t^5dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{(t^3-1)3t^5}{(t^2+1)t^3} dt = 3 \int \frac{t^5-t^2}{t^2+1} dt. \end{aligned}$$

Підінтегральний раціональний дріб неправильний, оскільки старший степінь чисельника більший ніж старший степінь знаменника. Подамо неправильний дріб у вигляді суми цілої частини (многочлена) й правильного дробу. Для цього поділимо многочлен у чисельнику на многочлен у знаменнику:

$$\begin{array}{r} \frac{t^5-t^2}{t^2+1} \Bigg| \frac{t^2+1}{t^3-t-1} \\ \underline{t^5+t^3} \\ -t^3-t^2 \\ \underline{-t^3-t} \\ -t^2+t \\ \underline{-t^2-1} \\ t+1. \end{array}$$

Підінтегральний дріб запишемо у вигляді:

$$\frac{t^5-t^2}{t^2+1} = t^3 - t - 1 + \frac{t+1}{t^2+1}.$$

Інтегруючи цей вираз і повертаючись до змінної x , одержимо:

$$I = 3 \int \left(t^3 - t - 1 + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = 3 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) =$$

$$= 3 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \ln |t^2 + 1| + \operatorname{arctg} t \right) + C = 3 \left(\frac{1}{4} (2x+1)^{2/3} - \frac{1}{2} (2x+1)^{1/3} - (2x+1)^{1/6} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt[3]{2x+1} + 1| + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{2x+1} \right) + C. \blacksquare$$

2. Інтеграли виду

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx \quad (1.14)$$

раціоналізуються за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$,

де $n = \text{НСК}(n_1, \dots, n_k)$ – найменше спільне кратне показників коренів.

Приклад 1.23

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} &= \left\{ \frac{1-x}{1+x} = t^2; \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2} \right\} = \\ &= -4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(1-t^2)} = 2 \int \frac{(t^2-1) + (t^2+1)}{(t^2+1)(t^2-1)} dt = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} - 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

1.6. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

- Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R – раціональна функція аргументів, за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки* $t = \operatorname{tg}(x/2)$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій змінної t :

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \\ &= \int R \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Універсальну тригонометричну підстановку доцільно застосовувати для обчислення інтегралів виду

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}, \int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}, \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}.$$

Приклад 1.24

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(2 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 3} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = t + 1 \\ dz = dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + 2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 1.25

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{2(1+t^2)^3 dt}{(1+t^2)8t^3} = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(t^{-3} + \frac{2}{t} + t \right) dt = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = \\ &= \frac{1}{8} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} \right) + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Універсальна підстановка часто приводить до громіздких обчислень. Розглянемо декілька випадків, у яких можна раціоналізувати підінтегральну функцію, використовуючи інші підстановки.

2. $\int R(\sin x) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int R(t) dt.$
3. $\int R(\cos x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int R(t) dt.$

Приклад 1.26

$$\blacktriangleright \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln |t+1| + C = \ln |\sin x + 1| + C. \blacksquare$$

$$4. \int R(\operatorname{tg} x) dx = \left\{ \operatorname{tg} x = t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад 1.27

$$\begin{aligned}
 & \blacktriangleright \int \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}{1 + \operatorname{tg} x} dx = \left\{ \operatorname{tg} x = t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^2}{1+t} \frac{dt}{1+t^2} = \\
 & = \int \frac{(1-t)^2 (1+t)^2 dt}{(1+t)(1+t^2)} = \int \frac{(1-2t+t^2)(1+t) dt}{1+t^2} = \int \left(1 - \frac{2t}{t^2+1} \right) (t+1) dt = \\
 & = \int \left(t+1 - 2 \frac{(t^2+1) + (t-1)}{t^2+1} \right) dt = \int \left(t-1 - \frac{2t}{t^2+1} + 2 \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\
 & = \frac{t^2}{2} - t - \ln |t^2+1| + 2 \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - \ln |\operatorname{tg}^2 x + 1| + 2x + C. \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\} = \\
 &= \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.
 \end{aligned}$$

Приклад 1.28

$$\begin{aligned}
 & \blacktriangleright \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right) (1+t^2)} dt = \\
 & = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + (1/\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2} t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Приклад 1.29

$$\begin{aligned}
 & \blacktriangleright \int \frac{dx}{3 \sin^2 x - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(3 \operatorname{tg}^2 x - 1) \cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{3t^2 - 1} = \\
 & = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - t^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + t}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - t} \right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} \right| + C. \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$6. \quad \int \sin^{2m} x \cos^{2n+1} x dx = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^{2m} x (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^{2m} (1 - t^2)^n dt.$$

$$7. \int \cos^{2m} x \sin^{2n+1} x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int t^{2m} (1 - t^2)^n dt.$$

$$8. \int \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x dx = \{\sin x = t \text{ або } \cos x = t\} = \pm \int t^{2m+1} (1 - t^2)^n dt.$$

Приклад 1.30

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \cos^4 x \sin^3 x dx &= \int \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = \\ &= -\int t^4 (1 - t^2) dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right) + C = \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \blacksquare \end{aligned}$$

$$9. \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right\}.$$

Приклад 1.31

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right] dx = \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(3x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C. \blacksquare \end{aligned}$$

10. Інтеграли виду $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$ беруться за допомогою множення чисельника на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ і наступного почленного ділення чисельника на знаменник.

Приклад 1.32

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \\ &= \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{dt}{1 - t^2} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| - \frac{1}{\sin x} + C. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 1.33

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C. \blacksquare\end{aligned}$$

11. Інтеграли $\int \sin ax \cos bxdx$, $\int \cos ax \cos bxdx$, $\int \sin ax \sin bxdx$ обчислюються за допомогою формул:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x],$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x],$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

Приклад 1.34

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \int \sin 3x \cos 5xdx &= \frac{1}{2} \int (\sin(-2x) + \sin 8x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 8x \right) + C = \frac{1}{16} (4 \cos 2x - \cos 8x) + C. \blacksquare\end{aligned}$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте означення первісної та невизначеного інтеграла.
2. Напишіть основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Напишіть таблицю інтегралів.
4. Як можна перевірити правильність результату інтегрування?
5. Напишіть формулу заміни змінної для невизначеного інтеграла.
6. Напишіть формулу інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.
7. Напишіть інтеграли, для обчислення яких застосовується формула інтегрування частинами.
8. Який вигляд мають елементарні раціональні дроби 1-4 типів?
9. Як інтегруються елементарні дроби 1-3 типів?
10. Перелічіть послідовність дій при інтегруванні функцій, які містять квадратний тричлен.
11. Сформулюйте теорему про розклад многочлена на множники.
12. Сформулюйте теорему про розклад правильного раціонального дроби на елементарні дроби.
13. Напишіть універсальну тригонометричну підстановку.
14. Які підстановки використовуються для обчислення інтегралів?

- 1) $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x dx;$
- 2) $\int \sin^{2m+1} x \cos^n x dx;$
- 3) $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx;$
- 4) $\int R(\operatorname{tg} x) dx?$

ВПРАВИ

1. Знайти інтеграли, результати перевірити диференціюванням.

- | | |
|---|---|
| 1) $\int (4x^2 - x + 2) dx;$ | 2) $\int (x^2 + 1)(3x - 2) dx;$ |
| 3) $\int (1 + 2x^4)^2 dx;$ | 4) $\int \left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x} \right) dx;$ |
| 5) $\int \left(4\cos x - 2^x \cdot e^{3x} + \frac{5}{4 + x^2} \right) dx;$ | 6) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx;$ |
| 7) $\int \frac{2dx}{1 - 4x^2};$ | 8) $\int \frac{5dx}{2 + 3x^2};$ |
| 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}};$ | 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}.$ |

2. Застосувавши вказану підстановку, знайти інтеграли:

- | | |
|--|--|
| 1) $\int x(3x - 2)^9 dx, \quad t = 3x - 2;$ | 2) $\int \sqrt[4]{2 + 5x^3} x^2 dx, \quad t = 2 + 5x^3;$ |
| 3) $\int \frac{xdx}{1 - 4x^2}, \quad t = 1 - 4x^2;$ | 4) $\int \frac{2xdx}{2 + 3x^2}, \quad t = 2 + 3x^2;$ |
| 5) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2 + 3x^2}}, \quad t = 2 + 3x^2;$ | 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - 2x^2}}, \quad t = 1 - 2x^2.$ |

3. За допомогою підстановки знайти:

- | | |
|--|---|
| 1) $\int (1 + 2x)^{10} dx;$ | 2) $\int \sqrt[5]{(5 - 6x)^3} dx;$ |
| 3) $\int \sin(3x + 4) dx;$ | 4) $\int \frac{dx}{2 - 3x};$ |
| 5) $\int e^{2x^2+1} x dx;$ | 6) $\int \frac{dx}{(2x + 1)\ln^3(2x + 1)};$ |
| 7) $\int \frac{\sin 5x dx}{\sqrt{\cos^3 5x}};$ | 8) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x} dx;$ |

$$9) \int \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{1+4x^2} dx;$$

$$10) \int \frac{\arcsin^4 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$$

4. Проінтегрувати частинами:

$$1) \int (x+1)e^{2x} dx;$$

$$2) \int x \cos 3x dx;$$

$$3) \int (x^2 + x + 1) \sin 2x dx;$$

$$4) \int (x^3 + 3x - 1) \ln x dx;$$

$$5) \int x \operatorname{arctg} 2x dx;$$

$$6) \int \arcsin x dx.$$

5. Виділивши повний квадрат, знайти:

$$1) \int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$2) \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 4x - 5};$$

$$3) \int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}};$$

$$4) \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$$

6. Розкласти на елементарні дроби:

$$1) \frac{3x^3 + 2x - 3}{x^3 - x};$$

$$2) \frac{2x + 7}{x^2 + x - 2};$$

$$3) \frac{x}{(1-x)^2(1+x^2)};$$

$$4) \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^3 + 5x}.$$

7. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

$$1) \int \frac{x+1}{(x-4)(x+3)} dx;$$

$$2) \int \frac{(2x+1)dx}{x^2 + 2x + 4};$$

$$3) \int \frac{(x^3 + 1)dx}{x^3 - x^2};$$

$$4) \int \frac{(2x^2 - 3x - 3)dx}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}.$$

8. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

$$1) \int \frac{5x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx;$$

$$2) \int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}+4};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{2x+3} + \sqrt{2x+3}};$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}}.$$

9. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1) \int \cos^2 5x dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin x \cos x}; \quad 3) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos^5 x}} dx; \quad 4) \int \frac{dx}{\cos x + 1}.$$

$$5) \int \sin^2 x \cos^3 x dx; \quad 6) \int \sin^4 2x dx; \quad 7) \int \sin 2x \sin 3x dx; \quad 8) \int \sin^3 3x dx;$$

2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА, ЙОГО ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо довільно цей відрізок на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Візьмемо на кожному з відрізків довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), обчислимо значення функції $f(\xi_i)$ і помножимо його на величину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (рис. 2.1).

Інтегральною сумою для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називається сума

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (2.1)$$

Границя інтегральної суми, знайдена при $n \rightarrow \infty$ за умови, що довжина найбільшого частинного відрізка прямує до нуля, називається *визначенням інтегралом* від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.2)$$

Числа a і b називаються нижньою і верхньою межами інтегрування.

