

Міністерство освіти і науки України
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького
Українська асоціація з прикладної геометрії
Мелітопольська школа прикладної геометрії

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ



ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ
Випуск 29



м. Мелітополь

УДК 514.18, 623.54

ПАРАМЕТРИЧНЕ КЕРУВАННЯ ГРАДІЄНТОМ РАДІУСА ГАУСІВСЬКО-МОДИФІКОВАНИХ ЦИКЛОЇДАЛЬНИХ ПРОФІЛІВ

DOI: 10.33842/2313-125X-2026-29-175-183

Котляр Д.В., канд. техн. наук,

yardnight@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1718-753X

Козловський А.В., канд. техн. наук,

artem.kozlovskiy@nuos.edu.ua, ORCID: 0000-0002-7604-6115Національний університет кораблебудування ім. адм. Макарова
(м. Миколаїв, Україна)

Стаття присвячена вирішенню актуальної задачі геометричного моделювання високоефективних носових частин засобів ураження та аерокосмічних об'єктів. Об'єктом дослідження є математичний процес формоутворення модифікованих циклоїдальних кривих, у якому реалізовано концепцію параметричного керування градієнтом радіуса шляхом інтеграції гаусівських функцій розподілу безпосередньо у структуру аналітичного опису базової твірної. У роботі удосконалено математичний апарат геометричного моделювання через введення спеціальних функцій нормалізації та коефіцієнтів масштабування. Запропонований підхід забезпечує незмінність повного перепаду радіуса при варіюванні параметрів гладкості. Основна увага приділена числовому дослідженню параметра середньоквадратичного відхилення σ як ключового чинника, що визначає інтенсивність та локалізацію зміни радіуса. Методологія дослідження базується на комплексному аналізі диференціальних характеристик синтезованих поверхонь. Шляхом побудови та візуалізації 3D-поверхонь логарифмічної кривини $\log|k(t)|$ та її градієнта в координатах «параметр модифікації – характеристика твірної» встановлено фізично обґрунтовані критичні межі значень σ . У ході числового експерименту виявлено, що надмірна концентрація градієнта радіуса, яка спостерігається при значеннях $\sigma < 0.27$, призводить до виникнення математичних аномалій та порушення умови монотонності кривини. З точки зору аеродинаміки такі геометричні ефекти є критичними, оскільки вони ініціюють передчасний відрив прикордонного шару та перехід від ламінарного до турбулентного обтікання. Встановлено, що діапазон $\sigma \in [0.27, 0.95]$ є найбільш валідним для аналітичного синтезу так званих «ламінарних» профілів. Такі профілі характеризуються стабільним розподілом геометричних параметрів та асимптотичною динамікою зміни кривини, що підтверджується відсутністю різких піків на поверхні градієнта кривини $\log|dk/dt|$. Практична значущість отриманих результатів полягає у можливості їх впровадження в сучасні системи автоматизованого проектування для прецизійного синтезу аеродинамічних

поверхонь із заздалегідь визначеними властивостями обтікання. Визначені оптимальні параметри дозволяють конструктору гнучко «дозувати» гостроту носової частини, зберігаючи при цьому високу геометричну гладкість у зонах спряження з циліндричним корпусом апарата.

Ключові слова: геометричне моделювання, циклоїдальний профіль, гаусівська функція, градієнт радіуса, кривина поверхні, аеродинамічний обтікач, параметр середньоквадратичного відхилення, синтез поверхонь.

Постановка проблеми. Проектування зовнішніх обводів носових частин засобів ураження та аерокосмічних апаратів вимагає знаходження компромісу між суперечливими вимогами. З одного боку, мінімізація аеродинамічного опору на надзвукових режимах польоту потребує максимального загострення носової частини [1, 2]. З іншого боку, забезпечення стабільності прикордонного шару та запобігання відриву потоку вимагають високого ступеня геометричної гладкості та монотонності зміни кривини профілю [3, 4]. Традиційні геометричні форми, такі як конуси, сферичні затуплення або стандартні циклоїди, мають обмежену гнучкість у локальному керуванні геометричними характеристиками без зміни загальних габаритних параметрів носової частини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасні підходи до геометричного моделювання аеродинамічних поверхонь часто базуються на використанні сплайнів або кривих Безьє [5]. Проте такі методи потребують значної кількості контрольних точок для опису складних переходів. У сфері обчислювальної математики відомі підходи, де функції Гауса застосовуються як радіальні базисні функції для апроксимації дискретних масивів даних або відновлення поверхонь за хмарами точок [6]. Проте потенціал гаусівських розподілів як безпосередніх аналітичних модифікаторів диференціальних характеристик класичних геометричних примітивів залишається нерозкритим. Зокрема, циклоїдальні криві в прикладній геометрії зарекомендували себе як ефективну базу для формоутворення завдяки їхнім унікальним властивостям [7], що створює передумови для інтеграції в їхню структуру гаусівських функцій для прецизійного керування формою.

