

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Л. О. ЛАТАНСЬКА, Т. А. ФАРІОНОВА

**Методичні вказівки
до виконання самостійних робіт з дисципліни
"МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ"**

Рекомендовано Методичною радою НУК

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ • НУК • 2018

УДК 519.8(076)
Л 27

Автори: Л. О. Латанська, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Т. А. Фаріонова, канд. техн. наук, доцент
Рецензент К. В. Кошкін, д-р техн. наук, професор

Латанська Л. О.

Л 27 Методичні вказівки до виконання самостійних робіт з дисципліни "Математичні методи дослідження операцій" / Л. О. Латанська, Т. А. Фаріонова. — Миколаїв : НУК, 2018. — 30 с.

Укладено у відповідності з робочою навчальною програмою дисципліни "Математичні методи дослідження операцій" для самостійного вивчення питань дисципліни та закріплення теоретичних знань і практичних навичок, отриманих під час аудиторних занять.

Призначено для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 121 "Інженерія програмного забезпечення".

УДК 519.8(076)

Навчальне видання

ЛАТАНСЬКА Людмила Олексіївна
ФАРІОНОВА Тетяна Анатоліївна

**Методичні вказівки
до виконання самостійних робіт з дисципліни
"МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ"**

Редактор *С. А. Яременко*
Комп'ютерне верстання та складання *В. В. Москаленко*
Коректор *М. О. Паненко*

© Латанська Л. О., Фаріонова Т. А., 2018
© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2018

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 2,6. Об'єм даних 1522 кб.
Тираж 15 прим. Вид. № 28. Зам. № 178.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.

ВСТУП

Дисципліна "Математичні методи дослідження операцій" викладається в Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова під час підготовки студентів денної та заочної форм навчання освітнього рівня "бакалавр" спеціальностей 121 "Інженерія програмного забезпечення", 122 "Комп'ютерні науки та інформаційні технології".

Метою вивчення дисципліни є формування у студентів знань та вмінь використання сучасних методів оптимізації як особливого процесу людської діяльності щодо вибору раціонального варіанта дій.

Методичні вказівки призначені для самостійного вивчення питань дисципліни "Математичні методи дослідження операцій" та закріплення теоретичних знань і практичних навичок, отриманих під час аудиторних занять.

Вони містять завдання для самостійних робіт, стислий виклад теоретичних відомостей, етапи виконання робіт та контрольні питання.

При виконанні кожної самостійної роботи студент має:

- засвоїти теоретичні відомості;
- розібратися з завданням та етапами виконання роботи;
- виконати запропоновані завдання та оформити звіт до роботи;

– перевірити повноту розуміння теми за допомогою контрольних питань, розташованих у кінці кожної роботи.

Самостійну роботу необхідно виконувати відповідно до наведених етапів. Звіт про виконання самостійної роботи оформлюється кожним студентом індивідуально. Він повинен містити: назву і мету роботи; завдання (постановку задачі); короткі теоретичні відомості за темою; побудову моделі (математичної, графічної тощо) та алгоритм розв'язання задачі; отримані результати та їх аналіз; висновки.

Самостійна робота № 1

Тема: Аналіз на чутливість оптимального розв'язку задач лінійного програмування, отриманого графічним методом

Мета роботи: закріплення навичок розробки математичних моделей та знаходження оптимального розв'язку задач лінійного програмування (ЗЛП) графічним методом. Набуття теоретичних знань та практичного досвіду для проведення аналізу на чутливість оптимального розв'язку ЗЛП, отриманого графічним методом.

Завдання

Підприємство випускає два види продукції А і В та отримує прибуток від її реалізації. Для виробництва продукції використовується сировина трьох видів S_1 , S_2 і S_3 . При заданій технології кількість сировини, необхідної для виготовлення одиниці кожного з видів продукції, та її запаси відомі. Також відомий прибуток від продажу одиниці кожного виду продукції. Вихідні дані завдання самостійної роботи № 1 наведені в табл. 1.

Для розв'язання задачі необхідно:

1. Розробити, згідно варіанта, математичну модель задачі лінійного програмування на отримання максимального прибутку.

2. Знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування графічним методом.

3. Виконати аналіз на чутливість отриманого оптимального розв'язку ЗЛП.

У рамках аналізу на чутливість необхідно провести:

- аналіз на чутливість до зміни правих частин обмежень;
- аналіз ступеня дефіцитності ресурсів;
- аналіз на чутливість до зміни коефіцієнтів цільової функції.

