МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

М. Р. ТКАЧ, С. О. МОРГУН, А. С. ПОЗНАНСЬКИЙ

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ НА БАЗІ СИСТЕМИ Mathcad

ЧАСТИНА І. СТАТИКА

Рекомендовано Методичною радою НУК
як методичні вказівки
Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM

МИКОЛАЇВ • НУК • 2018

УДК 531.2(076)
Т48

Укладачі:
М. Р. Ткач, д-р техн. наук, професор
С. О. Моргун, канд. техн. наук, викладач
А. С. Познанський, канд. техн. наук, ст. викладач
Рецензент А. І. Тарасенко, канд. техн. наук, доцент

Ткач М. Р.

Т 48 Розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad. Частина І. Статика / М. Р. Ткач, С. О. Моргун, А. С. Познанський. – Миколаїв : НУК, 2018. – 131 с.

Уміщено розрахунково-графічні роботи з розділу "Статика" і наведено ілюстровані приклади їх розв'язання за допомогою інформаційних технологій. Призначено для студентів вищих навчальних закладів. Також можуть бути використані для самостійного вивчення методів і принципів розрахунку типових завдань з курсу теоретичної механіки "Статика".

УДК 531.2(076)

Навчальне видання

ТКАЧ Михайло Романович
МОРГУН Сергій Олександрович
ПОЗНАНСЬКИЙ Андрій Станіславович

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ НА БАЗІ СИСТЕМИ Mathcad
ЧАСТИНА І. СТАТИКА
Методичні вказівки

Комп'ютерне верстання *Т. М. Чередніченко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. . Обсяг даних.
Тираж прим. Вид. № . Зам. № .
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Завдання №1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил

Знайти реакції опор заданої конструкції. Значення величин навантажень наведено в табл. 1, схеми конструкцій зображено на рис. 1.1–1.3. Сили P задаються в кН, моменти сил M – кН·м, максимальна інтенсивність розподіленого навантаження q – в кН/м. Розмір a = 1 м. Розподілене навантаження діє перпендикулярно по відношенню до відповідного елементу конструкції.

Таблиця 1

Варіант	P, кН	M, кН·м	q, кН/м	Варіант	P, кН	M, кН·м	q, кН/м
1	16	25	10	**16**	18	11	10
2	35	46	12	**17**	25	23	15
3	8	35	2	**18**	4	36	18
4	15	30	14	**19**	6	55	24
5	12	27	8	**20**	17	28	32
6	14	45	5	**21**	9	30	16
7	20	10	17	**22**	5	15	18
8	38	60	20	**23**	39	65	28
9	27	48	22	**24**	42	70	36
10	31	52	30	**25**	40	72	42
11	29	44	24	**26**	37	25	44
12	34	15	26	**27**	46	68	15
13	32	27	41	**28**	10	30	25
14	40	39	6	**29**	2	18	40
15	48	32	8	**30**	50	20	10

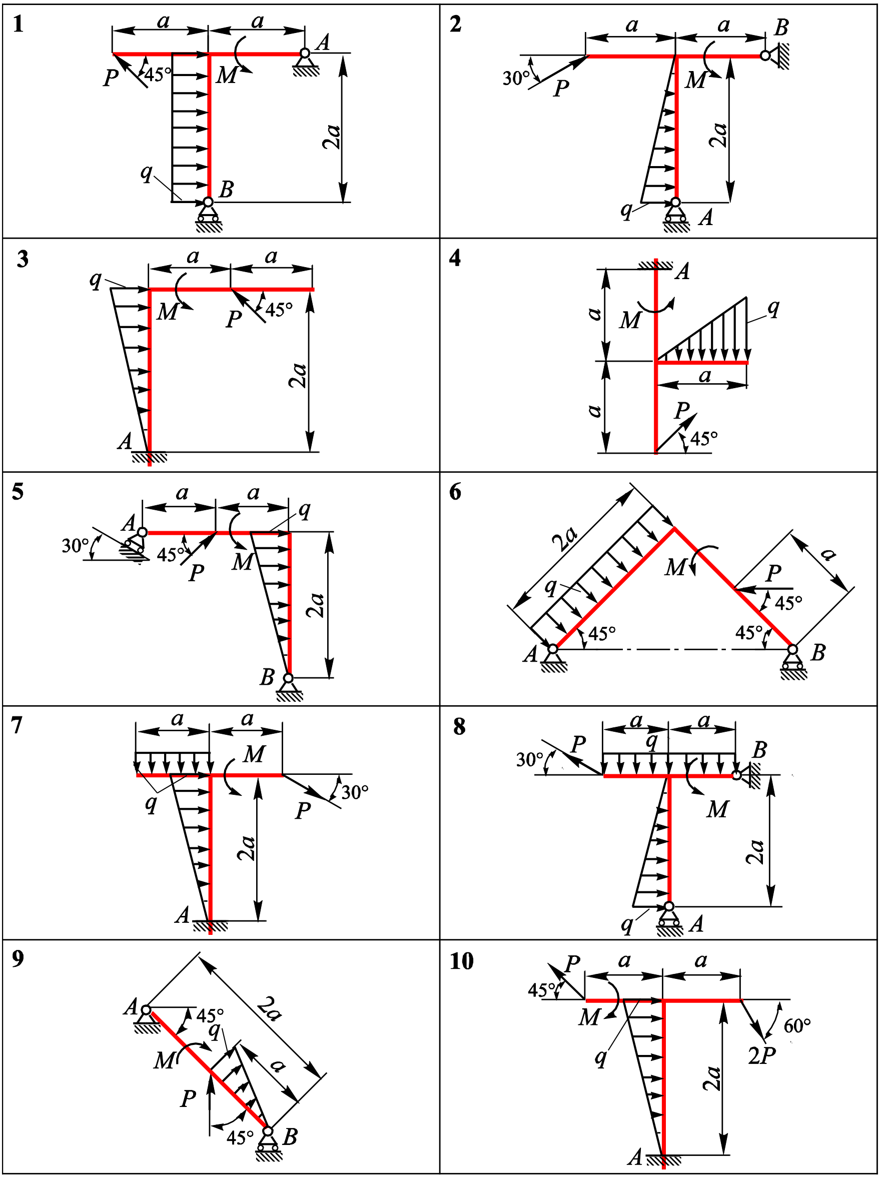

1
a
a
A
P
45°
M
2a
q
B
2
a
a
B
30°
P
M
2a
q
A
3
q
a
a
M
P
45°
2a
A
4
A
a
M
q
a
a
P
45°
5
a
a
q
A
30°
45°
P
M
2a
B
6
2a
q
M
P
a
45°
45°
45°
A
B
7
a
a
M
q
30°
P
2a
A
8
a
a
P
q
B
30°
M
2a
q
A
9
A
45°
2a
q
M
a
P
45°
B
10
P
a
a
45°
M
q
60°
2P
2a
A

Рис. 1

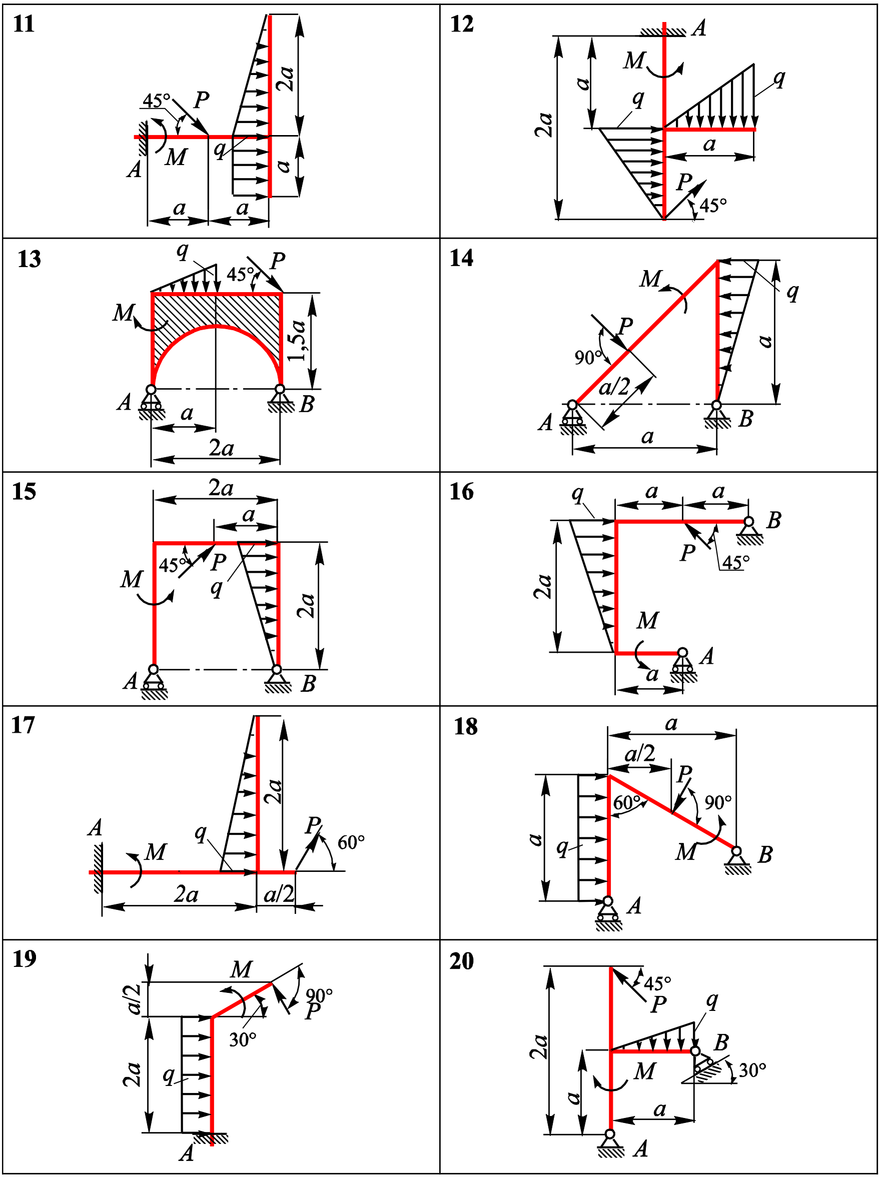

11
45°
P
M
A
q
2a
a
a
a
12
A
M
a
q
q
2a
a
P
45°
13
q
45°
P
M
1,5a
A
B
a
2a
14
M
q
P
90°
a
a/2
A
B
a
15
2a
a
45°
P
M
q
2a
A
B
16
q
a
a
B
P
45°
2a
M
A
a
17
A
M
q
2a
P
60°
2a
a/2
18
a
a/2
P
60°
90°
a
q
M
B
A
19
M
a/2
90°
P
30°
2a
q
A
20
45°
P
q
B
2a
M
30°
a
a
A

Рис. 2

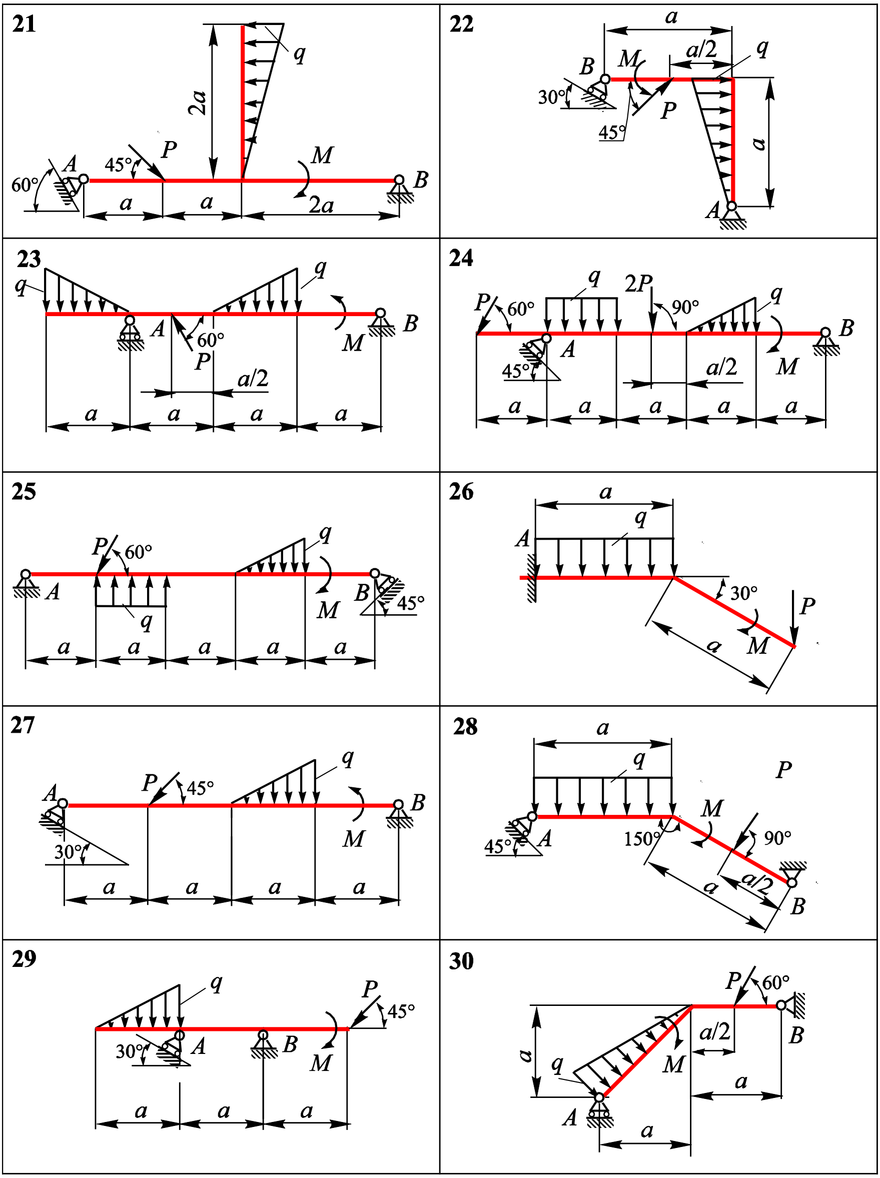

21
q
2a
P
45°
A
60°
M
B
a
a
2a
22
a
a/2
q
B
M
30°
P
45°
a
A
23
q
q
A
60°
P
M
B
a/2
a
a
a
a
24
P
60°
q
2P
90°
q
B
A
45°
a/2
M
a
a
a
a
a
25
P
60°
q
A
q
M
B
45°
a
a
a
a
a
26
a
q
A
30°
P
M
a
27
A
P
45°
q
B
M
30°
a
a
a
a
28
a
q
P
M
45°
A
150°
90°
a/2
a
B
29
q
P
45°
30°
A
B
M
a
a
a
30
P
60°
B
a/2
a
q
M
a
A
a

Рис. 3

Завдання №2. Визначення реакцій опор та сил в стрижнях плоскої ферми

Знайти реакції опор та сили в стрижнях заданої конструкції методом вирізання вузлів.

Значення модулів сил наведено в табл. 2, схеми конструкцій зображено на рис. 2.1–2.3. Сили P задаються в кН.

Таблиця 2

Варіант	P, кН	Варіант	P, кН
1	16	**16**	36
2	30	**17**	38
3	8	**18**	40
4	32	**19**	42
5	14	**20**	44
6	20	**21**	46
7	22	**22**	48
8	24	**23**	50
9	26	**24**	52
10	28	**25**	54
11	10	**26**	56
12	12	**27**	58
13	14	**28**	60
14	32	**29**	62
15	34	**30**	64

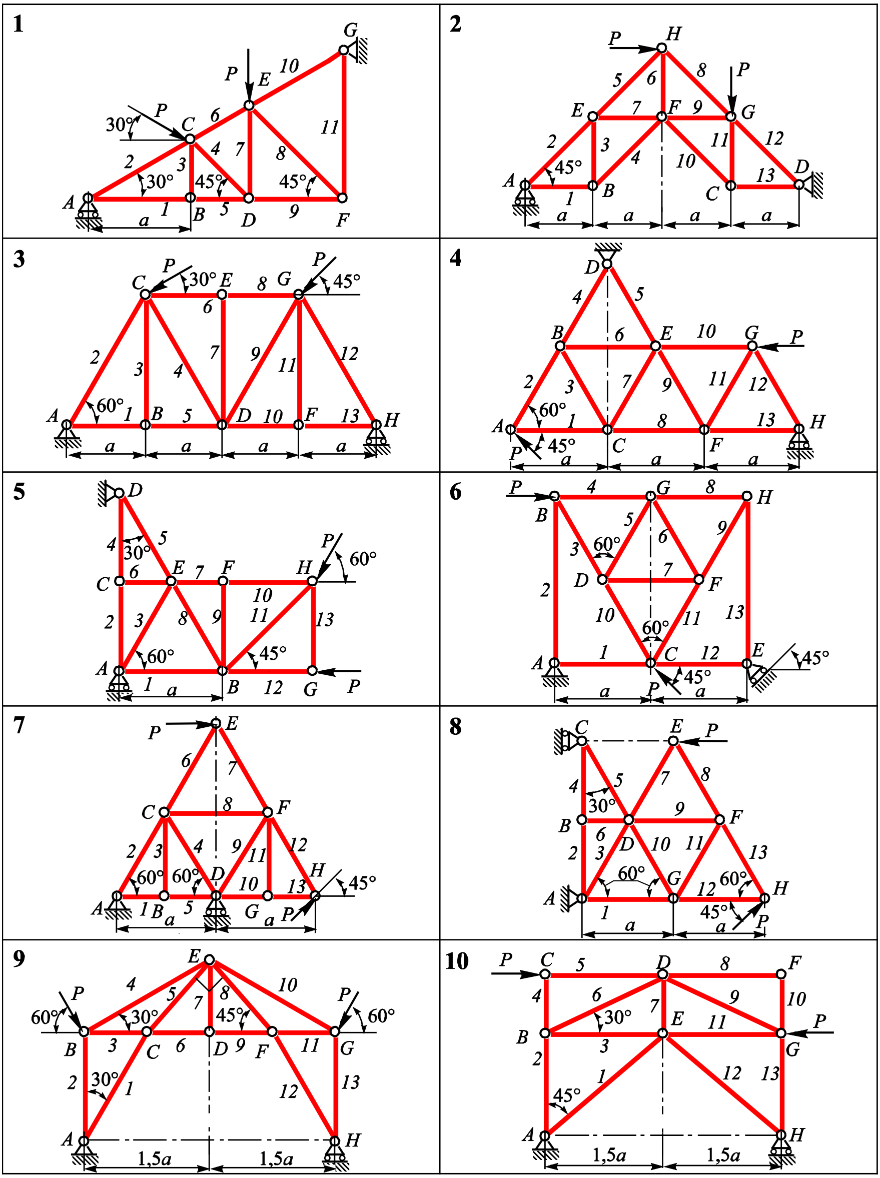

1
A B C D E F G
P
30°
45°
a
2
A B C D E F G H
P
45°
a
3
A B C D E F G H
P
30°
45°
60°
a
4
A B C D E F G H
P
60°
45°
a
5
A B C D E F G H
P
30°
60°
45°
a
6
A B C D E F G H
P
60°
45°
a
7
A B C D E F G H
P
60°
45°
a
8
A B C D E F G H
P
30°
60°
45°
a
9
A B C D E F G H
P
60°
30°
45°
1,5a
10
A B C D E F G H
P
30°
45°
1,5a

Рис. 4

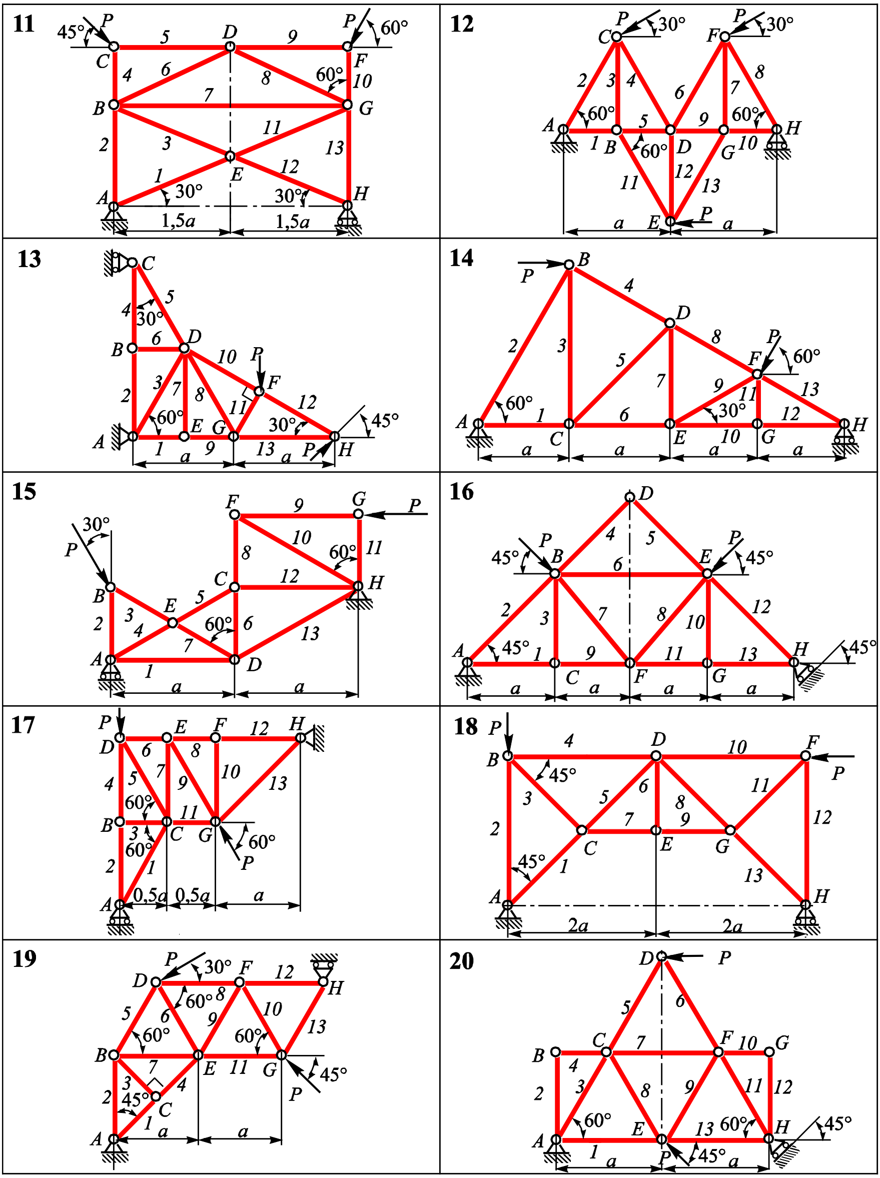


Рис. 5

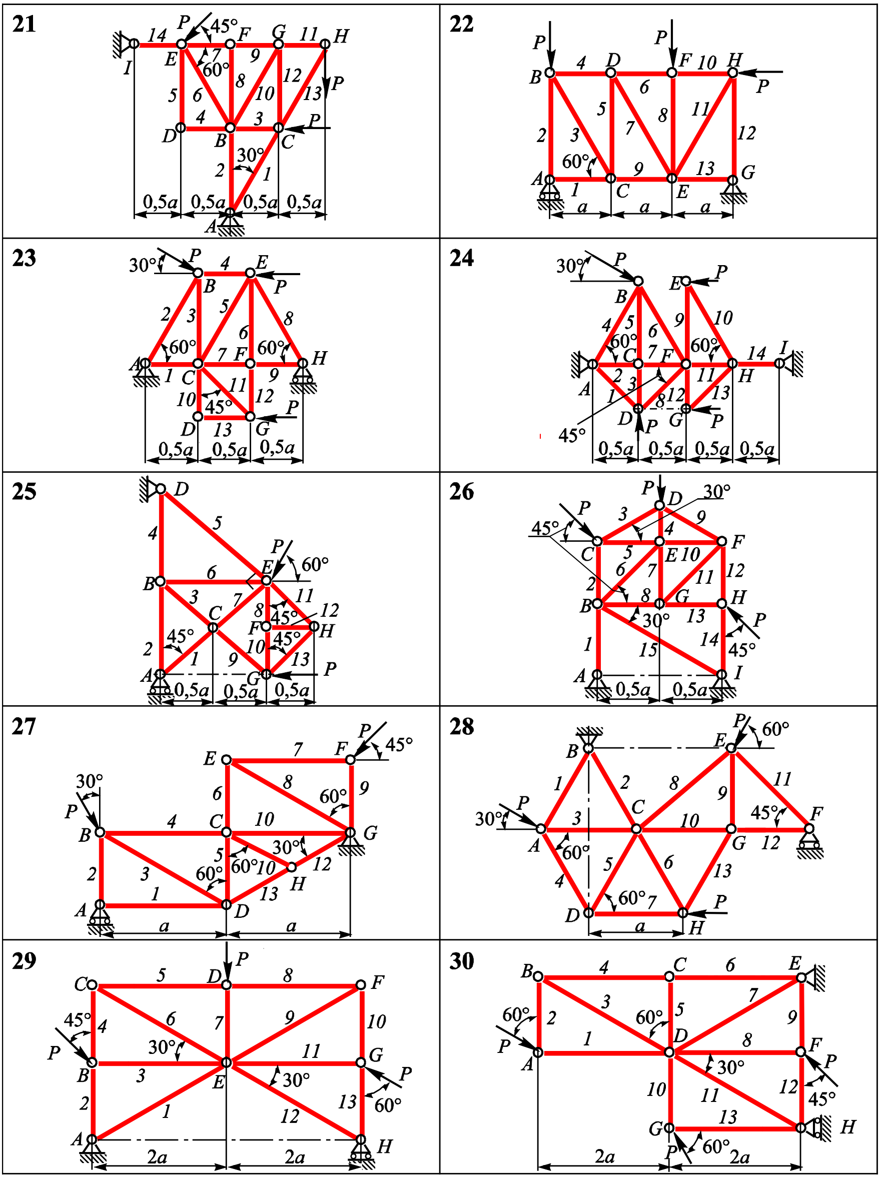


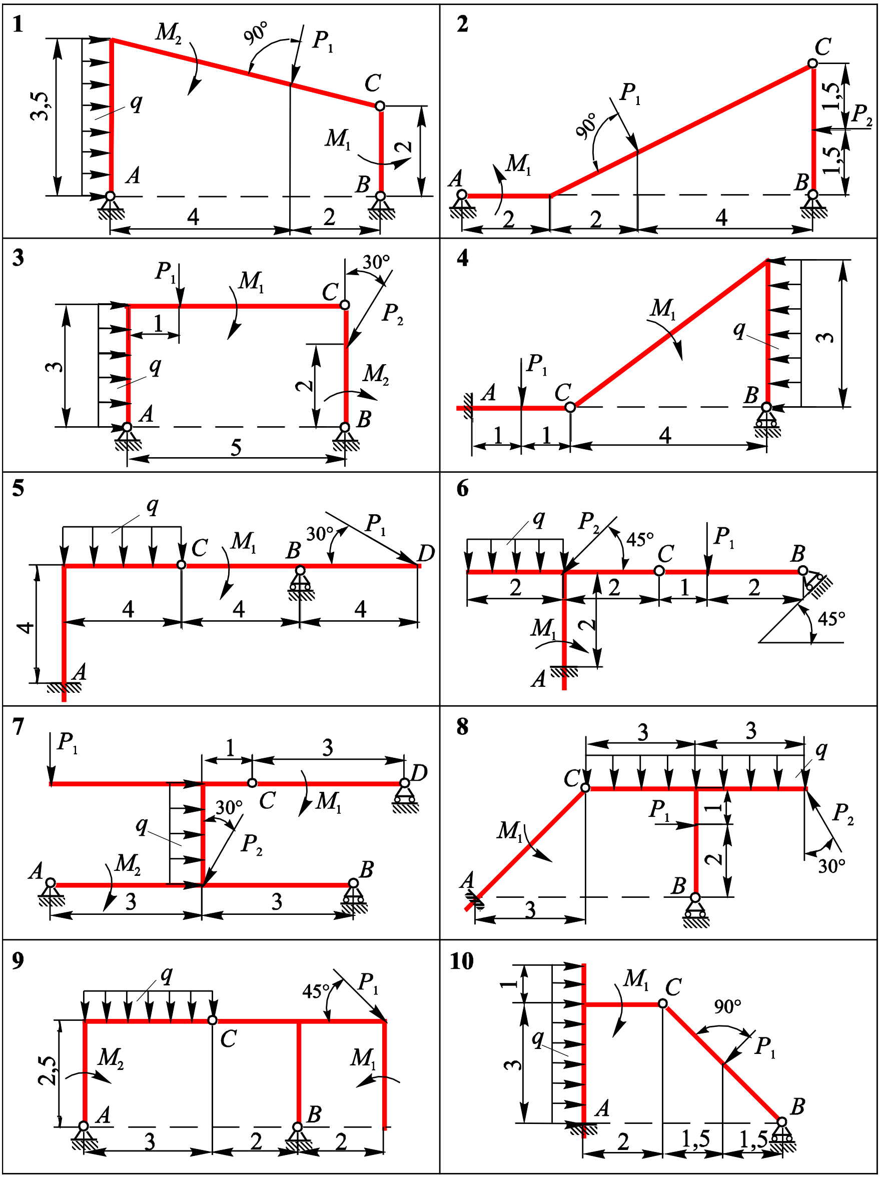
Рис. 6

Завдання №3. Визначення реакцій опор конструкції, складеної з двох частин

Знайти реакції опор і тиск в проміжних шарнірах заданої конструкції, складеної з двох частин. Значення величин навантажень наведено в табл. 3, схеми конструкцій зображено на рис. 3.1–3.3. Сили задаються в кН, моменти сил – кН·м, інтенсивність розподіленого навантаження q – в кН/м, а розміри – в метрах.

