

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**А. М. КУЗНЕЦОВ, Є. Ю. НЕДЕЛЬКО,
А. А. КАРПЕЧЕНКО, О. Л. ЧОРНИЙ**

**ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
В МОРЕПЛАВСТВІ ТА СУДНОБУДУВАННІ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою НУК



2026

УДК 51(075.8)

П75

Автори:

А. М. Кузнецов, канд. фіз.-мат. наук, проф. НУК;

Є. Ю. Неделько, канд. техн. наук, проф. НУК;

А. А. Карпеченко, канд. техн. наук, доцент кафедри матеріалознавства і технології металів;

О. Л. Чорний, зав. навч. кабінету кафедри фізики та математики

Рецензент Л. І. Коростильов, д-р техн. наук, проф. кафедри будівельної механіки і конструкції корпусу корабля НУК

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як навчальний посібник*

Прикладні задачі з вищої математики в мореплавстві та суднобудуванні : навчальний посібник / А. М. Кузнецов, Є. Ю. Неделько, А. А. Карпеченко, О. Л. Чорний. – Миколаїв : НУК, 2026. – 102 с.

Вміщено близько шістдесяти задач з вищої математики прикладного характеру, переважно пов'язаних з морським та річковим судноплавством. Посібник охоплює наступні розділи курсу вищої математики: «Диференціювання та інтегрування функції однієї змінної», «Диференціальні рівняння», «Теорія ймовірностей». Під час розв'язання запропонованих задач, окрім теорії та методів із вказаних розділів, використовуються також різноманітні фізико-механічні закони.

Призначено для студентів технічних спеціальностей. Матеріали посібника можна використовувати під час підготовки до практичних занять з вищої математики, роботи в математичних гуртках або самостійного вивчення відповідних дисциплін.

УДК 51(075.8)

© А. М. Кузнецов, Є. Ю. Неделько,

А. А. Карпеченко, О. Л. Чорний, 2026

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2026

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
§ 1. Диференціювання функцій однієї змінної.....	5
§ 2. Інтегрування функцій однієї змінної.....	30
§ 3. Диференціальні рівняння.....	44
§ 4. Теорія ймовірностей.....	83
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	100

ПЕРЕДМОВА

Задачі прикладного характеру відіграють суттєву роль у підготовці висококваліфікованих інженерів: вони оживляють навчальний процес і пробуджують інтерес до поглибленого вивчення матеріалу.

У навчальному посібнику наведено близько шістдесяти задач з вищої математики прикладного характеру, переважно пов'язаних з морським та річковим судноплавством. Посібник торкається тих галузей знань, з якими майбутній інженер може зустрітися у своїй практичній діяльності й охоплює наступні теми курсу вищої математики: «Диференціювання та інтегрування функції однієї змінної», «Диференціальні рівняння», «Теорія ймовірностей». Під час розв'язування запропонованих задач, окрім теорії і методів із вказаних розділів, використовуються також різноманітні фізико-механічні закони.

Матеріали посібника можна використовувати під час проведення практичних занять з вищої математики, роботи в математичних гуртках або самостійного вивчення відповідних дисциплін.

§ 1. ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЇ ЗМІННОЇ

1. Судно рухається зі швидкістю 8 км/год і кидає якір. Глибина моря в цій області рівна 1 км. Якір досягає дна, і ланцюг від нього йде по прямій. Як швидко скочується ланцюг із судна в момент, коли під водою знаходяться вже 2 км ланцюга?

Розв'язок

Нехай l – довжина ланцюга під водою, h – глибина моря, x – відстань по дну від точки розміщення якоря до точки, над якою в цей момент знаходиться судно (рис. 1).

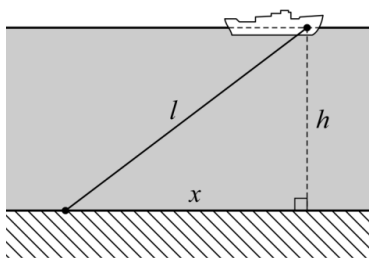


Рис. 1

Швидкість скочування ланцюга

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Із рисунка видно, що $l = \sqrt{x^2 + h^2} = l(x)$, у момент вимірювання швидкості скочування (тобто, при $l = 2$ км і $h = 1$ км) маємо $x = \sqrt{3}$ км.

$$\text{Тоді } \frac{dl}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}, \text{ у момент вимірювання } - \left. \frac{dl}{dx} \right|_{x=\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ураховуючи, що швидкість судна $\frac{dx}{dt} = 8$ км/год, знаходимо

шукану швидкість скочування ланцюга

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3} \text{ км/год.}$$

2. Пліт підтягують до берега за допомогою канату, який намотується на ворот зі швидкістю 3 м/хв. Визначити швидкість руху плоту в той момент, коли відстань від нього до берега рівна 25 м, якщо ворот розміщений на березі на 4 м вище поверхні води.

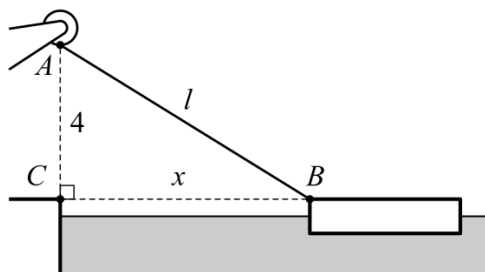


Рис. 2

Розв'язок

Нехай у момент часу t відстань від плоту до берега $CB = x$, а довжина канату від плоту до вороту – l (рис. 2).

Тоді із прямокутного $\triangle ABC$ маємо

$$x = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - 16}.$$

Так як $x = x(l)$ і $l = l(t)$, то швидкість руху плоту

$$v_n = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dl} \cdot \frac{dl}{dt},$$

де $\frac{dl}{dt} = 3$ м/хв – швидкість намотування канату на ворот.

Знаходимо похідну

$$\frac{dx}{dl} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - 16}}.$$

У момент, коли $x = 25$ м, маємо

$$25 = \sqrt{l^2 - 16} \Rightarrow l = \sqrt{641},$$

звідки

$$\left. \frac{dx}{dl} \right|_{l=\sqrt{641}} = \frac{\sqrt{641}}{25}.$$

Значить шукана швидкість плоту

$$v_{\text{п}} = \frac{\sqrt{641}}{25} \cdot 3 = \frac{3}{25} \sqrt{641} \approx 3,04 \text{ м/хв.}$$

3. Міноносець стоїть на якорі за 9 км від прямолінійного берега. З міноносця треба доставити посильного в табір, який розміщений на березі, за 15 км від найближчої до міноносця точки берега (табір розміщений у точці A , рис. 3).

Якщо посильний може долати пішки по 5 км/год, а на веслах по 4 км/год, то в якій точці він повинен висадитися на берег, щоб потрапити в табір за найкоротший час.

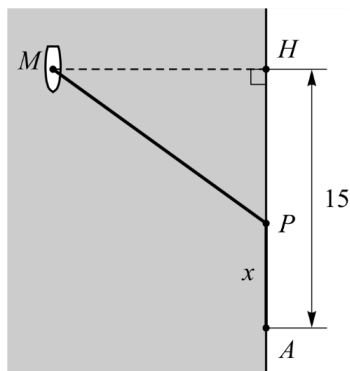


Рис. 3

Розв'язок

Нехай AH – лінія берега. Якщо посильний висадиться в точці P , то час його переміщення

$$t = \frac{MP}{4} + \frac{PA}{5}. \quad (1)$$

Позначимо $PA = x$, тоді з урахуванням того, що $PH = 15 - x$, $MH = 9$, а $\triangle PHM$ – прямокутний, рівність (1) набуває наступного вигляду:

$$t(x) = \frac{\sqrt{81 + (15 - x)^2}}{4} + \frac{x}{5}.$$

Дослідимо функцію $t = t(x)$ на екстремуми, в умовах даної задачі нас насамперед цікавлять точки мінімуму. Похідна

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-15 + x}{\sqrt{81 + (15 - x)^2}} + \frac{1}{5} = \frac{5(x - 15) + 4\sqrt{81 + (15 - x)^2}}{20\sqrt{81 + (15 - x)^2}}.$$

Стационарні точки

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} = 0 &\Rightarrow 5(15-x) = 4\sqrt{81+(15-x)^2}, \\ 25(15-x)^2 &= 16 \cdot (81 + (15-x)^2), \quad 9(15-x)^2 = 16 \cdot 81 \\ &\text{або } (x-15)^2 = 144,\end{aligned}$$

$$\text{звідки } x_{1,2} = 15 \pm \sqrt{144} = 15 \pm 12;$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 27.$$

Очевидно, що точки мінімуму, якщо вони існують, будуть розміщуватися на відрізку $x \in [0; 15]$, тобто точка x_2 не підходить. При переході через точку $x_1 = 3$ похідна міняє знак з «–» на «+», отже, $x = 3$ – точка мінімуму.

x	$[0; 3)$	$x = 3$	$(3; 15]$
$\frac{dt}{dx}$	–	0	+

Таким чином, щоб подолати шлях за найкоротший час, посильний повинен висадитися на берег за 3 км від табору.

4. Нерозмиваючу¹ швидкість v (м/с) руху води в судноплавному каналі розраховують за формулою

$$v = v_0 h^{0,2},$$

де v_0 – нерозмиваюча швидкість потоку на глибині 1 м, h – чисельне значення середньої глибини потоку.

¹ Нерозмиваюча швидкість руху води в каналі – це така швидкість, за якої виключається випадіння зважених у воді частинок (не відбувається замулення), а також виключається розмиття стінок каналу.

Знайти наближене значення нерозмиваючої швидкості потоку на глибині $h = 2,5$ м, поклавши $v_0 = 0,6$ м/с і замінивши приріст функції її диференціалом.

Розв'язок

Необхідно знайти наближене значення виразу $0,6 \cdot (2,5)^{0,2}$. Указане число можна вважати значенням функції $f(x) = 0,6 \cdot (2,5)^x$. Похідна від неї $f'(x) = 0,6 \cdot (2,5)^x \ln 2,5$. Скористаємося наближеною рівністю

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x,$$

поклавши $x_0 = 0$ і $\Delta x = 0,2$, одержимо

$$\begin{aligned} 0,6 \cdot (2,5)^{0,2} &= 0,6 \cdot 2,5^0 + 0,6 \cdot 2,5^0 \cdot \ln 2,5 \cdot 0,2 = \\ &= 0,6(1 + 0,916 \cdot 0,2) \approx 0,71. \end{aligned}$$

Таким чином, наближене значення нерозмиваючої швидкості на глибині 2,5 м при $v_0 = 0,6$ м/с наближено рівне 0,71 м/с.

5. На відстані 5 км від прямолінійного берега знаходиться маяк, ліхтар якого робить повний оберт упродовж 1 хв. Знайти швидкість, з якою пучок світла рухається вздовж берега в момент, коли він утворює з береговою лінією кут у 60° .

Розв'язок

Згідно з умовою задачі $HM = h = 5000$ м – відстань від маяка M до берегової лінії (рис. 4).

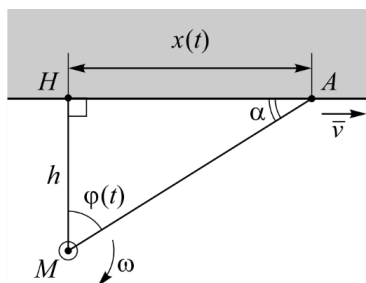


Рис. 4

Нехай HM – початкове положення пучка світла, що випромінює маяк, а MA – його положення через деякий час t , тоді

$HA = x(t)$ – шлях, що проходять промені світла за час t по лінії берега. Швидкість обертання ліхтаря на маяку постійна й рівна $\omega = 1 \frac{\text{об}}{\text{хв}} = 2\pi \frac{\text{рад}}{\text{хв}} = \frac{\pi}{30} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, тоді кут повороту променів відносно свого початкового положення за час t складає

$$\varphi(t) = \omega \cdot t = \frac{\pi t}{30} \text{ рад.} \quad (2)$$

Із $\triangle MHA$ маємо, що $HA = HM \operatorname{tg} \varphi$, звідки $x(t) = h \operatorname{tg} \frac{\pi t}{30}$ – закон руху променя по береговій лінії.

Знаходимо похідну

$$\frac{dx}{dt} = h \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi t}{30}} \cdot \frac{\pi}{30} = \frac{h\pi}{30 \cos^2 \frac{\pi t}{30}},$$

звідки $v(t) = \frac{h\pi}{30 \cos^2 \frac{\pi t}{30}}$ – закон зміни швидкості руху променя

вздовж берегової лінії.

У певний момент часу t_α значення кута $\alpha = 60^\circ$, тоді із $\triangle MHA$ одержуємо, що $\varphi(t_\alpha) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ рад. З урахуванням (2), маємо

$$\frac{\pi t_\alpha}{30} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_\alpha = 5 \text{ с.}$$

Таким чином, шукана швидкість

$$\begin{aligned} v(t_\alpha) &= \frac{h\pi}{30 \cos^2 \frac{\pi t_\alpha}{30}} = \frac{5000\pi}{30 \cos^2 \frac{5\pi}{30}} = \frac{500\pi}{3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2000\pi}{9} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \\ &= \frac{2\pi}{9} \frac{\text{км}}{\text{с}} = 800\pi \frac{\text{км}}{\text{год}}. \end{aligned}$$

6. *Задача про найвигіднішу швидкість судна.* Добові витрати під час плавання судна складаються з двох частин: постійної, рівної a грн, і змінної², що зростає пропорційно кубу швидкості. За якої швидкості v плавання судна буде найбільш економічним?

Розв'язок

Нехай судно проходить відстань S км і витрачає на це t діб. Тоді витрати R за час плавання будуть визначатися рівністю

$$R = at + ktv^3,$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Більша економічність судна означає, що ту ж саму відстань S воно буде проходити з меншими витратами R .

Поклавши $S = \text{const}$ і враховуючи, що $t = \frac{S}{v}$, одержимо:

$$R(v) = \frac{Sa}{v} + kSv^2 = S \left(kv^2 + \frac{a}{v} \right). \quad (3)$$

Таким чином, задача із знаходження найвигіднішої або найбільш економічної швидкості плавання зводиться до задачі на пошук найменшого значення функції $R(v)$ на інтервалі $v \in (0; +\infty)$.

Диференціюємо (3) по v :

$$\frac{dR}{dv} = S \left(2kv - \frac{a}{v^2} \right) = S \cdot \frac{2kv^3 - a}{v^2}.$$

З урахуванням $S > 0$, маємо

$$\frac{dR}{dv} = 0 \Rightarrow 2kv^3 - a = 0,$$

отже, $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ – стаціонарна точка.

² Постійна частина витрат відноситься до амортизації та утримання команди; змінна – до вартості палива.

Друга похідна

$$\frac{d^2 R}{dv^2} = S \left(2k + \frac{2a}{v^3} \right).$$

Ураховуючи, що

$$\left. \frac{d^2 R}{dv^2} \right|_{v=\sqrt[3]{a/2k}} = S \left(2k + \frac{2a \cdot 2k}{a} \right) = 6kS > 0,$$

знайдена стаціонарна точка буде точкою мінімуму.

Функція $R(v)$ неперервна на інтервалі $v \in (0; +\infty)$, і за наближення до його країв необмежено зростає:

$$\lim_{v \rightarrow 0+0} R(v) = \lim_{v \rightarrow 0+0} \left(kSv^2 + \frac{aS}{v} \right) = +\infty;$$

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} S(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(kSv^2 + \frac{aS}{v} \right) = +\infty,$$

а значить знайдена точка мінімуму і буде шуканим найменшим значенням функції $R(v)$.

Таким чином, найбільш економічна швидкість плавання за описаних умов обчислюється за формулою

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}.$$

До того ж витрати на подолання відстані S будуть складати

$$R_{\min} = S \left(k \sqrt[3]{\frac{a^2}{4k^2}} + a \cdot \sqrt[3]{\frac{2k}{a}} \right) = \frac{3}{2} S \sqrt[3]{2a^2 k}.$$

Наприклад, якщо покласти $a = 2765$ грн, $k = 0,1$,

$$\text{то } v = \sqrt[3]{\frac{2765}{2 \cdot 0,1}} = \sqrt[3]{13825} \approx 24,00 \text{ км/год} \approx 12,96 \text{ вузлів}^3.$$

³ Вузол – основна одиниця вимірювання швидкості в морській навігації, рівна швидкості рівномірного руху, за якого судно за одну годину проходить одну морську милю, рівна 1,852 км/год або приблизно 0,514 м/с.

7. Сигнал з корабля можна розрізнити в морі на відстані однієї милі. Корабель A йде на південь, долаючи 6 миль за годину, і в даний час знаходиться за 5 миль на захід від корабля B , який іде на захід зі швидкістю 7 миль на годину. Чи будуть кораблі на відстані, достатній для прийому сигналу?

Розв'язок

За умовою задачі $AB = 5$ миль (рис. 5). За час t корабель із A пройде шлях $AA_1 = v_A \cdot t = 6t$; корабель із B – шлях $BB_1 = v_B \cdot t = 7t$. Тоді відстань $AB_1 = 7t - 5$.

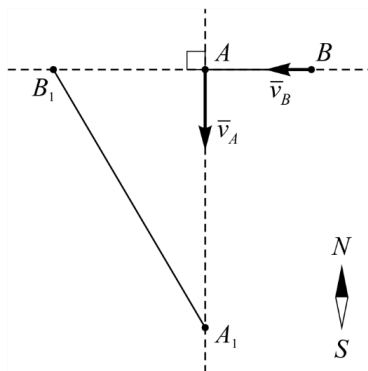


Рис. 5

Нехай $A_1B_1 = r$, тоді $r^2 = (7t - 5)^2 + 36t^2$, звідки

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(7t - 5)^2 + 36t^2} = \\ &= \sqrt{49t^2 - 70t + 25 + 36t^2} = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}. \end{aligned}$$

Диференціюючи цей вираз по t , одержимо наступне:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{170t - 70}{2\sqrt{85t^2 - 70t + 25}} = \frac{85t - 35}{\sqrt{85t^2 - 70t + 25}}.$$

Рівність $\frac{dr}{dt} = 0$ виконується при $85t - 35 = 0$, звідки випливає, що $t_0 = \frac{35}{85} = \frac{7}{17}$ – стаціонарна точка.

Так як $85t^2 - 70t + 25 > 0$ за будь-яких дійсних t , то похідна також існує за будь-яких дійсних t .

Таким чином, функція $r(t)$ має тільки одну критичну точку $t_0 = \frac{7}{17}$.

Визначимо знаки похідної до і після неї, для цього запишемо похідну у наступному вигляді:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{85\left(t - \frac{7}{17}\right)}{\sqrt{85t^2 - 70t + 25}}.$$

Так як $\sqrt{85t^2 - 70t + 25} > 0$ за будь-яких дійсних t , то знак похідної визначається виключно множником $\left(t - \frac{7}{17}\right)$. Маємо, $\frac{dr}{dt} < 0$ при $t < \frac{7}{17}$ і $\frac{dr}{dt} > 0$ при $t > \frac{7}{17}$. Оскільки при переході через критичну точку похідна змінює знак з «-» на «+», то t_0 – точка мінімуму.

Відстань між кораблями в момент

$$\begin{aligned} t_{\min} &= \frac{7}{17} \approx 0,41 \text{ год} \approx 24,7 \text{ хв}, \\ r_{\min} &= r(t_{\min}) = \sqrt{85 \cdot \frac{49}{289} - 70 \cdot \frac{7}{17} + 25} = \\ &= \sqrt{\frac{4165 - 8330 + 7225}{289}} = \sqrt{\frac{3060}{289}} \approx 3,25 \text{ милі}. \end{aligned}$$

Кораблі не будуть знаходитися на відстані достатній для передачі сигналу, так як найменша можлива відстань між ними буде складати приблизно 3,25 милі.

8. Постачання острова A відбувається через залізничну станцію B . Від прямої берегової лінії острів віддалений на відстань a км, а залізнична станція на відстань b км (рис. 6). Відстань між основами перпендикулярів, проведених до берегової лінії через точки A і B , рівна c км. Перевезення однієї тонни вантажів на відстань в один кілометр по суші коштує m грн,

а по морю n грн ($n < m$). Де треба побудувати порт, щоб перевезення вантажів було найдешевшим?