Формулювання цілей статті. Попри наявність моделей модифікованих циклоїд, питання кількісної оцінки впливу параметрів розподілу Гауса на інтегральні характеристики радіальної складової профілю залишається недостатньо висвітленим. Зокрема, потребує детального дослідження механізм керування «шириною» модифікації та її внесок у повний перепад радіуса профілю, що є критичним для забезпечення ламінарного обтікання. *Метою даної роботи* є числове дослідження впливу параметра середньоквадратичного відхилення гаусівської модифікації σ на градієнт зміни радіуса Δr модифікованого циклоїдального профілю та визначення його оптимального діапазону для автоматизованого синтезу

поверхонь обтікачів носових частин аеродинамічних об'єктів.

Основна частина.

1. *Математична модель гаусівсько-модифікованої циклоїди.* В основі пропонованої моделі лежить класична циклоїдальна крива, параметричні рівняння якої у загальному вигляді визначають траєкторію точки, що належить твірному колу [5, 7]. Для задач геометричного моделювання носових частин снарядів доцільно використовувати модифіковану форму, де радіальна складова (ордината) підлягає локальному коригуванню.

Визначимо модифікуючу функцію $a(t)$ на основі розподілу Гауса. Оскільки функція Гауса у загальному вигляді є відомою та широко застосовується для задач математичної апроксимації [6], приймемо її як основу для формування локального сплеску кривини у модифікуючій функції $a(t)$:

$$a(t) = 1 + \alpha \cdot \exp\left(\frac{-(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1)$$

де: $\alpha \in [-1, 0]$ — амплітуда модифікації, що визначає глибину «впадини» або ступінь загострення профілю; $\mu \in [0, \pi/2]$ — параметр зсуву, що вказує на положення центру модифікації вздовж параметричної осі t ; $\sigma > 0$ — середньоквадратичне відхилення, що контролює ширину (локалізацію) модифікації. Для забезпечення точної відповідності заданим геометричним обмеженням — а саме, збіжності радіуса до базового значення $R = h/2$ у кінцевій точці профілю ($t = \pi$) — вводиться коефіцієнт нормалізації N :

$$N = 1 + \alpha \cdot \exp\left(\frac{-(\pi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2)$$

Тоді функція радіуса $r(t)$ з урахуванням (1), (2) набуває вигляду:

$$r(t) = \frac{h}{2 \cdot N} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \exp\left(\frac{-(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right). \quad (3)$$

2. *Аналітичний вплив функції $r(t)$ на форму кривої.* Геометричне значення функції $r(t)$ полягає у керуванні відстанню від осі симетрії до твірної лінії профілю. Щоб забезпечити проєктну довжину носової частини c , у параметричному рівнянні $x(t)$ функція радіуса масштабується через коефіцієнт $\lambda = c/(\pi R)$, тоді параметричні рівняння гаусівсько-модифікованої циклоїди через інтегральні залежності проєціювання можна представити як:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda \cdot r(t)(t - \sin t), \\ y(t) &= r(t)(1 - \cos t). \end{aligned} \quad (4)$$

Аналіз виразу (3) показує, що функція $r(t)$ діє як динамічний локальний масштабний множник. У разі надмірного згладжування при значних σ ефект модифікації розмивається по всьому інтервалу $t \in [0, \pi]$, наближаючи профіль

до стандартної циклоїди, проте з пропорційним відхиленням загальних габаритів від базової кривої. Навпаки, при малих σ ефект модифікації зосереджується виключно в околі точки $t = \mu$, що дозволяє формувати локальні особливості геометрії без деформації основної частини корпусу.

Важливою характеристикою моделі є її асимптотична стійкість, тобто при $\alpha = 0$ або $\sigma \rightarrow \infty$ модифікована функція $r(t)$ тотожно прямує до базового значення $h/2$. Це забезпечує виконання принципу відповідності, згідно з яким геометрія профілю повертається до класичного вигляду циклоїди, що підтверджує спадковість геометричних властивостей розробленого математичного апарату.