Таблиця 3

Варі-ант	P_1	P_2	M_1	M_2	q	Варі-ант	P_1	P_2	M_1	M_2	q
1	0,6	–	2,5	1,0	1,00	**16**	1,0	1,5	3,5	1,5	0,10
2	0,5	0,8	2,6	–	–	**17**	1,5	2,0	2,0	1,5	0,15
3	0,8	1,0	3,5	2,0	0,20	**18**	0,8	1,5	3,0	–	0,10
4	1,5	3,0	3,0	–	0,40	**19**	0,6	1,8	3,5	–	0,14
5	1,2	2,7	2,7	–	0,10	**20**	0,7	1,6	3,2	–	0,12
6	1,4	1,2	2,5	–	0,15	**21**	0,8	1,8	3,0	2,5	0,14
7	1,6	1,0	2,0	0,8	0,20	**22**	0,5	0,6	3,5	–	0,15
8	1,5	0,6	3,0	–	0,10	**23**	1,4	1,2	3,6	–	0,12
9	2,0	–	2,5	0,5	0,20	**24**	1,2	1,4	2,8	1,6	0,18
10	0,8	–	3,0	–	0,10	**25**	1,6	1,5	3,3	–	0,14
11	1,5	1,0	2,5	–	0,10	**26**	1,5	1,6	1,8	–	0,18
12	2,0	0,8	3,5	1,5	0,20	**27**	1,4	1,8	3,5	0,6	0,16
13	1,0	0,6	1,5	2,0	0,15	**28**	1,2	1,4	3,0	–	0,13
14	0,5	–	4,0	–	0,10	**29**	1,5	2,0	2,5	–	0,20
15	0,6	2,0	2,5	–	0,20	**30**	1,5	2,0	2,5	0,5	0,20


1
M2
90°
P1
C
3,5
q
M1
2
A
B
4
2
2
C
P1
1,5
P2
90°
M1
1,5
A
B
2
2
4
3
P1
30°
M1
C
P2
1
3
q
M2
2
A
B
5
4
M1
q
3
P1
A
C
B
1
1
4
5
q
C
M1
B
30°
P1
D
4
4
4
4
A
6
q
P2
45°
C
P1
B
2
2
1
2
M1
2
45°
A
7
P1
1
3
D
C
M1
30°
q
P2
A
M2
B
3
3
8
3
3
q
C
M1
P1
1
P2
2
30°
A
B
3
9
q
45°
P1
C
2,5
M2
M1
A
B
3
2
2
10
1
M1
C
90°
P1
q
3
A
B
2
1,5
1,5
Рис. 7

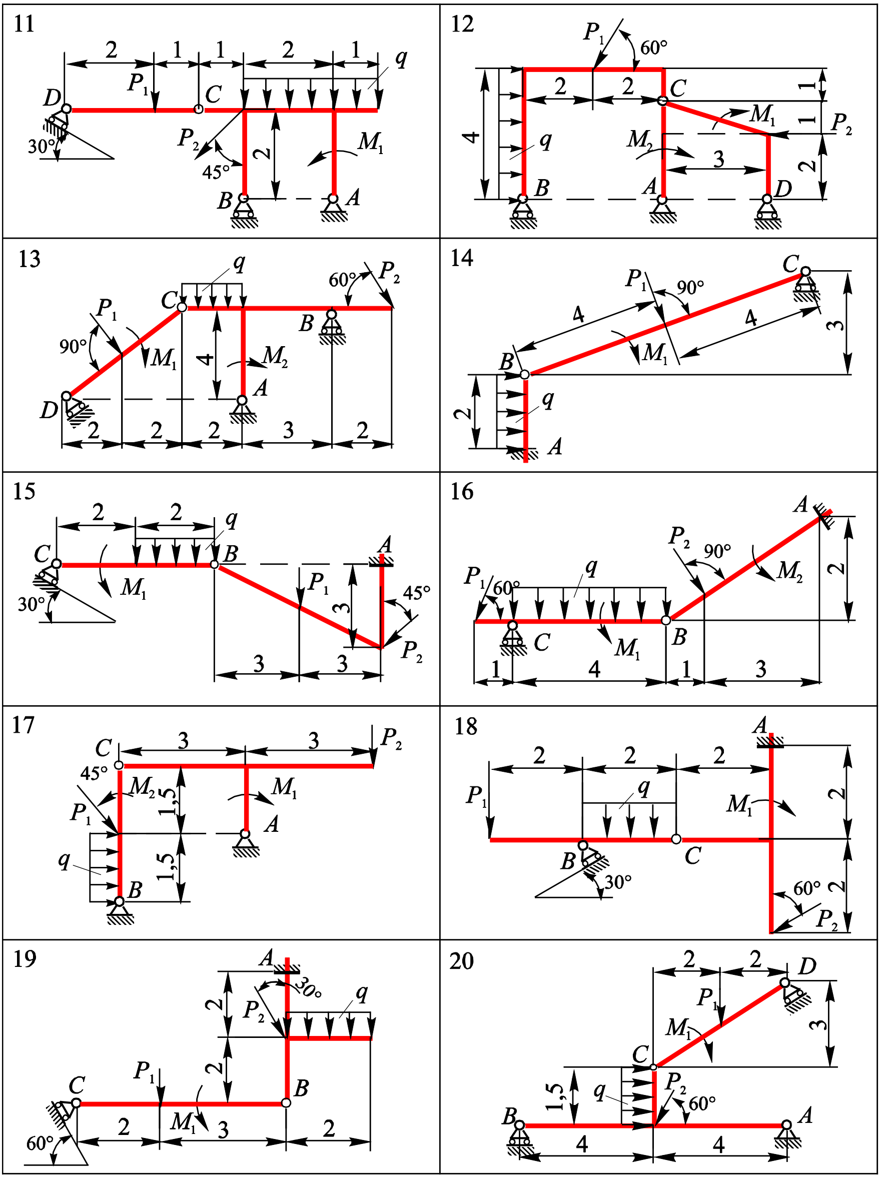


Рис. 8

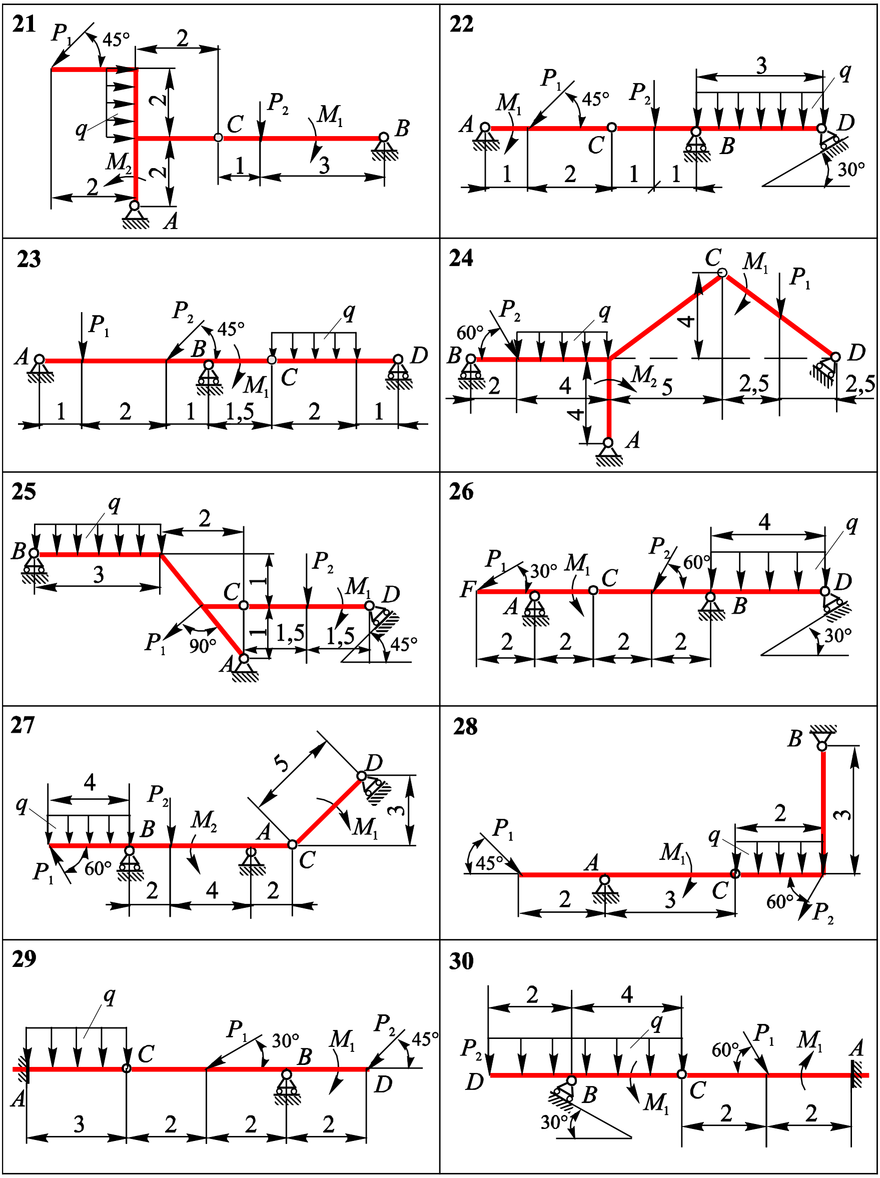


Рис. 9

Завдання №4. Приведення просторової системи сил до простішого виду

Привести систему сил до простішого виду. Задані системі сил зображено на рис. 4.1–4.3. Модулі сил та відповідні відстані дано в табл. 4. Сили задано в Н, моменти сил в кН·м, а розміри – в метрах.

Таблиця 4

Варіант	P_1	P_2	P_3	P_4	M	a	b	c
1	15	25	35	20	100	5,0	5,0	5,0
2	35	25	15	10	200	3,0	3,0	3,0
3	12	16	14	–	50	1,5	5,0	2,5
4	14	12	16	–	25	5,0	2,5	1,5
5	4	6	8	10	100	0,6	0,3	0,2
6	20	24	10	20	200	0,3	0,4	0,4
7	4	2	8	30	50	2,0	1,0	1,0
8	15	20	30	–	100	3,0	4,0	2,0
9	18	11	13	15	50	9,0	8,0	7,0
10	15	25	35	20	100	2,0	3,0	4,0
11	8	10	8	10	150	2,0	2,0	2,0
12	8	4	6	20	75	3,0	4,0	2,0
13	12	16	14	–	50	1,5	5,0	2,5
14	14	12	16	–	500	4,5	6,0	3,5
15	10	16	20	30	200	3,0	4,0	4,0
16	10	10	10	20	100	3,0	4,0	4,0
17	20	30	10	40	200	3,5	4,5	6,0
18	16	12	14	18	400	8,0	7,0	9,0
19	18	11	13	20	200	9,0	8,0	7,0
20	15	25	35	40	100	4,0	4,0	4,0
21	35	15	25	–	200	4,0	2,0	3,0
22	25	35	15	–	100	3,0	4,0	2,0
23	10	20	30	–	50	3,0	4,0	3,0
24	20	30	20	30	100	1,0	1,0	2,0
25	8	12	20	26	200	1,0	4,0	3,0
26	6	20	10	8	250	4,0	8,0	6,0
27	20	30	10	–	150	4,5	6,0	3,0
28	16	14	12	20	100	8,0	7,0	9,0
29	18	11	13	15	50	9,0	8,0	7,0
30	10	20	30	20	150	4,5	6,0	3,5

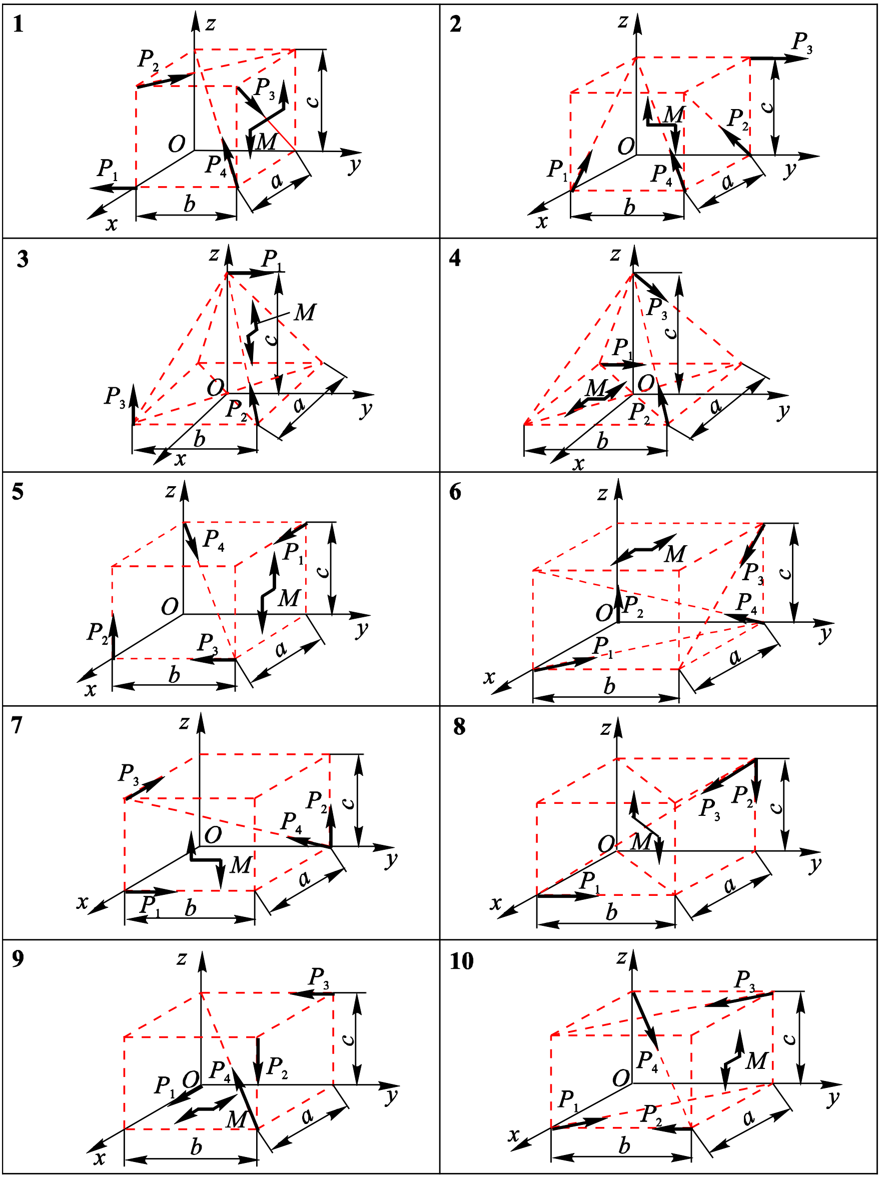


Рис. 10

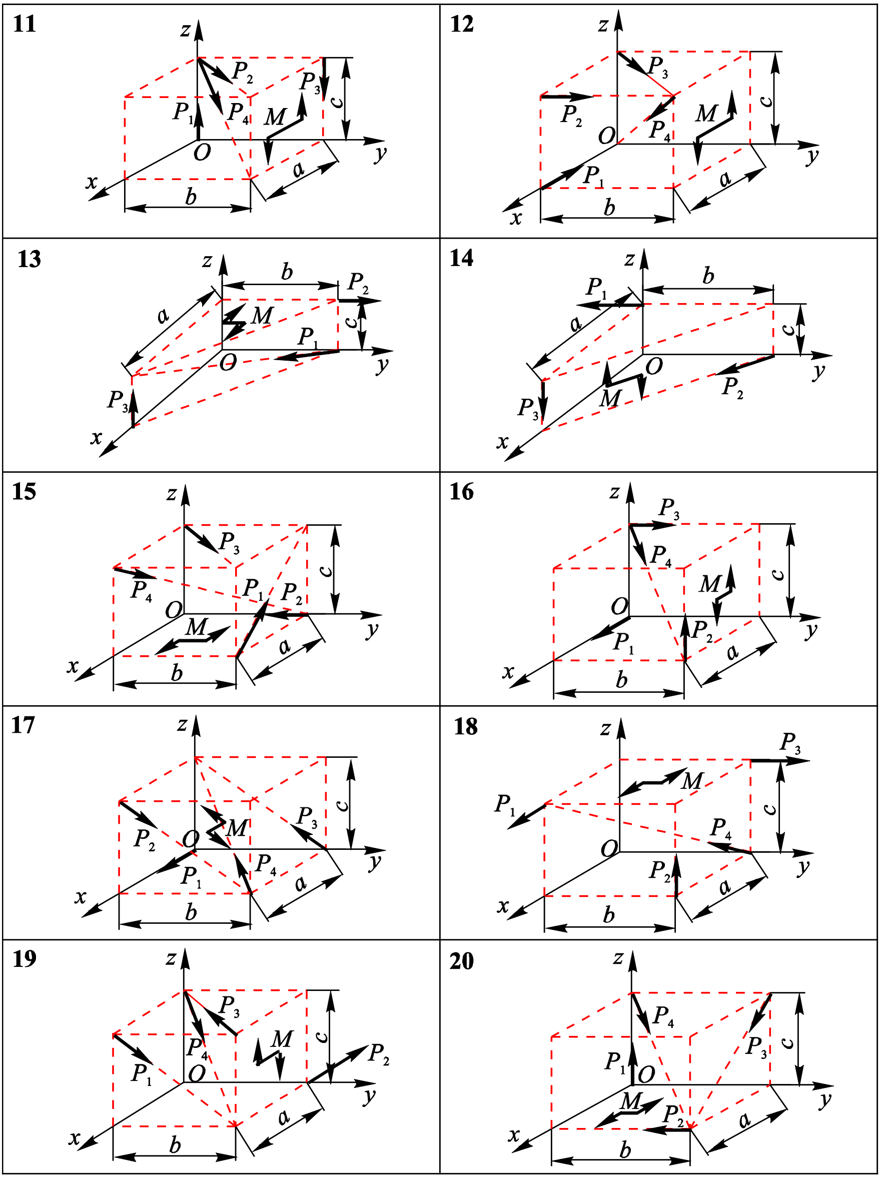


Рис. 11

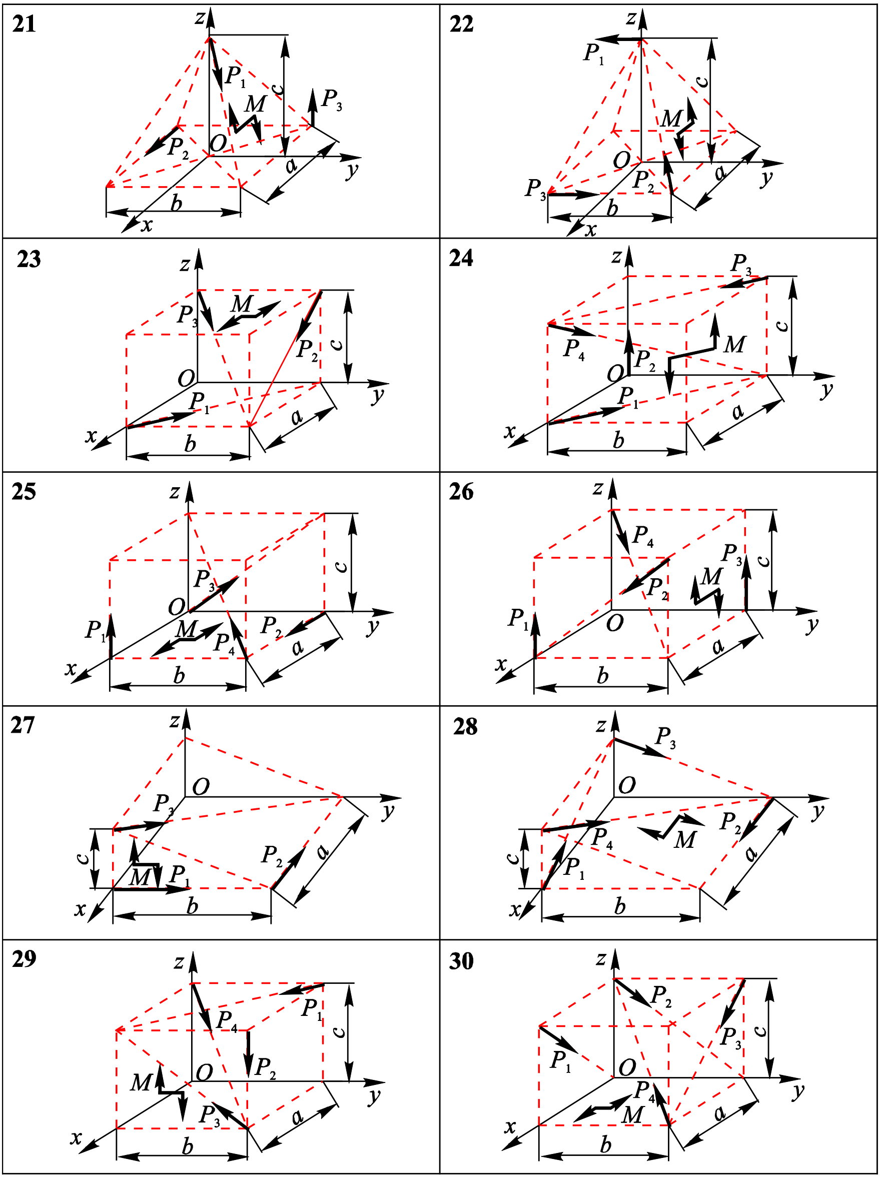


Рис. 12

Завдання С-5. Визначення реакцій опор та зусиль для рівноваги твердого тіла у просторі

Знайти силу *P*, що забезпечує рівновагу заданої просторової конструкції, а також реакції опор. Схеми конструкцій зображено на рис. 5.1–5.3. Модулі сил та необхідні розміри наведено в табл. 5.1. Сили задаються в кН, моменти сил – в кН·м, а відстані – в метрах. Сила *G* розташована паралельно вісі *Az*. Модуль сили *T* удвічі більше модулю сили *t*, а значення $\delta=5\cdot10^{-3}R$.

Таблиця 5.1

Варіант	Q	T	G	a	b	c	R	r	M
1	2	–	20	0,20	0,30	0,10	0,15	0,05	4,0
2	4	–	2	0,20	0,10	0,30	0,10	0,10	–
3	6	–	4	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	–
4	3	–	2	0,30	0,20	0,40	0,15	0,10	5,0
5	5	–	3	0,30	0,40	0,20	0,20	0,15	2,0
6	1	4	2	0,40	0,30	0,20	0,20	0,10	3,0
7	–	3	1	0,30	0,10	0,05	0,18	0,06	2,0
8	4	6	3	0,20	0,40	0,15	0,20	0,10	3,0
9	5	–	3	0,20	0,15	0,10	0,30	0,40	–
10	1	4	2	0,30	0,40	0,20	0,20	0,10	2,0
11	–	2	1	0,20	0,30	0,15	0,15	0,10	4,0
12	–	–	10	–	–	–	–	–	5,0
13	10	–	5	0,40	0,30	0,20	0,25	0,15	3,0
14	–	2	1	0,30	0,90	0,20	0,30	0,10	2,0
15	3	–	2	0,60	0,20	0,40	0,20	0,05	2,5
16	4	–	2	0,50	0,30	–	–	–	2,0
17	2	–	1	0,15	0,10	0,20	0,20	0,05	1,0
18	6	–	2	0,60	0,40	0,60	–	–	3,0
19	–	8	2	0,20	0,30	0,40	0,20	0,15	–
20	4	–	–	0,60	0,40	0,20	–	–	–
21	2	4	–	0,40	0,60	0,30	0,20	0,10	1,0
22	–	–	5	0,20	0,50	0,30	–	–	2,0
23	–	–	4	0,40	0,30	0,50	–	–	3,0
24	5	–	2	–	–	–	–	–	1,0
25	2	–	3	0,50	0,50	0,60	–	–	2,0
26	3	–	1	0,20	0,60	0,40	–	–	3,0
27	–	–	1	0,50	0,30	–	–	–	1,0
28	2	–	6	0,30	0,10	0,50	0,10	0,15	0,2
29	–	4	3	0,15	0,20	0,15	0,15	0,10	0,5
30	–	–	4	0,40	0,30	0,10	–	–	1,0

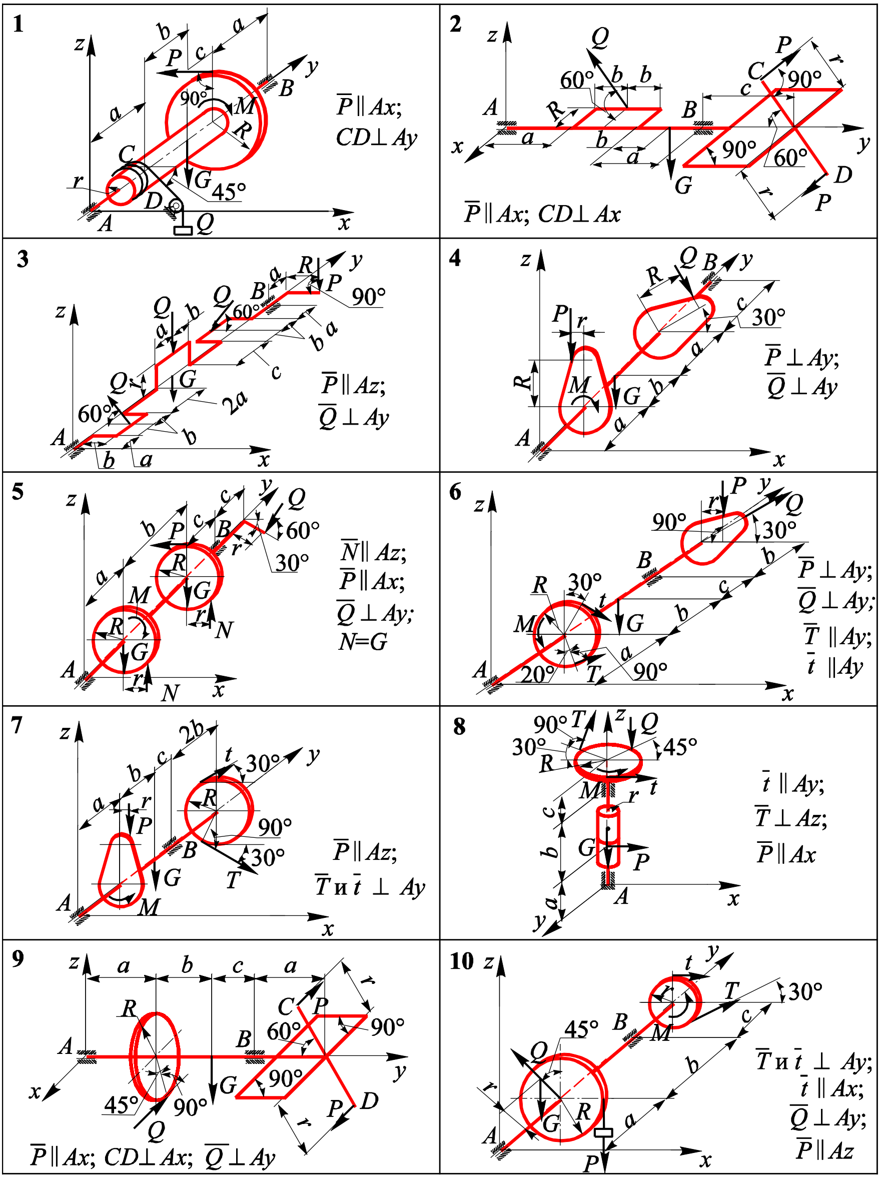

1
$\overline{P} \parallel Ax$;
$CD \perp Ay$
2
$\overline{P} \parallel Ax$; $CD \perp Ax$
3
$\overline{P} \parallel Az$;
$\overline{Q} \perp Ay$
4
$\overline{P} \perp Ay$;
$\overline{Q} \perp Ay$
5
$\overline{N} \parallel Az$;
$\overline{P} \parallel Ax$;
$\overline{Q} \perp Ay$;
$N=G$
6
$\overline{P} \perp Ay$;
$\overline{Q} \perp Ay$;
$\overline{T} \parallel Ay$;
$\overline{t} \parallel Ay$
7
$\overline{P} \parallel Az$;
$\overline{T}$ и $\overline{t}$ $\perp Ay$
8
$\overline{t} \parallel Ay$;
$\overline{T} \perp Az$;
$\overline{P} \parallel Ax$
9
$\overline{P} \parallel Ax$; $CD \perp Ax$; $\overline{Q} \perp Ay$
10
$\overline{T}$ и $\overline{t}$ $\perp Ay$;
$\overline{t} \parallel Ax$;
$\overline{Q} \perp Ay$;
$\overline{P} \parallel Az$

Рис. 13

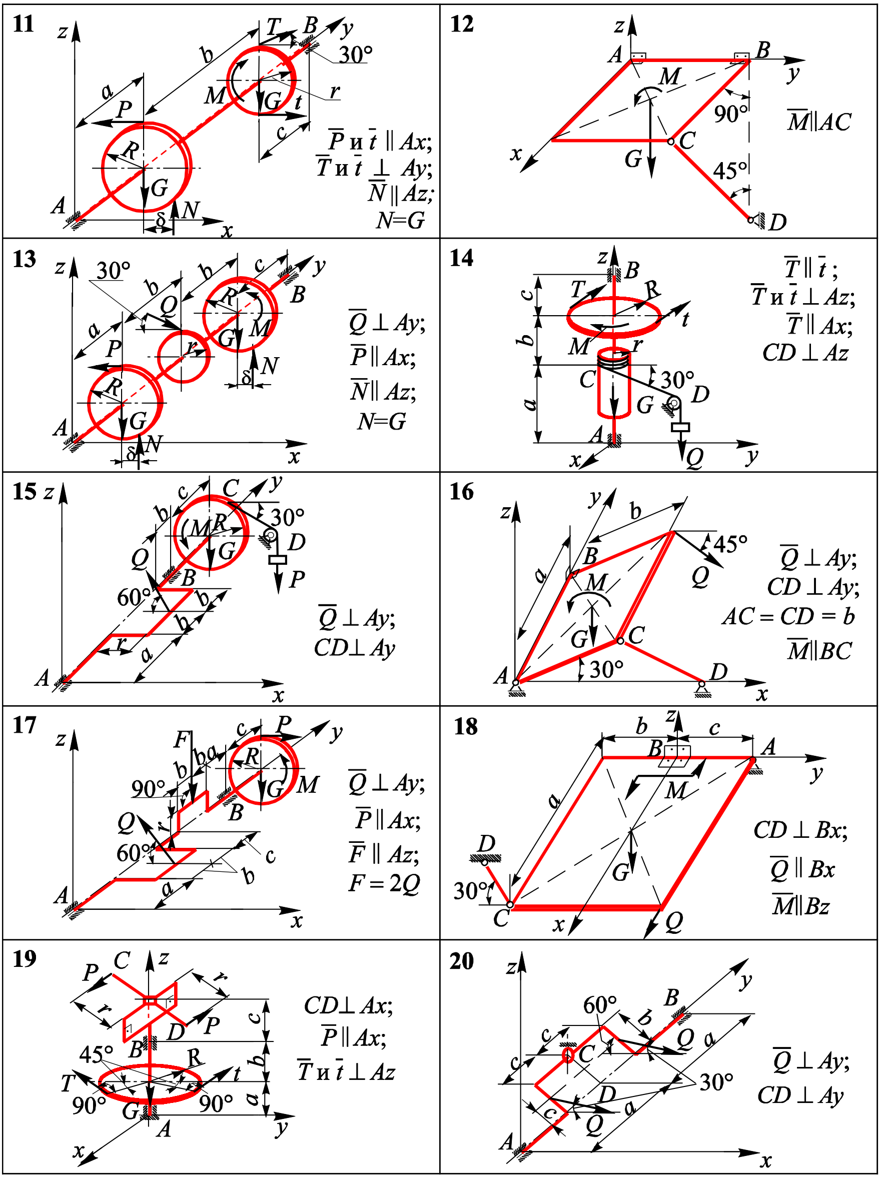

11
P и t ∥ Ax;
T и t ⊥ Ay;
N ∥ Az;
N=G
12
M∥AC
13
Q ⊥ Ay;
P ∥ Ax;
N∥ Az;
N=G
14
T ∥ t;
T и t ⊥ Az;
T ∥ Ax;
CD ⊥ Az
15
Q ⊥ Ay;
CD⊥ Ay
16
Q ⊥ Ay;
CD ⊥ Ay;
AC = CD = b
M∥BC
17
Q ⊥ Ay;
P ∥ Ax;
F ∥ Az;
F = 2Q
18
CD ⊥ Bx;
Q ∥ Bx
M∥Bz
19
CD⊥ Ax;
P ∥ Ax;
T и t ⊥ Az
20
Q ⊥ Ay;
CD ⊥ Ay

Рис. 14

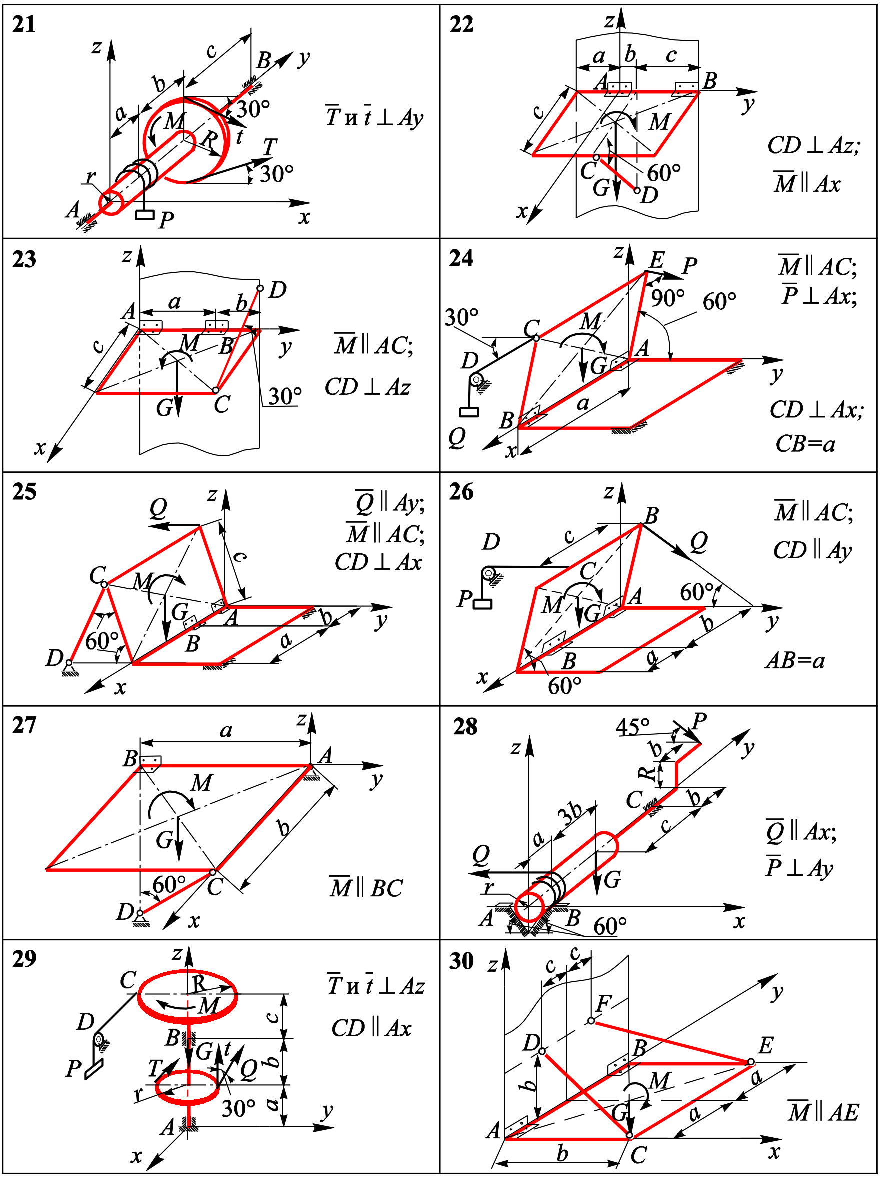

21
$\overline{T}$ и $\overline{t} \perp Ay$
22
$CD \perp Az$;
$\overline{M} \parallel Ax$
23
$\overline{M} \parallel AC$;
$CD \perp Az$
24
$\overline{M} \parallel AC$;
$\overline{P} \perp Ax$;
$CD \perp Ax$;
$CB=a$
25
$\overline{Q} \parallel Ay$;
$\overline{M} \parallel AC$;
$CD \perp Ax$
26
$\overline{M} \parallel AC$;
$CD \parallel Ay$
$AB=a$
27
$\overline{M} \parallel BC$
28
$\overline{Q} \parallel Ax$;
$\overline{P} \perp Ay$
29
$\overline{T}$ и $\overline{t} \perp Az$
$CD \parallel Ax$
30
$\overline{M} \parallel AE$

Рис. 15

Завдання №6. Визначення положення центру ваги проскої фігури

Знайти координати центра ваги фігури, що зображено на рис. 6.1–6.3. Розміри фігур завдано у міліметрах.