Таблиця 1 – Вихідні дані завдання самостійної роботи № 1

Варіант 1				Варіант 2			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	A	B			A	B	
S1	1	1	8	S1	1	5	35
S2	1	4	20	S2	2	1	16
S3	1	0	5	S3	1	0	6
Прибуток	1	2		Прибуток	2	3	
Варіант 3				Варіант 4			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	A	B			A	B	
S1	1	4	28	S1	1	6	24
S2	1	1	10	S2	1	2	12
S3	1	0	7	S3	1	0	8
Прибуток	3	5		Прибуток	1	1	
Варіант 5				Варіант 6			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	A	B			A	B	
S1	3	8	37	S1	2	7	25
S2	2	4	16	S2	5	2	14
S3	2	3	8	S3	2	1	7
Прибуток	3	7		Прибуток	3	5	

Продовж. табл. 1

Варіант 7				Варіант 8			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>A</i>	<i>B</i>	
<i>S1</i>	2	3	18	<i>S1</i>	3	4	20
<i>S2</i>	1	4	12	<i>S2</i>	2	6	14
<i>S3</i>	2	1	10	<i>S3</i>	2	1	11
Прибуток	4	4		Прибуток	5	5	
Варіант 9				Варіант 10			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>A</i>	<i>B</i>	
<i>S1</i>	2	8	48	<i>S1</i>	1	5	35
<i>S2</i>	1	2	14	<i>S2</i>	2	3	27
<i>S3</i>	1	0	6	<i>S3</i>	1	0	7
Прибуток	2	7		Прибуток	1	1	
Варіант 11				Варіант 12			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>A</i>	<i>B</i>	
<i>S1</i>	1	7	63	<i>S1</i>	1	7	56
<i>S2</i>	2	1	22	<i>S2</i>	2	1	21
<i>S3</i>	1	0	9	<i>S3</i>	1	0	8
Прибуток	2	3		Прибуток	2	3	
Варіант 13				Варіант 14			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>A</i>	<i>B</i>	
<i>S1</i>	1	3	30	<i>S1</i>	3	1	12
<i>S2</i>	3	1	26	<i>S2</i>	1	2	9
<i>S3</i>	1	0	7	<i>S3</i>	1	0	4
Прибуток	1	1		Прибуток	2	2	

Продовж. табл. 1

Варіант 15				Варіант 16			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>A</i>	<i>B</i>	
<i>S1</i>	1	6	42	<i>S1</i>	1	5	55
<i>S2</i>	1	1	12	<i>S2</i>	2	1	24
<i>S3</i>	1	0	8	<i>S3</i>	1	0	6
Прибуток	1	2		Прибуток	4	3	
Варіант 17				Варіант 18			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>A</i>	<i>B</i>	
<i>S1</i>	2	5	25	<i>S1</i>	1	5	33
<i>S2</i>	2	1	12	<i>S2</i>	3	2	17
<i>S3</i>	2	0	10	<i>S3</i>	1	0	6
Прибуток	4	6		Прибуток	3	4	
Варіант 19				Варіант 20			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>A</i>	<i>B</i>	
<i>S1</i>	1	3	24	<i>S1</i>	2	7	20
<i>S2</i>	1	2	10	<i>S2</i>	2	3	10
<i>S3</i>	1	1	8	<i>S3</i>	2	1	8
Прибуток	3	5		Прибуток	1	2	
Варіант 21				Варіант 22			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	<i>A</i>	<i>B</i>			<i>A</i>	<i>B</i>	
<i>S1</i>	3	4	21	<i>S1</i>	2	6	30
<i>S2</i>	1	3	15	<i>S2</i>	4	3	15
<i>S3</i>	3	1	12	<i>S3</i>	2	1	8
Прибуток	5	4		Прибуток	4	5	

Продовж. табл. 1

Варіант 23				Варіант 24			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	A	B			A	B	
S1	2	4	25	S1	1	6	22
S2	2	3	12	S2	1	2	11
S3	2	2	10	S3	2	2	10
Прибуток	4	6		Прибуток	2	3	
Варіант 25				Варіант 26			
Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція		Запаси сировини (кг)
	A	B			A	B	
S1	3	9	40	S1	2	6	33
S2	2	3	15	S2	3	4	25
S3	3	1	7	S3	2	1	8
Прибуток	3	8		Прибуток	2	2	

Короткі теоретичні відомості

Модель лінійного програмування є ніби "моментним знімком" реальної ситуації, коли параметри моделі (коефіцієнти цільової функції та обмежень) передбачаються незмінними. Важливим є вивчення впливу зміни параметрів моделі на отриманий оптимальний розв'язок ЗЛП. Таке дослідження називається аналізом на чутливість. Аналіз моделей на чутливість – це процес, який реалізується після отримання оптимального розв'язку.

