

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПЕРВОМАЙСЬКА ФІЛІЯ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
імені адмірала Макарова

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних дисциплін

М.Л. ГОРДІЄНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт

Первомайськ
2020

УДК 514.74(075.8)
ББК 22.143+22.151

*Рекомендовано до друку Науково-методичною радою
Первомайської філії Національного університету кораблебудування
імені адмірала Макарова (Протокол № _____ від _____ р.)*

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних дисциплін

М.Л. Гордієнко

Вища математика: Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія: Методичні вказівки до виконання практичних робіт / Укладач: М.Л. Гордієнко. –Первомайськ: ПФ НУК, 2020. –108 с.

Методичні вказівки до виконання практичних робіт відповідають робочій програмі дисципліни «Вища математика». Методичні вказівки розроблено до змістового модуля «Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія». Подано основні теоретичні відомості, зразки детального розв’язування основних типових задач з повним аналізом розв’язку, розрахункові завдання для самостійної роботи студентів, питання для самоперевірки.

Для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання спеціальностей 131 Прикладна механіка, 142 Енергетичне машинобудування, 144 Теплоенергетика.

УДК 514.74(075.8)
ББК 22.143+22.151

© М.Л. Гордієнко
© Первомайська філія
Національного університету
кораблебудування, 2020

ВСТУП

Методичні вказівки створено з метою:

- допомогти студентам опанувати необхідні теоретичні знання змістового модуля «Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія» та вміння застосовувати основні поняття і властивості матриць, визначників, векторів, комплексних чисел, ліній на площині та ліній і поверхонь в просторі;
- сформувати первинні навички математичного дослідження прикладних задач фізики, механіки, геометрії та задач фахових спеціальностей;
- виробити вміння самостійно розв'язувати задачі та використовувати літературу за даним розділом;
- навчити застосовувати теоретичні знання на практиці;
- навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективного методу розв'язання задач.

Методичні вказівки включають 9 практичних робіт змістового модуля «Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія». Усі практичні роботи мають однакову структуру: викладено основні теоретичні відомості, зразки розв'язування основних типів задач, розрахункове завдання для самостійної роботи, питання для самоперевірки.

Самостійне розв'язання задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом, використанням конспекту лекцій, посібників та підручників. Деякі з них подано у списку рекомендованої літератури.

МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Основні теоретичні відомості

Матрицею розміру $m \times n$ називається сукупність елементів a_{ij} , розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Перший індекс i кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий індекс j вказує на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$. Використовують також більш компактний запис $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Якщо кількість рядків не рівна кількості стовпців, тобто $m \neq n$, то матриця називається прямокутною розмірності $m \times n$, а якщо $m = n$ – квадратною. Число $m = n$ називається **порядком** матриці.

Елементи квадратної матриці, в яких $i = j$, тобто елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, утворюють головну діагональ, а елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ – побічну діагональ матриці.

Квадратна матриця порядку n має вигляд:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Матриця-стовпець: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

$$\text{Матриця-рядок: } \vec{a} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}), \quad \vec{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$$

Матриця є стовпцем своїх рядків і рядком своїх стовпців:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \dots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n).$$

Матриці A і B мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців. Матриці A і B вважаються рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їхні елементи, що знаходяться на однакових місцях, рівні між собою.

Нульовою називається матриця, всі елементи якої – нулі.

$$O_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Деякі квадратні матриці мають власні назви. Зокрема, до них відносяться трикутна, діагональна та одинична матриці.

Нижня трикутна матриця:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Верхня трикутна матриця:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається **діагональною**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається **одиничною** матрицею. Одинична матриця має вигляд:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ненульовий елемент рядка з найменшим номером називається лідером рядка.

Матрицю називають **східчастою**, якщо виконуються умови:

- 1) нульові рядки матриці (якщо вони є) розташовуються нижче ненульових;
- 2) номери стовпців, які містять лідери рядків, зростають.

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають **транспонованою** і позначають A^T . Транспонована матриця має вигляд:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сумою (різницею) матриць A і B однакового розміру називається матриця $C = A + B$ ($C = A - B$), елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B .

Тобто $(c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} \pm (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$, де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Добутком матриці A на число α називається матриця такого ж розміру, елементи якої дорівнюють добутку елементів матриці A на число α :

$$\alpha(a_{ij})_{m \times n} = (\alpha a_{ij})_{m \times n}, \text{ де } a_{ij} - \text{елементи матриці } A, \text{ тобто при множенні матриці}$$

на число (числа на матрицю) треба всі елементи матриці помножити на це число.

Властивості додавання і множення матриць. Для довільних матриць A , B , C однакових розмірів і довільних чисел α та β справджуються рівності:

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) $A + B = B + A$; | 5) $I \cdot A = A$; |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$; | 6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; |
| 3) $A + O_{m \times n} = A$; | 7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; |
| 4) $A + (-A) = O_{m \times n}$; | 8) $(\alpha \beta)A = \alpha(\beta A)$. |

Матрицю A називають **узгодженою** з матрицею B , якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B («довжина» A матриці дорівнює «висоті» матриці B).

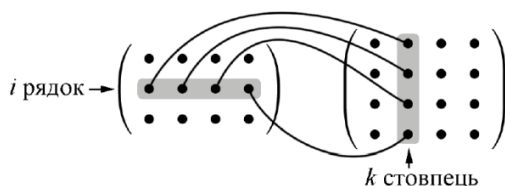
Добутком рядка $\vec{x} = (x_j)_n$ завдовжки n на стовпець $\vec{y} = (y_i)_n$ заввишки n називають число $\vec{x} \cdot \vec{y}$, яке дорівнює сумі добутків елементів рядка на відповідні елементи стовпця:

$$(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Добутком матриці $A_{m \times l}$ на матрицю $B_{l \times n}$ називається матриця

$$C_{m \times n} = AB, \text{ елементи якої } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \text{ де } a_{ik}, b_{kj} - \text{елементи матриць } A \text{ і } B.$$

Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



Перемножувати можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. З існування добутку AB не означає, що існує добуток BA .

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються **комутативними**.

Множення матриць зручно записувати за схемою Фалька:

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ \hline \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \end{array}$$

Натуральний степінь k квадратної матриці A розуміють як

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ разів}}; \quad A_{n \times n}^0 = E_n.$$

Матричний многочлен. Якщо $f(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$, то многочлен $f(A)$ від матриці A називають матрицю $f(A) = a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 E_n$.

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 1.1. Визначити розмір матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 0 \\ -6 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виписати всі рядки і стовпці матриці, елементи a_{14} і a_{22} .

Розв'язання:

Матриця A має розмір 2×4 .

Рядки матриці A :

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (4 \quad -7 \quad 5 \quad 0), \\ \vec{a}_2 &= (-6 \quad 8 \quad -1 \quad 1). \end{aligned}$$

Стовпці матриці A :

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці: $a_{14} = 0$, $a_{22} = 8$.

Приклад 1.2. Виконати дії:

а) знайти $5A - 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

б) знайти добуток матриць $C \cdot D^T$, якщо

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

а) Щоб помножити матрицю на число, треба кожний елемент матриці помножити на це число, а при додаванні двох матриць одного розміру, треба додати відповідні елементи цих матриць

Тому одержимо:

$$\begin{aligned} 5A - 2B &= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -15 & 20 \\ 10 & 35 & -10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 4 & -10 & -2 \\ 6 & -14 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -25 & 18 \\ 16 & 21 & -14 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) Транспонуємо матрицю D :

$$D^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця C має розмір 3×4 , матриця D^T має розмір 4×3 . Оскільки число стовпців матриці C дорівнює кількості рядків матриці D^T , то матриці C і D^T можна перемножити, і матриця $C \cdot D^T = H$ має розмір 3×3 .

Елементи матриці $C \cdot D^T = H$ знайдемо за схемою Фалька:

$$C \cdot D^T = \begin{array}{cccc|ccc} & & & & 2 & -3 & 5 \\ & & & & -1 & 6 & -4 \\ & & & & 1 & -2 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 4 \\ \hline 4 & 3 & -1 & 2 & 4 & 6 & 16 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & -4 & 23 & -21 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 8 & -16 & 6 \end{array}$$

У результаті одержимо: $H = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 16 \\ -4 & 23 & -21 \\ 8 & -16 & 6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -25 & 18 \\ 16 & 21 & -14 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 16 \\ -4 & 23 & -21 \\ 8 & -16 & 6 \end{pmatrix}$.

Приклад 1.3. Задано многочлен $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$. Знайти $f(A)$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Відповідно до означення многочлена від матриці отримаємо:

$$f(A) = -2A^2 + 4A - 3E, \text{ де } E - \text{одинична матриця третього порядку.}$$

Знаходимо спочатку A^2 :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 3 + (-4) \cdot 4 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-4) + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 2 & 15 & -7 \\ 8 & -7 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} f(A) &= (-2) \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 2 & 15 & -7 \\ 8 & -7 & 8 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -18 & -6 & -2 \\ -4 & -30 & 14 \\ -16 & 14 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -4 & 8 \\ 16 & -16 & 12 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 6 \\ 12 & -49 & 26 \\ -8 & 18 & -23 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь: $f(A) = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 6 \\ 12 & -49 & 26 \\ -8 & 18 & -23 \end{pmatrix}$.

Розрахункове завдання

Завдання 1.1. Визначити розмір матриці A . Виписати всі елементи, рядки і стовпці матриці A . Задано многочлен $f(x) = -3x^2 + 2x - 4$. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
7) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	8) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
10) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	11) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	12) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
13) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$	14) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	15) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
16) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	17) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	18) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

19) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	20) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	21) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
22) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	23) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	24) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
25) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	26) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	27) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
28) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	29) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	30) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Завдання 1.2. Виконати дії над матрицями. Буквою ***E*** позначена одинична матриця відповідного порядку.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & F &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
 S &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, & M &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\
 D &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & G &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \\
 N &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, & H &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

1) $N^T - H \cdot G$	2) $D \cdot M - 5E$	3) $H \cdot (S^T - 3G)$
4) $F \cdot (4D - M^T)$	5) $H \cdot S^T + N^T$	6) $N^T + F \cdot M^T$
7) $H \cdot (2S^T + G)$	8) $D \cdot M - 4E$	9) $S \cdot G + 3E$
10) $A \cdot C^T + 2E$	11) $H \cdot (3G - S^T)$	12) $D^T \cdot F^T - N$
13) $S \cdot F^T - N$	14) $A \cdot (C^T + 2B)$	15) $H \cdot (G + 2S^T)$
16) $F \cdot S^T - N^T$	17) $M \cdot S^T - 4E$	18) $F \cdot (3M^T - D)$
19) $H \cdot G + 3N^T$	20) $S \cdot B + 4E$	21) $A \cdot (2D + C^T)$
22) $F \cdot (2G + M^T)$	23) $G^T \cdot S^T - 2E$	24) $M \cdot F^T - 2N$
25) $F \cdot (2G + M^T)$	26) $A \cdot (B + 3C^T)$	27) $F^T \cdot M + 3N$
28) $B \cdot G^T - 3E$	29) $F \cdot (M^T + 2D)$	30) $2N^T - A \cdot B$

Питання для самоперевірки

1. Сформулювати означення матриці розміру $m \times n$.
2. Навести приклади квадратної, нульової, трикутної, одиничної матриць.
3. Дати означення транспонованої матриці. Навести приклади.
4. Як знайти суму (різницю) матриць?
5. Властивості додавання (віднімання) матриць.
6. Як знайти добуток матриці на число?
7. Властивості добутку матриці на число.
8. Добуток матриць. Для яких матриць існує добуток?
9. Як знайти натуральний степінь квадратної матриці?
10. Як знайти матричний многочлен?

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

Основні теоретичні відомості

Розглянемо квадратну таблицю з n^2 чисел, розміщених в n -горизонтальних і n -вертикальних рядках. За спеціальним правилом знаходять число, яке називають **визначником (детермінантом)** n -го порядку і позначають буквою Δ грецького алфавіту:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{ij} ($i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$) називають елементами визначника. Перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент. Елементи в яких обидва індекси однакові (тобто елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$) утворюють головну діагональ визначника. Інша діагональ називається неголовною (допоміжною). Порядок визначника визначає кількість його рядків (або стовпців).

Визначником другого порядку називається число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначником третього порядку називається число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для обчислення визначників третього порядку існує правило трикутника, яке схематично можна зобразити так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} \Bigg| \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix}$$

Доданки із знаком «+» є добутками елементів, які стоять на головній діагоналі визначника і добутки елементів, які стоять у вершинах трикутників, з основами паралельними головній діагоналі. Із знаком «-» беруться доданки, які є добутками елементів неголовної діагоналі і добутки елементів вершин трикутників з основами, паралельними цій діагоналі визначника.

Визначник третього порядку можна також обчислити за правилом Саррюса:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{-} \\ \text{+} \end{array}$$

Добутки елементів, які знаходяться на діагоналях, відмічених на схемі суцільними лініями, беруться зі знаком «+», а добутки елементів, які знаходяться на діагоналях, позначених на схемі пунктиром, беруться зі знаком «-». Алгебраїчна сума цих шести добутків і є значенням визначника.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, який дістають з попереднього визначника після викреслювання i -го рядка та j -го стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається мінор, взятий зі знаком «+», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «-», якщо сума його індексів непарна. Тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

ТЕОРЕМА розкладу визначника за елементами довільного рядка (або стовпця) (теорема Лапласа). Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (або стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,2,\dots,n);$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Для визначників третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Визначником трикутного вигляду називається визначник, в якого нижче (або вище) головної діагоналі всі нульові елементи, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку діагональних елементів.

Властивості визначників:

1. Якщо у визначнику поміняти місцями рядки на стовпці, то величина визначника не зміниться.
2. Якщо у визначнику поміняти місцями тільки два рядки (або стовпці) то він змінить тільки знак, не змінюючи абсолютної величини.
3. Якщо у визначнику всі елементи довільного рядка (або стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.
4. Якщо у визначнику є два однакові рядки (або стовпці), то визначник дорівнює нулю.
5. Якщо всі елементи довільного рядка (або стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
6. Якщо відповідні елементи двох рядків (або стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо у визначнику всі елементи довільного рядка (або стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників. При цьому елементи розглянутого рядка (або стовпця) у першому визначнику є першими доданками, а елементи відповідного рядка (або стовпця) другого визначника – другими доданками:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів довільного рядка (або стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне і те ж число λ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обчислення визначника за допомогою елементарних перетворень

Матриці A і B називають **еквівалентними**, якщо одну з них одержують з іншої скінченною кількістю елементарних перетворень, і позначають $A \sim B$.

Метод зведення визначника до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень полягає в перетворенні визначника до вигляду, коли всі елементи, розташовані по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Знаходження оберненої матриці за допомогою визначників

Матриця A^{-1} , називається оберненою до квадратної матриці A порядку n , якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Матриця A^{-1} має той самий порядок що і матриця A .

Квадратну матрицю A порядку n називають **невиродженою**, якщо її визначник відмінний від нуля: $\det A \neq 0$.

Матрицею, **приєднаною** до матриці A порядку n , називається матриця

$$A^* = (A_{ij})_{n \times n}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення до елемента a_{ij} ($i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$) матриці A .

Критерій оборотності матриці. Матриця A має обернену тоді і лише тоді,

коли вона не вироджена, при цьому $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$.

Формула оберненої матриці 2-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0: \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Схема методу приєднаної матриці:

- 1) Обчислити визначник матриці A .
- 2) Якщо $\det A = 0$, то оберненої до матриці A не існує. Якщо $\det A \neq 0$, то

будують приєднану до A матрицю $A^* = (A_{ij})_{n \times n}^T$.

- 3) Обернену до A матрицю знаходять за формулою $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$.

- 4) Правильність обчислень перевіряють за умовою $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Ранг матриці

В матриці $A_{m \times n}$ виділимо k рядків і k стовпців, $(1 \leq k \leq \min(m, n))$.

Міном порядку k матриці $A_{m \times n}$ називається будь-який визначник k -го порядку, що складається з елементів матриці, які стоять на перетині виділених k рядків і k стовпців.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} & \boxed{a_{14}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} & \boxed{a_{24}} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & \boxed{a_{34}} \end{pmatrix}$$

Рангом матриці називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Позначається: r , $r(A)$, $\text{rang}(A)$.

Міном, порядок якого визначає ранг матриці, називається **базисним**. У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Ненульовий елемент рядка з найменшим номером називають **лідером** рядка.

Матрицю називають *східчастою*, якщо вона справджує умови: нульові рядки матриці (якщо вони є) розташовані нижче ненульових, номери стовпців, які містять лідери рядків, зростають:

$$\begin{pmatrix} 0 & \square & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \square & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\square$ – лідери; $*$ – будь-які елементи.

Східчасту матрицю називають зведеною, якщо всі лідери рядків дорівнюють одиниці, а над лідерами стоять нулі:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знаходження рангу матриці методом Гаусса:

- 1) Матрицю за допомогою елементарних перетворень зводять до східчастого вигляду;
- 2) Кількість ненульових рядків у східчастому вигляді матриці дорівнює її рангові.

Елементарними перетвореннями матриці називають:

- 1) Перестановка місцями довільних двох рядків (стовпців);
- 2) Множення кожного елемента рядка (стовпця) на число відмінне від нуля;
- 3) Додавання до елементів довільного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця, помноженого на деяке число, відмінне від нуля);
- 4) Викреслювання рядка (стовпця), який містить всі нульові елементи.

Властивості рангу матриці:

- 1) Ранг нульової матриці вважають рівним нулеві;
- 2) Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого з двох чисел m, n , тобто $0 \leq r \leq \min(m, n)$;
- 3) Для квадратної матриці n -го порядку $r = n$ тільки тоді, якщо матриця не вироджена;
- 4) Якщо $r < n$, то визначник матриці дорівнює нулю.

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 2.1. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

а) Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку,

маємо:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\sin^2\alpha.$$

б) Користуючись правилом трикутника, знаходимо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = \\ = 30 - 2 - 12 - 9 - 10 - 8 = -11.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{2}\sin^2\alpha$; б) -11 .

Приклад 2.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розклавши його за

елементами першого рядка.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 - 24 - 2(-6 - 18) + 5(-8 - 3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

Відповідь: -28 .

Приклад 2.3. Обчислити визначник, спочатку спростивши його:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Додамо перший рядок до третього рядка, потім помножимо перший рядок на 2 і додамо його до другого рядка і отримаємо визначник, в якому елементи $a_{21} = a_{31} = 0$. Отриманий визначник розкладаємо за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 + (-2) \cdot 1 & 8 + (-2) \cdot 3 & 1 + (-2) \cdot 2 \\ -1 + 1 & 1 + 3 & 2 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-12) = 20.$$

Відповідь: 20 .