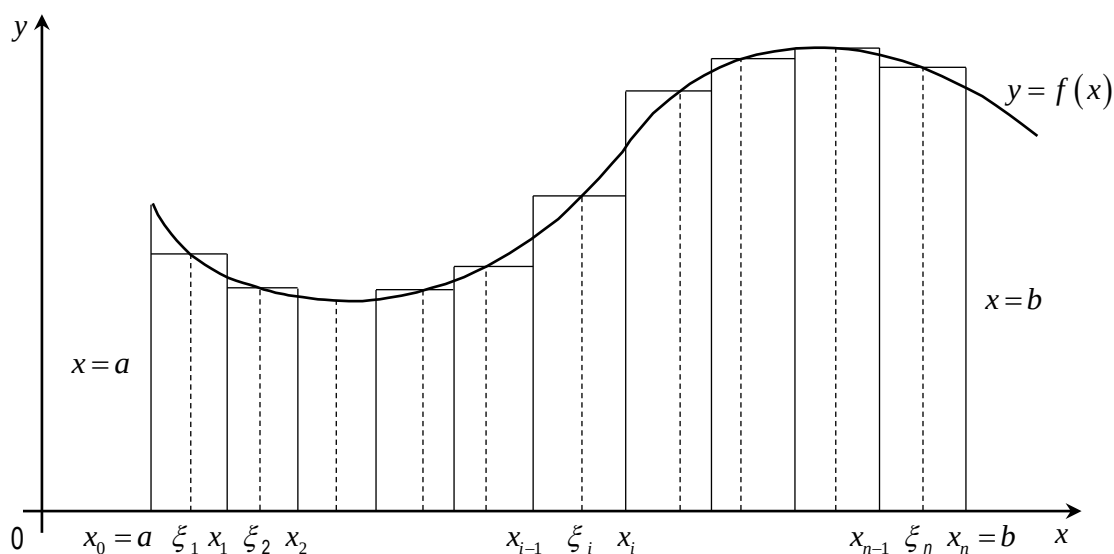


Рис. 2.1

Теорема Коші (достатня умова інтегрованості функції). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox і двома прямими $x = a$, $x = b$). Визначений інтеграл від довільної функції дорівнює алгебраїчній сумі площ, що лежать вище і нижче осі Ox . Площі, що лежать вище осі Ox , ввійдуть у цю суму зі знаком “+”, а площі, що лежать нижче осі Ox , – зі знаком “–”.

Економічний зміст визначеного інтеграла. Якщо $f(x)$ – продуктивність праці у момент часу t , то $\int_0^T f(t)dt$ – обсяг виробленої за проміжок часу $[0, T]$ продукції.

2.2. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

$$1. \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx, \quad A = \text{const.} \quad (2.3)$$

$$2. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx. \quad (2.4)$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx. \quad (2.5)$$

$$4. \int_a^a f(x)dx = 0. \quad (2.6)$$

5. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізках $[a, c]$ і $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (2.7)$$

Геометрична ілюстрація: якщо $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a, b]$ і $a < c < b$, то площа S криволінійної трапеції з основою $[a, b]$ дорівнює сумі площ $S_1 + S_2$ трапецій з основами $[a, c]$ і $[c, b]$ (рис. 2.2).

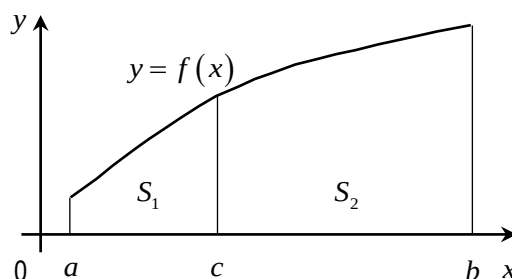


Рис. 2.2

6. Якщо на відрізку $[a, b]$ виконується нерівність $\varphi(x) \leq f(x)$, то

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \quad (a < b). \quad (2.8)$$

Геометрична ілюстрація: площа криволінійної трапеції, обмеженої верхньою кривою $f(x)$, не менше площі, обмеженої нижньою кривою $\varphi(x)$ (рис. 2.3).

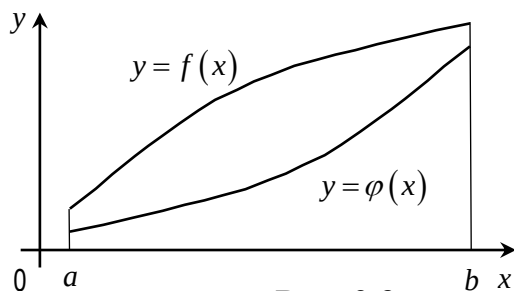


Рис. 2.3

7. Якщо m і M – найменше й найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і $a < b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (2.9)$$

Геометрична ілюстрація: площа S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $f(x)$, не менше площі S_1 прямокутника висотою m і не більше площі S_2 прямокутника висотою M (рис. 2.4).

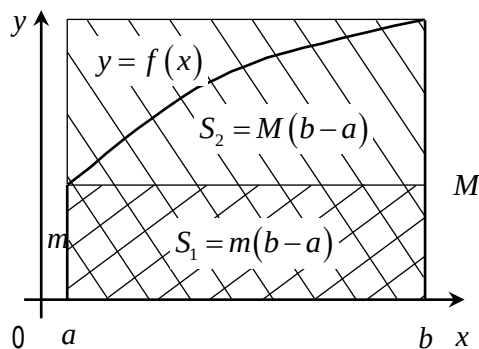


Рис. 2.4

Наслідок. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-a, a]$. Тоді:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{якщо } f(x) \text{ – парна,} \\ 0, & \text{якщо } f(x) \text{ – непарна.} \end{cases}$$

8. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $a < b$, то існує хоча б одна точка $c \in [a, b]$ така, що:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad (2.10)$$

Геометрична ілюстрація: якщо $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a, b]$, то знайдеться така точка $c \in [a, b]$, що площа, обмежена кривою $f(x)$, дорівнюватиме площі прямокутника з висотою $f(c)$ (рис. 2.5).

Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (2.11)$$

називається *середнім значенням* функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

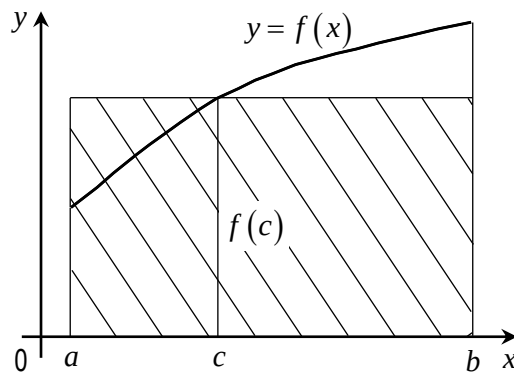


Рис. 2.5

9. Значення визначеного інтеграла не залежить від *позначення* змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt. \quad (2.12)$$

2.3. ДИФЕРЕНЦЮВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ЗІ ЗМІННОЮ ВЕРХНЬОЮ МЕЖЕЮ

Розглянемо інтеграл від неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a, x]$, де a – фіксоване число, а x – змінне:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (2.13)$$

Теорема. Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею дорівнює значенню підінтегральної функції у точці диференціювання:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad (2.14)$$

Теорема існування невизначеного інтеграла. Для будь-якої неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ існує первісна та невизначений інтеграл.

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C \quad (2.15)$$

Формула (2.15) зв'язує невизначений інтеграл із визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею.

2.4. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ – будь-яка її первісна на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2.16)$$

Приклад 2.1

$$\blacktriangleright \int_0^3 \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \Big|_0^3 = \frac{1}{3} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{12}. \blacksquare$$

2.5. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, а функція $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну на відрізку $[\alpha, \beta]$, де $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Крім того, при зміні t від α до β функція $\varphi(t)$ монотонно змінюється від $\varphi(\alpha) = a$ до $\varphi(\beta) = b$. Тоді:

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \begin{array}{ll} x = \varphi(t) & a = \varphi(\alpha) \\ dx = \varphi'(t) dt & b = \varphi(\beta) \end{array} \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (2.17)$$

Приклад 2.2

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_6^9 \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} &= \left\{ \begin{array}{ll} 2x-9=t^2; & \text{при } x=6 \Rightarrow t=\sqrt{3} \\ x=\frac{1}{2}(t^2+9), dx=tdt; & \text{при } x=9 \Rightarrow t=3 \end{array} \right\} = \\ &= 2 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{tdt}{(t^2+9)t} = 2 \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} \Big|_{\sqrt{3}}^3 = \frac{2}{3} \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{18}. \blacksquare \end{aligned}$$

2.6. ФОРМУЛА ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Теорема. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (2.18)$$

Приклад 2.3

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_1^e x \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x dx \\ du = dx/x & v = \int x dx = x^2/2 \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{2} e^2 - 0 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{1}{4} (e^2 + 1). \blacksquare \end{aligned}$$

2.7. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРІЇ

2.7.1. Обчислення площ плоских фігур

Обчислення площ у декартових прямокутних координатах

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $f(x) \geq 0$. Площа криволінійної трапеції – фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 2.6), знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.19)$$

Якщо на відрізку $[a, b]$ функція $f(x) \leq 0$ (рис. 2.7), то площа фігури, обмеженої віссю Ox , кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, обчислюється за формулою

$$S = -\int_a^b f(x) dx. \quad (2.20)$$

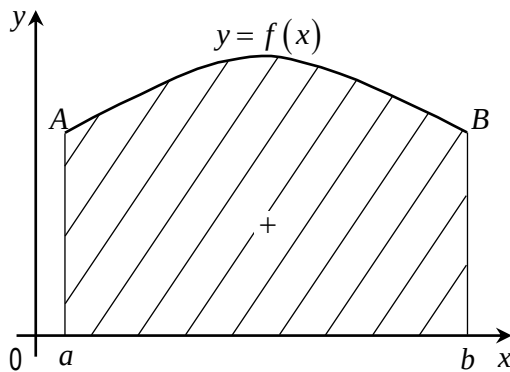


Рис. 2.6

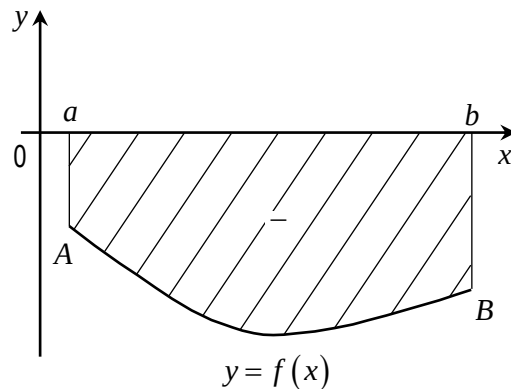


Рис. 2.7

Якщо на $[a, b]$ функція $f(x)$ змінює знак скінченне число разів (рис. 2.8), то площа, обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$, знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (2.21)$$

Наприклад, обчислимо площу фігури, зображеної на рис. 2.8:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{c_1} f(x) dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx. \quad (2.22)$$

Якщо фігура обмежена двома неперервними кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, (рис. 2.9), причому $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всіх $x \in [a, b]$, то площа визначається за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (2.23)$$

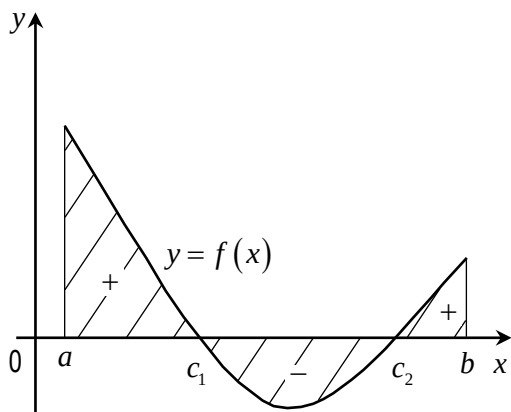


Рис. 2.8

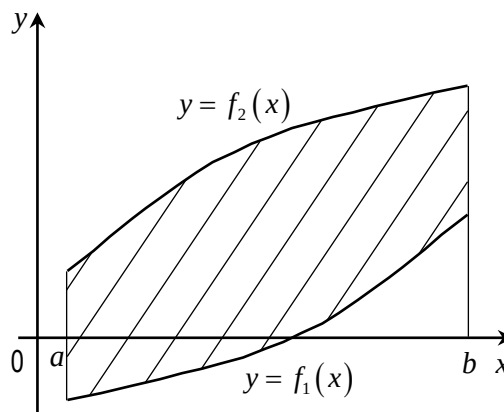


Рис. 2.9

Приклад 2.4. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 2$.