При такому аналізі завжди розглядається комплекс лінійних оптимізаційних моделей. Це додає моделі певну динамічність, дозволяє досліднику проаналізувати вплив можливих змін вихідних умов на отриманий раніше оптимальний розв'язок. Динамічні характеристики моделей фактично відображають аналогічні характеристики, властиві реальним процесам.

Відсутність методів, які дозволяють виявити вплив можливих змін параметрів моделі на оптимальний розв'язок, може призвести до того, що отриманий (статичний) розв'язок, застаріє ще до своєї реалізації. Існують методи оцінки моделей ЗЛП на чутливість як для випадку розв'язання ЗЛП графічним, так і симплексним методами [4, 5].

Розглянемо аналіз на чутливість розв'язку, отриманого графічним методом [3, 7].

Перша задача аналізу на чутливість: аналіз на чутливість до зміни правих частин обмежень.

У багатьох моделях лінійного програмування обмеження трактуються як умови обмеженості ресурсів. Праві частини обмежень є верхньою межею кількості доступних ресурсів. Розглянемо чутливість оптимального розв'язку до зміни обмежень, які накладаються на ресурси.

Відомо, що обмеження лінійної моделі класифікуються на зв'язуючі (активні) та незв'язуючі (неактивні). Пряма, яка відповідає зв'язуючому обмеженню, повинна проходити через оптимальну точку.

Якщо деяке обмеження є зв'язуючим, то ресурс, що йому відповідає, відноситься до розряду дефіцитних ресурсів, оскільки він витрачається повністю. Ресурс, якому відповідає незв'язуюче обмеження, відноситься до розряду недефіцитних ресурсів (тобто наявних у деякому надлишку).

Тому, у ході аналізу моделі на чутливість до зміни правих частин обмежень досліджують такі питання:

- гранично допустиме збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що дозволяє покращити знайдений раніше оптимальний розв'язок;

- гранично допустиме зниження запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює знайдений раніше оптимальний розв'язок;

– вплив на знайдений оптимум, збільшення запасу недефіцитних ресурсів.

Друга задача аналізу на чутливість: оцінка дефіцитності ресурсів.

За допомогою методів лінійного програмування вдасться відповісти і на питання: збільшення обсягу якого з ресурсів є найбільш вигідним?

Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, яка виражається через відповідне збільшення оптимального значення цільової функції. Таку характеристику можна одержати за результатами розв'язання першої задачі аналізу на чутливість.

Позначимо цінність додаткової одиниці ресурсу i -го виду через y_i . Величину y_i визначають із співвідношення

$$y_i = \frac{\Delta Z_i}{\Delta b_i},$$

де Δb_i – приріст запасу i -го виду ресурсу, ΔZ_i – приріст цільової функції, що зумовлений збільшенням i -го виду ресурсу на величину Δb_i .

В першу чергу необхідно збільшувати запаси ресурсів, які мають більшу цінність додаткової одиниці ресурсу.

Третя задача аналізу на чутливість: аналіз на чутливість до зміни коефіцієнтів цільової функції.

Зміна коефіцієнтів цільової функції впливає на нахил прямої, яка описує цю функцію в прийнятій системі координат. Оскільки визначення конкретної точки багатокутника розв'язків на предмет досягнення в ній оптимального значення цільовою функцією залежить насамперед від нахилу прямої, яка визначається цільовою функцією, то це означає, що варіація коефіцієнтів цільової функції може призвести до зміни

сукупності зв'язуючих обмежень і, отже, статусу того чи іншого ресурсу (тобто зробити недефіцитний ресурс дефіцитним, і навпаки).

Таким чином, у ході аналізу моделі на чутливість до змін коефіцієнтів цільової функції досліджуються наступні питання:

– Яким є діапазон зміни (збільшення або зменшення) того або іншого коефіцієнта цільової функції, при якому не відбувається зміна оптимального розв'язку?

– Наскільки варто змінити той або інший коефіцієнт цільової функції, щоб зробити деякий недефіцитний ресурс дефіцитним і, навпаки, дефіцитний ресурс зробити недефіцитним?

Контрольні питання

1. Сформулюйте загальну задачу лінійного програмування.
2. Назвіть форми запису ЗЛП.
3. Дайте визначення допустимого, опорного та оптимального розв'язків ЗЛП.
4. Надайте геометричну інтерпретацію ЗЛП.
5. Перелічіть властивості розв'язків ЗЛП.
6. Назвіть основні кроки алгоритму графічного методу розв'язування ЗЛП.
7. Як виконується аналіз на чутливість до зміни правих частин обмежень оптимального розв'язку ЗЛП, отриманого графічним методом?
8. Як виконується аналіз ступеня дефіцитності ресурсів ЗЛП, розв'язаної графічним методом?
9. Як виконується аналіз на чутливість до зміни коефіцієнтів цільової функції оптимального розв'язку ЗЛП, отриманого графічним методом?
10. Яка ЗЛП називається ЗЛП у канонічній формі?

