

УДК 517. 38: 532.5
DOI [https://doi.org/10.15589/znp2024.4\(497\).3](https://doi.org/10.15589/znp2024.4(497).3)

MATHEMATICAL MODELING IN PROBLEMS OF HYDRODYNAMICS

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ГІДРОДИНАМІКИ

Svitlana B. Syvash
rusboris@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9726-7865

С. Б. Сиваш,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

*Odessa National Maritime University, Odessa
Одеський національний морський університет, м. Одеса*

Abstract. One of the key branches of the economy of Ukraine as a maritime state is shipbuilding, the state of which not only determines the country's place in the world ranking of maritime states, but also significantly affects the country's defense capability. Among the many problems of the shipbuilding industry is the lack of highly qualified specialists in this area, which is directly related to the basic training of engineering students at technical universities. It is necessary to give more practical orientation to mathematical training, which will allow students of higher education to develop the general and professional competences necessary for further practical activities. The study of problems with practical content in the course of higher mathematics leads to a deeper understanding of both the mathematical science itself and its place and significance in the professional education of a future specialist in the field of shipbuilding and water engineering, while opening up the possibility of researching applied problems of related disciplines. The work considers a number of problems with practical content, the study of which is based on methods of mathematical analysis, in particular integration. This is the task of calculating the work spent on the isothermal compression of the gas in the piston, the task of determining the time during which liquid flows out of the tank in the presence of a hole, and also the task of determining the water level with its continuous inflow at the same time as outflow. As with most applied problems of the natural spectrum, when studying them, it is necessary to build a certain mathematical model, the study of which allows you to quickly and efficiently obtain a solution to the given problem. It is important that the study of such tasks does not require the executor to have knowledge of special disciplines, such as theoretical mechanics, resistance of materials, etc. This not only allows young scientists to gain professional knowledge, but also encourages them to further research activities in this direction.

Key words: shipbuilding; mathematical model; integration; gas compression.

Анотація. Одною з ключових галузей економіки України як морської держави є суднобудування, стан якого не тільки визначає місце країни у світовому рейтингу морських держав, а й суттєво впливає на обороноздатність країни. Серед багатьох проблем суднобудівної промисловості є нестача висококваліфікованих фахівців у цій області, що напряму пов'язано з базовою підготовкою студентів інженерних спеціальностей технічних університетів. Математичній підготовці необхідно надати більше практичної спрямованості, що дозволить сформулювати у здобувачів вищої освіти загальні та фахові компетентності, необхідні у подальшій практичній діяльності. Вивчення задач з практичним змістом у курсі вищої математики веде до більш глибокого розуміння як самої математичної науки, так і її місця та значення у професійній освіті майбутнього фахівця у галузі суднобудування та водної інженерії, водночас відкриваючи можливість дослідження прикладних задач суміжних дисциплін. В роботі розглянуто низку задач з практичним змістом, дослідження яких базується на методах математичного аналізу, зокрема інтегрування. Це задача на обчислення роботи, що витрачається на ізотермічне стискання газу в поршні, задача на визначення часу, протягом якого з резервуара витікає рідина за наявності пробойни, а також задача на визначення рівня води при неперервному її притоку водночас з витіканням. Як у більшості прикладних задач природничого спектру, при їх дослідженні необхідно побудувати певну математичну модель, дослідження якої дозволяє швидко та ефективно отримати розв'язок поставленої задачі. Важливо, що вивчення таких задач не потребує від виконавця знання спеціальних дисциплін, таких як теоретична механіка, спротив матеріалів тощо. Це не тільки дозволяє молодим науковцям отримувати знання професійного спрямування, а і заохочує їх до подальшої науково-дослідницької діяльності в цьому напрямі.

Ключові слова: суднобудування; математична модель; інтегрування; стискання газу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Досліджуються процеси ізотермічного стискання газу; витікання води з резервуара за наявності пробоїни, а також динаміка рівня води у випадку наявності джерела її притоку до резервуара; досліджується процес одночасного витікання води з двох резервуарів різної форми; обчислюється тиск води на занурений на певну глибину науково-дослідний модуль. Для даних задач необхідно побудувати математичної моделі та дослідити їх, застосовуючи методи математичного аналізу.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Вивченню структурних, функціональних, інформаційних математичних моделей присвячена робота [1]. У ній, зокрема, досліджується застосування звичайних диференціальних рівнянь до моделювання технічних систем. У роботі [2] математичними методами, зокрема, за допомогою теорії звичайних диференціальних рівнянь, розв'язується низка інженерних задач. Монографія [3] присвячена комплексному підходу до математичного моделювання та його застосуванню в різних сферах, у тому числі досліджуються моделі механічних коливань. Методами диференціального числення функції однієї та декількох змінних, теорії звичайних диференціальних рівнянь розв'язано широке коло задач гідрогазодинаміки та гідромеханіки [4, 5]. Багатомірні крайові задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних досліджено в роботі [6]. Нелокальні крайові задачі для псевдодиференціальних рівнянь у частинних похідних з інтегральними крайовими умовами досліджуються в роботі [7]. У роботах [8, 9] проведено аналіз різних підходів у моделюванні гідродинамічних конструкцій оптимальної форми.