► Знайдемо координати точок перетину параболи і прямої:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ y = x + 2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 4. \end{cases} \Rightarrow M_1(-1, 1), M_2(2, 4).$$

За формулою (2.23) одержуємо:

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (од.}^2\text{)}. \blacksquare$$

Обчислення площі криволінійної трапеції при параметричному заданні рівняння кривої

Площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданої рівняннями в параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta, \quad (2.24)$$

де функція $y(t) \geq 0$ неперервна, а $x(t)$ – неперервно диференційована, обчислюється за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt. \quad (2.25)$$

Зауваження. Нижня межа інтегрування α у формулі (2.25) повинна відповідати лівій точці a , а верхня – правій точці b на осі Ox .

Приклад 2.5. Обчислити площу, обмежену аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (рис. 2.10).

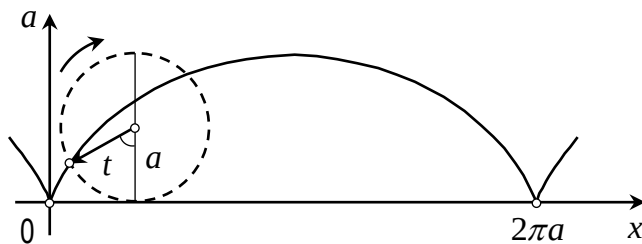


Рис. 2.10. Циклоїда

► За формулою (2.25), де $dx = a(t - \sin t)' dt = a(1 - \cos t) dt$, маємо:

$$\begin{aligned} S &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \right] dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (3 - 4\cos t + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(3t - 4\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Обчислення площ плоских фігур у полярних координатах

Площа криволінійного сектора, обмеженого неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) і двома полярними радіусами, що відповідають значенням полярного кута $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ (рис. 2.11), обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (2.26)$$

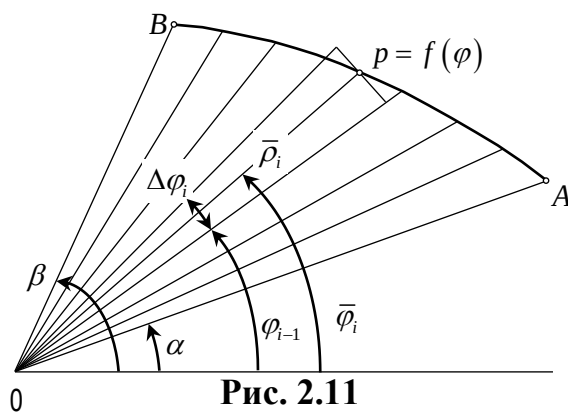


Рис. 2.11

Зауваження. Для замкнутої кривої, що охоплює полюс, полярний кут φ змінюється від 0 до 2π .

Приклад 2.6. Обчислити площу, обмежену кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (рис. 2.12).

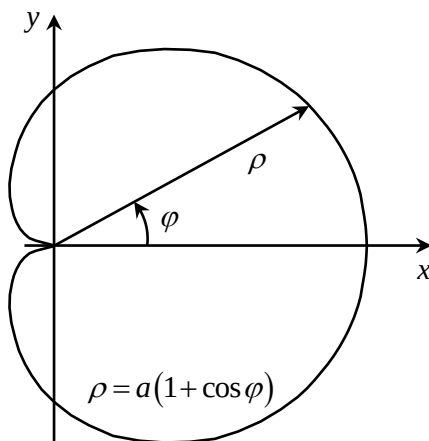


Рис. 2.12. Кардіоїда

► З урахуванням симетрії фігури одержимо за формулою (2.26):

$$\begin{aligned} S &= 2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \left[1 + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \right] d\varphi = \frac{1}{2} (3\varphi + 4 \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi. \blacksquare \end{aligned}$$

2.7.2. Обчислення довжини дуги кривої

Обчислення довжини дуги кривої у декартових координатах

Нехай на відрізку $[a, b]$ плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна разом із похідною функція. Тоді довжина дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2.27)$$

Приклад 2.7. Обчислити довжину дуги лінії $y = 2(e^{x/4} + e^{-x/4})$ на відрізку $[0; 4]$.

► Перетворимо вираз під знаком кореня у формулі (2.27):

$$y' = (e^{x/4} - e^{-x/4})/2, \quad 1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{x/4} - e^{-x/4})^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{x/2} - 2 + e^{-x/2}) = \frac{1}{4}(e^{x/2} + 2 + e^{-x/2}) = \left[\frac{1}{2}(e^{x/4} + e^{-x/4}) \right]^2.$$

Довжину дуги обчислюємо за формулою (2.27):

$$l = \frac{1}{2} \int_0^4 (e^{x/4} + e^{-x/4}) dx = 2 \left(e^{x/4} - e^{-x/4} \right) \Big|_0^4 = 2(e - e^{-1}). \blacksquare$$

Обчислення довжини дуги кривої, заданої параметричними рівняннями

Довжина дуги *плоскої* кривої, заданої параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad (2.28)$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні на $[\alpha, \beta]$ функції, що мають неперервні похідні, обчислюється за формулою (2.29).

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (2.29)$$

Довжина дуги *просторової* лінії, заданої параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$, де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – неперервно диференційовані на $[\alpha, \beta]$ функції, обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (2.30)$$

Приклад 2.8. Обчислити довжину дуги лінії

$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \quad y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

► Знайдемо підінтегральну функцію та обчислимо за формулою (2.29) довжину дуги:

$$x'(t) = 2t \sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t \sin t = t^2 \cos t,$$

$$y'(t) = -2t \cos t - (2 - t^2)\sin t + 2\sin t + 2t \cos t = t^2 \sin t.$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} = t^2, \Rightarrow l = \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}. \blacksquare$$

Приклад 2.9. Обчислити довжину арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (див. рис. 2.11).

► Обчислюючи похідні $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$ і підставляючи їх у формулу (2.29), знаходимо

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a. \blacksquare \end{aligned}$$

Обчислення довжини дуги кривої у полярних координатах

Довжина дуги кривої, заданої рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), де $\rho(\varphi)$ і $\rho'(\varphi)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$, обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi. \quad (2.31)$$

Приклад 2.10. Знайти довжину кола $\rho = a \cos \varphi$ (рис. 2.13).

► Унаслідок симетрії кривої досить обчислити довжину верхньої половини кола і подвоїти результат.

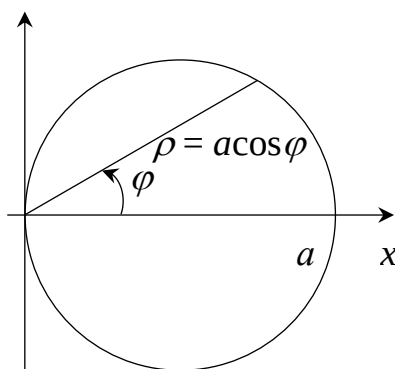


Рис. 2.13. Коло

За формулою (2.31) маємо:

$$l = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi/2} d\varphi = 2a\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \pi a. \blacksquare$$

Приклад 2.11. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (див. рис. 2.12).

► Унаслідок симетрії кривої досить обчислити довжину верхньої половини кардіоїди і подвоїти результат.

За формулою (2.31) маємо:

$$\begin{aligned}
 l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 (1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \\
 &= 4a \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a. \blacksquare
 \end{aligned}$$

2.7.3. Обчислення об'ємів тіл

Обчислення об'єму тіла за відомими площами паралельних перерізів

Нехай площа перерізу деякого тіла площиною, перпендикулярною до осі ox , подана у вигляді $S = S(x)$, де $x \in [a, b]$. Тоді об'єм частини тіла, укладеної між площинами $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (2.32)$$

Приклад 2.12. Обчислити об'єм еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 2.14).

► У перерізі еліпсоїда площиною $x = \text{const}$ ($a \leq x \leq b$) вийде еліпс із півосями: $b_1 = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $c_1 = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

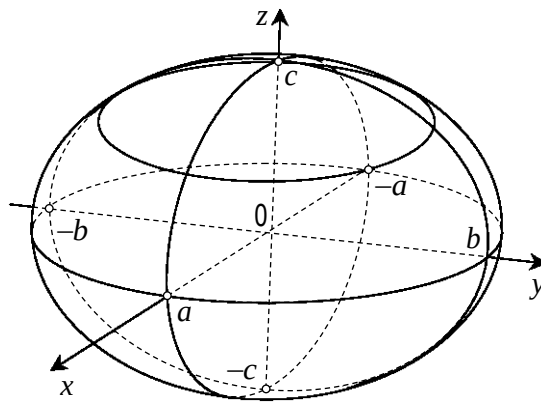


Рис. 2.14. Еліпсоїд

Площа еліпса:

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc \left(1 - x^2/a^2\right).$$

Об'єм еліпсоїда обчислимо за формулою (2.32):

$$V = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc \text{ (од.}^3\text{)}. \quad (2.33)$$

При $b = c$ із формули (2.33) одержимо об'єм еліпсоїда обертання

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2. \quad (2.34)$$

При $a = b = c = R$ із формули (2.34) одержуємо *об'єм кулі*

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \blacksquare \quad (2.35)$$

Обчислення об'єму тіла обертання

Об'єм тіла, утвореного обертанням *навколо осі* Ox криволінійної трапеції, обмеженої неперервною на відріжку $[a, b]$ кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2.36)$$

Приклад 2.13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$ і $y = 0$, $x \in [0; \pi]$.

► Застосовуючи формулу (2.18), одержимо:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}. \blacksquare$$

Зауваження. Якщо крива задана параметричними рівняннями (2.28), то об'єм тіла обертання навколо осі Ox обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t) x'(t) dt. \quad (2.37)$$

Приклад 2.14. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (див. рис. 2.11).

► Об'єм обчислимо за формулою (2.37):

$$\begin{aligned} V &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (t - \sin t)' dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - (1 - \sin^2 t)\cos t \right] dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 4\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin^2 t \cdot \cos t \right) dt = \end{aligned}$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3. \blacksquare$$

Зауваження. Якщо криволінійна трапеція, що обмежена неперервною кривою $x = \varphi(y)$, віссю Oy і прямими $y = c$, $y = d$, обертається *навколо осі* Oy , то об'єм отриманого тіла обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (2.38)$$

2.8. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА В ЕКОНОМІЦІ

1. Нехай V , D і P – функції відповідно витрат, доходу та прибутку, які залежать від кількості x виробленої продукції або від часу t її виробництва, а V' , D' і P' – функції маргінальних витрат, доходу та прибутку відповідно.