3. *Диференціальні характеристики та монотонність.* Для прикладних задач аеродинаміки критичне значення мають не лише координати профілю, а й перші та другі похідні параметричних рівнянь $x'(t)$, $y'(t)$ та $x''(t)$, $y''(t)$. Перші похідні визначають компоненти вектора дотичної, який задає локальний кут атаки, що є визначальним для розподілу коефіцієнта тиску. Другі похідні у поєднанні з першими дозволяють обчислити кривину $k(t)$ за відомими виразами диференціальної геометрії [7]. Оскільки функція $r(t)$ містить експоненціальну залежність, градієнт її зміни безпосередньо впливає на гладкість переходів. Повний перепад радіуса $\Delta r(\sigma)$ інтервалі $t \in [0, \pi]$, визначений як:

$$\Delta r(\sigma) = |\max r(t) - \min r(t)|, \quad (5)$$

слугує мірою інтенсивності модифікації. Його дослідження дозволяє встановити межі, за якими математична модель втрачає фізичну доцільність через надмірну локалізацію або розмиття.

4. *Числове дослідження впливу σ на характеристики модифікації.* Для оцінки впливу параметра σ на ступінь модифікації профілю було обрано показник повного градієнта зміни радіуса Δr на інтервалі $t \in [0, \pi]$. Цей показник визначається як абсолютна різниця між екстремальними значеннями функції радіуса (5).

Для детального аналізу поведінки кривої було проведено числові обчислення залежності $\Delta r(\sigma)$ для фіксованого положення піку модифікації $\mu = \pi/4$ (що відповідає середині активної зони носової частини) та набору значень амплітуди $\alpha \in [-1, 0]$ при зміні σ . Як показують розрахунки, значення $\sigma < 0.05$ призводять до виникнення математичних сингулярностей та різких перегинів, що в реальних аеродинамічних умовах спричиняє відрив прикордонного шару [1, 8]. Тож діапазон зміни σ було прийнято від 0.05 до 10.

Аналіз отриманих даних дозволяє виділити такі результати щодо дослідження поведінки моделі:

- У діапазоні малих значень $\sigma \in (0, 0.27]$ спостерігається стабілізація перепаду радіуса на рівні $\Delta r \approx (h/2) |\alpha|$. У цій зоні модифікація є надзвичайно гострою та локалізованою (рис. 1). З точки зору аеродинаміки, такі значення σ відповідають формуванню ефекту «тонких голок», що може бути корисним для розрізання аеродинамічних стрибків ущільнення, які виникають на надзвукових швидкостях, проте супроводжується різкими змінами локальної кривини, що створює ризики структурної нестабільності та відриву потоку.

- На основі проведених розрахунків отримано сімейство кривих, що

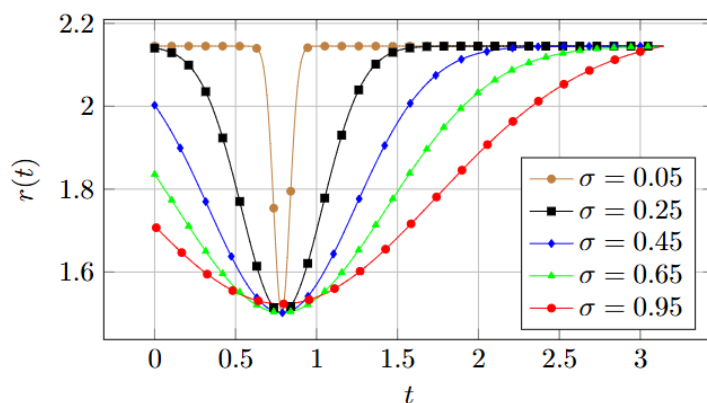


Рис. 1. Профілі радіуса $r(t)$ для різних значень σ при $\alpha = -0,3$ та $\mu = \pi/4$

відображають динаміку згладжування модифікації (рис. 2). У граничному випадку при $\alpha = -1$ градієнт Δr залишається константою, що