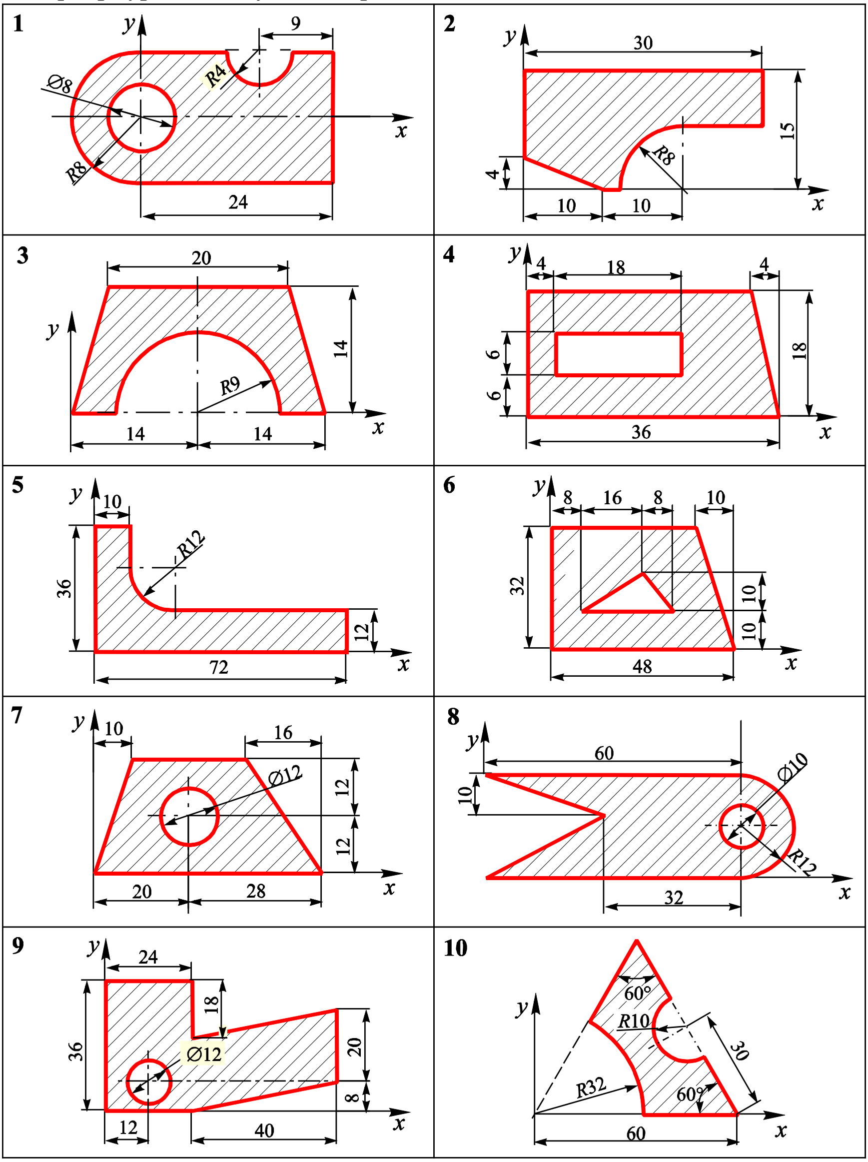


Рис. 16

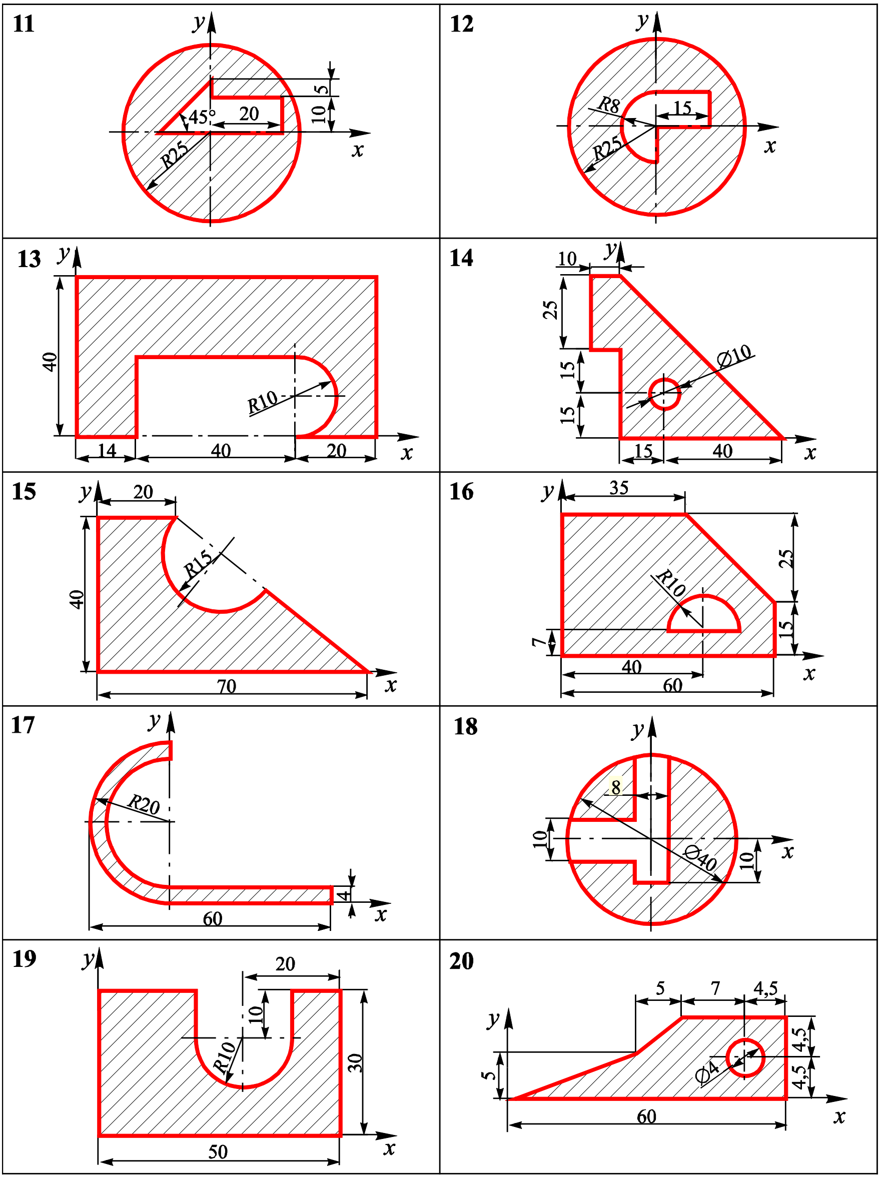

11
y
x
5
10
20
45°
R25
12
y
x
R8
15
R25
13
y
x
40
R10
14
40
20
14
y
x
10
25
15
15
Ø10
15
40
15
y
x
20
40
R15
70
16
y
x
35
25
R10
15
7
40
60
17
y
x
R20
4
60
18
y
x
8
10
Ø40
10
19
y
x
20
10
R10
30
50
20
y
x
5
7
4,5
4,5
4,5
5
Ø4
60

Рис. 17

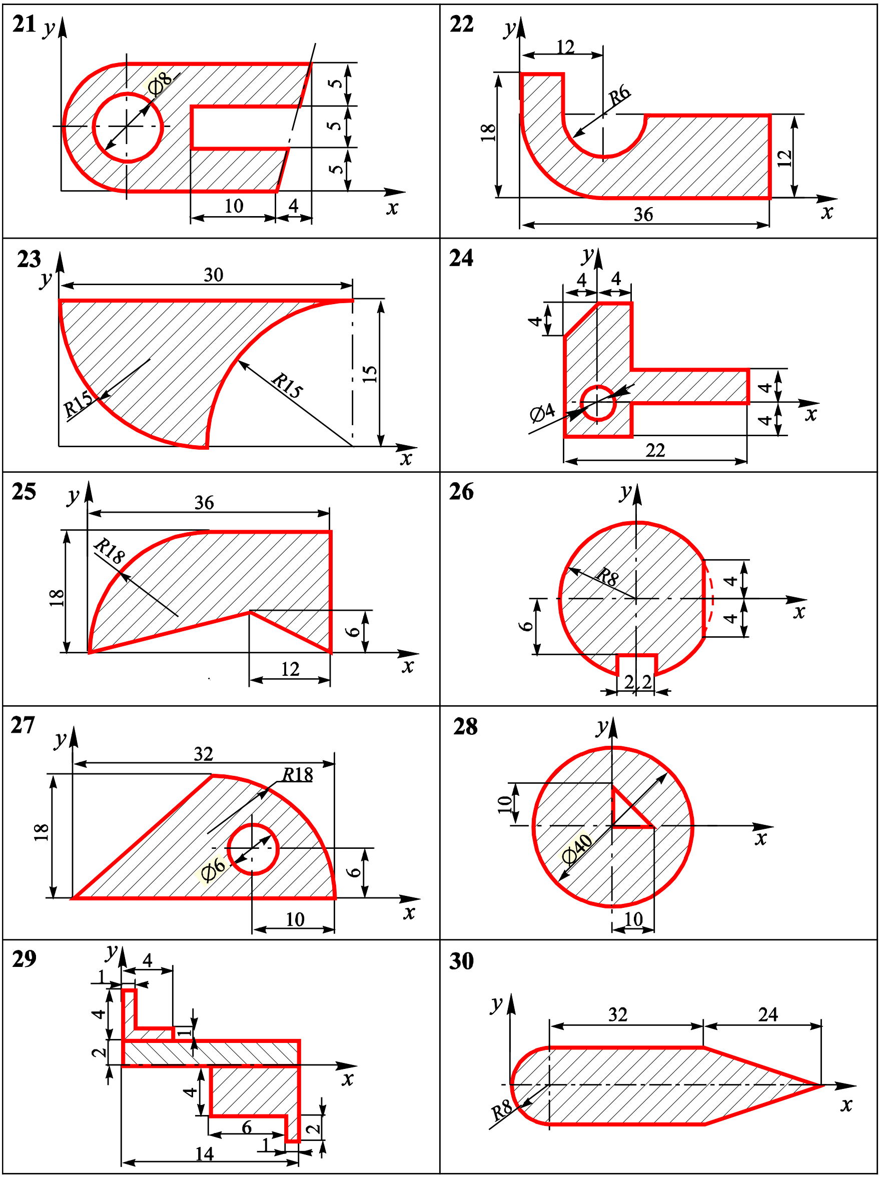

21
Ø8
5
5
5
10
4
22
12
R6
18
12
36
23
30
R15
R15
15
24
4
4
4
Ø4
4
4
22
25
36
R18
18
6
12
26
R8
4
4
6
2
2
27
32
R18
18
Ø6
6
10
28
10
Ø40
10
29
4
1
4
1
2
4
6
2
1
14
30
32
24
R8

Рис. 18

Задача №1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил

Знайти реакції опор заданої конструкції (рис. 19). Зовнішні сили P задано у кН, моменти M − у кН·м, рівномірно розподілене навантаження q − у кН/м, а розміри конструкції − в метрах.

Вихідні данні

$$P := 25kN \qquad a := 1m$$
$$q := 20\frac{kN}{m} \qquad \alpha := 45^0$$
$$M := 40kN \cdot m \qquad \beta := 60^0$$

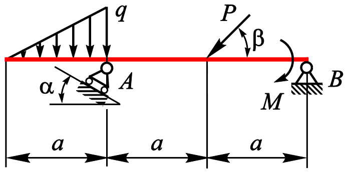


Рис 19. Плоска конструкція

Замінимо розподілене по закону трикутника навантаження q еквівалентною зосередженою силою Q.

$$Q := \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx.$$

Довжина прольоту, до якого прикладено розподілено навантаження дорівнює a. Тоді:

$$x1 := 0 \qquad x2 := a$$
$$q(x) := q \cdot \frac{x}{a}$$
$$Q := \int_{x1}^{x2} q(x)dx = 5 \times 10^3 N$$

Зосереджену силу Q завжди прикладено у центрі тяжіння епюри навантаження q. Визначимо центр тяжіння епюри навантаження.

$$x_C := \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot xdx}{Q} = 0.667m$$

Розрахункова схема
(*Design scheme*)

Наведемо рівняння рівноваги системи (рис. 20).

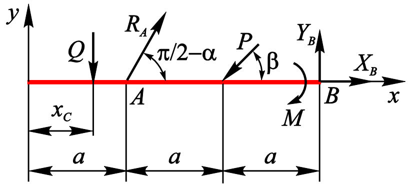


Рис 20. Розрахункова схема конструкції

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *x*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$

$$RA \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - P \cdot cos(\beta) + XB = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$

$$-Q + RA \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - P \cdot sin(\beta) + YB = 0$$

Запишемо рівняння моментів сил та реакцій опор відносно точки *B*.

$$\sum M_B = 0:$$

$$Q \cdot (3 \cdot a - X_C) - RA \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot 2 \cdot a + P \cdot sin(\beta) \cdot a - M = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

$$Q \cdot \left(\frac{3 \cdot a - X_C}{a}\right) - RA \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot 2 + P \cdot sin(\beta) \cdot a - \frac{M}{a} = 0$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.

$$RA\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - P\cdot cos(\beta) + XB = 0$$

$$-Q + RA\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - P\cdot sin(\beta) + YB = 0$$

$$Q\cdot\frac{3\cdot a - X_C}{a} - RA\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot 2 + P\cdot sin(\beta)\cdot a - \frac{M}{a} = 0$$

Використовуємо матричний метод вирішення системи рівнянь, що отримано.

$$XB + 0\cdot YB + RA\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = P\cdot cos(\beta)$$

$$0\cdot XB + YB + RA\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = Q + P\cdot sin(\beta)$$

$$0\cdot XB + 0\cdot YB - RA\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot 2 = -Q\cdot\frac{3\cdot a - X_C}{a} - P\cdot sin(\beta)\cdot a + \frac{M}{a}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів − A та вектор-столбець правих частин – B.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ 0 & 1 & sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ 0 & 0 & -2\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.866 \\ 0 & 0 & -1.732 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} P\cdot cos(\beta) \\ Q + P\cdot sin(\beta) \\ -Q\cdot\frac{3\cdot a - X_C}{a} - P\cdot sin(\beta) + \frac{M}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25\times 10^4 \\ 2.665\times 10^4 \\ 1.668\times 10^4 \end{pmatrix} N$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Isolve**.

$$Reaction := Isolve(A,B) = \begin{pmatrix} 1.732\times10^4 \\ 3.499\times10^4 \\ -9.632\times10^3 \end{pmatrix} N$$

Значення реакцій опор

$$XB := Reaction_{0,0} = 1.001\times10^4\, N$$

$$YB := Reaction_{1,0} = 2.916\times10^4\, N$$

$$RA := Reaction_{2,0} = 3.524\times10^3\, N$$

Перевірка результатів рішення

Для перевірки результатів рішення побудуємо силовий багатокутник (рис. 21). Особливості побудови векторів сил в системі Mathcad наведено в Додатку №1.

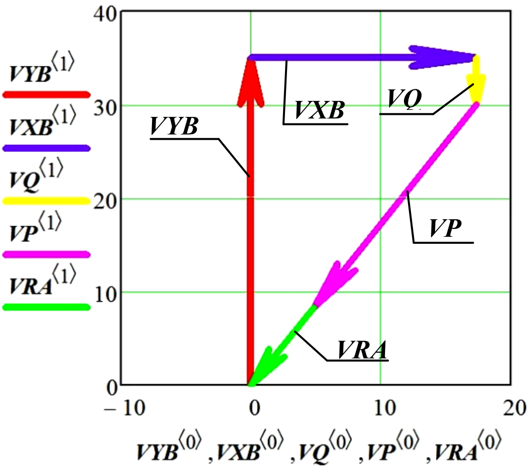


Рис 21. Силовий багатокутник плоскої конструкції

Силовий багатокутник замкнений, отже головний вектор плоскої збіжної системи сил, прикладеної до твердотільної конструкції, дорівнює нулю.

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил та пар сил, що діють на задану твердотільну конструкцію, та моменти реакцій її опор (рис. 22). По осі абсцис відкладаємо відстань від початку координат до точки прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

Знайдемо величини моментів усіх активних сил та реакцій.

$$MQ := -Q \cdot X_C = -3.333 \times 10^3 \, J$$
$$MRA := RA \cdot sin\left(90^0 - \alpha\right) \cdot a = -8.341 \times 10^3 \, J$$
$$MP := -P \cdot sin(\beta) \cdot 2 \cdot a = -4.33 \times 10^4 \, J$$
$$MYB := YB \cdot 3 \cdot a = 1.05 \times 10^5 \, J$$

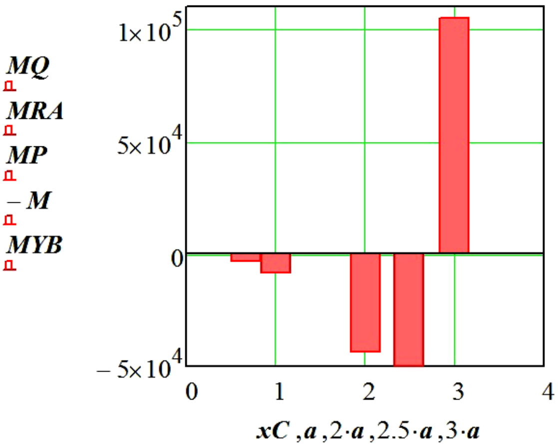


Рис 22. Моменти сил та реакцій опор плоскої конструкції відносно точки А

Головний момент сил та реакцій опор плоскої конструкції відносно точки А дорівнює нулю.

Висновок: Так як головний вектор та головний момент плоскої збіжної системи сил, прикладеної до твердотільної конструкції дорівнюють нулю, то рішення вірне

Задача №2.1 Розрахунок реакцій опор та сил в стрижнях плоскої ферми методом вирізання вузлів

Знайти реакції опор та сили в стрижнях плоскої ферми (рис. 23).Зовнішні сили *F*, прикладені у вузлах конструкції задано у кН.

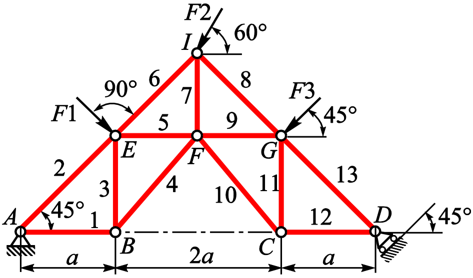


Рис 23. Плоска ферма

Вихідніданні

$$\boldsymbol{F}1 := 18\boldsymbol{kN} \qquad \alpha := 45^0$$
$$\boldsymbol{F}2 := 15\boldsymbol{kN} \qquad \beta := 60^0$$
$$\boldsymbol{F}3 := 5\boldsymbol{kN} \qquad \gamma := 45^0$$
$$\boldsymbol{a} := 4\boldsymbol{m}$$

Розрахункова схема

Спочатку визначимо реакції опор конструкції (рис. 24), а саме *Xa*, *Ya* та *Rd*. Для цього запишемо рівняння рівноваги, спроектувавши усі зовнішні сили та реакції в опорах конструкції на вісі *X* і *Y*, а також запишемо рівняння моментів відносно точки *D*.

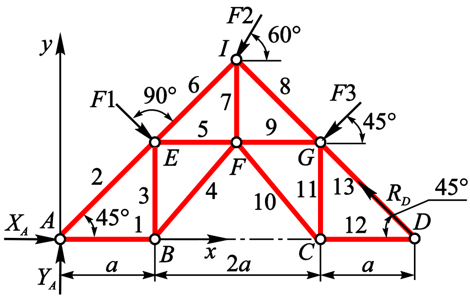


Рис 24. Розрахункова схема плоскої ферми

Проектуємоусізовнішнісили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярнерівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$Xa + F1\cdot\cos(\alpha) - F2\cdot\cos(\beta) - F3\cdot\cos(\gamma) - Rd\cdot\cos(\alpha) = 0$$
$$Xa - Rd\cdot\cos(\alpha) = \ -F1\cdot\cos(\alpha) + F2\cdot\cos(\beta) + F3\cdot\cos(\gamma)$$

Проектуємоусізовнішнісили та реакції на вісь*Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$Ya - F1\cdot\sin(\alpha) - F2\cdot\sin(\beta) - F3\cdot\sin(\gamma) + Rd\cdot\sin(\alpha) = 0$$
$$Ya + Rd\cdot\sin(\alpha) = \ F1\cdot\sin(\alpha) + F2\cdot\sin(\beta) + F3\cdot\sin(\gamma)$$

Запишемо рівняння моментів відносно точки *D*.

$$\sum \boldsymbol{MD} = 0\ \boldsymbol{:}$$
$$\boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{cos}(\gamma)\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{sin}(\gamma)\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{cos}(\beta)\cdot 2\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{sin}(\beta)\cdot 2\cdot\boldsymbol{a}-$$
$$-\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{cos}(\alpha)\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{sin}(\alpha)\cdot 3\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{Ya}\cdot 4\cdot\boldsymbol{a}=0$$
$$\boldsymbol{Ya}\cdot 4=\boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{cos}(\gamma)+\ \boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{sin}(\gamma)+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{cos}(\gamma)\cdot 2+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{sin}(\beta)\cdot 2-$$
$$-\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{cos}(\alpha)+\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{sin}(\alpha)\cdot 3$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.

$$\boldsymbol{Xa}+0\cdot\boldsymbol{Ya}-\boldsymbol{Rd}\cdot\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\alpha})=-\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{cos}(\alpha)+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\gamma})$$
$$0\cdot\boldsymbol{Xa}+\boldsymbol{Ya}+\boldsymbol{Rd}\cdot\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\alpha})=\ \boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{sin}(\alpha)+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\gamma})$$
$$0\cdot\boldsymbol{Xa}+\boldsymbol{Ya}\cdot 4+0\cdot\boldsymbol{Rd}=\boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{cos}(\gamma)+\ \boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{sin}(\gamma)+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{cos}(\gamma)\cdot 2+$$
$$+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{sin}(\beta)\cdot 2-\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{cos}(\alpha)+\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{sin}(\alpha)\cdot 3$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів − *A* та вектор-столбець правих частин − *B*.

$$\boldsymbol{A}:=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\boldsymbol{cos}(\alpha)\\ 0 & 1 & \boldsymbol{sin}(\alpha)\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -0.707\\ 0 & 1 & 0.707\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}:=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{cos}(\alpha)+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\gamma})\\ \boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{sin}(\alpha)+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\gamma})\\ \boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{cos}(\gamma)+\ \boldsymbol{F}3\cdot\boldsymbol{sin}(\gamma)+\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{cos}(\gamma)\cdot 2+\\ +\boldsymbol{F}2\cdot\boldsymbol{sin}(\beta)\cdot 2-\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{cos}(\alpha)+\boldsymbol{F}1\cdot\boldsymbol{sin}(\alpha)\cdot 3\end{pmatrix}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції ***Isolve***.

$$\boldsymbol{reaction}:=\boldsymbol{Isolve}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}9.185\times 10^{3}\\ 1.838\times 10^{4}\\ 1.538\times 10^{4}\end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

Значення реакцій опор

$$Xa := reaction_{0,0} = 9.185\times10^{3}\,N$$

$$Ya := Reaction_{1,0} = 1.838\times10^{4}\,N$$

$$Rd := Reaction_{2,0} = 1.538\times10^{4}\,N$$

Для перевірки результатів рішення побудуємо силовий багатокутник (рис.25). Особливості побудови векторів сил в системі **Mathcad** наведено в Додатку №2.

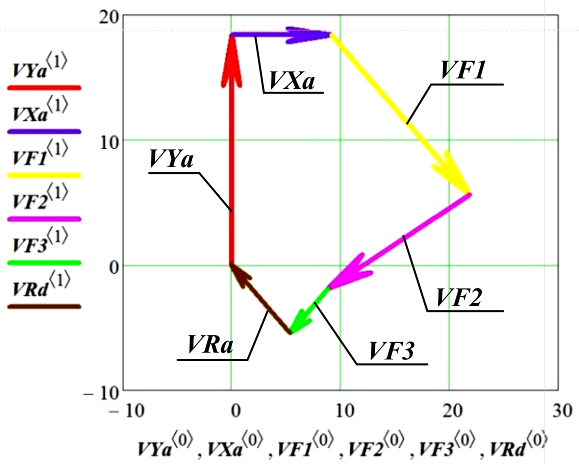


Рис 25. Силовий багатокутник плоскої конструкції

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил, що діють на задану ферму, та моменти реакцій її опор (рис. 26). По осі абсцис відкладаємо відстань від точки *E* до точок прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

Знайдемо величини моментів усіх активних сил та реакцій оопр ферми.

$$MYa := -Ya\cdot a = -7.351\times10^{4}\,J$$

$$MXa := Xa\cdot a = 3.674\times10^{4}\,J$$

$$MF2 := F2\cdot cos(\beta)\cdot a - F2\cdot sin(\beta)\cdot a = -2.196\times10^{4}\,J$$

$$MF3 := -F3\cdot sin(\gamma)\cdot 2\cdot a = -2.828\times10^{4}\,J$$

$$MRd := -Rd\cdot cos\left(45^{0}\right)\cdot a + Rd\cdot sin\left(45^{0}\right)\cdot 3\cdot a = 8.702\times10^{4}\,J$$

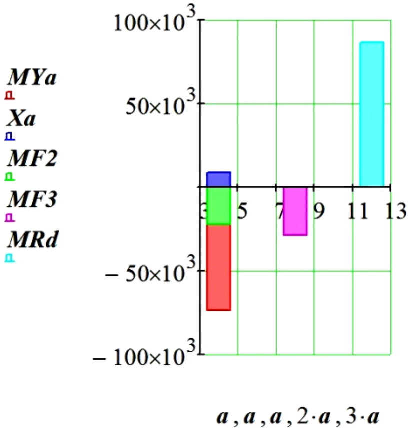


Рис 26. Моменти сил та реакцій опор плоскої ферми відносно точки *E*

Головний момент сил та реакцій опор плоскої ферми відносно точки *E* дорівнює нулю.

Висновок: Так як головний вектор та головний момент плоскої збіжної системи сил, прикладеної до плоскої ферми дорівнюють нулю, то реакції її опор визначені вірно.

Скористаємося методом вирізання вузлів. Для цього розіб'ємо систему на ряд підсистем, кожна з яких складається з вузла та **лише двох стрижнів**, що з нього виходять, та реакції в яких не відомі. При розрахунках вважаємо, що напрям усіх реакцій в стрижнях є додатним, тобто вони спрямовані в напрямку від вузла вздовж стрижня.

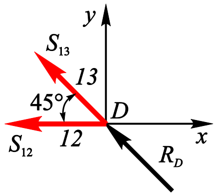


Рис 27 Розрахункова схема для вузла *D*

Спочатку потрібно визначити вузол, в якому збігається не більше двох стрижнів, реакції в яких є невідомими. Це робиться для того, щоб у двох рівняннях рівноваги, які можна записати для плоскої системи було не більше двох невідомих.

Тому спочатку наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складється з вузла *D* та стрижнів 12, 13 (рис. 27). Невідоми є реакції стрижнів *S12, S13*. Відомою є реакція опори *Rd*.

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$-S_{12}D - Rd\cdot cos(\alpha) - S_{13}D\cdot cos(\alpha) = 0$$
$$-S_{12} - Rd\cdot cos(\alpha) - S_{13}\cdot cos(\alpha) = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$Rd \cdot sin(\alpha) + S_{13}D \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$S_{13} = -Rd$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_{13} та S_{12}.

$$S_{13} := -Rd = -1.538 \times 10^4 N$$
$$S_{12} := -Rd \cdot cos(\alpha) - S_{13} \cdot cos(\alpha) = 0N$$

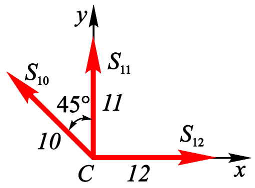


Рис 28. Розрахункова схема для вузла C

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла *C* та стрижнів 10, 11, 12 (рис. 28). Невідомими є реакції стрижнів S_{10}, S_{11}. Відомою є реакція стрижня S_{12}.

Вважаємо, що реакції у стрижнях, які поєднують сусідні вузли дорівнюють за абсолютною величиною та протилежні за знаком. Наприклад:

$$S_{12} = |S_{12}C| = -|S_{12}D|$$

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S_{12}C - S_{10}C \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$S_{10} = \frac{S_{12}}{cos(\alpha)}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$S_{10}C \cdot sin(\alpha) + S_{11}C = 0$$
$$S_{11} = -S_{10} \cdot sin(\alpha)$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_{10} та S_{11}.

$$S_{10} := \frac{S_{12}}{cos(\alpha)} = 0N$$
$$S_{11} := -S_{10} \cdot sin(\alpha) = 0N$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла G та стрижнів 8, 9, 11, 13 (рис.29). Невідомими є реакції стрижнів S_8, S_9. Відомими є реакції стрижнів S_{11} та S_{13}.

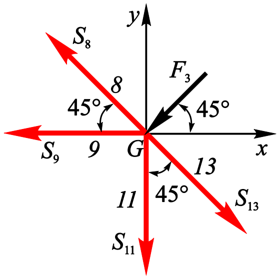


Рис 29. Розрахункова схема для вузла G

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S13G \cdot cos(\alpha) - F3 \cdot cos(\gamma) - S8G \cdot cos(\alpha) - S9G = 0$$
$$S_9 = S_{13} \cdot cos(\alpha) - F3 \cdot cos(\gamma) - S_8 \cdot cos(\alpha)$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$-S13G \cdot sin(\alpha) - F3 \cdot sin(\gamma) + S8G \cdot sin(\alpha) - S11G = 0$$
$$S_8 = \frac{S_{13} \cdot sin(\alpha) + F3 \cdot sin(\gamma) + S_{11}}{sin(\alpha)}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_8 та S_9.

$$S_8 := \frac{S_{13} \cdot sin(\alpha) + F3 \cdot sin(\gamma) + S_{11}}{sin(\alpha)} = -1.038 \times 10^4\, N$$
$$S_9 := S_{13} \cdot cos(\alpha) - F3 \cdot cos(\gamma) - S_8 \cdot cos(\alpha) = -7.071 \times 10^3\, N$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла І та стрижнів 6, 7, 8 (рис. 30). Невідомими є реакції стрижнів S_6, S_7. Відомою є реакція стрижня S_8.