Тоді зміни вказаних величин при зростанні виробництва продукції від a одиниць до b обчислюють за формулами:

$$\int_a^b V'(x) dx = V(b) - V(a),$$

$$\int_a^b D'(x) dx = D(b) - D(a), \quad \int_a^b P'(x) dx = P(b) - P(a).$$

Приклад 2.15. Якщо функція маргінальних витрат виробництва x одиниць продукції за певний час має вигляд $V'(x) = 10 - 0,01x$, то зростання витрат виробництва (у гривнях) при збільшенні випуску продукції від 100 до 200 одиниць обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \int_{100}^{200} V'(x) dx &= \int_{100}^{200} (10 - 0,01x) dx = \\ &= \left(10x - 0,005x^2 \right) \Big|_{100}^{200} = 850 \text{ (грн.)}. \end{aligned}$$

2. Якщо $V(t)$, $D(t)$ і $P(t)$ – вказані вище функції, які змінюються з часом t , то $P(t) = D(t) - V(t)$, і загальний прибуток за час T обчислюють за формулою

$$P(T) = \int_0^T P'(t) dt = \int_0^T (D'(t) - V'(t)) dt.$$

3. Коефіцієнт нерівномірності розподілу доходу. Нехай функція $y = f(x)$ описує залежність частки сукупного доходу y , одержаної частиною x усього населення, її графік називають кривою Лоренца (рис. 2.15). Якщо при $x = 0,2$ маємо $y = 0,6$, то це означає, що 20 % населення володіють 60 % загального доходу країни. При рівномірному (досконалому) розподілі доходів крива Лоренца вироджується у пряму – бісектрису OA .

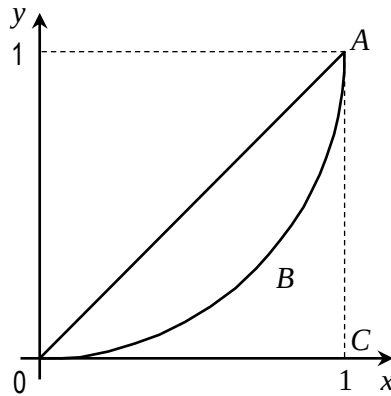


Рис. 2.15

Тому відношення L площі фігури S_2 між бісектрисою OA і кривою Лоренца до площі S_1 трикутника OAC характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів населення. При цьому L називають *коефіцієнтом нерівномірності розподілу доходів*, коефіцієнтом Лоренца, або коефіцієнтом Джіні і обчислюють за формулою

$$L = \frac{S_2}{S_1} = 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx.$$

Очевидно, що $0 \leq L \leq 1$. Значення $L = 0$ відповідає досконалому розподілу доходів.

Приклад 2.16. За даними дослідження розподілу доходів певної держави крива Лоренца описується рівнянням $y = 0,9x^2 + 0,1x$. Тоді коефіцієнт Лоренца-Джіні

$$L = 2 \int_0^1 (x - 0,9x^2 - 0,1x) dx = 2 \int_0^1 (0,9x - 0,9x^2) dx = 1,8 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 0,3.$$

Часто коефіцієнтом L характеризують нерівномірний розподіл прибуткового податку, якщо вважати, що функція y є частиною загального прибуткового податку і пропорційна частині x усього населення держави, тобто $y = kx$.

4. Якщо функція $f(x)$ дорівнює прибутку за час t , а $r\%$ – номінальна облікова щорічна ставка, то реальне значення загального прибутку P за час між $t = 0$ та $t = T$ становить

$$P = \int_0^T f(t) e^{-rt/100} dt.$$

Приклад 2.17. Якщо компанія вкладе 10 млн. грн. у нове обладнання і щороку отримуватиме 1 млн. грн. прибутку протягом 5 років, а номінальна облікова щорічна ставка становитиме 5 %, то реальне значення прибутку

$$P = \int_0^5 1 \cdot e^{-0,05t} dt - 10 = -20e^{-0,05t} \Big|_0^5 - 10 = 9,22 \text{ млн. грн.}$$

5. **Зміна капіталу.** Якщо $I(t)$ – швидкість зміни інвестицій, $A(t)$ – капітал підприємства, то $I(t) = A'(t)$. Знаючи швидкість зміни інвестицій, можна знайти зміну капіталу за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$ за формулою

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

Приклад 2.18. Знайти середнє значення витрат $f(x) = x^2 + 2x + 4$, якщо обсяг продукції x змінюється від 5 до 10 одиниць.

► Середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ обчислюється за формулою (2.11):

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{5} \int_5^{10} (x^2 + 2x + 4) dx = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 + 4x \right) \Big|_5^{10} = 56,$$

тобто середнє значення витрат дорівнює 56. ■

Приклад 2.19. Знайти обсяг продукції V , виробленої за проміжок часу $t \in [0; 10]$, якщо продуктивність праці задана функцією $f(t) = \frac{2}{t+1} + 5$.

► Якщо $f(t)$ – продуктивність праці у момент часу t , то обсяг виробленої за проміжок часу $[t_1, t_2]$ продукції обчислюється за формулою

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_0^{10} \left(\frac{2}{t+1} + 5 \right) dt = (2 \ln|t+1| + 5t) \Big|_0^{10} = 2 \ln 11 + 50 \approx 54,8. \quad \blacksquare$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте означення визначеного інтеграла, його геометричний та економічний зміст.
2. Перелічіть властивості визначеного інтеграла.
3. Чому дорівнює похідна інтеграла зі змінною верхньою межею?
4. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Запишіть формулу заміни змінної для визначеного інтеграла.
6. Запишіть формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла.
7. За якими формулами обчислюється площа плоскої фігури?
8. За якою формулою обчислюється об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі Ox (Oy)?
9. За якими формулами обчислюється довжина дуги плоскої кривої?
10. Наведіть приклади застосування визначеного інтеграла в економіці.

ВПРАВИ

1. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx;$

2) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$

3) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4}};$

4) $\int_0^6 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+4}};$

5) $\int_0^{\pi} x \cos x dx;$

6) $\int_1^e \ln x dx.$

2. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

1) $y = 6x - x^2, y = 0;$

2) $y = \cos x, y = \sin x, x \in [0; \pi/4];$

3) $y = x^2, y = \sqrt{x};$

4) $y = \sqrt{x}, x + y = 2;$

5) $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} y = 0;$

6) $\rho = a \cos 3\varphi.$

3. Обчислити довжину дуги:

1) $y^2 = x^3, x \in [0; 4];$

2) $y = 2\sqrt{x}, x \in [1; 2];$

3) $\rho = a \sin \varphi;$

4) $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} t \in [0; \pi].$

4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

$$1) y = \operatorname{tg} x, y = 0, x = 0, x = \pi/4; \quad 2) y = 4x - x^2, y = 0.$$

5. Задані функції маргінальних витрат виробництва $V'(x)$ і маргінального доходу $D'(x)$ від реалізації x одиниць продукції. Знайти зростання загальних витрат виробництва та доходу при збільшенні випуску продукції від x_1 до x_2 одиниць, а також середні значення витрат і доходу.

- 1) $V'(x) = 50 - 0,04x$, $x_1 = 100$, $x_2 = 300$;
- 2) $V'(x) = 1000 - 0,02x$, $x_1 = 100$, $x_2 = 200$;
- 3) $D'(x) = 100 - 0,06x$, $x_1 = 100$, $x_2 = 400$;
- 4) $D'(x) = 1000 - 0,08x$, $x_1 = 100$, $x_2 = 600$.

6. Для заданого рівняння кривої Лоренца $y = f(x)$ знайти коефіцієнт L нерівномірності розподілу доходів громадян держави (коефіцієнт Лоренца):

- 1) $y = 0,75x^2 + 0,125x$;
- 2) $y = 0,6x^2 + 0,4x$;
- 3) $y = 0,4x^2 + 0,6x$;
- 4) $y = 0,5x^2 + 0,5x$.

7. Знайти загальний прибуток фірми $P(T)$ за час T , якщо відомі швидкості зміни з часом витрат $V'(t)$ і прибутку $D'(t)$:

- 1) $V'(t) = 5 + t^{2/3}$, $D'(t) = 25 - t^{2/3}$;
- 2) $V'(t) = 8 + t^{1/3}$, $D'(t) = 30 - t^{1/3}$.

8. Продуктивність праці протягом робочого дня визначається функцією $f(t) = 75 + 10t - 3t^2$, де t – час у годинах. Знайти кількість виробленої продукції за 4 години; за 8 годин.

9. Знайти обсяг продукції V , виробленої за проміжок часу T , якщо продуктивність праці задана функцією $f(t)$:

- 1) $f(t) = 2 + \frac{1}{t^2 + 1}$, $T = 10$;
- 2) $f(t) = 4t + \frac{t}{t^2 + 1}$, $T = 5$;
- 3) $f(t) = 3t^2 - \frac{1}{8}e^t$, $T = 3$;
- 4) $f(t) = 10 + \frac{t^2}{t^3 + 1}$, $T = 4$.

10. Знайти зміну капіталу ΔA за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$, якщо відома швидкість зміни інвестицій $I(t)$:

- 1) $I(t) = 1 - e^{-t}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$;
- 2) $I(t) = te^{-t}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$;
- 3) $I(t) = 2 - \frac{1}{t^2 + 1}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$;
- 4) $I(t) = \frac{4}{(t+1)^2}$, $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

2.9. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласними інтегралами називаються:

- 1) інтеграли з нескінченними межами інтегрування;
- 2) інтеграли від необмежених функцій.

2.9.1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Нехай функція $f(x)$ неперервна при $a \leq x < \infty$. Тоді інтеграл зі змінною верхньою межею

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx \quad (2.39)$$

є неперервною функцією верхньої межі b (рис. 2.16). Розглянемо питання про поведінку цього інтеграла при $b \rightarrow \infty$.

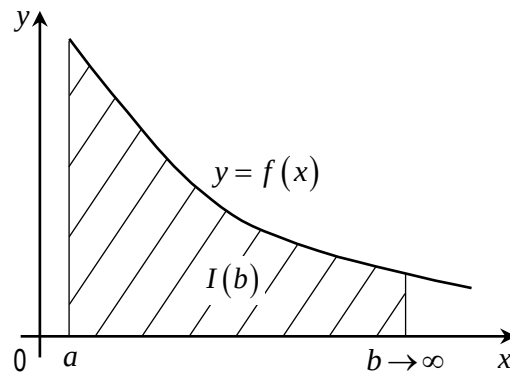


Рис. 2.16

Якщо існує *скінченна* границя

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (2.40)$$

то її називають *невласним інтегралом першого роду* від функції $f(x)$ на інтервалі $[a; \infty)$ і позначають так:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (2.41)$$

При цьому кажуть, що невластний інтеграл *збігається*. Якщо границя (2.40) не існує або нескінченна, то кажуть, що невластний інтеграл *розбігається*.

Геометричний зміст невласного інтеграла першого роду. Якщо $f(x) \geq 0$, то невласний інтеграл (2.41) чисельно дорівнює площі нескінченної області, що розташована між лініями $y = f(x)$, $x = a$ і віссю Ox .

Аналогічно визначаються невласні інтеграли для інтервалів $(-\infty; b)$, $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (2.42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad (2.43)$$

де c – довільна фіксована точка осі Ox . Якщо *кожен* із невласних інтегралів у правій частині рівності (2.43) існує, то існує й інтеграл, що стоїть ліворуч.

Приклад 2.20

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\operatorname{arctg} \frac{b+1}{2} - \operatorname{arctg} 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл збігається. ■

Приклад 2.21

$$\blacktriangleright \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b \frac{d \ln x}{\ln x} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_e^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln e)) = +\infty.$$

Інтеграл розбігається. ■

Приклад 2.22. Для різних значень параметра p дослідити збіжність інтег-

рала $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

► Припустимо, що $p \neq 1$. Тоді:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-p} - 1) = \begin{cases} \frac{-1}{1-p}, & \text{якщо } p > 1, \\ \infty, & \text{якщо } p < 1. \end{cases}$$

При $p = 1$ маємо

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Висновок: даний інтеграл збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$. ■

Якщо обчислити первісну для $f(x)$ важко, то існують ознаки, що дозволяють вирішити питання про збіжність чи розбіжність невластного інтеграла.

Ознаки порівняння для невластних інтегралів першого роду

Теорема 1. Нехай для всіх $x \geq a$ виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Тоді:

- 1) якщо інтеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$, причому $\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x) dx$;
- 2) якщо інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ розбігається, то й інтеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ розбігається

Якщо підінтегральна функція змінює знак, то застосовують таку ознаку збіжності.