Приклад 2.4. Обчислити зведенням до трикутного вигляду визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

На першому кроці від 2-го рядка відняли 1-й, помножений на 4, та від 4-го рядка відняли 1-й, помножений на 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \bar{a}_2 \leftarrow \bar{a}_2 - 4\bar{a}_1 \\ \\ \bar{a}_4 \leftarrow \bar{a}_4 - 5\bar{a}_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 - 2\bar{a}_2 \\ \bar{a}_4 \leftarrow \bar{a}_4 + 2\bar{a}_2 \end{matrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \bar{a}_4 \leftarrow \bar{a}_4 + 2\bar{a}_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} \text{Визначник трикутної матриці} \\ \text{дорівнює добуткові} \\ \text{діагональних елементів} \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-14) = 28.$$

Відповідь: 28.

Приклад 2.5. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

і перевірити, чи справджуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язання: Знайдемо визначник матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5.$$

Оскільки $\Delta = -5 \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує.

Знаходимо алгебричні доповнення: $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$.

Тоді обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

Приклад 2.6. Знайти ранг матриці

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ шляхом елементарних перетворень.}$$

Розв'язання: Перетворимо матрицю A до східчастого вигляду:

$$\begin{aligned} A_{3 \times 4} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \bar{a}_2 \leftarrow \bar{a}_2 - \bar{a}_1 \\ \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 - 2\bar{a}_1 \end{array} \right| \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \left| \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 - \frac{1}{2}\bar{a}_1 \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Східчастий вигляд матриці A містить два ненульові рядки.

Отже, $r(A) = 2$.

Відповідь: $r(A) = 2$.

Розрахункове завдання

Завдання 2.1. Обчислити визначник 4-го порядку трьома способами:

- 1) розкладом за елементами будь-якого рядка;
- 2) розкладом за елементами 1-го стовпця з одержанням у ньому нулів;
- 3) зведенням елементарними перетвореннями до трикутного вигляду.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	3) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	5) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	6) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$
7) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	8) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
10) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$	11) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	12) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
13) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$	14) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	15) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$
16) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	17) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	18) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$	20) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	21) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$
22) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	23) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	24) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
25) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	26) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	27) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$
28) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	29) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	30) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Завдання 2.2. Знайти матрицю, обернену до даної матриці.

Виконати перевірку: $A^{-1}A = E$.

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	6) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
7) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	8) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	9) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	11) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	12) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
13) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	14) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	15) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
16) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	17) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	18) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
19) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	20) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	21) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
22) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	23) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	24) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
25) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$	26) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$	27) $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
28) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	29) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	30) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

Завдання 2.3. Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень.

1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	2) $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
---	---	---

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	5) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$	6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 6 \\ 6 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
7) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	8) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & -7 \\ 3 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	9) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 8 & -1 \\ 6 & -8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
10) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -12 & 4 \end{pmatrix}$	11) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	12) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 6 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
13) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	14) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$	15) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & 1 & -7 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
16) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ -4 & -6 & -8 & -10 \end{pmatrix}$	17) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 10 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	18) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
19) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$	20) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 7 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	21) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
22) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	23) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$	24) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

25) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	26) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$	27) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
28) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 7 & 3 & 12 \end{pmatrix}$	29) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	30) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

Питання для самоперевірки

1. Дати означення визначника другого порядку. Навести приклади.
2. Дати означення визначника третього порядку. Навести приклади.
3. Сформулювати правила обчислення визначників третього порядку.
4. Дати означення мінора і алгебраїчного доповнення довільного елемента визначника.
5. Сформулювати теорему розкладу визначника за елементами довільного рядка або стовпця.
6. Дати означення визначника трикутного вигляду. Навести приклади. Як обчислити визначник трикутного вигляду?
7. Які матриці називають еквівалентними?
8. Яку матрицю називають невиродженою?
9. Як знайти обернену матрицю за допомогою визначників?
10. Що таке ранг матриці?

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Основні теоретичні відомості

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n змінними $x_1, x_2, \dots, x_n$

має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних; b_i – вільні члени, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Основна матриця системи: $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$

Стовпець невідомих: $X = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Стовпець вільних членів: $B = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Розширена матриця системи: $\tilde{A} = \left(A | \vec{b} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$

Матричний вигляд СЛАР: $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \vec{b}, \quad AX = B.$

Розв'язком СЛАР називають набір n значень $x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \dots, \quad x_n = c_n,$

підставлення яких у всі рівняння системи перетворює їх на тотожності.

Розв'язок системи записують як стовпець $\bar{c} = (c_j)_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Будь-який розв'язок системи називають її **частинним розв'язком**. Множину всіх частинних розв'язків називають **загальним розв'язком** системи.

Характеристики СЛАР

СЛАР називається **квадратною**, якщо $m = n$.

СЛАР називається **однорідною**, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, тобто $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. В протилежному випадку СЛАР називається **неоднорідною**.

Квадратна СЛАР називається **невиродженою**, якщо $\det A \neq 0$.

СЛАР називається **сумісною (розв'язною)**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною (нерозв'язною)**, якщо вона не має розв'язків.

Сумісну систему називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше як один розв'язок.

Дві системи називають **рівносильними**, якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої, і навпаки. Усі несумісні системи вважають рівносильними.

ТЕОРЕМА Кронекера-Капеллі: для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною, необхідно й достатньо, щоб ранг матриці A дорівнював рангу розширеної матриці $\bar{A}$, тобто $r(A) = r(\bar{A})$. При цьому:

- 1) якщо ранг розширеної матриці більше за ранг основної матриці системи, то система не має **жодного** розв'язку;
- 2) якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангові розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих ($r(A) = r(\bar{A}) = n$), то система має **єдиний** розв'язок;

- 3) якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангові розширеної матриці, але менший за кількість невідомих ($r(A) = r(\bar{A}) < n$), то система має *безліч* розв'язків.

Розв'язати систему означає:

- 1) з'ясувати, чи є система сумісною або несумісною;
- 2) якщо система сумісна, то знайти множину її розв'язків.

Методи розв'язання невинроджених СЛАР

1. МАТРИЧНИЙ МЕТОД (метод оберненої матриці)

Розглянемо невинроджену СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

причому $\det A \neq 0$.

Розглянемо невинроджену СЛАР в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \vec{b}, \quad AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то $X = A^{-1}B$, ($\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$).

2. МЕТОД КРАМЕРА

Метод зводиться до обчислення визначників. Розв'язок системи знаходять за формулами Крамера:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n},$$

$\Delta = |\vec{a}_1 \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n| \neq 0$ – визначник основної матриці системи $A_{n \times n}$;

$\Delta_{x_j} = |\vec{a}_1 \dots \vec{b} \dots \vec{a}_n|$ – визначник матриці, одержаної з основної матриці

системи $A_{n \times n}$ заміною j -го стовпця на стовпець вільних членів.

Дослідження квадратної СЛАР на сумісність та визначеність за формулами Крамера:

- 1) якщо $\det A \neq 0$, то система сумісна та визначена, тобто має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера;
- 2) якщо $\det A = 0$, і існує принаймні одне $\Delta_{x_j} \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, то система несумісна;
- 3) якщо $\det A = 0$ і всі $\Delta_{x_j} = 0$, $j = \overline{1, n}$, то система або сумісна і невизначена, або несумісна.

Розв'язок системи двох лінійних рівнянь з двома змінними

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

можна знайти за формулами: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}, \text{ за умови, що } \Delta \neq 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ – називається визначником системи, а } \Delta_{x_1}, \Delta_{x_2} \text{ – визначники, які}$$

одержують з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Розв'язок системи трьох лінійних рівнянь з трьома змінними

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

можна знайти за формулами: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$,

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ – визначник системи, а

$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ – визначники, які

отримують з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

3. МЕТОД ГАУССА (метод елементарних перетворень)

Метод полягає у послідовному виключенні невідомих шляхом елементарних перетворень над рядками матриці і зведення її до східчастого вигляду.

Елементарними перетвореннями СЛАР називають:

- 1) переставляння рівнянь;
- 2) множення обох частин якого-небудь рівняння на число, відмінне від нуля;
- 3) додавання до рівняння іншого рівняння, помноженого на деяке число.

Елементарні перетворення СЛАР приводять до відповідних елементарних перетворень рядків матриці та розширеної матриці системи.

СЛАР, одержані одна з одної елементарними перетвореннями, називають **еквівалентними**. Еквівалентні СЛАР **рівносильні**.

Алгоритм розв'язання СЛАР методом Гаусса.

Крок 1. Для загальної СЛАР, що мстить m рівнянь та n невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

виписують розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = \left(A \left| \vec{b} \right. \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Крок 2. Шляхом елементарних перетворень над рядками матриці зводять розширену матрицю до східчастого вигляду (*прямий хід метода Гаусса*):

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \dots & \tilde{a}_{1(n-1)} & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \dots & \tilde{a}_{2(n-1)} & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{rr} & \dots & \tilde{a}_{r(n-1)} & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_m \end{array} \right),$$

де $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ – нові коефіцієнти системи.

Крок 3. Досліджують систему на сумісність (теорема Кронекера-Капеллі). Зауважимо, що якщо в результаті елементарних перетворень принаймні один з вільних членів $\tilde{b}_i$, $i = \overline{r+1, m}$ відмінний від нуля, то система не сумісна.

Якщо ж $\tilde{b}_i = 0$, $i = \overline{r+1, m}$, то система сумісна.

Крок 4. Записують перетворену систему:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \dots + \tilde{a}_{1(n-1)}x_{n-1} + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \dots + \tilde{a}_{2(n-1)}x_{n-1} + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \tilde{a}_{rr}x_r + \dots + \tilde{a}_{r(n-1)}x_{n-1} + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r. \end{cases}$$

Припустимо, що система сумісна, і ранг її основної матриці дорівнює $r(A) = r(\tilde{A}) = r \leq n$. Зауважимо, що r рядків та r стовпців цієї матриці утворюють базисний мінор. Невідомі $(x_1, x_2, \dots, x_r)$, коефіцієнти яких входять до базисного мінору, називаються *головними* або *базисними* (їх r штук), а інші $n - r$ невідомих $(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ називаються *вільними*. Підкреслимо, що у випадку $r = n$ після прямого ходу метода Гаусса систему можна розв'язати матричним методом або за формулами Крамера.

Крок 5 (зворотній хід методу Гаусса). Полягає у послідовному відшукуванні всіх невідомих системи, підіймаючись від останнього рівняння системи до першого. А саме, залишаємо головні невідомі $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ системи у лівих частинах рівнянь, а вільні невідомі $(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ переносимо у праві частини рівнянь системи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} - \tilde{a}_{1(n-1)}x_{n-1} - \tilde{a}_{1n}x_n, \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2(r+1)}x_{r+1} - \tilde{a}_{2(n-1)}x_{n-1} - \tilde{a}_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \tilde{a}_{rr}x_r = \tilde{b}_r - \tilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} - \tilde{a}_{r(n-1)}x_{n-1} - \tilde{a}_{rn}x_n. \end{array} \right.$$

Поступово через вільні невідомі $(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ виражають всі базисні невідомі $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ системи.

Крок 6. Записують загальний розв'язок системи у вигляді:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 3.1. Розв'язати систему лінійних неоднорідних рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) матричним методом;
- 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання:

1) Розв'яжемо систему за формулами Крамера.

Знайдемо визначник матриці A :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 5 + 1 - 10 + 3 + 4 = 27.$$

Система має єдиний розв'язок. Знаходимо Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 16 + 7 - 1 + 2 + 2 + 28 = 54;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -84 + 1 + 10 + 35 + 3 + 8 = -27;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 7 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 35 + 20 + 21 + 1 = 81.$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-27}{27} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{81}{27} = 3.$$

$$\text{Отже : } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2) Розв'яжемо систему матричним способом. Запишемо систему в матричній формі:

$$AX = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці A :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 5 + 1 - 10 + 3 + 4 = 27 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 9; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 9; & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 9; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 5; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -7; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 8; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7. \end{aligned}$$

Запишемо приєднану матрицю:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 9 & -7 & -4 \\ 9 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця матиме вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 9 & -7 & -4 \\ 9 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок системи:

$$X = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 9 & -7 & -4 \\ 9 & 8 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 18 + 35 + 1 \\ 18 - 49 + 4 \\ 18 + 56 + 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 54 \\ -27 \\ 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже : } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3) Розв'яжемо систему методом Гаусса. запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & -4 & -1 \end{array} \right).$$

Зведемо її, з допомогою перетворень над рядками матриці, до трикутного вигляду. Переставимо місцями перший та другий рядки матриці, отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & -4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -4 & -19 \\ 0 & 9 & -9 & -36 \end{array} \right) \begin{array}{l} \bar{a}_2 \leftarrow \bar{a}_2 + (-3)\bar{a}_1. \\ \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 + (-5)\bar{a}_1 \end{array}$$

Помножимо третій рядок на $\frac{1}{9}$ та поміняємо місцями з другим рядком,

отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -4 & -19 \\ 0 & 9 & -9 & -36 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & -4 & -19 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 + (-7)\bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \leftarrow \frac{1}{3}\bar{a}_3. \end{array} \sim$$

На цьому прямий хіж методу Гаусса завершено. Запишемо отриману систему у вигляді СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_2 - x_3 = -4, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Зворотнім ходом методу Гаусса знаходимо невідомі змінні:

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 2x_2 - x_3, \\ x_2 = -4 + x_3, \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 + 2 \cdot (-1) - 3, \\ x_2 = -4 + 3, \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Приклад 3.2. Дослідити систему лінійних неоднорідних рівнянь за теоремою Кронекера-Капеллі і розв'язати за методом Гаусса, якщо система має розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -7, \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання: Запишемо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -9 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -5 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right).$$

Знайдемо ранг матриці системи та ранг розширеної матриці. Для цього зведемо розширену матрицю до трикутного вигляду.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -9 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -5 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & -13 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -13 & -8 & 6 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \bar{a}_2 \leftarrow \bar{a}_2 + 3\bar{a}_1 \\ \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 + (-1)\bar{a}_1 \\ \bar{a}_4 \leftarrow \bar{a}_4 + (-2)\bar{a}_1 \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 + \bar{a}_2 \\ \bar{a}_4 \leftarrow \bar{a}_4 + \bar{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 8 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу матриці системи $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, тому згідно з теоремою Кронекера-Капеллі, задана система сумісна та має безліч розв'язків, які залежать від $n - r = 4 - 2 = 2$ параметрів.

Задана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 13x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 9. \end{cases}$$

Виберемо як базисні невідомі x_1, x_2 , відповідно x_3, x_4 – вільні невідомі.

Вільні невідомі перенесемо в праву частину, тобто отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 2 - 3x_3 + 2x_4, \\ 13x_2 = 9 - 8x_3 + 6x_4. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно базисних невідомих, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 - \frac{10}{13}, \\ x_2 = -\frac{8}{13}x_3 + \frac{6}{13}x_4 + \frac{9}{13}. \end{cases}$$

Надаючи вільним невідомим значень $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$ довільних значень

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, запишемо загальний розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{13}C_1 + \frac{2}{13}C_2 - \frac{10}{13}, \\ x_2 = -\frac{8}{13}C_1 + \frac{6}{13}C_2 + \frac{9}{13}, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases} \text{ або } \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13}C_1 + \frac{2}{13}C_2 - \frac{10}{13} \\ -\frac{8}{13}C_1 + \frac{6}{13}C_2 + \frac{9}{13} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13}C_1 + \frac{2}{13}C_2 - \frac{10}{13} \\ -\frac{8}{13}C_1 + \frac{6}{13}C_2 + \frac{9}{13} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Приклад 3.3. Дослідити систему лінійних неоднорідних рівнянь за теоремою Кронекера-Капеллі і розв'язати за методом Гаусса, якщо система має розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання: Запишемо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 7 \end{array} \right).$$

Знайдемо ранг матриці системи та ранг розширеної матриці. Для цього зведемо розширену матрицю до трикутного вигляду.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -7 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \bar{a}_2 \leftarrow \bar{a}_2 + (-1)\bar{a}_1 \\ \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 + (-2)\bar{a}_1 \\ \bar{a}_4 \leftarrow \bar{a}_4 + (-3)\bar{a}_1 \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 + (-0,5)\bar{a}_2 \\ \bar{a}_4 \leftarrow \bar{a}_4 + (-2)\bar{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \bar{a}_4 \leftarrow \bar{a}_4 + (-3)\bar{a}_3 \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу матриці системи:

$r(A) = r(\bar{A}) = n = 4$, тому згідно з теоремою Кронекера-Капеллі, задана система має єдиний розв'язок.

Одержана матриця є розширеною матрицею системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 6, \\ -x_3 + x_4 = -1, \\ -2x_4 = -2, \end{cases}$$

яка еквівалентна заданій системі рівнянь.

Розв'язком заданої системи рівнянь є $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 3.4. Дослідити систему лінійних неоднорідних рівнянь за теоремою Кронекера-Капеллі і розв'язати за методом Гаусса, якщо система має розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання: Запишемо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

Знайдемо ранг матриці системи та ранг розширеної матриці. Для цього зведемо розширену матрицю до трикутного вигляду.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \bar{a}_2 \leftarrow \bar{a}_2 + (-2)\bar{a}_1 \\ \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 + (-4)\bar{a}_1 \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right) \bar{a}_3 \leftarrow \bar{a}_3 + (-1)\bar{a}_1. \end{aligned}$$

Отже $r(A) \neq r(\bar{A})$, $r(A) = 2$, $r(\bar{A}) = 3$. За теоремою Кронекера-Капеллі така система не має розв'язку.

Відповідь: система не має розв'язку.

Розрахункове завдання

Завдання 3.1. Розв'язати систему лінійних неоднорідних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) матричним методом;
- 3) методом Гаусса.