Розв'язок

Нехай D – положення порту, $B_1D = x$, тоді $DA_1 = c - x$ і довжина перевезення вантажу по суші $BD = \sqrt{b^2 + x^2}$, а по морю $AD = \sqrt{a^2 + (c - x)^2}$. Вартість перевезення

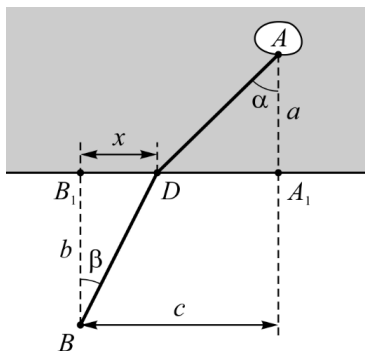


Рис. 6

$$S = m \cdot |BD| + n \cdot |AD| = m\sqrt{b^2 + x^2} + n\sqrt{a^2 + (c - x)^2} = S(x).$$

Дослідимо функцію $S(x)$ на екстремум:

$$S'(x) = \frac{mx}{\sqrt{b^2 + x^2}} - \frac{n(c - x)}{\sqrt{a^2 + (c - x)^2}}.$$

Якщо $S'(x) = 0$, то

$$\frac{mx}{\sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{n(c - x)}{\sqrt{a^2 + (c - x)^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} : \frac{c - x}{\sqrt{a^2 + (c - x)^2}} = \frac{n}{m},$$

але

$$\frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} = \sin \beta, \quad \frac{c - x}{\sqrt{a^2 + (c - x)^2}} = \sin \alpha.$$

Значить, порт D треба розмістити так, щоб виконувалась рівність:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{n}{m} \quad \text{або} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{m}{n}.$$

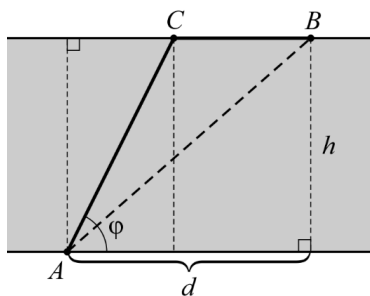


Рис. 7

час. Ширина річки – h , відстань між пунктами A і B (уздовж берега) – d .

Розв'язок

Нехай v – швидкість руху по воді, тоді час руху по ломаній ACB (рис. 7):

$$t = \frac{|AC|}{v} + \frac{|CB|}{kv} = \frac{h}{v \sin \varphi} + \frac{d - h \operatorname{ctg} \varphi}{kv} = t(\varphi).$$

Проаналізувавши умови задачі, приходимо до висновку, що достатньо розглянути значення кута із відрізка $\left[\arctg \frac{h}{d}; \frac{\pi}{2} \right]$. Права границя цього відрізка відповідає випадку, коли посильний переправляється через річку перпендикулярно руслу (тобто, $AC \perp CB$), а ліва – коли він перетинає річку по прямій AB . Останні значення кута φ або не мають змісту в умовах задачі (наприклад, значення $\varphi \leq 0$ чи $\varphi \geq \pi$), або, очевидно, не є оптимальним її розв'язком.

Таким чином, задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $t(\varphi)$ на відрізку $\varphi \in \left[\arctg \frac{h}{d}; \frac{\pi}{2} \right]$. Шукаємо похідну та критичні точки:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{h}{v} \left(-\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) + \frac{1}{kv} \cdot \frac{h}{\sin^2 \varphi} = \frac{h}{v} \cdot \frac{1 - k \cos \varphi}{\sin^2 \varphi};$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = 0, \text{ якщо } 1 - k \cos \varphi = 0, \text{ звідки } \cos \varphi = \frac{1}{k} \text{ і } \varphi = \arccos \frac{1}{k};$$

$$\frac{dt}{d\varphi} \text{ не існує в точках } \varphi = \pi n \text{ (} n \in Z \text{), які не потрапляють}$$

у відрізок, який нас цікавить.

Таким чином, єдина критична точка – $\varphi = \arccos \frac{1}{k}$.

Друга похідна

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\varphi^2} &= \frac{h}{v} \cdot \frac{-k(-\sin \varphi) \cdot \sin^2 \varphi - (1 - k \cos \varphi) \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^4 \varphi} = \\ &= \frac{h}{v} \cdot \frac{k \sin^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 2k \cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} = \frac{h}{v} \cdot \frac{k \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + k}{\sin^3 \varphi}. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^2 t}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\arccos(1/k)} = \frac{h}{v} \cdot \frac{k \cdot \frac{1}{k^2} - 2 \cdot \frac{1}{k} + k}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} \right)^3} = \frac{h}{v} \cdot \frac{k - \frac{1}{k}}{\left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}} =$$

$$= \frac{h}{v} \cdot \frac{\frac{k^2 - 1}{k}}{\frac{k^2 - 1}{k^2} \sqrt{\frac{k^2 - 1}{k}}} = \frac{h}{v} \cdot \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - 1}} > 0,$$

звідки випливає, що знайдена критична точка є точкою мінімуму.

Розглянемо, у яких випадках посильний повинен висаджуватися на берег. Кут напряду на пункт B можна записати як

$$\varphi = \operatorname{arcctg} \frac{d}{h}, \text{ тоді}$$

$$\operatorname{arcctg} \frac{d}{h} = \arccos \frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} = \cos \left(\operatorname{arcctg} \frac{d}{h} \right) = \cos \left(\arccos \frac{d/h}{\sqrt{1 + d^2/h^2}} \right) = \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}},$$

звідки,

$$k = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{d}.$$

Тобто, якщо значення k потрапляють у півінтервал $\left(0; \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{d}\right]$, то посильному вигідніше пливати одразу в пункт B , а якщо – у півінтервал $\left[\frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{d}; +\infty\right)$, то йому краще висадитися на берег, перетнувши річку під кутом $\varphi = \arccos \frac{1}{k}$.

Також для вибору кута φ можна просто взяти більшу з величин – $\arccos \frac{1}{k}$ і $\arctg \frac{h}{d}$.

Для прикладу можна використати дані із задачі 3, де $h = 9$ км, $d = 15$ км, $CB = 3$ км, $k = 1,25$, тоді

$$\varphi_1 = \arccos \frac{1}{1,25} = \arccos 0,8 \approx 37^\circ; \quad \varphi_2 = \arctg \frac{9}{15} = \arctg 0,6 \approx 31^\circ.$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{81+144}}{4} + \frac{3}{5} = 4,35 \text{ год}; \quad t_2 = \frac{\sqrt{81+225}}{4} \approx 4,37 \text{ год}.$$

Тобто, за вказаних початкових умов, посильному вигідніше подолати частину шляху по берегу.

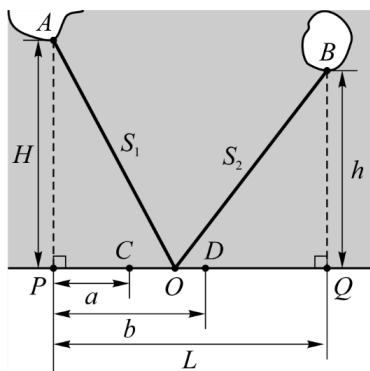


Рис. 8

10. Катеру необхідно переправити партію вантажу з острова A на берег PQ , потім прийняти на березі наступну партію і доставити її на острів B . Здачу та прийом вантажу можна виконати у будь-якій точці ділянки берега CD (рис. 8).

Знайти найкоротший шлях катера $S=S_1+S_2$, якщо $a=1$ км, $b=2$ км, $H=2,5$ км, $h=1,5$ км, $L=4$ км.

Розв'язок

Припустимо, що катер припливає в точку O ділянки берега CD . Нехай $CO=x$, тоді $PO=1+x$, $OQ=4-(1+x)=3-x$.

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \sqrt{H^2 + PO^2} + \sqrt{h^2 + OQ^2} = \\ &= \sqrt{6,25 + (1+x)^2} + \sqrt{2,25 + (3-x)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 7,25} + \sqrt{x^2 - 6x + 11,25} = S(x). \end{aligned}$$

Знайдемо похідну від $S(x)$:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+7,25}} + \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+11,25}} = \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+7,25}} + \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+11,25}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+7,25}} = \frac{3-x}{\sqrt{x^2-6x+11,25}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+7,25} = \frac{(3-x)^2}{x^2-6x+11,25}; \end{aligned}$$

$$(x+1)^2(x^2-6x+11,25) = (3-x)^2(x^2+2x+7,25);$$

$$(x+1)^2((x-3)^2+2,25) = (3-x)^2((x+1)^2+6,25);$$

$$(x+1)^2(x-3)^2 + (x+1)^2 \cdot 2,25 = (3-x)^2(x+1)^2 + (3-x)^2 6,25;$$

$$(x+1)^2 \cdot 2,25 = (3-x)^2 6,25;$$

$$2,25x^2 + 4,5x + 2,25 = 56,25 - 37,5x + 6,25x^2;$$

$$4x^2 - 42x + 54 = 0 \text{ або } 2x^2 - 21x + 27 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 216}}{4} = \frac{21 \pm 15}{4}; \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 1,5.$$

Ураховуючи, що $x \in [0; 1]$ і жоден із коренів не потрапляє в даний інтервал, обчислюємо $S(x)$ на кінцях відрізка:

$$S(0) = \sqrt{6,25 + 1} + \sqrt{2,25 + 4} \approx 5,19;$$

$$S(1) = \sqrt{6,25 + 4} + \sqrt{1 + 4} \approx 5,44.$$

Отже, шлях катера буде мінімальним, якщо він для задачі та прийому вантажу прибуде в точку C .

11. Канал, що підводить воду до турбіни, має в перерізі форму рівнобедреної трапеції. Площа його перерізу S . Визначити гідравлічно найвигіднішу форму перерізу.

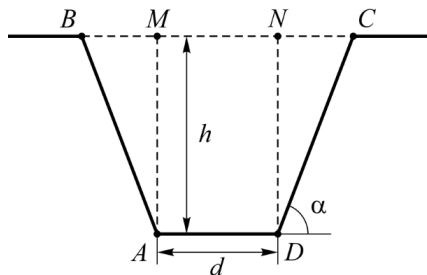


Рис. 9

Розв'язок

Гідравлічно найвигіднішою формою перерізу буде така форма, за якої змочений периметр – найменший.

Згідно з рис. 9

$$BC = d + 2h \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$S = (d + h \operatorname{ctg} \alpha) \cdot h,$$

$$d = \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg} \alpha.$$

Змочений периметр

$$P = d + 2AB = d + \frac{2h}{\sin \alpha} = \frac{S}{h} + \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot h.$$

Знаходимо похідну і стаціонарні точки:

$$P'_\alpha = \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) h;$$

$$P'_\alpha = 0 \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

α	$\alpha < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\alpha > \frac{\pi}{3}$
P'_α	–	0	+
P	↘	min	↗

Тобто, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ досягається мінімум P .

$$P'_h = -\frac{S}{h^2} + \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad P'_h = 0 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{S \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}} \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{3}} = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}.$$

Таким чином, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ форма каналу буде гідравлічно найвигіднішою, глибина каналу – $h = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$.

12. Переріз зрошувального каналу має форму рівнобічної трапеції, бокові сторони якої рівні меншій основі. За якого куту нахилу бокових сторін цієї трапеції переріз каналу буде мати найбільшу площу?

Розв'язок

За умовою: $AD = BC = AB$.

Нехай $AB = a$, тоді $BH = a \cos \alpha$,
 $DC = a + 2a \cos \alpha$, $CH = a \sin \alpha$
 (рис. 10).

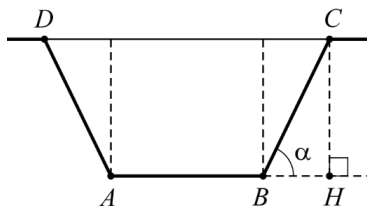


Рис. 10

Площа трапеції

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot CH = \frac{2a + 2a \cos \alpha}{2} \cdot a \sin \alpha =$$

$$= a^2 \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = S(\alpha).$$

$$S'(\alpha) = a^2 (\cos \alpha + \cos 2\alpha).$$

У стаціонарних точках $S'(0) = 0$, тобто $\cos \alpha + \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$

Очевидно, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, тому $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ і залишається, що
 $\cos \frac{3\alpha}{2} = 0$, звідки маємо $\frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ або $\alpha = \frac{\pi}{3}$ – єдина критична
 точка на відрізку $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція $S(\alpha)$ неперервна на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, тому найбільше значення вона буде брати або на краях указанного відрізка, або в критичних точках усередині нього. Обчислимо й порівняємо ці значення:

$$S(0) = a^2 \left(\sin 0 + \frac{1}{2} \sin (2 \cdot 0) \right) = 0;$$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) = a^2;$$

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} \right) = a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Таким чином, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ функція $S(\alpha)$ досягає свого найбільшого значення на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

13. До річки шириною a м побудовано під прямим кутом канал шириною b м. Якої найбільшої довжини судна можуть захопити в цей канал?

Розв'язок

Нехай l – довжина судна, як видно із рис. 11

$$l = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi}. \quad (4)$$

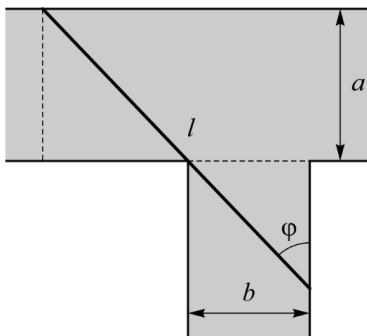


Рис. 11

Диференціюючи (4), одержимо:

$$l'_{\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{b \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{a \sin^3 \varphi - b \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi};$$

$$l'_{\varphi} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^3 \varphi = \frac{b}{a} \text{ і } \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right).$$

Знаходимо другу похідну:

$$l''_{\varphi} = a \frac{\cos^3 \varphi + 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi} + b \frac{\sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi}.$$

Легко переконатися, що при $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ друга похідна $l''_{\varphi} > 0$, тобто в точці $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ функція l бере мінімальне значення, яке і буде виступати як обмеження максимальної довжини судна.

Підставимо знайдене значення φ у (4), скориставшись наступними співвідношеннями:

$$\operatorname{arctg} \alpha = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Тоді

$$\cos \varphi = \cos \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/3} \right) = \cos \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^{2/3}}} \right) = \frac{a^{1/3}}{\left(a^{2/3} + b^{2/3} \right)^{1/2}};$$

$$\sin \varphi = \sin \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/3} \right) = \sin \left(\arcsin \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^{1/3}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^{2/3}}} \right) = \frac{b^{1/3}}{\left(a^{2/3} + b^{2/3} \right)^{1/2}};$$

$$l_{\max} = a^{2/3} \left(a^{2/3} + b^{2/3} \right)^{1/2} + b^{2/3} \left(a^{2/3} + b^{2/3} \right)^{1/2} = \underline{\left(a^{2/3} + b^{2/3} \right)^{3/2}}.$$

14. Корабель знаходиться в пункті O ; у пункті A , за 30 миль на північ від O , і в пункті B , за 30 миль на схід від O , – ще по кораблю. Усі кораблі повинні прибути в пункт P , що лежить на північний-схід від O . Визначити цей пункт таким чином, щоб відстань, пройдена всіма кораблями, була найменшою.

Розв'язок

Введемо прямокутну декартову систему координат, у якої центр знаходиться в точці O , а координатні осі проходять через точки A і B (рис. 12). Координати заданих точок: $O(0;0)$, $A(0;30)$, $B(30;0)$, $P(x,y)$.

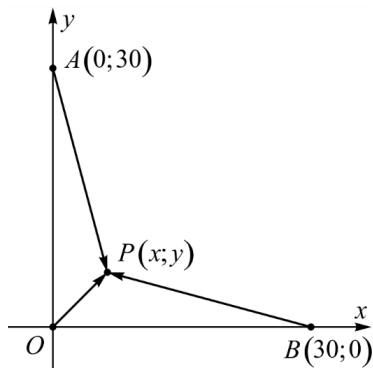


Рис. 12

Сумарна відстань, пройдена кораблями

$$S = AP + BP + OP = \\ = \sqrt{x^2 + (y-30)^2} + \sqrt{(x-30)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

У силу симетрії ситуації відносно бісектриси першого координатного кута, покладемо $x=y$. Тоді

$$S(x) = 2\sqrt{x^2 + (x-30)^2} + x\sqrt{2}.$$

$$S'(x) = \frac{4x-60}{\sqrt{x^2 + (x-30)^2}} + \sqrt{2}; \quad S'(0) = 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{60-4x}{\sqrt{x^2 + (x-30)^2}};$$

$$x^2 - 30x + 150 = 0, \quad x_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225 - 150} = 15 \pm 5\sqrt{3}.$$

$$x_1 = y_1 = 15 - 5\sqrt{3} \approx 6,34; \quad x_2 = y_2 = 15 + 5\sqrt{3} \approx 23,66$$

(друга точка – не підходить, залишаємо читачу можливість самому в цьому переконатися).

15. Два кораблі плывуть з постійними швидкостями u і v по прямим, що утворюють кут φ між собою. Визначити найменшу відстань між кораблями, якщо в деякий момент відстані від точки перетину шляхів до них були рівні a і b відповідно.

Розв'язок

У початковий момент часу $OA = a$, $OB = b$ (рис. 13). Через момент часу t перший корабель потрапить із A в A_1 і $OA_1 = ut + a$, а другий із B у B_1 і $OB_1 = vt + b$.

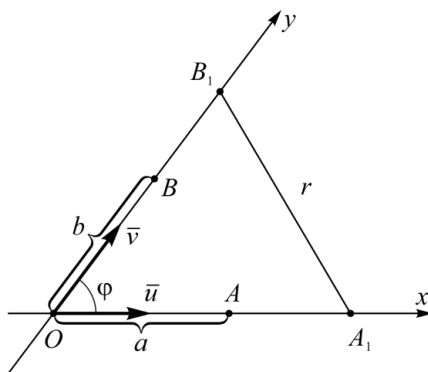


Рис. 13

За теоремою косинусів:

$$r^2 = (ut + a)^2 + (vt + b)^2 - 2(ut + a)(vt + b)\cos\varphi,$$

де $r = |A_1B_1|$ – відстань між кораблями в довільний момент t .

Так як $r = r(t)$, для знаходження найменшої відстані $r_{\min}$ необхідно дослідити вказану функцію на екстремум.

Виконаємо низку перетворень:

$$\begin{aligned} r^2 &= (ut + a)^2 + (vt + b)^2 - 2(ut + a)(vt + b)\cos\varphi = \\ &= u^2t^2 + 2aut + a^2 + v^2t^2 + 2bvt + b^2 - 2(uvt^2 + but + avt + ab)\cos\varphi = \\ &= (u^2 + v^2 - 2uv\cos\varphi)t^2 + \\ &+ 2(au + bv - (bu + av)\cos\varphi)t + (a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi). \end{aligned}$$

Уведемо нові позначення:

$$u^2 + v^2 - 2uv\cos\varphi = w \ (w \geq 0),$$

$$au + bv - (bu + av)\cos\varphi = p,$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = c \ (c \geq 0).$$

Тоді в нових позначеннях

$$r^2 = wt^2 + 2pt + c,$$

або, з урахуванням $r \geq 0$,

$$r = \sqrt{wt^2 + 2pt + c}. \quad (5)$$

Відмітимо, що

$$p = au + bv - (bu + av)\cos\varphi = (a - b\cos\varphi)u + (b - a\cos\varphi)v,$$

тоді

$$\begin{aligned} p^2 &= (a - b\cos\varphi)^2 u^2 + (b - a\cos\varphi)^2 v^2 + \\ &+ 2(a - b\cos\varphi)(b - a\cos\varphi)uv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) u^2 + \\
 &+ (b^2 - 2ab \cos \varphi + a^2 \cos^2 \varphi) v^2 + \\
 &+ 2(ab - a^2 \cos \varphi - b^2 \cos \varphi + ab \cos^2 \varphi) uv = \\
 &= (a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2 - b^2 \sin^2 \varphi) u^2 + \\
 &+ (b^2 - 2ab \cos \varphi + a^2 - a^2 \sin^2 \varphi) v^2 + \\
 &+ 2(ab - ab \cos^2 \varphi - a^2 \cos \varphi - b^2 \cos \varphi + 2ab \cos^2 \varphi) uv = \\
 &= (a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2) u^2 - u^2 b^2 \sin^2 \varphi + \\
 &+ (b^2 - 2ab \cos \varphi + a^2) v^2 - v^2 a^2 \sin^2 \varphi + \\
 &+ 2ab \sin^2 \varphi - 2uv \cos \varphi (a^2 + b^2 - 2ab \cos^2 \varphi) = \\
 &= (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi) (u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi) - \\
 &- (u^2 b^2 + v^2 a^2 - 2abuv) \sin^2 \varphi.
 \end{aligned}$$

Таким чином, виконуються рівності

$$p^2 = cw - (ub - va)^2 \sin^2 \varphi$$

або

$$p^2 - wc = -(ub - va)^2 \sin^2 \varphi. \quad (6)$$

Дослідимо функцію (5) на екстремуми, для цього знайдемо її похідну по t :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2wt + 2p}{2\sqrt{wt^2 + 2pt + c}} = \frac{wt + p}{\sqrt{wt^2 + 2pt + c}}. \quad (7)$$

Знайдемо стаціонарні точки:

$$\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{wt + p}{\sqrt{wt^2 + 2pt + c}} = 0 \Rightarrow wt + p = 0,$$

із останньої рівності маємо, що $t_0 = -\frac{p}{w}$ – критична (стаціонарна) точка.