Самостійна робота № 2

Тема: Аналіз на чутливість оптимального розв'язку задачі лінійного програмування, отриманого симплексним методом

Мета роботи: закріплення навичок розробки математичних моделей пари двоїстих задач, знаходження симплексним методом оптимального розв'язку однієї з пари задач, та за допомогою першої теореми двоїстості – іншої. Набуття теоретичних знань та практичного досвіду проведення аналізу на чутливість оптимального розв'язку ЗЛП, отриманого симплексним методом.

Завдання

Для виготовлення двох видів продукції $P1$ і $P2$ використовують чотири види сировини $S1$, $S2$, $S3$, $S4$. Для виготовлення одиниці продукції $P1$ використовують сировину $S1 = N$ од., $S2 = 2N$ од., $S3 = (2N - 1)$ од., $S4 = N$ од. На виготовлення одиниці продукції $P2$ використовують сировину $S1 = 3N$ од., $S2 = (3N - 2)$ од., $S3 = (N + 3)$ од. Запаси сировини $S1$ складають не більше ніж $20N$ од., $S2$ не більше ніж $30N$ од., $S3$ не більш ніж $40N$ од., $S4$ не більш ніж $20N$ од. Прибуток від одиниці продукції $P1$ становить N грн, від $P2$

становить $N + 2$ грн (N – номер варіанта). Вихідні дані завдання самостійної роботи № 2 представлені в табл. 2.

Таблиця 2 – Вихідні дані завдання самостійної роботи № 2

Вид сировини	Запас сировини, од.	Витрати сировини	
		$P1$	$P2$
$S1$	$20N$	N	$3N$
$S2$	$30N$	$2N$	$3N - 2$
$S3$	$40N$	$2N - 1$	$N + 3$
$S4$	$20N$	N	–
Прибуток від одиниці продукції, грн		N	$N + 2$

Для розв'язання задачі необхідно:

1. Розробити, згідно варіанта, математичну модель задачі лінійного програмування на отримання максимального прибутку, та двоїстої до неї.

2. Знайти оптимальні плани прямої та двоїстої задач і виконати їх аналіз.

3. Провести аналіз на чутливість отриманого оптимального розв'язку.

В рамках аналізу на чутливість необхідно розв'язати наступні задачі:

1. Визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.

2. Визначити план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо запас першого ресурсу збільшити на 10 од., другого зменшити на 10 од., третього збільшити на 20 од., четвертого зменшити на 10 од.

3. Визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.

4. Розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо аналіз на чутливість розв'язку, отриманого симплексним методом [3, 7].

Перша задача аналізу на чутливість: визначення статусу ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.

Нехай X^* – оптимальне розв'язання прямої задачі, а Y^* – двоїстої до неї.

Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами.

Перший спосіб – підстановкою X^* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, інакше – недефіцитний.

Другий спосіб – за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля – ресурс недефіцитний.

Третій спосіб – за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $u_i \neq 0$, то i -й ресурс дефіцитний, якщо ж $u_i = 0$, то i -й ресурс недефіцитний.

При дослідженні інтервалів стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів розглядають наскільки і за рахунок яких змін в оптимальному плані збільшиться цільова функція при збільшенні запасу одного дефіцитного ресурсу на одну умовну одиницю при інших однакових умовах. Також розглядається питання розрахунку інтервалів можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки u_i залишаються на рівні оптимальних значень.

Друга задача аналізу на чутливість: визначення плану виробництва продукції та зміни загального доходу підприємства при зміні обсягу всіх ресурсів.

Для визначення компонентів нового оптимального плану необхідно використати одне із головних співвідношень симплексного методу

$$X^* = D^{-1}B.$$

Матриця D^{-1} отримується із останньої симплексної таблиці із тих стовпців, у яких в першій таблиці знаходилася одинична матриця. B – відповідний стовпець останньої симплексної таблиці.

Третя задача аналізу на чутливість: визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.

Рентабельність кожного виду продукції визначається за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Необхідно підставити Y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (праву частину), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

Аналогічні результати можна отримати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Четверта задача аналізу на чутливість: розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції.

Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися чи зменшу-

ватися). І тому завжди цікаво знати, у межах яких змін ціни продукції кожного виду оптимальний план її виробництва залишається незмінним.

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємось тим, що при цьому симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів оціночного рядка. Нові оцінки мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації, тобто є невід'ємними.