У таблиці виписані елементи розширеної матриці

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

1. а) $\left(\begin{array}{ccc c} -3 & 5 & 6 & -8 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & -2 & -9 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 5 & 6 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right)$	2. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{array} \right)$	3. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 4 & 15 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right)$
4. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 11 \\ 1 & -2 & 2 & -7 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \end{array} \right)$	5. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 3 & -2 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -9 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 5 & 6 & -9 & 2 \end{array} \right)$	6. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 8 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{array} \right)$
7. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 8 & 3 & -6 & 12 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 4 & -7 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{array} \right)$	8. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 2 & 3 & 4 & 33 \\ 7 & -5 & 0 & 24 \\ 4 & 0 & 11 & 39 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 5 & -9 & -4 & 6 \\ 1 & -7 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$	9. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 2 & 3 & 4 & 12 \\ 7 & -5 & 1 & -33 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$

10. a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & & 6 \\ 0 & 5 & 4 & & -20 \\ 3 & -2 & 5 & & -22 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & & -3 \\ 1 & -1 & 5 & & 1 \\ 4 & -4 & -9 & & 0 \end{pmatrix}$	11. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & & 21 \\ 3 & 4 & -2 & & 9 \\ 2 & -1 & -1 & & 10 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 & & 2 \\ 6 & -4 & -5 & & 3 \\ 1 & 2 & 4 & & 5 \end{pmatrix}$	12. a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & & 5 \\ 2 & 3 & -4 & & 12 \\ 1 & -2 & 3 & & -1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & & 3 \\ 1 & 1 & -1 & & 4 \\ 3 & -4 & 2 & & 2 \end{pmatrix}$
13. a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & & 19 \\ 2 & -1 & 2 & & 11 \\ 1 & 1 & 2 & & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & & 1 \\ 2 & 2 & -3 & & 9 \\ 1 & -1 & 1 & & 2 \end{pmatrix}$	14. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & & 0 \\ 4 & 1 & 4 & & 6 \\ 1 & 1 & 2 & & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 & & 0 \\ 9 & 4 & -7 & & 3 \\ 3 & 1 & -2 & & 5 \end{pmatrix}$	15. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & & 8 \\ 1 & 1 & 2 & & 11 \\ 4 & 1 & 4 & & 22 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 & & 2 \\ 4 & 1 & 6 & & 1 \\ 4 & -2 & -3 & & 7 \end{pmatrix}$
16. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & & -9 \\ 1 & 5 & 1 & & 20 \\ 3 & 4 & 2 & & 15 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & & 5 \\ 1 & 1 & 5 & & 6 \\ 3 & 4 & 9 & & 0 \end{pmatrix}$	17. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & & 0 \\ 3 & 4 & 2 & & 1 \\ 1 & 5 & 1 & & -3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & & 1 \\ 7 & -9 & -1 & & 3 \\ 5 & -6 & 3 & & 7 \end{pmatrix}$	18. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & & 7 \\ 2 & 3 & 1 & & 1 \\ 3 & 2 & 1 & & 6 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & & 8 \\ 2 & 4 & -5 & & 11 \\ 1 & -2 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$
19. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & & -4 \\ -3 & 5 & 6 & & 36 \\ 1 & -4 & -2 & & -19 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & & 6 \\ 5 & -3 & 2 & & 4 \\ -2 & 5 & -4 & & 0 \end{pmatrix}$	20. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & & -11 \\ 5 & 1 & 2 & & 8 \\ 1 & 2 & 4 & & 16 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & 2 \\ 5 & 1 & 3 & & 4 \\ 7 & 2 & 4 & & 1 \end{pmatrix}$	21. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & & 9 \\ 5 & 1 & 2 & & 11 \\ 1 & 2 & 4 & & 19 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & & 3 \\ 1 & 3 & -5 & & 0 \\ 2 & 1 & -8 & & 4 \end{pmatrix}$
22. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & & 4 \\ 2 & 1 & 3 & & -0 \\ 3 & 2 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & & 0 \\ 3 & -5 & -6 & & 2 \\ 4 & -9 & -8 & & 1 \end{pmatrix}$	23. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & & 12 \\ 2 & 1 & 3 & & 16 \\ 3 & 2 & 1 & & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & & 1 \\ 3 & 1 & -1 & & 2 \\ 1 & 0 & -2 & & 5 \end{pmatrix}$	24. a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & & 14 \\ 2 & 3 & -4 & & -16 \\ 3 & -2 & -5 & & -8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & & 4 \\ 1 & 2 & 1 & & 8 \\ 2 & -7 & 2 & & 1 \end{pmatrix}$

25. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 3 & 4 & -2 & 11 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$	26. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 5 & -6 & -15 \\ 3 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & -3 & 1 & 9 \end{array}\right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 5 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \end{array}\right)$	27. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 4 & -1 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 5 & -14 \\ 1 & -3 & 4 & -19 \end{array}\right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 2 & 8 & -7 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right)$
28. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 5 & 2 & -4 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & 9 \end{array}\right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right)$	29. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 4 & -1 & -9 \\ 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & -6 \end{array}\right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -7 & 2 \\ 5 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right)$	30. а) $\left(\begin{array}{ccc c} 7 & 4 & -1 & 13 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \end{array}\right)$ б) $\left(\begin{array}{ccc c} 4 & -9 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & 1 & 11 \\ 3 & 5 & -4 & 5 \end{array}\right)$

Завдання 3.2. Дослідити систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

за теоремою Кронекера-Капеллі і, у випадку, якщо система має розв'язок, розв'язати її методом Гаусса. У таблиці виписані елементи розширеної матриці

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array} \right).$$

1) $\left(\begin{array}{cccc c} 2 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 6 \end{array}\right)$	2) $\left(\begin{array}{cccc c} 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$	3) $\left(\begin{array}{cccc c} 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$
---	---	--

4)	$\left(\begin{array}{cccc c} 5 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 4 & 9 \end{array}\right)$	5)	$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & -4 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$	6)	$\left(\begin{array}{cccc c} -2 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$
7)	$\left(\begin{array}{cccc c} 3 & 2 & -1 & 4 & 11 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$	8)	$\left(\begin{array}{cccc c} 3 & 1 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$	9)	$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$
10)	$\left(\begin{array}{cccc c} 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$	11)	$\left(\begin{array}{cccc c} 2 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$	12)	$\left(\begin{array}{cccc c} 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$
13)	$\left(\begin{array}{cccc c} 3 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$	14)	$\left(\begin{array}{cccc c} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$	15)	$\left(\begin{array}{cccc c} 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$
16)	$\left(\begin{array}{cccc c} -2 & 2 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$	17)	$\left(\begin{array}{cccc c} 6 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$	18)	$\left(\begin{array}{cccc c} 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$
19)	$\left(\begin{array}{cccc c} 4 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & -1 & -3 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$	20)	$\left(\begin{array}{cccc c} 5 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right)$	21)	$\left(\begin{array}{cccc c} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right)$
22)	$\left(\begin{array}{cccc c} 5 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right)$	23)	$\left(\begin{array}{cccc c} 3 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$	24)	$\left(\begin{array}{cccc c} 6 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$

25)	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 7 & & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & & 8 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & & -2 \\ 4 & 6 & -1 & 3 & & 0 \end{pmatrix}$	26)	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 & 4 & & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & & 1 \end{pmatrix}$	27)	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & & 3 \end{pmatrix}$
28)	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & & 7 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & & -1 \end{pmatrix}$	29)	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 & & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -2 & & -2 \end{pmatrix}$	30)	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 5 & & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$

Питання для самоперевірки

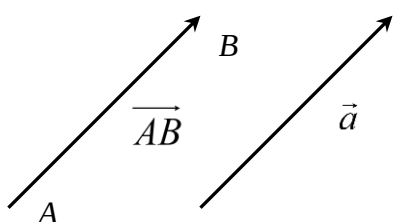
1. Дати означення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Що називають розв'язком системи?
3. Яка система називається сумісно (несумісною)?
4. Яка система називається визначеною (невизначеною)?
5. Сформулювати теорему Кронекера-Капеллі.
6. У чому суть матричного методу розв'язання СЛАР?
7. Що називають елементарними перетвореннями СЛАР?
8. У чому суть прямого ходу метода Гаусса розв'язання СЛАР?
9. У чому суть зворотнього ходу метода Гаусса розв'язання СЛАР?
10. Що таке базисний мінор?

ВЕКТОРИ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ВЕКТОРИ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Основні теоретичні відомості

Вектором називають впорядковану пару точок A і B простору. Ця пара визначає напрямлений відрізок (точка A є першою, точка B – другою), напрям якого на рисунку вказують стрілкою.

Геометричним вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ називають напрямлений відрізок із початком в точці A і кінцем у точці B .



**Рис. 1. Зображення
й позначення векторів**

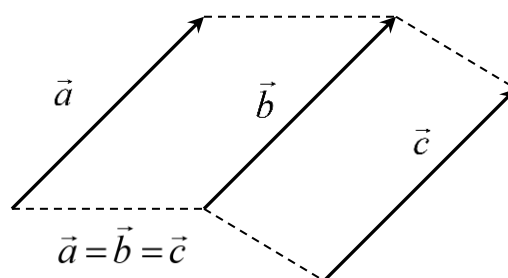


Рис. 2. Рівні вектори

Довжину (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають $|\overrightarrow{AB}|$.

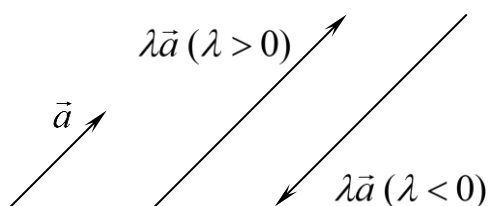
Якщо $|\vec{a}| = 0$, то вектор називають **нульовим** і позначають $\vec{0}$.

Якщо $|\vec{a}| = 1$, то вектор $\vec{a}$ називають **одиничним**, або **ортом**.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються **колінеарними**. Колінеарність позначають символом $\parallel$: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектори, які паралельні одній площині, називаються **компланарними**.

Вектори називають **рівними**, якщо вони мають однакові довжини та однакові напрями (рис. 2).



**Рис. 3. Множення вектора
на скаляр**

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ з довжиною $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$ і напрямом, який збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$, і протилежним напрямом $\vec{a}$ при $\lambda < 0$ (рис. 3).

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (правило трикутника (рис. 4)). Вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (правило паралелограма). Додавання кількох векторів здійснюється за правилом замикання ланцюжка векторів (правило многокутника (рис. 5)).

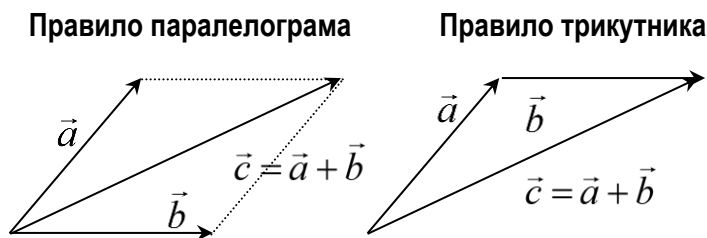


Рис. 4. Додавання двох векторів

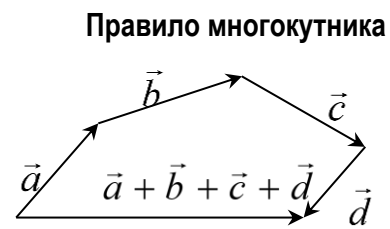


Рис. 5. Додавання кількох векторів

Різницю двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається сума вектора $\vec{a}$ й вектора $(-\vec{b})$, протилежного вектору $\vec{b}$ (рис. 6):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

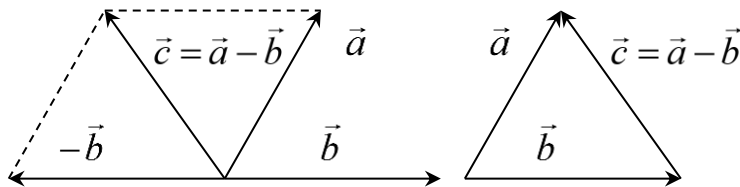


Рис. 6. Різниця двох векторів

Проекцією вектора на вісь називається довжина направленого відрізка, початок якого є проекція початку вектора і кінець – проекція його кінця, яка береться із знаком плюс, якщо напрями відрізка і осі збігаються, і зі знаком мінус, якщо їх напрями протилежні (рис.7).

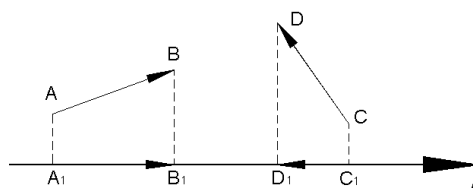


Рис. 7. Проекція вектора на вісь

$$np_i \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A_1B_1}|, \quad np_i \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{C_1D_1}|.$$

Базисом на площині називаються два упорядковані не колінеарні вектори. Базисом у тривимірному просторі називаються три упорядковані некомпланарні вектори. Якщо базисні вектори взаємно перпендикулярні (ортогональні), базис називають **ортогональним**.

Ортонормованим називають ортогональний базис утворений одиничними векторами. Якщо вектор $\vec{a}$ поданий у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

$$\vec{a} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3,$$

то кажуть, що він розкладений за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Вектори $c_1 \vec{e}_1, c_2 \vec{e}_2, c_3 \vec{e}_3$ називають **складовими (компонентами)** вектора $\vec{a}$, а числа c_1, c_2, c_3 – його **координатами** в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Зазвичай пишуть так: $\vec{a} = (c_1, c_2, c_3)$

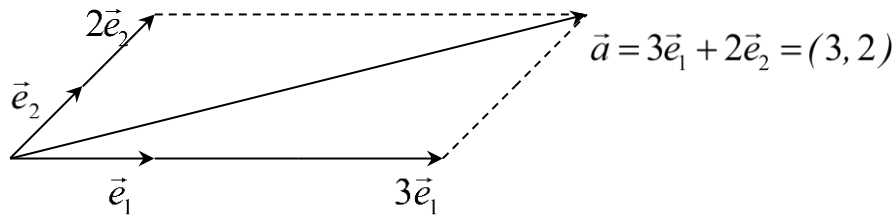


Рис. 8. Розкладання вектора за базисом

Прямокутна система координат. Нехай у просторі задано три попарно перпендикулярні осі OX, OY, OZ . Координатами вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ називаються проекції вектора на осі OX, OY, OZ :

$$a_x = np_{ox} \vec{a}, \quad a_y = np_{oy} \vec{a}, \quad a_z = np_{oz} \vec{a}.$$

Якщо $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти), що напрямлені по OX, OY, OZ , то координати вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (розклад вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Якщо $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ то: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Правила дій над векторами. Якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z); \quad k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z).$$

Довжина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$

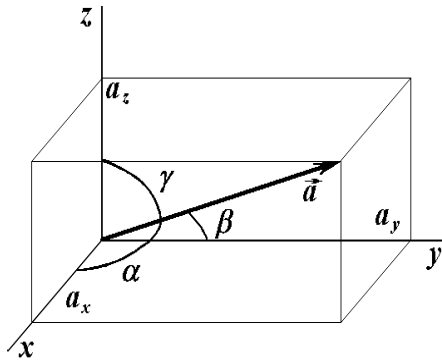


Рис. 9. Напрямлені косинуси

Напрямлені косинуси вектора:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

де α, β, γ – кути між $\vec{a}$ та осями OX ,

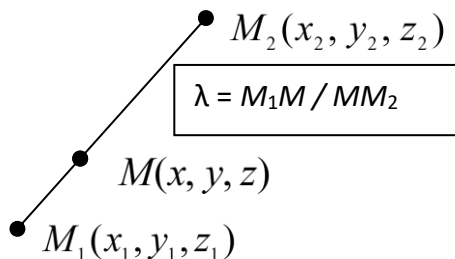
OY , OZ . Для напрямлених конусів

справедливо:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Координати точки поділу відрізка. Координати точки $M(x, y, z)$, яка поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = M_1M / MM_2$ (рис. 10), визначаються через координати точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$



При $\lambda = 1$ отримаємо

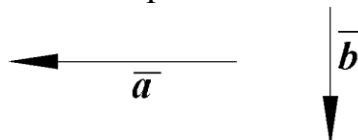
координати середини відрізка M_1M_2 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Рис. 10. Поділ відрізка

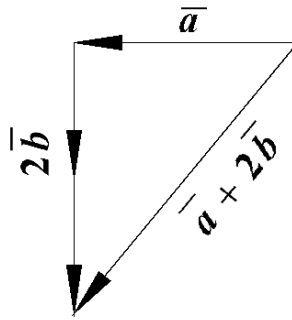
Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 4.1. Дано ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

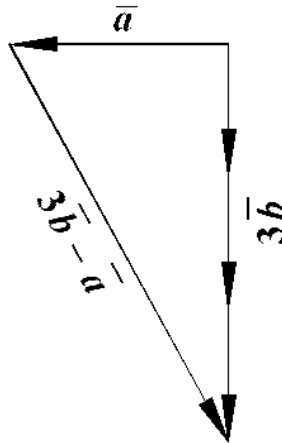


Побудувати вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{b} - \vec{a}$.

Розв'язання: Знайдемо суму за правилом трикутника $\vec{a} + 2\vec{b}$:



і різницю $3\bar{b} - \bar{a}$:



Приклад 4.2. Знайти периметр трикутника, вершинами якого є точки

$$A(8;0;6), B(8;-4;6), C(6;-2;5).$$

Розв'язанн: Знайдемо координати векторів, що створюють трикутник, та їх довжини:

$$\overline{AB} = (8-8; -4-0; 6-6), \quad \overline{AB} = (0; -4; 0);$$

$$\overline{AC} = (6-8; -2-0; 5-6), \quad \overline{AC} = (-2; -2; -1);$$

$$\overline{BC} = (6-8; -2-(-4); 5-6), \quad \overline{BC} = (-2; 2; -1);$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4;$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3;$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

Тоді периметр трикутника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

Відповідь: $P = 10$.

Приклад 4.4. Обчислити довжину вектора $3\bar{a} + 2\bar{b}$, якщо

$$\bar{a} = 2\bar{i}, \quad \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}.$$

Розв'язання: Знайдемо координати векторів:

$$3\bar{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot 0; 3 \cdot 0), \quad 3\bar{a} = (6; 0; 0);$$

$$2\bar{b} = (2 \cdot 1; 2 \cdot 1; 2 \cdot (-1)), \quad 2\bar{b} = (2; 2; -2);$$

$$3\bar{a} + 2\bar{b} = (6 + 2; 0 + 2; 0 - 2), \quad 3\bar{a} + 2\bar{b} = (8; 2; -2).$$

Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:

$$|3\bar{a} + 2\bar{b}| = \sqrt{(8)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Відповідь: $|3\bar{a} + 2\bar{b}| = 6\sqrt{2}.$

Приклад 4.4. Знайти орт і напрямні косинуси вектора $\bar{a}$, а також кути, що утворює вектор з осями координат, якщо $\bar{a} = \bar{i} - \bar{k}$.

Розв'язання: Знайдемо координати вектора $\bar{a} = (1; 0; -1)$ та його довжину:

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{0}{2} = 0; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді:

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad \beta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}; \quad \gamma = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Орт $\bar{a}^0$ вектора $\bar{a}$ обчислюється за формулою:

$$\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \left(\frac{\bar{a}_x}{|\bar{a}|}, \frac{\bar{a}_y}{|\bar{a}|}, \frac{\bar{a}_z}{|\bar{a}|} \right).$$

$$\text{Тому: } \bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Відповідь: $\vec{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \beta = 0, \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{3\pi}{4}.$

Приклад 4.5. Відрізок AB , де $A(7;2;-3)$, $B(-5;0;4)$, поділений точкою M у відношенні $\lambda = AM \div MB = 1 \div 5$. Знайти координати точки M .

Розв'язання:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{7 + \frac{1}{5}(-5)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)} = 5.$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + \frac{1}{5} \cdot 0}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\left(\frac{6}{5}\right)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

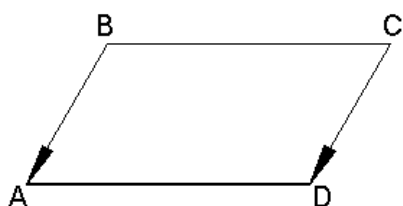
$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{5} \cdot 4}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\left(-\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)} = -\frac{11}{6}.$$

Отже, $M\left(5; \frac{5}{3}; -\frac{11}{6}\right).$

Відповідь: $M\left(5; \frac{5}{3}; -\frac{11}{6}\right).$

Приклад 4.6. Точки $A(-3;1;2)$, $B(1;3;2)$, $C(-4;1;0)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D .

Розв'язання.