Похідна не існує за $wt^2 + 2pt + c = 0$, однак

$$\begin{aligned} D &= 4p^2 - 4wc = 4(p^2 - wc) = [\text{ураховуючи (6)}] = \\ &= -4(ub - va)^2 \sin^2 \varphi < 0, \end{aligned}$$

(за виключенням випадків, коли $\sin \varphi = 0$ або $ub - va = 0$, однак вони будуть розглянуті в кінці задачі), а значить, це квадратне рівняння не має дійсних розв'язків. Відповідно, точки, у яких похідна (7) не існує, відсутні.

Дослідимо поведінку похідної при переході через критичну точку $t_0 = -\frac{p}{w}$, для цього запишемо $\frac{dr}{dt}$ у наступному вигляді:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{w \left(t + \frac{p}{w} \right)}{\sqrt{wt^2 + 2pt + c}}.$$

Так як $\sqrt{wt^2 + 2pt + c}$ і w – додатні, знак похідної співпадає зі знаком виразу $t + \frac{p}{w}$, а отже:

$$\frac{dr}{dt} < 0 \text{ при } t < -\frac{p}{w} \text{ і } \frac{dr}{dt} > 0 \text{ при } t > -\frac{p}{w}.$$

Так як при переході через критичну точку похідна міняє знак з «-» на «+», то вказана критична точка буде точкою мінімуму

$$t_{\min} = -\frac{p}{w} = \frac{au + bv - (bu + av) \cos \varphi}{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi}.$$

Тоді найменше значення функції

$$r_{\min} = r(t_{\min}) = \sqrt{w \left(-\frac{p}{w} \right)^2 + 2p \left(-\frac{p}{w} \right) + c} =$$

$$r_{\min} = r(t_{\min}) = \sqrt{w\left(-\frac{p}{w}\right)^2 + 2p\left(-\frac{p}{w}\right) + c} =$$

$$= [\text{ураховуючи (6)}] = \sqrt{\frac{(ub - va)^2 \sin^2 \varphi}{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi}} = \frac{|(ub - va) \sin \varphi|}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi}}.$$

Так як за умовою задачі $0 \leq \varphi \leq \pi$, то $\sin \varphi \geq 0$, а значить

$$r_{\min} = \frac{|ub - va| \cdot \sin \varphi}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi}}.$$

Відмічені раніше випадки $\sin \varphi = 0$ і $ub - va = 0$ також ураховуються даною формулою, при них $r_{\min} = 0$, єдиний виняток – ситуація, коли $\varphi = 0$ і $u = v$, тоді $r_{\min} = |b - a|$.

§ 2. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

16. Знайти силу тиску води на прямокутний шлюз, шириною $a = 10$ м і глибиною $b = 12$ м, якщо вода доходить до його верхнього краю.

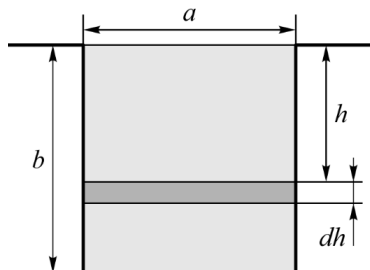


Рис. 14

Розв'язок

Згідно із законом Паскаля тиск p рідини з густиною ρ на горизонтальну область площею S , яка розміщена на глибині h , обчислюється за формулою

$$p = \rho ghS, \quad (8)$$

де $g = 9,8$ м/с² – прискорення вільного падіння.

Однак використовувати дану формулу безпосередньо для обчислення тиску на вертикальну область не можна, так як різні ділянки цієї області знаходяться на різних глибинах.

Для розв'язання даної задачі на деякій глибині h виділимо прямокутну ділянку шлюзу висотою dh (рис. 14) настільки вузьку, що в її межах тиск рідини можна вважати постійним, рівним тиску на глибині h . Тоді, згідно з (8), сила тиску на виділену ділянку буде рівна

$$dP = \rho ghS = \rho gha \, dh.$$

Так як h змінюється в межах від 0 до a , інтегруючи обидві частини останньої рівності, одержимо шукану силу тиску (тут густина води $\rho = 1000$ кг/м³)

$$P = ag\rho \int_0^b h dh = \frac{ag\rho \cdot h^2}{2} \Big|_0^b =$$

$$= \frac{ab^2 g\rho}{2} = \frac{10 \cdot 144 \cdot 9,8 \cdot 1000}{2} = 7\,056\,000 \text{ Н.}$$

17. Обчислити силу, з якою вода тисне на греблю, що має форму рівнобічної трапеції, верхня основа якої $a=6,4$ м, нижня $b=6,2$ м, а висота $h=3$ м.

Розв'язок

На деякій глибині y ($0 \leq y \leq h$) виділимо ділянку висотою dy (рис. 15).

Нехай ця ділянка буде настільки вузькою, що тиск рідини в її межах можна вважати постійним, рівним тиску на глибині y . Також за такої достатньо малої висоти ділянки її площу наближено можна вважати рівною площі прямокутника зі сторонами $|MK|$ і dy , тобто $dS \approx |MK| \cdot dy$.

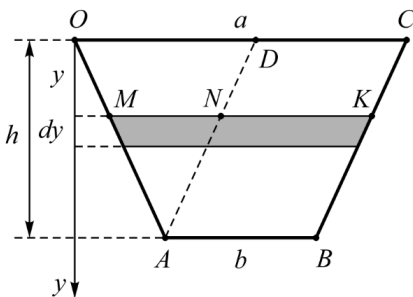


Рис. 15

Тоді сила тиску на виділений ділянку

$$dP = \rho g y \, dS = \rho g y \cdot |MK| \, dy, \quad (9)$$

(тут $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – густина води, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння).

Проведемо пряму AD паралельно стороні BC , тоді із подібних трикутників OAD і MAN маємо

$$\frac{a-b}{MN} = \frac{h}{h-y} \Rightarrow MN = \frac{(a-b)(h-y)}{h},$$

отже,

$$\begin{aligned} MK &= MN + NK = \frac{(a-b)(h-y)}{h} + b = \\ &= \frac{ah - bh - ay + by + bh}{h} = a + \frac{b-a}{h}y. \end{aligned}$$

Інтегруючи (9), одержимо

$$\begin{aligned} P &= \rho g \int_0^h \left(ay + \frac{b-a}{h}y^2 \right) dy = \\ &= \rho g \left(\frac{ay^2}{2} + \frac{(b-a)y^3}{3h} \right) \Big|_0^h = \rho g \left(\frac{ah^2}{2} + \frac{(b-a)h^2}{3} \right) = \\ &= \rho g \left(\frac{ah^2}{6} + \frac{bh^2}{3} \right) = \frac{\rho gh^2}{6} (a + 2b) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1000 \cdot 9,8 \cdot 9 \cdot 14,8 = 217\,560 \text{ Н}. \end{aligned}$$

18. Обчислити сповільнення моторного судна масою M , якщо вимкнення мотора відбулося в момент, коли швидкість його була рівна v_0 . Опір водного середовища $f(v) = \alpha v + \beta v^2$, де α і β – сталі. Обчислити відстань s , яку судно пройде від моменту вимкнення мотора.

Розв'язок

Нехай s – відстань, пройдена судном від моменту зупинки двигуна, а v – його швидкість.

Згідно із другим законом Ньютона рівняння руху судна буде мати наступний вигляд:

$$M \frac{dv}{dt} = -(\alpha v + \beta v^2),$$

але так як $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds}$, то його можна записати наступним чином:

$$Mv \frac{dv}{ds} = -(\alpha v + \beta v^2).$$

Із останнього рівняння виразимо диференціал пройденого шляху

$$ds = -\frac{Mv dv}{v(\alpha + \beta v)}.$$

Ураховуючи, що за час руху відстань s змінюється від 0 до s , а швидкість v – від v_0 до 0, інтегруємо:

$$\begin{aligned} \int_0^s ds &= -M \int_{v_0}^0 \frac{dv}{\alpha + \beta v}, \\ s &= -\frac{M}{\beta} (\ln(\alpha + \beta v)) \Big|_{v_0}^0 = -\frac{M}{\beta} (\ln \alpha - \ln(\alpha + \beta v_0)) = \\ &= \frac{M}{\beta} (\ln(\alpha + \beta v_0) - \ln \alpha) = \frac{M}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0 \right). \end{aligned}$$

19. Корабель масою 10^7 кг рухається зі швидкістю 16 м/с. Опір води пропорціональний квадрату швидкості корабля і рівний $3 \cdot 10^5$ Н за швидкості 1 м/с. Яку відстань пройде корабель, перш ніж швидкість його стане рівною 4 м/с? За який час корабель пройде цю відстань?

Розв'язок

За умовами задачі маса корабля $m = 10^7$ кг, початкова швидкість $v_0 = 16$ м/с, опір води задається співвідношенням $R = \alpha v^2$, також відомо, що $R|_{v=1 \text{ м/с}} = 3 \cdot 10^5$ Н. Унаслідок опору води швидкість корабля поступово знижується, і в певний момент складає $v_1 = 4$ м/с. Знайдемо пройдений кораблем шлях S і витрачений час T .

Коефіцієнт пропорційності α :

$$3 \cdot 10^5 = \alpha \cdot 1 \Rightarrow \alpha = 3 \cdot 10^5 \text{ і } R = 3 \cdot 10^5 v^2.$$

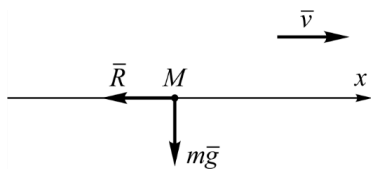


Рис. 16

Рівняння руху в проєкції на вісь Ox (рис. 16) набуває наступного вигляду:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -R_x \text{ або } 10^7 \frac{dv}{dt} = -3 \cdot 10^5 v^2, \Rightarrow 100 \frac{dv}{dt} = -3v^2. \quad (10)$$

Виразимо із (10) диференціал часу

$$dt = -\frac{100}{3} \cdot \frac{dv}{v^2}.$$

Коли час t змінюється від 0 до T , то швидкість v змінюється від 16 м/с до 4 м/с, тоді

$$\int_0^T dt = -\frac{100}{3} \int_{16}^4 \frac{dv}{v^2} \Rightarrow T = \frac{100}{3v} \Big|_{16}^4 = \frac{100}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{100}{16} = 6,25 \text{ с.}$$

З іншого боку, $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v \frac{dv}{dS}$, тоді (10) запишеться у наступному вигляді:

$$100v \frac{dv}{dS} = -3v^2 \text{ або } 100 \frac{dv}{dS} = -3v,$$

звідки диференціал пройденої відстані

$$dS = -\frac{100}{3} \frac{dv}{v}.$$

Інтегруємо:

$$\int_0^S dS = -\frac{100}{3} \int_{16}^4 \frac{dv}{v},$$

$$S = -\frac{100}{3} \ln v \Big|_{16}^4 = \frac{100}{3} (\ln 16 - \ln 4) = \frac{100}{3} \ln 4 \approx \frac{100}{3} \cdot 1,386 = 46,2 \text{ м.}$$

Таким чином, одержуємо, що перш ніж швидкість корабля зменшиться до 4 м/с, він пройде шлях у 46,2 м за час у 6,25 с.

20. Яку криву опише корабель, що йде під постійним курсовим кутом до географічного меридіану? Корабель взяти за точку, що рухається по поверхні земної кулі.

Розв'язок

Так як шукана крива буде повністю розміщуватися на поверхні сфери, то під час розв'язування цієї задачі буде зручно використати сферичну систему координат.

Сферичні координати точки M – це впорядкована трійка чисел (r, φ, θ) , де r – радіус, невід'ємна величина ($r \geq 0$), рівна відстані від точки M до початку координат O ; φ – довгота ($-\pi < \varphi \leq \pi$), менший з кутів між проєкцією відрізка OM на площину xOy і додатнім напрямом осі Ox ; θ – широта ($0 \leq \theta \leq \pi$), менший з кутів між відрізком OM і додатнім напрямом осі Oz (рис 17).

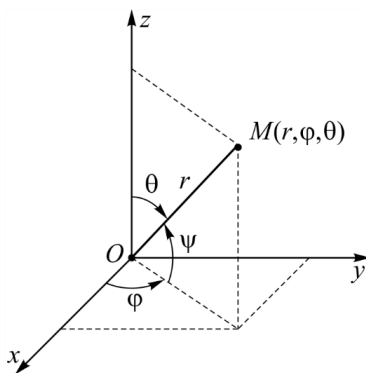


Рис. 17

Слід відмітити, що в навігації, картографії та інших науках, що займаються вивченням Землі, використовується поняття географічної широти ψ , яка пов'язана з кутом θ співвідношенням $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ (при цьому $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$).

Крива на поверхні обертання, що перетинає всі географічні меридіани під постійним кутом, називається *локсодрою* або

локсодромією (рис. 18). Так називають цю чудову криву в навігації⁴, у математиці вона відома як логарифмічна спіраль.

Виведемо рівняння цієї кривої. Задамо положення точки M на сфері довготою φ і широтою θ . Координатними лініями будуть $\varphi = \text{const}$ – меридіан, $\theta = \text{const}$ – паралельне екватору коло радіуса $r \sin \theta$ (рис. 19). Швидкість руху корабля $\vec{v}$ можна розкласти на дві складові: швидкість руху вздовж меридіана v_θ і швидкість руху вздовж паралелі v_φ ; у нашому випадку

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}; \quad v_\varphi = r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}. \quad (11)$$

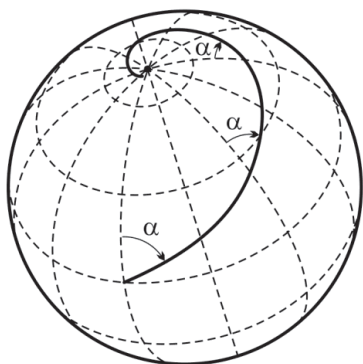


Рис. 18

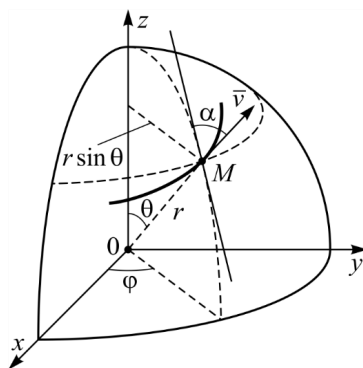


Рис. 19

⁴ Локсодрома не є найкоротшим шляхом між двома точками земної поверхні (за виключенням меридіанів і екватора), однак раніше вона часто використовувалась під час побудови маршрутів. Це пояснюється тим, що рухатися під постійним кутом до напрямку на Полярну зірку доволі просто і зручно. Після винайдення компаса мореплавці перешли на рух за «магнітними локсодромами», тобто на рух під постійним кутом до напрямку на магнітний полюс, що дало можливість виконувати рух у будь-яку погоду. Зараз, після появи приладів з достатніми обчислювальними потужностями, маршрути (особливо для дальніх рейсів) прокладають з використанням кривих найкоротшого шляху (ортодромій).

З іншого боку, проєкції швидкості $\bar{v}$ на координатні лінії

$$v_{\theta} = -v \cos \alpha ; v_{\varphi} = v \sin \alpha . \quad (12)$$

Із (11) маємо $\frac{v_{\varphi}}{v_{\theta}} = \frac{\sin \theta d\varphi}{d\theta}$, із (12) маємо $\frac{v_{\varphi}}{v_{\theta}} = -\operatorname{tg} \alpha$. Прирівнюючи праві частини рівностей, одержуємо рівняння $\sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} = -\operatorname{tg} \alpha$, звідки диференціал довготи

$$d\varphi = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{d\theta}{\sin \theta} .$$

Коли довгота φ змінюється від φ_0 до φ , широта θ змінюється від θ_0 до θ , тоді

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = -\operatorname{tg} \alpha \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} ,$$

звідки рівняння локсодромії у сферичних координатах

$$\varphi - \varphi_0 = -\operatorname{tg} \alpha \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right) .$$

У випадку використання географічної широти ψ (тобто, коли $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$), останнє рівняння набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= -\operatorname{tg} \alpha \left(\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi_0}{2} \right) \right), \\ \varphi - \varphi_0 &= -\operatorname{tg} \alpha \left(\ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) - \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\psi_0}{2} \right) \right), \\ \varphi - \varphi_0 &= \operatorname{tg} \alpha \left(\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi_0}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Рівняння (13) у навігації називають рівнянням локсодромії на кулі.

Відмітимо, що при $\alpha = 0$ або $\alpha = \pi$ одержуємо $\operatorname{tg} \alpha = 0$, звідки $\varphi = \varphi_0$. Тобто, рухаючись з такими значеннями кута α , довгота φ не міняється – локсодромія співпадає з меридіаном φ_0 .

Перепишемо рівняння (13) у наступному вигляді:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varphi - \varphi_0}{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi_0}{2} \right)}.$$

Тоді при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ або $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ одержуємо $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, а так як $\varphi = \varphi_0$ скінченна величина, то таке можливо тільки якщо знаменник дробу буде рівний нулю. Це можливо за умови $\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\psi_0}{2}$, звідки $\psi = \psi_0$. Таким чином, під час руху з указаними значеннями кута α широта ψ не змінюється, тобто локсодромія співпадає з паралеллю ψ_0 , коли $\psi_0 \neq 0$, і з екватором, коли $\psi_0 = 0$.

За всіх інших значеннях кута α локсодромія буде по спіралі наближатися до полюса, ніколи його не досягаючи.

21. Два відсіки судна мають форму паралелепіпедів, у яких площі основ $S_1 = S_2 = 100 \text{ м}^2$, початкова різниця рівнів $h = 25 \text{ м}$, площа перепускного отвору між відсіками $\omega = 0,5 \text{ м}^2$, коефіцієнт гідравлічного опору $\delta = 0,62$ (рис. 20). Знайти час, необхідний для встановлення однакових рівнів рідини у відсіках при відкритті отвору.