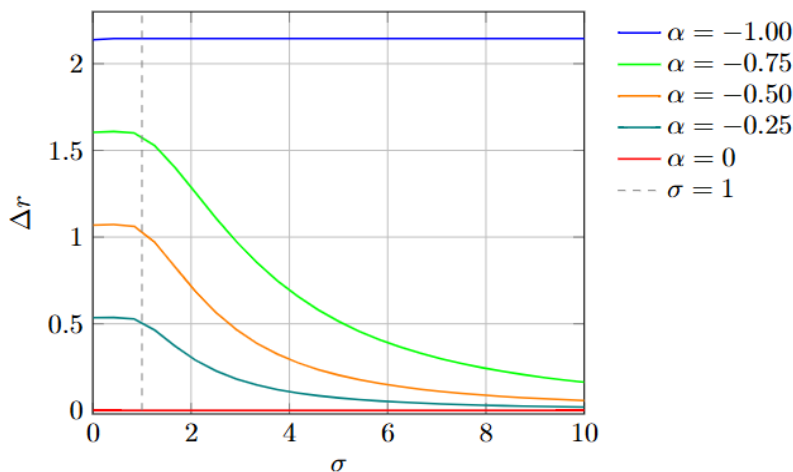


Рис. 2. Залежність повного перепаду Δr від параметра σ при різних значеннях α з нормалізацією $r(t)$

дорівнює $h/2$, незалежно від значення σ . Це пояснюється тим, що при максимальній амплітуді нормалізація повністю компенсує розмиття гаусівської функції, забезпечуючи незмінний повний перепад радіуса Δr незалежно від ширини зони модифікації.

- Ефект модифікації швидко згасає у зоні надмірного згладжування $\sigma > 2$. При $\sigma = 10$ внесок гаусівського компонента становить менше 5%, а

профіль фактично збігається з класичною циклоїдою.

- У діапазоні $\sigma \in [0.27, 2]$, так звана перехідна зона, забезпечується монотонна неспадність кривої $y(t)$, що підтверджується ілюстрацією розрахунків на рис. 3. Використання логарифмічного масштабу для поверхонь $\log|k(t)|$ дозволяє чітко ідентифікувати зони екстремальної зміни кривини, які невидимі на звичайних графіках профілю. Виявлено, що поверхня $\log|dk/dt|$ (справа, рис. 3) має характерні «хвилі» при малих σ , що відповідає точкам інфлексії. Стабілізація цієї поверхні в діапазоні $\sigma \in [0.27, 0.95]$ підтверджує можливість формування «ламінарних» профілів, де зміна кривини відбувається за законом, близьким до лінійного». При зростанні σ від 0.5 до 2 внесок модифікації плавно зменшується до значення $\approx 0.33\%$ від максимально можливого. Це найбільш валідний діапазон для інженерного проектування, який дозволяє конструктору «дозувати» гостроту носової частини, зберігаючи плавність переходів до основного корпусу.

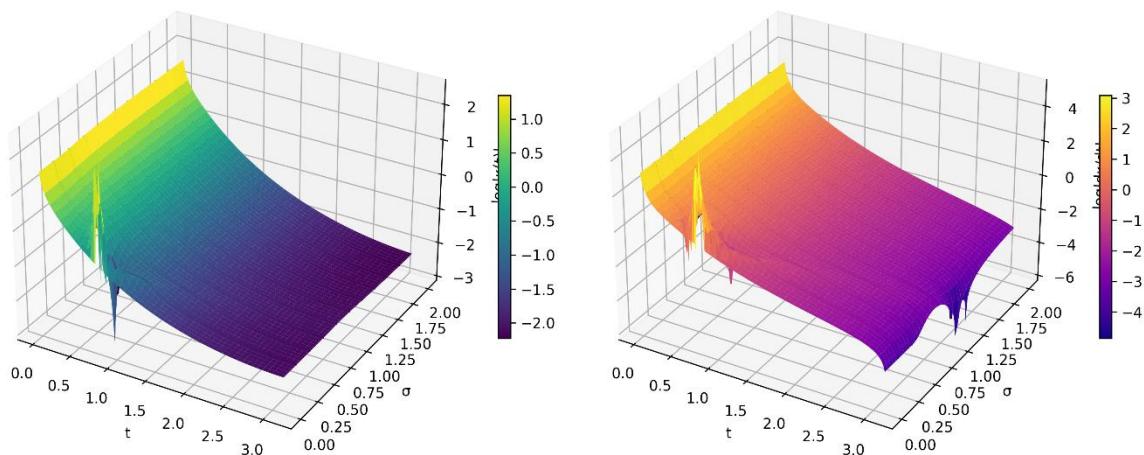


Рис. 3. 3D поверхні $\log |\kappa(t)|$ (зліва) і $\log |dk/dt|$ (справа) для змінного σ ($\alpha = -0.3$, $\mu = \pi/4$)