Позначимо координати точки $D(x; y; z)$, тоді:

$$\overrightarrow{CD} = (x + 4; y - 1; z + 0), \quad \overrightarrow{BA} = (-4; -2; 0).$$

Оскільки $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BA}|$, їх координати рівні:

$$x + 4 = -4; \quad y - 1 = -2; \quad z = 0;$$

$$x = -8; \quad y = -1; \quad z = 0.$$

Четверта вершина паралелограма – точка $D(-8; -1; 0)$.

Відповідь: $D(-8; -1; 0)$.

Розрахункове завдання

Завдання 4.1. У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4).$$

Знайти:

- 1) координати і довжини векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$;
- 2) для векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ знайти $|\overrightarrow{2A_1A_2} - \overrightarrow{A_3A_4} + 3\overrightarrow{A_1A_4}|$;
- 3) розклад векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ за базисом;
- 4) орт та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{A_3A_4}$;
- 5) координати точки M , яка ділить відрізок A_3A_4 у відношенні $\lambda = A_3M \div MA_4 = 3 \div 1$;
- 6) периметр трикутника, вершинами якого є точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.
- 7) Точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ є вершинами паралелограма, причому A_1 і A_3 – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину A .

$$1. \quad A_1(5, 2, 3), \quad A_2(7, 5, -6), \quad A_3(-2, -5, -1), \quad A_4(-1, -1, -1).$$

$$2. \quad A_1(-2, 3, -2), \quad A_2(-3, 5, 4), \quad A_3(6, 5, 3), \quad A_4(2, -3, 4).$$

$$3. \quad A_1(-3, -5, 6), \quad A_2(2, 7, -2), \quad A_3(9, 6, 3), \quad A_4(7, 5, 3).$$

4. $A_1(6, -3, 2),$	$A_2(4, 8, -3),$	$A_3(3, 6, -4),$	$A_4(5, 3, 3).$
5. $A_1(4, 6, 3),$	$A_2(-6, 2, 6),$	$A_3(3, -2, 3),$	$A_4(-5, 6, 4).$
6. $A_1(2, 3, -4),$	$A_2(8, -3, 2),$	$A_3(6, 5, -3),$	$A_4(-4, 2, 3).$
7. $A_1(-2, 3, 4),$	$A_2(5, 5, 6),$	$A_3(2, 3, 4),$	$A_4(4, -3, 2).$
8. $A_1(8, 7, 5),$	$A_2(4, -3, 2),$	$A_3(6, 4, 1),$	$A_4(-2, 5, 8).$
9. $A_1(-5, 6, 4),$	$A_2(8, 9, 10),$	$A_3(4, 8, 7),$	$A_4(-2, 1, 5).$
10. $A_1(2, -1, 2),$	$A_2(3, 2, -2),$	$A_3(-3, 6, -2),$	$A_4(4, -1, -3).$
11. $A_1(1, -1, 3),$	$A_2(8, 5, 3),$	$A_3(9, 6, 3),$	$A_4(3, 6, -4).$
12. $A_1(-5, 6, 1),$	$A_2(-1, 3, 0),$	$A_3(1, -2, 2),$	$A_4(-1, 1, 3).$
13. $A_1(1, -7, 5),$	$A_2(0, -9, 7),$	$A_3(2, 3, -2),$	$A_4(-3, 1, -1).$
14. $A_1(1, 4, 1),$	$A_2(3, 2, 1),$	$A_3(1, -1, -3),$	$A_4(10, 7, 4).$
15. $A_1(-2, 4, 2),$	$A_2(3, 7, 0),$	$A_3(5, 4, 3),$	$A_4(-1, -3, 2).$
16. $A_1(6, 5, 4),$	$A_2(9, -2, 7),$	$A_3(6, 4, 1),$	$A_4(8, 3, 2).$
17. $A_1(3, 4, -1),$	$A_2(5, -1, 1),$	$A_3(-2, 0, 3),$	$A_4(-3, -5, 5).$
18. $A_1(2, 3, 4),$	$A_2(11, 4, 7),$	$A_3(6, 10, 12),$	$A_4(4, -1, 5).$
19. $A_1(1, 8, -3),$	$A_2(9, -2, 4),$	$A_3(12, 5, 4),$	$A_4(8, -2, 4).$
20. $A_1(4, -3, 5),$	$A_2(6, 9, 0),$	$A_3(7, 3, 4),$	$A_4(2, 3, 5).$
21. $A_1(1, 1, 1),$	$A_2(2, -1, 1),$	$A_3(4, -2, 3),$	$A_4(8, -4, 5).$
22. $A_1(6, -3, 2),$	$A_2(5, 1, 4),$	$A_3(2, 1, 1),$	$A_4(4, 0, -2).$
23. $A_1(0, -2, 1),$	$A_2(4, -2, 1),$	$A_3(-2, 0, -2),$	$A_4(-10, 2, -3).$
24. $A_1(9, 7, 4),$	$A_2(3, -2, -5),$	$A_3(4, 7, 6),$	$A_4(8, 0, -4).$
25. $A_1(1, 1, -3),$	$A_2(-2, -1, 1),$	$A_3(3, 1, -2),$	$A_4(8, 2, -3).$
26. $A_1(6, 4, -1),$	$A_2(-2, 5, -2),$	$A_3(3, 3, 5),$	$A_4(4, -4, 3).$
27. $A_1(4, -3, 3),$	$A_2(5, 2, 6),$	$A_3(2, 3, 2),$	$A_4(5, 0, -2).$
28. $A_1(5, 2, -4),$	$A_2(8, -1, 7),$	$A_3(5, 6, 3),$	$A_4(-1, 4, 2).$
29. $A_1(-1, 4, 4),$	$A_2(7, 6, 3),$	$A_3(2, 4, 7),$	$A_4(7, -5, 3).$
30. $A_1(6, 6, 4),$	$A_2(5, -4, 1),$	$A_3(7, 8, 3),$	$A_4(-4, 6, 2).$

Завдання 4.2. У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4).$$

Побудувати вектори:

1) $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_3A_4};$

2) $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4};$

3) $\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_3A_4};$

4) $2\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_3A_4} + 3\overrightarrow{A_1A_4}.$

1. $A_1(1, 4), \quad A_2(3, 2), \quad A_3(1, -1), \quad A_4(10, 7).$

2. $A_1(-2, 3), \quad A_2(-3, 5), \quad A_3(6, 5), \quad A_4(2, -3).$

3. $A_1(-3, -5), \quad A_2(2, 7), \quad A_3(9, 6), \quad A_4(7, 5).$

4. $A_1(6, -3), \quad A_2(4, 8), \quad A_3(3, 6), \quad A_4(5, 3).$

5. $A_1(4, 6), \quad A_2(-6, 2), \quad A_3(3, -2), \quad A_4(-5, 6).$

6. $A_1(2, 3), \quad A_2(8, -3), \quad A_3(6, 5), \quad A_4(-4, 2).$

7. $A_1(-2, 3), \quad A_2(5, 5), \quad A_3(2, 3), \quad A_4(4, -3).$

8. $A_1(8, 7), \quad A_2(4, -3), \quad A_3(6, 4), \quad A_4(-2, 5).$

9. $A_1(-5, 6), \quad A_2(8, 9), \quad A_3(4, 8), \quad A_4(-2, 1).$

10. $A_1(2, -1), \quad A_2(3, 2), \quad A_3(-3, 6), \quad A_4(4, -1).$

11. $A_1(1, -1), \quad A_2(8, 5), \quad A_3(9, 6), \quad A_4(3, 6).$

12. $A_1(-5, 6), \quad A_2(-1, 3), \quad A_3(1, -2), \quad A_4(-1, 1).$

13. $A_1(1, -7), \quad A_2(0, -9), \quad A_3(2, 3), \quad A_4(-3, 1).$

14. $A_1(5, 2), \quad A_2(7, 5), \quad A_3(-2, -5), \quad A_4(-1, -1).$

15. $A_1(-2, 4), \quad A_2(3, 7), \quad A_3(5, 4), \quad A_4(-1, -3).$

16. $A_1(6, 5), \quad A_2(9, -2), \quad A_3(6, 4), \quad A_4(8, 3).$

17. $A_1(3, 4), \quad A_2(5, -1), \quad A_3(-2, 0), \quad A_4(-3, -5).$

18. $A_1(2, 3), \quad A_2(11, 4), \quad A_3(6, 10), \quad A_4(4, -1).$

- | | | | | |
|-----|---------------|----------------|---------------|----------------|
| 19. | $A_1(1, 8),$ | $A_2(9, -2),$ | $A_3(12, 5),$ | $A_4(8, -2).$ |
| 20. | $A_1(4, -3),$ | $A_2(6, 9),$ | $A_3(7, 3),$ | $A_4(2, 3).$ |
| 21. | $A_1(1, 1),$ | $A_2(2, -1),$ | $A_3(4, -2),$ | $A_4(8, -4).$ |
| 22. | $A_1(6, -3),$ | $A_2(5, 1),$ | $A_3(2, 1),$ | $A_4(4, 0).$ |
| 23. | $A_1(0, -2),$ | $A_2(4, -2),$ | $A_3(-2, 0),$ | $A_4(-10, 2).$ |
| 24. | $A_1(9, 7),$ | $A_2(3, -2),$ | $A_3(4, 7),$ | $A_4(8, 0).$ |
| 25. | $A_1(1, 1),$ | $A_2(-2, -1),$ | $A_3(3, 1),$ | $A_4(8, 2).$ |
| 26. | $A_1(6, 4),$ | $A_2(-2, 5),$ | $A_3(3, 3),$ | $A_4(4, -4).$ |
| 27. | $A_1(4, -3),$ | $A_2(5, 2),$ | $A_3(2, 3),$ | $A_4(5, 0).$ |
| 28. | $A_1(5, 2),$ | $A_2(8, -1),$ | $A_3(5, 6),$ | $A_4(-1, 4).$ |
| 29. | $A_1(-1, 4),$ | $A_2(7, 6),$ | $A_3(2, 4),$ | $A_4(7, -5).$ |
| 30. | $A_1(6, 6),$ | $A_2(5, -4),$ | $A_3(7, 8),$ | $A_4(-4, 6).$ |

Питання для самоперевірки

1. Дати означення вектора.
2. Які вектори називають колінеарними?
3. Які вектори називають компланарними?
4. Як знайти суму векторів (правило замикача)?
5. Сформулювати властивості лінійних дій над векторами.
6. Що таке орт вектора?
7. Сформулювати означення лінійної комбінації векторів.
8. Що таке базис векторного простору? Як розкласти вектор за базисом?
9. Як знайти координати вектора?
10. Як визначити координати точки поділу відрізка у заданому відношенні?

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Основні теоретичні відомості

Скалярним добутком векторів називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Якщо вектори задані своїми координатами:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \vec{b} = (b_x; b_y; b_z),$$

то скалярний добуток обчислюють за формулою: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Кут між векторами обчислюють за формулою:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0) = |\vec{a}|^2$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

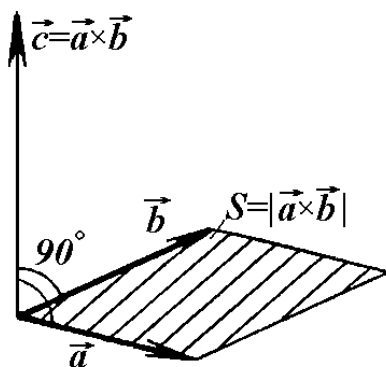


Рис. 1. Геометричне зображення векторного добутку

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

називається третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто третій вектор має такий напрям, що при

спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ виконується проти годинникової стрілки (рис 1).

Площа паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Площа трикутника обчислюється за формулою: $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Векторний добуток векторів, які задані своїми координатами, обчислюються за формулою:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad (\text{або } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}).$$

Мішаним добутком трьох векторів називається добуток $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Частіше мішаний добуток позначається $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Якщо вектори задані своїми координатами

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z),$$

то мішаний добуток дорівнює визначнику, складеному з координат цих векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z.$$

Мішаний добуток некопланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює **об'єму паралелепіпеда**, побудованого на цих векторах, взятому із знаком плюс, якщо трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права і зі знаком мінус, якщо трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ліва.

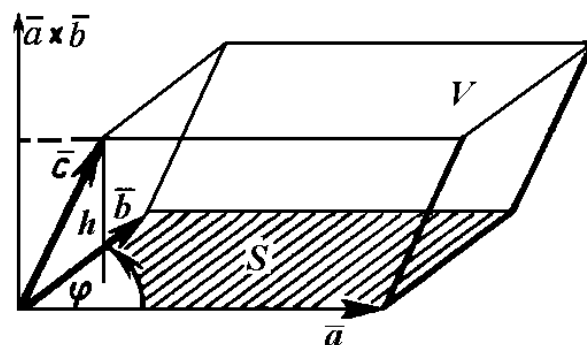


Рис. 2. Прямокутний паралепіпед

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 2):

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Об'єм чотирикутної піраміди (рис. 3):

$$V = \frac{1}{3} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Об'єм трикутної піраміди (рис. 4):

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

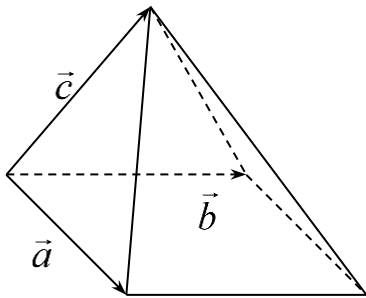


Рис. 3. Чотирикутна піраміда

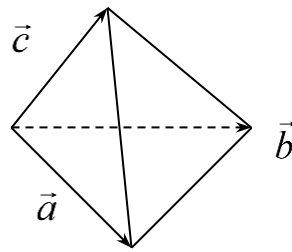


Рис. 4. Трикутна піраміда

Необхідною й достатньою **умовою компланарності** трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \text{вектори } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарні.}$$

Якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ – трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права;

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ – трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ліва.

Основна алгебраїчна властивість мішаного добутку

Колова перестановка трьох множників мішаного добутку не змінює його значення; перестановка двох сусідніх множників змінює знак добутку:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$$

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 5.1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = 4\vec{k} - \vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{i} - \vec{k}$.

Розв'язання: Знайдемо координати векторів: $\vec{a}(-1; 0; 4)$, $\vec{b}(1; 3; -1)$.

Тоді скалярний добуток дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5$.

Відповідь: 5.

Приклад 5.2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}$.

Розв'язання: Як відомо, діагоналі паралелограма є

$$\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \text{ та } \vec{d} = (\vec{a} - \vec{b}).$$

Знайдемо ці вектори:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + (3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}) = 5\vec{j} - 5\vec{k};$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (0; 5; -5);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) - (3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k};$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (2; -1; 3).$$

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться за формулою:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{c}, \vec{d}) &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + (-5) \cdot 3}{\sqrt{5^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \\ &= \frac{-5 - 15}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-20}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7}} = -\frac{20}{10\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}; \\ \cos(\vec{c}, \vec{d}) &= \arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right). \end{aligned}$$

Відповідь: $\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$.

Приклад 5.3. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання: Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot (2 - 1) - \vec{j} \cdot (2 + 2) + \vec{k} \cdot (-1 - 2) = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}.\end{aligned}$$

Площа паралелограма дорівнює:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $S = \sqrt{26} \text{ (кв. од.)}.$

Приклад 5.4. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$.

Розв'язання: Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.

$\vec{AB} = (-1; 2; -4)$, $\vec{AC} = (5; 4; -8)$. Векторний добуток дорівнює:

$$\begin{aligned}\vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot (-16 + 16) - \vec{j} \cdot (8 + 20) + \vec{k} \cdot (-4 - 10) = -28\vec{j} - 14\vec{k}.\end{aligned}$$

Тоді площа трикутника дорівнює:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 14^2} = 7\sqrt{5} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $7\sqrt{5} \text{ (кв. од.)}.$

Приклад 5.5. Обчислити об'єм паралелепіпеду і піраміди, які побудовані на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{k} - 3\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Розв'язання: Об'єм паралелепіпеду дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15 - 2) = -51.$$

Тоді об'єми паралелепіпеду і піраміди дорівнюють:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |-51| = 51 (\text{куб. од.});$$

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{51}{6} = \frac{17}{2} = 8,5 (\text{куб. од.}).$$

Відповідь: $V_{\text{пар}} = 51 (\text{куб. од.})$, $V_{\text{піраміди}} = 8,5 (\text{куб. од.})$.

Розрахункове завдання

Завдання 5. У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4).$$

Знайти:

- 1) скалярний добуток векторів $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_4}$;
- 2) кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_4}$;
- 3) площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{A_4A_3}$, $\vec{A_4A_1}$;
- 4) площу трикутника $A_1A_2A_4$;
- 5) об'єм паралелепіпеда, чотирикутної і трикутної піраміди, побудованих на векторах $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$, $\vec{A_1A_4}$.