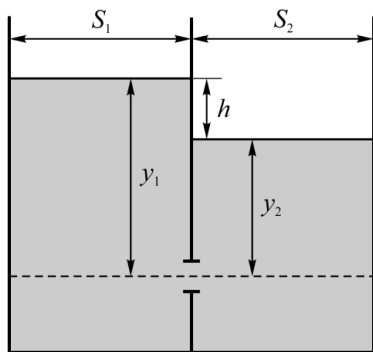


Рис. 20

Розв'язок

За час dt у першому відсіку рідина опуститься на величину dy_1 , а у другому – підніметься на dy_2 . Кількість рідини,

що втрачає перший відсік, рівна кількості рідини, яку одержує другий відсік, тобто

$$-S_1 dy_1 = S_2 dy_2.$$

Упродовж часу dt через отвір площею ω пройде об'єм рідини

$$\delta\omega\sqrt{2gh} = \delta\omega\sqrt{2g(y_1 - y_2)} dt,$$

тому

$$-S_1 dy_1 = \delta\omega\sqrt{2g(y_1 - y_2)} dt \text{ або } \frac{\delta\omega}{S_1}\sqrt{2g} dt = -\frac{dy_1}{\sqrt{y_1 - y_2}}.$$

Поклавши $y_1 - y_2 = u$, одержимо $du = dy_1 - dy_2 = \frac{S_1 + S_2}{S_2} dy_1$,

звідки $dy_1 = \frac{S_2 du}{S_1 + S_2}$; тоді $\frac{\delta\omega}{S_1}\sqrt{2g} dt = -\frac{S_2 du}{(S_1 + S_2)\sqrt{u}}$ або інтегруючи, одержимо

$$\frac{\delta\omega}{S_1}\sqrt{2g}\int_0^T dt = -\frac{S_2}{S_1 + S_2}\int_h^0 \frac{du}{\sqrt{u}} \Rightarrow T = \frac{S_1 S_2 \sqrt{2h}}{\delta\omega(S_1 + S_2)\sqrt{g}}.$$

Якщо вважати, що $S_1 = S_2 = S$, маємо

$$T = \frac{S^2 \sqrt{2h}}{\delta\omega \cdot 2S\sqrt{g}} = \frac{S\sqrt{h}}{\delta\omega\sqrt{2g}}.$$

Після підстановки значень

$$T = \frac{100\sqrt{2,5}}{0,5 \cdot 0,62 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5}} = 115,2 \text{ с} \approx 2 \text{ хв}.$$

22. Система протидії хитавиці на кораблі складається з двох заспокійливих цистерн, кожна з яких має висоту 4 м і площу основи 51 м². Вони установлені біля протилежних бортів і з'єднані круглою трубою діаметром 0,32 м. Якщо спочатку одна цистерна пуста, а друга наповнена водою, через який час вода буде знаходитися в них на одному рівні?

Розв'язок

У процесі розв'язання задачі № 21 була одержана формула для обчислення часу, який пройде до встановлення однакових рівнів рідини у двох сполучених посудинах:

$$T = \frac{S_1 S_2 \sqrt{2h}}{\delta \omega (S_1 + S_2) \sqrt{g}}.$$

У нашому випадку $S_1 = S_2 = 51$ м² – площі заспокійливих цистерн, $h = 4$ м – різниця рівнів на початку перетікання води, $\omega = \pi d^2 / 4$ – площа з'єднуючої труби (тут $d = 0,32$ м – її діаметр), $g \approx 9,81$ м/с² – прискорення вільного падіння, δ – коефіцієнт гідравлічного опору (так як у задачі нічого не говориться про опір рідини, цим коефіцієнтом можна знехтувати, узявши $\delta = 1$).

У результаті одержимо

$$\begin{aligned} T &= \frac{S_1 S_2 \sqrt{2h}}{\delta \omega (S_1 + S_2) \sqrt{g}} = \frac{S^2 \sqrt{2h}}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot 2S \sqrt{g}} = \frac{2S \cdot \sqrt{2h}}{\pi d^2 \sqrt{g}} = \\ &= \frac{2 \cdot 51 \cdot \sqrt{2 \cdot 4}}{3,14 \cdot 0,32^2 \cdot \sqrt{9,81}} \approx 286,47 \text{ с} \approx 4,77 \text{ хв.} \end{aligned}$$

Якщо покласти значення коефіцієнта гідравлічного опору рівним $\delta = 0,62$ (як у задачі № 21), час установлення однакових рівнів води в цистернах буде рівним

$$T_{\delta} = \frac{T}{\delta} = \frac{286,47}{0,62} \approx 462,05 \text{ с} \approx 7,7 \text{ хв.}$$

23. У відсік корабля висотою 4 м, який у поперечному перерізі є квадратом зі стороною 6 м під час аварії затікає вода зі швидкістю 10 м^3 за 1 хв. За який час відсік буде заповнений, якщо в той же час вода перетікає в інші відсіки через квадратний отвір зі стороною $1/12 \text{ м}$, розміщений біля його дна.

Розв'язок

Уведемо позначення:

$a = 6 \text{ м}$ – довжина сторони основи відсіку,
 $b = 1/12 \text{ м}$ – довжина сторони отвору в підлозі,
 $H = 4 \text{ м}$ – висота відсіку,
 $v = 10 \text{ м}^3/\text{хв} = 1/6 \text{ м}^3/\text{с}$ – швидкість надходження води у відсік, T – час, заповнення відсіка водою (рис. 21).

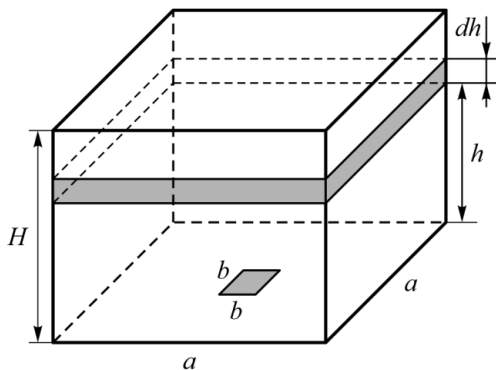


Рис. 21

Відповідно до закону Торрічеллі, швидкість витікання рідини через малий отвір у стінці посудини, який знаходиться на відстані h нижче рівня рідини в посудині, без урахування тертя рівна $\sqrt{2gh}$. З урахуванням тертя залежність швидкості витікання рідини v від h набуває вигляду $v = \mu\sqrt{2gh}$, де $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння, μ – коефіцієнт витрат, який для води – $\mu = 0,6$.

За dt секунд у відсік потрапляє $v dt$ води, а витікає – $\mu\sqrt{2gh} \cdot b^2 dt = \mu b^2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} dt$. Об'єм води за час dt збільшується на величину $a^2 dh$. Значить, дану ситуацію можна описати наступним рівнянням:

$$v dt - \mu b^2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} dt = a^2 dh, \quad (v - \mu b^2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}) dt = a^2 dh,$$

звідки, диференціал шуканого часу

$$dt = \frac{a^2 dh}{v - \mu b^2 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h}} = \frac{a^2}{\mu b^2 \sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\frac{v}{\mu b^2 \sqrt{2g}} - \sqrt{h}}.$$

Для зручності позначимо $\alpha = \frac{a^2}{\mu b^2 \sqrt{2g}}$ і $\beta = \frac{v}{\mu b^2 \sqrt{2g}}$.

Інтегруємо

$$\int_0^T dt = \int_0^H \frac{\alpha dh}{\beta - \sqrt{h}},$$

тоді шуканий час

$$\begin{aligned} T &= \alpha \int_0^H \frac{dh}{\beta - \sqrt{h}} = \left[\begin{array}{l|l} z = \beta - \sqrt{h}, & h \\ h = (\beta - z)^2, & H \\ dh = 2(z - \beta) dz, & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} z \\ \beta - \sqrt{H} \\ \beta \end{array} \right] = \\ &= \alpha \int_{\beta}^{\beta - \sqrt{H}} \frac{2(z - \beta)}{z} dz = 2\alpha \int_{\beta}^{\beta - \sqrt{H}} \left(1 - \frac{\beta}{z} \right) dz = 2\alpha (z - \beta \ln |z|) \Big|_{\beta}^{\beta - \sqrt{H}} = \\ &= 2\alpha (\beta - \sqrt{H} - \beta \ln |\beta - \sqrt{H}| - \beta + \beta \ln |\beta|) = \\ &= 2\alpha \left(\beta \ln \left| \frac{\beta}{\beta - \sqrt{H}} \right| - \sqrt{H} \right). \end{aligned}$$

Обчислюємо значення T

$$2\alpha = \frac{2 \cdot a^2}{\mu b^2 \sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot 6^2}{\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{12^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,8}} = \frac{17280}{\sqrt{19,6}} \approx 3903,154;$$

$$\beta = \frac{v}{\mu b^2 \sqrt{2g}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{12^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,8}} = \frac{40}{\sqrt{19,6}} \approx 9,035;$$

$$T = 3903,154 \cdot \left(9,035 \cdot \ln \frac{9,035}{9,035 - \sqrt{4}} - \sqrt{4} \right) \approx 1017,28 \text{ с} \approx 16,95 \text{ хв.}$$

§ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

24. Прискорення катера, початкова швидкість якого рівна v_0 , пропорційне силі тяги F і обернено пропорційне його масі m . Сила тяги катера $F(t) = b - k \cdot v(t)$, де $v(t)$ – швидкість катера в момент часу t , причому b і k – постійні величини. Визначити залежність сили тяги катера від часу t .

Розв'язок

Прискорення катера $a = \frac{dv}{dt}$ і згідно з умовою задачі

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b - kv}{m} \Rightarrow \frac{m dv}{b - kv} = dt.$$

Інтегруємо:

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{b - kv} = \int_0^t dt, \quad -\frac{m}{k} (\ln |b - kv| - \ln |b - kv_0|) = t,$$

$$\frac{b - kv}{b - kv_0} = e^{-\frac{k}{m}t}, \text{ звідки } v(t) = \frac{b}{k} + \left(v_0 - \frac{b}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Тоді сила тяги катера

$$F(t) = b - kv(t) = (b - kv_0) \cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

25. У моторного судна на швидкості 10 км/год вимикають мотор. Від'ємне прискорення, яке має судно через опір води, пропорційне швидкості. Знайти закон руху судна.

Розв'язок

Нехай $v_0 = 10$ км/год – початкова швидкість судна, $v(t)$ – швидкість у момент часу t , $a(t)$ – прискорення,

k – коефіцієнт пропорційності. Згідно з умовою задачі, швидкість змінюється за наступним законом:

$$v(t) = v_0 - ka(t) = 10 - ka(t).$$

Скориставшись рівністю $a(t) = v'(t)$, одержимо диференціальне рівняння руху

$$v = 10 - kv', \quad k \frac{dv}{dt} = 10 - v.$$

Розділяємо змінні

$$\begin{aligned} \frac{dv}{10-v} &= \frac{dt}{k}, \quad -\int \frac{d(10-v)}{10-v} = \int \frac{dt}{k}; \\ -\ln|10-v| &= \frac{t}{k} + C, \quad \ln|10-v| = -\frac{t}{k} - C, \\ 10-v &= e^{\frac{t}{k}} \cdot e^{-C} \Rightarrow v = 10 - e^{-C} \cdot e^{\frac{t}{k}}. \end{aligned}$$

Так як $v(t) = s'(t)$, знову одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{aligned} s' &= 10 - e^{-C} \cdot e^{\frac{t}{k}}, \quad \frac{ds}{dt} = 10 - e^{-C} \cdot e^{\frac{t}{k}}, \\ ds &= \left(10 - e^{-C} \cdot e^{\frac{t}{k}} \right) dt \Rightarrow s = \int \left(10 - e^{-C} \cdot e^{\frac{t}{k}} \right) dt, \\ s &= 10t + ke^{-C} \cdot e^{\frac{t}{k}} + C_2. \end{aligned}$$

Поклавши в останній рівності $ke^{-C} = C_1$, одержимо шуканий закон руху судна

$$s(t) = 10t + C_1 e^{\frac{t}{k}} + C_2.$$

26. Корабель зупинився у спокійній воді, накренившись на кут α , і потім, за відсутності впливу зовнішніх сил, став рівномірно похитуватися. Кут φ його відхилення від положення рівноваги (у радіанах) і час t (у секундах) пов'язані рівнянням $\frac{d\varphi}{dt} + a\varphi + b\varphi^2 = 0$, де a і b – сталі. Визначити $\varphi(t)$, якщо $\varphi|_{t=0} = \alpha$.

Розв'язок

$$\frac{d\varphi}{dt} = -(b\varphi^2 + a\varphi) \Rightarrow dt = -\frac{d\varphi}{\varphi(b\varphi + a)}. \quad (14)$$

$$\frac{1}{\varphi(b\varphi + a)} = \frac{A}{\varphi} + \frac{B}{b\varphi + a}, \quad 1 = Ab\varphi + Aa + B\varphi,$$

$$\begin{cases} \varphi^1 & | & Ab + B = 0, \\ \varphi^0 & | & Aa = 1, \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{a}, \quad B = -\frac{b}{a}.$$

$$\text{Із (14) маємо: } dt = -\frac{d\varphi}{a\varphi} + \frac{b d\varphi}{a(b\varphi + a)}.$$

Інтегруючи, одержимо:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt &= -\frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{b}{a} \int_{\alpha}^{\varphi} \frac{d\varphi}{b\varphi + a} \Rightarrow t = \left(-\frac{1}{a} \ln \varphi + \frac{1}{a} \ln(b\varphi + a) \right) \Big|_{\alpha}^{\varphi} = \\ &= -\frac{1}{a} \ln \varphi + \frac{1}{a} \ln \alpha + \frac{1}{a} \ln(b\varphi + a) - \frac{1}{a} \ln(b\alpha + a) = \frac{1}{a} \ln \frac{\alpha(b\varphi + a)}{\varphi(b\alpha + a)} \Rightarrow \\ \ln \frac{\alpha(b\varphi + a)}{\varphi(b\alpha + a)} &= at, \quad \frac{\alpha(b\varphi + a)}{\varphi(b\alpha + a)} = e^{at}, \quad \alpha b\varphi + \alpha a = \varphi(b\alpha + a) e^{at}, \end{aligned}$$

звідки

$$\varphi(t) = \frac{\alpha a}{(\alpha b + a)e^{at} - \alpha b} - \text{закон зміни кута } \varphi.$$

27. Вага водолаза з костюмом 80 кг. Опір води під час його занурення пропорційний квадрату його швидкості v (коефіцієнт пропорційності $k=4$). Визначити швидкість занурення залежно від часу t і встановити максимальну швидкість занурення.

Розв'язок

На водолаза B діє сила тяжіння P , яка направлена вниз, і сила опору води R , яка направлена вгору (рис. 22). Відомо, що $P = mg$ і $R = kv^2$, тоді, за другим законом Ньютона, одержуємо диференціальне рівняння

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad \text{або} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2.$$

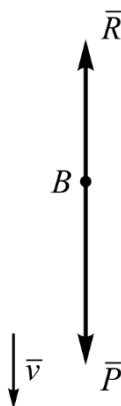


Рис. 22

Розділяємо змінні та інтегруємо:

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m} v^2} = \int dt + C_1.$$

Лівий інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{g - \frac{k}{m} v^2} &= \int \frac{dv}{\frac{k}{m} \left(\left(\sqrt{\frac{gm}{k}} \right)^2 - v^2 \right)} \\ &= \frac{1}{2 \frac{k}{m} \sqrt{\frac{gm}{k}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v} \right| = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{kg}{m}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v} \right|, \end{aligned}$$

$$\text{тоді, } \frac{1}{2 \sqrt{\frac{kg}{m}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v} \right| = t + C_1, \text{ звідки } v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{Ce^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} - 1}{Ce^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + 1},$$

де позначили $C = C_1 \cdot 2\sqrt{\frac{kg}{m}}$. Використовуючи початкову умову $v|_{t=0} = 0$, одержуємо, що $C = 1$. Таким чином, закон зміни швидкості занурення має наступний вигляд:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + 1} \quad \text{або} \quad v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right).$$

Перша похідна

$$v'(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)} \cdot \sqrt{\frac{kg}{m}} = \frac{g}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)}$$

існує за будь-яких $t \in (0; +\infty)$ і ніде не дорівнює нулю.

Отже, швидкість буде наближатися до максимальної по мірі необмеженого зростання t (оскільки із початкових умов відомо, що $v(0) = 0$). Таким чином, максимальна швидкість занурення

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\ &= \sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 9,8}{4}} = 14 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

28. Визначити закон руху судна за похилими доріжками при боковому спуску і час, упродовж якого судно пройде всю довжину доріжок, якщо в початковий момент воно знаходилося у спокої у верхній частині спускового механізму. Довжина доріжок $l = 80$ м, кут нахилу $\alpha = 30^\circ$, коефіцієнт тертя $k = 0,5$.

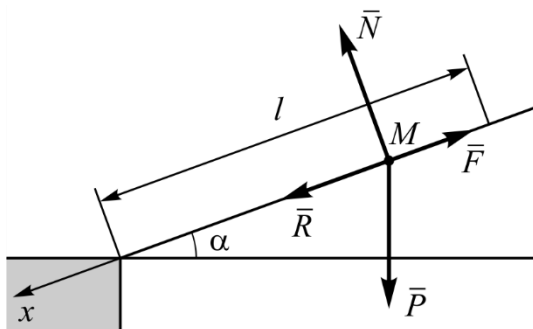


Рис. 23

Розв'язок

У довільний момент часу t судно знаходиться в положенні M (рис. 23) і на нього діють сили: вага $\bar{P}$, сила тертя $\bar{F}$ і реакція опори $\bar{N}$.

Рівнодіюча сила

$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{N}. \quad (15)$$

Спроектуємо (15) на вісь x :

$$R_x = P_x + F_x + N_x, \quad (16)$$

де $R_x = m \frac{d^2 S}{dt^2}$ (m – маса судна);

$$P_x = P \sin \alpha; F_x = F = N \cdot k = kP \cos \alpha, N_x = 0.$$

Ураховуючи, що $P = mg$ із (16), одержуємо наступне диференціальне рівняння руху

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = g(\sin \alpha - k \cos \alpha).$$

Розв'язуючи його безпосереднім інтегруванням, одержуємо

$$\frac{dS}{dt} = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)t + C_1 \Rightarrow S = \frac{g}{2}(\sin \alpha - k \cos \alpha)t^2 + C_1 t + C_2.$$

Сталі C_1 і C_2 визначаємо із початкових умов $S|_{t=0} = 0$ і $\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=0} = 0$, що дає систему

$$\begin{cases} g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \cdot 0 + C_1 = 0; \\ \frac{g}{2}(\sin \alpha - k \cos \alpha) \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Отже, $S(t) = \frac{g}{2}(\sin \alpha - k \cos \alpha)t^2$. При $\alpha = 30^\circ$, $g = 9,8$ і $k = 0,5$ одержуємо закон руху

$$S(t) = \frac{9,8}{2}(\sin 30^\circ - 0,5 \cdot \cos 30^\circ)t^2 \approx 0,328t^2.$$

Для визначення часу проходження судна вздовж доріжок розв'язуємо останнє рівняння відносно t при $S = l = 80$ м

$$t = \sqrt{\frac{l}{0,328}} = \sqrt{\frac{80}{0,328}} \approx 15,6 \text{ с.}$$

29. Мотор човна створює постійну силу тяги, а сила тертя об воду пропорційна швидкості:

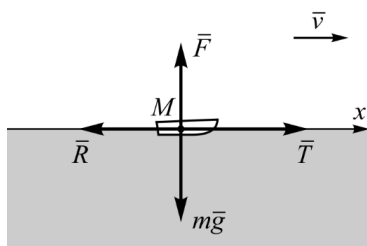


Рис. 24

а) довести, що швидкість човна не може перевищувати деякої граничної швидкості $v_{\text{гр}}$;

б) знайти швидкість човна через 5 с після початку руху, якщо $v_{\text{гр}} = 30$ км/год, а його швидкість після 2 с була рівна 5 км/год;

в) знайти шлях, пройдений човном за 5 с;

г) коли швидкість човна досягне 90 % від граничної?