Теорема 2. Якщо збігається інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$, то збігається й інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$, який у цьому випадку називається абсолютно збіжним

Якщо інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ розбігається, то перший інтеграл називається умовно збіжним.

Приклад 2.23. Дослідити збіжність інтеграла $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

► Це один з інтегралів, що не беруться в елементарних функціях.

При $x \geq 1$ виконується нерівність $0 < \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$. Обчислимо інтеграл

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-b} + e^{-1} \right) = e^{-1}.$$

Оскільки інтеграл $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ збігається, то за теоремою 1 збігається й інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx, \text{ причому його значення не перевищує } 1/e. \blacksquare$$

Приклад 2.24. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin bx dx$.

► Підінтегральна функція знакозмінна. При $x \geq 0$ виконується нерівність $|e^{-x} \sin bx| \leq e^{-x}$. Оскільки інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ збігається (приклад 2.23), то за теоремою 1 збігається й інтеграл $\int_0^{\infty} |e^{-x} \sin bx| dx$, але тоді на підставі теореми 2 абсолютно збігається й інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin bx dx$. ■

Зауваження. Теореми 1, 2 виконуються і для невластних інтегралів по інтервалах $(-\infty; b)$, $(-\infty; +\infty)$.

2.9.2. Інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a; b)$, а при $x=b$ або не визначена, або перетворюється на нескінченність (рис. 2.17). Невласний інтеграл другого роду визначається таким способом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (2.44)$$

Якщо існує границя, що стоїть праворуч, то невластний інтеграл називається *збіжним*, в іншому разі він називається *розбіжним*.

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x=a$, то за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (2.45)$$

Якщо функція $f(x)$ розривна в точці $x=c$ (рис. 2.18), то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \quad (2.46)$$

Якщо *обидві* границі в правій частині формули (2.46) існують і скінченні, то інтеграл називають *збіжним*, інакше – *розбіжним*.

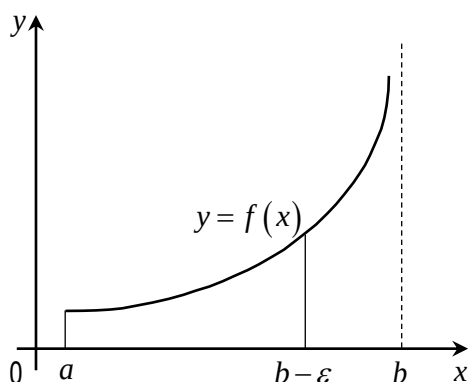


Рис. 2.17

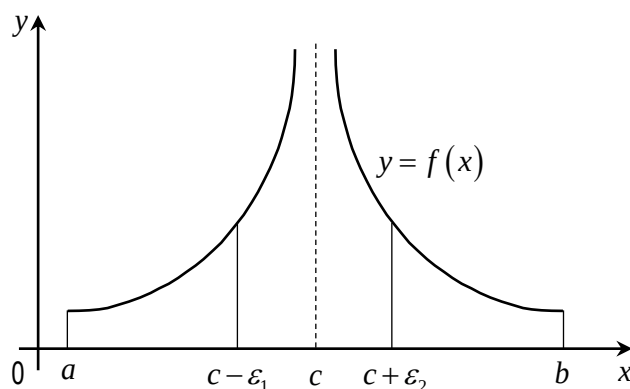


Рис. 2.18

Приклад 2.25

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1 - x^2, \text{ при } x=0 \quad t=1 \\ dt = -2x dx, \text{ при } x=1-\varepsilon \quad t=2\varepsilon - \varepsilon^2 \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2\varepsilon - \varepsilon^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{t} \Big|_1^{2\varepsilon - \varepsilon^2} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} - 1) = 1. \end{aligned}$$

Інтеграл збігається. ■

Приклад 2.26

$$\blacktriangleright \int_1^2 \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} \right) = +\infty.$$

Інтеграл розбігається. ■

Приклад 2.27

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} x^{-2/5} dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon_2}^1 x^{-2/5} dx = \frac{5}{3} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} x^{3/5} \Big|_{-1}^{0-\varepsilon_1} + \\ &+ \frac{5}{3} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} x^{3/5} \Big|_{\varepsilon_2}^1 = \frac{5}{3} \left\{ \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [(-\varepsilon_1)^{3/5} + 1] + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [1 - \varepsilon_2^{3/5}] \right\} = \frac{5}{3} (1+1) = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Інтеграл збігається. ■

Для невластних інтегралів другого роду застосовують ознаки порівняння, аналогічні ознакам порівняння для інтегралів першого роду.

Ознаки порівняння для невластних інтегралів другого роду

Теорема 3. Нехай при $x \in [a; b)$ виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, а при $x=b$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають розрив. Тоді:

- 1) якщо $\int_a^b \varphi(x) dx$ збігається, то $\int_a^b f(x) dx$ також збігається;
- 2) якщо $\int_a^b f(x) dx$ розбігається, то $\int_a^b \varphi(x) dx$ також розбігається

Якщо підінтегральна функція змінює знак, то застосовують теорему 4.

Теорема 4. Нехай $f(x)$ знакозмінна на $[a; b)$ і розривна в точці b . Тоді якщо збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)| dx$, то збігається й інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, який називається абсолютно збіжним

Зауваження. Аналогічні теореми можна сформулювати і для невластних інтегралів (2.45), (2.46).

Приклад 2.28. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} dx$.

► Підінтегральна функція має розрив при $x=0$. На інтервалі $(0; 1]$ виконується нерівність $e^{-x^2}/\sqrt{x} < 1/\sqrt{x}$. Обчислимо інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Оскільки інтеграл збігається, то за теоремою 3 збігається і даний інтеграл. ■

Приклад 2.29. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^1 \frac{\sin 4x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

► Підінтегральна функція знакозмінна і має розрив при $x=1$, тому для дослідження збіжності інтеграла скористаємося теоремою 4. На інтервалі $[0; 1)$ ви-

конується нерівність: $\left| \frac{\sin 4x}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Обчислимо невластний інтеграл від більшої функції.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки цей інтеграл існує, то за теоремою 3 існує і невластний інтеграл від меншої функції, тобто $\int_0^1 \left| \frac{\sin 4x}{\sqrt{1-x^2}} \right| dx$ теж існує, але тоді за теоремою 4 існує й інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin 4x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, який є абсолютно збіжним. ■

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які інтеграли називаються невластними?
2. Сформулюйте означення невластних інтегралів першого та другого родів.
3. В якому випадку невластні інтеграли називаються збіжними (розбіжними)?
4. Який геометричний зміст збіжного невластного інтеграла першого (другого) роду?
5. Сформулюйте ознаки порівняння для невластних інтегралів першого роду.
6. Сформулюйте ознаки порівняння для невластних інтегралів другого роду.

ВПРАВИ

1. Знайти площу, обмежену кривою $y = xe^{-x^2}$ ($x \geq 0$) і віссю Ox .

2. Знайти площу, обмежену кривою $y = 1/\sqrt{1-x^2}$, її вертикальними асимптотами і віссю Ox .
3. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

- | | |
|---|--|
| 1) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2};$ | 2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2};$ |
| 3) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx;$ | 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx;$ |
| 5) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{- x } dx;$ | 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x dx;$ |
| 7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10};$ | 8) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$ |
| 9) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx;$ | 10) $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx;$ |
| 11) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$ | 12) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln x};$ |
| 13) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx;$ | 14) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}};$ |
| 15) $\int_{1/2}^1 \frac{\sin 8x dx}{\sqrt{1-x^2}};$ | 16) $\int_0^1 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x-1}}.$ |

2.10. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Нехай у замкненій обмеженій області D площини xOy задана *неперервна* функція $z = f(x, y)$.

Розіб'ємо область D на n областей D_i довільної форми із площами ΔS_i ($i = \overline{1, n}$) (рис. 2.19). *Діаметром* d_i області D_i називається довжина найбільшої з хорд, що з'єднує точки її межі.

У кожній з областей D_i (усередині чи на її межі) візьмемо довільну точку $P_i(x_i, y_i)$ і складемо суму

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i, \quad (2.47)$$

яка називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ в області D .

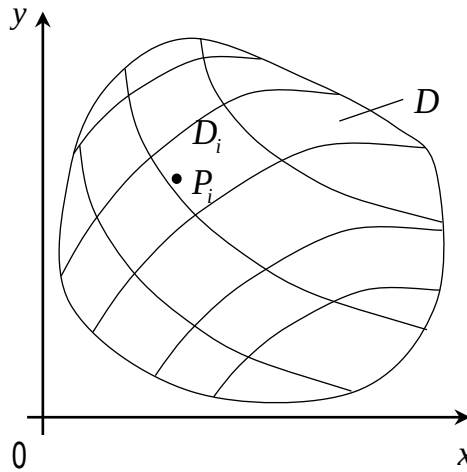


Рис. 2.19

Якщо існує границя послідовності інтегральних сум (2.47) при $n \rightarrow \infty$ і $\max d_i \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття області D на елементарні підобласті й вибору точок P_i , то вона називається *подвійним інтегралом* і позначається так:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(P) dS \quad \text{чи} \quad \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \iint_D f(x, y) dS. \quad (2.48)$$

Область D називається *областю інтегрування*, x, y – змінними інтегрування, $f(x, y)$ – підінтегральною функцією, $f(x, y) ds$ – підінтегральним виразом.

Теорема (перша достатня ознака існування подвійного інтеграла). Якщо $f(x, y)$ – неперервна в замкненій обмеженій області D із кусково-гладкою межею, то подвійний інтеграл (2.48) існує

Геометричний зміст подвійного інтеграла

Інтегральна сума (2.47) при $f(x, y) \geq 0$ являє собою суму об'ємів циліндрів з основами ΔS_i й висотами $f(P_i)$. Тому при $f(x, y) \geq 0$ подвійний інтеграл (2.48) чисельно дорівнює *об'єму тіла*, обмеженого поверхнею $z = f(x, y)$, площиною $z = 0$ і циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz , а прямою є межа L області D (рис. 2.20).

Якщо функція $f(x, y)$ змінює знак в області D , то подвійний інтеграл (2.48) дорівнює алгебраїчній сумі об'ємів, що лежать вище й нижче площини $z = 0$.