- | | | | |
|----------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $A_1(6, 6, 4),$ | $A_2(5, -4, 1),$ | $A_3(7, 8, 3),$ | $A_4(-4, 6, 2).$ |
| 2. $A_1(5, 2, 3),$ | $A_2(7, 5, -6),$ | $A_3(-2, -5, -1),$ | $A_4(-1, -1, -1).$ |
| 3. $A_1(-2, 3, -2),$ | $A_2(-3, 5, 4),$ | $A_3(6, 5, 3),$ | $A_4(2, -3, 4).$ |

4. $A_1(-3, -5, 6),$	$A_2(2, 7, -2),$	$A_3(9, 6, 3),$	$A_4(7, 5, 3).$
5. $A_1(6, -3, 2),$	$A_2(4, 8, -3),$	$A_3(3, 6, -4),$	$A_4(5, 3, 3).$
6. $A_1(4, 6, 3),$	$A_2(-6, 2, 6),$	$A_3(3, -2, 3),$	$A_4(-5, 6, 4).$
7. $A_1(2, 3, -4),$	$A_2(8, -3, 2),$	$A_3(6, 5, -3),$	$A_4(-4, 2, 3).$
8. $A_1(-2, 3, 4),$	$A_2(5, 5, 6),$	$A_3(2, 3, 4),$	$A_4(4, -3, 2).$
9. $A_1(8, 7, 5),$	$A_2(4, -3, 2),$	$A_3(6, 4, 1),$	$A_4(-2, 5, 8).$
10. $A_1(-5, 6, 4),$	$A_2(8, 9, 10),$	$A_3(4, 8, 7),$	$A_4(-2, 1, 5).$
11. $A_1(2, -1, 2),$	$A_2(3, 2, -2),$	$A_3(-3, 6, -2),$	$A_4(4, -1, -3).$
12. $A_1(1, -1, 3),$	$A_2(8, 5, 3),$	$A_3(9, 6, 3),$	$A_4(3, 6, -4).$
13. $A_1(-5, 6, 1),$	$A_2(-1, 3, 0),$	$A_3(1, -2, 2),$	$A_4(-1, 1, 3).$
14. $A_1(1, -7, 5),$	$A_2(0, -9, 7),$	$A_3(2, 3, -2),$	$A_4(-3, 1, -1).$
15. $A_1(1, 4, 1),$	$A_2(3, 2, 1),$	$A_3(1, -1, -3),$	$A_4(10, 7, 4).$
16. $A_1(-2, 4, 2),$	$A_2(3, 7, 0),$	$A_3(5, 4, 3),$	$A_4(-1, -3, 2).$
17. $A_1(6, 5, 4),$	$A_2(9, -2, 7),$	$A_3(6, 4, 1),$	$A_4(8, 3, 2).$
18. $A_1(3, 4, -1),$	$A_2(5, -1, 1),$	$A_3(-2, 0, 3),$	$A_4(-3, -5, 5).$
19. $A_1(2, 3, 4),$	$A_2(11, 4, 7),$	$A_3(6, 10, 12),$	$A_4(4, -1, 5).$
20. $A_1(1, 8, -3),$	$A_2(9, -2, 4),$	$A_3(12, 5, 4),$	$A_4(8, -2, 4).$
21. $A_1(4, -3, 5),$	$A_2(6, 9, 0),$	$A_3(7, 3, 4),$	$A_4(2, 3, 5).$
22. $A_1(1, 1, 1),$	$A_2(2, -1, 1),$	$A_3(4, -2, 3),$	$A_4(8, -4, 5).$
23. $A_1(6, -3, 2),$	$A_2(5, 1, 4),$	$A_3(2, 1, 1),$	$A_4(4, 0, -2).$
24. $A_1(0, -2, 1),$	$A_2(4, -2, 1),$	$A_3(-2, 0, -2),$	$A_4(-10, 2, -3).$
25. $A_1(9, 7, 4),$	$A_2(3, -2, -5),$	$A_3(4, 7, 6),$	$A_4(8, 0, -4).$
26. $A_1(1, 1, -3),$	$A_2(-2, -1, 1),$	$A_3(3, 1, -2),$	$A_4(8, 2, -3).$
27. $A_1(6, 4, -1),$	$A_2(-2, 5, -2),$	$A_3(3, 3, 5),$	$A_4(4, -4, 3).$
28. $A_1(4, -3, 3),$	$A_2(5, 2, 6),$	$A_3(2, 3, 2),$	$A_4(5, 0, -2).$
29. $A_1(5, 2, -4),$	$A_2(8, -1, 7),$	$A_3(5, 6, 3),$	$A_4(-1, 4, 2).$
30. $A_1(-1, 4, 4),$	$A_2(7, 6, 3),$	$A_3(2, 4, 7),$	$A_4(7, -5, 3).$

Питання для самоперевірки

1. Сформулювати означення вектора.
2. Сформулювати означення скалярного добутку двох векторів.
3. Які застосування має скалярний добуток в геометрії та фізиці?
4. Який геометричний зміст координат вектора в ортонормованому базисі?
5. Сформулювати означення векторного добутку двох векторів.
6. Сформулювати критерій колінеарності векторів.
7. Який геометричний та фізичний зміст векторного добутку?
8. Сформулювати означення мішаного добутку трьох векторів.
9. Сформулювати умову компланарності трьох векторів.
10. Який геометричний зміст мішаного добутку?

ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Основні теоретичні відомості

Комплексним числом z називається впорядкована пара дійсних чисел $(x; y)$. Число x називається **дійсною** частиною комплексного числа та позначається $\operatorname{Re} z$, y називається **уявною** частиною та позначається $\operatorname{Im} z$.

Будемо вважати, що дійсні числа є частинним випадком комплексних чисел. Якщо ототожнити дійсне число x з комплексним числом $(x; 0)$ та назвати пару $(0; 1)$ числом i – **уявною одиницею**, то число z можна записати у вигляді:

$$z = x + i y.$$

Така форма запису комплексного числа називається алгебраїчною, а дії додавання та множення з числами в алгебраїчній формі зводяться до стандартних перетворень з урахуванням рівності $i^2 = -1$.

Число $\bar{z} = x - i y$ називається числом, **спряженим** до числа $z = x + i y$.

Добуток спряжених комплексних чисел є дійсним числом :

$$z \cdot \bar{z} = (x + i y) \cdot (x - i y) = x^2 + y^2.$$

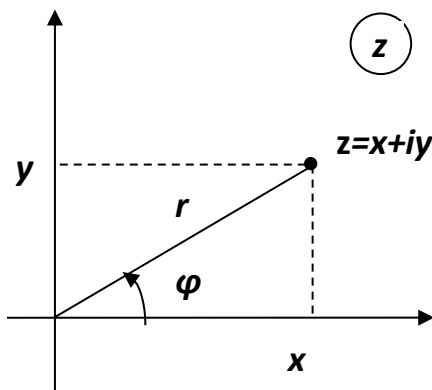


Рис. 1. Геометричне зображення комплексних чисел

Геометричним образом комплексного числа $z = x + i y$ є точка на координатній площині з відповідними декартовими координатами. Полярні координати цієї точки також є важливими характеристиками комплексного числа. Відповідний полярний радіус називається **модулем** комплексного числа, а полярний кут – його **аргументом**:

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Дійсна та уявна частини комплексного числа зв'язані з його модулем та аргументом співвідношеннями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Кожній точці координатної площини відповідає безліч значень полярного кута, які відрізняються одне від одного на $2\pi n$, де n – ціле число.

Для однозначного визначення аргументу комплексного числа будемо обирати його з певного проміжку довжиною 2π . Таке значення аргументу називається його **головним значенням** та позначається $\arg z$. Будемо вважати, що $\arg z$ належить проміжку $(-\pi; \pi]$ (досить часто також використовують проміжок $[0; 2\pi)$). Тоді модуль та головне значення аргументу комплексного числа доцільно обчислювати за формулами

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} 0, & x > 0, y = 0; \\ \arctg \frac{y}{x} = \arccos \frac{x}{r}, & x > 0, y > 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} = \arccos \frac{x}{r}, & x < 0, y > 0; \\ \pi, & x < 0, y = 0; \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} = -\arccos \frac{x}{r}, & x < 0, y < 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0; \\ \arctg \frac{y}{x} = -\arccos \frac{x}{r}, & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Форми запису комплексних чисел

Алгебраїчна форма запису комплексного числа: $z = x + iy$.

Комплексне число можна представити у вигляді: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Така форма запису комплексного числа називається **тригонометричною**.

З урахуванням формули Ейлера $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ комплексне число може бути записано у **показниковій** формі: $z = r e^{i\varphi}$.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Розглянемо комплексні числа:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Додавання, віднімання і множення комплексних чисел виконують за правилами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Ділення комплексних чисел виконується шляхом домноження чисельника та знаменника дробу на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Розглянемо комплексні числа:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

З означень дій над комплексними числами і тригонометричної форми комплексного числа випливає, що:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)];$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \text{ — формула Муавра.}$$

Дії над комплексними числами в показниковій формі

Якщо комплексні числа записані у показниковій формі

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

то дії множення, ділення та піднесення до натурального степеня виконуються за правилами

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1} \right) \left(r_2 e^{i\varphi_2} \right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z^n = \left(r e^{i\varphi} \right)^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Коренем n -го степеня з комплексного числа $z = r e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ називається таке число, n -ий степінь якого дорівнює z . Обчислення кореня виконується за формулою:

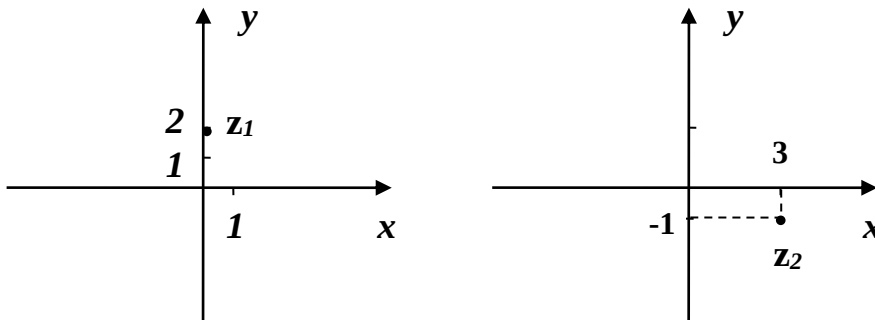
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

тобто корінь n -го степеня має n значень.

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 6.1. Побудувати на комплексній площині числа $z_1 = 2i$, $z_2 = 3 - i$.

Розв'язання: Числу $z_1 = 2i$ на координатній площині відповідає точка з координатами $(0; 2)$, а числу $z_2 = 3 - i$ – точка $(3; -1)$.



Приклад 6.2. Виконати арифметичні дії над комплексними числами:

$$z_1 = 1 + 5i, \quad z_2 = 2 - i.$$

Розв'язання:

$$z_1 + z_2 = (1 + 5i) + (2 - i) = 3 + 4i;$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 5i) - (2 - i) = -1 + 6i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1+5i) \cdot (2-i) = 2+10i-i-5i^2 = 2+9i-5 \cdot (-1) = 7+9i;$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+5i}{2-i} = \frac{(1+5i) \cdot (2+i)}{(2-i) \cdot (2+i)} = \frac{2+10i+i+5i^2}{4-i^2} = \frac{2+11i+5 \cdot (-1)}{4-(-1)} = \\ &= \frac{-3+11i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i. \end{aligned}$$

Відповідь: $z_1 + z_2 = 3+4i$; $z_1 - z_2 = -1+6i$; $z_1 \cdot z_2 = 7+9i$; $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$.

Приклад 6.3. Записати комплексні числа у показниковій та тригонометричній формах:

а) $z_1 = 1-i$; б) $z_2 = -1+\sqrt{3}i$.

Розв'язання:

а) Обчислимо модуль та головне значення аргумента комплексного числа:

$$x_1 = \operatorname{Re} z_1 = 1, \quad y_1 = \operatorname{Im} z_1 = -1.$$

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$\varphi_1 = \arg z_1 = -\arccos \frac{x_1}{|z_1|} = -\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}, \text{ або}$$

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тоді:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) - \text{тригонометрична форма,}$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} - \text{показникова форма.}$$

б) Обчислимо модуль та головне значення аргумента комплексного числа:

$$x_2 = \operatorname{Re} z_2 = -1, \quad y_2 = \operatorname{Im} z_2 = \sqrt{3};$$

$$|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \arccos \frac{x_2}{|z_2|} = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}, \text{ або}$$

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x_2} = \pi + \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тоді:

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) - \text{тригонометрична форма,}$$

$$z_2 = 2 e^{\frac{2\pi}{3} i} - \text{показникова форма.}$$

Відповідь: а) $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4} i};$

б) $z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 e^{\frac{2\pi}{3} i}.$

Приклад 6.4. Піднести комплексні числа до степеня:

а) $z_1 = (1-i)^7;$ б) $z_2 = (-1 + \sqrt{3}i)^5.$

Розв'язання: Скористаємося результатами попереднього прикладу. За формулою Муавра:

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 &= (\sqrt{2})^7 \left(\cos 7 \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin 7 \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = (\sqrt{2})^7 e^{7 \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) i} = \\ &= 8\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{4} \right) \right) = 8\sqrt{2} e^{-\frac{7\pi}{4} i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } z_2 &= 2^5 \left(\cos 5 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \sin 5 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) = 2^5 e^{5 \cdot \frac{2\pi}{3} i} = \\ &= 32 \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right) = 32 e^{\frac{10\pi}{3} i}. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $= 8\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{4} \right) \right) = 8\sqrt{2} e^{-\frac{7\pi}{4} i};$

$$б) = 32 \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right) = 32 e^{\frac{10\pi}{3} i}.$$

Приклад 6.5. Знайти всі значення коренів і зобразити їх на комплексній площині:

$$а) \sqrt{1 + \sqrt{3}i}; \quad б) \sqrt[3]{-8}.$$

Розв'язання:

а) Обчислимо модуль та головне значення аргументу комплексного числа.

$$x = \operatorname{Re} z = 1, \quad y = \operatorname{Im} z = \sqrt{3}; \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\varphi = \arg z = \arccos \frac{x}{|z|} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Тоді } z = 2 e^{\frac{\pi}{3} i}.$$

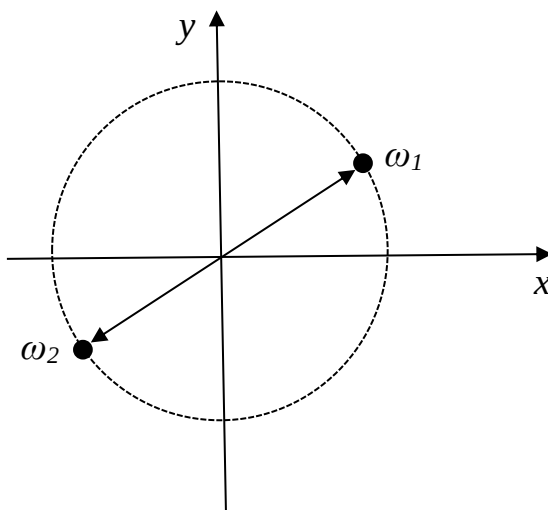
За правилом обчислення кореня з комплексного числа маємо

$$\omega = \sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{|z|} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{k}}, \quad k = 1, 2.$$

$$k = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



б) Обчислимо модуль та головне значення аргументу комплексного числа

$$\sqrt[3]{-8}.$$

$$x = \operatorname{Re} z = -8, \quad y = \operatorname{Im} z = 0; \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8;$$

$$\varphi = \arg z = \arccos \frac{x}{|z|} = \arccos \left(-\frac{8}{8} \right) = \arccos(-1) = \pi.$$

$$\text{Тоді } z = 8e^{i\pi}.$$

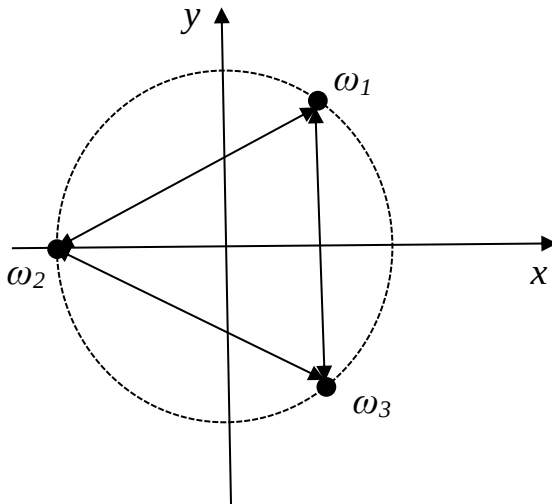
За правилом обчислення кореня з комплексного числа маємо

$$\omega = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{3}}, \quad k=1, 2, 3.$$

$$k=0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt[3]{8} e^{i \frac{\pi}{3}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$k=1 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt[3]{8} e^{i \frac{\pi+2\pi}{3}} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2$$

$$k=2 \Rightarrow \omega_3 = \sqrt[3]{8} e^{i \frac{\pi+4\pi}{3}} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$



Відповідь: а) $\omega_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2};$

б) $\omega_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad \omega_2 = -2, \quad \omega_3 = 1 - i\sqrt{3}.$

Розрахункове завдання

Завдання 6. Для чисел z_1, z_2 :

- 1) побудувати числа z_1, z_2 на комплексній площині;
- 2) знайти $2z_2 - 3z_1; \frac{z_1}{z_2}; z_2 \cdot (z_1 + 2\bar{z}_2);$
- 3) записати z_1, z_2 в показниковій і тригонометричній формі;
- 4) знайти z_2^5 ;
- 5) знайти всі значення кореня $\sqrt[5]{z_1}$ і зобразити їх на комплексній площині.

1. $z_1 = 7 + 3i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$;	16. $z_1 = 9 - 10i$, $z_2 = -1 + i$;
2. $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$;	17. $z_1 = 10 - 10i$, $z_2 = -10 + 10i$;
3. $z_1 = 7 + i$, $z_2 = -3 + 3i$;	18. $z_1 = -7 + 5i$, $z_2 = 9 - 9i$;
4. $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = 6 - 6i$;	19. $z_1 = 6 - i$, $z_2 = -8 - 8i$;
5. $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -2 + 2i$;	20. $z_1 = 3 - 3i$, $z_2 = -3 + \sqrt{3}i$;
6. $z_1 = -6 - 2i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$;	21. $z_1 = 1 - 11i$, $z_2 = -11 + 11i$;
7. $z_1 = 7 + 3i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$;	22. $z_1 = 9 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$;
8. $z_1 = -5 - 7i$, $z_2 = 3 - \sqrt{3}i$;	23. $z_1 = -7 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$;
9. $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = \sqrt{3} - 3i$;	24. $z_1 = -6 - i$, $z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$;
10. $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = -5 + 5i$;	25. $z_1 = -4 - 7i$, $z_2 = 3 - 3i$;
11. $z_1 = 11 - 3i$, $z_2 = 8 - 8i$;	26. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 1 - i$;
12. $z_1 = -12 - 4i$, $z_2 = -3 - \sqrt{3}i$;	27. $z_1 = \sqrt{3} + 3i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$;
13. $z_1 = -6 + 13i$, $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$;	28. $z_1 = 1 + 7i$, $z_2 = -7 - 7i$;
14. $z_1 = 9 - 6i$, $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$;	29. $z_1 = 5 - 9i$, $z_2 = 5 - 5i$;
15. $z_1 = -18 - i$, $z_2 = -1 - i$;	30. $z_1 = -7 - i$, $z_2 = 5 - 5i$.

Питання для самоперевірки

1. Дати означення комплексного числа.
2. Як записують комплексні числа в алгебраїчній формі?
3. Як записують комплексні числа в тригонометричній формі?
4. Як записують комплексні числа в показниковій формі?
5. Наведіть означення дій над комплексними числами в алгебраїчній та тригонометричній формах.
6. Наведіть означення дій над комплексними числами в показниковій формі.
7. Як зображають комплексні числа?
8. Які алгебраїчні дії з комплексними числами простіші в алгебраїчній, а які – в тригонометричній формі?
9. Запишіть формулу Муавра.
10. Запишіть формулу для добування кореня з комплексного числа.

ПРЯМА В ПРОСТОРИ $\mathbb{R}^2$

Основні теоретичні відомості

Рівняння вигляду

$$Ax + By + C = 0$$

за умови, що коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю, називається *загальним рівнянням прямої*.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n} = (A; B)$ у координатній формі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Нехай $M_0(x_0; y_0)$ – задана точка прямої, а $\vec{q} = (m; n)$ – вектор, колінеарний прямій. Рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

називається *канонічним рівнянням прямої*.

Рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де a і b – відповідно абсциса і ордината точки перетину прямої з осями Ox і Oy .

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = kx + b,$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт, який дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox ; b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy .

Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$,

має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, обчислюється за формулою:

$$\cos(\varphi) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Якщо прямі задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то **кут між прямими** обчислюється за формулою:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Умова паралельності двох прямих: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; k_1 = k_2.$

Умова перпендикулярності двох прямих: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0; k_2 = -\frac{1}{k_1}.$

Рівняння пучка прямих, які проходять через дану точку $M_0(x_0; y_0)$, має вигляд: $y - y_0 = k(x - x_0).$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 7.1. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -3)$ і паралельна вектору $\vec{l} = (2; -2).$

Розв'язання: Використовуючи канонічне рівняння прямої, маємо:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 3}{-2}.$$

Зведемо рівняння до загального вигляду:

$$-2(x - 2) = 2(y + 3); -x + 2 = y + 3; x + y + 1 = 0.$$

Відповідь: $x + y + 1 = 0$.