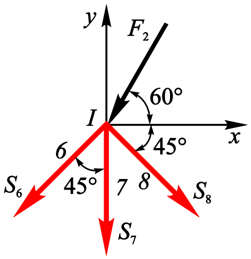


Рис 30. Розрахункова схема для вузла I

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S8I \cdot cos(\alpha) - F2 \cdot cos(\beta) - S6I \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$S_6 = \frac{S_8 \cdot cos(\alpha) - F2 \cdot cos(\beta)}{cos(\alpha)}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0 :$$
$$-S_8 I \cdot sin(\alpha) - F2 \cdot sin(\beta) - S_7 I - S_6 I \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$S_7 = -S_8 \cdot sin(\alpha) - F2 \cdot sin(\beta) - S_6 \cdot sin(\alpha)$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_7 та S_6.

$$S_7 := -S_8 \cdot sin(\alpha) - F2 \cdot sin(\beta) - S_6 \cdot sin(\alpha) = 9.192 \times 10^3 \, N$$
$$S_6 := \frac{S_8 \cdot cos(\alpha) - F2 \cdot cos(\beta)}{cos(\alpha)} = -2.099 \times 10^4 \, N$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла F та стрижнів 4, 5, 7, 9, 10 (рис. 31). Невідомими є реакції стрижнів S_4, S_5. Відомими є реакції стрижнів S_7, S_9, S_{10}.

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S_{10} F \cdot cos(\alpha) + S_9 F - S_5 F - S_4 F \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$S_5 = S_{10} \cdot cos(\alpha) + S_9 - S_4 \cdot cos(\alpha)$$

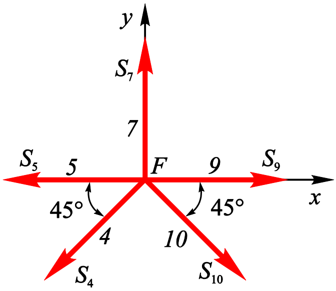


Рис 31. Розрахункова схема для вузла F

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0 :$$
$$-S_{10} F \cdot sin(\alpha) + S_7 F - S_4 F \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$S_4 = \frac{-S_{10} \cdot sin(\alpha) + S_7}{sin(\alpha)}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_4 та S_5.

$$S_4 := \frac{-S_{10} \cdot sin(\alpha) + S_7}{sin(\alpha)} = 1.3 \times 10^4 \, N$$
$$S_5 := S_{10} \cdot cos(\alpha) + S_9 - S_4 \cdot cos(\alpha) = -1.626 \times 10^4 \, N$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла *E* та стрижнів 2, 3, 5, 6 (рис. 32). Невідомими є реакції стрижнів S_2, S_3. Відомими є реакції стрижнів S_5, S_6.

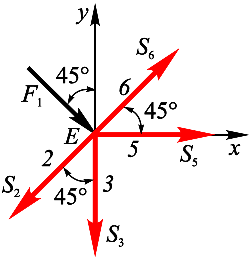


Рис 32. Розрахункова схема для вузла *E*

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S_5E + S_6E \cdot cos(\alpha) + F1 \cdot cos(\alpha) - S_2E \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$S_2 = \frac{S_5 + S_6 \cdot cos(\alpha) - F1 \cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$-S3E + S6E \cdot sin(\alpha) - F1 \cdot sin(\alpha) - S2E \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$S3 = S6 \cdot sin(\alpha) - F1 \cdot sin(\alpha) - S2 \cdot sin(\alpha)$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_2 та S_3.

$$S_2 := \frac{S_5 + S_6 \cdot cos(\alpha) - F1 \cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha)} = -2.599 \times 10^4 \, N$$

$$S_3 := S_6 \cdot sin(\alpha) - F1 \cdot sin(\alpha) - S_2 \cdot sin(\alpha) = -9.192 \times 10^3 \, N$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла *B* та стрижнів 1, 3, 4 (рис. 33). Невідомимою є реакція стрижня S_1. Відомими є реакції стрижнів S_3, S_4.

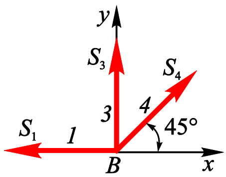


Рис 33. Розрахункова схема для вузла *B*

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S_4B \cdot cos(\alpha) - S_1B = 0$$
$$S_1 = S_4 \cdot cos(\alpha)$$

З цього рівняння знаходимо реакцію S_1.

$$S_1 := S_4 \cdot cos(\alpha) = 9.192 \times 10^3 \, N$$

Перевірка результатів рішення

Для перевірки результатів визначимо реакції *Xa* та *Ya* в опорі *A*.

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складється з вузла *A* та стрижнів 1, 2 (рис. 34). Невідомими є реакції стрижнів в опорі *A* − *Xa* та *Ya*. Відомими є реакції стрижнів S_1, S_2.

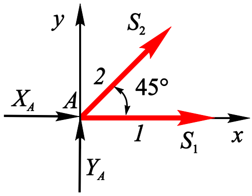


Рис 34. Розрахункова схема для вузла *A*

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$Xa + S_1 A + S_2 A \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$Xa = -S_1 - S_2 \cdot cos(\alpha)$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$Ya + S_2 A \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$Ya = -S_2 \cdot sin(\alpha)$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції *Xa* та *Ya*.

$$Xa := -S_1 - S_2 \cdot cos(\alpha) = 9.185 \times 10^3 \, N$$
$$Ya := -S_2 \cdot sin(\alpha) = 1.838 \times 10^4 \, N$$

Висновок: рішення вірне

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак сили S в кожному стрижні (рис. 35). По осі абсцис відкладаємо діапазон *j*:=1...13, який дорівнює кількості визначених сил *S*. По осі ординат задаємо значення функції S_j

$$j := 1......13$$

$S_j =$

$9.192 \cdot 10^3$	N
$-2.599 \cdot 10^4$	
$-9.192 \cdot 10^3$	
$1.3 \cdot 10^4$	
$-1.626 \cdot 10^4$	
$-2.099 \cdot 10^4$	
$9.192 \cdot 10^3$	
$-1.038 \cdot 10^4$	
$-7.071 \cdot 10^3$	
0	
0	
0	
$-1.538 \cdot 10^4$	

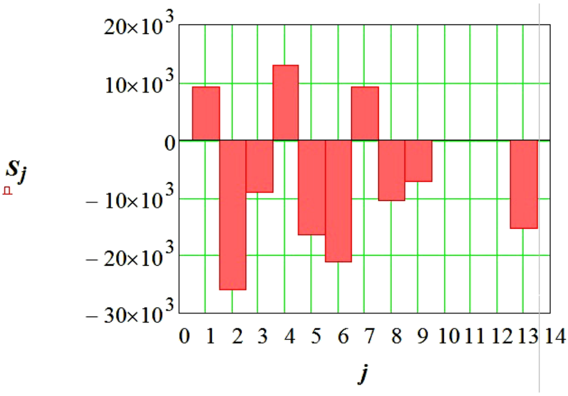


Рис 35. Зусилля в стрижнях плоскої ферми

Задача №2.2 Розрахунок реакцій опор та сил в стрижнях плоскої ферми матричним методом

Знайти реакції опор та сили в стрижнях плоскої ферми (рис.36).Зовнішні сили *F*, прикладені у вузлах конструкції задано у кН.

Вихідні данні

$F1 := 18kN$ $\alpha := 45^0$

$F2 := 15kN$ $\beta := 60^0$

$F3 := 5kN$ $\gamma := 45^0$

$a := 4m$

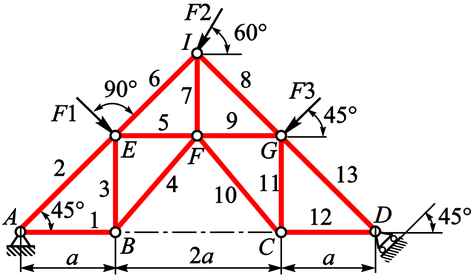


Рис 36. Плоска ферма

Розрахункова схема

Скористаємося матричним методом. Для цього наведену на рис. 37 розрахункову схему плоскої ферми розіб'ємо на ряд підсистем, кожна з яких складається з вузла та стрижнів, що з нього виходять. При розрахунках вважаємо, що напрям усіх реакцій в стрижнях є додатним, тобто вони спрямовані в напрямку від вузла вздовж стрижня.

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла *A* та стрижнів 1, 2 (рис. 38).

Вважаємо, що реакції у стрижнях, які поєднують сусідні вузли дорівнюють за абсолютною величиною та протилежні за знаком.

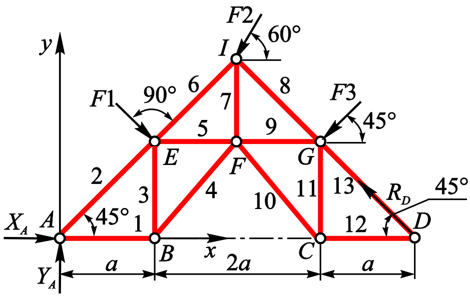


Рис 37. Розрахункова схема плоскої ферми

Наприклад:

$$S_2 = |S_2 A| = -|S_2 E|$$

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

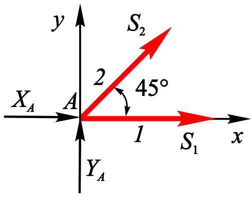


Рис 38. Розрахункова схема для вузла *A*

$$\sum X_i = 0:$$
$$XA + S_1A + S_2A \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$XA + S_1 + S_2 \cdot cos(\alpha) = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$YA + S_2A \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$YA + S_2 \cdot sin(\alpha) = 0$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складється з вузла *B* та стрижнів 1, 3, 4 (рис. 39).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

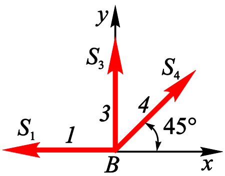


Рис 39. Розрахункова схема для вузла *B*

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$-S_1B + S_4B \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$-S_1 + S_4 \cdot cos(\alpha) = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$S_3B + S_4B \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$S_3 + S_4 \cdot sin(\alpha) = 0$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складється з вузла *C* та стрижнів 10, 11, 12 (рис. 40).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

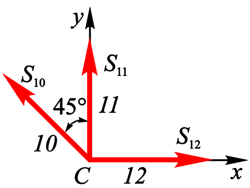


Рис 40. Розрахункова схема для вузла *C*

$$\sum X_i = 0:$$
$$-S_{10}C \cdot cos(\alpha) + S_{12}C = 0$$
$$-S_{10} \cdot cos(\alpha) + S_{12} = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$S_{10}C \cdot sin(\alpha) + S_{11}C = 0$$
$$S_{10} \cdot sin(\alpha) + S_{11} = 0$$

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складється з вузла *D* та стрижнів12, 13 (рис.41).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

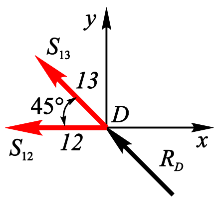


Рис 41. Розрахункова схема для вузла *D*

$$\sum X_i = 0:$$
$$-S_{12}D - RD \cdot cos(\alpha) - S_{13}D \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$-S_{12} - RD \cdot cos(\alpha) - S_{13} \cdot cos(\alpha) = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$RD \cdot sin(\alpha) + S_{13}D \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$RD \cdot sin(\alpha) + S_{13}D \cdot sin(\alpha) = 0$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складється з вузла *E* та стрижнів 2, 3, 5, 6 (рис 42).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S_5E + S_6E \cdot cos(\alpha) + F1 \cdot cos(\alpha) - S_2E \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$S_5 + S_6 \cdot cos(\alpha) - S_2 \cdot cos(\alpha) = -F1 \cdot cos(\alpha)$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$-S_3E + S_6E \cdot sin(\alpha) - F1 \cdot sin(\alpha) - S_2E \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$-S_3E + S_6E \cdot sin(\alpha) - S_2E \cdot sin(\alpha) = F1 \cdot sin(\alpha)$$

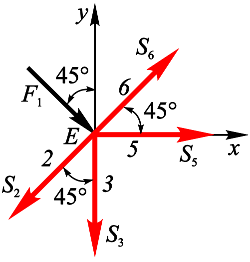


Рис 42. Розрахункова схема для вузла *E*

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла F та стрижнів 4, 5, 7, 9, 10 (рис.43).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

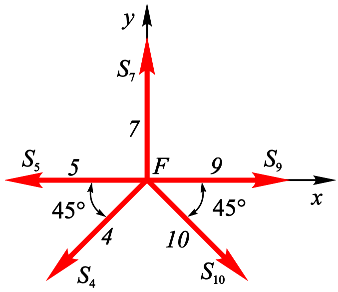


Рис 43. Розрахункова схема для вузла F

$$\sum X_i = 0:$$
$$S_{10F} \cdot cos(\alpha) + S_{9F} - S_{5F} - S_{4F} \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$S_{10} \cdot cos(\alpha) + S_9 - S_5 - S_4 \cdot cos(\alpha) = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$-S_{10F} \cdot sin(\alpha) + S_{7F} - S_{4F} \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$-S_{10} \cdot sin(\alpha) + S_7 - S_4 \cdot sin(\alpha) = 0$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла G та стрижнів 8, 9, 11, 13 (рис.44).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S_{13G} \cdot cos(\alpha) - F3 \cdot cos(\gamma) - S_{8G} \cdot cos(\alpha) - S_{9G} = 0$$
$$S_{13} \cdot cos(\alpha) - S_8 \cdot cos(\alpha) - S_9 = F3 \cdot cos(\gamma)$$

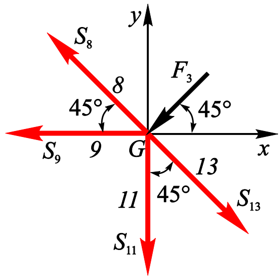


Рис 44. Розрахункова схема для вузла G

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$-S_{13G} \cdot sin(\alpha) - F3 \cdot sin(\gamma) + S_{8G} \cdot sin(\alpha) - S_{11G} = 0$$
$$-S_{13} \cdot sin(\alpha) + S_8 \cdot sin(\alpha) - S_{11} = F3 \cdot sin(\gamma)$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла I та стрижнів 6, 7, 8 (рис. 45).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *X*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$S8I \cdot cos(\alpha) - F2 \cdot cos(\beta) - S6I \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$S8 \cdot cos(\alpha) - S6 \cdot cos(\alpha) = F2 \cdot cos(\beta)$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *Y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$-S8I \cdot sin(\alpha) - F2 \cdot sin(\beta) - S7I - S6I \cdot sin(\alpha) = 0$$
$$-S8 \cdot sin(\alpha) - S7 - S6 \cdot sin(\alpha) = F2 \cdot sin(\beta)$$

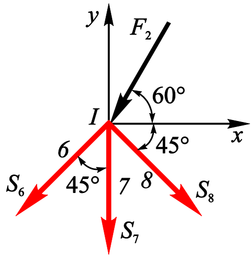


Рис 45. Розрахункова схема для вузла *I*

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.

$$S_1+S_2\cdot cos(\alpha)+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+XA+0\cdot YA+0\cdot RD=0$$
$$0\cdot S_1+S_2\cdot sin(\alpha)+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+YA+0\cdot RD=0$$
$$-S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+S_4\cdot cos(\alpha)+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=0$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+S_3+S_4\cdot sin(\alpha)+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=0$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9-S_{10}\cdot cos(\alpha)+0\cdot S_{11}+S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=0$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+S_{10}\cdot sin(\alpha)+S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=0$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}-S_{12}-\cdot S_{13}\cdot cos(\alpha)+0\cdot XA+0\cdot YA-RD\cdot cos(\alpha)=0$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+\cdot S_{13}\cdot sin(\alpha)+0\cdot XA+0\cdot YA+RD\cdot sin(\alpha)=0$$
$$0\cdot S_1-S_2\cdot cos(\alpha)+0\cdot S_3+0\cdot S_4+S_5+S_6\cdot cos(\alpha)+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=-F1\cdot cos(\alpha)$$
$$0\cdot S_1-S_2\cdot sin(\alpha)-S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+S_6\cdot sin(\alpha)+0\cdot S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=F1\cdot sin(\alpha)$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3-S_4\cdot cos(\alpha)-S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+0\cdot S_8+S_9+S_{10}\cdot cos(\alpha)+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=0$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3-S_4\cdot sin(\alpha)+0\cdot S_5+0\cdot S_6+S_7+0\cdot S_8+0\cdot S_9-S_{10}\cdot sin(\alpha)+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=0$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7-S_8\cdot cos(\alpha)-S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+S_{13}\cdot cos(\alpha)+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=F3\cdot cos(\gamma)$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5+0\cdot S_6+0\cdot S_7+S_8\cdot sin(\alpha)+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}-S_{11}+0\cdot S_{12}-S_{13}\cdot sin(\alpha)+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=F3\cdot sin(\gamma)$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5-S_6\cdot cos(\alpha)+0\cdot S_7+S_8\cdot cos(\alpha)+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=F2\cdot cos(\beta)$$
$$0\cdot S_1+0\cdot S_2+0\cdot S_3+0\cdot S_4+0\cdot S_5-S_6\cdot sin(\alpha)-S_7-S_8\cdot sin(\alpha)+0\cdot S_9+0\cdot S_{10}+0\cdot S_{11}+0\cdot S_{12}+0\cdot S_{13}+0\cdot XA+0\cdot YA+0\cdot RD=F2\cdot sin(\beta)$$

Використовуємо матричний метод вирішення системи рівнянь, що отримано.

Формуємо матрицю коеффіцієнтів − C та вектор-столбець правих частин − D. При формуванні матриці C перший стовбець складатимуть коеффіцієнти при реакції S_1, другий − S_2,....,чотирнадцятий − при реакції XA, пʼятнадцятий − YA, шістнадцятий – RD.

$$C := \begin{pmatrix}
1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & -\cos(\alpha) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & \sin(\alpha) \\
0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin(\alpha) & -1 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & -1 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & -1 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\
-F1 \cdot \cos(45°) \\
F1 \cdot \sin(45°) \\
0 \\ 0 \\
F3 \cdot \cos(\gamma) \\
F3 \cdot \sin(\gamma) \\
F2 \cdot \cos(\beta) \\
F2 \cdot \sin(\beta)
\end{pmatrix}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції ***Isolve.***

$$\boldsymbol{Reaction} := \mathbf{lsolve}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) = \begin{array}{|c|r|}\hline & 0 \\ \hline 0 & 9.192\cdot10^{3} \\ \hline 1 & -2.599\cdot10^{4} \\ \hline 2 & -9.192\cdot10^{3} \\ \hline 3 & 1.3\cdot10^{4} \\ \hline 4 & -1.626\cdot10^{4} \\ \hline 5 & -2.099\cdot10^{4} \\ \hline 6 & 9.192\cdot10^{3} \\ \hline 7 & -1.038\cdot10^{4} \\ \hline 8 & -7.071\cdot10^{3} \\ \hline 9 & 0 \\ \hline 10 & -4.547\cdot10^{-13} \\ \hline 11 & 0 \\ \hline 12 & -1.538\cdot10^{4} \\ \hline 13 & 9.185\cdot10^{3} \\ \hline 14 & 1.838\cdot10^{4} \\ \hline 15 & 1.538\cdot10^{4} \\ \hline \end{array} \boldsymbol{N}$$

Значення реакцій опор

$$\boldsymbol{S}_1 := \boldsymbol{Reaction}_{0,0} = 9.192\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_2 := \boldsymbol{Reaction}_{1,0} = -2.599\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_3 := \boldsymbol{Reaction}_{2,0} = -9.192\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_4 := \boldsymbol{Reaction}_{3,0} = 1.3\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_5 := \boldsymbol{Reaction}_{4,0} = -1.626\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_6 := \boldsymbol{Reaction}_{5,0} = -2.099\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_7 := \boldsymbol{Reaction}_{6,0} = 9.192\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_8 := \boldsymbol{Reaction}_{7,0} = -1.038\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_9 := \boldsymbol{Reaction}_{8,0} = -7.071\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_{10} := \boldsymbol{Reaction}_{9,0} = 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_{11} := \boldsymbol{Reaction}_{10,0} = -4.547\times10^{-13}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_{12} := \boldsymbol{Reaction}_{11,0} = 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{S}_{13} := \boldsymbol{Reaction}_{12,0} = -1.538\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{XA} := \boldsymbol{Reaction}_{13,0} = 9.185\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{YA} := \boldsymbol{Reaction}_{14,0} = 1.838\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{RD} := \boldsymbol{Reaction}_{15,0} = 1.538\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$

Перевірка результатів рішення

Для перевірки результатів спроектуємо усі зовнішні сили та реакції в опорах конструкції на вісі *X* і *Y*, а також запишемо рівняння моментів відносно точки *A*.

$$\sum X_i = 0:$$

$$XA + F1\cdot cos(\alpha) - F2\cdot cos(\beta) - F3\cdot cos(\gamma) - RD\cdot cos(\alpha) = 1.819\times10^{-12}\,N$$

$$\sum Y_i = 0:$$

$$YA - F1\cdot sin(\alpha) - F2\cdot sin(\beta) - F3\cdot sin(\gamma) + RD\cdot sin(\alpha) = -5.457\times10^{-12}\,N$$

$$\sum MA = 0:$$

$$-F1\cdot cos(\alpha)\cdot a - F1\cdot sin(\alpha)\cdot a + F2\cdot cos(\beta)\cdot 2\cdot a - F2\cdot sin(\beta)\cdot 2\cdot a +$$

$$+F3\cdot cos(\gamma)\cdot a - F3\cdot sin(\gamma)\cdot 3\cdot a + RD\cdot sin(\alpha)\cdot 4\cdot a = -2.91\times10^{-11}\,J$$

Висновок: рішення вірне

Визначимо розтягнуті та стиснуті стрижі. Якщо сила *S* в стрижні додатна, то стрижень вважається розтягнутим. Якщо відємна − стрижень стиснутий. Якщо сила *S* в стрижні дорівнює нулю, то він − недеформований.

Тоді стрижні №1, 4 та 7 − розтягнуті; стрижні № 2, 3, 5, 6, 8, 9 та 13 − стиснуті; стрижні № 10, 11 та 12 − недеформовані.

Побудуємо стовпчасту діаграму, на якій наочно позначено величину та знак сили *S* в кожному стрижні (рис. 46). По осі абсцис відкладаємо діапазон *i*:=0...12, який дорівнює кількості визначених сил *S*. По осі ординат задаємо значення функції $Reaction_{i,0}$

$$i := 0 \ldots\ldots 12$$

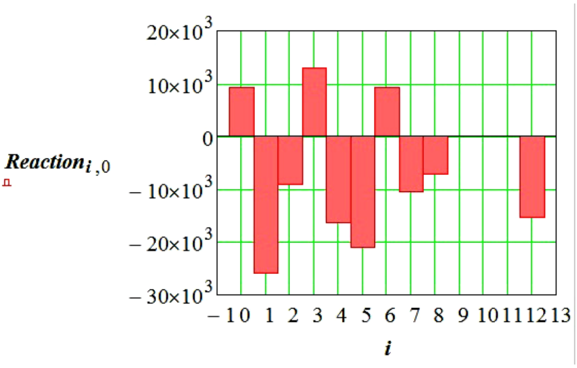


Рис 46. Зусилля в стрижнях плоскої ферм

Задача №3. Визначення реакцій опор конструкції, складеної з двох частин

Знайти реакції опор і тиск в проміжних шарнірах заданої плоскої складеної конструкції (рис. 47). Зовнішні сили P задано у кН, моменти − M у кН·м, рівномірно розподілене навантаження − q – у кН/м, а розміри конструкції − в метрах.

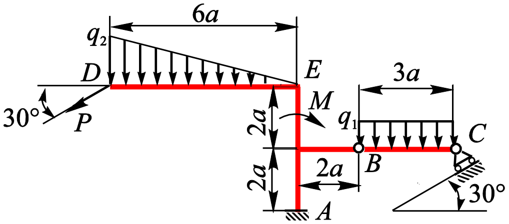


Рис 47. Плоска складена конструкція

Вихідні данні

$$P := 1.5kN \qquad a := 1m$$

$$q1 := 0.2\frac{kN}{m} \qquad \alpha := 30^0$$

$$q2 := 0.2\frac{kN}{m} \qquad \beta := 30^0$$

$$M := 4kN \cdot m$$

Замінимо розподілене по закону прямокутника навантаження $q1$ еквівалентною зосередженою силою $Q1$.

$$Q1 := \int_{x_1}^{x_2} q1(x)dx.$$

Довжина прольоту, до якого прикладено розподілено навантаження $q1$ дорівнює $3a$. Тоді:

$$x1 := 2 \cdot a \qquad x4 := 5 \cdot a$$

$$q1(x) := q1$$

$$Q1 := \int_{x1}^{x2} q1(x)dx = 600N$$

Зосереджену силу $Q1$ прикладено у центрі тяжіння епюри навантаження $q1$. Визначимо центр тяжіння епюри навантаження.

$$x_{C1} := \frac{\int_{x_1}^{x_2} q1(x)\cdot x dx}{Q1} = 3.5m$$

Замінимо розподілене по закону трикутника навантаження *q2* еквівалентною зосередженою силою *Q2*.

$$Q2 := \int_{x_3}^{x_4} q2(x) dx.$$

Довжина прольоту, до якого прикладено розподілено навантаження *q2* дорівнює *6a*. Тоді:

$$x3 := 0 \qquad x4 := -6\cdot a$$

$$q2(x) := q2\cdot\frac{x}{6\cdot a}$$

$$Q2 := \int_{x3}^{x4} q2(x) dx = 600N$$

Зосереджену силу *Q2* прикладено у центрі тяжіння епюри навантаження *q2*. Визначимо центр тяжіння епюри навантаження.

$$x_{C2} := \frac{\int_{x3}^{x4} q2(x)\cdot x dx}{Q2} = -4m$$

Розрахункова схема

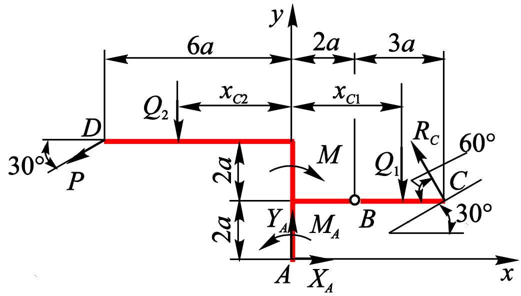


Рис 48. Розрахункова схема конструкції

Розчленовуємо конструкцію по внутрішньому шарніру В (рис. 48), приклавши до кожного з двох отриманих тіл реакції внутрішніх звяків. Вони рівні за абсолютною величиною та протилежні за напрямком.

Розглянемо підконструкцію *DEAB*. Наведемо рівняння рівноваги системи (рис. 49).

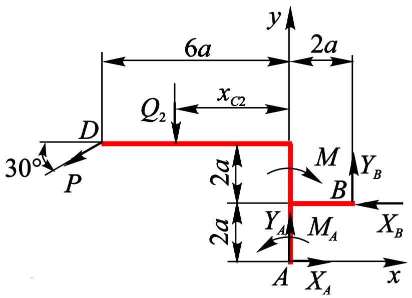


Рис 49. Підконструкція *DEAB*

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *x*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$-P \cdot cos(\alpha) + XA - XB = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0:$$
$$-P \cdot sin(\alpha) - Q2 + YA + YB = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно точки *A*.

$$\sum M_A = 0:$$
$$P \cdot cos(\alpha) \cdot 4 \cdot a + P \cdot sin(\alpha) \cdot 6 \cdot a + Q2 \cdot (6 \cdot a - |x_{C2}|) - M + MA + YB \cdot 2 \cdot a +$$
$$+ XB \cdot 2 \cdot a = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

$$P \cdot cos(\alpha) \cdot 4 + P \cdot sin(\alpha) \cdot 6 + Q2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} - \frac{M}{a} + \frac{MA}{a} + YB \cdot 2 +$$
$$+ XB \cdot 2 = 0$$

Введемо у рівняння нову змінну *M1*, яка дорівнюватиме *MA/a.*

$$M1 := \frac{MA}{a}$$

Тоді рівняння моментів матиме наступний вигляд.

$$P \cdot cos(\alpha) \cdot 4 + P \cdot sin(\alpha) \cdot 6 + Q2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} - \frac{M}{a} +$$
$$M1 + YB \cdot 2 + XB \cdot a = 0$$

Наведемо рівняння рівноваги системи. Розглянемо підконструкцію *BC* (рис.50).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *x*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$

$$XB - RC \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0$$

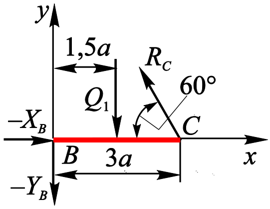


Рис 50. Підконструкція *BC*

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь *y*. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0 :$$

$$-YB - Q1 + RC \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно точки *B*.

$$\sum M_B = 0 :$$

$$-Q1 \cdot x_{C1} + RC \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 \cdot a = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

$$-Q1 \cdot \frac{x_{C1}}{a} + RC \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 = 0$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.

$$XA - XB = P \cdot cos(\alpha)$$
$$YA + YB = P \cdot sin(\alpha) + Q2$$
$$M1 + YB \cdot 2 + XB \cdot 2 = -P \cdot cos(\alpha) \cdot 4 - P \cdot sin(\alpha) \cdot 6 - Q2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} + \frac{M}{a}$$
$$XB - RC \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0$$
$$-YB + RC \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = Q1$$
$$RC \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 = Q1 \cdot \frac{x_{C1}}{a}$$

Використовуємо матричний метод вирішення системи рівнянь, що отримано.

$$XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot M1 - XB + 0 \cdot YB + 0 \cdot RC = P \cdot cos(\alpha)$$
$$0 \cdot XA + YA + 0 \cdot M1 + 0 \cdot XB + YB + 0 \cdot RC = P \cdot sin(\alpha) + Q2$$
$$0 \cdot XA + 0 \cdot YA + M1 + XB \cdot 2 + YB \cdot 2 + 0 \cdot RC = -P \cdot cos(\alpha) \cdot 4 - P \cdot sin(\alpha) \cdot 6 -$$
$$-Q2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} + \frac{M}{a}$$
$$0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot M1 + XB + 0 \cdot YB - RC \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0$$
$$0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot M1 + 0 \cdot XB - YB + RC \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = Q1$$
$$0 \cdot XA + YA + 0 \cdot M1 + 0 \cdot XB + 0 \cdot YB + RC \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 = Q1 \cdot \frac{x_{C1}}{a}$$

Формуємо матрицю коеффіцієнтів − *A* та вектор-столбець правих частин – *B*.

$$\underset{\sim}{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.598 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} P \cdot \cos(\alpha) \\ P \cdot \sin(\alpha) + Q2 \\ -P \cdot \cos(\alpha) \cdot 4 - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 6 - Q2 \cdot \dfrac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} + \dfrac{M}{a} \\ 0 \\ Q1 \\ Q1 \cdot \dfrac{x_{C1}}{a} \end{pmatrix}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Isolve**.

$$Reaction := Isolve(A, B) = \begin{pmatrix} 1.126 \times 10^{3} \\ 1.65 \times 10^{3} \\ -7.81 \times 10^{3} \\ -173.205 \\ -300 \\ 346.41 \end{pmatrix} N$$

Значення реакцій опор

$$XA := Reaction_{0,0} = 1.126\times10^{3}\,N$$
$$YA := Reaction_{1,0} = 1.65\times10^{3}\,N$$
$$M1 := Reaction_{2,0} = -7.81\times10^{3}\,N$$
$$XB := Reaction_{3,0} = -173.205\,N$$
$$YB := Reaction_{4,0} = -300\,N$$
$$RC := Reaction_{5,0} = 346.41\,N$$
$$MA := M1\cdot a = -7.15\times10^{3}\,J$$

Перевірка результатів рішення

Для перевірки результатів рішення побудуємо силові багатокутники для обох підконструкцій: *DEAB* (рис. 51) та *BC* (рис. 52). Особливості побудови векторів сил в системі Mathcad наведено в Додатку №3.

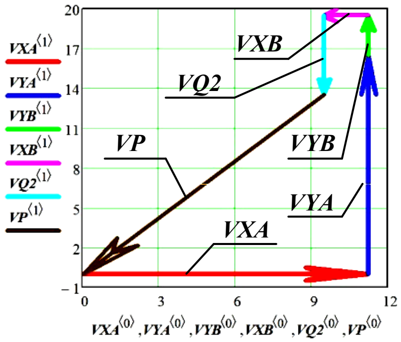


Рис. 51. Силовий багатокутник плоскої підконструкції *DEAB*

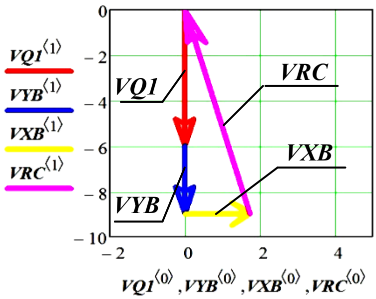


Рис. 52. Силовий багатокутник плоскої підконструкції *BC*

Силові багатокутники для обох підконструкцій замкнені, отже їх головні вектори довільних плоских систем сил, прикладених до твердо тільних підконструкцій, дорівнюють нулю.