ВИДОКРЕМЛЕННЯ НЕВИРІШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ

Математичний аналіз є потужним засобом для розв'язання широкого спектра інженерних задач, що виникають у гідротехніці, суднобудуванні, теплоенергетиці, прикладній гідромеханіці. Методами інтегрування можна розв'язувати не тільки традиційні задачі з практичним змістом (зазвичай це обчислення площ, об'ємів, довжин, деякі застосування в задачах фізики) а й пов'язані з більш складними фізичними процесами, що залежать від багатьох умов. Їх вивчення сприяє більш глибокому розумінню інженером-дослідником суті природних явищ та можливості застосування отриманих результатів у суміжних галузях, таких як безпека судноплавства тощо.

МЕТОДИ, ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для дослідження низки задач природничого спектру застосовано математичні методи, зокрема теорія

інтегрального числення. Об'єктом дослідження є процеси ізотермічного стискання газу, взаємодія різних середовищ та швидкість руху рідини при певних умовах, які виникають при розв'язанні інженерних задач. Предмет дослідження – математичні моделі, побудовані для розв'язання таких задач.

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

Задача 1. Знайти тиск води на поверхню науково-дослідного модуля, що має сферичну форму, якщо радіус сфери $2a$, а центр знаходиться на глибині b метрів від поверхні води.

Проведемо через центр кулі O вертикальну площину та виберемо на ній прямокутну систему координат xOy . Розсічемо кулю на глибині h горизонтальною площиною. Тоді тиск води на частину сферичної поверхні, яка відтинається, буде деякою функцією $p(h)$. При зміні h на величину dh площа частини поверхні кулі, що відтинається, дорівнюватиме площі поверхні обертання навколо осі абсцис та зміниться на величину $\Delta s \approx 2\pi y dl = ds$, де dl – диференціал дуги кола, а тиск $p(h)$ зміниться на величину $\Delta p \approx 2\pi \gamma h y dl = dp$. Тут $\gamma = \rho g$ – питома вага води, $\rho \approx 1000 \text{ кг/м}^3$ – густина води, $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння. З рівняння кола $x^2 + y^2 = 4a^2$ знайдемо $y' = -\frac{x}{y}$, тоді

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx = \frac{2a}{y} dx.$$

Врахуємо, що $h = b + x$. Отже, шуканий тиск

$$P = 2\pi\gamma \int_{-a}^a (b+x)y \frac{2a}{y} dx = 4a\pi\gamma \int_{-a}^a (b+x) dx = 2a\pi\gamma (b+x)^2 \Big|_{-a}^a = 2a\pi\gamma [(b+a)^2 - (b-a)^2] = 8\pi a^2 b \gamma.$$

Тиск на верхню половину поверхні кулі отримаємо, інтегруючи dp у межах від $-a$ до нуля:

$$P_1 = 2a\pi\gamma (b+x)^2 \Big|_{-a}^0 = 2a\pi\gamma (b^2 - (b-a)^2) = 2a^2\pi\gamma (2b-a).$$

Тиск на нижню половину поверхні кулі:

$$P_2 = 2a\pi\gamma (b+x)^2 \Big|_0^a = 2a\pi\gamma ((b+a)^2 - b^2) = 2a^2\pi\gamma (a+2b).$$

Задача 2. Прямокутний резервуар з площею горизонтального перерізу $S = 6 \text{ м}^2$ заповнений водою до висоти $H = 5 \text{ м}$. Визначити час, протягом якого вся вода витече з резервуара через отвір (пробоїну) площею $s = 0,01 \text{ м}^2$ у його днищі.