Розв'язок

Направимо вісь x у бік руху човна (рис. 24) і запишемо диференціальне рівняння його руху в проекції на цю вісь:

$$m \frac{dv}{dt} = T - R,$$

де $T = \text{const}$, $R = kv$, тоді

$$m \frac{dv}{dt} = T - kv. \quad (17)$$

а) умовою екстремуму для швидкості (граничне її значення) є $\frac{dv}{dt} = 0$, тоді (17) набуває наступного вигляду: $v = \frac{T}{k}$. Отже, у нашому випадку граничною швидкістю човна буде швидкість $v_{\text{гр}} = \frac{T}{k}$;

б) із (17) випливає, що

$$\int_0^v \frac{dv}{T - kv} = \frac{1}{m} \int_0^t dt, \quad \frac{1}{k} \int_0^v \frac{dv}{\frac{T}{k} - v} = \frac{1}{m} \int_0^t dt, \quad \int_0^v \frac{dv}{v_{\text{гр}} - v} = \frac{k}{m} \int_0^t dt,$$

$$-\ln(v_{\text{гр}} - v) + \ln v_{\text{гр}} = \frac{k}{m} t, \quad v_{\text{гр}} - v = v_{\text{гр}} e^{-\frac{k}{m} t},$$

звідки закон зміни швидкості човна

$$v(t) = v_{\text{гр}} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right). \quad (18)$$

Виразимо із (18) співвідношення $\frac{k}{m}$

$$e^{-\frac{k}{m} t} = 1 - \frac{v}{v_{\text{гр}}} \Rightarrow \frac{k}{m} = -\frac{1}{t} \cdot \ln \left(1 - \frac{v}{v_{\text{гр}}} \right).$$

За умовою задачі $v_{\text{гр}} = 30$ км/год, а $v \Big|_{t=2\text{с}} = 5$ км/год.

Отже,

$$\frac{k}{m} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{5}{30} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{5}{6}.$$

С урахуванням останньої рівності (18) набуває наступного вигляду:

$$v(t) = v_{\text{гп}} \left[1 - \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{t}{2}} \right]. \quad (19)$$

Так як $v_{\text{гп}} = 30 \frac{\text{км}}{\text{год}} \approx 8,333 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, швидкість човна через 5 с після початку руху:

$$v(5) = 8,333 \cdot \left(1 - 0,833^{2,5} \right) \approx 3,051 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 10,98 \frac{\text{км}}{\text{год}};$$

в) так як $v = \frac{dS}{dt}$, то із (19) одержимо

$$\int_0^S dS = v_{\text{гп}} \int_0^t \left[1 - \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{t}{2}} \right] dt = v_{\text{гп}} \left[t - \frac{2}{\ln \frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{t}{2}} \right] \Bigg|_0^t,$$

$$\text{звідки } S(t) = v_{\text{гп}} \left[t + \frac{2}{\ln \frac{5}{6}} \left(1 - \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{t}{2}} \right) \right] - \text{закон руху човна.}$$

Тоді шлях, який пройде човен за 5 с

$$S(5) = 8,333 \cdot \left(5 - 10,970 \cdot \left(1 - 0,833^{2,5} \right) \right) \approx 8,20 \text{ м};$$

г) із (19) виразимо t :

$$\frac{v}{v_{\text{гп}}} = 1 - e^{\ln \frac{5}{6} \cdot \frac{t}{2}}, \quad e^{\ln \frac{5}{6} \cdot \frac{t}{2}} = 1 - \frac{v}{v_{\text{гп}}}, \quad \ln \frac{5}{6} \cdot \frac{t}{2} = \ln \left(1 - \frac{v}{v_{\text{гп}}} \right),$$

$$t = \frac{2 \ln \left(1 - \frac{v}{v_{\text{гп}}} \right)}{\ln \frac{5}{6}}.$$

С урахуванням того, що $\frac{v}{v_{\text{гп}}} = 0,9$, маємо

$$t = \frac{2 \ln 0,1}{\ln 0,833} \approx 25,26 \text{ с.}$$

30. Під дією опору води човен за 1 хв сповільнив свій рух з 6 до 1 км/год. Який шлях пройде човен до повної зупинки, якщо опір води пропорційний першій степені швидкості?

Розв'язок

Нехай $v(t)$ – швидкість човна в момент часу t . Згідно з умовою $F_{\text{оп}} = kv$. Другий закон Ньютона приводить до диференціального рівняння

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Відокремлюємо змінні: $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$.

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt + \ln C \quad (C > 0), \quad \ln |v| = -\frac{k}{m} t + \ln C,$$

$$\ln \frac{v}{C} = -\frac{k}{m} t \Rightarrow v = Ce^{-\frac{k}{m} t}.$$

При $t = 0$ $v = 6 \Rightarrow C = 6$, тобто $v = 6e^{-\frac{k}{m} t}$.

При $t = \frac{1}{60}$ $v = 1 \Rightarrow 6e^{-\frac{k}{60m}} = 1$, $e^{-\frac{k}{60m}} = 6^{-1}$ і $e^{-\frac{k}{m}} = 6^{-60}$.

Отже, швидкість човна задається рівнянням

$$v = 6 \cdot 6^{-60t} = 6^{1-60t}.$$

Із даної рівності видно, що теоретична швидкість човна в будь-який момент часу t величина додатна і зупинка може відбутися тільки при $t = +\infty$.

Отже, шлях, пройдений човном до зупинки

$$S = \int_0^{+\infty} 6^{1-60t} dt = -\frac{6^{1-60t}}{60 \ln 6} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{10 \ln 6} \approx 0,056 \text{ км} \approx 56 \text{ м}.$$

31. Катер рухається у спокійній воді зі швидкістю $v_0 = 10$ км/год. На повному ході його двигун було вимкнено, і через $t = 20$ с швидкість катера зменшилась до $v_1 = 6$ км/год. Вважаючи, що опір води руху катера пропорційний його швидкості, знайти:

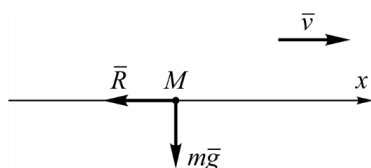


Рис. 25

а) швидкість катера через 2 хв після зупинки двигуна;

б) відстань, пройдена катером упродовж першої хвилини після зупинки двигуна.

Розв'язок

а) сила опору $\vec{R} = -k\vec{v}$, $R_x = -kv_x = -kv$ (рис. 25).

Диференціальне рівняння руху $m \frac{dv}{dt} = -kv$, звідки маємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt.$$

Інтегруючи, одержимо

$$\ln v = -\frac{k}{m} t - \ln C, \quad \ln \frac{v}{C} = -\frac{k}{m} t \quad \text{і} \quad v = C e^{-\frac{k}{m} t}.$$

При $t = 0$ $v_0 = 10$ км/год.

$$10 = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} \Rightarrow C = 10 \quad \text{і}$$

$$v = 10e^{\frac{k}{m}t}. \quad (20)$$

Через $t = 20 \text{ с} = \frac{1}{180}$ год швидкість катера рівна 6 км/год.

$$\text{Звідси } 6 = 10e^{\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{180}} \Rightarrow e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{180}.$$

Підставляючи $t = 2 \text{ хв} = \frac{1}{30}$ год у рівняння (20), маємо

$$v_2 = 10 \left(\left(\frac{5}{3} \right)^{180} \right)^{\frac{1}{30}} = 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{-6} = \left(\frac{3}{5} \right)^6 = \frac{7290}{15625} \approx 0,467 \text{ км/год.}$$

Отже, швидкість через 2 хв після зупинки двигуна $v_2 = 0,467$ км/год;

$$\text{б) } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dS} \Rightarrow v \frac{dv}{dS} = -\frac{k}{m} v \text{ і}$$

$$\frac{dv}{dS} = -\frac{k}{m}. \quad (21)$$

Через $t = 1 \text{ хв} = \frac{1}{60}$ год після зупинки двигуна швидкість катера

$$v_1 = 10 \left(\left(\frac{5}{3} \right)^{180} \right)^{\frac{1}{60}} = 10 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^3 = 10 \cdot \frac{27}{125} = 2,16 \text{ км/год.}$$

Із (21) знаходимо: $dS = -\frac{m}{k} dv$, інтегруємо

$$\int_0^S dS = -\frac{m}{k} \int_{10}^{2,16} dv \Rightarrow S = -\frac{m}{k} (2,16 - 10) = \frac{m}{k} \cdot 7,84.$$

$$\text{Із } e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{180} \text{ одержуємо, що } \frac{k}{m} = 180 \ln \frac{5}{3} = 91,949 \Rightarrow$$

$$\frac{m}{k} = 0,109 \text{ і тоді } S = 0,109 \cdot 7,84 = 0,0852 \text{ км} = 85,2 \text{ м}.$$

Таким чином, упродовж першої хвилини після зупинки двигуна катер пройде 85,2 м.

32. Знайти період вільних вертикальних коливань корабля на спокійній воді, якщо маса корабля M т, площа його горизонтальної поверхні S м, густина води $\rho = 1 \text{ т/м}^3$. Знайти також рівняння руху корабля, якщо він був спущений на воду з нульовою вертикальною швидкістю.

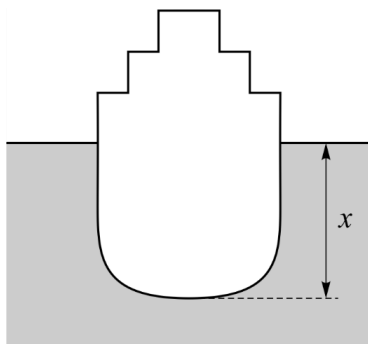


Рис. 26

Розв'язок

Нехай корабель занурений у воду на величину x (рис. 26). На нього діє виштовхувальна сила $F = Sx\rho g$. Тоді диференціальне рівняння вертикального руху корабля

$$M \cdot x'' + S\rho g x = 0 \Rightarrow x'' + k^2 x = 0,$$

де $k = \sqrt{\frac{S\rho g}{M}}$ – частота.

$$\text{Період коливань } T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{S\rho g}}.$$

Для розв'язку другої частини задачі запишемо початкові умови:

$$t = 0, x_0 = -\lambda_{\text{ст}}, v_0 = 0.$$

Закон коливального руху для цього випадку ([21]):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$x'_t = \frac{dx}{dt} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt).$$

У положенні статичної рівноваги

$$Mg = S\lambda_{\text{ст}}\rho g \Rightarrow \lambda_{\text{ст}} = \frac{M}{S\rho}.$$

Використовуючи початкові умови, одержуємо систему

$$\begin{cases} -\frac{M}{S\rho} = C_1, \\ 0 = kC_2 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{M}{S\rho} \cos\left(\sqrt{\frac{S\rho g}{M}} \cdot t\right) \text{ м.}$$

33. Нерухомий підводний човен, одержавши невелику від'ємну плавучість p , занурюється на глибину, рухаючись поступально. Опір води за невеликої від'ємної плавучості можна брати пропорційним першій степені швидкості занурення і рівним kSv , де k – коефіцієнт пропорційності, S – площа горизонтальної проекції човна, v – величина швидкості занурення. Маса човна M . Визначити швидкість занурення v , якщо при $t=0$ швидкість $v_0=0$, а також шлях, який пройде човен під час занурення за час T .

Розв'язок

Плавучість – властивість зануреного в рідину тіла залишатися в рівновазі, не виходячи з води і не занурюючись далі, тобто плавати.

Під плавучістю корабля розуміють його здатність залишатися на плаву за заданого навантаження. Ця властивість характеризується *запасом плавучості* W , який виражається як процент об'єму водонепроникних відсіків вище ватерлінії до загального водонепроникного об'єму.

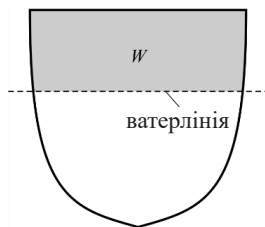


Рис. 27

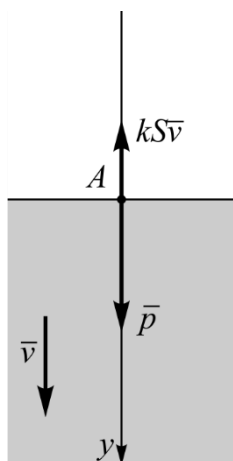


Рис. 28

У разі забору об'єму води більшого ніж запас плавучості (або будь-якого вантажу, більшого за вагою) говорять, що судно отримує від'ємну плавучість. У цьому випадку воно занурюється вниз.

Беремо човен за матеріальну точку A .

Нехай y – глибина занурення човна, тоді

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = M \frac{dv}{dt} \quad \text{– рівнодійна сил, що діють}$$

на човен під час занурення;

$$kS \frac{dy}{dt} = kSv \quad \text{– опір води (рис. 28). Одержуємо наступне диференціальне рівняння руху:}$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = p - kS \frac{dy}{dt} \Rightarrow M \frac{d^2 y}{dt^2} + kS \frac{dy}{dt} - p = 0 \quad \text{або}$$

$$M \frac{dv}{dt} + kSv - p = 0 \quad \Bigg| : M,$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kSv}{M} - \frac{P}{M} = 0.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{M dv}{p - kSv} = dt;$$

інтегруємо:

$$M \int \frac{dv}{p - kSv} = \int dt - \ln C, \quad -\frac{M}{kS} \int \frac{d(p - kSv)}{p - kSv} = t - \ln C,$$

$$-\frac{M}{kS} \ln(C(p - kSv)) = t.$$

$$\text{При } t=0 \ v=0 \Rightarrow 0 = -\frac{M}{kS} \ln Cp, \ln Cp = 0 \text{ і } C = \frac{1}{p}.$$

Тоді

$$-\frac{M}{kS} \ln \left(1 - \frac{kSv}{p} \right) = t \Rightarrow 1 - \frac{kSv}{p} = e^{-\frac{kS}{M}t} \text{ і } v = \frac{p}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t} \right).$$

Для визначення шляху L , пройденого під час занурення човна за час T , останнє рівняння перепишемо у наступному вигляді:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{p}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t} \right).$$

Відокремлюємо змінні:

$$dL = \frac{p}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t} \right) dt.$$

Інтегруємо:

$$L = \frac{p}{kS} \left(t + \frac{M}{kS} e^{-\frac{kS}{M}t} + C \right).$$

При $t=0 \ L=0$:

$$0 = \frac{p}{kS} \left(\frac{M}{kS} + C \right) \Rightarrow C = -\frac{M}{kS},$$

тоді при $t=T$

$$L = \frac{p}{kS} \left(T - \frac{M}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{M}T} \right) \right).$$

34. Корабель масою $1,5 \cdot 10^6$ кг долає опір води, рівний $R = \alpha v^2$ Н, де v – швидкість корабля в м/с, α – постійний коефіцієнт, рівний 1200. Сила упору гвинтів направлена в бік руху і змінюється за законом $T = 1,2 \cdot 10^6 (1 - v/33)$ Н. Визначити

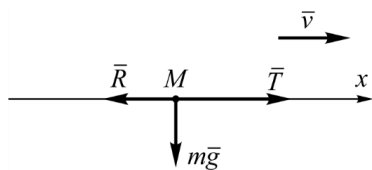


Рис. 29

найбільшу швидкість, яку може розвинути корабель. Знайти залежність швидкості корабля від часу, якщо початкова швидкість рівна v_0 м/с, а також знайти залежність пройденого шляху від швидкості.

Розв'язок

Проектуючи на вісь Ox сили, що діють на корабель (рис. 29), згідно з другим законом Ньютона, одержимо

$$m \frac{dv}{dt} = T - R. \quad (22)$$

У разі досягнення найбільшої можливої швидкості корабель буде рухатися рівномірно, а значить $R = T$, тобто

$$1200 \cdot v_{\max}^2 = 12 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{v_{\max}}{33} \right), \quad v_{\max}^2 + \frac{12 \cdot 10^5}{1200 \cdot 33} v_{\max} - \frac{12 \cdot 10^5}{1200} = 0,$$

$$v_{\max}^2 + \frac{10^3}{33} v_{\max} - 10^3 = 0;$$

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -\frac{10^3}{66} + \sqrt{\frac{10^6}{66^2} + 10^3} = -\frac{10^3}{66} + \frac{\sqrt{10^3(10^3 + 66^2)}}{66} = \\ &= -\frac{10^3}{66} + \frac{10 \cdot 231,43}{66} = \frac{1314,3}{66} \approx 20 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Щоб знайти закон зміни швидкості корабля, запишемо диференціальне рівняння його руху. Згідно з умовою задачі $m = 1,5 \cdot 10^6$ кг, $T = 1,2 \cdot 10^6 (1 - v/33)$ Н, $R = 1200v^2$; тоді із (22) маємо:

$$1,5 \cdot 10^6 \frac{dv}{dt} = 1,2 \cdot 10^6 \left(1 - \frac{v}{33} \right) - 1200v^2,$$

$$1,5 \cdot 10^6 \frac{dv}{dt} = -1200(v^2 + 30,3v - 1000). \quad (23)$$

Відокремлюємо змінні:

$$-1250 \frac{dv}{v^2 + 30,3v - 1000} = dt.$$

Інтегруємо:

$$\begin{aligned} -1250 \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2 + 30,3v - 1000} &= t, \quad -1250 \int_{v_0}^v \frac{d(v+15,15)}{(v+15,15)^2 - 35,06^2} = t, \\ t &= -\frac{1250}{70,12} \ln \left| \frac{(v+15,15)-35,06}{(v+15,15)+35,06} \right| \Bigg|_{v_0}^v = -17,83 \ln \left| \frac{v-19,91}{v+50,21} \right| \Bigg|_{v_0}^v = \\ &= -17,83 \left(\ln \frac{v-19,91}{v+50,21} - \ln \frac{v_0-19,91}{v_0+50,21} \right) = \\ &= 17,83 \ln \frac{(v_0-19,91)(v+50,21)}{(v_0+50,21)(v-19,91)}. \end{aligned}$$

Округлюючи, одержимо

$$\begin{aligned} t &= 18 \ln \frac{(v_0-20)(v+50)}{(v_0+50)(v-20)} \Rightarrow e^{\frac{t}{18}} = \frac{(v_0-20)(v+50)}{(v_0+50)(v-20)}, \\ e^{0,056t} \cdot (v_0+50)v - e^{0,056t} (v_0+50)20 &= (v_0-20)v + 50(v_0-20) \Rightarrow \\ v &= \frac{70v_0 + 20(v_0+50)e^{0,056t}}{70 + (v_0+50)(e^{0,056t} - 1)}. \end{aligned}$$

Одержана формула описує залежність швидкості корабля v від часу t .