Знайдемо величини моментів відносно точки *D*, усіх активних сил та реакцій для під конструкції *DEAB*.

$$MQ2 := -Q2 \cdot 2 \cdot a = -1.2 \times 10^3 J$$

$$MYA := YA \cdot 6 \cdot a = 9.9 \times 10^3 J$$

$$MXA := XA \cdot 4 \cdot a = 4.503 \times 10^3 J$$

$$MXB := -XB \cdot 2 \cdot a = 346.41 J$$

$$M1YB := YB \cdot 8 \cdot a = -2.4 \times 10^3 J$$

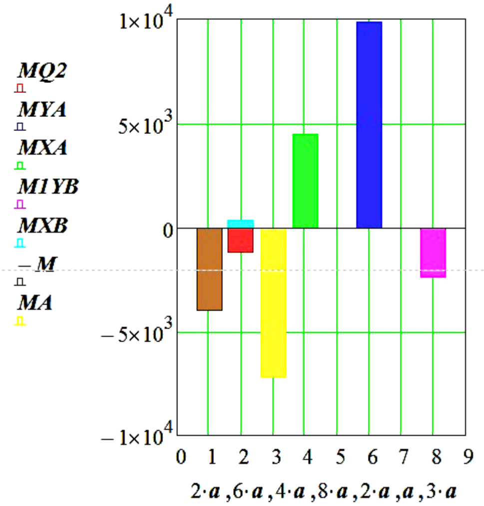


Рис 53. Моменти сил та реакцій опор плоскої підконструкції *DEAB* відносно точки *D*

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил та пар сил, що діють на задану твердотільну конструкцію, та моменти реакцій її опор (рис. 53). По осі абсцис відкладаємо відстань від точки *D* до точки прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

Знайдемо величини моментів відносно точки *C*, усіх активних сил та реакцій для підконструкції *BC*.

$$MQ1 := Q1 \cdot 1.5 \cdot a = 900 J$$

$$M2YB := YB \cdot 3 \cdot a = -900 J$$

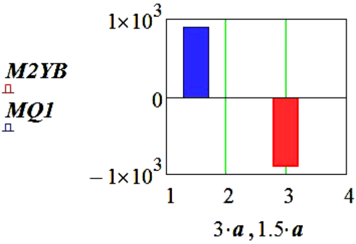


Рис 54. Моменти сил та реакцій опор плоскої підконструкції *BC* відносно точки *C*

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил, що діють на задану плоску складену конструкцію, та моменти реакцій її опор (рис. 54). По осі абсцис відкладаємо відстань від точки *C* до точки прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

Також побудуємо загальний силовий багатокутник для усієї плоскої коснтрукції *DEABC* (рис. 55).

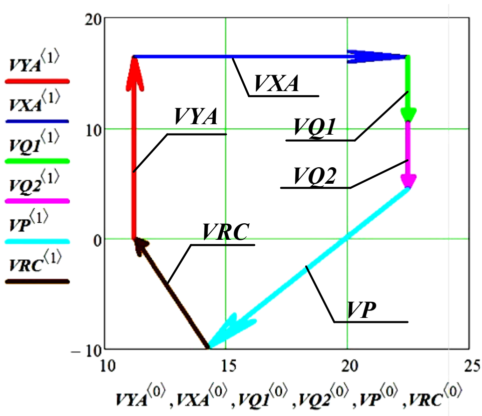


Рис. 55. Загальний силовий багатокутник для всієї плоскої конструкції *DEABC*

Силовий багатокутник замкнений, отже головний вектор плоскої довільної системи сил, прикладеної до плоскої складеної конструкції *DEABC*, дорівнює нулю.

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил та пар сил, що діють на задану плоску складену конструкцію *DEABC*, та моменти реакцій її опор (рис. 56). По осі абсцис відкладаємо відстань від початку координат до точки прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

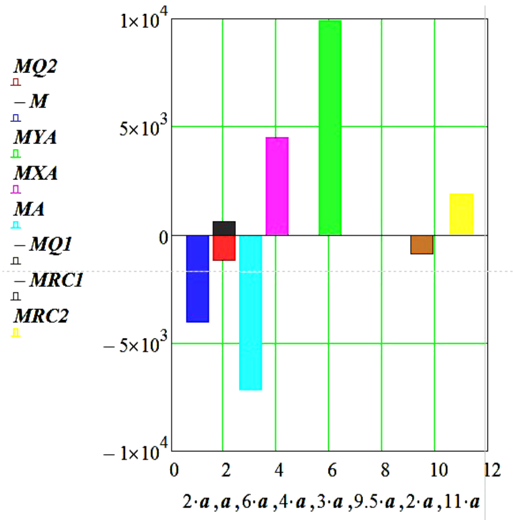


Рис 56. Моменти сил та реакцій опор плоскої конструкції відносно точки *D*

Завдання №4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду

Привести задану просторову систему довільно розташованих сил до простішого вигляду (рис. 57). Зовнішні сили P задано у кН, моменти − M у kН·м, а відстані між точками прикладення сил − в метрах.

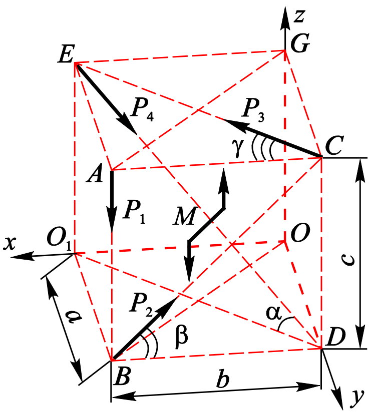


Рис 57. Довільна система сил, розташована у просторі з центром *O*

Вихідні данні
(Put the incoming data)

$P1 := 100kN$	$a := 0.3m$
$P2 := 50kN$	$b := 0.4m$
$P3 := 80kN$	$c := 0.5m$
$P4 := 10kN$	$M := 50kN \cdot m$

Визначимо кути нахилу діагоналей граней паралелепіпеда до координатної вісі *x*. Кут β − це кут нахилу діагоналі бічної грані до осі *x*. Кут *γ* − це кут нахилу діагоналі основи паралелепіпеда до осі *x*.

$$\beta := a\,tan\left(\frac{c}{b}\right) = 0.896$$

$$\gamma := a\,tan\left(\frac{b}{a}\right) = 0.644$$

$$\alpha := 45^0$$

Визначимо проекції векторів сил *P1, P2, P3* та *P4* на вісі *x, y, z* системи координат.

Проекції вектора сили *P1* на вісі *x, y, z.*

$$P1X := 0kN$$
$$P1Y := 0kN$$
$$P1Z := -P1 = -1\times 10^5\,N$$

Позначимо вектор сили *P1 як F1.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}1 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}1\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{P}1\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{P}1\boldsymbol{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1\times10^{5} \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

$$|\boldsymbol{F}1| := 1\times10^{5}\,\boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *P2* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{P}2\boldsymbol{X} := -\boldsymbol{P}2\cdot \boldsymbol{cos}(\beta) = -3.123\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{P}2\boldsymbol{Y} := 0\boldsymbol{kN}$$
$$\boldsymbol{P}2\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{P}2\times \boldsymbol{sin}(\beta) = 3.904\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$

Позначимо вектор сили *P2 як F2*. Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}2\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{P}2\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{P}2\boldsymbol{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.123\times10^{4} \\ 0 \\ 3.904\times10^{4} \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

$$|\boldsymbol{F}2| := 5\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *P3* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{P}3\boldsymbol{X} := \boldsymbol{P}3\cdot \boldsymbol{cos}(\gamma) = 6.4\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{P}3\boldsymbol{Y} := -\boldsymbol{P}3\cdot \boldsymbol{sin}(\gamma) = -4.8\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{P}3\boldsymbol{Z} := 0$$

Позначимо вектор сили *P3 як F3*. Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}3 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}3\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{P}3\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{P}3\boldsymbol{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.4\times10^{4} \\ -4.8\times10^{4} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

$$|\boldsymbol{F}3| := 8\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *P4* на вісі *x, y, z.*

$$P4X := -P4 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\gamma) = -5.657 \times 10^3\, N$$
$$P4Y := P4 \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\gamma) = 4.243 \times 10^3\, N$$
$$P4Z := -P4 \cdot sin(\alpha) = -7.071 \times 10^3\, N$$

Позначимо вектор сили *P4 як F4.* Він матиме наступний вигляд.

$$F4 := \begin{pmatrix} P4X \\ P4Y \\ P4Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.567 \times 10^3 \\ 4.243 \times 10^3 \\ -7.071 \times 10^3 \end{pmatrix} N$$
$$|F4| := 1 \times 10^4\, N$$

Визначимо головний вектор посторової системи сил *R.* задамо його як суму векторів *F1......F4*.

$$R := F1 + F2 + F3 + F4$$
$$R = \begin{pmatrix} 2.711 \times 10^4 \\ -4.376 \times 10^4 \\ -6.803 \times 10^4 \end{pmatrix} N$$
$$|R| := 8.531 \times 10^4\, N$$
$$RX := R_0 = 2.711 \times 10^4\, N$$
$$RY := R_1 = -4.376 \times 10^4\, N$$
$$RZ := R_2 = -6.803 \times 10^4\, N$$

Визначимо кути нахилу головного вектора системи *R* до координатних осей *x, y, z*. Позначимо їх φ, ψ та ξ відповідно.

$$\varphi := a\,cos\left(\frac{RX}{|R|}\right) = 1.247$$
$$\psi := a\,cos\left(\frac{RY}{|R|}\right) = 2.109$$
$$\xi := a\,cos\left(\frac{RZ}{|R|}\right) = 2.494$$

Обчислимо моменти сил *P1....P4* та пари сил *M* відносно центру системи *O*.

Спочатку задамо координати точок прикладення сил *P1....P4* відносно центру системи *O* в якості векторів.

Для сили *P1* точкою прикладення є точка *A;* для сили *P2* − точка *B;* для сили *P3* − точка *C;* для сили *P4* − точка *G.*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

Для обчислення моменту *M1* сили *P1* відносно центру системи *O* визначимо векторний добуток векторів *F1* та *A*.

$$\boldsymbol{M}1 := \boldsymbol{F}1 \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3\times10^4 \\ -4\times10^4 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{M}1| = 5\times10^4\,\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *M2* сили *P2* відносно центру системи *O* визначимо векторний добуток векторів *F2* та *B*.

$$\boldsymbol{M}2 := \boldsymbol{F}2 \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1.171\times10^4 \\ 1.562\times10^4 \\ -9.37\times10^3 \end{pmatrix} \boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{M}2| = 2.165\times10^4\,\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *M3* сили *P3* відносно центру системи *O* визначимо векторний добуток векторів *F3* та *C*.

$$\boldsymbol{M}3 := \boldsymbol{F}3 \times \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2.4\times10^4 \\ -3.2\times10^4 \\ 1.92\times10^4 \end{pmatrix} \boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{M}3| = 4.437\times10^4\,\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *M4* сили *P4* відносно центру системи *O* визначимо векторний добуток векторів *F4* та *G*.

$$\boldsymbol{M}4 := \boldsymbol{F}4\times\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 2.121\times10^{3} \\ 4.547\times10^{-13} \\ 1.697\times10^{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{M}4| = 2.717\times10^{3}\,\boldsymbol{J}$$

Визначимо моменти пари сил *M* відносно осей *x, y, z*.

$$\boldsymbol{MX} := \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{sin}(\gamma) = 4\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{MY} := -\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{cos}(\gamma) = -3\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{MZ} := 0$$

$$\boldsymbol{MM} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{MX} \\ \boldsymbol{MY} \\ \boldsymbol{MZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times10^{4} \\ -3\times10^{4} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{MM}| := 5\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

Обчислимо головний момент системи *MO* відносно центру *O*. Задамо його як суму векторів *M1......MM.*

$$\boldsymbol{MO} := \boldsymbol{M}1 + \boldsymbol{M}2 + \boldsymbol{M}3 + \boldsymbol{M}4 + \boldsymbol{MM}$$

$$\boldsymbol{MO} = \begin{pmatrix} 3.356\times10^{4} \\ -5.638\times10^{4} \\ 8.133\times10^{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{MO}| := 3.824\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{MOX} := \boldsymbol{MO}_0 = 3.356\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{MOY} := \boldsymbol{MO}_1 = -5.638\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{MOZ} := \boldsymbol{MO}_2 = 8.133\times10^{3}\,\boldsymbol{J}$$

Визначимо кути нахилу головного моменту системи *MO* до координатних осей *x, y, z*. Позначимо їх φ1, ψ1 та ξ1 відповідно.

$$\varphi 1 := a\cos\left(\frac{MOX}{|MO|}\right) = 1.173$$

$$\psi 1 := a\cos\left(\frac{MOY}{|MO|}\right) = 2.734$$

$$\xi 1 := a\cos\left(\frac{MOZ}{|MO|}\right) = 1.484$$

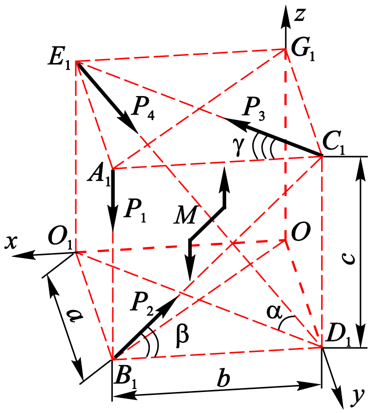


Рис 58. Довільна система сил, розташована у просторі з центром O_1

Обчислимо моменти сил *P1....P4* та пари сил *M* відносно центру системи *O1* (рис. 58).

Задамо відстань між точками *O* та *O1* за допомогою вектора *OO1*.

$$OO1 := \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Спочатку задамо координати точок прикладення сил *P1....P4* відносно центру системи *O1* в якості векторів.

Для сили *P1* точкою прикладення є точка *A1;* для сили *P2* − точка *B1;* для сили *P3* − точка *C1;* для сили *P4* − точка *G1*.

$$A1 := A - OO1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix} m \qquad B1 := B - OO1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$C1 := C - OO1 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix} m \qquad G1 := G - OO1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} m$$

Для обчислення моменту *m1* сили *P1* відносно центру системи *O1* визначимо векторний добуток векторів *F1* та *A1*.

$$m1 := F1 \times A1 = \begin{pmatrix} 3\times 10^{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} J$$

$$|m1| = 3\times 10^{4} J$$

Для обчислення моменту *m2* сили *P2* відносно центру системи *O1* визначимо векторний добуток векторів *F2* та *B1*.

$$\boldsymbol{m}2 := \boldsymbol{F}2 \times \boldsymbol{B}1 = \begin{pmatrix} -1.171\times10^{4} \\ 0 \\ -9.37\times10^{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{m}2| = 1.5\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *m3* сили *P3* відносно центру системи *O1* визначимо векторний добуток векторів *F3* та *C1*.

$$\boldsymbol{m}3 := \boldsymbol{F}3 \times \boldsymbol{C}1 = \begin{pmatrix} -2.4\times10^{4} \\ -3.2\times10^{4} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{m}3| = 4\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *m4* сили *P4* відносно центру системи *O1* визначимо векторний добуток векторів *F4* та *G1*.

$$\boldsymbol{m}4 := \boldsymbol{F}4 \times \boldsymbol{G}1 = \begin{pmatrix} 2.121\times10^{3} \\ 2.828\times10^{3} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{m}4| = 3.536\times10^{3}\,\boldsymbol{J}$$

Визначимо моменти пари сил *M* відносно осей *x, y, z.*

$$\boldsymbol{mX} := \boldsymbol{M}\cdot \boldsymbol{sin}(\gamma) = 4\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{mY} := -\boldsymbol{M}\cdot \boldsymbol{cos}(\gamma) = -3\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{mZ} := 0$$

$$\boldsymbol{mM} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{mX} \\ \boldsymbol{mY} \\ \boldsymbol{mZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times10^{4} \\ -3\times10^{4} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{mM}| := 5\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

Обчислимо головний момент системи *mO1* відносно центру *O1*. Задамо його як суму векторів *m1......mM.*

$$\boldsymbol{mO}1 := \boldsymbol{m}1 + \boldsymbol{m}2 + \boldsymbol{m}3 + \boldsymbol{m}4 + \boldsymbol{mM}$$

$$\boldsymbol{mO}1 = \begin{pmatrix} 3.641\times10^{4} \\ -5.917\times10^{4} \\ -9.37\times10^{3} \end{pmatrix} \boldsymbol{J}$$

$$|\boldsymbol{mO}1| := 7.01\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{mO}1\boldsymbol{X} := \boldsymbol{mO}1_{0} = 3.641\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{mO}1\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{mO}1_{1} = -5.917\times10^{4}\,\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{mO}1\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{mO}1_{2} = -9.37\times10^{3}\,\boldsymbol{J}$$

Для перевірки правильності рішення скористаємося другим інваріантом для просторової системи сил.

Спочатку знайдемо скалярний добуток головного вектора *R* та головного моменту системи сил *MO* відносно центру *O*.

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{MO} = 4.214\times10^{9}\,\frac{\boldsymbol{m}^{3}\cdot\boldsymbol{kg}^{2}}{\boldsymbol{s}^{4}}$$

Потім знайдемо скалярний добуток головного вектора *R* та головного моменту системи сил *mO1* відносно центру *O1*.

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{mO}1 = 4.214\times10^{9}\,\frac{\boldsymbol{m}^{3}\cdot\boldsymbol{kg}^{2}}{\boldsymbol{s}^{4}}$$

Результати обчислень збігаються, отже завдання вирішено вірно.

Приведемо дану систему просторових сил до простого вигляду. Для цього потрібно визначити векторний добуток головного вектора ситеми *R* та головного моменту системи *MO*. Позначимо цей векторний добуток як *S*.

$$\boldsymbol{S} := \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{MO} = \begin{pmatrix} -6.232 \times 10^{9} \\ -2.697 \times 10^{8} \\ -7.486 \times 10^{8} \end{pmatrix} \frac{\boldsymbol{m}^{3} \cdot \boldsymbol{kg}^{2}}{\boldsymbol{s}^{4}}$$

$$|\boldsymbol{S}| := 6.832 \times 10^{9} \, \frac{\boldsymbol{m}^{3} \cdot \boldsymbol{kg}^{2}}{\boldsymbol{s}^{4}}$$

Так як векторний добуток головного вектора та головного моменту системи S не дорівнює нулю, то система приводиться до силового гвинта.

Знайдемо точки перетину центральної вісі системи з координатними площинами.

Перетин з площиною *yOz*.

$$y1 := \frac{\boldsymbol{MOZ} \cdot |\boldsymbol{R}| - |\boldsymbol{MO}| \cdot \boldsymbol{RZ}}{\boldsymbol{RX} \cdot |\boldsymbol{R}|} \qquad z1 := \frac{\boldsymbol{MOY} \cdot |\boldsymbol{R}| - |\boldsymbol{MO}| \cdot \boldsymbol{RY}}{\boldsymbol{RX} \cdot |\boldsymbol{R}|}$$

$$y1 = 0.049\boldsymbol{m} \qquad z1 = 0.769\boldsymbol{m}$$

$$x1 := 0$$

Перетин з площиною *zOx*.

$$x2 := \frac{\boldsymbol{MOZ} \cdot |\boldsymbol{R}| - |\boldsymbol{MO}| \cdot \boldsymbol{RZ}}{\boldsymbol{RY} \cdot |\boldsymbol{R}|} \qquad z2 := \frac{\boldsymbol{MOX} \cdot |\boldsymbol{R}| - |\boldsymbol{MO}| \cdot \boldsymbol{RX}}{\boldsymbol{RY} \cdot |\boldsymbol{R}|}$$

$$x2 = 0.026\boldsymbol{m} \qquad z2 = 0..704\boldsymbol{m}$$

$$y2 := 0$$

Перетин з площиною *xOy*.

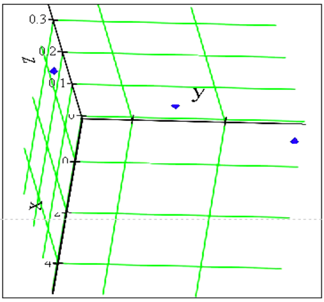
$$y3 := \frac{\boldsymbol{MOX} \cdot |\boldsymbol{R}| - |\boldsymbol{MO}| \cdot \boldsymbol{RX}}{\boldsymbol{RZ} \cdot |\boldsymbol{R}|} \qquad x3 := \frac{\boldsymbol{MOY} \cdot |\boldsymbol{R}| - |\boldsymbol{MO}| \cdot \boldsymbol{RY}}{\boldsymbol{RZ} \cdot |\boldsymbol{R}|}$$

$$y3 = -0.453\boldsymbol{m} \qquad x3 = 0.407\boldsymbol{m}$$

$$z3 := 0$$

Задамо координати точок перетину в якості матриць *T1, T2* та *T3* відповідно.

$$\boldsymbol{T}1 := \begin{pmatrix} 0 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{T}1 := \begin{pmatrix} x2 \\ 0 \\ z2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{T}3 := \begin{pmatrix} x3 \\ y3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



T

Рис 59. Точки перетину центральної вісі системи сил з координатними площинами

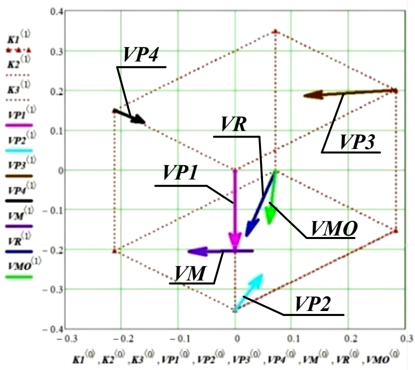


Рис 60. Побудова головного вектора та вектора головного моменту системи

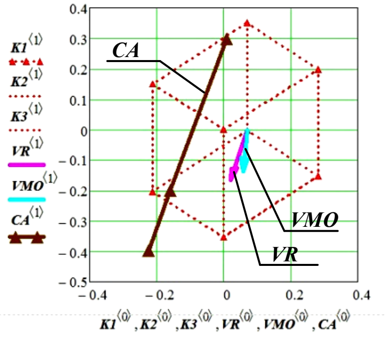


Рис 61. Побудова центральної вісі системи

Для побудови тривимірного графіка формуємо результуючу матрицю координат *T*, поєднуючи матриці *T1, T2* та *T3* (рис. 59).

$$\boldsymbol{T} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}1 \\ \boldsymbol{T}2 \\ \boldsymbol{T}3 \end{pmatrix}$$

Побудуємо систему сил, розташування якої у просторі має вигляд паралелепіпеда, нанісши на неї усі діючі сили, а також її головний вектор *R* та головний момент *MO* (рис. 60).

Особливості побудови векторів сил та точок їх прикладення у просторі в системі Mathcad наведено в Додатку №4.

Позначимо також точки центральної вісі системи та побудуємо її (рис. 4.5). Координати цих точок розраховані вище. Також слід враховувати, що кут між вісями х та у дорівнює 135 градусів.

Будуємо центральну вісь системи. Позначимо її *CA* (рис. 61):

Висновок: Центральна вісь системи паралельна головному вектору системи, тобто рішення вірне

Задача №5. Визначення реакцій опор та зусиль для рівноваги твердого тіла

Визначити реакції в опорах конструкції (рис. 62). Зовнішні сили задано у кН, моменти М − у кН·м, а розміри конструкції − в метрах.

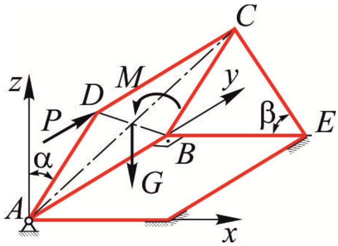


Рис 62. Просторова конструкція

Вихідні дані

$$AD = BC = a \qquad AB = CD = b$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{c}{2} \qquad < DAB = \gamma$$

$$P := 2kN \qquad a := 1m$$

$$G := 8kN \qquad b: = 1.8m$$

$$M := 10kN \cdot m \qquad \alpha := 30^0$$

$$\beta: = 60^0$$

$$\gamma := a\,tan\left(\frac{a}{b}\right) = 0.507$$

$$c := \frac{b}{cos(\gamma)} = 2.059m$$

Розрахункова схема

Наведемо рівняння рівноваги системи (рис. 63).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum X_i = 0:$$
$$XA + XB - S \cdot cos(\beta) = 0$$

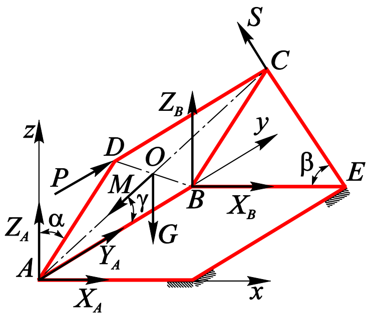


Рис 63. Розрахункова схема просторової конструкції

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Y_i = 0 :$$
$$YA + P = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Z. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

$$\sum Z_i = 0 :$$
$$ZA - G + ZB + S \cdot sin(\beta) = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно вісі X.

$$\sum MX = 0 :$$
$$-P \cdot cos(\alpha) \cdot a - G \cdot \frac{b}{2} + S \cdot sin(\beta) \cdot b + ZB \cdot b = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

$$-P \cdot cos(\alpha) - G \cdot \frac{b}{2 \cdot a} + S \cdot sin(\beta) \cdot \frac{b}{a} + ZB \cdot \frac{b}{a} = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно вісі Y.

$$\sum MY = 0 :$$
$$G \cdot sin(\alpha) \cdot \frac{a}{2} - S \cdot sin(\beta) \cdot a - M \cdot cos(\gamma) = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

$$\frac{G \cdot sin(\alpha)}{2} - S \cdot sin(\beta) - \frac{M \cdot cos(\gamma)}{a} = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно вісі Z.

$$\sum MZ = 0:$$
$$P \cdot sin(\alpha) \cdot a + S \cdot cos(\beta) \cdot b - XB \cdot b - M \cdot cos(\gamma) \cdot cos(\alpha) = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

$$P \cdot sin(\alpha) + S \cdot cos(\beta) \cdot \frac{b}{a} - XB \cdot \frac{b}{a} - \frac{M \cdot cos(\gamma) \cdot cos(\alpha)}{a} = 0$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.

$$\begin{aligned}
&XA + XB - S \cdot cos(\beta) = 0 \\
&YA + P = 0 \\
&ZA - G + ZB + S \cdot sin(\beta) = 0 \\
&-P \cdot cos(\alpha) - G \cdot \frac{b}{2 \cdot a} + S \cdot sin(\beta) \cdot \frac{b}{a} + ZB \cdot \frac{b}{a} = 0 \\
&\frac{G \cdot sin(\alpha)}{2} - S \cdot sin(\beta) - \frac{M \cdot cos(\gamma)}{a} = 0 \\
&P \cdot sin(\alpha) + S \cdot cos(\beta) \cdot \frac{b}{a} - XB \cdot \frac{b}{a} - \frac{M \cdot cos(\gamma) \cdot cos(\alpha)}{a} = 0
\end{aligned}$$

Використовуємо матричний метод вирішення системи рівнянь, що отримано.

$$\begin{aligned}
&XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot ZA + XB + 0 \cdot ZB - S \cdot cos(\beta) + = 0 \\
&0 \cdot XA + YA + 0 \cdot ZA + 0 \cdot XB + 0 \cdot ZB + 0 \cdot S = -P \\
&0 \cdot XA + 0 \cdot YA + ZA + 0 \cdot XB + ZB + S \cdot sin(\beta) = G \\
&0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot ZA + 0 \cdot XB + ZB \cdot \frac{b}{a} + S \cdot sin(\beta) \cdot \frac{b}{a} + 0 \cdot M = P \cdot cos(\alpha) + G \cdot \frac{b}{2 \cdot a} \\
&0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot ZA + 0 \cdot XB + 0 \cdot ZB - S \cdot sin(\beta) = -\frac{G \cdot sin(\alpha)}{2} + \frac{M \cdot cos(\gamma)}{a} \\
&0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot ZA - XB \cdot \frac{b}{a} + 0 \cdot ZB + S \cdot cos(\beta) \cdot \frac{b}{a} = -P \cdot sin(\alpha) + \frac{M \cdot sin(\gamma) \cdot cos(\alpha)}{a}
\end{aligned}$$

Формуємо матрицю коеффіцієнтів − K та вектор-столбець правих частин – Q.

$$\underset{\sim}{K} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & sin(\beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{a} & sin(\beta)\cdot\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -sin(\beta) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b}{a} & 0 & cos(\beta)\cdot\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0.866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.667 & 1.443 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.866 \\ 0 & 0 & 0 & -1.667 & 0 & 0.833 \end{pmatrix}$$

$$Q := \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ G \\ P\cdot cos(\alpha) + G\cdot\frac{b}{2\cdot a} + \frac{M\cdot cos\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)}{a} \\ -\frac{G\cdot sin(\alpha)}{2} + \frac{M\cdot cos(\gamma)}{a} \\ -P\cdot sin(\alpha) + \frac{M\cdot sin(\gamma)\cdot cos(\alpha)}{a} \end{pmatrix}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Isolve**.

$$Reaction := Isolve(K,Q) = \begin{pmatrix} 1.81\times10^{3} \\ -2\times10^{3} \\ 3.038\times10^{3} \\ -5.673\times10^{3} \\ 1.17\times10^{4} \\ -7.784\times10^{3} \end{pmatrix} N$$

Значення реакцій опор та невідомих зовнішніх сил

$$XA := Reaction_{0,0} = 1.81\times 10^{3}\,N$$

$$YA := Reaction_{1,0} = -2\times 10^{3}\,N$$

$$ZA := Reaction_{2,0} = 3.038\times 10^{3}\,N$$

$$XB := Reaction_{3,0} = -5.673\times 10^{3}\,N$$

$$ZB := Reaction_{4,0} = 1.17\times 10^{4}\,N$$

$$S := Reaction_{5,0} = -7.784\times 10^{3}\,N$$

Побудуємо систему активних сил та реакцій, прикладених до заданої конструкції у просторі (рис. 64).

Особливості побудови векторів сил у просторі в системі Mathcad наведено в Додатку №5.

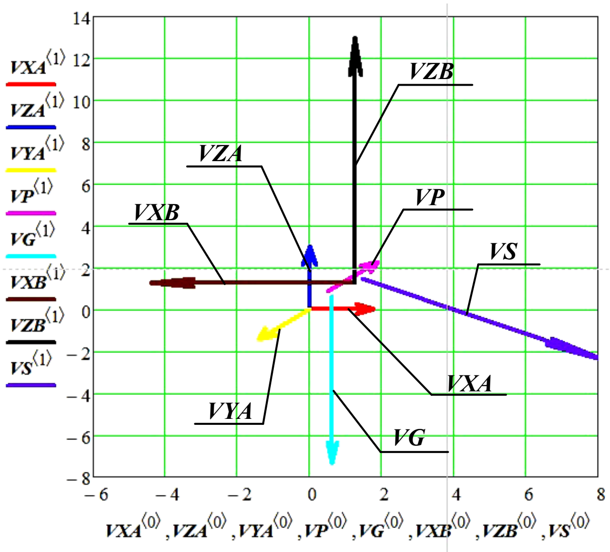


Рис 64. Просторова система сил, прикладена до заданої конструкції

Перевірка результатів рішення

Для перевірки правильності рішення обчислимо головний вектор та головний момент розглянутої конструкції, взявши за центр зведення точку *D*.

Визначимо проекції векторів сил *XA, YA, ZA, XB, ZB, G, P* та *S* на вісі *X, Y, Z* системи координат.