Приклад 7.2. Загальне рівняння прямої $3x - 4y + 12 = 0$ перетворити в рівняння у відрізках на осях та побудувати пряму.

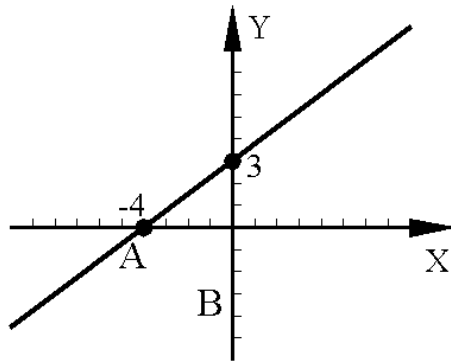
Розв'язання: Перетворимо рівняння:

$$3x - 4y = -12.$$

Праву та ліву частини рівняння розділимо на (-12) :

$$\frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} = 1.$$

Тоді $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ – рівняння у відрізках на осях. Тобто $a = -4$ і $b = 3$.



Отже дістанемо точки $A(-4; 0)$ і $B(0; 3)$.

Пряма, яка проведена через точки A і B – шукана.

Відповідь: $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$.

Приклад 7.3. Обчислити кутовий коефіцієнт прямої $3x + 2y + 6 = 0$.

Розв'язання: Розв'язавши рівняння $3x + 2y + 6 = 0$ відносно y , дістанемо:

$$y = -\frac{3}{2}x - 3, \text{ звідки } k = \operatorname{tg}(\alpha) = -1,5.$$

Відповідь: $k = \operatorname{tg}(\alpha) = -1,5$.

Приклад 7.4. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:

$$A(3; -2) \text{ і } B(4; -3).$$

Розв'язання: За умовою задачі:

$$x_1 = 3, x_2 = 4, y_1 = -2, y_2 = -3.$$

Підставивши ці значення в рівняння прямої, яка проходить через дві точки, дістанемо:

$$\frac{x-3}{4-3} = \frac{y+2}{-3+2}; \quad -x+3 = y+2; \quad x+y+1=0.$$

Відповідь: $x+y+1=0$.

Приклад 7.5. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;2)$ паралельно прямій $3x+4y-12=0$.

Розв'язання: Знайдемо кутовий коефіцієнт даної прямої:

$$4y = -3x + 12;$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$k_1 = -\frac{3}{4}.$$

Оскільки дана і шукана прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні, тобто

$$k_1 = k_2 = -\frac{3}{4}.$$

Шукана пряма проходить через точку $M(-1;2)$ і має кутовий коефіцієнт

$k_2 = -\frac{3}{4}$. Тоді її рівняння запишемо у вигляді:

$$y - 2 = -\frac{3}{4} \cdot (x + 1), \text{ або } 3x + 4y + 1 = 0.$$

Відповідь: $3x + 4y + 1 = 0$.

Приклад 7.6. Знайдіть відстань від точки $M(-2;4)$ до прямої $4x - 3y - 5 = 0$.

Розв'язання: Використовуючи формулу для обчислювання відстані від точки до прямої, дістанемо:

$$d = \frac{|4 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Відповідь: $d = 5$.

Розрахункове завдання

Завдання 7. У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4).$$

Необхідно:

- 1) скласти рівняння прямої, що проходить через точку A_1 паралельно вектору $\vec{q} = (2; -2)$. Подати рівняння прямої: а) в загальному вигляді, б) у вигляді рівняння прямої у відрізках на осях, в) у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; г) побудувати пряму в ПДСК;
- 2) скласти рівняння прямої, яка проходить через точки A_1 і A_2 ;
- 3) знайти гострий кут між прямими A_1A_2 і A_3A_4 ;
- 4) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A_2(x_2, y_2)$, паралельно прямій A_3A_4 ;
- 5) скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A_2(x_2, y_2)$, перпендикулярно до прямої A_3A_4 ;
- 6) скласти рівняння пучка прямих, які проходять через точку A_4 ;
- 7) знайти відстань від точки $A_2(x_2, y_2)$ до прямої A_3A_4 .

- | | | | | |
|-----|----------------|---------------|----------------|----------------|
| 1. | $A_1(1, 4),$ | $A_2(3, 2),$ | $A_3(1, -1),$ | $A_4(10, 7).$ |
| 2. | $A_1(-2, 3),$ | $A_2(-3, 5),$ | $A_3(6, 5),$ | $A_4(2, -3).$ |
| 3. | $A_1(-3, -5),$ | $A_2(2, 7),$ | $A_3(9, 6),$ | $A_4(7, 5).$ |
| 4. | $A_1(6, -3),$ | $A_2(4, 8),$ | $A_3(3, 6),$ | $A_4(5, 3).$ |
| 5. | $A_1(4, 6),$ | $A_2(-6, 2),$ | $A_3(3, -2),$ | $A_4(-5, 6).$ |
| 6. | $A_1(2, 3),$ | $A_2(8, -3),$ | $A_3(6, 5),$ | $A_4(-4, 2).$ |
| 7. | $A_1(-2, 3),$ | $A_2(5, 5),$ | $A_3(2, 3),$ | $A_4(4, -3).$ |
| 8. | $A_1(8, 7),$ | $A_2(4, -3),$ | $A_3(6, 4),$ | $A_4(-2, 5).$ |
| 9. | $A_1(-5, 6),$ | $A_2(8, 9),$ | $A_3(4, 8),$ | $A_4(-2, 1).$ |
| 10. | $A_1(2, -1),$ | $A_2(3, 2),$ | $A_3(-3, 6),$ | $A_4(4, -1).$ |
| 11. | $A_1(1, -1),$ | $A_2(8, 5),$ | $A_3(9, 6),$ | $A_4(3, 6).$ |
| 12. | $A_1(-5, 6),$ | $A_2(-1, 3),$ | $A_3(1, -2),$ | $A_4(-1, 1).$ |
| 13. | $A_1(1, -7),$ | $A_2(0, -9),$ | $A_3(2, 3),$ | $A_4(-3, 1).$ |
| 14. | $A_1(5, 2),$ | $A_2(7, 5),$ | $A_3(-2, -5),$ | $A_4(-1, -1).$ |

15.	$A_1(-2, 4),$	$A_2(3, 7),$	$A_3(5, 4),$	$A_4(-1, -3).$
16.	$A_1(6, 5),$	$A_2(9, -2),$	$A_3(6, 4),$	$A_4(8, 3).$
17.	$A_1(3, 4),$	$A_2(5, -1),$	$A_3(-2, 0),$	$A_4(-3, -5).$
18.	$A_1(2, 3),$	$A_2(11, 4),$	$A_3(6, 10),$	$A_4(4, -1).$
19.	$A_1(1, 8),$	$A_2(9, -2),$	$A_3(12, 5),$	$A_4(8, -2).$
20.	$A_1(4, -3),$	$A_2(6, 9),$	$A_3(7, 3),$	$A_4(2, 3).$
21.	$A_1(1, 1),$	$A_2(2, -1),$	$A_3(4, -2),$	$A_4(8, -4).$
22.	$A_1(6, -3),$	$A_2(5, 1),$	$A_3(2, 1),$	$A_4(4, 0).$
23.	$A_1(0, -2),$	$A_2(4, -2),$	$A_3(-2, 0),$	$A_4(-10, 2).$
24.	$A_1(9, 7),$	$A_2(3, -2),$	$A_3(4, 7),$	$A_4(8, 0).$
25.	$A_1(1, 1),$	$A_2(-2, -1),$	$A_3(3, 1),$	$A_4(8, 2).$
26.	$A_1(6, 4),$	$A_2(-2, 5),$	$A_3(3, 3),$	$A_4(4, -4).$
27.	$A_1(4, -3),$	$A_2(5, 2),$	$A_3(2, 3),$	$A_4(5, 0).$
28.	$A_1(5, 2),$	$A_2(8, -1),$	$A_3(5, 6),$	$A_4(-1, 4).$
29.	$A_1(-1, 4),$	$A_2(7, 6),$	$A_3(2, 4),$	$A_4(7, -5).$
30.	$A_1(6, 6),$	$A_2(5, -4),$	$A_3(7, 8),$	$A_4(-4, 6).$

Питання для самоперевірки

1. Записати загальне рівняння прямої.
2. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.
3. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
4. Як знайти кут між прямими, якщо прямі задані загальними рівняннями?
5. Записати канонічне рівняння прямої.
6. Записати і пояснити умову паралельності прямих.
7. Записати і пояснити умову перпендикулярності прямих.
8. Записати рівняння пучка прямих.
9. Як знайти відстань від точки до прямої?
10. Як побудувати пряму в ПДСК?

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН І ПРЯМИХ В ПРОСТОРИ $\mathbb{R}^3$

Основні теоретичні відомості

Площина у просторі $\mathbb{R}^3$

Площина у просторі фіксується, якщо відомі:

- 1) точка на площині й вектор, перпендикулярний до площини;
- 2) три точки на площині, що не належать одній прямій.

Рівняння площини, що проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$: має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

називається **загальним рівнянням** площини, якщо коефіцієнти A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій (рис. 1):

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2} \right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

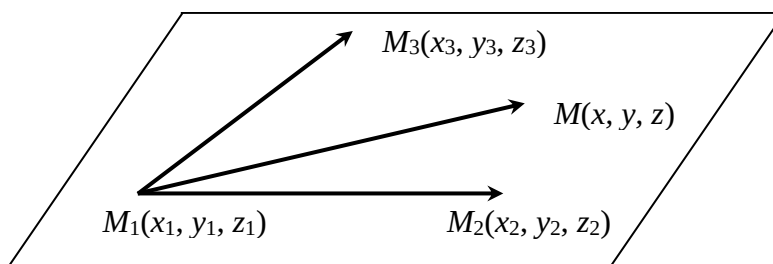


Рис. 1 Площина, що проходить через три задані точки

Рівняння площини, що відтинає на координатних осях Ox, Oy, Oz не рівні нулю відрізки a, b, c (рівняння площини у відрізках на осях):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ненульовий вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярний до площини, називається **нормальним вектором площини**.

Нехай задані дві площини:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1);$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Косинус гострого кута φ між площинами. Кут між площинами дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ і обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умови паралельності площин. Щоб дві площини були паралельні, їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ повинні бути колінеарні:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності площин. Щоб площини були перпендикулярні, їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ також повинні бути перпендикулярні:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма у просторі $\mathbf{R}^3$

Пряму в просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин, тобто пряма визначається системою двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Це рівняння називається загальним рівнянням прямої.

Канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де $\vec{l} = (m, n, p)$ – **напрямний вектор** прямої; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, яка належить прямій.

Параметричне рівняння прямої:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt.$$

Якщо **пряма проходить через дві точки** $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, її рівняння має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Кут між двома прямими $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ і $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$

обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих має вигляд:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Умова перпендикулярності – у вигляді:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Взаємне розташування прямої і площини в просторі R^3

Кут між прямою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ і **площиною** $Ax + By + Cz + D = 0$

обчислюється за формулою:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am + Bn + Cp = 0$.

Умова перпендикулярності прямої і площини: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Рівняння пучка площин, які проходять через пряму

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases},$$

має вигляд:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0,$$

де λ – будь-яке дійсне число.

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 8.1. У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$$A_1(-1, 2, 3), A_2(2, 0, 2), A_3(3, -2, 4), A_4(5, 1, -1).$$

Необхідно:

- 1) скласти канонічні рівняння прямих A_1A_2 і A_1A_3 ;
- 2) знайти кут між прямими A_1A_2 , A_1A_3 ;
- 3) скласти рівняння площин $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$;
- 4) визначити кут між площинами $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$;
- 5) знайти рівняння прямої, що проходить через точку A_4 паралельно прямій A_1A_2 ;
- 6) знайти кут між прямою A_1A_3 і площиною $A_1A_2A_4$.

Розв'язання:

- 1) Знайдемо рівняння прямих A_1A_2 і A_1A_3 :

$$A_1A_2: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{z - 3}{2 - 3}, \quad \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 3}{-1};$$

$$A_1A_3: \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1}, \quad \frac{x + 1}{3 + 1} = \frac{y - 2}{-2 - 2} = \frac{z - 3}{4 - 3}, \quad \frac{x + 1}{4} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 3}{1}.$$

- 2) Знаходимо кут між двома прямими (кут між направляючими векторами $\vec{l}_1 = (3, -2, -1)$, $\vec{l}_2 = (4, -4, 1)$):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} = \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{19}{\sqrt{462}} \approx 0,884.$$

- 3) Рівняння площин $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$ складаємо, як рівняння площин, що проходять через три задані точки:

$$A_1A_2A_3: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x + 7y + 4z - 20 = 0.$$

$$A_1A_2A_4: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 6 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x + 6y + 9z - 32 = 0.$$

- 4) Кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$ визначаємо як кут між нормальними до них $\vec{n}_1 = (6, 7, 4)$, $\vec{n}_2 = (7, 6, 9)$:

$$\cos \psi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|6 \cdot 7 + 7 \cdot 6 + 4 \cdot 9|}{\sqrt{6^2 + 7^2 + 4^2} \sqrt{7^2 + 6^2 + 9^2}} = \frac{120}{\sqrt{16766}} \approx 0,927.$$

- 5) Рівняння прямої, що проходить через точку A_4 паралельно прямій A_1A_2 (паралельно вектору $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3, -2, -1)$):

$$\frac{x - x_4}{l} = \frac{y - y_4}{m} = \frac{z - z_4}{n}, \quad \frac{x - 5}{3} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 1}{-1}.$$

- 6) Кут між прямою A_1A_3 і площиною $A_1A_2A_4$ визначимо за формулою:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{a}_2 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{a}_2| \cdot |\vec{n}_2|} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_2 = (4, -4, 1) \\ \vec{n}_2 = (7, 6, 9) \end{array} \right\} = \frac{|4 \cdot 7 - 4 \cdot 6 + 1 \cdot 9|}{\sqrt{33} \sqrt{166}} = \frac{13}{\sqrt{5478}} \approx 0,176.$$

Розрахункове завдання

Завдання 8. У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4).$$

Необхідно:

- 1) скласти канонічні рівняння прямих A_1A_2 і A_1A_3 ;
- 2) знайти кут між прямими A_1A_2 , A_1A_3 ;
- 3) скласти рівняння площин $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$;
- 4) визначити кут між площинами $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$;
- 5) знайти рівняння прямої, що проходить через точку A_4 паралельно прямій A_1A_2 ;

6) знайти кут між прямою A_1A_3 і площиною $A_1A_2A_4$.

- | | | | |
|----------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $A_1(6, 6, 4),$ | $A_2(5, -4, 1),$ | $A_3(7, 8, 3),$ | $A_4(-4, 6, 2).$ |
| 2. $A_1(5, 2, 3),$ | $A_2(7, 5, -6),$ | $A_3(-2, -5, -1),$ | $A_4(-1, -1, -1).$ |
| 3. $A_1(-2, 3, -2),$ | $A_2(-3, 5, 4),$ | $A_3(6, 5, 3),$ | $A_4(2, -3, 4).$ |
| 4. $A_1(-3, -5, 6),$ | $A_2(2, 7, -2),$ | $A_3(9, 6, 3),$ | $A_4(7, 5, 3).$ |
| 5. $A_1(6, -3, 2),$ | $A_2(4, 8, -3),$ | $A_3(3, 6, -4),$ | $A_4(5, 3, 3).$ |
| 6. $A_1(4, 6, 3),$ | $A_2(-6, 2, 6),$ | $A_3(3, -2, 3),$ | $A_4(-5, 6, 4).$ |
| 7. $A_1(2, 3, -4),$ | $A_2(8, -3, 2),$ | $A_3(6, 5, -3),$ | $A_4(-4, 2, 3).$ |
| 8. $A_1(-2, 3, 4),$ | $A_2(5, 5, 6),$ | $A_3(2, 3, 4),$ | $A_4(4, -3, 2).$ |
| 9. $A_1(8, 7, 5),$ | $A_2(4, -3, 2),$ | $A_3(6, 4, 1),$ | $A_4(-2, 5, 8).$ |
| 10. $A_1(-5, 6, 4),$ | $A_2(8, 9, 10),$ | $A_3(4, 8, 7),$ | $A_4(-2, 1, 5).$ |
| 11. $A_1(2, -1, 2),$ | $A_2(3, 2, -2),$ | $A_3(-3, 6, -2),$ | $A_4(4, -1, -3).$ |
| 12. $A_1(1, -1, 3),$ | $A_2(8, 5, 3),$ | $A_3(9, 6, 3),$ | $A_4(3, 6, -4).$ |
| 13. $A_1(-5, 6, 1),$ | $A_2(-1, 3, 0),$ | $A_3(1, -2, 2),$ | $A_4(-1, 1, 3).$ |
| 14. $A_1(1, -7, 5),$ | $A_2(0, -9, 7),$ | $A_3(2, 3, -2),$ | $A_4(-3, 1, -1).$ |
| 15. $A_1(1, 4, 1),$ | $A_2(3, 2, 1),$ | $A_3(1, -1, -3),$ | $A_4(10, 7, 4).$ |
| 16. $A_1(-2, 4, 2),$ | $A_2(3, 7, 0),$ | $A_3(5, 4, 3),$ | $A_4(-1, -3, 2).$ |
| 17. $A_1(6, 5, 4),$ | $A_2(9, -2, 7),$ | $A_3(6, 4, 1),$ | $A_4(8, 3, 2).$ |
| 18. $A_1(3, 4, -1),$ | $A_2(5, -1, 1),$ | $A_3(-2, 0, 3),$ | $A_4(-3, -5, 5).$ |
| 19. $A_1(2, 3, 4),$ | $A_2(11, 4, 7),$ | $A_3(6, 10, 12),$ | $A_4(4, -1, 5).$ |
| 20. $A_1(1, 8, -3),$ | $A_2(9, -2, 4),$ | $A_3(12, 5, 4),$ | $A_4(8, -2, 4).$ |
| 21. $A_1(4, -3, 5),$ | $A_2(6, 9, 0),$ | $A_3(7, 3, 4),$ | $A_4(2, 3, 5).$ |
| 22. $A_1(1, 1, 1),$ | $A_2(2, -1, 1),$ | $A_3(4, -2, 3),$ | $A_4(8, -4, 5).$ |
| 23. $A_1(6, -3, 2),$ | $A_2(5, 1, 4),$ | $A_3(2, 1, 1),$ | $A_4(4, 0, -2).$ |
| 24. $A_1(0, -2, 1),$ | $A_2(4, -2, 1),$ | $A_3(-2, 0, -2),$ | $A_4(-10, 2, -3).$ |
| 25. $A_1(9, 7, 4),$ | $A_2(3, -2, -5),$ | $A_3(4, 7, 6),$ | $A_4(8, 0, -4).$ |
| 26. $A_1(1, 1, -3),$ | $A_2(-2, -1, 1),$ | $A_3(3, 1, -2),$ | $A_4(8, 2, -3).$ |
| 27. $A_1(6, 4, -1),$ | $A_2(-2, 5, -2),$ | $A_3(3, 3, 5),$ | $A_4(4, -4, 3).$ |

- | | | | |
|----------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 28. $A_1(4, -3, 3),$ | $A_2(5, 2, 6),$ | $A_3(2, 3, 2),$ | $A_4(5, 0, -2).$ |
| 29. $A_1(5, 2, -4),$ | $A_2(8, -1, 7),$ | $A_3(5, 6, 3),$ | $A_4(-1, 4, 2).$ |
| 30. $A_1(-1, 4, 4),$ | $A_2(7, 6, 3),$ | $A_3(2, 4, 7),$ | $A_4(7, -5, 3).$ |

Питання для самоперевірки

1. Записати рівняння і пояснити зміст усіх величин у них:
загальне рівняння площини;
рівняння площини, що проходить через три задані точки/
2. Як знайти кут між двома площинами?
3. Сформулювати умови паралельності й перпендикулярності 2-х площин.
4. Як обчислити відстань від точки до площини?
5. Записати рівняння прямої у R^3 і пояснити зміст усіх величин у цих рівняннях:
канонічні рівняння прямої;
параметричні рівняння прямої;
рівняння прямої, що проходить через дві задані точки;
рівняння прямої як лінії перетину 2-х площин.
6. Як перейти від канонічних рівнянь прямої у R^3 до параметричних?
7. Як знайти кут між двома прямими у просторі R^3 ?
8. Сформулювати умови паралельності й перпендикулярності 2-х прямих у просторі R^3 .
9. Як знайти кут між прямою й площиною?
10. Як знайти точку перетину прямої з площиною?