Зауваження. Якщо в (2.48) покласти $f(P) = 1$, то одержимо вираз *площі* плоскої області D через подвійний інтеграл:

$$S = \iint_D ds = \iint_D dx dy. \quad (2.49)$$

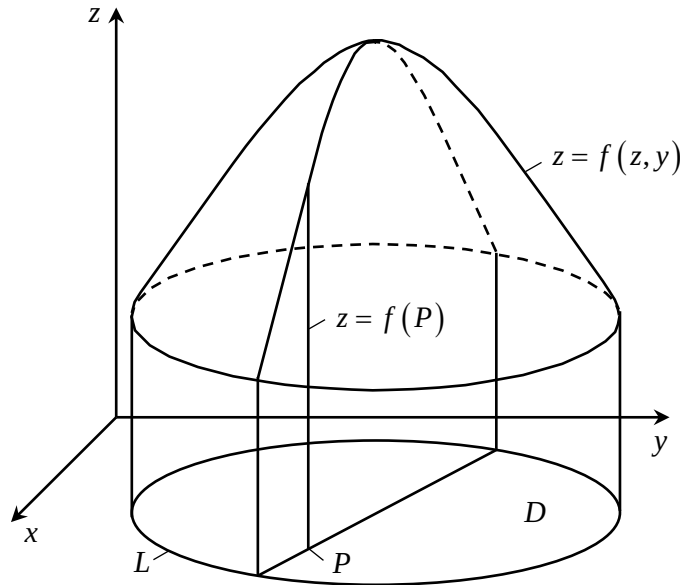


Рис. 2.20

Властивості подвійного інтеграла

$$1. \iint_D A f(x, y) ds = A \iint_D f(x, y) ds, \quad A = \text{const.} \quad (2.50)$$

$$2. \iint_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] ds = \iint_D f_1(x, y) ds \pm \iint_D f_2(x, y) ds. \quad (2.51)$$

3. Якщо область D розбита на дві області D_1 і D_2 без спільних внутрішніх точок і функція $f(x, y)$ неперервна в області D , то

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds. \quad (2.52)$$

4. Якщо $f(x, y) \geq 0$ усюди в D , то

$$\iint_D f(x, y) ds \geq 0. \quad (2.53)$$

5. Якщо $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ усюди в D , то

$$\iint_D f_1(x, y) ds \leq \iint_D f_2(x, y) ds. \quad (2.54)$$

6. Якщо інтегрована в області D функція $f(x, y)$ задовольняє нерівності:
 $m \leq f(x, y) \leq M$, то

$$mS_D \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS_D. \quad (2.55)$$

7. Теорема про середнє значення подвійного інтеграла. Подвійний інтеграл від неперервної функції $f(x, y)$ по області D дорівнює добутку площі S області D на значення функції f у деякій точці $P \in D$:

$$\iint_D f(x, y) ds = S \cdot f(P), \text{ де } P \in D \quad (2.56)$$

8. Якщо функція $f(x, y)$ інтегрована в області D , то в цій області інтегрована і функція $|f(x, y)|$, і виконується нерівність:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad (2.57)$$

9. Подвійний інтеграл по області D не залежить від позначення змінних інтегрування:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.58)$$

Обчислення подвійного інтеграла

Область D називається *правильною (опуклою) в напрямку осі Oy (Ox)*, якщо будь-яка пряма, що паралельна осі Oy (Ox), перетинає границю області не більш ніж у двох точках. Область, правильна й у напрямку осі Ox , і в напрямку Oy , називається *правильною (опуклою) областю*.

На рис. 2.21 зображена область D , правильна в напрямку осі Oy , але неправильна в напрямку осі Ox , а на рис. 2.22 – область D , правильна в напрямку осі Ox , але неправильна в напрямку осі Oy .

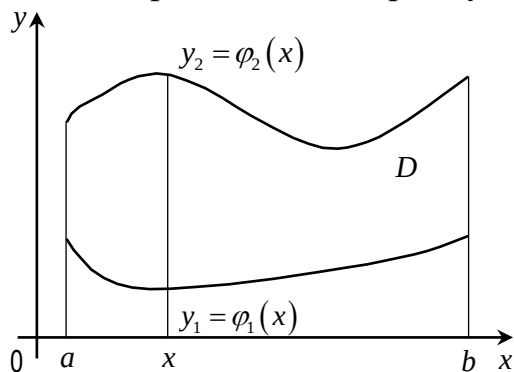


Рис. 2.21

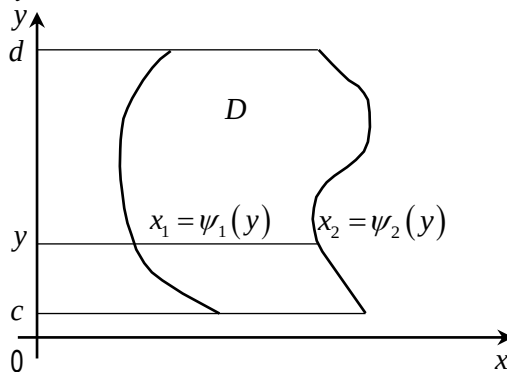


Рис. 2.22

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двох простих інтегралів.

Якщо область D правильна в напрямку осі Oy , то вона визначається системою нерівностей: $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, і подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2.59)$$

Якщо область D правильна в напрямку осі Ox , то вона визначається системою таких нерівностей: $c \leq y \leq d$, $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, і подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2.60)$$

Інтеграли у правих частинах формул (2.59), (2.60) називаються *двократними (повторними)* інтегралами.

Порядок обчислення подвійного інтеграла. Обчислення повторного інтеграла починається з обчислення *внутрішнього* інтеграла. Якщо перше інтегрування проводиться по змінній y , то x вважається сталою, а межі y_1 і y_2 є функціями від x і навпаки.

Нехай область D правильна у напрямку осі Oy (див. рис. 2.21).

1. Знайти рівняння $y_1 = \varphi_1(x)$ нижньої частини межі (нижня межа інтегрування внутрішнього інтеграла) і рівняння $y_2 = \varphi_2(x)$ верхньої частини межі (верхня межа внутрішнього інтеграла).
2. Знайти крайні ліву (a) й праву (b) точки проєкції на вісь Ox області D – нижню й верхню межі зовнішнього інтеграла і записати повторний інтеграл (2.59).
3. Обчислити внутрішній інтеграл по y , вважаючи $x = \text{const}$, потім замість y підставити верхню межу і відняти значення первісної, в який замість y підставлена нижня межа. У результаті утвориться функція, що залежить тільки від x , яку слід проінтегрувати по x від a до b .

Приклад 2.30. Обчислити $\iint_D (x - y) dx dy$, де область D обмежена лініями:

$$y = x + 2, y = x^2.$$

► Координати точок перетину параболи $y = x^2$ і прямої $y = x + 2$ знайдені у прикладі 2.4: $M_1(-1, 1)$, $M_2(2, 4)$.

Зведемо подвійний інтеграл до повторного. Область D є правильною, однак внутрішній інтеграл зручно обчислювати за змінною y .

$$\begin{aligned}
\iint_D (x-y) dx dy &= \int_{-1}^4 dx \int_{x^2}^{x+2} (x-y) dy = \int_{-1}^4 dx \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{x+2} = \\
&= \int_{-1}^4 \left[x(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)^2 - x \cdot x^2 + \frac{1}{2}x^4 \right] dx = \\
&= \int_{-1}^4 \left[x^2 + 2x - \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) - x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right] dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^4 (x^4 - 2x^3 + x^2 - 4) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x \right) \Big|_{-1}^4 = \frac{475}{12}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Зауваження 1. Якщо область D не є правильною ні в напрямку Ox , ні в напрямку Oy , то її розбивають на кілька правильних областей $D_1, D_2, \dots, D_n$, обчислюють подвійні інтеграли по кожній з цих областей, а потім сумують результати.

Зауваження 2. Вираз $ds = dx dy$ називається елементом площі в прямокутних координатах.

Зауваження 3. Якщо D – прямокутник із сторонами, паралельними координатним осям, обмежений прямими $x=a$, $x=b$, $y=\alpha$, $y=\beta$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Приклад 2.31. Обчислити $\iint_D (x+y^2) dx dy$, де область D обмежена прямими:

$$x=0, \quad x=1, \quad y=0, \quad y=2.$$

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \iint_D (x+y^2) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^2 (x+y^2) dy = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 dx = \int_0^1 \left(2x + \frac{8}{3} \right) dx = \\
&= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}x \right) \Big|_0^1 = 1^2 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}. \blacksquare
\end{aligned}$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте означення подвійного інтеграла, його геометричний зміст.
2. Перелічіть властивості подвійного інтеграла.
3. Яка область називається правильною в напрямку осі Oy (Ox), правильною?
4. Якими формулами зв'язані подвійний і повторні інтеграли?
5. Як визначаються межі повторного інтеграла, як він обчислюється?
6. Як обчислюється площа плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла?

ВПРАВИ

1. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$1) \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy;$$

$$2) \int_0^3 dy \int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x, y) dx.$$

2. Перейти від подвійного інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ до повторного, знайти межі інтегрування, якщо область інтегрування D обмежена лініями:

$$1) y = 1 + (x/2), y = 7 - x, x = 0; \quad 2) y = x^2, y = 2 - x^2;$$

$$3) y = \sqrt{4 - x^2}, y = x, y = 0; \quad 4) y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2.$$

3. Обчислити подвійні інтеграли по області D , обмеженої вказаними лініями:

$$1) \iint_D (x + y) dx dy, \quad D: y = x, y = 2x, x = 1;$$

$$2) \iint_D (x + y) dx dy, \quad D: 2x + y = 1, 2x + y = 3, x - y = -1, x - y = 2;$$

$$3) \iint_D x \cdot y^2 dx dy, \quad D: y = x^2, y = x;$$

$$4) \iint_D (x + y^2) dx dy, \quad D: y = x^2, x = y^2.$$

4. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу області D , обмеженої вказаними лініями:

$$1) y = x^2 + 1, x + y = 3;$$

$$2) y = 4x + x^2, y = 4 + x;$$

$$3) y = x^2, y = \frac{3}{4}x^2 + 1;$$

$$4) y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2.$$

5. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями:

$$1) z = x^2 + y^2, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0;$$

$$2) z = 2 - (x^2 + y^2), x + 2y = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0;$$

$$3) z = x^2, 3x + 2y = 12, x = 0, z = 0;$$

$$4) z = x^2, x - 2y + 2 = 0, x + y - 7 = 0, z \geq 0.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

Завдання містять 30 варіантів. Номер варіанту визначається за останніми двома цифрами номера залікової книжки студента. Для визначення студентом номеру варіанту, слід знайти лишок від ділення числа, яке складається з двох останніх цифр його залікової книжки, на 30. Якщо немає лишку, виконується варіант №30. Наприклад. Номер залікової книжки – 926708. Після ділення 8 на 30 отримаємо лишок 8, тобто слід виконувати варіант № 08. Номер залікової книжки – 926741 Після ділення 41 на 30 отримаємо лишок 11, тобто слід виконувати варіант №11.

Час відведений на виконання роботи 80 хв.

№ варіан- та	Номери задач					
01	1	31	61	91	121	151
02	2	32	62	92	122	152
03	3	33	63	93	123	153
04	4	34	64	94	124	154
05	5	35	65	95	125	155
06	6	36	66	96	126	156
07	7	37	67	97	127	157
08	8	38	68	98	128	158
09	9	39	69	99	129	159
10	10	40	70	100	130	160
11	11	41	71	101	131	161
12	12	42	72	102	132	162
13	13	43	73	103	133	163
14	14	44	74	104	134	164
15	15	45	75	105	135	165
16	16	46	76	106	136	166
17	17	47	77	107	137	167
18	18	48	78	108	138	168
19	19	49	79	109	139	169
20	20	50	80	110	140	170
21	21	51	81	111	141	171
22	22	52	82	112	142	172
23	23	53	83	113	143	173
24	24	54	84	114	144	174
25	25	55	85	115	145	175
26	26	56	86	116	146	176
27	27	57	87	117	147	177
28	28	58	88	118	148	178
29	29	59	89	119	149	179
30	30	60	390	120	150	180

ЗАВДАННЯ 1

В задачах 1-30 обчислити інтеграли.