Знайдемо залежність пройденого шляху s від швидкості v . Відмітимо, що

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds},$$

тоді рівняння (23) набуває наступного вигляду:

$$1,5 \cdot 10^6 \cdot \frac{v dv}{ds} = -1200(v^2 + 30,3v - 1000).$$

Розділяємо змінні та інтегруємо

$$\begin{aligned} \int_0^s ds &= -1250 \int_{v_0}^v \frac{v dv}{v^2 + 30,3v - 1000} \Rightarrow \text{округлюючи, маємо} \\ s &= -1250 \int_{v_0}^v \frac{v dv}{v^2 + 30v - 1000} = -1250 \int_{v_0}^v \frac{(2v + 30) \cdot \frac{1}{2} - 15}{v^2 + 30v - 1000} dv = \\ &= -1250 \left(\frac{1}{2} \int_{v_0}^v \frac{d(v^2 + 30v - 1000)}{v^2 + 30v - 1000} - 15 \int_{v_0}^v \frac{d(v + 15)}{(v + 15)^2 - 35^2} \right) = \\ &= -1250 \left(\frac{1}{2} \ln |v^2 + 30v - 1000| \Big|_{v_0}^v - \frac{15}{70} \ln \left| \frac{(v + 15) - 35}{(v + 15) + 35} \right| \Big|_{v_0}^v \right) = \\ &= 625 \ln \frac{v_0^2 + 30v_0 - 1000}{v^2 + 30v - 1000} + 267,9 \cdot \ln \left| \frac{v - 20}{v + 50} \right| \Big|_{v_0}^v = \\ &= 625 \ln \frac{v_0^2 + 30v_0 - 1000}{v^2 + 30v - 1000} + 267,9 \left(\ln \frac{v - 20}{v + 50} - \ln \frac{v_0 - 20}{v_0 + 50} \right) = \\ &= 625 \ln \frac{v_0^2 + 30v_0 - 1000}{v^2 + 30v - 1000} + 267,9 \ln \frac{(v_0 + 50)(v - 20)}{(v + 50)(v_0 - 20)} = \\ &= 625 \ln \frac{(v_0 + 50)(v_0 - 20)}{(v + 50)(v - 20)} + 267,9 \ln \frac{(v_0 + 50)(v - 20)}{(v + 50)(v_0 - 20)} = \\ &= 625 \ln \frac{v_0 + 50}{v + 50} + 625 \ln \frac{v_0 - 20}{v - 20} + 267,9 \ln \frac{v_0 + 50}{v + 50} + \\ &+ 267,9 \ln \frac{v - 20}{v_0 - 20} = 892,9 \ln \frac{v_0 + 50}{v + 50} + 357,1 \ln \frac{v_0 - 20}{v - 20}. \end{aligned}$$

Таким чином, залежність пройденого шляху s від швидкості задається наступним рівнянням v :

$$s = 892,9 \ln \frac{v_0 + 50}{v + 50} + 357,1 \ln \frac{v_0 - 20}{v - 20}.$$

35. Знайти в полярних координатах (r, φ) рівняння кривої, яку опише корабель, що зберігає постійний кут пеленга α на нерухому точку (кут між напрямом швидкості і напрямом на точку), якщо дано: α і $r|_{\varphi=0} = r_0$. Корабель взяти за точку, що рухається на площині, і за полюс взяти довільну нерухому точку в цій площині. Дослідити часткові випадки

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2} \text{ і } \pi.$$

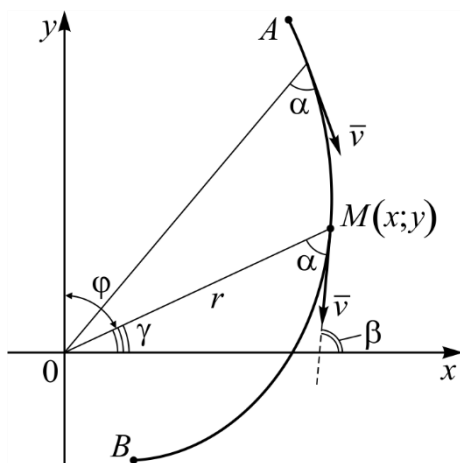


Рис. 30

Розв'язок

Виберемо систему координат таким чином, щоб точка, на яку взято пеленг, знаходилась в її початку. Нехай AB – траєкторія руху судна та її рівняння в декартових координатах

$y = y(x)$ (рис. 30), тоді $\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx}$. Урахуємо, що $y = r \cos \varphi$,

$$x = r \sin \varphi. \quad \beta = \alpha + \gamma = 90^\circ - \varphi + \alpha = 90^\circ - (\varphi - \alpha).$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg}(\varphi - \alpha) = \frac{1 + \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \varphi}. \quad (24)$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{dy}{dx} = \frac{dr \cdot \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot d\varphi}{dr \cdot \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot d\varphi} = \\ &= \frac{\frac{dr}{r} \cos \varphi - \sin \varphi d\varphi}{\frac{dr}{r} \sin \varphi + \cos \varphi d\varphi} = \frac{\frac{dr}{r} \operatorname{ctg} \varphi - d\varphi}{\frac{dr}{r} + \operatorname{ctg} \varphi \cdot d\varphi}. \end{aligned} \quad (25)$$

Рівність (24) і (25) досягається, якщо покласти $\frac{dr}{r} = -\operatorname{ctg} \alpha d\varphi$.

Інтегруючи цю рівність, одержуємо $\ln r = -\varphi \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \ln C$, звідки

$$r = Ce^{-\varphi \cdot \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Останнє рівняння є рівнянням логарифмічної спіралі. При $\varphi = 0$ $r = r_0$, тоді $C = r_0$, звідки рівняння кривої руху корабля

$$r = r_0 e^{-\varphi \cdot \operatorname{ctg} \alpha}.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ і $r = r_0$ – корабель рухається по колу радіуса r_0 і кут пеленга прямий. При $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi$ – рух корабля відбувається по прямій.

36. На рятувальних та патрульних суднах, криголамах і кораблях ВМФ установлюються пошукові прожектори. По якій поверхні обертання треба відшліфувати дзеркало рефлектора, щоб усі промені, що виходять із джерела світла, поміщеного в точку O на осі обертання, відбивалися дзеркалом паралельно цій осі?

Розв'язок

Візьмемо меридіанний перетин шуканої поверхні обертання. Виберемо початок координат в точці O , а вісь Ox напрямимо по осі обертання (рис. 31).

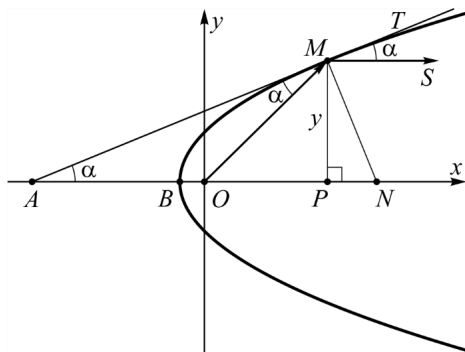


Рис. 31

Якщо позначити через α кут, утворений з віссю Ox дотичною AT у точці $M(x; y)$ кривої, то, за умовою задачі, $\angle SMT = \alpha$. З іншого боку, $\angle OMA = \angle SMT$ (кут падіння ($\angle OMN$) рівний куту відбивання ($\angle NMS$), а значить указані кути рівні, як доповнюючі до $\pi/2$). $\angle MAO = \angle SMT = \alpha$, отже, $\triangle OAM$ рівнобедрений і $OA = OM$.

$$OA = AP - OP = \frac{MP}{\operatorname{tg} \alpha} - OP = \frac{y}{y'} - x; \quad OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тоді $\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$ або в диференціалах

$$y \, dx - \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dy = 0.$$

Одержали однорідне рівняння відносно x і y . Покладемо $x = yz$, тоді $dx = z \, dy + y \, dz$ і одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$y(z \, dy + y \, dz) = y(z + \sqrt{z^2 + 1}) \, dy$$

або

$$y \, dz = \sqrt{z^2 + 1} \, dy \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dy}{y}.$$

Інтегруючи, одержимо

$$\ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) = \ln y - \ln C \Rightarrow z + \sqrt{z^2 + 1} = \frac{y}{C},$$

$$\frac{y}{C} - z = \sqrt{z^2 + 1}, \left(\frac{y}{C} - z\right)^2 = z^2 + 1 \Rightarrow \frac{y^2}{C^2} - \frac{2yz}{C} = 1.$$

Повертаючись до попередньої змінної x , одержимо загальний інтеграл

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right),$$

який являє собою сімейство парабол з віссю симетрії, що співпадає з віссю Ox , з вершиною $B\left(-\frac{C}{2}; 0\right)$.

Отже, поверхнями обертання є параболоїди обертання, рівняння яких $y^2 + z^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right)$.

Якщо вважати, що діаметр дзеркала – d , а глибина – h , то C можна визначити із рівняння параболі, поклавши $x + \frac{C}{2} = h$, $y = \frac{d}{2}$. Тоді $\frac{d^2}{4} = 2Ch$, звідки $C = \frac{d^2}{8h}$, і одержимо частинний інтеграл $y^2 + z^2 = \frac{d^2}{4h}\left(x + \frac{d^2}{16h}\right)$.

Зауваження: можливі й інші способи розв'язання цієї задачі.

37. Судно виходить із точки O і з постійною швидкістю v пливе у напрямі осі Oy (рис. 32). У той же момент часу ($t=0$) із точки A , розміщеної на відстані $OA = a$ від судна, навздогін на переріз виходить катер зі швидкістю $2v$ (ніс катера весь час направлений на судно). Знайти рівняння описаної

катером кривої погоні й мінімальний час, необхідний, щоб догнати судно.

Розв'язок

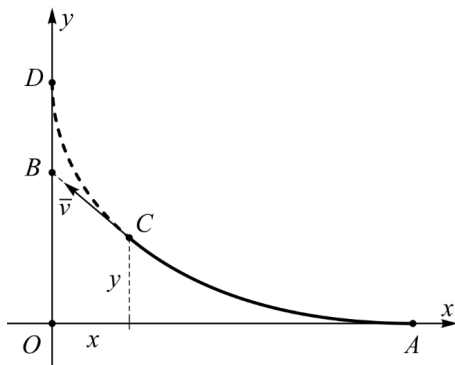


Рис. 32

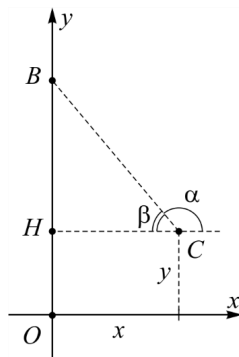


Рис. 33

Нехай катер у момент часу t знаходиться в точці $C(x, y)$, а судно в точці B і пройдений ним шлях $OB = vt$. Катер рухався по дугі $AC = l$ зі швидкістю $2v$, при цьому $y = y(x)$ – шукане рівняння цієї дуги.

У точці C $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$. Із рис. 33 випливає, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{BH}{HC} = -\frac{vt - y}{x} = \frac{y - vt}{x},$$

тобто $\frac{dy}{dx} = \frac{y - vt}{x}$, з іншого боку $l = 2vt$.

Таким чином, $\frac{dy}{dx} = \frac{y - v \cdot \frac{l}{2v}}{x} = \frac{y - \frac{l}{2}}{x}$ і

$$x \frac{dy}{dx} - y = -\frac{l}{2}. \quad (26)$$

Диференціал дуги AC визначається формулою

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad dl > 0,$$

у нашому випадку $dx < 0$, тому $dl = -\sqrt{1 + y'^2} dx$.

Диференціюючи рівняння (26), одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2} \frac{dl}{dx} \Rightarrow x \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + y'^2} \\ \text{або } x \frac{dy'}{dx} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + y'^2}. \end{aligned}$$

Після відокремлення змінних одержимо, що

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{2x}.$$

Інтегруємо цю рівність почленно, одержуємо:

$$\begin{aligned} \ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) &= \frac{1}{2} \ln x + \ln C \quad (C > 0), \\ \ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}) &= \ln C \sqrt{x}, \end{aligned}$$

звідки $y' + \sqrt{1 + y'^2} = C\sqrt{x}$.

При $t=0$ $y'=0$ і $x=a$.

Таким чином, $1 = C\sqrt{a}$ або $C = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Тоді

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{x}{a}} \text{ і } \frac{1}{y' + \sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Після перетворень одержимо:

$$\frac{y' - \sqrt{1 + y'^2}}{(y' + \sqrt{1 + y'^2})(y' - \sqrt{1 + y'^2})} = \sqrt{\frac{a}{x}},$$

$$\frac{y' - \sqrt{1 + y'^2}}{y'^2 - 1 - y'^2} = \sqrt{\frac{a}{x}} \text{ і } y' - \sqrt{1 + y'^2} = -\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Отже,

$$\begin{cases} y' + \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{x}{a}}, \\ y' - \sqrt{1 + y'^2} = -\sqrt{\frac{a}{x}} \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}} \right).$$

Інтегруючи, знаходимо

$$y = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{x}{a}} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{a}{x}} dx = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + C.$$

При $x=a$ $y=0$, тоді $0 = \frac{a}{3} - a + C$, звідки $C = \frac{2}{3}a$.

Остаточнo маємо $y = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + \frac{2}{3}a$ – шукане рівняння кривої.

Катер дожене судно в точці D при $x=0$. Звідси, покладаючи в рівнянні руху $x=0$, знаходимо шлях, пройдений судном – $y = \frac{2}{3}a$ і шуканий час перехвату $t = \frac{y}{v} = \frac{2a}{3v}$.

38. На протилежних берегах річки шириною 500 м розміщені два пункти A і B , причому відрізок AB перпендикулярний берегам. Катер з власною швидкістю $v_k = 8$ км/год перепливає із A в B так, що його ніс у будь-який момент часу направлений на точку B . Знайти час, витрачений катером на цей перехід, якщо швидкість течії річки дорівнює $v_p = 2$ км/год.

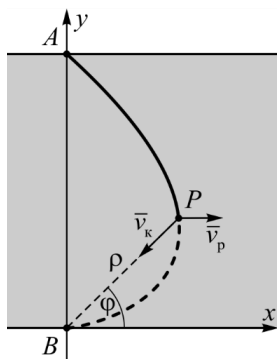


Рис. 34

Розв'язок

Уведемо систему координат так, щоб її початок розміщувався в точці B , вісь By направимо вздовж відрізка AB , а вісь абсцис – уздовж течії річки (рис. 34). Нехай у момент часу t катер знаходиться в точці $P(t) = (x(t); y(t))$. Вектор його швидкості направлений, згідно з умовою, уздовж відрізка PB . Нехай $PB = \rho(t)$, тоді

$$x(t) = (2 - 8 \cos \varphi)t; \quad y(t) = -8 \sin \varphi \cdot t;$$

звідки

$$x'(t) = 2 - 8 \cos \varphi; \quad y'(t) = -8 \sin \varphi. \quad (27)$$

Ураховуючи, що декартові координати пов'язані з полярними співвідношеннями:

$$x(t) = \rho(t) \cos \varphi(t), \quad y(t) = \rho(t) \sin \varphi(t);$$

одержуємо, що

$$x'(t) = \rho' \cos \varphi - \rho \cdot \varphi' \sin \varphi, \quad y'(t) = \rho' \sin \varphi + \rho \cdot \varphi' \cos \varphi.$$

Порівнюючи одержані рівності з (27), запишемо систему диференціальних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} \rho' \cos \varphi - \rho \cdot \varphi' \sin \varphi = 2 - 8 \cos \varphi, \\ \rho' \sin \varphi + \rho \cdot \varphi' \cos \varphi = -8 \sin \varphi. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему відносно ρ' і $\rho \cdot \varphi'$. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок. Обчислюємо визначники

$$\Delta_{\rho'} = \begin{vmatrix} 2-8\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -8\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 2\cos\varphi - 8\cos^2\varphi - 8\sin^2\varphi =$$

$$= 2\cos\varphi - 8;$$

$$\Delta_{\rho\varphi'} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 2-8\cos\varphi \\ \sin\varphi & 8\sin\varphi \end{vmatrix} = -8\cos\varphi\sin\varphi - 2\sin\varphi + 8\sin\varphi\cos\varphi =$$

$$= -2\sin\varphi.$$

Тоді, за формулами Крамера:

$$\rho' = \frac{\Delta_{\rho'}}{\Delta} = 2\cos\varphi - 8 \text{ і } \rho\varphi' = \frac{\Delta_{\rho\varphi'}}{\Delta} = -2\sin\varphi.$$

Отже, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} \rho' = 2\cos\varphi - 8, \\ \rho\varphi' = -2\sin\varphi. \end{cases} \quad (28)$$

Із другого рівняння маємо $\rho = -\frac{2\sin\varphi}{\varphi'}$. Диференціюємо це рівняння:

$$\rho' = -\frac{2(\varphi')^2 \cos\varphi - 2\varphi'' \sin\varphi}{(\varphi')^2} = \frac{2\varphi'' \sin\varphi}{(\varphi')^2} - 2\cos\varphi.$$

Знайдене значення ρ' підставляємо в перше рівняння системи (28):

$$\frac{2\varphi'' \sin\varphi}{(\varphi')^2} - 2\cos\varphi = 2\cos\varphi - 8,$$

звідки одержуємо рівняння

$$\frac{\varphi'' \sin \varphi}{(\varphi')^2} = 2 \cos \varphi - 4, \quad (29)$$

яке є диференціальним рівнянням другого порядку, що не містить в явному вигляді незалежну змінну t .

Зробимо заміну змінної $\varphi' = p(\varphi)$, тоді

$$\varphi'' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = p' \cdot p,$$

а рівняння (29) набуває наступного вигляду:

$$\frac{p'p \cdot \sin \varphi}{p^2} = 2 \cos \varphi - 4.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2 \cos \varphi - 4}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2 \cos \varphi - 4}{\sin \varphi} d\varphi \Rightarrow \ln |p| = 2 \ln |\sin \varphi| - 4 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| + \ln C,$$

$$\ln |p| = \ln \frac{C \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}, \quad p = \frac{C \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}.$$

Знайдемо значення C . У початковий момент часу точки A і P співпадали, а значить $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, $\rho(0) = 0,5$. Із другого рівняння системи (28) видно, що $\varphi' = -\frac{2 \sin \varphi}{\rho}$ і $\varphi'(0) = -4$,

а значить $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi'(0) = -4$. Із рівності $p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{C \sin^2 \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{4}}$ знаходимо, що $C = -4$, а значить $p = -\frac{4 \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}$ і $\varphi' = -\frac{4 \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}$ або

$$\frac{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \varphi} d\varphi = -4 dt. \quad (30)$$

Знайдемо інтеграл від лівої частини рівності (30):

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \varphi} d\varphi &= \int \frac{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \frac{1}{4} \int \frac{\sin^4 \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} := \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right) d\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} d\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2} d\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{10} \operatorname{tg}^5 \frac{\varphi}{2} + C_1. \end{aligned}$$

Тоді загальний інтеграл диференціального рівняння (30):

$$\frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{10} \operatorname{tg}^5 \frac{\varphi}{2} + C_1 = -4t$$

або

$$5 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} + 3 \operatorname{tg}^5 \frac{\varphi}{2} = C - 120t \quad (C = -30C_1).$$

Так як $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, то $C=0$. Далі виразимо ρ через φ , для цього у вираз $\rho = -\frac{2 \sin \varphi}{\varphi'}$ підставимо $\varphi' = -\frac{4 \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}$ і одержимо, що $\rho = \frac{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \varphi}$.

Відмітимо, що в момент закінчення переправи радіус-вектор $\rho=0$, і значить $\frac{\operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \varphi} = 0 \Rightarrow \varphi=0$. Із рівняння $5 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} + 3 \operatorname{tg}^5 \frac{\varphi}{2} = 8 - 120t$ знаходимо, що $t = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$ год = 4 хв.

39. Для визначення опору води руху моделі судна за дуже малих швидкостей модель M – пустили плавати в ємності з водою, прив'язавши ніс і корму за допомогою двох однакових пружин A і B , сили натягу яких пропорційні подовженням (рис. 35).

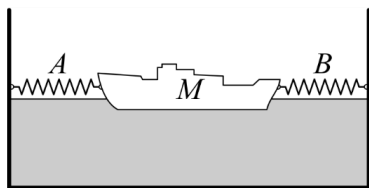


Рис. 35

(рис. 35).

Результати спостереження показали, що відхилення моделі від положення рівноваги після кожного розмаху зменшуються, утворюючи геометричну прогресію, знаменник якої рівний 0,9, а тривалість кожного розмаху $T=0,5$ с. Визначити силу R опору води, що припадає на кожен кілограм маси моделі, коли її швидкість рівна 1 м/с, припускаючи, що опір води пропорційний першій степені швидкості. Знайти рівняння руху моделі, якщо в початковий момент пружина A була розтягнута, а пружина B – стиснута на величину $\Delta l=4$ см і модель була відпущена без початкової швидкості.

Розв'язок

Розглянемо коливання матеріальної точки M під дією відновлювальної сили $\bar{F}$ і сили опору $\bar{R}$, пропорційної швидкості точки. Направимо вісь x по траєкторії точки M і розмістимо початок координат O в положенні спокою точки (рис. 36). За умовою задачі сила F пропорційна подовженню пружини, а сила опору R пропорційна швидкості, тоді

$$F = \beta \cdot OM = \beta \cdot |x|, \quad F_x = -\beta x; \quad \bar{R} = \alpha \bar{v}, \quad R_x = -\alpha \frac{dx}{dt};$$

де β і α – коефіцієнти пропорційності.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки під дією сил $\bar{F}$, $\bar{R}$ і $\bar{P} = mg$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x + P_x + R_x = -\beta x - \alpha \frac{dx}{dt} \quad \text{або} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\beta}{m} x = 0.$$

Позначимо $\frac{\alpha}{m} = 2n$; $\frac{\beta}{m} = k^2$, тоді $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0$.