Контрольні питання

1. Яка роль двоїстості в лінійному програмуванні?
2. Дайте визначення поняттю "двоїста ЗЛП".
3. Назвіть правила побудови пари двоїстих задач.
4. Які пари двоїстих задач називаються симетричними?
5. Які пари двоїстих задач називаються несиметричними?
6. Сформулюйте першу та другу теореми двоїстості.
7. Як визначається статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів?
8. Як визначається план виробництва продукції та зміна загального доходу підприємства при зміні обсягу всіх ресурсів?
9. Як визначається рентабельність кожного виду продукції, яка виготовляється на підприємстві?
10. Як розраховують інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції?

Самостійна робота № 3

Тема: Побудова мінімального остовного дерева зв'язного зваженого неорієнтованого графа

Мета роботи: набуття теоретичних знань та практичного досвіду побудови мінімального остовного дерева зв'язного зваженого неорієнтованого графа.

Завдання

Побудувати мінімальне остовне дерево зв'язного зваженого неорієнтованого графа.

Для зв'язних зважених неорієнтованих графів, представлених на рис. 1 (варіанти 1–13) та рис. 2 (варіанти 14–26), необхідно побудувати мінімальні остовні дерева за допомогою алгоритмів Прима та Крускала (Краскала).

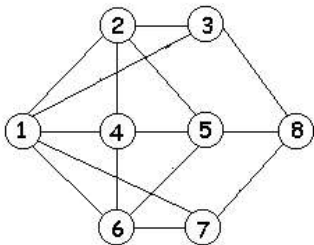


Рисунок 1 – Граф для варіантів 1–13

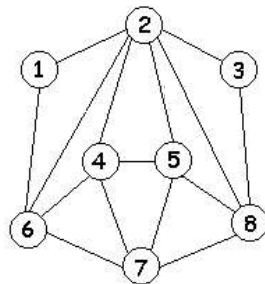


Рисунок 2 – Граф для варіантів 14–26

У табл. 3 наведено, згідно з варіантами, ваги ребер графа, зображеного на рис. 1, в табл. 4 – ваги ребер графа на рис. 2.

Таблиця 3 – Ваги ребер графа для варіантів 1–13 (див. рис. 1)

Варі- ант	Ребро															
	1,2	1,3	1,4	1,6	1,7	2,3	2,4	2,5	3,8	4,5	4,6	5,6	5,8	6,7	7,8	
	Bara															
1	2	4	1	5	3	5	7	4	3	5	8	7	4	6	5	
2	3	1	4	2	5	3	2	4	5	1	3	2	4	2	6	
3	3	2	3	6	4	1	3	1	3	4	2	3	5	1	6	
4	2	1	3	4	6	2	1	3	3	4	8	7	4	2	3	
5	4	2	6	3	1	4	2	1	1	2	2	3	8	4	2	
6	8	4	2	7	6	4	5	1	3	4	7	3	4	8	6	
7	1	8	5	4	3	2	4	3	2	2	4	3	2	9	4	
8	2	1	5	3	6	8	3	1	4	2	5	3	2	4	5	
9	3	2	4	1	6	5	3	4	3	2	3	1	7	8	3	
10	1	2	8	3	4	6	5	5	1	6	2	3	4	1	3	
11	1	2	4	3	5	2	4	6	2	3	1	7	8	2	9	
12	3	2	1	5	4	6	2	4	3	6	2	4	1	5	2	
13	2	8	3	4	6	1	2	3	4	7	2	1	3	5	4	

Таблиця 4 – Ваги ребер графа для варіантів 14–26 (див. рис. 2)

Вари- ант	Ребро															
	1,2	1,6	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8	3,8	4,5	4,6	4,7	5,7	5,8	6,7	7,8	
	Вага															
14	2	5	3	8	6	2	4	3	1	4	2	5	6	2	3	
15	5	3	4	7	5	3	9	3	4	5	2	6	1	3	2	
16	4	3	1	2	7	6	3	4	5	2	3	7	6	8	2	
17	3	4	8	7	4	2	3	2	1	3	4	6	2	1	3	
18	1	2	2	3	8	4	2	4	2	6	3	1	4	2	1	
19	3	4	7	3	4	8	6	8	4	2	7	6	4	5	1	
20	2	2	4	3	2	9	4	1	8	5	4	3	2	4	3	
21	4	2	5	3	2	4	5	2	1	5	3	6	8	3	1	
22	3	2	3	1	7	8	3	3	2	4	1	6	5	3	4	
23	2	3	1	7	8	2	9	1	2	4	3	5	2	4	6	
24	3	6	2	4	1	5	2	3	2	1	5	4	6	2	4	
25	4	7	2	1	3	5	4	2	8	3	4	6	1	2	3	
26	2	5	3	8	6	2	4	3	1	4	2	5	6	2	3	

Короткі теоретичні відомості

Основні поняття та визначення [2, 4]

Графом $G(V, E)$ називається пара (V, E) множин: вершин V і ребер E , між якими визначено відношення інцидентності. Ребро називають інцидентним вершині, якщо воно заходить у вершину, або виходить з неї. Кожне ребро e із E інцидентне рівно двом вершинам v та w , які воно з'єднує. Якщо $v = w$, то e називається петлею.