Нехай h – висота рівня води над отвором, g – прискорення вільного падіння. Тоді швидкість витікання води дорівнює $0,6\sqrt{2gh}$. Розіб'ємо шуканий час T на n малих проміжків $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$. Нехай протягом кожного з таких проміжків рівень води в резервуарі знижується на величину $\Delta x = \frac{H}{n}$. Припустимо, що протягом кожного малого проміжку часу Δt_i швидкість витоку води через отвір у днищі залишається незмінною та дорівнює її значенню на початку проміжку $0,6\sqrt{2g(H-x)}$. Прирівняємо об'єм води, що витекла з такою швидкістю через отвір у днищі

за проміжок Δt_i , до об'єму частини резервуара, що звільнилася від води за цей же проміжок часу. Отримаємо наближену рівність

$$0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}\Delta t_i \approx S\Delta x,$$

$$\text{звідки } \Delta t_i \approx \frac{S\Delta x}{0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}}.$$

Наближене значення шуканого часу T дорівнює

$$T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{S\Delta x}{0,6s\sqrt{2g(H-x_i)}},$$

де за умовою задачі точки x_i належать відрітку $[0; H]$. Можна пересвідчитися, що зі збільшенням n похибка отриманого наближеного значення T прямує до нуля. Тоді точне значення суми знайдемо як визначений інтеграл

$$T = \frac{S}{0,6s\sqrt{2g}} \int_0^H (H-x)^{-0,5} dx = \frac{2S}{0,6s\sqrt{2g}} (H-x)^{0,5} \Big|_0^H = \frac{S}{0,6s} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Підставивши числові значення параметрів, отримаємо: $T \approx 1010$ сек $\approx 16,83$ хв.

Якби зменшення води в резервуарі весь час компенсувалося, тобто рівень води залишався незмінним, то й швидкість витікання води була би сталою та становила би $0,6\sqrt{2gH}$. У цьому випадку щосекунди через отвір у дніщі резервуара буде витікати об'єм води $0,6s\sqrt{2gH}$, рівний об'єму прямого циліндра з площею основи s та висотою $0,6\sqrt{2gH}$. Тому при вказаному припущенні об'єм води, що міститься в резервуарі, витече з нього протягом часу

$$T_1 = \frac{SH}{0,6s\sqrt{2gH}} = \frac{1}{2} \frac{S}{0,6s} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Порівнявши цей результат з попереднім, доходимо висновку, що час витікання T без заміщення води, яка витікла, удвічі більший порівняно з часом T_1 .

Задача 3. В умовах попередньої задачі визначити, за який час рівень води в резервуарі зміниться на h м за наявності неперервного притоку V м³ води щосекунди.

У цьому випадку за малий проміжок часу Δt об'єм води в резервуарі зміниться на величину $S\Delta x \approx [0,6s\sqrt{2g(H-x)} - V]\Delta t$, звідки

$$\Delta t \approx \frac{S\Delta x}{0,6s\sqrt{2g(H-x)} - V} = dt.$$

Тоді шуканий час T_2 , за який рівень води у резервуарі зміниться на h м:

$$T_2 = a \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{H-x-b}}, \text{ де } a = \frac{S}{0,6s\sqrt{2g}}, b = \frac{V}{0,6s\sqrt{2g}}.$$

Застосуємо підстановку $\sqrt{H-x} = z$, тоді $dx = -2zdz$. При $x=0$ $z_1 = \sqrt{H}$, при $x=h$ маємо $z_2 = \sqrt{H-h}$.

Отже

$$\begin{aligned} T_2 &= a \int_{z_1}^{z_2} \frac{-2zdz}{z-b} = 2a \int_{z_1}^{z_2} \left(1 + \frac{b}{z-b} \right) dz = 2a(z + b \ln |z-b|) \Big|_{\sqrt{H}}^{\sqrt{H-h}} = \\ &= 2a \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{H} + b \ln \left| \frac{\sqrt{H-h}-b}{\sqrt{H}-b} \right| \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що зміна рівня води може бути двоякою. Якщо у початковий момент при $h=0$ швидкість притоку води V буде менше, ніж швидкість її витікання з резервуара $0,6s\sqrt{2gH}$, то рівень води буде знижуватися до тих пір, доки ці швидкості не зрівняються. Після цього вода буде залишатися на однаковому рівні, що менший від початкового рівня H на величину h_1 , яку можна визначити з рівняння $0,6s\sqrt{2g(H-h_1)} = V$. Якщо ж на початку процесу $V > 0,6s\sqrt{2gH}$, то рівень води в резервуарі буде підніматися, доки не перевищить початковий рівень H на величину h_2 , що визначається з рівняння $0,6s\sqrt{2g(H+h_2)} = V$, після чого рівень води в резервуарі буде залишатися незмінним.