Характеристичне рівняння даного диференціального рівняння

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0, \quad (31)$$

$$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Величина $k = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$ є частотою вільних коливань точки M , $n = \frac{\alpha}{2m}$ і характеризує опір середовища. Розглянемо випадок, коли $n < k$, тоді корені характеристичного рівняння (31) набувають наступного вигляду:

$$r_{1,2} = -n + \sqrt{k^2 - n^2} i,$$

(де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця), і загальний розв'язок даного однорідного диференціального рівняння набуває наступного вигляду:

$$x = e^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right).$$

Поклавши $C_1 = a \sin \varphi$ і $C_2 = a \cos \varphi$, одержимо рівняння руху точки M :

$$x = ae^{-nt} \sin \left(\sqrt{k^2 - n^2} t + \varphi \right).$$

Рух, описаний цим рівнянням, визначає *затухаючі* коливання точки M . Частота затухаючих коливань $k^* = \sqrt{k^2 - n^2}$, а їх період $T^* = \frac{2\pi}{k^*}$. Амплітуда коливань ae^{-nt} послідовно бере значення $a_1, a_2, \dots, a_n$. Для моментів часу t_i і $t_{i+1} = t_i + \frac{T^*}{2}$ відношення

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-n\left(t_i + \frac{T^*}{2}\right)}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T^*}{2}} = \text{const}.$$

Із останньої рівності видно, що $e^{-n\frac{T^*}{2}} < 1$, а значить послідовність значень амплітуди утворює спадну геометричну прогресію зі знаменником $e^{-n\frac{T^*}{2}}$.

За умовою задачі $e^{-n\frac{T^*}{2}} = 0,9$, $\frac{T^*}{2} = 0,5$ с, тоді $e^{-0,5n} = 0,9$ і, враховуючи, що $n = \frac{\alpha}{2m}$, маємо:

$$e^{-0,25\frac{\alpha}{m}} = 0,9 \text{ або } e^{0,25\frac{\alpha}{m}} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{\alpha}{m} = 4 \ln \frac{10}{9}.$$

За швидкості $v = 1$ м/с сила опору, що припадає на кожен кілограм маси, буде рівною

$$\frac{R}{mg} = \frac{\alpha}{mg} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\alpha}{m} = \frac{1}{g} \cdot 4 \ln \frac{10}{9} = 0,043 \text{ Н.}$$

Знайдемо рівняння затухаючих коливань для нашого випадку:

$$n = \frac{\alpha}{2m} = 2 \ln \frac{10}{9} \approx 0,21; \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = 0,5 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{k^2 - n^2} = \frac{\pi}{0,5} = 6,28 \text{ с}^{-1}.$$

Отже,

$$x = e^{-0,21t} (C_1 \cos 6,28t + C_2 \sin 6,28t),$$

похідна по часу

$$\dot{x} = -0,21e^{-0,21t} (C_1 \cos 6,28t + C_2 \sin 6,28t) + \\ + e^{-0,21t} \cdot 6,28(-C_1 \sin 6,28t + C_2 \cos 6,28t);$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \text{ см}, \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = C_1, \\ 0 = -0,21C_1 + 6,28C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = 4, \quad C_2 = 0,134.$$

Таким чином, шукане рівняння руху

$$x = e^{-0,21t} (4 \cos 6,28t + 0,134 \sin 6,28t).$$

40. Під час створення плавзасобів і різноманітного допоміжного обладнання (наприклад, плавучих платформ) використовується дерево. Одночасно виникає питання про розрахунок їх міцності та плавучості. Якщо уявити, що платформа набрана із дерев'яних брусків прямокутного перерізу, скріплених між собою гнучкими зв'язками (наприклад, канатами) певний інтерес може мати розв'язок наступної задачі [20].

Прямий дерев'яний брус прямокутного перерізу плаває на поверхні води (рис. 37).

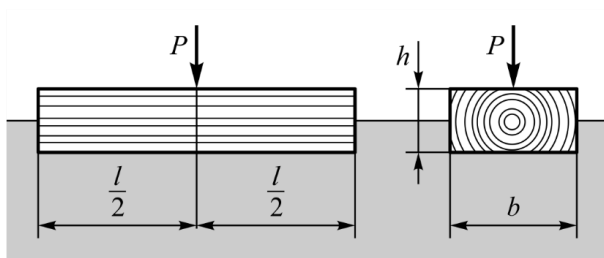


Рис. 37

Визначити напруження, що виникають у брусі, та переміщення точки прикладання сили P , якщо

$$P = 50 \text{ кг}, \quad l = 10 \text{ м} = 10^3 \text{ см},$$

$$b = 20 \text{ см}, \quad h = 10 \text{ см}.$$

Дерево – сосна з питомою вагою $\gamma_{\text{д}} = 0,6 \text{ г/см}^3$, модуль пружності $E = 10^5 \text{ кг/см}^2$, питома вага води $\gamma_{\text{в}} = 1 \text{ г/см}^3 = 10^{-3} \text{ кг/см}^3$.

Розв'язок

Позначимо через y вертикальне переміщення бруса за навантаження силою P . Диференціальне рівняння пружної лінії балки [2]

$$EJy'' = M_{\text{згин}},$$

перетворимо до наступного вигляду:

$$EJy^{IV} = M''_{\text{згин}} = q, \quad (32)$$

де $q \text{ кг/см}$ – інтенсивність навантаження – сила, що припадає на одиницю довжини бруса. У нашому випадку вона дорівнює вазі води, що витісняється одиницею довжини бруса

$$q = -by \cdot \gamma_{\text{в}}.$$

Знак « $-$ » взято, так як інтенсивність q направлена в бік, протилежний переміщенню y .

У результаті рівняння (32) набуває наступного вигляду:

$$y^{IV} + \frac{b\gamma_B}{EJ} y = 0.$$

Введемо позначення:

$$\frac{b\gamma_B}{EJ} = 4k^4,$$

де k – постійна величина, тоді

$$y^{IV} + 4k^4 y = 0. \quad (33)$$

Це співвідношення називається *рівнянням балки на пружній основі*. Прикладом такої балки є плаваючий брус прямокутного перерізу. Для нього реакція основи (води) у кожній точці пропорційна переміщенню y .

З математичної точки зору рівняння (33) являє собою звичайне однорідне диференціальне рівняння четвертого порядку з постійними коефіцієнтами. Вигляд загального розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння

$$z^4 + 4k^4 = 0.$$

Це рівняння має дві пари комплексно спряжених коренів

$$z_{1,2} = k \pm ik; \quad z_{3,4} = -k \pm ki.$$

Через це загальний розв'язок буде мати наступний вигляд:

$$y = e^{kx} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx). \quad (34)$$

Для визначення констант сформулюємо граничні умови:

$$\begin{aligned} y''|_{x=0} &= 0 \text{ (згинаючий момент при } x=0); \\ y'''|_{x=0} &= 0 \text{ (перерізна сила при } x=0); \\ y'|_{x=l/2} &= 0 \text{ (кут повороту перерізу при } x=l/2); \\ y'''|_{x=l/2} &= \frac{P}{2EJ} \text{ (перерізна сила при } x=l/2). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким чином, необхідно знайти похідні розв'язку (34) до третього порядку включно. Вони визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} y' &= k \left(e^{kx} (C_1 (\cos kx - \sin kx) + C_2 (\cos kx + \sin kx)) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-kx} (-C_3 (\cos kx + \sin kx) + C_4 (\cos kx - \sin kx)) \right), \\ y'' &= 2k^2 \left(e^{kx} (-C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx) \right), \\ y''' &= 2k^3 \left(e^{kx} (-C_1 (\cos kx + \sin kx) + C_2 (\cos kx - \sin kx)) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-kx} (-C_3 (\cos kx + \sin kx) + C_4 (\cos kx - \sin kx)) \right). \end{aligned}$$

Використовуючи умови (35), приходимо до системи

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0; \\ -C_1 + C_2 - C_3 + C_4 &= 0; \\ e^{\frac{kl}{2}} \left(C_1 \left(\cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right) + C_2 \left(\cos \frac{kl}{2} + \sin \frac{kl}{2} \right) \right) + \\ &\quad + e^{-\frac{kl}{2}} \left(-C_3 \left(\cos \frac{kl}{2} + \sin \frac{kl}{2} \right) + C_4 \left(\cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right) \right) = 0; \\ e^{\frac{kl}{2}} \left(-C_1 \left(\cos \frac{kl}{2} + \sin \frac{kl}{2} \right) + C_2 \left(\cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right) \right) + \\ &\quad + e^{-\frac{kl}{2}} \left(-C_3 \left(\cos \frac{kl}{2} + \sin \frac{kl}{2} \right) + C_4 \left(\cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right) \right) = \frac{P}{4EJk^3}. \end{aligned} \right. \quad (36)$$

Ураховуючи, що:

$$k \approx 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}, \quad \frac{kl}{2} \approx 1,17,$$

$$J = \frac{bh^3}{12} \approx 1,7 \cdot 10^3 \text{ см}^4, \quad \frac{P}{4EJk^3} \approx 5,74 \text{ см},$$

$$e^{1,17} \approx 3,21, \quad e^{-1,17} \approx 0,31, \quad \cos 1,17 \approx 0,83, \quad \sin 1,17 \approx 0,55;$$

система (36) набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} C_2 + C_3 = 0; \\ -C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0; \\ 0,9C_1 + 4,43C_2 - 0,43C_3 + 0,09C_4 = 0; \\ -4,43C_1 + 0,9C_2 - 0,43C_3 + 0,09C_4 = 5,74. \end{cases}$$

Розв'язуючи одержану систему, знайдемо

$$C_1 = -1,26; C_2 = 0,27; C_3 = -0,27; C_4 = -1,79.$$

Загальний розв'язок (34) з урахуванням знайдених констант записується в наступному вигляді:

$$y = e^{kx} (-1,26 \cos kx + 0,27 \sin kx) + e^{-kx} (-0,27 \cos kx - 1,79 \sin kx). \quad (37)$$

Визначимо переміщення точки прикладання сили P , тобто знайдемо $y|_{x=l/2}$ із співвідношення (37)

$$y|_{x=l/2} = -3,25 \text{ см}.$$

Обчислимо максимальний згинаючий момент, тобто $M_{\max}$ при $x = \frac{l}{2}$:

$$M_{\max} = EJ y''|_{x=l/2} = EJ \cdot 2k^2 \left(e^{\frac{kl}{2}} \left(-1,26 \cos \frac{kl}{2} + 0,27 \sin \frac{kl}{2} \right) + e^{-\frac{kl}{2}} \left(-0,27 \cos \frac{kl}{2} - 1,79 \sin \frac{kl}{2} \right) \right) = 4776 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Напруження знайдемо із співвідношення

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{M_{\max}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{4776}{333,3} = 14,3 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Зауваження: одержаний розв'язок (37) буде правильним тільки в тому випадку, якщо на всій довжині брус верхньою площиною буде виступати над поверхнею води. Тоді реакцію води можна вважати пропорційною вертикальному зміщенню.

За відсутності навантаження брус буде занурений у воду на величину, рівну $0,6h$ (так як $\gamma_d = 0,6\gamma_v$). Верхня площина балки знаходиться над рівнем води на $0,4h = 4 \text{ см}$. Таким чином $|y_{\max}| \leq 4$. У нашому випадку $|y_{\max}| = 3,25 \text{ см} < 4 \text{ см}$. Отже, розв'язок (37) можна застосовувати в умовах даної задачі.

§ 4. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

41. Судно має один рульовий пристрій, чотири котла і дві турбіни. Подія A означає справність рульового пристрою, B_k ($k=1, 2, 3, 4$) – справність k -го котла, а C_j ($j=1, 2$) – справність j -й турбіни. Подія D – судно кероване, що матиме місце в тому випадку, коли справні рульовий пристрій, хоча б один котел і хоча б одна турбіна. Виразити D і $\bar{D}$ через A , B_k і C_j .

Розв'язок

Згідно з умовою задачі, подія D буде мати місце в тому випадку, якщо одночасно виконуються три умови: рульовий пристрій справний (подія A), справний хоча б один із чотирьох котлів (подія $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$) і справна хоча б одна із двох турбін (подія $C_1 + C_2$). Тоді подію D можна записати у наступному вигляді:

$$D = A \cdot (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)(C_1 + C_2).$$

Подія $\bar{D}$ буде мати місце, якщо виконується хоча б одна із умов: рульовий пристрій несправний (подія $\bar{A}$), несправні всі чотири котла (подія $\bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2 \cdot \bar{B}_3 \cdot \bar{B}_4$) або несправні обидві турбіни (подія $\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2$). Тоді подію $\bar{D}$ можна записати у наступному вигляді:

$$\bar{D} = \bar{A} + \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4 + \bar{C}_1 \bar{C}_2.$$

42. Човен перевозить вантаж з одного берега протоки на другий, перетинаючи протоку за одну годину. Яка ймовірність того, що човен помітить судно, що йде вздовж протоки, якщо з човна його можуть помітити не раніше ніж за 20 хв до і не пізніше ніж через 20 хв після перетину його курсу з курсом човна? Будь-який момент і будь-яке місце перетину судном курсу човна рівноможливі.

Розв'язок

Це задача на геометричну ймовірність, вона є варіацією класичної задачі про зустріч.

Якщо x і y – час руху човна і судна, то за умовою задачі

$$0 \leq x \leq 60 \text{ і } 0 \leq y \leq 60.$$

Судно, що йде вздовж протоки, буде помічене, якщо

$$|x - y| \leq 20 \Rightarrow y \geq x - 20, y \leq x + 20.$$

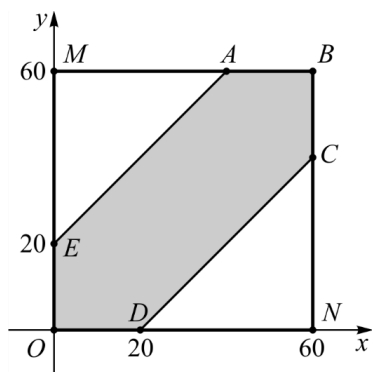


Рис. 38

Множина точок, координати яких задовольняють цим нерівностям, утворюють фігуру $ABCD OE$, зображену на рис. 38.

$$S_{MBNO} = 60^2 = 3600;$$

$$S_{ABCD OE} = 3600 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40^2 = 2000.$$

Шукана ймовірність

$$p = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

43. До причалу впродовж доби у випадкові моменти часу прибувають два судна. Одному судну (X) необхідно для розвантаження 4 год, а другому (Y) – 6 год. Яка ймовірність того, що жодному із суден не доведеться чекати початку розвантаження (подія A)?

Розв'язок

Нехай x – час прибуття судна X , а y – час прибуття судна Y . Ураховуючи, що обидва судна прибувають у проміжок часу від 0 до 24 год, маємо, що $0 \leq x \leq 24$ і $0 \leq y \leq 24$. Нехай, наприклад, судно X прибуло першим. Тоді, щоб судну Y не довелося очікувати початку розвантаження, воно повинно підійти до причалу не раніше ніж через 4 год після прибуття судна X (час розвантаження судна X), тобто повинна виконуватися умова: $y - x \geq 4$. Аналогічно, якщо першим прибуло судно Y , то повинна виконуватися умова: $x - y \geq 6$.

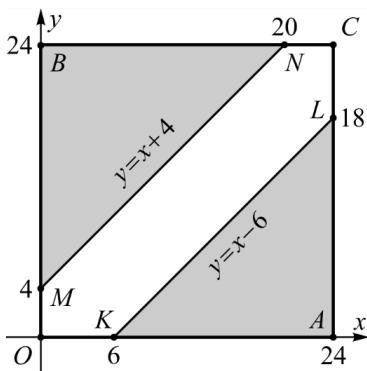


Рис. 39

Будуємо прямі $y = x + 4$ і $y = x - 6$ (рис. 39).

$$P(A) = \frac{S_{\triangle MBN} + S_{\triangle AKL}}{S_{AOBC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 18}{24 \cdot 24} = \frac{362}{576} \approx 0,63.$$

44. Відбувається бій між двома кораблями: A і B . У корабля A в запасі два постріли, у корабля B – один. Починає стріляти A : він робить по B один постріл і вражає його з ймовірністю 0,2. Якщо B не уражений, він відповідає противнику пострілом і уражає його з ймовірністю 0,3. Якщо A цим пострілом не уражений, то він робить по B свій останній постріл, яким уражає його з ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що в бою буде уражений: а) корабель A ; б) корабель B .

Розв'язок

Розглянемо події:

A – ураження корабля A ;

B – ураження корабля B .

Щоб відбулася подія A , необхідно, щоб, по-перше, A не уразив B першим пострілом (імовірність такої події 0,8) і, по-друге, B уразив A своїм пострілом у відповідь. Тоді, за теоремою множення ймовірностей, одержимо

$$p(A) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24.$$

Подія B може відбутися, якщо корабель B буде уражений першим пострілом із A (назвемо це подією B_1) або корабель B буде уражений другим пострілом із A (назвемо це подією B_2). B_1 і B_2 – несумісні події, тому $p(B) = p(B_1) + p(B_2)$.

За умовою задачі – $p(B_1) = 0,2$.

Якщо врахувати, що подія B_2 може статися тільки в разі виконання таких трьох умов:

- 1) перший постріл із A не уразив B ;
- 2) постріл у відповідь із B не уразив A ;
- 3) другий постріл із A уразив B ;

то, за теоремою множення ймовірностей, одержимо наступне:

$$p(B_2) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,224.$$

Таким чином,

$$p(B) = p(B_1) + p(B_2) = 0,24 + 0,224 = 0,424.$$

45. По кораблю робиться три одиночні постріли. Імовірність влучання під час першого пострілу 0,4, другого – 0,5, третього – 0,7. Для гарантованого виведення корабля з ладу достатньо трьох влучань; під час одного влучання корабель виходить з ладу з імовірністю 0,2, двох влучаннях – з імовірністю 0,6. Знайти ймовірність того, що в результаті трьох пострілів корабель буде виведений з ладу.

Розв'язок

Розглянемо чотири гіпотези:

H_0 – у корабель не влучив жоден снаряд;

H_1 – у корабель влучив один снаряд;

H_2 – у корабель влучило два снаряди;

H_3 – у корабель влучило три снаряди.

Згідно з теоремами додавання і множення ймовірностей, знаходимо ймовірності гіпотез:

$$p(H_0) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09;$$

$$p(H_1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36;$$

$$p(H_2) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,41;$$

$$p(H_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

Умовні ймовірності події A (вихід корабля з ладу) за цих гіпотез такі:

$$p(A/H_0) = 0; \quad p(A/H_1) = 0,2; \quad p(A/H_2) = 0,6; \quad p(A/H_3) = 1.$$

За формулою повної ймовірності одержуємо, що

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_{i=0}^3 p(H_i) p(A/H_i) = \\ &= 0,36 \cdot 0,2 + 0,41 \cdot 0,6 + 0,14 \cdot 1,0 = 0,458. \end{aligned}$$

46. На підводному човні є 6 торпедних апаратів. Протичовновий літак виявив підводний човен і атакував його. Підводний човен маневрував під час атаки, однак через близькі розриви глибинних бомб виникла ймовірність виходу торпед із ладу. Ймовірність того, що довільно взята торпеда залишилася справною, рівна $p=0,8$. Визначити: а) закон розподілу ймовірностей числа справних торпед; б) математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення числа справних торпед M .

Розв'язок

Якщо випадкова величина X виражає число появи події A в n незалежних випробувань за умови, що ймовірність

появи події A у кожному випробуванні постійна і дорівнює p , то говорять про *біноміальний розподіл*. У цьому випадку ймовірність не появи події A $q = 1 - p$.

Можливі значення випадкової величини X :

$$x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_n = n.$$

Імовірності цих можливих значень визначаються формулою Бернуллі

$$P(x = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, \dots, n).$$

Математичне сподівання випадкової величини $M_x = np$, дисперсія $D_x = npq$.

Знаходимо:

$$P(x = 0) = C_6^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^6 = 6,4 \cdot 10^{-5};$$

$$P(x = 1) = C_6^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^5 \approx 1,53 \cdot 10^{-3};$$

$$P(x = 2) = C_6^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^4 \approx 1,53 \cdot 10^{-2};$$

$$P(x = 3) = C_6^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^3 = 0,082;$$

$$P(x = 4) = C_6^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^2 \approx 0,246;$$

$$P(x = 6) = C_6^6 \cdot 0,8^6 \cdot 0,2^0 = 0,262.$$

Складаємо таблицю розподілу:

m	0	1	2	3	4	5	6
$P_n(m)$	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$1,53 \cdot 10^{-3}$	$1,53 \cdot 10^{-2}$	0,082	0,246	0,393	0,262

Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення числа справних торпед:

$$M_x = 6 \cdot 0,8 = 4,8; D_x = 6 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,96; \sigma_x = \sqrt{0,96} \approx 0,980.$$

47. Імовірність влучання глибинної бомби в підводний човен дорівнює $p=0,12$. Сторожовий корабель скинув 10 бомб. Яка ймовірність того, що підводний човен буде уражений, якщо для цього потрібно не менше двох влучань?