В деяких задачах інцидентні ребру вершини нерівноправні: вони розглядаються в певному порядку. Тоді кожному ребру можна приписати напрям від однієї з інцидентних вершин до іншої. Ребра, які мають напрям, називають орієнтованими.

Граф, що складається з неорієнтованих ребер, називається неорієнтованим. Граф, що складається з орієнтованих ребер, називається орієнтованим.

Граф називається скінченним, якщо він має скінченну кількість вершин та ребер.

Якщо кожному ребру e графа $G(V, E)$ поставлено у відповідність число $w(e) > 0$ (вага ребра), то такий граф називається зваженим.

Дві вершини графа називаються суміжними, якщо вони визначають ребро графа. Два ребра вважаються суміжними, якщо вони мають спільну вершину.

Послідовність вершин і ребер, де кожне ребро з'єднує дві суміжні вершини, називається маршрутом у графі. Маршрут починається з вершини і закінчується у вершині. Якщо початок і кінець маршруту збігаються, то маршрут називається циклічним. Маршрут, усі ребра якого різні, називається ланцюгом. Якщо початкова і кінцева вершини ланцюга збігаються, то це цикл. Ланцюг простий, якщо всі його вершини різні (не повторюються).

Граф називається зв'язним, якщо для будь-яких вершин існує ланцюг, що їх з'єднує. Дерево – це зв'язний граф без циклів.

Якщо граф скінченний та зв'язний, то легко побудувати дерево, множина вершин якого збігалася б із множиною всіх вершин заданого графа, а всі ребра дерева одночасно були б ребрами цього графа. Таке дерево T називають деревом, що породжує граф, чи остовним деревом графа. Остовних дерев у скінченного зв'язного графа може бути багато.

Вага остовного дерева T дорівнює сумі ваги ребер дерева. Мінімальним остовним деревом зв'язного зваженого графа G називається таке остовне дерево графа G , яке має мінімальну вагу.

Алгоритми Прима та Крускала (Краскала) [1, 2, 4, 6]

Розглянемо алгоритми Прима та Крускала (Краскала) побудови остовного дерева мінімальної ваги для зв'язного зваженого неорієнтованого графа $G = (V, E)$, які є одними з найпростіших, але в той же час досить ефективними. Обидва алгоритми відповідають "жадібній" стратегії: на кожному кроці вибирається локально найкращий варіант.

Алгоритм Прима знаходження мінімального остовного дерева зв'язного зваженого неорієнтованого графа.

Крок 1. Вибрати вершину v_0 графа G і ребро з найменшою вагою e_1 , для якого v_0 – одна з вершин, і сформувати дерево T_1 .

Крок 2. Для заданого дерева T_k з ребрами $e_1, e_2, \dots, e_k$, якщо є вершина, що не належить T_k , то вибрати ребро з найменшою вагою, яке суміжне з ребром дерева T_k і має вершину поза деревом T_k . Додати це ребро в дерево T_k , формуючи дерево T_{k+1} .

Крок 3. Повертатися до кроку два доки є вершини графа G , що не належать дереву.

Алгоритм складається з $n - 1$ ітерацій. Загальна трудомісткість ефективної реалізації алгоритму Прима дорівнює $O(n^2)$, де n – кількість вершин зв'язного зваженого неорієнтованого графа.

Алгоритм Крускала (Краскала) побудови мінімального остовного дерева зв'язного зваженого неорієнтованого графа:

Крок 1. Вибрати на графі G ребро e мінімальної ваги та включити його в дерево T .

Крок 2. Для інших ребер: серед ребер, які залишилися, вибрати ребро e_i з мінімальною вагою. Якщо ребро e_i не утворює циклу з уже включеними ребрами, то необхідно включити e_i в дерево, інакше – пропустити ребро.

Крок 3. Повернутися до кроку 2, доки число ребер T не стане $n - 1$.

Загальна трудомісткість ефективної реалізації алгоритму Крускала дорівнює $O(m \log m)$, де m – кількість ребер зв'язного зваженого неорієнтованого графа.