На основі аналізу встановлено, що оптимальний діапазон $\sigma \in [0.27, 0.95]$ забезпечує найкращий баланс між збереженням модифікаційного ефекту та геометричною гладкістю кривої. Обґрунтованість вибору таких параметрів підтверджується результатами досліджень [4, 8, 9], згідно з якими стабільні, позбавлені різких піків градієнти кривини є критично важливими для підтримки ламінарного прикордонного шару.

Висновки. У роботі проведено комплексне числове дослідження впливу параметрів гаусівської модифікації на геометричні характеристики та диференціальні властивості циклоїдальних профілів. За результатами дослідження зроблено наступні висновки:

Сформовано математичну модель гаусівсько-модифікованої циклоїди, яка дозволяє здійснювати локальне керування радіусом профілю $r(t)$ через параметри амплітуди α , положення μ та середньоквадратичного відхилення σ .

Удосконалено структуру моделі шляхом введення коефіцієнта

нормалізації N та масштабного коефіцієнта λ . Це дозволило забезпечити точну відповідність геометричних параметрів носової частини (довжини s та радіуса основи R) при збереженні локального керування формою через параметри розподілу Гауса (α, μ, σ).

Визначено критичні межі локалізації модифікації та доведено, що при значеннях $\sigma < 0.05$ виникають математичні сингулярності та різкі перегини профілю, що є неприпустимим для аеродинамічного проєктування. При граничному значенні амплітуди $\alpha = -1$ нормалізація забезпечує стабільний перепад радіуса $\Delta r = h/2$ незалежно від ширини модифікації.

Виявлено закономірності зміни диференціальних характеристик. На основі аналізу 3D-поверхонь логарифмічної кривини $\log |\kappa(t)|$ та її градієнта $\log |d\kappa/dt|$ встановлено, що стабілізація геометричних характеристик та формування профілів із близькою до лінійної зміною кривини відбувається при $\sigma > 0.27$. Доведено, що саме за таких умов забезпечується монотонна неспадність профілю $y(t)$, що є критичним для запобігання відриву прикордонного шару.

Обґрунтовано робочий інтервал $\sigma \in [0.27, 0.95]$ для практичного інженерного проєктування. Використання параметрів із цього діапазону дозволяє досягти раціонального балансу між аеродинамічним загостренням носової частини та плавністю її спряження з корпусом, що відповідає умовам підтримки ламінарного обтікання.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у визначенні кількісних критеріїв монотонності та гладкості модифікованих циклоїдальних кривих, що дозволяє автоматизувати синтез аеродинамічних поверхонь із наперед заданим розподілом кривини шляхом параметричного керування градієнтом радіуса твірної.

Література

1. Anderson J. D. Jr. Fundamentals of Aerodynamics. 3rd ed. New York : McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2001. 892 p.
2. Carlucci D. E., Jacobson S. S. Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition. 3rd ed. Boca Raton : CRC Press, 2018. 538 p.
3. Doig G., Wang Sh., Young J., Kleine H. Aerodynamic Analysis of Projectiles in Ground Effect at Near-Sonic Mach Numbers. *AIAA Journal*. 2016. Vol. 54, No. 1. P. 150–164. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.J054114>.
4. Shen X., Avital E., Rezaenia M. A., Paul G., Korakianitis Th. Computational Methods for Investigation of Surface Curvature Effects on Airfoil Boundary Layer Behavior. *Journal of Algorithms and Computational Technology*. 2017. Vol. 11, No. 1. P. 68–82. DOI: <https://doi.org/10.1177/1748301816665527>.
5. Mortenson M. E. Geometric Modeling. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1997. 488 p.
6. Liu W., Wang B. A Modified Approximate Method Based on Gaussian Radial Basis Functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2019. Vol. 100. P. 256–264. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.05.012>.

7. Gray A., Abbena E., Salamon S. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 3rd ed. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2006. 1136 p.
8. Shah V. K., Ateeb K., Razzaq M., Varun Ch., Avinash B. Determination of the Optimum Nose Cone Geometrical Shape for Supersonic Missile. *Materials Today: Proceedings*. 2022. Vol. 64, Part 1. P. 749–754. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.05.205>.
9. Varma A. S., Sathyanarayana G. S., Sandeep J. CFD Analysis of Various Nose Profiles. *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*. 2016. Vol. 3, No. 3. P. 26–29.