Розв'язок

Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях у кожному з яких імовірність появи події дорівнює p , подія настає рівно m раз і визначається формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де $q = 1 - p$.

У нашому випадку подія (влучання бомби) повинна відбутися не мене двох разів та її ймовірність дорівнює:

$$\begin{aligned} P(n \geq 2) &= 1 - P(0) - P(1) = \\ &= 1 - C_{10}^0 p^0 q^{10} - C_{10}^1 p^1 q^9 = 1 - 0,88^{10} - 10 \cdot 0,12 \cdot 0,88^9 = \\ &= 1 - 0,88^9 (0,88 + 10 \cdot 0,12) \approx 0,342. \end{aligned}$$

48. Число виявлень підводного човна в районі його бойового патрулювання протичовновими силами є випадковою величиною, розподіленою за законом Пуассона з параметром $a=0,12$. Визначити ймовірність виявлення підводного човна 5 разів.

Розв'язок

Якщо дискретна випадкова величина X визначена за законом Пуассона (число випробувань велике, а ймовірність p появи події в кожному випробуванні мала), то ймовірність того, що подія з'явиться рівно m разів визначається формулою

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

У нас $m = 5$ і $a = 2$, звідки

$$P_5 = \frac{2^5}{5!} \cdot e^{-2} \approx \frac{32}{120} \cdot 0,1353 \approx 0,0361.$$

49. Азимутальний лімб має ціну поділки 1° . Визначити ймовірність p , зробити помилку в межах $10'$, якщо відлік округлюється до найближчого цілого числа градусів (за правилами математичного округлення). Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення помилки округлення X , виражене в мінутах.

Розв'язок

Помилку округлення відліку можна розглядати як випадкову величину X , розподілену рівномірно в інтервалі між двома сусідніми цілими поділками.

Якщо випадкова величина X має рівномірний розподіл на ділянці від a до b , то математичне сподівання $M_x = \frac{a+b}{2}$, дисперсія $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$, середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ і ймовірність потрапити на ділянку $(\alpha; \beta)$ при інтервалі $(a; b) = (0; 60')$

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Помилка відліку буде меншою за $10'$, якщо випадкова величина X міститься в інтервалі $(0; 10')$ або $(50'; 60')$, загальна довжина яких дорівнює $20'$. Тоді ймовірність

$$P(0 < X < 20') = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Математичне сподівання $M_x = 30'$; дисперсія $D_x = \frac{60^2}{12} = 300$ і $\sigma_x = \sqrt{300} \approx 17,3$.

50. Бойова інформаційна керуюча система на великих протичовнових ракетних крейсерах працює до відмови в середньому 400 год. Знайти ймовірність того, що система

працюватиме без відмови не менше 600 год, якщо відомо, що випадкова величина T – час роботи системи без відмови, розподілена за показниковим законом.

Розв'язок

За умовою задачі математичне сподівання випадкової величини T , розподіленої за показниковим законом, дорівнює 400 год. При показовому розподілі функція розподілу

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

При цьому математичне сподівання

$$M[t] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{M[t]} = \frac{1}{400}.$$

Нагадаємо, що за визначенням функції розподілу $F(t) = P(T < t)$. Тоді шукана ймовірність

$$\begin{aligned} P(T \geq 600) &= 1 - P(T < 600) = 1 - F(600) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{600}{400}}\right) = \\ &= e^{-1,5} \approx 0,22. \end{aligned}$$

51. Час безвідмовної роботи корабельного радіоелектронного обладнання в бойовому поході є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом. Визначити, користуючись функцією забезпеченості (надійності), імовірність безвідмовної роботи обладнання протягом десятидобового походу, якщо середній час безвідмовної роботи становить 200 діб.

Розв'язок

Функція забезпеченості (надійності) $R(t)$ визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час t :

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

Математичне сподівання $M[t] = 200$; $\lambda = \frac{1}{M[t]} = \frac{1}{200}$; $t = 10$; $\lambda t = 0,05$.

Таким чином, імовірність безвідмовної роботи корабельного радіоелектронного обладнання

$$P = R(10) = e^{-0,05} \approx 0,951.$$

52. Протичовновий комплекс здійснює пошук підводного човна в деякому районі. Імовірність виявлення підводного човна визначається формулою $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, де t – час пошуку; λ – постійний коефіцієнт, що має зміст числа виявлень підводного човна в одиницю часу. Виявлений підводний човен зазнає одноразової атаки, під час якої протичовновий комплекс витрачає весь свій боєзапас. Імовірність його ураження дорівнює p . Визначити імовірність $P(10)$ того, що за 10 год пошуку підводний човен буде уражено, якщо $\lambda = 0,1 \text{ год}^{-1}$ і $p = 0,6$.

Розв'язок

Імовірність виявлення за 10 год дорівнює

$$F(10) = 1 - e^{-0,1 \cdot 10} = 1 - e^{-1} = 0,6321.$$

Імовірність ураження

$$P(10) = 0,6 \cdot 0,6321 \approx 0,38.$$

53. Кораблю поставлена задача таємно виставити мінну банку на фарватері⁵ шириною в 10 кабельтових⁶. Середня квадратична помилка місця корабля – 5 кабельтових. Розмірами банки можна знехтувати. Визначити: а) імовірність того, що задача буде

⁵ Фарватер – судновий прохід, безпечний у навігаційному відношенні та позначений на місцевості або на карті прохід водним простором.

⁶ Кабельтов – одиниця виміру відстані, що використовується в мореплаванні. Міжнародний кабельтов дорівнює 1/10 морської милі або приблизно 185,2 м.

виконана; б) яка має бути середня квадратична помилка, щоб міни були виставлені у фарватері з імовірністю 0,9.

Розв'язок

Задача відноситься до нормального закону розподілу випадкової величини X . Імовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $(\alpha; \beta)$ (рис. 40):

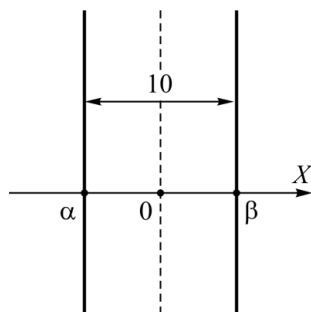


Рис. 40

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_X}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_X}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ – функція Лапласа.

а) в нашому випадку $\alpha = -5$, $\beta = 5$, $m_X = 0$.

$$P(-5 < X < 5) = \Phi\left(\frac{5}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{5}\right) = 2\Phi(1) \approx 2 \cdot 0,3413 \approx 0,683;$$

б) $0,9 = 2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0,45$. За таблицями знаходимо,

що $\frac{5}{\sigma} = 1,65 \Rightarrow \sigma = \frac{5}{1,65} = 3,03$.

54. Шість кораблів, ідучи строєм фронту, форсують лінію мінного загородження. Імовірність підриву кожного із них $p = 0,6$. Визначити найімовірнішу кількість кораблів, що підірвалися.

Розв'язок

Число m (настання події в незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність появи події дорівнює p називається *найімовірнішим*, якщо ймовірність того, що подія

настане в цих випробуваннях m разів, перевищує або, принаймні, не менша за інші можливі результати випробувань.

Найімовірніше число m визначають із подвійної нерівності

$$np - q \leq m < np + p,$$

де n – кількість випробувань, $q = 1 - p$ – імовірність того, що подія не з'явиться.

За умовою задачі: $n = 6$, $p = 0,6$, $q = 0,4$;
тоді

$$6 \cdot 0,6 - 0,4 \leq m < 6 \cdot 0,6 + 0,6;$$

$$3,2 \leq m < 4,2.$$

Так як за умовою задачі число m має бути цілим, беремо $m = 4$.

55. Одне із двох суден пливе зі швидкістю v_1 уздовж протоки шириною h , а друге курсує без зупинок зі швидкістю v_2 поперек цієї протоки перпендикулярно до курсу першого. Через сильний туман друге судно подає звукові сигнали, які чути на відстані d ($d < h$). Визначити ймовірність p того, що на першому судні почують сигнали, якщо перетин курсів суден рівноможливий у будь-якому місці протоки.

Розв'язок

Розглянемо цю задачу з точки зору спостерігача, який перебуває на першому судні. Для нього друге судно рухається зі швидкістю $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, а його траєкторія має вигляд зигзагу, розміщеного між двома прямими, паралельними курсу першого судна, які проходять через крайні точки протоки (рис. 41). Кут α нахилу ланок цього зигзага визначатиметься співвідношенням швидкостей v_1 і v_2 .

Усі точки протоки, що знаходяться на відстані меншій або рівній d від точок зазначеного зигзага входять в область чутності (тобто потрапляння в цю область означатиме, що на першому судні чути сигнал з другого).

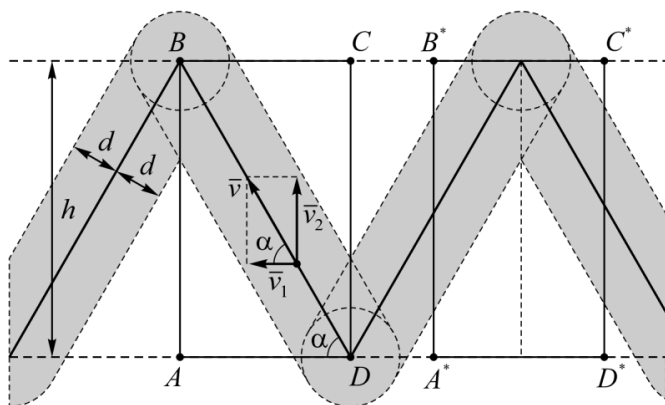


Рис. 41

Друге судно долає протоку за час $t = \frac{h}{v_2}$, за цей самий час

перше судно проходить відстань $l = v_1 t = h \frac{v_1}{v_2} = h \operatorname{ctg} \alpha$. Якщо

виділити прямокутник висотою h і шириною l , то шукана ймовірність p визначатиметься як відношення площі області чутності всередині прямокутника до всієї площі прямокутника. Оскільки невідоме початкове положення суден, то вказаний прямокутник може розташовуватися в будь-якому місці між прямими, які обмежують траєкторію руху другого судна, проте нескладно помітити (порівняйте, наприклад, прямокутники $ABCD$ і $A^*B^*C^*D^*$ на рис. 41), що площа області чутності всередині нього завжди залишається постійною. У зв'язку з цим, для зручності обчислень розглянемо прямокутник $ABCD$, у якому траєкторія руху другого судна співпадає з його діагоналлю.

Отже, шукана ймовірність p рівна (рис. 42)

$$p = \frac{S_{BEFDMN}}{S_{ABCD}}. \quad (38)$$

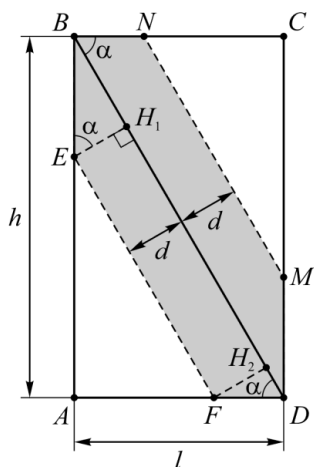


Рис. 42

Площа прямокутника

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = h \cdot l = h^2 \operatorname{ctg} \alpha. \quad (39)$$

Площа області чутності (з урахуванням того, що $S_{\triangle EAF} = S_{\triangle MCN}$)

$$S_{BEFDMN} = S_{ABCD} - 2S_{\triangle EAF}. \quad (40)$$

Із прямокутного трикутника $\triangle EH_1B$ маємо

$$EB = \frac{EH_1}{\cos \alpha} = \frac{d}{\cos \alpha},$$

тоді

$$AE = AB - EB = h - \frac{d}{\cos \alpha}.$$

Із прямокутного трикутника $\triangle FH_2D$ маємо

$$FD = \frac{FH_2}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin \alpha},$$

тоді

$$AF = AD - FD = l - \frac{d}{\sin \alpha} = h \operatorname{ctg} \alpha - \frac{d}{\sin \alpha}.$$

Площа $\triangle EAF$

$$\begin{aligned} S_{\triangle EAF} &= \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} \left(h - \frac{d}{\cos \alpha} \right) \left(h \operatorname{ctg} \alpha - \frac{d}{\sin \alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cos \alpha - d}{\cos \alpha} \cdot \frac{h \cos \alpha - d}{\sin \alpha} = \frac{(h \cos \alpha - d)^2}{2 \cos \alpha \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Тоді формула (40) набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} S_{BEFDMN} &= S_{ABCD} - 2S_{\triangle EAF} = h^2 \operatorname{ctg} \alpha - 2 \cdot \frac{(h \cos \alpha - d)^2}{2 \cos \alpha \sin \alpha} = \\ &= \frac{h^2 \cos^2 \alpha - (h^2 \cos^2 \alpha - 2hd \cos \alpha + d^2)}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{2hd \cos \alpha - d^2}{\cos \alpha \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Таким чином, площа області чутності

$$S_{BEFDMN} = \frac{2hd \cos \alpha - d^2}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (41)$$

Підставляємо (39) і (41) у (38)

$$p = \frac{S_{BEFDMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2hd \cos \alpha - d^2}{\cos \alpha \sin \alpha}}{h^2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{2hd \cos \alpha - d^2}{h^2 \cos^2 \alpha}.$$

Так як $\cos \alpha = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$, остаточно маємо

$$\begin{aligned} p &= \frac{2hd \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} - d^2}{h^2 \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{2hdv_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2} - d^2 (v_1^2 + v_2^2)}{h^2 v_1^2} = \\ &= 2 \frac{d}{h} \sqrt{1 + \frac{v_2^2}{v_1^2}} - \frac{d^2}{h^2} \left(1 + \frac{v_2^2}{v_1^2} \right). \end{aligned}$$

56. Яка відстань має бути між двома риболовецькими суднами, що йдуть паралельними курсами, щоб імовірність виявлення косяка риби, що йде посередині між ними тим же курсом, дорівнювала 0,5, якщо ширина смуги виявлення косяка для кожного судна є нормально розподіленою величиною з параметрами $\bar{x} = 3,7$ км і $\sigma = 1,1$ км, і для різних суден ці величини незалежні?

Розв'язок

Нехай випадкова величина X – відстань між першим судном і косяком риби, згідно з умовою задачі, вона розподілена за нормальним законом з параметрами $\bar{x} = 3,7$ км і $\sigma = 1,1$ км. Випадкова величина Y – відстань між другим судном і косяком риби, вона розподілена за тим же законом, що і X .

Подія A полягає в тому, що косяк риби буде виявлено першим судном, подія B – другим, причому події A і B – незалежні. Тоді, якщо відстань між двома суднами рівна h , маємо

$$p(A) = p\left(X > \frac{h}{2}\right) \text{ і } p(B) = p\left(Y > \frac{h}{2}\right).$$

За умовою задачі

$$p(A + B) = 0,5.$$

Цю рівність можна записати з використанням протилежних подій

$$1 - p(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 0,5,$$

звідки, з урахуванням незалежності $\bar{A}$ і $\bar{B}$,

$$1 - p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) = 0,5, \quad (42)$$

$$\text{де } p(\bar{A}) = p\left(X < \frac{h}{2}\right) \text{ і } p(\bar{B}) = p\left(Y < \frac{h}{2}\right).$$

Так як величини X і Y розподілені однаково, а косяк риби знаходиться посередині між суднами, то

$$p(A) = p(B) \Rightarrow p(\bar{A}) = p(\bar{B}).$$

Тоді рівність (42) набуває наступного вигляду:

$$1 - \left(p(\bar{A})\right)^2 = 0,5$$

або

$$p(\bar{A}) = p\left(X < \frac{h}{2}\right) = \sqrt{0,5} \approx 0,7071.$$

Маємо

$$p\left(-\infty < X < \frac{h}{2}\right) = 0,7071, \quad \Phi\left(\frac{h/2 - \bar{x}}{\sigma}\right) - 0,5 = 0,7071,$$

$$\Phi\left(\frac{h/2 - \bar{x}}{\sigma}\right) = 0,7071 - 0,5 = 0,2071.$$

Розв'язуємо останнє рівняння відносно h

$$\frac{h/2 - \bar{x}}{\sigma} \approx 0,545, \quad h = 2(\bar{x} + 0,545\sigma) = 2(3,7 + 0,545 \cdot 1,1) \approx 8,6 \text{ км.}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов [Текст] / Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко, С. М. Коган, Г. Л. Лунц, Е. Ф. Поршнева, Е. П. Сычова, С. В. Фролов, Р. Я. Шостак, А. Р. Янпольский. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 472 с.
2. **Белеев, Н. М.** Сопротивление материалов [Текст] / Н. М. Белеев – М. : Наука, 1976. – 608 с.
3. **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2002. – 432 с.
4. **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1964. – 576 с.
5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций [Текст] / В. Г. Волошин, М. П. Ганин, И. Я. Динер, Л. Б. Комаров, А. А. Свешников, К. Б. Старобин. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1965. – 632 с.
6. **Гриншпон, Я. С.** Геометрические, физические и экономические задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям [Текст] / Я. С. Гриншпон. – Томск : Изд-во Томского госуниверситета системы управления и радиоэлектроники, 2011. – 74 с.
7. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова – М. : ВШ, 1999., Ч. II. – 416 с.
8. Вища математика. Збірник задач [Текст] / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика – К. : А.С.К., 2001. – 480 с.
9. **Жалдак, М. И.** Теория вероятностей с элементами информатики [Текст] / М. И. Жалдак, А. Н. Квитко. – К. : Вища школа, 1989. – 262 с.

10. **Кузнецов, А. М.** Методичні вказівки до застосування диференціальних рівнянь у коливальних процесах : у 2-х частинах [Текст] / А. М. Кузнецов, О. Л. Чорний. – Миколаїв : НУК, 2015., Ч. II. – 42 с.
11. Математический анализ в примерах и задачах : в 2-х частях [Текст] / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – К. : Вища школа, 1974., Ч. I. – 680 с.
12. **Мартякова, И. Г.** Случайные величины и законы их распределения [Текст] / И. Г. Мартякова, А. Н. Третьякова. – Калининград : ВВМУ, 1993. – 46 с.
13. **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике [Текст] / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.
14. **Нагибин, Ф. Ф.** Экстремумы [Текст] / Ф. Ф. Нагибин. – М. : Просвещение, 1966. – 120 с.
15. **Ноздрин, И. Н.** Прикладные задачи по высшей математике [Текст] / И. Н. Ноздрин, И. М. Степаненко, Л. К. Костюк. – К. : Вища школа. 1974. – 172 с.
16. **Пономарев, К. К.** Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач [Текст] / К. К. Пономарев. – М. : ГУПИМП РСФСР, 1962. – 182 с.
17. **Ровенская, О. Г.** Прикладные задачи математического анализа [Текст] / О. Г. Ровенская, Н. В. Белых. – Краматорск : ДГМА, 2011. – 152 с.
18. **Романов, А. Д.** Теория вероятностей. Практикум [Текст] / А. Д. Романов. – Северодвинск : Севмашвтуз, 2010. – 98 с.
19. **Семенов, В. А.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В. А. Семенов. – СПб. : Питер, 2013. – 192 с.
20. **Феодосьев, В. И.** Избранные вопросы и задачи по сопротивлению материалов [Текст] / В. И. Феодосьев – М. : Наука, 1973. – 400 с.
21. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики : в 2-х частях [Текст] / А. А. Яблонский. – М. : Высшая школа, 1971., Ч II. – 490 с.

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВ Альберт Миколайович
НЕДЕЛЬКО Євген Юрійович
КАРПЕЧЕНКО Антон Анатолійович
ЧОРНИЙ Олександр Леонідович

**ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
В МОРЕПЛАВСТВІ ТА СУДНОБУДУВАННІ**

Навчальний посібник

Комп'ютерна правка й коректура *О. Г. Костенко*
Комп'ютерне верстання *Ю. С. Семенченко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 5,93. Вид. № 19. Зам. № 1704-30.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54007
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.