Контрольні питання

1. Що розуміють під терміном "граф"?
2. Які вершини графа називаються суміжними?
3. Які ребра графа називаються суміжними?
4. Дайте визначення поняттю "ланцюг графа".
5. Дайте визначення поняттю "інцидентність".
6. Які ребра називаються орієнтованими?
7. Які графи називаються орієнтованими та неорієнтованими?
8. Дайте визначення поняттю "зв'язний граф".
9. Дайте визначення поняттю "цикл графа".
10. Які графи називаються зваженими?

11. Дайте визначення поняттю "дерево".
12. Дайте визначення поняттю "остовне дерево зв'язного зваженого графа".
13. Дайте визначення поняттю "мінімальне остовне дерево зв'язного зваженого графа".
14. Назвіть основні кроки алгоритму Крускала (Краскала).
15. Назвіть основні кроки алгоритму Прима.

Самостійна робота № 4

Тема: Визначення максимального потоку в мережі

Мета роботи: набуття теоретичних знань та практичного досвіду визначення максимального потоку в мережі.

Завдання

Необхідно визначити максимальний потік у мережі, наведений на рис. 3, з вершини X_i (джерела) в вершину X_j (стік), де числа на дугах вказують пропускні здатності цих дуг в обох напрямках. Номери вершин i та j для варіантів завдання самостійної роботи № 4 наведені в табл. 5.

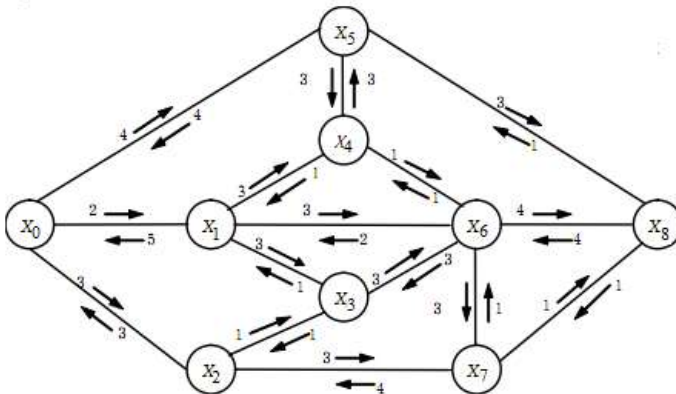


Рисунок 3 – Мережа для визначення максимального потоку

Таблиця 5 – Вихідні дані самостійної роботи № 4 (за варіантами)

Номер варіанта	Початкова вершина i	Кінцева вершина j	Номер варіанта	Початкова вершина i	Кінцева вершина j
1	0	1	14	3	4
2	0	2	15	3	7
3	0	3	16	3	8
4	0	4	17	4	5
5	1	5	18	4	8
6	1	6	19	6	3
7	1	7	20	6	5
8	1	8	21	6	8
9	2	4	22	7	1
10	2	5	23	7	4
11	2	6	24	7	5
12	2	7	25	7	8
13	3	2	26	8	3

Короткі теоретичні відомості

Вихідними даними для задачі про максимальний потік є мережа з одним початковим пунктом (джерелом) s та одним кінцевим пунктом (стоком) t , а також із заданими значеннями пропускної здатності для кожної дуги мережі між пунктами i та j в обох напрямках c_{ij}/c_{ji} [1, 2, 4, 6].

Задача полягає в знаходженні максимального потоку від джерела до стоку.

Представимо математичну постановку задачі про максимальний потік у мережі.

Потік визначає спосіб пересилання деяких об'єктів з одного пункту в інший. Мережа представляється у вигляді скінченного зв'язного графа $G(V, E)$ без петель, де V – множина вершин графа, E – множина дуг між цими вершинами. Кожна дуга (i, j) характеризується пропускною здатністю c_{ij}/c_{ji} .

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць потоку, що проходить по дузі (i, j) . Тоді загальний потік, що виходить з джерела s та входить до стоку t , дорівнює

$$F = \sum_j^k x_{sj} = \sum_i^r x_{it},$$

де k та r – кількість вершин, які суміжні відповідно з джерелом s та стоком t .

Необхідно знайти такі значення потоків x_{ij} , що пропускаються по кожній з дуг графа, які забезпечать максимум результуючого потоку F . При цьому повинні виконуватися наступні умови:

- величина потоку, яка проходить по кожній дузі, не повинна перевищувати її пропускну здатність;

- сумарна величина потоку, яка входить до кожної вершини, повинна дорівнювати сумарній величині потоку, що виходить з кожної вершини (крім джерела та стоку);

- сумарна величина потоку, яка виходить з джерела, повинна дорівнювати сумарній величині потоку, що входить у стік.