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Основні теоретичні відомості

Коло – множина точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (*центра кола*).

Рівняння кола радіуса R з центром у початку координат (рис. 1) дано формулою (1), а з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 2) – формулою (2).

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (1)$$

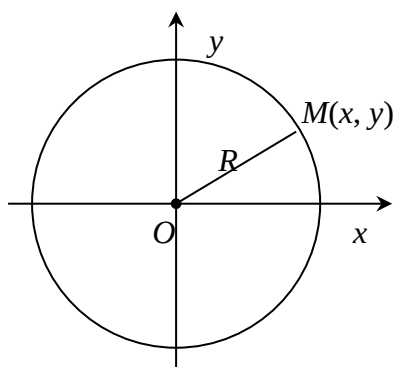


Рис. 1. Коло

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (2)$$

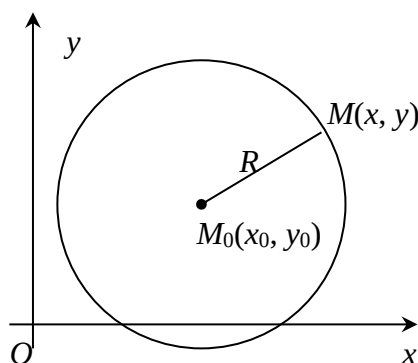


Рис. 2. Коло

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок, що називаються **фокусами**, є сталою величиною, більшою за відстань між фокусами.

Нехай фокуси еліпса розташовані на осі Ox у точках $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $M(x, y)$ – довільна точка еліпса. Тоді за означенням еліпса

$$F_1M + F_2M = 2a.$$

Відстані $r_1 = F_1M$ і $r_2 = F_2M$ від довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів називаються **фокальними радіусами** точки M .

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Осі координат є осями симетрії еліпса. Параметр $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Точки перетину еліпса з осями координат $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ називаються **вершинами еліпса** (рис. 4.24), a , b – його півосями.

Форма еліпса характеризується ексцентриситетом $\varepsilon = c / a$ ($0 \leq \varepsilon < 1$).

При $\varepsilon \rightarrow 1$ еліпс вироджується у відрізок $[-a, a]$.

Прямі $x = \pm a/\varepsilon$ називаються **директрисами** еліпса.

Директоріальна властивість еліпса. Якщо r – відстань від точки M до фокуса еліпса, d – відстань від точки M до однієї з директрис, то відношення $r / d = \varepsilon$

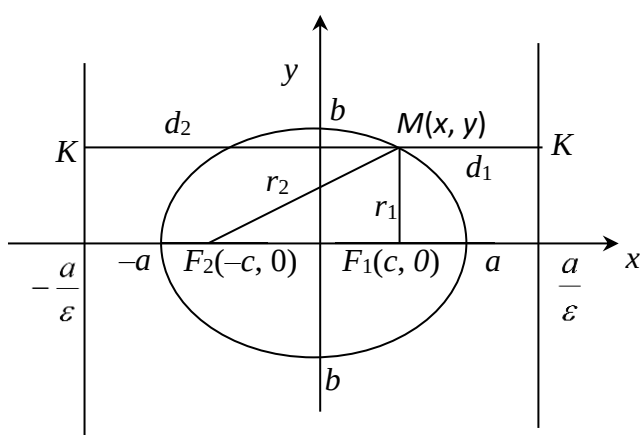


Рис. 3. Еліпс ($a \geq b$)

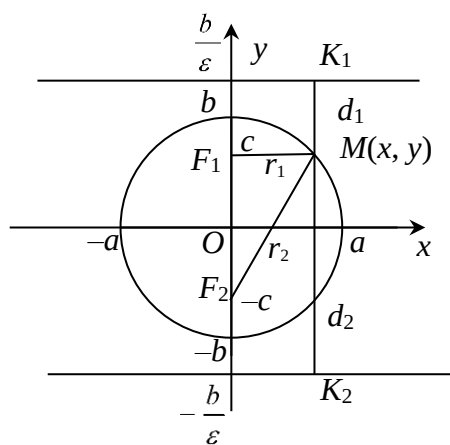


Рис. 4. Еліпс ($a \leq b$)

Рівняння еліпса, осі якого паралельні координатним осям, а центр знаходиться у точці $M_0(x_0, y_0)$, має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гіперболою називається множина точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок (фокусів) є величиною сталою, меншою за відстань між фокусами.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Ox у точках $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Тоді за означенням гіперболи

$$|F_1M - F_2M| = 2a \Leftrightarrow F_1M - F_2M = \pm 2a.$$

Відстані $r_1 = F_1M$ і $r_2 = F_2M$ від довільної точки $M(x, y)$ гіперболи до фокусів називаються **фокальними радіусами** точки M (рис. 5).

Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (c^2 = a^2 + b^2).$$

Гіпербола симетрична відносно осей координат.

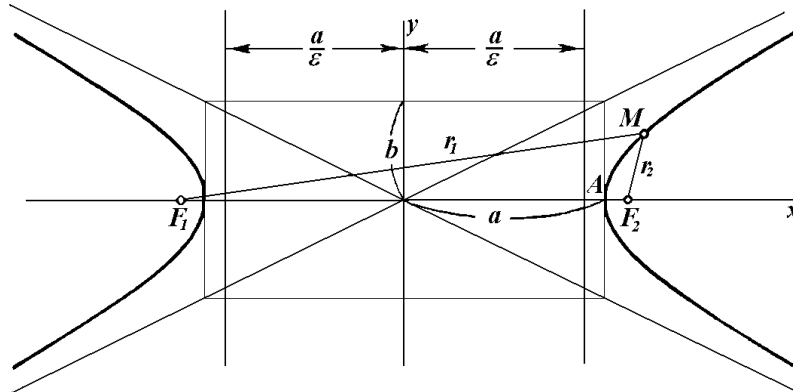


Рис. 5. Гіпербола

Точки перетину гіперболи з віссю Ox $(-a, 0)$ і $(a, 0)$ називаються **вершинами гіперболи**. Гіпербола (5) не перетинає вісь Oy . Параметр a називається дійсною піввіссю, а b – уявною піввіссю гіперболи.

Прямі $y = \pm(b/a)x$, що проходять через діагоналі прямокутника розміром $2a \times 2b$, називаються **асимптотами** гіперболи.

Величина $\varepsilon = c/a$ ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$) називається **ексцентриситетом** гіперболи ($\varepsilon > 1$), а прямі $x = \pm a/\varepsilon$ – її **директрисами**.

Директоріальна властивість гіперболи. Якщо r – відстань від точки M до фокуса гіперболи, d – відстань від точки M до однієї з цим фокусом директриси, то $r/d = \varepsilon$

Якщо фокуси гіперболи розташовані на осі Oy у точках $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, то її рівняння має вигляд:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (c = \sqrt{a^2 + b^2}),$$

ексцентриситет $\varepsilon = c/b$, директриси: $y = \pm b/\varepsilon$.

Рівняння гіперболи, осі якої паралельні координатним осям, а центр знаходиться у точці $M_0(x_0, y_0)$, має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

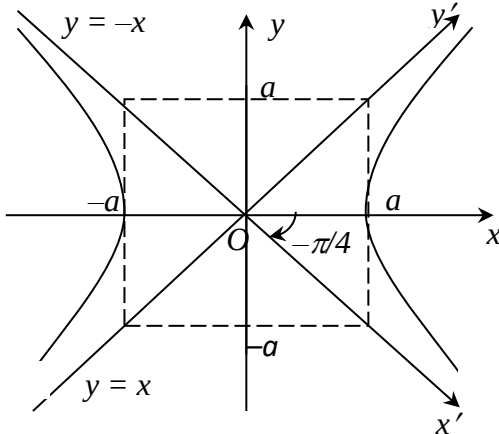


Рис. 6. Рівнобічна гіпербола

При $a = b$ гіпербола

називається **рівнобічною** (рис. 6).

Її канонічне рівняння:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптоти $y = \pm x$

є бісектрисами координатних кутів.

Параболою називається множина точок площини, кожна з яких рівновіддалена від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи, фокус якої міститься в точці $F(p/2, 0)$, а директриса перпендикулярна до осі Ox і має рівняння $x = -p/2$. Відрізок FM називається **фокальним радіусом** точки M , а відстань p від фокуса до директриси – **параметром параболи**.

Проведемо відрізок KM перпендикулярно до директриси (рис.7). За означенням параболи: $FM = KM$.

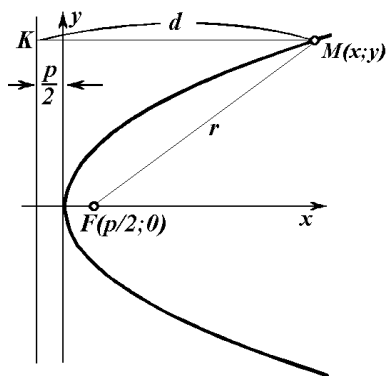


Рис. 7. Парабола

Канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px, \quad (p > 0).$$

Парабола симетрична відносно осі Ox . При $p > 0$ парабола розташована справа від осі Oy .

Точка $O(0, 0)$ перетину параболи з віссю симетрії називається її **вершиною**.

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = \pm 2py$ ($p > 0$) також визначають параболи (рис. 8).

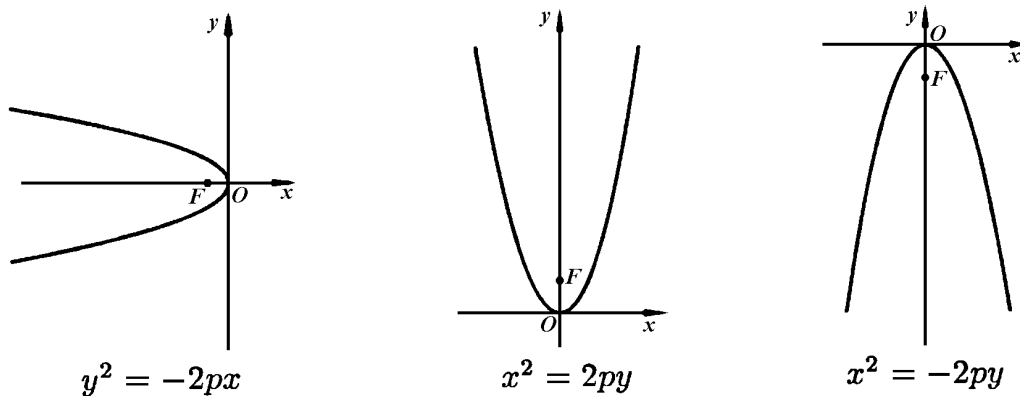


Рис. 8. Параболи ($p > 0$)

Рівняння параболи з вершиною у точці $M_0(x_0, y_0)$ і віссю симетрії, що паралельна координатній осі, має вигляд:

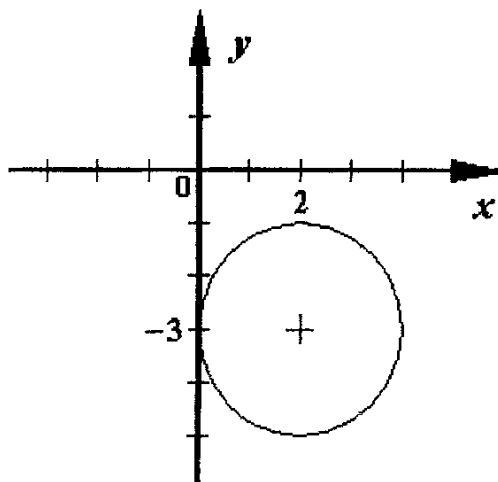
$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \quad \text{або} \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0).$$

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 9.1. Складіть рівняння кола з центром у точці $M(2; -3)$ і з радіусом, що дорівнює 2. Побудуйте це коло.

Розв'язання: За умовою задачі маємо: $a = 2$, $b = -3$, $R = 2$. Підставивши ці значення в рівняння кола, дістанемо:

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4; \quad \text{або} \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$



Будуємо центр кола, тобто точку $M(2, -3)$. З центра M радіусом, який дорівнює 2, опишемо коло.

Відповідь: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

Приклад 9.2. Складіть рівняння кола, яке має центр в точці $(5; -7)$ і проходить через точку $(2; -3)$.

Розв'язання: Знайдемо радіус кола як відстань від центра до його точки:

$$R = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-(-7))^2} = 5.$$

В рівняння кола підставимо координати центра і знайдену величину радіуса:

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25.$$

Відповідь: $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25$.

Приклад 9.3. Знайдіть координати точок перетину кола

$$3x^2 + 3y^2 - 18x - 10y - 48 = 0 \text{ з осями координат.}$$

Розв'язання: Коло перетинається з віссю абсцис у точках, ординати яких дорівнюють нулю. Припустивши, що рівнянні кола $y=0$, дістанемо:

$$3x^2 - 18x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(-16)}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2}, \quad x_1 = 8 \text{ і } x_2 = -2.$$

Отже, коло перетинається з віссю абсцис у точках $(-2; 0)$ і $(8; 0)$.

Коло перетинається з віссю ординат у точках, абсциси яких дорівнюють нулю. Припустивши, що в рівнянні кола $x=0$, дістанемо:

$$3y^2 - 10y - 48 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(-48) \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 26}{6}; \quad x_1 = 8 \text{ і } x_2 = -\frac{8}{3}.$$

Отже, коло перетинається з віссю ординат у точках $(0; -\frac{8}{3})$ і $(0; 6)$.

Відповідь: $(-2; 0); (8; 0); (0; -\frac{8}{3}); (0; 6)$.

Приклад 9.4. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки

$$A(3; 1), B(-2; 6), C(-5; -3).$$

Розв'язання: Нехай точка $O_1(a; b)$ – центр шуканого кола, тоді $|O_1A| = |O_1B| = |O_1C|$, як радіуси того самого кола. Маємо:

$$|O_1A| = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2},$$

$$|O_1B| = \sqrt{(a+2)^2 + (b-6)^2},$$

$$|O_1C| = \sqrt{(a+5)^2 + (b+3)^2}.$$

Складемо систему рівнянь відносно невідомих a і b та розв'яжемо її:

$$\begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+2)^2 + (b-6)^2}; \\ \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+5)^2 + (b+3)^2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 9 + 1 - 6a - 2b = a^2 + b^2 + 4 + 36 + 4a - 12b, \\ a^2 + b^2 + 9 + 1 - 6a - 2b = a^2 + b^2 + 25 + 9 + 10a + 6b; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a - b + 3 = 0, \\ 2a + b + 3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -3, \\ 2a + b = -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = -6, \\ b = a + 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2, \\ b = 1. \end{cases}$$

$O_1(-2;1)$.

Знаходимо $R = |O_1A| = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-1)^2} = 5$.

Отже, шукане рівняння кола має вигляд:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Відповідь: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Приклад 9.5. Знайдіть координати центра і радіус кола

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0.$$

Розв'язання: Перепишемо це рівняння у вигляді:

$$x^2 - 8x + y^2 - 10y = 8.$$

Доповнивши двочлени $x^2 - 8x$ і $y^2 - 10y$ до повних квадратів, дістанемо:

$$x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 + y^2 - 2 \cdot 5y + 5^2 = 8 + 4^2 + 5^2 \text{ або } (x-4)^2 + (y-5)^2 = 49.$$

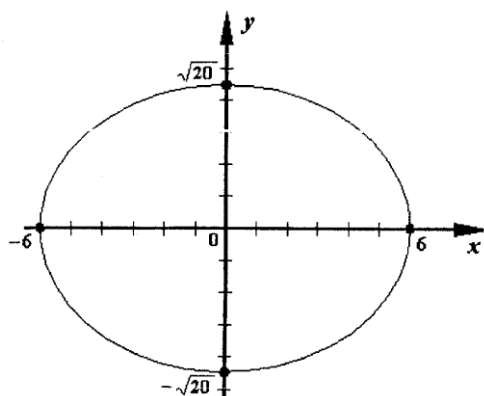
Звідки $a = 4$, $b = 5$, $R = 7$, тобто центр кола – точка $(4;5)$, а радіус дорівнює 7.

Відповідь: центр кола – точка $(4;5)$, а радіус дорівнює 7.

Приклад 9.6. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо велика ось дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 8.

Розв'язання: З умови впливає, що $a = 6$ і $c = 4$.

Знаходимо $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.



Підставивши значення a і b в рівняння еліпса, дістанемо $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

Приклад 9.7. Дано еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Знайти координати фокусів еліпса і відстань між ними.

Розв'язання: З рівняння еліпса маємо $a^2 = 100$ і $b^2 = 36$. Тоді $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$. Отже координати фокусів $F_1(-8;0)$ і $F_2(8;0)$, а відстань між ними $2c = 2 \cdot 8 = 16$.

Відповідь: $F_1(-8;0)$ і $F_2(8;0)$, $2c = 16$.

Приклад 9.8. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо його велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет $\frac{2}{3}$.

Розв'язання: З умови маємо: $a = 7$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Підставивши в це співвідношення значення a , дістанемо $c = \frac{14}{3}$.

$$\text{Далі знаходимо } b^2 = 7^2 - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{245}{9}.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{245/9} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{49} + \frac{9y^2}{245} = 1.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{49} + \frac{9y^2}{245} = 1$.

Приклад 9.9. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3}; \sqrt{6})$ і $B(3; \sqrt{2})$.