1. а) $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx;$ б) $\int \sqrt[3]{\sin^2 2x} \cos 2x dx;$	в) $\int \arcsin x dx;$ г) $\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)^2} dx$
2. а) $\int \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx;$ б) $\int \sqrt[3]{\arctg x} \frac{dx}{1 + x^2};$	в) $\int \arctg x dx;$ г) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$
3. а) $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx;$ б) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx;$	в) $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$ г) $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$
4. а) $\int \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3}{\sqrt[3]{x}} dx;$ б) $\int \sin \frac{1}{x} e^{\cos \frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2};$	в) $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx;$ г) $\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$
5. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 5}{x^2} dx;$ б) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{-\operatorname{tg}^2 x} dx;$	в) $\int \sqrt{x} \ln x dx;$ г) $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2 (x - 1)} dx$
6. а) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} dx;$ б) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}};$	в) $\int \sin x \ln(\cos x) dx;$ г) $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$
7. а) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + 3 \right) dx;$ б) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)};$	в) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2 - x}};$ г) $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$
8. а) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx;$	в) $\int \frac{x \arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4 - x^2}};$

6) $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}} dx;$	г) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$
9. а) $\int \frac{3x^2 - \sqrt[5]{x} + 2}{x} dx;$	в) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx;$
б) $\int \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx;$	г) $\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+2x+2)}$
10. а) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2} dx;$	в) $\int (x^2 - 2x + 3) \sin 2x dx;$
б) $\int x \sin(4 - x^2) dx;$	г) $\int \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} dx$
11. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} - 5x^2 + 3}{x} dx;$	в) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx;$
б) $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}};$	г) $\int \frac{x^3 + 5}{(x-1)(x^2+4)} dx$
12. а) $\int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx;$	в) $\int x^2 \sin 2x dx;$
б) $\int \frac{4^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx;$	г) $\int \frac{11x + 16}{(x-1)(x+2)^2} dx$
13. а) $\int \left(x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3 \right) dx;$	в) $\int x \arctg x dx;$
б) $\int \frac{tg x dx}{\cos^2 x \sqrt{3 + 4tg^4 x}};$	г) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)}$
14. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx;$	в) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx;$
б) $\int tg^3 x dx;$	г) $\int \frac{x^3 - 3}{x^2 + 3x + 2} dx$
15. а) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4 \right) dx;$	в) $\int \arctg \sqrt{x} dx;$
б) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} 2^{\sqrt{\cos x}} dx;$	г) $\int \frac{x^3 - 5}{x^2 - 6x + 5} dx$
16. а) $\int \frac{\sqrt{x^3} - 3x^4 + 2}{x} dx;$	в) $\int \cos(\ln x) dx;$
б) $\int \frac{\sin^2(1 + \ln x)}{x} dx;$	г) $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x - 2} dx$

17. а) $\int \left(2x^3 - 3\sqrt{x^5} + \frac{4}{x} \right) dx;$ б) $\int e^{-3\sin^2 2x} \sin 4x dx;$	в) $\int \sin(\ln x) dx;$ г) $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$
18. а) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 5}{x^2} dx;$ б) $\int \frac{\frac{3}{2} \sin 2x (\sin x - \cos x) dx}{\sin^3 x + \cos^3 x};$	в) $\int 3^x \cos x dx;$ г) $\int \frac{x^2}{1 - x^4} dx$
19. а) $\int \frac{3x^2 - \sqrt{x^3} + 7}{x^3} dx;$ б) $\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx;$	в) $\int 5^x \sin 5x dx;$ г) $\int \frac{7x - 2}{(x - 3)(x^2 + 1)} dx$
20. а) $\int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2} dx;$ б) $\frac{dx}{x \ln^5 x};$	в) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx;$ г) $\int \frac{5x - 11}{x(x^2 + 4)} dx$
21. а) $\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx;$ б) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx;$	в) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$ г) $\int \frac{x}{x^3 + 1} dx$
22. а) $\int \frac{\sqrt{x} - 2x^3 + 6}{x} dx;$ б) $\int \frac{x dx}{x^4 + 9};$	в) $\int e^{2x} \sin 3x dx;$ г) $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$
23. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx;$ б) $\int e^{-tg^2 x} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx;$	в) $\int x^5 e^{-x^2} dx;$ г) $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$
24. а) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^3}} + 2 \right) dx;$ б) $\int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)};$	в) $\int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx;$ г) $\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$
25. а) $\int \left(\sqrt[5]{x} - \frac{4}{x^5} + 2 \right) dx;$ б) $\int \frac{x e^{x^2} dx}{\sqrt{1 - e^{2x^2}}};$	в) $\int e^{-\arcsin 3x} dx;$ г) $\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2 (x-1)} dx$

26. а) $\int \frac{\sqrt[7]{x^6} - 2x^2 + 3}{x} dx;$ б) $\int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$	в) $\int \sqrt{x} \lg x dx;$ г) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$
27. а) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2}{x^3} + 1 \right) dx;$ б) $\int \frac{(1 + ctgx)^5}{\sin^2 x} dx;$	в) $\int \frac{x \sin 2x dx}{\cos^3 2x};$ г) $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$
28. а) $\int \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6 \right) dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2} \arcsin^3 2x};$	в) $\int x \sin^2 x dx;$ г) $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)(x - 1)^2}$
29. а) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} - \frac{7}{x^3} + 5 \right) dx;$ б) $\int \frac{e^x \sqrt{\arctg e^x} dx}{1 + e^{2x}};$	в) $\int e^{-\arccos 2x} dx;$ г) $\int \frac{x^3 + 6}{x^2 - 5x - 6} dx$
30. а) $\int \left(\frac{5x^2}{x} - \sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx;$ б) $\int e^{2x^2 + \ln x} dx;$	в) $\int \cos 5\sqrt{x} dx;$ г) $\int \frac{x^3 + 3}{x^2 + x - 6} dx$

ЗАВДАННЯ 2

В задачах 31-60 обчислити площу фігури, обмежену лініями.

31. $y = x^2, \quad x + y = 2$	32. $y = 2 - x^2, \quad x + y = 0$
33. $y = 2^x, \quad x = 0, \quad y = 2$	34. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
35. $y = \frac{x^2}{2} - x + 1, \quad y = \frac{-x^2}{2} + 3x + 6$	36. $y = x^2 + 1, \quad y = 3 - x$
37. $y = 0, \quad y = (x + 1)^2, \quad y = 4 - x$	38. $y^2 = 2x + 1, \quad x - y - 1 = 0;$
39. $y = 2 - x^2, \quad y^2 = x^3;$	40. $y = 3x^2 + 1, \quad y = 3x + 7;$
41. $y = x^2 - 4x + 5, y = x^2 + 8x + 17,$ $y = 1$	42. $y = -x^2 - 2x + 4, y = -x^2 + 4x + 1,$ $y = 5$
43. $y = x + 1, \quad x = 0, \quad y = 6 \cdot 3^{-x}$	44. $y = \sin x, \quad y = \pi x - x^2$

45. $y = \cos x, \quad y = 4x^2 - \pi^2$	46. $y = 2 - 2 - x , \quad y = \frac{3}{ x }$
47. $xy = 4, x = y, y = 2x, \quad (x > 0; y > 0)$	48. $y = -x^2 + 2x + 2, y = -x^2 - 4x - 1, y = 3$
49. $y = \sin x, \quad y = \frac{2x}{\pi}$	50. $y = \sin \frac{x}{2}, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = \pi$
51. $y = \frac{16 + x^2}{2x}, \quad y = 5$	52. $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x$
53. $y = 2^x, \quad y = 4^x, \quad x = 1$	54. $y = x^2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2$
55. $3y = -x^2 + 8x - 7, \quad y + 1 = \frac{4}{x - 3}$	56. $y = \sin x, \quad y = x, \quad y = \pi - x$
57. $y^2 = (4 - x)^3, \quad x = 0$	58. $4y = x^2, \quad y^2 = 4x$
59. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 2a$	60. $y = (x + 1)^2, x = \sin \pi y, y = 0 \quad (0 \leq y \leq 1)$

ЗАВДАННЯ 3

В задачах 61-90 знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями.

61. $y = 2x - x^2, \quad y = x + 2$ навколо осі OX .
62. $y = 4 - x^2, \quad y - x - 2 = 0$ навколо осі OX .
63. $(y - 3)^2 + 3x = 0, \quad x = -3$ навколо осі OX .
64. $y^2 = 4x, \quad y = x$ навколо осі OX .
65. $y^2 = 4(x - 2), \quad y = 0, \quad x = 3, \quad x = 6$ навколо осі OX .
66. $y = x^2, \quad y^2 - x = 0$ навколо осі OX .
67. $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$ навколо осі OX .
68. $y = 1 - x^2, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{y - 2}$ навколо осі OX .
69. $y = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x = \pm 1, \quad y = 0$ навколо осі OX .
70. $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{a^3}$ навколо осі OX .
71. $x^2 - y^2 = 1, \quad x = \pm 2$ навколо осі OX .
72. $y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad x = \pi$ навколо осі OX .
73. $(y - x)^2 = x^2, \quad x = 1$ навколо осі OY .
74. $y = \sin^2 x, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$ навколо осі OX .

75. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$ навколо осі OX .
76. $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$ навколо осі OY .
77. $y = x(4 - x)$, $x = 0$ навколо осі OY .
78. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ навколо осі OY .
79. $y^2 = 2x$, $2x + 2y - 3 = 0$ навколо осі OY .
80. $y^2 = 9x$, $y = 3x$ навколо осі OY .
81. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо осі OY .
82. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ навколо осі OY .
83. $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \geq 0$ навколо осі OY .
84. $y^2 = x - 2$, $y = 0$, $y = x^3$, $y = 1$ навколо осі OY .
85. $y = (x - 1)^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ навколо осі OY .
86. $y = 2x - x^2$, $y = 2x^2 - 4x$ навколо осі OY .
87. $x = \sqrt[3]{y - 2}$, $x = 1$, $y = 1$ навколо осі OY .
88. $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$ навколо осі OY .
89. $y = x^3$, $x = y$ навколо осі OY .
90. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \pm b$ навколо осі OY .

ЗАВДАННЯ 4

В задачах 91-120 обчислити довжину дуги кривої.

91. $y = x\sqrt{x}$ від $x = 0$ до $x = 4$.
92. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leq y \leq e$.
93. $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
94. $y = \ln \sin x$ між точками, абсциси яких $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{2}$.
95. $9y^2 = x(x - 3)^2$ між точками перетину з віссю OX .
96. $y^2 = (x + 1)^3$, що відтинається прямою $x = 4$.
97. $y = \sqrt{(x - 2)^3}$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(6;8)$.
98. $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ від $x = 0$ до $x = 12$.

99. $y = 1 - \ln \cos x$ від $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$.
100. $y = \ln x$, від $x = \frac{3}{4}$ до $x = 1$.
101. $y = \frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$ від $x = 0$ до $x = 1$.
102. $y = \frac{x^2}{2}$, від $x = 0$ до $x = 1$.
103. $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, від $x = a$ до $x = b$.
104. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, від $x = 1$ до $x = 2$.
105. $y = \ln \frac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.
106. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, від $x = 0$ до $x = b$.
107. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, що відтинається прямою $x = -1$.
108. $y = \ln(1-x^2)$, від $x = -\frac{1}{2}$ до $x = \frac{1}{2}$.
109. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, від $x = 0$ до $x = \frac{3}{4}$.
110. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \leq x \leq 2$.
111. $9y^2 = x(x-3)^2$ між точками перетину з віссю OY .
112. $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5$, $\frac{1}{9} \leq x \leq 1$.
113. $y = \arcsin e^{-x}$, від $x = 0$ до $x = 1$.
114. $9y^2 = x(x-3)^2$ між точками перетину з віссю OX .
115. $y = \frac{1-e^x-e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 3$.
116. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$.
117. $y = \ln(x^2-1)$, $2 \leq x \leq 3$.

118. $y = \frac{2}{5}x^4\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ між точками перетину з віссю OX .

119. Знайти периметр фігури, обмеженої лініями $x^2 = (y+1)^2$ і $y = 4$.

120. Знайти периметр фігури, обмеженої кривими $y^3 = x^2$ і $y = \sqrt{2-x^2}$.

ЗАВДАННЯ 5

В задачах 121-150 обчислити невластні інтеграли (або довести їх розбіжність).