Проекції вектора сили *XA* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{XAX} := \boldsymbol{XA} = 1.81 \times 10^3\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{XAY} := 0\boldsymbol{kN}$$
$$\boldsymbol{XAZ} := 0\boldsymbol{kN}$$

Позначимо вектор сили *XA як F1.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}1 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{XAX} \\ \boldsymbol{XAY} \\ \boldsymbol{XAZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.81 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *YA* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{YAX} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{YAY} := -2 \times 10^3\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{YAZ} := 0\boldsymbol{N}$$

Позначимо вектор сили *YA як F2.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{YAX} \\ \boldsymbol{YAY} \\ \boldsymbol{YAZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *ZA* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{ZAX} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{ZAY} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{ZAZ} := \boldsymbol{ZA} = 3.038 \times 10^3\,\boldsymbol{N}$$

Позначимо вектор сили *ZA як F3.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}3 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{ZAX} \\ \boldsymbol{ZAY} \\ \boldsymbol{ZAZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.038\times10^{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *P* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{PX} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{PY} := \boldsymbol{P} = 2\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{PZ} := 0\boldsymbol{N}$$

Позначимо вектор сили *P як F4.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}4 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{PX} \\ \boldsymbol{PY} \\ \boldsymbol{PZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\times10^{3} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *G* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{GX} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{GY} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{GZ} := -\boldsymbol{G} = -8\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$

Позначимо вектор сили *G як F5.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}5 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{GX} \\ \boldsymbol{GY} \\ \boldsymbol{GZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8\times10^{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *XB* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{XBX} := \boldsymbol{XB} = -5.673\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{XBY} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{XBZ} := 0\boldsymbol{N}$$

Позначимо вектор сили *XB як F6.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}6 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{XBX} \\ \boldsymbol{XBY} \\ \boldsymbol{XBZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.673\times10^{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *ZB* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{ZBX} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{ZBY} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{ZBZ} := \boldsymbol{ZB} = 1.17\times10^{4}\,\boldsymbol{N}$$

Позначимо вектор сили *ZB як F7.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}7 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{ZBX} \\ \boldsymbol{ZBY} \\ \boldsymbol{ZBZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.17\times10^{4} \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

Проекції вектора сили *S* на вісі *x, y, z.*

$$\boldsymbol{SX} := -\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{cos}(\beta) = 3.892\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{SY} := 0\boldsymbol{N}$$
$$\boldsymbol{SZ} := \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{sin}(\beta) = -6.742\times10^{3}\,\boldsymbol{N}$$

Позначимо вектор сили *S як F8.* Він матиме наступний вигляд.

$$\boldsymbol{F}8 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{SX} \\ \boldsymbol{SY} \\ \boldsymbol{SZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.892\times10^{3} \\ 0 \\ -6.742\times10^{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$

Визначимо головний вектор посторової системи сил *R.* задамо його як суму векторів *F1……F8.*

$$\boldsymbol{R} := \boldsymbol{F}1+\boldsymbol{F}2+\boldsymbol{F}3+\boldsymbol{F}4+\boldsymbol{F}5+\boldsymbol{F}6+\boldsymbol{F}7+\boldsymbol{F}8$$
$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{N}$$
$$|\boldsymbol{R}| := 0\boldsymbol{N}$$

Головний вектор системи *R* дорівнює нулю.

Обчислимо моменти сил *XA, YA, ZA, P, G, XB, ZB, S* пари сил *M* відносно центру системи *D*.

Спочатку задамо координати точок прикладення сил *XA, YA, ZA, P, G, XB, ZB* та *S* відносно центру системи *A* в якості векторів.

Для сил *XA, YA* та *ZA* точкою прикладення є точка *A;* для сили *P* − точка *D;* для сил *XB* та *ZB* − точка *B;* для сили *S* − точка *C;* для сили *G* − точка *O.*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} := \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.8 \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{a}}{2}\cdot \boldsymbol{cos}(\beta) \\ \frac{\boldsymbol{c}}{2}\cdot \boldsymbol{cos}(\gamma) \\ \frac{\boldsymbol{a}}{2}\cdot \boldsymbol{sin}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.9 \\ 0.433 \end{pmatrix}\boldsymbol{m} \qquad \boldsymbol{D} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{cos}(\beta) \\ \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{cos}(\gamma) \\ \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{cos}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.874 \\ 0.866 \end{pmatrix}\boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{O} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{cos}(\beta) \\ \boldsymbol{c}\cdot \boldsymbol{cos}(\gamma) \\ \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{sin}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.8 \\ 0.866 \end{pmatrix}\boldsymbol{m}$$

Задамо відстань між точками *A* та *D* за допомогою вектора *AD*.

$$\boldsymbol{AD} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{cos}(\beta) \\ \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{cos}(\gamma) \\ \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{cos}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.874 \\ 0.866 \end{pmatrix}\boldsymbol{m}$$

Відносно нового центру приведення системи точки *D* координати точок прикладення сил задаємо наступними векторами:

$$\boldsymbol{A}1 := \boldsymbol{A} - \boldsymbol{AD} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.874 \\ -0.866 \end{pmatrix} \boldsymbol{m} \qquad \boldsymbol{B}1 := \boldsymbol{B} - \boldsymbol{AD} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.926 \\ -0.866 \end{pmatrix} \boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{C}1 := \boldsymbol{C} - \boldsymbol{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.926 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{m} \qquad \boldsymbol{D}1 := \boldsymbol{D} - \boldsymbol{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{O}1 := \boldsymbol{O} - \boldsymbol{AD} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.026 \\ -0.433 \end{pmatrix} \boldsymbol{m}$$

Для обчислення моменту *MXA* сили *XA* відносно центру системи *D* визначимо векторний добуток векторів *F1* та *A1*.

$$\boldsymbol{MXA} := \boldsymbol{F}1 \times \boldsymbol{A}1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.542 \times 10^3 \\ -1.577 \times 10^3 \end{pmatrix} \boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *MYA* сили *YA* відносно центру системи *D* визначимо векторний добуток векторів *F2* та *A1*.

$$\boldsymbol{MYA} := \boldsymbol{F}2 \times \boldsymbol{A}1 = \begin{pmatrix} 1.732 \times 10^3 \\ 0 \\ -1 \times 10^3 \end{pmatrix} \boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *MZA* сили *ZA* відносно центру системи *D* визначимо векторний добуток векторів *F3* та *A1*.

$$\boldsymbol{MZA} := \boldsymbol{F}3 \times \boldsymbol{A}1 = \begin{pmatrix} 2.655 \times 10^3 \\ -1.519 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *MP* сили *P* відносно центру системи *D* визначимо векторний добуток векторів *F4* та *D1*.

$$\boldsymbol{MP} := \boldsymbol{F}4 \times \boldsymbol{D}1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *MG* сили *G* відносно центру системи *D* визначимо векторний добуток векторів *F5* та *O1*.

$$\boldsymbol{MG} := \boldsymbol{F}5\times\boldsymbol{O}1 = \begin{pmatrix} 206.742 \\ 2\times10^{3} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *MXB* сили *XB* відносно центру системи *D* визначимо векторний добуток векторів *F6* та *B1*.

$$\boldsymbol{MXB} := \boldsymbol{F}6\times\boldsymbol{B}1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.913\times10^{3} \\ -5.253\times10^{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *MZB* сили Z*B* відносно центру системи *D* визначимо векторний добуток векторів *F7* та *B1*.

$$\boldsymbol{MZB} := \boldsymbol{F}7\times\boldsymbol{B}1 = \begin{pmatrix} -1.084\times10^{4} \\ -5.852\times10^{3} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *MS* сили *S* відносно центру системи *D* визначимо векторний добуток векторів *F8* та *C1*.

$$\boldsymbol{MS} := \boldsymbol{F}8\times\boldsymbol{C}1 = \begin{pmatrix} 6.242\times10^{3} \\ 4.321\times10^{-13} \\ 3.604\times10^{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{J}$$

Для обчислення моменту *MM* пари сил *M* задамо проекції вектора пари сил *M* на вісі координат *X*, *Y*, *Z*.

$$\boldsymbol{MM} := \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{M}\cdot \boldsymbol{cos}(\gamma) \\ \boldsymbol{M}\cdot \boldsymbol{sin}(\gamma)\cdot \boldsymbol{cos}(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$MM := \begin{pmatrix} 0 \\ 8.742\times10^{3} \\ 4.206\times10^{3} \end{pmatrix} J$$

Обчислимо головний момент системи *MD* відносно центру *D*. Задамо його як суму векторів *MXA, MYA, M ZA, MP, MG, MXB, MZB, MS, MM.*

(Find the resultant couple of the system MD about the system's center D. Set it as a sum of vectors MXA, MYA, M ZA, MP, MG, MXB, MZB, MS, MM).

$$MD := MXA + MYA + MZA + MP + MG + MXB + MZB + MS + MM$$

$$MD = \begin{pmatrix} -6.366\times10^{-12} \\ -3.638\times10^{-12} \\ -2.728\times10^{-12} \end{pmatrix} J$$

$$|MD| := 7.842\times10^{-12} J$$

Висновок: Головний вектор та головний момент системи відносно центру *D* дорівнюють нулю, отже система знаходиться в рівновазі. Рішення вірне.

Завдання №6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури

Визначити положення центру тяжіння плоскої фігури (рис. 65). Всі розміри задані в міліметрах

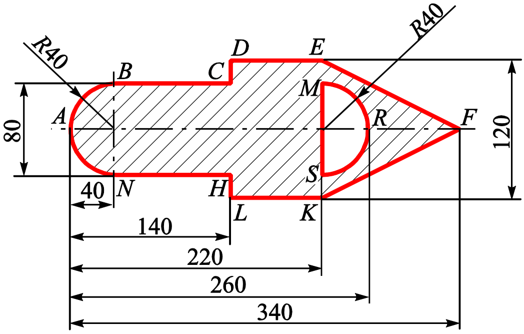


Рис. 65. Плоска фігура

Вихідні данні

$R := 40mm$ $OR := 220mm$

$DL := 120mm$ $OH := 100mm$

$OF := 300mm$ $EK := 120mm$

$OK := 180mm$ $BN := 80mm$

$OM := OK$

Дана плоска фігура складається з наступних фігур: − сектор *ABN,* багатокутник *BCDEFKLHN,* сектор *MRS.*

Визначимо площі вищезазначених простих геометричних фігур.

Площа сектора *ABN* (рис. 66).

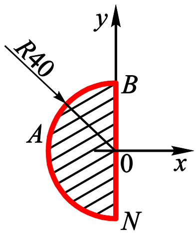


Рис. 66. Сектор *ABN*

$$\alpha := 180^0$$

$$F_{ABN} := \frac{R^2 \cdot \alpha \cdot \pi}{360^0} = 2.513 \times 10^{-3} m^2$$

Сектор *ABN* будуємо як **дві чверті кола** (рис.67). Їх рівняння запишемо у параметричному вигляді:

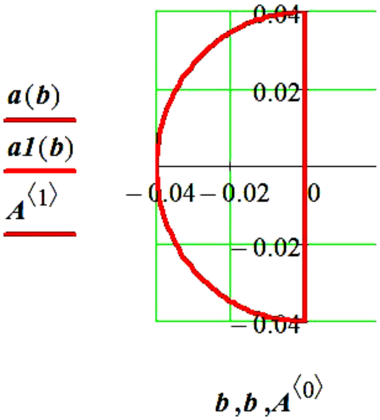


Рис. 67. Побудова сектора *ABN*

$$b0 := 0m$$
$$b := b0, b0 - 0.001m .. -R$$
$$a(b) := \sqrt{R^2 - (b - b0)^2}$$
$$a1(b) := -\sqrt{R^2 - (b - b0)^2}$$
$$A := \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

Визначимо координати *x* та *y* ценру тяжіння сектора *ABN*.

Координата *x* центру тяжіння сектора *ABN*.

$$x_{ABN} := -\left(\frac{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cdot \frac{\alpha}{2}}\right) = -0.017m$$

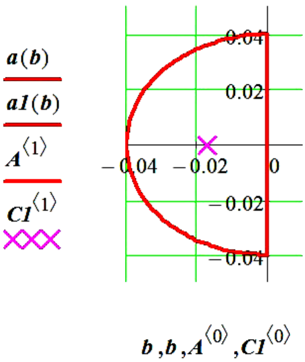


Рис. 68. Центр тяжіння сектора *ABN*

Координата *y* центру тяжіння сектора *ABN*.

$$y_{ABN} := -\left(\frac{2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cdot \frac{\alpha}{2}}\right) = 0m$$

Позначимо на графіку центр тяжіння сектора *ABN* (C1) (рис. 68).

$$C1 := \begin{pmatrix} x_{ABN} & y_{ABN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.017 & 0 \end{pmatrix} m$$

Визначимо статичний момент відносно вісі *y* для сектора *ABN*.

$$Sy_{ABN} := F_{ABN} \cdot X_{ABN} = -0.043L$$

Визначимо статичний момент відносно вісі *x* для сектора *ABN*.

$$Sx_{ABN} := F_{ABN} \cdot Y_{ABN} = 0L$$

Багатокутник *BCDEFKLHN* має дев'ять вершин. Задамо координати усіх вершин багатокутника *BCDEFKLHN*. Починаємо обхід багатокутника з вершини B, закінчуючи вершиною N за годинниковою стрілкою (рис. 69).

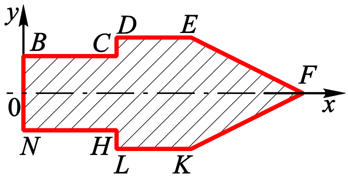


Рис. 69. Багатокутник *BCDEFKLHN*

$$x_0 := 0 \qquad y_0 := \frac{-BN}{2} = -0.04m$$

$$xN := x_0 \qquad yN := y_0$$

$$x_1 := OH \qquad y_1 := y_0 = -0.04m$$

$$xH := x_1 \qquad YH := y_1$$

$$x_2 := x_1 \qquad y_2 := \frac{-EK}{2} = -0.06m$$

$$xL := x_2 \qquad yL := y_2$$

$$x_3 := OK \qquad y_3 := y_2 = -0.06m$$

$$xK := x_3 \qquad yK := y_3$$

$$x_4 := OF \qquad y_4 := 0$$

$$xF := x_4 \qquad yF := y_4$$

$$x_5 := x_3 \qquad y_5 := -y_3 = 0.06m$$

$$xE := x_5 \qquad yE := y_5$$

$$x_6 := x_2 \qquad y_6 := -y_2 = 0.06m$$

$$xD := x_6 \qquad yD := y_6$$

$$x_7 := x_1 \qquad y_7 := -y_1 = 0.04m$$

$$xC := x_7 \qquad yC := y_7$$

$$x_8 := x_0 \qquad y_8 := -y_0 = 0.04m$$

$$xB := x_8 \qquad yB := y_8$$

$$A1 := \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \\ x_7 & y_7 \\ x_8 & y_8 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$$

$A1 =$

	0	1
0	0	-0.04
1	0.1	-0.04
2	0.1	-0.06
3	0.18	-0.06
4	0.3	0
5	0.18	0.06
6	0.1	0.06
7	0.1	0.04
8	0	0.04
9	0	-0.04

m

Будуємо багатокутник *BCDEFKLHN* (рис. 70).
Площа багатокутника *BCDEFKLHN*.

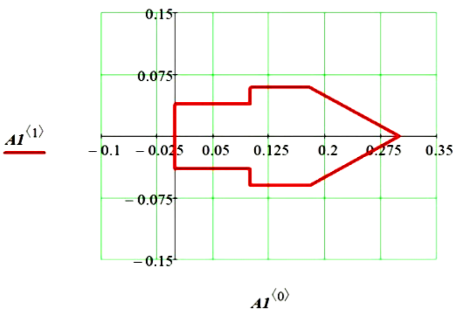


Рис. 70. Побудова багатокутника *BCDEFKLHN*

$$n := 8$$

$$j := 0..n$$

$$x_j := \begin{array}{|c|} \hline x_0 \\ \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline x_4 \\ \hline x_5 \\ \hline x_6 \\ \hline x_7 \\ \hline x_8 \\ \hline \end{array} \qquad y_j := \begin{array}{|c|} \hline y_0 \\ \hline y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline y_3 \\ \hline y_4 \\ \hline y_5 \\ \hline y_6 \\ \hline y_7 \\ \hline y_8 \\ \hline \end{array}$$

$$F_{BCDEFKLHN} := \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(x_j \cdot y_{j+1} - x_{j+1} \cdot y_j \right) \right] = 0.025 m^2$$

Визначимо статичний момент відносно вісі *y* для багатокутника *BCDEFKLHN.*

$$Sy_{BCDEFKLHN} := \frac{1}{6}\cdot\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(x_j\cdot y_{j+1} - x_{j+1}\cdot y_j\right)\cdot\left(x_j + x_{j+1}\right)\right] = -3.328L$$

Визначимо статичний момент відносно вісі *x* для багатокутника *BCDEFKLHN.*

$$Sx_{BCDEFKLHN} := \frac{1}{6}\cdot\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(x_j\cdot y_{j+1} - x_{j+1}\cdot y_j\right)\cdot\left(y_j + y_{j+1}\right)\right] = 0L$$

Визначимо координату *x* центра тяжіння багатокутника *BCDEFKLHNN.*

$$x_{BCDEFKLHN} := \frac{Sy_{BCDEFKLHN}}{F_{BCDEFKLHN}} = 0.134m$$

Визначимо координату *y* центра тяжіння багатокутника *BCDEFKLHNN.*

$$y_{BCDEFKLHN} := \frac{Sx_{BCDEFKLHN}}{F_{BCDEFKLHN}} = 0m$$

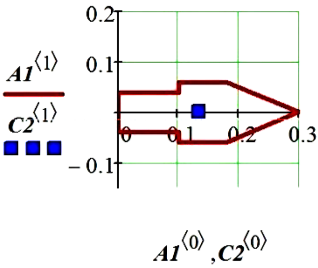


Рис. 71. Центр тяжіння багатокутника *BCDEFKLHN*

Позначимо на графіку центр тяжіння багатокутника *BCDEFKLHN* (C2) (рис. 71).

$$C2 := \left(x_{BCDEFKLHN} \quad y_{BCDEFKLHN}\right) = \left(0.134 \quad 0\right)m$$

Площа сектора *MRS* (рис. 72).

$$F_{MRS} := \frac{\pi\cdot\left(OR - OM\right)^2\cdot\alpha}{360^0} = 2.513\times10^{-3}m^2$$

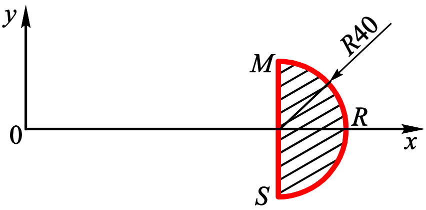


Рис. 72. Сектор *MRS*

Сектор *MRS* будуємо як **дві чверті кола** (рис. 73). Їх рівняння запишемо у параметричному вигляді:

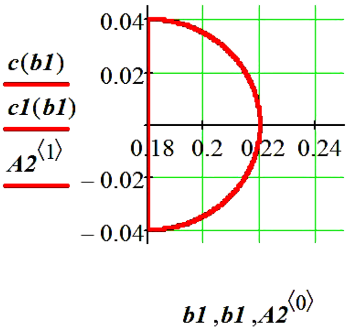


Рис. 73. Побудова сектора *MRS*

$$b1 := OM, OM + 0.001m..OR$$

$$c(b) := \sqrt{R^2 - (b1 - OM)^2}$$

$$c1(b) := -\sqrt{R^2 - (b1 - OM)^2}$$

$$A2 := \begin{pmatrix} OM & R \\ OM & -R \end{pmatrix}$$

Визначимо координати *x* та *y* центру тяжіння сектора *MRS*.

Координата *x* центру тяжіння сектора *MRS*.

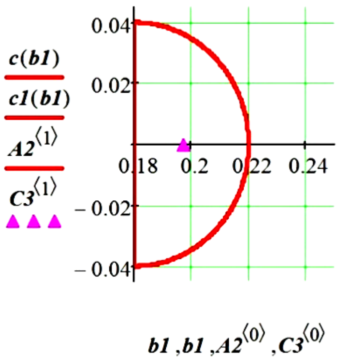


Рис. 74. Центр тяжіння сектора *MRS*

$$x_{MRS} := OM + \frac{2 \cdot R \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cdot \frac{\alpha}{2}} = 0.197m$$

Координата *y* центру тяжіння сектора *MRS*.

$$y_{MRS} := -\left(\frac{2 \cdot R \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cdot \frac{\alpha}{2}}\right) = 0m$$

Позначимо на графіку центр тяжіння сектора *MRS* (С3) (рис. 74).

$$C3 := \begin{pmatrix} x_{MRS} & y_{MRS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.197 & 0 \end{pmatrix} m$$

Визначимо статичний момент відносно вісі *y* для сектора *MRS*.

$$Sy_{MRS} := F_{MRS} \cdot x_{MRS} = 0.495L$$

Визначимо статичний момент відносно вісі *x* для сектора *MRS*.

$$Sx_{MRS} := F_{MRS} \cdot y_{MRS} = 0L$$

Площа усієї плоскої фігури.

$$F := F_{ABN} + F_{BCDEFKLHN} - F_{MRS} = -0.025m^2$$

Визначимо загальний статичний момент відносно вісі *y* для усієї плоскої фігури.

$$Sy := Sy_{ABN} + Sy_{BCDEFKLHN} - Sy_{MRS} = -3.866L$$

Визначимо загальний статичний момент відносно вісі *x* для усієї плоскої фігури.

$$Sx := Sx_{ABN} + Sx_{BCDEFKLHN} - Sx_{MRS} = 0L$$

Визначимо координату *XC* центра тяжіння усієї плоскої фігури.

$$xC := \frac{Sy}{F} = 0.156m$$

Визначимо координату *YC* центра тяжіння усієї плоскої фігури.

$$yC := \frac{Sx}{F} = 0m$$

Будуємо усю плоску фігуру (рис.75). Позначимо на графіку її центр тяжіння (С).

$$C := \begin{pmatrix} xC & yC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.156 & 0 \end{pmatrix} m$$

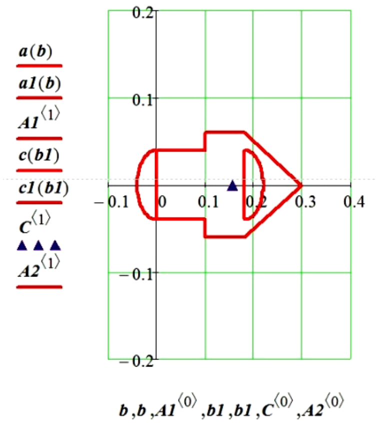


Рис. 75. Центр тяжіння усієї плоскої фігури

Висновок: Визначено координати центру тяжіння плоскої фігури – точки *C*. Координата центру тяжіння по осі абсцис *xC* дорівнює 156 мм, а по осі ординат – *yC* = 0.

Додаток №1. Побудова векторів сил, діючих на плоску твердо тільну конструкцію.

Для побудови векторів сил спочатку задамо масштабний коефіцієнт μ=10^3N.

Будуємо вектор реакції YB. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1YB := 0 \qquad x2YB := 0$$

$$y1YB := 0 \qquad y2YB := \frac{YB}{\mu} = 34.992$$

$$x3YB := x2YB - 0.8 = -0.8 \qquad x4YB := x2YB = 0$$

$$y3YB := y2YB - 5 = 29.992 \qquad y4YB := y3YB + 2 = 31.992$$

$$x5YB := -x3YB = 0.8$$

$$y5YB := y3YB = 29.992$$

Отримуємо вектор VYB − вектор реакції YB.

$$VYB := \begin{pmatrix} x1YB & y1YB \\ x2YB & y2YB \\ x3YB & y3YB \\ x4YB & y4YB \\ x5YB & y5YB \\ x2YB & y2YB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 34.992 \\ -0.8 & 29.992 \\ 0 & 31.992 \\ 0.8 & 29.992 \\ 0 & 34.992 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції XB. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1XB := 0 \qquad x2XB := \frac{XB}{\mu} = 17.316$$

$$y1XB := 0 \qquad y2XB := y1XB = 0$$

$$x3XB := x2XB - 5 = 12.316 \qquad x4XB := x3XB + 2 = 14.316$$

$$y3XB := y2XB + 1 = 1 \qquad y4XB := y2XB = 0$$

$$x5XB := x3XB = 12.316$$

$$y5XB := y2XB = 0$$

Отримуємо радіус-вектор rXB, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$rXB := \begin{pmatrix} x1XB & y1XB \\ x2XB & y2XB \\ x3XB & y3XB \\ x4XB & y4XB \\ x5XB & y5XB \\ x2XB & y2XB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 17.316 & 0 \\ 12.316 & 1 \\ 14.316 & 0 \\ 12.316 & -1 \\ 17.316 & 0 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції XB є кінцева точка вектора реакції YB. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПXB для переносу вектора rXB в цю точку.

$$\Pi XB := \begin{pmatrix} x2YB & y2YB \\ x2YB & y2YB \\ x2YB & y2YB \\ x2YB & y2YB \\ x2YB & y2YB \\ x2YB & y2YB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VXB − вектор реакції XB.

$$VXB := rXB + \Pi XB = \begin{pmatrix} 0 & 34.992 \\ 17.316 & 34.992 \\ 12.316 & 35.992 \\ 14.316 & 34.992 \\ 12.316 & 33.992 \\ 17.316 & 34.992 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили Q. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1Q := 0 \qquad x2Q := x1Q = 0$$

$$y1Q := 0 \qquad y2Q := y1Q - \frac{Q}{\mu} = -5$$

$$x3Q := x2Q + 0.5 = 0.5 \qquad x4Q := x2Q = 0$$

$$y3Q := y2Q + 3 = -2 \qquad y4Q := y3Q - 1 = -3$$

$$x5Q := -x3Q = -0.5$$

$$y5Q := y3Q = -2$$

Отримуємо радіус-вектор rQ, який спрямовано з початку координат вздовж вісі Y.

$$rQ := \begin{pmatrix} x1Q & y1Q \\ x2Q & y2Q \\ x3Q & y3Q \\ x4Q & y4Q \\ x5Q & y5Q \\ x2Q & y2Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \\ 0.5 & -2 \\ 0 & -3 \\ -0.5 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили Q є кінцева точка вектора реакції XB. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПQ для переносу вектора rQ в цю точку.

$$ПQ := \begin{pmatrix} x2XB & y2XB \\ x2XB & y2XB \\ x2XB & y2XB \\ x2XB & y2XB \\ x2XB & y2XB \\ x2XB & y2XB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \\ 0 & 34.992 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VQ − вектор сили Q.

$$VQ := rQ + \Pi Q = \begin{pmatrix} 17.316 & 34.992 \\ 17.316 & 29.992 \\ 17.816 & 32.992 \\ 17.316 & 31.992 \\ 16.816 & 32.992 \\ 17.316 & 29.992 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили Р. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1P := 0 \qquad x2P := \frac{Q}{\mu} = 25$$

$$y1P := 0 \qquad y2P := x1P = 0$$

$$x3P := x2P - 5 = 20 \qquad x4P := x3P + 2 = 22$$

$$y3P := y2P + 0.8 = 0.8 \qquad y4P := y2P = 0$$

$$x5P := x3P = 20$$

$$y5P := -y3P = -0.8$$

Отримуємо радіус-вектор rP, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$rP := \begin{pmatrix} x1P & y1P \\ x2P & y2P \\ x3P & y3P \\ x4P & y4P \\ x5P & y5P \\ x2P & y2P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 0 \\ 20 & 0.8 \\ 22 & 0 \\ 20 & -0.8 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$$

Силу Р спрямовано до вісі X під кутом β. Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\Phi P := -\begin{pmatrix} cos(\beta) & sin(\beta) \\ sin(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.866 \\ 0.866 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили Р є кінцева точка вектора сили Q. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПР для переносу вектора rP в цю точку.

$$\Pi P := \begin{pmatrix} x2XB & y2YB + y2Q \\ x2XB & y2YB + y2Q \\ x2XB & y2YB + y2Q \\ x2XB & y2YB + y2Q \\ x2XB & y2YB + y2Q \\ x2XB & y2YB + y2Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.316 & 29.992 \\ 17.316 & 29.992 \\ 17.316 & 29.992 \\ 17.316 & 29.992 \\ 17.316 & 29.992 \\ 17.316 & 29.992 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VP − вектор сили P.

$$VP := rP \cdot \Phi P + \Pi P = \begin{pmatrix} 17.316 & 29.992 \\ 4.816 & 8.341 \\ 8.009 & 12.271 \\ 6.316 & 10.939 \\ 6.623 & 13.071 \\ 4.816 & 8.341 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції RA. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1RA := 0 \qquad x2RA := \frac{RA}{\mu} = -9.632$$

$$y1RA := 0 \qquad y2RA := y1RA = 0$$

$$x3RA := x2RA + 4 = -5.632 \qquad x4RA := x3RA - 2 = -7.632$$

$$y3RA := y2RA + 0.7 = 0.7 \qquad y4RA := y2RA = 0$$

$$x5RA := x3RA = -5.632$$

$$y5RA := -y3RA = -0.7$$

Отримуємо радіус-вектор rRA, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$\boldsymbol{rRA} := \begin{pmatrix} x1\boldsymbol{RA} & y1\boldsymbol{RA} \\ x2\boldsymbol{RA} & y2\boldsymbol{RA} \\ x3\boldsymbol{RA} & y3\boldsymbol{RA} \\ x4\boldsymbol{RA} & y4\boldsymbol{RA} \\ x5\boldsymbol{RA} & y5\boldsymbol{RA} \\ x2\boldsymbol{RA} & y2\boldsymbol{RA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9.632 & 0 \\ -5.632 & 0.7 \\ -7.632 & 0 \\ -5.632 & -0.7 \\ -9.632 & 0 \end{pmatrix}$$

Реакцію RA спрямовано до вісі X під кутом 90^0-α. Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\boldsymbol{\Phi RA} := -\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}\left(90^0 - \alpha\right) & \boldsymbol{sin}\left(90^0 - \alpha\right) \\ \boldsymbol{sin}\left(90^0 - \alpha\right) & \boldsymbol{cos}\left(90^0 - \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.866 \\ -0.866 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції RA з координатами X1RA та Y1RA є кінцева точка вектора сили P. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПRA для переносу вектора rRA в цю точку.

$$X1\boldsymbol{RA} := 4.816 \qquad Y1\boldsymbol{RA} := 8.341$$

$$\boldsymbol{\Pi RA} := \begin{pmatrix} X1\boldsymbol{RA} & Y1\boldsymbol{RA} \\ X1\boldsymbol{RA} & Y1\boldsymbol{RA} \\ X1\boldsymbol{RA} & Y1\boldsymbol{RA} \\ X1\boldsymbol{RA} & Y1\boldsymbol{RA} \\ X1\boldsymbol{RA} & Y1\boldsymbol{RA} \\ X1\boldsymbol{RA} & Y1\boldsymbol{RA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.816 & 8.341 \\ 4.816 & 8.341 \\ 4.816 & 8.341 \\ 4.816 & 8.341 \\ 4.816 & 8.341 \\ 4.816 & 8.341 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VRA − вектор реакції RA.

$$\boldsymbol{VRA} := \boldsymbol{rRA} \cdot \boldsymbol{\Phi RA} + \boldsymbol{\Pi RA} = \begin{pmatrix} 4.816 & 8.341 \\ 1.198 \times 10^{-14} & -3.491 \times 10^{-14} \\ 1.394 & 3.814 \\ 1 & 1.732 \\ 2.606 & 3.114 \\ 1.198 \times 10^{-14} & -3.491 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

Додаток №2. Побудова векторів сил, діючих на плоску ферму.

Для побудови векторів сил спочатку задамо масштабний коефіцієнт $\mu=10^3$N.