PARAMETRIC CONTROL OF RADIUS GRADIENT IN GAUSSIAN-MODIFIED CYCLOIDAL PROFILES

Dmytro Kotliar, Artem Kozlovskyi

The article is devoted to solving the urgent problem of geometric modeling of high-performance nose cones for strike systems and aerospace objects. The object of research is the mathematical process of forming modified cycloidal curves, in which the concept of parametric control of the radius gradient is implemented by integrating Gaussian distribution functions directly into the structure of the analytical description of the base generatrix. In this work, the mathematical apparatus of geometric modeling has been improved by introducing special normalization functions and scaling coefficients. The proposed approach ensures the constancy of the total radius difference regardless of variations in smoothness parameters. Primary attention is paid to the numerical study of the standard deviation parameter σ as a key factor determining the intensity and localization of the radius change. The research methodology is based on a comprehensive analysis of the differential characteristics of the synthesized surfaces. By constructing and visualizing 3D surfaces of the logarithmic curvature $\log|k(t)|$ and its gradient in the coordinates of «modification parameter – generatrix characteristic», physically grounded critical limits for the σ values have been established. During the numerical experiment, it was revealed that an excessive concentration of the radius gradient, observed at values of $\sigma < 0.27$, leads to the emergence of mathematical anomalies and a violation of the curvature monotonicity. From an aerodynamic perspective, such geometric effects are critical, as they initiate premature boundary layer separation and the transition from laminar to turbulent flow. It has been established that the range $\sigma \in [0.27, 0.95]$ is the most valid for the analytical synthesis of so-called «laminar» profiles. Such profiles are characterized by a stable distribution of geometric parameters and asymptotic dynamics of curvature change, which is confirmed by the absence of sharp peaks on the curvature gradient surface $\log|dk/dt|$. The practical significance of the obtained results lies in the possibility

of their implementation in modern computer-aided design systems for the precision synthesis of aerodynamic surfaces with predefined flow properties. The identified optimal parameters allow the designer to flexibly «dose» the sharpness of the nose cone while maintaining high geometric smoothness in the transition zones to the cylindrical body of the vehicle.

Keywords: geometric modeling, cycloidal profile, Gaussian function, radius gradient, surface curvature, aerodynamic nose cone, standard deviation parameter, surface synthesis.

References

1. Anderson, J. D., Jr. (2001). Fundamentals of aerodynamics (3rd ed.). New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 892 p. [In English].
2. Carlucci, D. E., & Jacobson, S. S. (2018). Ballistics: Theory and design of guns and ammunition (3rd ed.). Boca Raton: CRC Press, 538 p. [In English].
3. Doig, G., Wang, S., Young, J., & Kleine, H. (2016). Aerodynamic analysis of projectiles in ground effect at near-sonic Mach numbers. AIAA Journal, 54(1), 150–164. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.J054114> [In English].
4. Shen, X., Avital, E., Rezaenia, M. A., Paul, G., & Korakianitis, T. (2017). Computational methods for investigation of surface curvature effects on airfoil boundary layer behavior. Journal of Algorithms and Computational Technology, 11(1), 68–82. DOI: <https://doi.org/10.1177/1748301816665527> [In English].
5. Mortenson, M. E. (1997). Geometric modeling (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons, 488 p. [In English].
6. Liu, W., & Wang, B. (2019). A modified approximate method based on Gaussian radial basis functions. Engineering Analysis with Boundary Elements, 100, 256–264. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.05.012> [In English].
7. Gray, A., Abbena, E., & Salamon, S. (2006). Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica (3rd ed.). Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1136 p. [In English].
8. Shah, V. K., Ateeb, K., Razzaq, M., Varun, C., & Avinash, B. (2022). Determination of the optimum nose cone geometrical shape for supersonic missile. Materials Today: Proceedings, 64(1), 749–754. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.05.205> [In English].
9. Varma, A. S., Sathyanarayana, G. S., & Sandeep, J. (2016). CFD analysis of various nose profiles. International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering, 3(3), 26–29. [In English].

Матеріал надійшов до редакції 27.04.2026

Прийнято до друку 13.05.2026 р.