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі про максимальний потік на мережах Форда-Фалкерсона.

Ідея алгоритму полягає в тому, що послідовно на графі відшукуються можливі шляхи від джерела до стоку, при цьому дуги з повністю заповненою пропускну здатністю виключаються. Процедура повторюється до тих пір, поки можливо побудувати шлях від джерела до стоку.

Крок 1. Знайти будь-який можливий шлях від s до t , при якому потік набуває додатного значення у напрямку $s \rightarrow t$. При цьому перехід від вершини i до вершини j можливий тільки тоді, коли між ними є дуга, для якої $c_{ij} > 0$.

Якщо такого шляху не існує, то перейти до кроку 6, а якщо існує – до кроку 2.

Крок 2. На графі виділити дуги, що входять до знайденого шляху.

Крок 3. Для виділених дуг (i, j) значення пропускної здатності в прямому напрямку c_{ij} позначити знаком "-", а в зворотному напрямку c_{ji} – знаком "+".

Крок 4. Серед c_{ij} , позначених знаком "-", знайти мінімальне значення $\Delta = \min \{c_{ij}^-\}$.

Крок 5. Перетворити граф. Для цього від усіх c_{ij}^- відняти Δ , отримане на 4 кроці, а до всіх c_{ij}^+ додати Δ . Після цього прибрати всі позначки "-" та "+" і перейти до кроку 1.

Крок 6. Отримані пропускні здатності дуг графа позначити як c_{ij}^* , а пропускні здатності дуг вихідного графа як c_{ij} . Величина потоку x_{ij} , яка пропускається по кожній дузі, визначається як

$$x_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - c_{ij}^*, & \text{якщо } c_{ij} > c_{ij}^* \\ 0, & \text{якщо } c_{ij} \leq c_{ij}^* \end{cases}$$

На основі отриманих значень x_{ij} будується граф, на якому відображається розподіл потоку по дугам.

Крок 7. Максимальний потік з пункту s в пункт t визначається як сума потоків по дугам, які виходять з джерела, або сума потоків по дугам, які входять у стік.

Крок 8. Виконати перевірку отриманих результатів:

- максимальне значення потоку F дорівнює сумі всіх додатних значень Δ , отриманих на 4 кроці;
- максимальне значення потоку F дорівнює сумі потоків

по дугам, які виходять з джерела, або сумі потоків по дугам, які входять у стік;

– для всіх дуг повинна виконуватися умова $x_{ij} \leq c_{ij}$.

Контрольні питання

1. Назвіть вихідні дані задачі про максимальний потік.
2. Дайте визначення поняттям "джерело" та "стік".
3. У чому полягає суть задачі про максимальний потік в мережах?
4. Сформулюйте математичну постановку задачі про максимальний потік.
5. Дайте визначення поняттю "петля".
6. Назвіть кроки алгоритму розв'язання задачі про максимальний потік в мережах Форда-Фалкерсона.
7. Які є обмеження в задачі про максимальний потік?
8. Як перевіряється правильність отриманого розв'язку задачі про максимальний потік?
9. Дайте визначення поняттю "зв'язний граф".
10. Дайте визначення поняттю "скінченний граф".

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алгоритмы: построение и анализ [Текст] / Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Д. Риверс, Клиффорд Штайн. – М. : Изд. дом "Вильямс", 2005. – 1296 с.
2. **Басакер, Р.** Конечные графы и сети [Текст] / Р. Басакер, Т. Саати. – М. : Наука, 1974. – 368 с.
3. **Боровик, О. Л.** Дослідження операцій в економіці [Текст] : навч. посіб. / О. Л. Боровик, Л. В. Боровик. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.
4. **Вагнер, Г.** Основы исследования операций [Текст] : в 3 т. Т. 1 / Г. Вагнер. – М. : Мир, 1972. – 337 с.
5. Исследование операций в экономике [Текст] : учебное пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 407 с.
6. **Кристофидес, Н.** Теория графов. Алгоритмический подход [Текст] / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 340 с.
7. **Таха Хемди, А.** Введение в исследование операций [Текст] / А. Таха Хемди. – М. : Изд. дом "Вильямс", 2006. – 912 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Самостійна робота № 1. Аналіз на чутливість оптимального розв'язку задач лінійного програмування, отриманого графічним методом	5
Самостійна робота № 2. Аналіз на чутливість оптимального розв'язку задач лінійного програмування, отриманого симплексним методом	13
Самостійна робота № 3. Побудова мінімального остовного дерева зв'язного зваженого неорієнтованого графа	18
Самостійна робота № 4. Визначення максимального потоку в мережі	24
Список літератури	29