Будуємо вектор реакції Ya. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

(Set the vector of reaction Ya. Firstly set the point, creating vector's image).

$$x1Ya := 0 \qquad x2Ya := 0$$

$$y1Ya := 0 \qquad y2Ya := \frac{Ya}{\mu} = 18.377$$

$$x3Ya := x2Ya - 0.8 = -0.8 \qquad x4Ya := x2Ya = 0$$

$$y3Ya := y2Ya - 4 = 14.377 \qquad y4Ya := y3Ya + 2 = 16.377$$

$$x5Ya := -x3Ya = 0.8$$

$$y5Ya := y3Ya = 14.377$$

Отримуємо вектор VYa − вектор реакції Ya.

$$VYa := \begin{pmatrix} x1Ya & y1Ya \\ x2Ya & y2Ya \\ x3Ya & y3Ya \\ x4Ya & y4Ya \\ x5Ya & y5Ya \\ x2Ya & y2Ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18.377 \\ -0.8 & 14.377 \\ 0 & 16.377 \\ 0.8 & 14.377 \\ 0 & 18.377 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції Xa. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1Xa := 0 \qquad x2Xa := \frac{Xa}{\mu} = 9.185$$

$$y1Xa := 0 \qquad y2Xa := y1Xa = 0$$

$$x3Xa := x2Xa - 4 = 5.185 \qquad x4Xa := x3Xa + 2 = 7.185$$

$$y3Xa := y2Xa + 0.5 = 0.5 \qquad y4Xa := y2Xa = 0$$

$$x5Xa := x3Xa = 5.185$$

$$y5Xa := -y3Xa = -0.5$$

Отримуємо радіус-вектор rXa, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$rXa := \begin{pmatrix} x1Xa & y1Xa \\ x2Xa & y2Xa \\ x3Xa & y3Xa \\ x4Xa & y4Xa \\ x5Xa & y5Xa \\ x2Xa & y2Xa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9.185 & 0 \\ 5.185 & 0.5 \\ 7.185 & 0 \\ 5.185 & -0.5 \\ 9.185 & 0 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції Xa є кінцева точка вектора реакції Ya. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПXa для переносу вектора rXa в цю точку.

$$\Pi Xa := \begin{pmatrix} x2Ya & y2Ya \\ x2Ya & y2Ya \\ x2Ya & y2Ya \\ x2Ya & y2Ya \\ x2Ya & y2Ya \\ x2Ya & y2Ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 18.377 \\ 0 & 18.377 \\ 0 & 18.377 \\ 0 & 18.377 \\ 0 & 18.377 \\ 0 & 18.377 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VXa − вектор реакції Xa.

$$VXa := rXa + \Pi Xa = \begin{pmatrix} 0 & 18.377 \\ 9.185 & 18.377 \\ 5.185 & 18.377 \\ 7.185 & 18.377 \\ 5.185 & 18.377 \\ 9.185 & 18.377 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили F1. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x}1\boldsymbol{F}1 := 0 \qquad \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}1 := \frac{\boldsymbol{F}1}{\mu} = 18$$

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}1 := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}1 := \boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}1 = 0$$

$$\boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}1 := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}1 - 4 = 14 \qquad \boldsymbol{x}4\boldsymbol{F}1 := \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}1 + 2 = 16$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}1 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}1 + 0.8 = 0.8 \qquad \boldsymbol{y}4\boldsymbol{F}1 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}1 = 0$$

$$\boldsymbol{x}5\boldsymbol{F}1 := \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}1 = 14$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{F}1 := -\boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}1 = -0.8$$

Отримуємо радіус-вектор rF1, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$\boldsymbol{rF}1 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}1\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{x}4\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{y}4\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{x}5\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{y}5\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 18 & 0 \\ 14 & 0.8 \\ 16 & 0 \\ 14 & -0.8 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Силу F1 спрямовано до вісі X під кутом 45^0. Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\boldsymbol{\Phi F}1 := -\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}\left(-45^0\right) & \boldsymbol{sin}\left(-45^0\right) \\ \boldsymbol{sin}\left(-45^0\right) & \boldsymbol{cos}\left(-45^0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили F1 є кінцева точка вектора реакції Xa з координатами x2Xa та y2Ya. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПF1 для переносу вектора rF1 в цю точку.

$$\boldsymbol{\Pi F}1 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Xa} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Ya} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Xa} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Ya} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Xa} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Ya} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Xa} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Ya} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Xa} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Ya} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Xa} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Ya} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.185 & 18.377 \\ 9.185 & 18.377 \\ 9.185 & 18.377 \\ 9.185 & 18.377 \\ 9.185 & 18.377 \\ 9.185 & 18.377 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VF1 − вектор сили F1.

$$\boldsymbol{VF}1 := \boldsymbol{rF}1 \cdot \boldsymbol{\Phi F}1 + \boldsymbol{\Pi F}1 = \begin{pmatrix} 9.185 & 18.377 \\ 21.912 & 5.649 \\ 19.65 & 9.043 \\ 20.498 & 7.063 \\ 18.518 & 7.912 \\ 21.912 & 5.649 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили F2. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x}1\boldsymbol{F}2 := 0 \qquad \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}2 := \frac{\boldsymbol{F}2}{\mu} = 15$$

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}2 := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}2 := \boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}2 = 0$$

$$\boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}2 := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}2 - 4 = 11 \qquad \boldsymbol{x}4\boldsymbol{F}2 := \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}2 + 2 = 13$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}2 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}2 + 0.8 = 0.8 \qquad \boldsymbol{y}4\boldsymbol{F}2 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}2 = 0$$

$$\boldsymbol{x}5\boldsymbol{F}2 := \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}2 = 11$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{F}2 := -\boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}2 = -0.8$$

Отримуємо радіус-вектор rF2, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$\boldsymbol{rF}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}1\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{x}4\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{y}4\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{x}5\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{y}5\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 15 & 0 \\ 11 & 0.8 \\ 13 & 0 \\ 11 & -0.8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Силу F2 спрямовано до вісі X під кутом β. Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\boldsymbol{\Phi F}2 := -\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}\left(-90^0 - \beta\right) & \boldsymbol{sin}\left(-90^0 - \beta\right) \\ \boldsymbol{sin}\left(-90^0 - \beta\right) & \boldsymbol{cos}\left(-90^0 - \beta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.866 & -0.5 \\ 0.5 & -0.866 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили F2 є кінцева точка вектора сили F1 з координатами X2F1 та Y2F1. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПF2 для переносу вектора rF2 в цю точку.

$$\boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}1 := 21.912 \qquad \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}1 := 5.649$$

$$\boldsymbol{\Pi F}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}1 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}1 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.912 & 5.649 \\ 21.912 & 5.649 \\ 21.912 & 5.649 \\ 21.912 & 5.649 \\ 21.912 & 5.649 \\ 21.912 & 5.649 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VF2 − вектор сили F1.

$$\boldsymbol{VF}2 := \boldsymbol{rF}2 \cdot \boldsymbol{\Phi F}2 + \boldsymbol{\Pi F}2 = \begin{pmatrix} 21.912 & 5.649 \\ 8.922 & -1.851 \\ 12.786 & -0.544 \\ 10.645 & -0.851 \\ 11.986 & 0.842 \\ 8.922 & -1.851 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили F3. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x}1\boldsymbol{F}3 := 0 \qquad \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}3 := \frac{\boldsymbol{F}3}{\mu} = 5$$

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}3 := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}3 := \boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}3 = 0$$

$$\boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}3 := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}3 - 2 = 3 \qquad \boldsymbol{x}4\boldsymbol{F}3 := \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}3 + 2 = 5$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}3 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}3 + 0.5 = 0.5 \qquad \boldsymbol{y}4\boldsymbol{F}3 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}3 = 0$$

$$\boldsymbol{x}5\boldsymbol{F}3 := \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}3 = 3$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{F}3 := -\boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}3 = -0.5$$

Отримуємо радіус-вектор rF3, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$\boldsymbol{rF}3 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}1\boldsymbol{F}3 & \boldsymbol{y}1\boldsymbol{F}3 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}3 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}3 \\ \boldsymbol{x}3\boldsymbol{F}3 & \boldsymbol{y}3\boldsymbol{F}3 \\ \boldsymbol{x}4\boldsymbol{F}3 & \boldsymbol{y}4\boldsymbol{F}3 \\ \boldsymbol{x}5\boldsymbol{F}3 & \boldsymbol{y}5\boldsymbol{F}3 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{F}3 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{F}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 3 & 0.5 \\ 5 & 0 \\ 3 & -0.5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Силу F3 спрямовано до вісі X під кутом γ. Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\boldsymbol{\Phi F}3 := -\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}\left(-90^0-\gamma\right) & \boldsymbol{sin}\left(-90^0-\gamma\right) \\ \boldsymbol{sin}\left(-90^0-\gamma\right) & \boldsymbol{cos}\left(-90^0-\gamma\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.707 & -0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили F3 є кінцева точка вектора сили F2 з координатами X2F2 та Y2F2. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПF3 для переносу вектора rF3 в цю точку.

$$\boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}2 := 8.922 \qquad \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}1 := -1.851$$

$$\boldsymbol{\Pi F}3 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}2 \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{F}2 & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{F}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.922 & -1.851 \\ 8.922 & -1.851 \\ 8.922 & -1.851 \\ 8.922 & -1.851 \\ 8.922 & -1.851 \\ 8.922 & -1.851 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VF3 − вектор сили F3.

$$\boldsymbol{VF}3 := \boldsymbol{rF}3 \cdot \boldsymbol{\Phi F}3 + \boldsymbol{\Pi F}3 = \begin{pmatrix} 8.922 & -1.851 \\ 5.386 & -5.387 \\ 7.154 & -4.326 \\ 5.386 & -5.387 \\ 6.477 & -3.619 \\ 5.386 & -5.387 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції Rd. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x1Rd} := 0 \qquad \boldsymbol{x2Rd} := \frac{\boldsymbol{Rd}}{\mu} = 7.691$$

$$\boldsymbol{y1Rd} := 0 \qquad \boldsymbol{y2Rd} := \boldsymbol{y1Rd} = 0$$

$$\boldsymbol{x3Rd} := \boldsymbol{x2Rd} - 2 = 5.691 \qquad \boldsymbol{x4Rd} := \boldsymbol{x3Rd} + 2 = 7.691$$

$$\boldsymbol{y3Rd} := \boldsymbol{y2Rd} + 0.5 = 0.5 \qquad \boldsymbol{y4Rd} := \boldsymbol{y2Rd} = 0$$

$$\boldsymbol{x5Rd} := \boldsymbol{x3Rd} = 5.691$$

$$\boldsymbol{y5Rd} := -\boldsymbol{y3Rd} = -0.5$$

Отримуємо радіус-вектор rRd, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$\boldsymbol{rRd} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x1Rd} & \boldsymbol{y1Rd} \\ \boldsymbol{x2Rd} & \boldsymbol{y2Rd} \\ \boldsymbol{x3Rd} & \boldsymbol{y3Rd} \\ \boldsymbol{x4Rd} & \boldsymbol{y4Rd} \\ \boldsymbol{x5Rd} & \boldsymbol{y5Rd} \\ \boldsymbol{x2Rd} & \boldsymbol{y2Rd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7.691 & 0 \\ 5.691 & 0.5 \\ 7.691 & 0 \\ 5.691 & -0.5 \\ 7.691 & 0 \end{pmatrix}$$

Реакцію Rd спрямовано до вісі X під кутом 45^0. Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\boldsymbol{\Phi Rd} := -\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}\left(-225^0\right) & \boldsymbol{sin}\left(-225^0\right) \\ \boldsymbol{sin}\left(-225^0\right) & \boldsymbol{cos}\left(-225^0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.707 & 0.707 \\ -0.707 & -0.707 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції Rd є кінцева точка вектора сили F3 з координатами X2F3 та Y2F3. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПRd для переносу вектора rRd в цю точку.

$$\boldsymbol{X2F3} := 5.386 \qquad \boldsymbol{Y2F3} := -5.387$$

$$\boldsymbol{\Pi Rd} := \begin{pmatrix} X2F3 & Y2F3 \\ X2F3 & Y2F3 \\ X2F3 & Y2F3 \\ X2F3 & Y2F3 \\ X2F3 & Y2F3 \\ X2F3 & Y2F3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.386 & -5.387 \\ 5.386 & -5.387 \\ 5.386 & -5.387 \\ 5.386 & -5.387 \\ 5.386 & -5.387 \\ 5.386 & -5.387 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VRd − вектор реакції Rd.

$$\boldsymbol{VRd} := \boldsymbol{rRd} \cdot \boldsymbol{\Phi Rd} + \boldsymbol{\Pi Rd} = \begin{pmatrix} 5.386 & -5.387 \\ -52\times10^{-12} & 51\times10^{-12} \\ 1.008 & -1.716 \\ -52\times10^{-12} & 51\times10^{-12} \\ 1.715 & -1.009 \\ -52\times10^{-12} & 51\times10^{-12} \end{pmatrix}$$

Додаток №3. Рівновага зчленованої системи тіл.

Для побудови векторів сил спочатку задамо масштабний коефіцієнт $\mu=10^2$N.

Спочатку будуємо силовий багатокутник для лівої частини конструкції.

Будуємо вектор реакції XA. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1XA := 0 \qquad x2XA := \frac{XA}{\mu} = 11.258$$

$$y1XA := 0 \qquad y2XA := 0$$

$$x3XA := x2XA - 2.5 = 8.758 \qquad x4XA := x3XA + 1 = 9.758$$

$$y3XA := y2XA + 0.5 = 0.5 \qquad y4XA := y2XA = 0$$

$$x5XA := x3XA = 8.758$$

$$y5XA := -y3XA = -0.5$$

Отримуємо вектор VXA − вектор реакції XA.

$$VXA := \begin{pmatrix} x1XA & y1XA \\ x2XA & y2XA \\ x3XA & y3XA \\ x4XA & y4XA \\ x5XA & y5XA \\ x2XA & y2XA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 11.258 & 0 \\ 8.758 & 0.5 \\ 9.758 & 0 \\ 8.758 & -0.5 \\ 11.258 & 0 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції YA. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1YA := 0 \qquad x2YA := 0$$

$$y1YA := 0 \qquad y2YA := \frac{YA}{\mu} = 16.5$$

$$x3YA := x2YA - 0.3 = -0.3 \qquad x4YA := x2YA = 0$$

$$y3YA := y2YA - 3 = 13.5 \qquad y4YA := y3YA + 2 = 15.5$$

$$x5YA := -x3YA = 0.3$$

$$y5YA := y3YA = 13.5$$

Отримуємо радіус-вектор rYA, який спрямовано з початку координат вздовж вісі Y.

$$rYA := \begin{pmatrix} x1YA & y1YA \\ x2YA & y2YA \\ x3YA & y3YA \\ x4YA & y4YA \\ x5YA & y5YA \\ x2YA & y2YA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16.5 \\ -0.3 & 13.5 \\ 0 & 15.5 \\ 0.3 & 13.5 \\ 0 & 16.5 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції YA є кінцева точка вектора реакції XA. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПYA для переносу вектора rYA в цю точку.

$$\Pi YA := \begin{pmatrix} x2XA & y2XA \\ x2XA & y2XA \\ x2XA & y2XA \\ x2XA & y2XA \\ x2XA & y2XA \\ x2XA & y2XA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.258 & 0 \\ 11.258 & 0 \\ 11.258 & 0 \\ 11.258 & 0 \\ 11.258 & 0 \\ 11.258 & 0 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VYA − вектор реакції YA.

$$\boldsymbol{VYA} := \boldsymbol{rYA} + \Pi\boldsymbol{YA} = \begin{pmatrix} 11.258 & 0 \\ 11.258 & 16.5 \\ 10.958 & 13.5 \\ 11.258 & 15.5 \\ 11.558 & 13.5 \\ 11.258 & 16.5 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції YB. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x1YB} := 0 \qquad \boldsymbol{x2YB} := 0$$

$$\boldsymbol{y1YB} := 0 \qquad \boldsymbol{y2YB} := \frac{\boldsymbol{YB}}{\boldsymbol{\mu}} = -3$$

$$\boldsymbol{x3YB} := \boldsymbol{x2YB} - 0.25 = -0.25 \qquad \boldsymbol{x4YB} := \boldsymbol{x2YB} = 0$$

$$\boldsymbol{y3YB} := \boldsymbol{y2YB} + 1.2 = -1.8 \qquad \boldsymbol{y4YB} := \boldsymbol{y3YB} - 0.2 = -2$$

$$\boldsymbol{x5YB} := -\boldsymbol{x3YB} = 0.25$$

$$\boldsymbol{y5YB} := \boldsymbol{y3YB} = -1.8$$

Отримуємо радіус-вектор rYB, який спрямовано з початку координат вздовж вісі Y.

$$\boldsymbol{rYB} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x1YB} & \boldsymbol{y1YB} \\ \boldsymbol{x2YB} & \boldsymbol{y2YB} \\ \boldsymbol{x3YB} & \boldsymbol{y3YB} \\ \boldsymbol{x4YB} & \boldsymbol{y4YB} \\ \boldsymbol{x5YB} & \boldsymbol{y5YB} \\ \boldsymbol{x2YB} & \boldsymbol{y2YB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ -0.25 & -1.8 \\ 0 & -2 \\ 0.25 & -1.8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції YB є кінцева точка вектора реакції YA. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПYB для переносу вектора rYB в цю точку.

$$\Pi\boldsymbol{YB} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x2XA} & \boldsymbol{y2YA} \\ \boldsymbol{x2XA} & \boldsymbol{y2YA} \\ \boldsymbol{x2XA} & \boldsymbol{y2YA} \\ \boldsymbol{x2XA} & \boldsymbol{y2YA} \\ \boldsymbol{x2XA} & \boldsymbol{y2YA} \\ \boldsymbol{x2XA} & \boldsymbol{y2YA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.258 & 16.5 \\ 11.258 & 16.5 \\ 11.258 & 16.5 \\ 11.258 & 16.5 \\ 11.258 & 16.5 \\ 11.258 & 16.5 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VYB − вектор реакції YB.

$$\boldsymbol{VYB} := \boldsymbol{rYB} + \Pi \boldsymbol{YB} = \begin{pmatrix} 11.258 & 16.5 \\ 11.258 & 19.5 \\ 11.508 & 18.3 \\ 11.258 & 18.5 \\ 11.008 & 18.3 \\ 11.258 & 19.5 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції XB. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x}1\boldsymbol{XB} := 0 \qquad \boldsymbol{x}2\boldsymbol{XB} := \frac{\boldsymbol{XB}}{\boldsymbol{\mu}} = -1.732$$

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{XB} := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{XB} := 0$$

$$\boldsymbol{x}3\boldsymbol{XB} := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{XB} + 0.5 = -1.232 \qquad \boldsymbol{x}4\boldsymbol{XB} := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{XB} = -1.732$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{XB} := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{XB} - 0.5 = -0.5 \qquad \boldsymbol{y}4\boldsymbol{XB} := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{XB} - 0.15 = -0.15$$

$$\boldsymbol{x}5\boldsymbol{XB} := \boldsymbol{x}3\boldsymbol{XB} = -1.232$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{XB} := \boldsymbol{y}3\boldsymbol{XB} = 0.5$$

Отримуємо радіус-вектор rXB, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$\boldsymbol{rXB} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}1\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{y}1\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{x}3\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{y}3\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{x}4\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{y}4\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{x}5\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{y}5\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{XB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1.732 & 0 \\ -1.232 & -0.5 \\ -1.732 & --0.15 \\ -1.232 & 0.5 \\ -1.732 & 0 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції XB є кінцева точка вектора реакції YB. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПХВ для переносу вектора rXB в цю точку.

$$\boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} := 11.258 \qquad \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} := 19.5$$

$$\Pi\boldsymbol{XB} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.258 & 19.5 \\ 11.258 & 19.5 \\ 11.258 & 19.5 \\ 11.258 & 19.5 \\ 11.258 & 19.5 \\ 11.258 & 19.5 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VXB − вектор реакції XB.

$$\boldsymbol{VXB} := \boldsymbol{rXB} + \Pi \boldsymbol{XB} = \begin{pmatrix} 11.258 & 19.5 \\ 9.526 & 19.5 \\ 10.026 & 19 \\ 9.526 & 19.35 \\ 10.026 & 20 \\ 9.526 & 19.5 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили Q2. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x}1\boldsymbol{Q}2 := 0 \qquad \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}2 := 0$$

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{Q}2 := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}2 := \frac{-\boldsymbol{Q}2}{\boldsymbol{\mu}} = -6$$

$$\boldsymbol{x}3\boldsymbol{Q}2 := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}2 - 0.25 = -0.25 \qquad \boldsymbol{x}4\boldsymbol{Q}2 := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}2 = 0$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{Q}2 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}2 + 1.2 = -4.8 \qquad \boldsymbol{y}4\boldsymbol{Q}2 := \boldsymbol{y}3\boldsymbol{Q}2 - 0.2 = -5$$

$$\boldsymbol{x}5\boldsymbol{Q}2 := -\boldsymbol{x}3\boldsymbol{Q}2 = 0.25$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{Q}2 := \boldsymbol{y}3\boldsymbol{Q}2 = -4.8$$

Отримуємо радіус-вектор rQ2, який спрямовано з початку координат вздовж вісі Y.

$$\boldsymbol{rQ}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}1\boldsymbol{Q}2 & \boldsymbol{y}1\boldsymbol{Q}2 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}2 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}2 \\ \boldsymbol{x}3\boldsymbol{Q}2 & \boldsymbol{y}3\boldsymbol{Q}2 \\ \boldsymbol{x}4\boldsymbol{Q}2 & \boldsymbol{y}4\boldsymbol{Q}2 \\ \boldsymbol{x}5\boldsymbol{Q}2 & \boldsymbol{y}5\boldsymbol{Q}2 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}2 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \\ -0.25 & -4.8 \\ 0 & -5 \\ 0.25 & -4.8 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили Q2 є кінцева точка вектора реакції XB. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПQ2 для переносу вектора rQ2 в цю точку.

$$\boldsymbol{X}2\boldsymbol{XB} := 9.526 \qquad \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{XB} := 19.5$$

$$\Pi\boldsymbol{Q}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}2\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{XB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{XB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{XB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.526 & 19.5 \\ 9.526 & 19.5 \\ 9.526 & 19.5 \\ 9.526 & 19.5 \\ 9.526 & 19.5 \\ 9.526 & 19.5 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VQ2 − вектор сили Q2.

$$\boldsymbol{VQ}2 := \boldsymbol{rQ}2 + \Pi\boldsymbol{Q}2 = \begin{pmatrix} 9.526 & 19.5 \\ 9.526 & 13.5 \\ 9.276 & 14.7 \\ 9.526 & 14.5 \\ 9.776 & 14.7 \\ 9.526 & 13.5 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили P. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x}1\boldsymbol{P} := 0 \qquad \boldsymbol{x}2\boldsymbol{P} := \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{\mu}} = 16.5$$

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{P} := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P} := \boldsymbol{y}1\boldsymbol{P} = 0$$

$$\boldsymbol{x}3\boldsymbol{P} := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{P} - 3 = 13.5 \qquad \boldsymbol{x}4\boldsymbol{P} := \boldsymbol{x}2\boldsymbol{P} - 2 = 14.5$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{P} := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P} + 0.5 = 0.5 \qquad \boldsymbol{y}4\boldsymbol{P} := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P} = 0$$

$$\boldsymbol{x}5\boldsymbol{P} := \boldsymbol{x}3\boldsymbol{P} = 13.5$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{P} := -\boldsymbol{y}3\boldsymbol{P} = -0.5$$

Отримуємо радіус-вектор rP, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$\boldsymbol{rP} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}1\boldsymbol{P} & \boldsymbol{y}1\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{P} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{x}3\boldsymbol{P} & \boldsymbol{y}3\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{x}4\boldsymbol{P} & \boldsymbol{y}4\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{x}5\boldsymbol{P} & \boldsymbol{y}5\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{P} & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16.5 & 0 \\ 13.5 & 0.5 \\ 14.5 & 0 \\ 13.5 & -0.5 \\ 16.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Силу P спрямовано до вісі X під кутом α. Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\boldsymbol{\Phi P} := -\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}\left(180^0 + \alpha\right) & \boldsymbol{sin}\left(180^0 + \alpha\right) \\ -\boldsymbol{sin}\left(180^0 + \alpha\right) & \boldsymbol{cos}\left(180^0 + \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.574 & 0.819 \\ -0.819 & -0.574 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили P є кінцева точка вектора сили Q2. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПР для переносу вектора rP в цю точку.

$$X2Q2 := 9.526 \qquad Y2Q2 := 13.5$$

$$\Pi P := \begin{pmatrix} X2Q2 & Y2Q2 \\ X2Q2 & Y2Q2 \\ X2Q2 & Y2Q2 \\ X2Q2 & Y2Q2 \\ X2Q2 & Y2Q2 \\ X2Q2 & Y2Q2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.526 & 13.5 \\ 9.526 & 13.5 \\ 9.526 & 13.5 \\ 9.526 & 13.5 \\ 9.526 & 13.5 \\ 9.526 & 13.5 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VP − вектор сили P.

$$VP := rP + \Pi P = \begin{pmatrix} 9.526 & 13.5 \\ 0.062 & -0.016 \\ 2.192 & 2.155 \\ 1.209 & 1.622 \\ 1.373 & 2.728 \\ 0.032 & -0.016 \end{pmatrix}$$

Далі будуємо силовий багатокутник для правої частини конструкції.

Будуємо вектор сили Q1. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1Q1 := 0 \qquad x2Q1 := x1Q1 = 0$$

$$y1Q1 := 0 \qquad y2Q1 := \frac{-Q1}{\mu} = -6$$

$$x3Q1 := x2Q1 - 0.25 = -0.25 \qquad x4Q1 := x2Q2 = 0$$

$$y3Q1 := y2Q1 + 1.2 = -4.8 \qquad y4Q1 := y3Q1 - 0.2 = -5$$

$$x5Q1 := -x3Q1 = 0.25$$

$$y5Q1 := y3Q1 = -4.8$$

Отримуємо вектор VQ1, який спрямовано з початку координат вздовж вісі Y.

$$VQ1 := \begin{pmatrix} x1Q1 & y1Q1 \\ x2Q1 & y2Q1 \\ x3Q1 & y3Q1 \\ x4Q1 & y4Q1 \\ x5Q1 & y5Q1 \\ x2Q1 & y2Q1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \\ -0.25 & -4.8 \\ 0 & -5 \\ 0.25 & -4.8 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції YB. Координати точок, з яких складається зображення цього вектора вже відомі, тому задамо лише матрицю паралельного переносу П1YB.

$$\Pi 1\boldsymbol{YB} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}1 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}1 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}1 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}1 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}1 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}1 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}1 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}1 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}1 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}1 \\ \boldsymbol{x}2\boldsymbol{Q}1 & \boldsymbol{y}2\boldsymbol{Q}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -6 \\ 0 & -6 \\ 0 & -6 \\ 0 & -6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VYB − вектор реакції YB.

$$\boldsymbol{VYB} := -\boldsymbol{rYB} + \Pi 1\boldsymbol{YB} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -9 \\ -0.25 & -7.8 \\ 0 & -8 \\ 0.25 & -7.8 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції XB. Координати точок, з яких складається зображення цього вектора вже відомі, тому задамо лише матрицю паралельного переносу П1XB.

$$\boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} := 0 \qquad \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} := -9$$

$$\Pi 1\boldsymbol{XB} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \\ \boldsymbol{X}2\boldsymbol{YB} & \boldsymbol{Y}2\boldsymbol{YB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 0 & -9 \\ 0 & -9 \\ 0 & -9 \\ 0 & -9 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VXB − вектор реакції XB.

$$\boldsymbol{VXB} := -\boldsymbol{rXB} + \Pi 1\boldsymbol{XB} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1.732 & -9 \\ 1.232 & -8.5 \\ 1.732 & -8.85 \\ 1.232 & -9.5 \\ 1.732 & -9 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції RC. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1RC := 0 \qquad x2RC := \frac{RC}{\mu} = 3.464$$

$$y1RC := 0 \qquad y2RC := y1RC = 0$$

$$x3RC := x2RC - 0.25 = 3.214 \qquad x4RC := x2RC - 0.15 = 3.314$$

$$y3RC := y2RC + 0.5 = 0.5 \qquad y4RC := y2RC = 0$$

$$x5RC := x3RC = 3.214$$

$$y5RC := -y3RC = -0.5$$

Отримуємо радіус-вектор rRC, який спрямовано з початку координат вздовж вісі X.

$$rRC := \begin{pmatrix} x1RC & y1RC \\ x2RC & y2RC \\ x3RC & y3RC \\ x4RC & y4RC \\ x5RC & y5RC \\ x2RC & y2RC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3.464 & 0 \\ 3.214 & 0.5 \\ 3.314 & 0 \\ 3.214 & -0.5 \\ 3.464 & 0 \end{pmatrix}$$

Реакцію RC спрямовано до вісі X під кутом β. Обертання відбувається проти годинникової стрілки.

$$\Phi RC := -\begin{pmatrix} cos\left(90^0 + \alpha\right) & sin\left(90^0 + \alpha\right) \\ -sin\left(90^0 + \alpha\right) & cos\left(90^0 + \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.866 \\ -0.866 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції RC є кінцева точка вектора реакції XB. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПRC для переносу вектора rRC в цю точку.

$$X2XB := 1.732 \qquad Y2XB := -9$$

$$\Pi RC := \begin{pmatrix} X2XB & Y2XB \\ X2XB & Y2XB \\ X2XB & Y2XB \\ X2XB & Y2XB \\ X2XB & Y2XB \\ X2XB & Y2XB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.732 & -9 \\ 1.732 & -9 \\ 1.732 & -9 \\ 1.732 & -9 \\ 1.732 & -9 \\ 1.732 & -9 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VRC − вектор сили RC.

$$\boldsymbol{VRC} := \boldsymbol{rRC} + \Pi\boldsymbol{RC} = \begin{pmatrix} 1.732 & -9 \\ -5.081\times10^{-5} & 0 \\ -0.308 & -6.467 \\ 0.075 & -6.13 \\ 0.558 & -5.967 \\ -5.081\times10^{-5} & 0 \end{pmatrix}$$

Додаток №4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду.

Спочатку побудуємо точки прикладення сил P1….P4. Задамо їх координати.

$$\begin{array}{llll}
\boldsymbol{O}: & \boldsymbol{y}0 := 0 & \boldsymbol{z}0 := 0 & \boldsymbol{x}0 := 0 \\
\boldsymbol{O}1: & \boldsymbol{y}1 := 0 & \boldsymbol{z}1 := 0 & \boldsymbol{x}1 := 0.4 \\
\boldsymbol{B}: & \boldsymbol{y}2 := 0.3 & \boldsymbol{z}2 := 0 & \boldsymbol{x}2 := 0.4 \\
\boldsymbol{A}: & \boldsymbol{y}3 := 0.3 & \boldsymbol{z}3 := 0.5 & \boldsymbol{x}3 := 0.4 \\
\boldsymbol{G}: & \boldsymbol{y}4 := 0 & \boldsymbol{z}4 := 0.5 & \boldsymbol{x}4 := 0.4 \\
\boldsymbol{E}: & \boldsymbol{y}5 := 0 & \boldsymbol{z}5 := 0.5 & \boldsymbol{x}5 := 0 \\
\boldsymbol{C}: & \boldsymbol{y}6 := 0.3 & \boldsymbol{z}6 := 0.5 & \boldsymbol{x}6 := 0 \\
\boldsymbol{D}: & \boldsymbol{y}7 := 0.3 & \boldsymbol{z}7 := 0 & \boldsymbol{x}7 := 0
\end{array}$$

Задамо загальну матрицю координат точок прикладення сил K. Вона складається з чотирьох стовбців, перші три з яких є координатами точок, а четвертий складається з одиниць.

$$\boldsymbol{K} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}0 & \boldsymbol{z}0 & \boldsymbol{x}0 & 1 \\ \boldsymbol{y}1 & \boldsymbol{z}1 & \boldsymbol{x}1 & 1 \\ \boldsymbol{y}2 & \boldsymbol{z}2 & \boldsymbol{x}2 & 1 \\ \boldsymbol{y}3 & \boldsymbol{z}3 & \boldsymbol{x}3 & 1 \\ \boldsymbol{y}4 & \boldsymbol{z}4 & \boldsymbol{x}4 & 1 \\ \boldsymbol{y}5 & \boldsymbol{z}5 & \boldsymbol{x}5 & 1 \\ \boldsymbol{y}6 & \boldsymbol{z}6 & \boldsymbol{x}6 & 1 \\ \boldsymbol{y}7 & \boldsymbol{z}7 & \boldsymbol{x}7 & 1 \\ \boldsymbol{y}2 & \boldsymbol{z}2 & \boldsymbol{x}8 & 1 \end{pmatrix}$$

Для побудови в системі Mathcad аксонометричної проекції розташування точок прикладення сил задамо кути повороту ψ1 та ψ2 матриці координат К відносно вісей y та z відповідно.

$$\psi 1 := 135^0 \qquad \psi 2 := 135^0$$

Для побудови аксонометричної проекції задамо матриці обертання Ψ1 та Ψ2 для обертання матриці координат К навколо координатних вісей *z* та *y* відповідно. Також задамо одиничну діагональну матрицю паралельного переносу П.

$$\Psi 1 := \begin{pmatrix} \cos(\psi 1) & 0 & -\sin(\psi 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\psi 1) & 0 & \cos(\psi 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi 2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi 2) & \sin(\psi 2) & 0 \\ 0 & -\sin(\psi 2) & \cos(\psi 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді матриця координат точок прикладення сил, розташованих в аксонометричній проекції матиме наступний винляд:

$$\boldsymbol{K}1 := \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\Psi}$$

Перейдемо до побудови векторів сил. Спочатку задамо масштабний коефіцієнт $\mu=5 \cdot 10^5$N.