121. а) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \cos 2x}$	122. а) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$; б) $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{7-x}}}$
123. а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$	124. а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$; б) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$
125. а) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; б) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - 4}$	126. а) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$; б) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$
127. а) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$	128. а) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$; б) $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$
129. а) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$	130. а) $\int_1^{\infty} x \cos x dx$; б) $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$
131. а) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2 - 1}$;	132. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} dx$;

б) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$	б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$
133. а) $\int_0^\infty x^2 \cos x dx;$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$	134. а) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}};$ б) $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$
135. а) $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx;$ б) $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$	136. а) $\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} dx;$ б) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
137. а) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2};$ б) $\int_0^{-1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$	138. а) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9};$ б) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
139. а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+4x+13};$ б) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$	140. а) $\int_0^\infty \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx;$ б) $\int_{0,5}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$
141. а) $\int_5^\infty \frac{dx}{x^2-8x+17};$ б) $\int_0^\infty x \sin dx$	142. а) $\int_0^\infty \frac{x dx}{(x+3)^4};$ б) $\int_3^6 \frac{dx}{x^2-7x+10}$
143. а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4};$ б) $\int_{-2}^2 \frac{4x^3}{x^4-1} dx$	144. а) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx;$ б) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} dx$
145. а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$ б) $\int_0^1 \ln x dx$	146. а) $\int_0^\infty e^{-2x} \sin 3x dx;$ б) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$

147. a) $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cos 3x dx;$ б) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$	148. a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx;$ б) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}} dx$
149. a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$	150. a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$ б) $\int_0^1 x \ln^2 x dx$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОГО ЗАВДАННЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
*Первомайська філія Національного університету кораблебудування
імені адмірала Макарова*

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних дисциплін

ІНДИВІДУАЛЬНЕ РОЗРАХУНКОВЕ ЗАВДАННЯ з дисципліни **“Вища математика II”**

Варіант 05

Виконав: студент групи 12 – ЕП-з
Петраков О.В.
Перевірив: викладач Гордієнко М.Л.

Первомайськ 2021

Завдання 1. Обчислити інтеграли.

1.1.

Розв'язання:
$$\int \frac{2 - \sqrt[3]{x} - 2x + 3x^2 + x^2 3^x}{x^2} dx = 2 \int x^{-2} dx - \int x^{-\frac{5}{3}} dx - 2 \int \frac{dx}{x} +$$

$$+ 3 \int dx + \int 3^x dx = 2 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} - 2 \ln|x| + 3x + \frac{3^x}{\ln 3} + C =$$

$$= -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^{2/3}} - 2 \ln|x| + 3x + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Відповідь:
$$\int \frac{2 - \sqrt[3]{x} - 2x + 3x^2 + x^2 3^x}{x^2} dx = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^{2/3}} - 2 \ln|x| + 3x + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

1.2.

Розв'язання:
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| - \frac{1}{\sin x} + C.$$

Відповідь:
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| - \frac{1}{\sin x} + C.$$

1.3.

Розв'язання:
$$I = \int \frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

$$A(x-1)(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x-1)^2 \equiv$$

$$\equiv 4x^3 - 4x^2 - 7x + 1.$$

Задаючи $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 2$, отримаємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3B = -6, \\ -A + B + D = 1, \\ -2A + B - 4C + 4D = 0, \\ 7A + 7B + 2C + D = 3. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -2, \\ -A + D = 3, \\ -A - 2C + 2D = 1, \\ 7A + 2C + D = 17. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 3, \\ D = 4. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx &= \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1} = \\ &= \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

Обчислимо останній інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1} &= \left\{ \begin{array}{l} t = x + 1/2 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{3(t-1/2) + 4}{(t-1/2)^2 + (t-1/2) + 1} dt = \\ &= 3 \int \frac{tdt}{t^2 + 3/4} + \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = 3 \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \\ &= 3 \ln |x^2 + x + 1| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Нарешті, одержимо:

$$I = \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + 3 \ln|x^2 + x + 1| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Відповідь: $I = \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + 3 \ln|x^2 + x + 1| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

1.4.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 5x + 1)e^{2x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 5x + 1; \quad du = (2x + 5)dx \\ dv = e^{2x} dx; \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 1)e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x + 5)e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x + 5; \quad du = 2dx \\ dv = e^{2x} dx; \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 1)e^{2x} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(2x + 5)e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 2 \int e^{2x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 1)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x + 5)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 1)e^{2x} + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $\int (x^2 + 5x + 1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 1)e^{2x} + C.$

Завдання 2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 2$.

Розв'язання: Знайдемо координати точок перетину параболи і прямої:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ y = x + 2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 4. \end{cases} \Rightarrow M_1(-1, 1), M_2(2, 4).$$

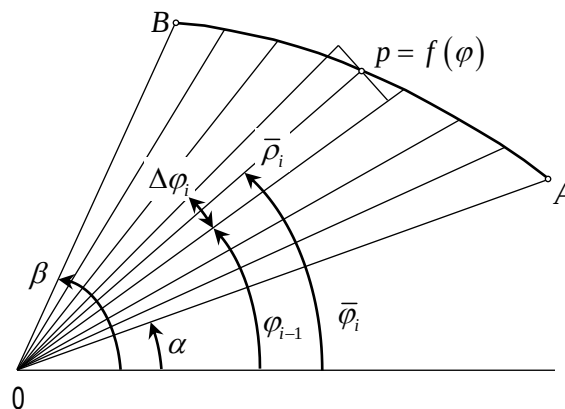
Скористаємося формулою $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (од.}^2\text{)}.$$

Відповідь: $S = 4,5 \text{ (од.}^2\text{)}.$

Завдання 3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Розв'язання:



Об'єм обчислимо за формулою $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt.$

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (t - \sin t)' dt = \pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - (1 - \sin^2 t)\cos t \right] dt = \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 4\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin^2 t \cdot \cos t \right) dt = \\
&= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.
\end{aligned}$$

Відповідь: $V = 5\pi^2 a^3$.

Завдання 4. Обчислити довжину дуги кривої

$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \quad y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

Розв'язання: Знайдемо підінтегральну функцію та обчислимо за формулою (2.29) довжину дуги:

$$x'(t) = 2t \sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t \sin t = t^2 \cos t,$$

$$y'(t) = -2t \cos t - (2 - t^2)\sin t + 2\sin t + 2t \cos t = t^2 \sin t.$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} = t^2, \Rightarrow l = \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}.$$

Відповідь: $\frac{\pi^3}{3}$.

Завдання 5. Обчислити невластні інтеграли (або довести їх розбіжність).

5.1.

Розв'язання:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{ll} t = 1 - x^2, \text{ при } x = 0 & t = 1 \\ dt = -2x dx, \text{ при } x = 1 - \varepsilon & t = 2\varepsilon - \varepsilon^2 \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2\varepsilon - \varepsilon^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{t} \Big|_1^{2\varepsilon - \varepsilon^2} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} - 1) = 1.
\end{aligned}$$

Відповідь: Інтеграл збігається.

5.2.

Розв'язання:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} \Big|_{1+\varepsilon}^2 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} \right) = +\infty.$$

Відповідь: Інтеграл розбігається.

5.3.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} x^{-2/5} dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon_2}^1 x^{-2/5} dx = \frac{5}{3} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} x^{3/5} \Big|_{-1}^{0-\varepsilon_1} + \\ &+ \frac{5}{3} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} x^{3/5} \Big|_{\varepsilon_2}^1 = \frac{5}{3} \left\{ \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} [(-\varepsilon_1)^{3/5} + 1] + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} [1 - \varepsilon_2^{3/5}] \right\} = \frac{5}{3} (1+1) = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: Інтеграл збігається.

5.4.

Розв'язання: $\int_0^1 \frac{\sin 4x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Підінтегральна функція знакозмінна і має розрив при $x=1$, тому для дослідження збіжності інтеграла скористаємося теоремою 4. На інтервалі $[0; 1)$ вико-

нується нерівність: $\left| \frac{\sin 4x}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Обчислимо невластний інтеграл від більшої функції.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки цей інтеграл існує, то за теоремою 3 існує і невластний інтеграл від меншої функції, тобто $\int_0^1 \left| \frac{\sin 4x}{\sqrt{1-x^2}} \right| dx$ теж існує, але тоді за теоремою 4 існує й ін-

теграл $\int_0^1 \frac{\sin 4x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, який є абсолютно збіжним.

Відповідь: інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin 4x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ є абсолютно збіжним.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Вища математика: Зб. задач у 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / Х.І. Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; за заг. ред. д-ра техн.наук, проф. П.П. Овчинникова. – К.:Техніка, 2004. – 279 с.
2. Вища математика: Зб. Задач у 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість з Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи.: навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / П.П. Овчинников, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін.; за заг. ред. д-ра техн.наук, проф. П.П. Овчинникова. – К.:Техніка, 2004. – 376 с.
3. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Справочное пособие – К., 1985.
4. Ильин В.А. и др. Математический анализ – М., 1979.
5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.1, Т.2. – М., 1970.
6. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – Москва: Айрис-пресс, 2006.
8. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Т.1., Т.2. – К., 1978.

Допоміжна література

9. Вища математика: Інтегральне числення функцій однієї змінної: методичні вказівки до виконання практичних робіт / Укладач: М.Л. Гордієнко. –Первомайськ: ПФ НУК, 2020. –49 с.
10. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посібник / В.В. Булдигін, І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Н.Р. Коновалова, Л.Б. Федорова; за ред. проф. В.В. Булдигіна. – К.: ТВіМС, 2011. – 224 с.
11. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій. (І курс ІІ семестр) / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алексєєва, О.О. Диховичний, К: НТУУ «КПІ», 2013. – 144 с.
12. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (ІІ курс І семестр) / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алексєєва, О.О. Диховичний, К: НТУУ «КПІ», 2013. – 108 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	5
1.1. Первісна функції, невизначений інтеграл та його основні властивості	5
1.2. Основні методи інтегрування	7
1.2.1. Безпосереднє інтегрування	7
1.2.2. Метод заміни змінної (метод підстановки)	7
1.2.3. Інтегрування частинами	9
1.3. Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен	11
1.4. Інтегрування раціональних функцій	12
1.5. Інтегрування ірраціональних функцій	18
1.6. Інтегрування деяких тригонометричних виразів	20
2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	27
2.1. Поняття визначеного інтеграла, його геометричний зміст	27
2.2. Властивості визначеного інтеграла	28
2.3. Диференціювання Визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею	30
2.4. Формула Ньютона-Лейбніца	31
2.5. Заміна змінної у визначеному інтегралі.....	31
2.6. Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла	32
2.7. Застосування визначеного інтеграла для РОЗВ'язування задач геометрії.....	32
2.7.1. Обчислення площ плоских фігур	32
2.7.2. Обчислення довжини дуги кривої.....	36
2.7.3. Обчислення об'ємів тіл.....	39
2.8. Приклади застосування визначеного інтеграла в економіці.....	41
2.9. Невласні інтеграли	46
2.9.1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування	46
2.9.2. Інтеграли від необмежених функцій.....	49
Ознаки порівняння для невластних інтегралів другого роду.....	51
2.10. Подвійні інтеграли	53
ІНДИВІДУАЛЬНІ РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ	60
ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОГО ЗАВДАННЯ.....	71
ПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	77

Навчальне видання

ГОРДІЄНКО Марина Леонідівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА II

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

**Методичні вказівки та завдання
до самостійного вивчення курсу**

Первомайська філія
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
55200, Україна, Миколаївська обл., м. Первомайськ, вул. Одеська, 107
тел. 8(05161) 4-30-63, 4-24-54
E-mail:admin@ppi.net.ua

Підписано до друку
прим. Ціна договірна.

. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Ум. друк. арк. . Тираж 30