Розв'язання: Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти параметри a і b . Підставивши в рівняння еліпса координати даних точок, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{6}{b^2} = 1, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{6}{b^2}\right), \\ \frac{9}{3} \left(1 - \frac{6}{b^2}\right) + \frac{2}{b^2} = 1; \end{cases}$$

$$3 - \frac{18}{b^2} + \frac{2}{b^2} = 1; \quad \frac{16}{b^2} = 2; \quad b^2 = 8;$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{6}{8}\right); \quad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{12}; \quad a^2 = 12.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Приклад 9.10. Побудувати гіперболу $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язання. Перетворимо рівняння кривої:

$$9x^2 - 16y^2 = 144; \quad :144$$

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1;$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Таким чином: $a^2 = 16$, $b^2 = 9$;

$a = 4$, $b = 3$ – півосі гіперболи.

Знайдемо відстань фокусів від центра симетрії:

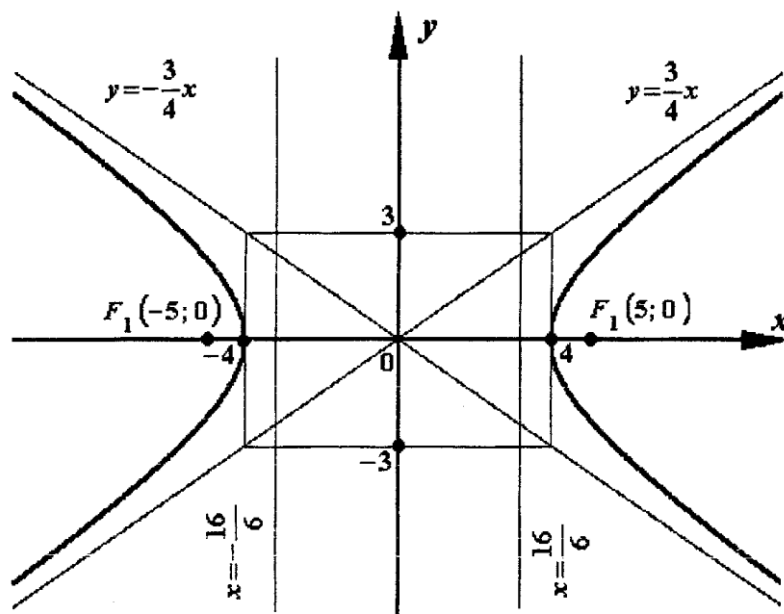
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Фокуси гіперболи $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$.

Рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Рівняння директрис $x = \pm \frac{4}{\left(\frac{5}{4}\right)}; x = \pm \frac{16}{5}$.



Відповідь: $F_1(-5;0), F_2(5;0), \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1, y = \pm \frac{3}{4}x, x = \pm \frac{4}{\left(\frac{5}{4}\right)}, x = \pm \frac{16}{5}.$

Приклад 9.11. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами дорівнює $8\sqrt{34}$.

Розв'язання: Для складання рівняння гіперболи треба знайти параметри a і b . З умови маємо: $2a = 24, 2c = 8\sqrt{34}$.

Знайдемо a, c і b :

$$a = 12, c = 4\sqrt{34}, b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{544 - 144} = 20.$$

Підставивши a^2 і b^2 в рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, дістанемо $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{400} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{400} = 1$.

Приклад 9.12. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $(-20;0), (20;0)$ і ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{4}{3}$.

Розв'язання. З умови маємо: $c=20, \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$.

Підставивши у цю рівність c , дістанемо: $\frac{20}{a} = \frac{3}{4}$, тобто $a = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15$.

Далі знайдемо $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{400 - 225} = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$.

Підставивши a^2 і b^2 в канонічне рівняння гіперболи, дістанемо $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{175} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{175} = 1$.

Приклад 9.13. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо довжина її дійсної осі дорівнює 16, і гіпербола проходить через точку $(-10; -3)$.

Розв'язання: За умовою $2a=16$, тобто $a=8$.

Скористаємося канонічним рівнянням гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Дістанемо: $\frac{(-10)^2}{8^2} - \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$;

$$\frac{100}{64} - \frac{9}{b^2} = 1; \quad \frac{9}{b^2} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}; \quad b^2 = 16.$$

Отже: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Відповідь: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Приклад 9.14. Скласти рівняння гіперболи за рівнянням її асимптот $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ і координатами точки, через яку вона проходить $(4\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$.

Розв'язання: Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{b}{a}x$. За умовою $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Підставимо в канонічне рівняння гіперболи координати точки і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{(4\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \\ \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{48}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1, \\ 2b = \sqrt{3}a; \end{cases}$$

$$\frac{48}{a^2} - \frac{27}{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} = 1; \quad \frac{48}{a^2} - \frac{36}{a^2} = 1; \quad a^2 = 12; \quad a = \sqrt{12}; \quad b = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{2} = 3.$$

Рівняння гіперболи $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{9} = 1.$

Відповідь: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{9} = 1.$

Приклад 9.15. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці $F(1;0)$.

Розв'язання. Фокус лежить на осі Ox , тобто рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$. Оскільки координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, то $\frac{p}{2} = 1$, $p = 2$. Підставивши значення p в рівняння $y^2 = 2px$, дістанемо $y^2 = 4x$.

Відповідь: $y^2 = 4x$.

Приклад 9.16. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(-2; -4)$.

Розв'язання: Шукана парабола симетрична відносно осі Oy , отже її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$. Підставивши в це рівняння координати точки A , знайдемо p :

$$(-2)^2 = 2p \cdot (-4); \quad 4 = -8p; \quad p = -\frac{1}{2}.$$

Після підстановки значення p в рівняння параболі дістанемо $x^2 = -y$.

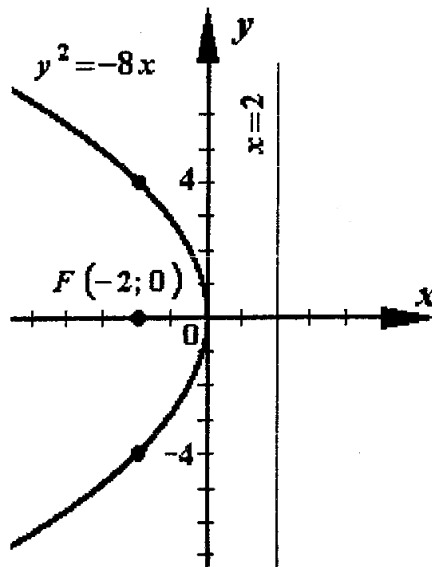
Відповідь: $x^2 = -y$.

Приклад 9.17. За даним рівнянням параболі $y^2 = -8x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси. Побудувати.

Розв'язанн: З рівняння параболі $y^2 = -8x$ маємо $2p = -8$, $\frac{p}{2} = -2$.

Парабола симетрична відносно осі Ox , її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, тобто $F(-2; 0)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$, тобто $x=2$.

Шукана парабола симетрична відносно осі Ox , її вітки напрямлені вліво. Знайдемо точку, що лежить на параболі. Нехай $x=2$, $y^2 = -8 \cdot (-2) = 16$, $y = \pm 4$.



Відповідь: $F(-2; 0)$, $x = -\frac{p}{2}$.

Приклад 9.18. Побудувати параболу $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання: Знайдемо вершину параболі, перетворивши рівняння $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$ до вигляду $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

$$x^2 - 6x = -2y - 7; \quad (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 = -2y - 7;$$

$$(x - 3)^2 = -2y - 7 + 9; \quad (x - 3)^2 = -2(y - 1).$$

З цього рівняння $x_0=3$, $y_0=1$, $C(3;1)$ – вершина параболі.

Знайдемо точки перетину параболі з осями Ox і Oy :

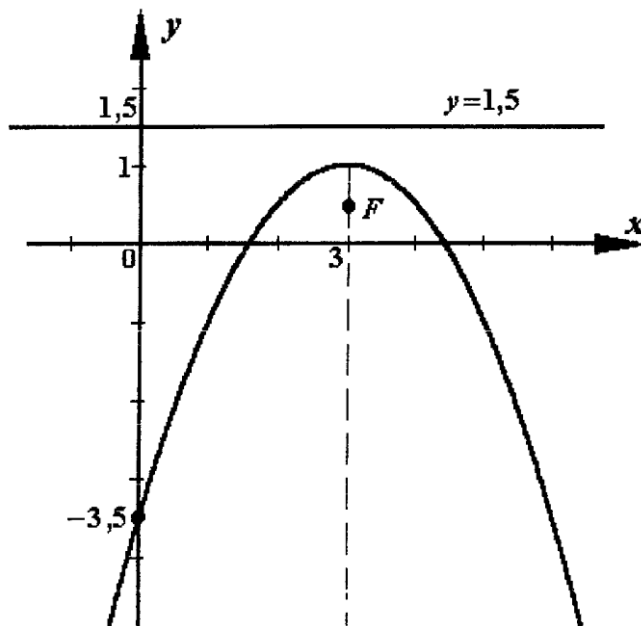
$$y = 0; \quad x^2 - 6x + 7 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2};$$

$$x = 0; \quad 2y + 7 = 0; \quad y = -3,5.$$

Знайдемо координати фокуса.

З рівняння $(x-3)^2 = -2(y-1)$ маємо: $2p = -2$, $\frac{p}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$.

Координати фокуса $F\left(x_0; y_0 + \frac{p}{2}\right)$, тобто $F(3; 1-0,5)$, $F(3; 0,5)$.



Рівняння директриси: $y = y_0 - \frac{p}{2}$, тобто $y = 1 + 0,5$; $y = 1,5$.

Відповідь: $F(3; 1-0,5)$, $F(3; 0,5)$, $y = 1,5$.

Приклад 9.19. Побудувати параболу $y^2 + 4y - 3x + 4 = 0$.

Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання: Знайдемо координати вершини:

$$y^2 + 4y + 4 = 3x;$$

$$(y+2)^2 = 3(x-0).$$

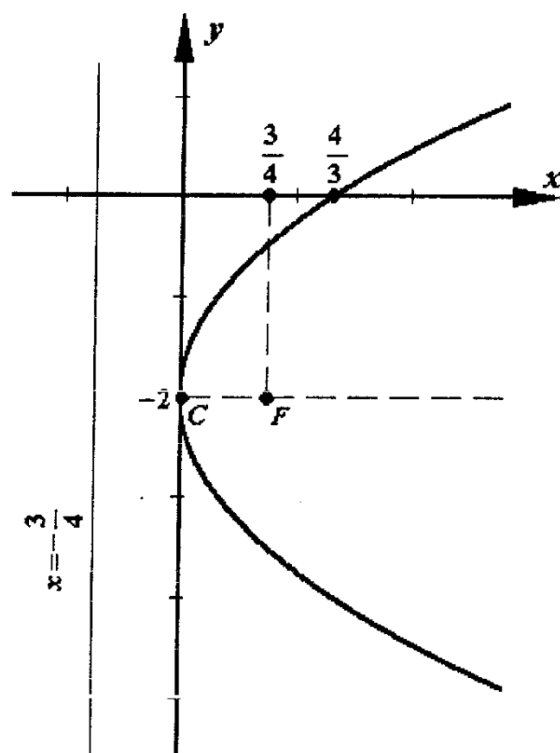
Вершина параболи лежить у точці $C(0; -2)$. Вітки параболи напрямлені вправо ($2p = 3$, $p = 1,5 > 0$).

Знайдемо точку перетину параболи з віссю Ox :

$$y = 0, \quad -3x + 4 = 0, \quad x = \frac{4}{3}.$$

Координати фокуса $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$, тобто $F\left(0 + \frac{3}{4}; -2\right)$, $F\left(\frac{3}{4}; -2\right)$.

Рівняння директриси: $x = x_0 - \frac{p}{2}$, тобто $x = -\frac{3}{4}$.



Відповідь: $F\left(0 + \frac{3}{4}; -2\right)$, $F\left(\frac{3}{4}; -2\right)$, $x = -\frac{3}{4}$.

Приклад 9.20. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0.$$

Визначити тип кривої.

Розв'язання: Виділимо в рівнянні повні квадрати:

$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 21 = 0,$$

$$4(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4,$$

$$\frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1, \text{ де } \begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 3. \end{cases}$$

У системі координат $x'O'y'$ отримане канонічне рівняння еліпса з центром у точці $O'(2, 3)$.

Півосі еліпса $a = 1$, $b = 2$, параметр $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3}$.

Фокуси розташовані на осі Oy в точках $F_1(0, \sqrt{3})$, $F_2(0, -\sqrt{3})$.

Ексцентриситет $\varepsilon = c / b = \sqrt{3} / 2$.

Відповідь: еліпс $\frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1$, де $\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 3. \end{cases}$

Розрахункове завдання

Завдання 8. Розв'язати задачі.

1. Складіть рівняння кола з центром у точці $M(3; -2)$ і з радіусом, що дорівнює 2. Побудуйте це коло.
2. Складіть рівняння кола, яке має центр в точці $(5; -5)$ і проходить через точку $(2; -3)$.
3. Знайдіть координати точок перетину кола $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 49 = 0$ з осями координат.
4. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(4;0)$, $B(-4;0)$, $C(0;4)$.
5. Знайдіть координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 49 = 0$.
6. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо велика ось дорівнює 6, а відстань між фокусами дорівнює 4.
7. Дано еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. Знайти координати фокусів еліпса і відстань між ними.
8. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо його велика вісь дорівнює 12, а ексцентриситет $\frac{2}{3}$.
9. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо він проходить через точки $A(6;4)$ і $B(8;3)$.
10. Побудувати гіперболу $4x^2 - y^2 - 16 = 0$. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директриси.
11. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо її дійсна вісь дорівнює 18, а відстань між фокусами дорівнює 30.
12. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $(-16;0)$, $(16;0)$ і ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{4}{3}$.
13. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо довжина її дійсної осі дорівнює 16, і гіпербола проходить через точку $(10; 3)$.
14. Скласти рівняння гіперболи за рівнянням її асимптот $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ і координатами точки, через яку вона проходить $(2\sqrt{3};0)$.
15. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці $F(4;0)$.
16. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(4; 8)$.
17. За даним рівнянням параболи $y^2 = -10x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси. Побудувати.

18. Побудувати параболу $x^2 - 2x + y + 8 = 0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.
19. Побудувати параболу $y^2 - 2y + x + 8 = 0$. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.
20. Звести до канонічного вигляду рівняння $4x^2 + 4y^2 - 60x - 60y + 225 = 0$. Визначити тип кривої.
21. Звести до канонічного вигляду рівняння $3x^2 + 4y^2 - 27 = 0$. Визначити тип кривої.
22. Звести до канонічного вигляду рівняння $-4x^2 + 5y^2 - 20 = 0$. Визначити тип кривої.
23. Звести до канонічного вигляду рівняння $12x^2 + 36x + y + 25 = 0$. Визначити тип кривої.

Варіант і номери задач вибрати з таблиці:

1.	1, 6, 10, 13, 16, 20	11.	1, 8, 11, 14, 18, 22	21.	1, 7, 12, 14, 17, 21
2.	2, 7, 11, 14, 17, 21	12.	2, 9, 12, 15, 19, 23	21.	2, 6, 10, 15, 18, 22
3.	3, 8, 12, 15, 18, 22	13.	3, 6, 10, 13, 16, 20	23.	3, 7, 11, 13, 19, 23
4.	4, 9, 10, 14, 19, 23	14.	4, 7, 11, 14, 17, 21	24.	4, 8, 12, 14, 16, 20
5.	5, 6, 11, 13, 16, 20	15.	5, 8, 12, 15, 18, 22	25.	5, 9, 10, 15, 17, 21
6.	1, 7, 12, 14, 17, 21	16.	1, 9, 10, 13, 19, 23	26.	1, 6, 11, 13, 18, 22
7.	2, 8, 10, 15, 18, 22	17.	2, 6, 11, 14, 16, 20	27.	2, 7, 12, 14, 19, 23
8.	3, 9, 11, 10, 19, 23	18.	3, 7, 12, 15, 17, 21	28.	3, 8, 10, 15, 16, 20
9.	4, 6, 12, 11, 16, 20	19.	4, 8, 10, 13, 18, 22	29.	4, 9, 11, 13, 17, 21
10.	5, 7, 10, 12, 17, 21	20.	5, 9, 11, 15, 19, 23	30.	5, 8, 12, 14, 18, 23

Питання для самоперевірки

1. Сформулювати означення кола.
2. Записати рівняння кола, центр якого співпадає з початком координат.
3. Записати рівняння кола з центром в довільній точці.
4. Сформулювати означення еліпса. Вказати основні характеристики еліпса.
5. Записати рівняння еліпса.
6. Сформулювати означення гіперболи. Вказати основні характеристики гіперболи.
7. Записати рівняння гіперболи.
8. Сформулювати означення параболі. Вказати основні характеристики параболі.
9. Записати рівняння параболі.
10. Сформулювати директоріальну властивість еліпса.

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика [Текст]: підручник. У 2 кн. Кн. 1 / Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; за ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. — 400 с.
2. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К: А.С. К., 2006. – 647 с.
3. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В.І. Діскант, Л.Р. Береза, О.П. Грижук, Л.М. Захаренко. – К.: Вища шк., 2001. – 303 с.
4. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / За редакцією Ю.К. Рудавського. – Львів: Бескид БіТ, 2002. – 256 с.
5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972. – 240 с.
6. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В.В. Булдигін, І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Дихонович, Н.Р. Коновалова, Л.Б. Федорова; за ред. проф. В.В. Булдигіна. – К.: ТВіМС, 2011. – 224 с.
7. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КП», 2013. – 180 с.
8. Лиман Ф.М., Петренко С.В., Одінцова О.О. Вища математика. – Ч. 1: Навч. посібник. – Суми: СДПУ ім. А.С. Макаренка, 2002. – 224 с.
9. Навієв Е.Х., Владіміров В.М., Миронець О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1997. – 152 с.
10. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. – К.: Вища шк., Головное изд-во, 1987. – 552 с.
11. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач: Навч. посібник. – К.: Діал, 2000. – 160 с.
12. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2008. — 608 с.
13. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. підручник. – Львів: Бескид БіТ, 2002. – 262 с.
14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие: В 3-х ч. – Ч. 1 / Под общей редакцией А.П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 270 с.

Зміст

ВСТУП	3
Практична робота № 1. МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ	4
Практична робота № 2. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ	14
Практичне заняття № 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	29
Практична робота № 4. ВЕКТОРИ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ВЕКТОРИ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ	48
Практична робота № 5. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ	59
Практична робота № 6. ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ	67
Практична робота № 7. ПРЯМА В ПРОСТОРИ $\mathbb{R}^2$	76
Практична робота № 8. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН І ПРЯМИХ В ПРОСТОРИ $\mathbb{R}^3$	82
Практична робота № 9. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	89
Список рекомендованої літератури	105

Навчальне видання

ГОРДІЄНКО Марина Леонідівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

**Методичні вказівки
до виконання практичних робіт**

Первомайська філія
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
55200, Україна, Миколаївська обл., м. Первомайськ, вул. Одеська, 107
тел. 8(05161) 4-30-63, 4-24-54
E-mail: admin@ppi.net.ua

Підписано до друку
прим. Ціна договірна.

. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Ум. друк. арк. 3. Тираж 50