Будуємо вектор сили Р1. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$y1P := 0 \qquad y2P1 := 0$$

$$z1P := 0 \qquad z2P1 := -\frac{|P1|}{\mu} = -0.2$$

$$y3P1 := y2P1 - 0.009 = -9\times10^{-3} \qquad y4P1 := y2P1 = 0$$

$$z3P1 := z2P1 + 0.04 = -0.16 \qquad z4P1 := z2P1 + 0.03 = -0.17$$

$$y5P1 := y2P1 + 0.009 = 9\times10^{-3}$$

$$z5P1 := z3P1 = -0.16$$

Отримуємо радіус-вектор rP1.

$$rP1 := \begin{pmatrix} y1P1 & z1P1 \\ y2P1 & z2P1 \\ y3P1 & z3P1 \\ y4P1 & z4P1 \\ y5P1 & z5P1 \\ y2P1 & z2P1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.2 \\ 9\times10^{-3} & -0.16 \\ 0 & -0.17 \\ -9\times10^{-3} & -0.16 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили P1 є точка A. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПР1 для переносу вектора rP1 в цю точку.

$$\Pi P1 := \begin{pmatrix} y3 & z3 \\ y3 & z3 \\ y3 & z3 \\ y3 & z3 \\ y3 & z3 \\ y3 & z3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VP1 − вектор сили P1.

$$VP1 := rP1 + \Pi P1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.315 & 0.36 \\ 0.3 & 0.34 \\ 0.285 & 0.36 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили P2. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{P}2 := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}2 := \frac{|\boldsymbol{P}2|}{\mu} = 0.1$$

$$z1\boldsymbol{P}2 := 0 \qquad z2\boldsymbol{P}2 := 0$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{P}2 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}2 - 0.03 = 0.07 \qquad \mathrm{y}4\boldsymbol{P}1 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}2 - 0.02 = 0.08$$

$$z3\boldsymbol{P}2 := z2\boldsymbol{P}2 - 0.009 = -9\times10^{-3} \qquad z4\boldsymbol{P}2 := z2\boldsymbol{P}2 = 0$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{P}2 := \boldsymbol{y}3\boldsymbol{P}2 = 0.07$$

$$z5\boldsymbol{P}2 := -z3\boldsymbol{P}1 = 9\times10^{-3}$$

Отримуємо радіус-вектор rP2.

$$\boldsymbol{rP}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}1\boldsymbol{P}2 & z1\boldsymbol{P}2 \\ \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}2 & z2\boldsymbol{P}2 \\ \boldsymbol{y}3\boldsymbol{P}2 & z3\boldsymbol{P}2 \\ \boldsymbol{y}4\boldsymbol{P}2 & z4\boldsymbol{P}2 \\ \boldsymbol{y}5\boldsymbol{P}2 & z5\boldsymbol{P}2 \\ \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}2 & z2\boldsymbol{P}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0.07 & -9\times10^{-3} \\ 0.08 & 0 \\ 0.07 & 9\times10^{-3} \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Силу P2 спрямовано до вісі x під кутом β. Задамо матрицю Ф1P2 для обертання вектора сили P2 навколо вісі y, а потім матрицю Ф2P2 − для обертання навколо вісі x. Обертання відбувається проти годинникової стрілки.

$$\Phi1\boldsymbol{P}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}\left(45^{0}\right) & \boldsymbol{sin}\left(45^{0}\right) \\ -\boldsymbol{sin}\left(45^{0}\right) & \boldsymbol{cos}\left(45^{0}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

$$\Phi2\boldsymbol{P}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}(\beta) & \boldsymbol{sin}(\beta) \\ -\boldsymbol{sin}(\beta) & \boldsymbol{cos}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.781 \\ -0.781 & 0.625 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили P2 є точка B. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПP2 для переносу оберненого вектора rP2 в цю точку.

$$\Pi\boldsymbol{P}2 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}2 & z2 \\ \boldsymbol{y}2 & z2 \\ \boldsymbol{y}2 & z2 \\ \boldsymbol{y}2 & z2 \\ \boldsymbol{y}2 & z2 \\ \boldsymbol{y}2 & z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VP2 − вектор сили P2.

$$\boldsymbol{VP}2 := \boldsymbol{rP}2\cdot\Phi1\boldsymbol{P}2\cdot\Phi2\boldsymbol{P}2+\Pi\boldsymbol{P}2=\begin{pmatrix} 0 & -0.354\\ 0.047 & -0.266\\ 0.041 & -0.296\\ 0.038 & -0.283\\ 0.025 & -0.283\\ 0.047 & -0.266 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили P3. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{P}3 := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}3 := \frac{|\boldsymbol{P}3|}{\mu} = 0.16$$

$$z1\boldsymbol{P}3 := 0 \qquad z2\boldsymbol{P}3 := 0$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{P}3 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}3 - 0.03 = 0.13 \qquad \mathrm{y}4\boldsymbol{P}3 := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}3 - 0.02 = 0.14$$

$$z3\boldsymbol{P}3 = z2\boldsymbol{P}3 - 0.009 = -9\times10^{-3} \qquad z4\boldsymbol{P}3 := z2\boldsymbol{P}3 = 0$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{P}3 := \boldsymbol{y}3\boldsymbol{P}3 = 0.13$$

$$z5\boldsymbol{P}3 := -z3\boldsymbol{P}3 = 9\times10^{-3}$$

Отримуємо радіус-вектор rP3.

$$\boldsymbol{rP}3 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}1\boldsymbol{P}3 & z1\boldsymbol{P}3\\ \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}3 & z2\boldsymbol{P}3\\ \boldsymbol{y}3\boldsymbol{P}3 & z3\boldsymbol{P}3\\ \boldsymbol{y}4\boldsymbol{P}3 & z4\boldsymbol{P}3\\ \boldsymbol{y}5\boldsymbol{P}3 & z5\boldsymbol{P}3\\ \boldsymbol{y}2\boldsymbol{P}3 & z2\boldsymbol{P}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0.16 & 0\\ 0.13 & -9\times10^{-3}\\ 0.14 & 0\\ 0.13 & 9\times10^{-3}\\ 0.16 & 0 \end{pmatrix}$$

Силу P3 спрямовано до вісі x під кутом γ. Задамо матрицю Ф1P3 для обертання вектора сили P3 навколо вісі y, а потім матрицю Ф2P3 − для обертання навколо вісі x. Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\Phi1\boldsymbol{P}3 := -\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}\left(135^0\right) & \boldsymbol{sin}\left(135^0\right)\\ -\boldsymbol{sin}\left(135^0\right) & \boldsymbol{cos}\left(135^0\right) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.707 & 0.707\\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

$$\Phi2\boldsymbol{P}3 := \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}(\gamma) & \boldsymbol{sin}(\gamma)\\ -\boldsymbol{sin}(\gamma) & \boldsymbol{cos}(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6\\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили Р3 є точка С. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПР3 для переносу оберненого вектора rР3 в цю точку.

$$\Pi \boldsymbol{P}3 := \begin{pmatrix} y6 & z6 \\ y6 & z6 \\ y6 & z6 \\ y6 & z6 \\ y6 & z6 \\ y6 & z6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VР3 − вектор сили Р3.

$$\boldsymbol{VP}3 := \boldsymbol{rP}3 \cdot \Phi 1\boldsymbol{P}3 \cdot \Phi 2\boldsymbol{P}3 + \Pi \boldsymbol{P}3 = \begin{pmatrix} 0.283 & 0.2 \\ 0.124 & 0.186 \\ 0.154 & 0.18 \\ 0.144 & 0.188 \\ 0.153 & 0.198 \\ 0.124 & 0.186 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили Р4. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$y1\boldsymbol{P}4 := 0 \qquad y2\boldsymbol{P}4 := \frac{|\boldsymbol{P}4|}{\mu} = 0.01$$

$$z1\boldsymbol{P}4 := 0 \qquad z2\boldsymbol{P}4 := 0$$

$$y3\boldsymbol{P}4 := y2\boldsymbol{P}4 - 0.02 = 9.6\times10^{-3} \qquad \mathrm{y}4\boldsymbol{P}4 := y2\boldsymbol{P}4 - 0.015 = 8.5\times10^{-3}$$

$$z3\boldsymbol{P}4 = z2\boldsymbol{P}4 - 0.009 = -9\times10^{-3} \qquad z4\boldsymbol{P}4 := z2\boldsymbol{P}4 = 0$$

$$y5\boldsymbol{P}4 := y3\boldsymbol{P}4 = 9.6\times10^{-3}$$

$$z5\boldsymbol{P}4 := -z3\boldsymbol{P}4 = 9\times10^{-3}$$

Отримуємо радіус-вектор rР4.

$$rP4 := \begin{pmatrix} y1P4 & z1P4 \\ y2P4 & z2P4 \\ y3P4 & z3P4 \\ y4P4 & z4P4 \\ y5P4 & z5P4 \\ y2P4 & z2P4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.01 & 0 \\ 9.6\times10^{-3} & -9\times10^{-3} \\ 8.5\times10^{-3} & 0 \\ -9.6\times10^{-3} & 9\times10^{-3} \\ 0.01 & 0 \end{pmatrix}$$

Силу Р4 спрямовано до вісі z під кутом α. Задамо матрицю ФР4 для обертання вектора сили Р4 навколо вісі z. Обертання відбувається проти годинникової стрілки.

$$\Phi P4 := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили Р4 є точка G. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПР4 для переносу оберненого вектора rP4 в цю точку.

$$\Pi P4 := \begin{pmatrix} y4 & z4 \\ y4 & z4 \\ y4 & z4 \\ y4 & z4 \\ y4 & z4 \\ y4 & z4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VP4 − вектор сили Р4.

$$VP4 := rP4 \cdot \Phi P4 + \Pi P4 = \begin{pmatrix} -0.212 & 0.15 \\ -0.161 & 0.119 \\ -0.173 & 0.137 \\ -0.173 & 0.127 \\ -0.182 & 0.122 \\ -0.161 & 0.119 \end{pmatrix}$$

Перейдемо до побудови вектору моменту. Спочатку задамо масштабний коефіцієнт $\mu1=4.5\cdot10^{2}N\cdot m$.

Будуємо вектор момента М. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$y1M := 0 \qquad y2M := -\frac{|M|}{\mu} = -0.111$$

$$z1M := 0 \qquad z2M := 0$$

$$y3M := y2M + 0.03 = -0.081 \qquad \mathrm{y}4M := y2M + 0.02 = 0.091$$

$$z3M = z2M - 0.009 = -9 \times 10^{-3} \qquad z4M := z2M = 0$$

$$y5M := y3M = -0.081$$

$$z5M := -z3M = 9 \times 10^{-3}$$

Отримуємо радіус-вектор rM.

$$rM := \begin{pmatrix} y1M & z1M \\ y2M & z2M \\ y3M & z3M \\ y4M & z4M \\ y5M & z5M \\ y2M & z2M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.111 & 0 \\ -0.081 & -9 \times 10^{-3} \\ -0.091 & 0 \\ -0.081 & 9 \times 10^{-3} \\ -0.111 & 0 \end{pmatrix}$$

Момент М спрямовано до вісі у під кутом γ. Задамо матрицю ФМ для обертання вектора момента М навколо вісі у, Обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

$$\Phi M := -\begin{pmatrix} cos(\gamma) & sin(\gamma) \\ -sin(\gamma) & cos(\gamma) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора момента М є точка перетину діагоналей. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПМ для переносу оберненого вектора rM в цю точку.

$$\Pi M := \begin{pmatrix} 0.03 & -0.204 \\ 0.03 & -0.204 \\ 0.03 & -0.204 \\ 0.03 & -0.204 \\ 0.03 & -0.204 \\ 0.03 & -0.204 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VM − вектор момента М.

$$\boldsymbol{VM} := \boldsymbol{rM}\cdot\Phi\boldsymbol{M} + \Pi\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0.03 & -0.204 \\ -0.081 & -0.206 \\ -0.051 & -0.196 \\ -0.061 & -0.206 \\ -0.051 & -0.214 \\ -0.081 & -0.206 \end{pmatrix}$$

Будуємо головний момент системи МО. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{y1MO} := 0 \qquad \boldsymbol{y2MO} := \frac{|\boldsymbol{MO}|}{\mu 1} = 0.132$$

$$\boldsymbol{z1MO} := 0 \qquad \boldsymbol{z2MO} := 0$$

$$\boldsymbol{y3MO} := \boldsymbol{y2MO} - 0.04 = 0.092 \qquad \mathrm{y}4\boldsymbol{MO} := \boldsymbol{y2MO} - 0.03 = 0.102$$

$$\boldsymbol{z3MO} = \boldsymbol{z2MO} - 0.009 = -9\times10^{-3} \qquad \boldsymbol{z4MO} := \boldsymbol{z2MO} = 0$$

$$\boldsymbol{y5MO} := \boldsymbol{y3MO} = 0.092$$

$$\boldsymbol{z5MO} := -\boldsymbol{z3MO} = 9\times10^{-3}$$

Отримуємо радіус-вектор rMO.

$$\boldsymbol{rMO} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y1MO} & \boldsymbol{z1MO} \\ \boldsymbol{y2MO} & \boldsymbol{z2MO} \\ \boldsymbol{y3MO} & \boldsymbol{z3MO} \\ \boldsymbol{y4MO} & \boldsymbol{z4MO} \\ \boldsymbol{y5MO} & \boldsymbol{z5MO} \\ \boldsymbol{y2MO} & \boldsymbol{z2MO} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.132 & 0 \\ 0.092 & -9\times10^{-3} \\ 0.102 & 0 \\ 0.092 & 9\times10^{-3} \\ 0.132 & 0 \end{pmatrix}$$

Головний момент МО спрямовано до вісі у під кутом ф1. Задамо матрицю ФМО для обертання головного вектора МО.

$$\Phi\boldsymbol{MO} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}(\phi 1) & \boldsymbol{sin}(\phi 1) \\ -\boldsymbol{sin}(\phi 1) & \boldsymbol{cos}(\phi 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.086 & -0.996 \\ 0.996 & -0.086 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VMO – головний момент системи.

$$\boldsymbol{VMO := rMO \cdot \Phi MO} = \begin{pmatrix} 0.071 & -3.553\times10^{-3} \\ 0.06 & -0.135 \\ 0.072 & -0.096 \\ 0.062 & -0.105 \\ 0.054 & -0.095 \\ 0.06 & -0.135 \end{pmatrix}$$

Будуємо головний вектор R. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{y}1\boldsymbol{R} := 0 \qquad \boldsymbol{y}2\boldsymbol{R} := \frac{|\boldsymbol{R}|}{\mu} = 0.171$$

$$\boldsymbol{z}1\boldsymbol{R} := 0 \qquad \boldsymbol{z}2\boldsymbol{R} := 0$$

$$\boldsymbol{y}3\boldsymbol{R} := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{R} - 0.04 = 0.131 \qquad \mathrm{y}4\boldsymbol{R} := \boldsymbol{y}2\boldsymbol{R} - 0.03 = 0.141$$

$$\boldsymbol{z}3\boldsymbol{R} = \boldsymbol{z}2\boldsymbol{R} - 0.009 = -9\times10^{-3} \qquad \boldsymbol{z}4\boldsymbol{R} := \boldsymbol{z}2\boldsymbol{R} = 0$$

$$\boldsymbol{y}5\boldsymbol{R} := \boldsymbol{y}3\boldsymbol{R} = 0.131$$

$$\boldsymbol{z}5\boldsymbol{R} := -\boldsymbol{z}3\boldsymbol{R} = 9\times10^{-3}$$

Отримуємо радіус-вектор rR.

$$\boldsymbol{rR} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}1\boldsymbol{R} & \boldsymbol{z}1\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{y}2\boldsymbol{R} & \boldsymbol{z}2\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{y}3\boldsymbol{R} & \boldsymbol{z}3\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{y}4\boldsymbol{R} & \boldsymbol{z}4\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{y}5\boldsymbol{R} & \boldsymbol{z}5\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{y}2\boldsymbol{R} & \boldsymbol{z}2\boldsymbol{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.171 & 0 \\ 0.131 & -9\times10^{-3} \\ 0.141 & 0 \\ 0.131 & 9\times10^{-3} \\ 0.171 & 0 \end{pmatrix}$$

Головний вектор R спрямовано до вісі y під кутом ф. Задамо матрицю ФR для обертання головного вектора R.

$$\boldsymbol{\Phi R} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}(\phi) & \boldsymbol{sin}(\phi) \\ -\boldsymbol{sin}(\phi) & \boldsymbol{cos}(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.296 & -0.955 \\ 0.955 & -0.296 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VR – головний вектор системи.

$$\boldsymbol{VR} := \boldsymbol{rR}\cdot\boldsymbol{\Phi R} = \begin{pmatrix} 0.071 & -3.553\times10^{-3} \\ 0.021 & -0.167 \\ 0.024 & -0.131 \\ 0.029 & -0.138 \\ 0.041 & -0.126 \\ 0.021 & -0.167 \end{pmatrix}$$

Додаток №5. Визначення реакцій опор та зусиль для рівноваги твердого тіла.

Для побудови векторів сил спочатку задамо масштабний коефіцієнт $\mu=10^3$N.

Будуємо вектор реакції XA. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x1XA} := 0 \qquad \boldsymbol{x2XA} := \frac{\boldsymbol{XA}}{\boldsymbol{\mu}} = 1.781$$

$$\boldsymbol{z1XA} := 0 \qquad \boldsymbol{z2XA} := 0$$

$$\boldsymbol{x3XA} := \boldsymbol{x2XA} - 0.5 = 1.281 \qquad \boldsymbol{x4XA} := \boldsymbol{x2XA} - 0.3 = 1.481$$

$$\boldsymbol{z3XA} := \boldsymbol{z2XA} + 0.25 = 0.25 \qquad \boldsymbol{z4XA} := \boldsymbol{z2XA} = 0$$

$$\boldsymbol{x5XA} := \boldsymbol{x3XA} = 1.281$$

$$\boldsymbol{z5XA} := -\boldsymbol{z3XA} = -0.25$$

Початковою точкою вектора реакції XA є точка A – точка початку координат.

Отримуємо вектор VXA − вектор реакції XA.

$$\boldsymbol{VXA} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x1XA} & \boldsymbol{z1XA} \\ \boldsymbol{x2XA} & \boldsymbol{z2XA} \\ \boldsymbol{x3XA} & \boldsymbol{z3XA} \\ \boldsymbol{x4XA} & \boldsymbol{z4XA} \\ \boldsymbol{x5XA} & \boldsymbol{z5XA} \\ \boldsymbol{x2XA} & \boldsymbol{z2XA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1.781 & 0 \\ 1.281 & 0.25 \\ 1.481 & 0 \\ 1.281 & -0.25 \\ 1.781 & 0 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції ZA. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1ZA := 0 \qquad x2ZA := 0$$

$$z1ZA := 0 \qquad z2ZA := \frac{ZA}{\mu} = 3.038$$

$$x3ZA := x2ZA - 0.2 = -0.2 \qquad x4ZA := x2ZA = 0$$

$$z3ZA := z2ZA - 0.9 = 2.138 \qquad z4ZA := z2ZA - 0.4 = 2.638$$

$$x5ZA := -x3ZA = 0.2$$

$$z5ZA := z3ZA = 2.138$$

Початковою точкою вектора реакції ZA є точка A – точка початку координат.

Отримуємо вектор VZA − вектор реакції ZA.

$$VZA := \begin{pmatrix} x1ZA & z1ZA \\ x2ZA & z2ZA \\ x3ZA & z3ZA \\ x4ZA & z4ZA \\ x5ZA & z5ZA \\ x2ZA & z2ZA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3.038 \\ -0.2 & 2.138 \\ 0 & 2.638 \\ 0.2 & 2.138 \\ 0 & 3.038 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції YA. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1YA := 0 \qquad x2YA := \frac{YA}{\mu} = -2$$

$$z1YA := 0 \qquad z2YA := 0$$

$$x3YA := x2YA + 0.5 = -1.5 \qquad x4YA := x2YA + 0.3 = 0.3$$

$$z3YA := z2YA + 0.25 = 0.25 \qquad z4YA := z2YA = 0$$

$$x5YA := x3YA = -1.5$$

$$z5ZA := -z3YA = -0.25$$

Отримуємо радіус-вектор rYA.

$$rYA := \begin{pmatrix} x1YA & z1YA \\ x2YA & z2YA \\ x3YA & z3YA \\ x4YA & z4YA \\ x5YA & z5YA \\ x2YA & z2YA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ -1.5 & 0.25 \\ -1.7 & 0 \\ -1.5 & -0.25 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції YA є точка A – точка початку координат. Вектор реакції YA паралелен вісі *y*, тобто введемо матрицю повороту ФYA.

$$\Phi YA := \begin{pmatrix} \cos\left(45^0\right) & \sin\left(45^0\right) \\ -\sin\left(45^0\right) & \cos\left(45^0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VYA − вектор реакції YA.

$$VYA := rYA \cdot \Phi YA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1.414 & -1.414 \\ -1.237 & -0.884 \\ -1.202 & -1.202 \\ -0.884 & -1.237 \\ -1.414 & -1.414 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили P. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1P := 0 \qquad x2P := \frac{P}{\mu} = 2$$

$$z1P := 0 \qquad z2P := 0$$

$$x3P := x2P - 0.5 = 1.5 \qquad x4P := x2P - 0.3 = 1.7$$

$$z3P := z2P + 0.25 = 0.25 \qquad z4P := z2P = 0$$

$$x5P := x3P = 1.5$$

$$z5P := -z3P = -0.25$$

Отримуємо радіус-вектор rP.

$$rP := \begin{pmatrix} x1P & z1P \\ x2P & z2P \\ x3P & z3P \\ x4P & z4P \\ x5P & z5P \\ x2P & z2P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1.5 & 0.25 \\ 1.7 & 0 \\ 1.5 & -0.25 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор сили P паралелен вісі *y*, тобто введемо матрицю повороту ФP.

$$\Phi P := \begin{pmatrix} \cos\left(45^0\right) & \sin\left(45^0\right) \\ -\sin\left(45^0\right) & \cos\left(45^0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили P є точка D. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПP для переносу оберненого вектора rP в цю точку.

$$X1P := \frac{a}{1m}\cdot \sin(\alpha) = 0.5 \qquad Z1P := \frac{a}{1m}\cdot \cos(\alpha) = 0.866$$

$$\Pi P := \begin{pmatrix} X1P & Z1P \\ X1P & Z1P \\ X1P & Z1P \\ X1P & Z1P \\ X1P & Z1P \\ X1P & Z1P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0.866 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VP − вектор сили P.

$$VP := rP\cdot \Phi P + \Pi P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.866 \\ 1.914 & 2.28 \\ 1.419 & 2.068 \\ 1.702 & 2.068 \\ 1.702 & 1.785 \\ 1.914 & 2.28 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили G. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1G := 0 \qquad x2G := \frac{-G}{\mu} = -8$$

$$z1G := 0 \qquad z2G := 0$$

$$x3G := x2G - 0.12 = -0.12 \qquad x4G := x2G = 0$$

$$z3G := z2G + 1 = -7 \qquad z4G := z2G + 0.5 = -7.5$$

$$x5G := -x3G = 0.12$$

$$z5G := z3G = 7$$

Отримуємо радіус-вектор rG.

$$rG := \begin{pmatrix} x1G & z1G \\ x2G & z2G \\ x3G & z3G \\ x4G & z4G \\ x5G & z5G \\ x2G & z2G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \\ -0.12 & -7 \\ 0 & -7.5 \\ 0.12 & -7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Вектор сили G паралелен вісі *z*.

Початковою точкою вектора сили G є точка O. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПG для переносу вектора rG в цю точку.

$$X1G := \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{1m}cos(\gamma)\cdot cos\left(45^0\right)\right) = 0.636$$

$$Z1G := \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{1m}cos(\gamma)\cdot sin\left(45^0\right)\right) = 0.636$$

$$\Pi G := \begin{pmatrix} X1G & Z1G \\ X1G & Z1G \\ X1G & Z1G \\ X1G & Z1G \\ X1G & Z1G \\ X1G & Z1G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.636 & 0.636 \\ 0.636 & 0.636 \\ 0.636 & 0.636 \\ 0.636 & 0.636 \\ 0.636 & 0.636 \\ 0.636 & 0.636 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VG − вектор сили G.

$$VG := rG + \Pi G = \begin{pmatrix} 0.636 & 0.636 \\ 0.636 & -7.364 \\ 0.516 & -6.364 \\ 0.636 & -6.864 \\ 0.756 & -6.364 \\ 0.636 & -7.364 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції XB. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1XB := 0 \qquad x2XB := \frac{XB}{\mu} = -5.673$$
$$z1XB := 0 \qquad z2XB := 0$$
$$x3XB := x2XB + 1.2 = -4.473 \qquad x4XB := x2XB + 0.6 = -5.073$$
$$z3XB := z2XB + 0.25 = 0.25 \qquad z4XB := z2XB = 0$$
$$x5XB := x3XB = 4.473$$
$$z5XB := -z3XB = -0.25$$

Отримуємо радіус-вектор rXB.

$$rXB := \begin{pmatrix} x1XB & z1XB \\ x2XB & z2XB \\ x3XB & z3XB \\ x4XB & z4XB \\ x5XB & z5XB \\ x2XB & z2XB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5.673 & 0 \\ -4.473 & 0.25 \\ -5.073 & 0 \\ -4.473 & -0.25 \\ -5.673 & 0 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції XB є точка B. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПXB для переносу вектора rXB в цю точку.

$$X1XB := \frac{b}{1m} \cdot sin\left(45^0\right) = 1.273 \qquad Z1G := \frac{b}{1m} \cdot cos\left(45^0\right) = 1.273$$

$$\Pi XB := \begin{pmatrix} X1XB & Z1XB \\ X1XB & Z1XB \\ X1XB & Z1XB \\ X1XB & Z1XB \\ X1XB & Z1XB \\ X1XB & Z1XB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VXB − вектор реакції XB.

$$VXB := rXB + \Pi XB = \begin{pmatrix} 1.273 & 1.273 \\ -4.4 & 1.273 \\ -3.2 & 1.473 \\ -3.8 & 1.273 \\ -3.2 & 1.073 \\ -4.4 & 1.273 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор реакції ZB. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$x1ZB := 0 \qquad x2ZB := 0$$

$$z1ZB := 0 \qquad z2ZB := \frac{ZB}{\mu} = 11.704$$

$$x3ZB := x2ZB + 0.15 = 0.15 \qquad x4ZB := x2ZB = 0$$

$$z3ZB := z2ZB - 1.8 = 9.904 \qquad z4ZB := z2ZB - 0.8 = 10.904$$

$$x5ZB := -x3ZB = -0.15$$

$$z5ZB := z3ZB = 9.904$$

Отримуємо радіус-вектор rZB.

$$rZB := \begin{pmatrix} x1ZB & z1ZB \\ x2ZB & z2ZB \\ x3ZB & z3ZB \\ x4ZB & z4ZB \\ x5ZB & z5ZB \\ x2ZB & z2ZB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 11.704 \\ 0.15 & 9.904 \\ 0 & 10.904 \\ -0.15 & 9.904 \\ 0 & 11.704 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора реакції ZB є точка B. Тому задамо матрицю паралельного переносу ΠZB для переносу вектора rZB в цю точку.

$$X1ZB := X1XB = 1.273 \qquad Z1ZB := Z1ZB = 1.273$$

$$\Pi ZB := \begin{pmatrix} X1ZB & Z1ZB \\ X1ZB & Z1ZB \\ X1ZB & Z1ZB \\ X1ZB & Z1ZB \\ X1ZB & Z1ZB \\ X1ZB & Z1ZB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 1.273 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VZB − вектор реакції ZB.

$$VZB := rZB + \Pi ZB = \begin{pmatrix} 1.273 & 1.273 \\ 1.273 & 12.977 \\ 1.423 & 11.177 \\ 1.273 & 12.177 \\ 1.123 & 11.177 \\ 1.273 & 12.273 \end{pmatrix}$$

Будуємо вектор сили S. Спочатку задамо точки, з яких складається зображення вектора.

$$\boldsymbol{x1S} := 0 \qquad \boldsymbol{x2S} := \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{\mu}} = -7.784$$

$$\boldsymbol{z1S} := 0 \qquad \boldsymbol{z2S} := 0$$

$$\boldsymbol{x3S} := \boldsymbol{x2S} + 1.8 = -5.984 \qquad \boldsymbol{x4S} := \boldsymbol{x2S} + 0.8 = -6.984$$

$$\boldsymbol{z3S} := \boldsymbol{z2S} - 0.15 = -0.15 \qquad \boldsymbol{z4S} := \boldsymbol{z2S} = 0$$

$$\boldsymbol{x5S} := \boldsymbol{x3S} = -5.984$$

$$\boldsymbol{z5S} := -\boldsymbol{z3S} = 0.15$$

Отримуємо радіус-вектор rS.

$$\boldsymbol{rS} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x1S} & \boldsymbol{z1S} \\ \boldsymbol{x2S} & \boldsymbol{z2S} \\ \boldsymbol{x3S} & \boldsymbol{z3S} \\ \boldsymbol{x4S} & \boldsymbol{z4S} \\ \boldsymbol{x5S} & \boldsymbol{z5S} \\ \boldsymbol{x2S} & \boldsymbol{z2S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7.784 & 0 \\ -5.984 & -0.15 \\ -6.984 & 0 \\ -5.984 & 0.15 \\ -7.784 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор сили S розташовано до вісі x під кутом β, тобто введемо матрицю повороту ФS.

$$\boldsymbol{\Phi S} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos}(\beta) & \boldsymbol{sin}(\beta) \\ -\boldsymbol{sin}(\beta) & \boldsymbol{cos}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.866 & 0.5 \\ -0.5 & -0.866 \end{pmatrix}$$

Початковою точкою вектора сили S є точка C. Тому задамо матрицю паралельного переносу ПS для переносу оберненого вектора rS в цю точку.

$$\boldsymbol{X1S} := \frac{\boldsymbol{c}}{1\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{cos}\left(45^0\right) = 1.456 \qquad \boldsymbol{Z1S} := \frac{\boldsymbol{c}}{1\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{sin}\left(45^0\right) = 1.456$$

$$\boldsymbol{\Pi S} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{X1S} & \boldsymbol{Z1S} \\ \boldsymbol{X1S} & \boldsymbol{Z1S} \\ \boldsymbol{X1S} & \boldsymbol{Z1S} \\ \boldsymbol{X1S} & \boldsymbol{Z1S} \\ \boldsymbol{X1S} & \boldsymbol{Z1S} \\ \boldsymbol{X1S} & \boldsymbol{Z1S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.456 & 1.456 \\ 1.456 & 1.456 \\ 1.456 & 1.456 \\ 1.456 & 1.456 \\ 1.456 & 1.456 \\ 1.456 & 1.456 \end{pmatrix}$$

Отримуємо вектор VS − вектор сили S.

$$\boldsymbol{VS} := \boldsymbol{rS}\cdot\Phi\boldsymbol{S} + \Pi\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1.456 & 1.456 \\ 8.198 & -2.436 \\ 6.714 & -1.406 \\ 7.505 & -2.036 \\ 6.564 & -1.666 \\ 8.198 & -2.436 \end{pmatrix}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики : в 2 т. [Текст] / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
2. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики. Статика и кинематика [Текст] / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – СПб.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.
3. **Павловський, М. А.** Теоретична механіка [Текст] / М. А. Павловський. – К.: Техніка, 2002.
4. **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для вузов по дисциплине "Теоретическая механика" [Текст] / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – СПб.: Лань, 2008. – 448 с.
5. **Яблонский, А. А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / А. А. Яблонский. –М.: КноРус, 2010. – 400 с.
6. **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики [Текст] / С. М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
7. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика. [Текст] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.
8. **Бертяев, В. Д.** Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум [Текст] / В. Д. Бертяев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
9. **Макаров, Е. А.** Инженерные расчёты в Mathcad 15. Учебный курс. [Текст] / Е. А. Макаров. – СПб.: Питер, 2011. – 400 с.
10. **Фролов, В. П.** Короткий довідник з теоретичної механіки (статика): методичні вказівки [Текст] / В. П. Фролов, М. Р. Ткач. – Миколаїв: НУК, 2012. – 50 с.
11 **Ткач, М. Р.** Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні завдання [Текст] / М. Р. Ткач, В. А. Вецало, П. О. Степанов. – Миколаїв: НУК, 2014. – 46 с.
12 **Ткач, М. Р.** Теоретическая механика. Статика. Иллюстративные материалы [Текст] / М. Р. Ткач, В. П. Фролов. – Николаев: НУК, 2011. – 90 с.

ЗМІСТ