Задача 4. Два однакових резервуара, що мають форму конуса з вертикальною віссю, по вінця заповнені водою (рис. 1). Один з них закріплений вершиною конуса донизу. У певний момент вода з резервуарів починає витікати через однакові круглі отвори внизу. Визначити момент часу, коли рівень води в обох резервуарах стане однаковим, якщо витікання почалося синхронно.

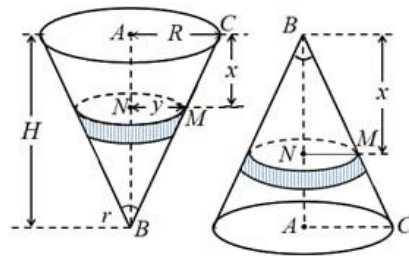


Рис. 1.

Побудуємо математичну модель задачі. Вважатимемо, що час t , за який рівень води у першому або у другому резервуарі зменшиться на величину x , є деякою функцією $t(x)$, та знайдемо її диференціал dt при зміні x на величину dx .

Нехай зниженню рівня води у баку на малу величину dx відповідає малий приріс часу Δt . Для спрощення обчислень припустимо, що протягом цього малого проміжку часу вода витікає з резервуара зі сталою швидкістю $0,6\sqrt{2g(H-x)}$. Тоді об'єм води, що витікла з такою швидкістю через отвір площею πr^2 у дніщі за час Δt , становитиме $\Delta v \approx 0,6\pi r^2 \sqrt{2g(H-x)} \Delta t$. За цей же час Δt об'єм води у резервуарі зменшиться на величину $\Delta v_1 = \pi y^2 dx$, яка має дорівнювати об'єму Δv води, що витікла. З рівності $\Delta v = \Delta v_1$ отримаємо: $\Delta t \approx \frac{y^2 dx}{0,6r^2 \sqrt{2g(H-x)}} = dt$. Час T повного спустошення першого або другого резервуара отримаємо, інтегруючи dt у межах від $x=0$ до $x=H$:

$$T = \frac{1}{0,6r^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{y^2 dx}{\sqrt{H-x}}.$$

Для обчислення цього інтеграла виразимо змінну y через x . Оскільки r є малим порівняно з іншими розмірами резервуара, то будемо вважати, що осьовий

переріз резервуара має форму трикутника, а не трапеції. З подібності трикутників ABC та NBM маємо:

а) для першого резервуара

$$\frac{H}{R} = \frac{H-x}{y}, \quad y = \frac{R}{H}(H-x);$$

б) для другого резервуара $\frac{H}{R} = \frac{x}{y}, \quad y = \frac{R}{H}x$.

Тому час T_1 повного спустошення першого резервуара

$$T_1 = \frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{(H-x)^2 dx}{\sqrt{H-x}} = \frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}} \cdot \frac{2(H-x)^{2,5}}{5} \Big|_0^H = \frac{2R^2}{3r^2} \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

Час T_2 повного спустошення другого резервуара виражається інтегралом

$$T_2 = \frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{x^2 dx}{\sqrt{H-x}}.$$

Виконаємо заміну $z = H - x$, тоді $dx = -dz$. При $x = 0$ $z_1 = H$, при $x = H$ $z_2 = 0$. Таким чином,

$$\int_0^H \frac{x^2 dx}{\sqrt{H-x}} = - \int_H^0 \frac{(H-z)^2 dz}{\sqrt{z}} = \int_0^H (H^2 z^{-0,5} - 2Hz^{0,5} + z^{1,5}) dz = \frac{16}{15} H^{2,5}$$

Підставимо знайдене значення інтеграла, отримаємо: $T_2 = \frac{16R^2}{9r^2} \sqrt{\frac{H}{2g}}$.

Порівняємо отримані величини: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{3}$. З цього співвідношення доходимо висновку, що перший резервуар спустошується значно (майже утричі) швидше. При цьому, якщо вода з резервуарів починає витікати водночас, то на початку процесу рівень води у першому резервуарі буде вище, ніж у другому. Далі у певний момент рівні води зрівняються, після чого рівень води у першому резервуарі буде нижче, ніж у другому і ця різниця буде дедалі зростати.

Щоб визначити момент часу, через який після початку витікання води з резервуарів рівень води в обох стане однаковим, знайдемо залежність часу t витікання води від величини x зниження її рівня для кожного резервуара. Інтегруючи dt у межах від $x = 0$ до $x = x$, отримаємо:

а) для першого резервуара

$$t = b \int_0^x (H-x)^{1,5} dx = 0,4b(H-x)^{2,5} \Big|_0^x = 0,4b[H^{2,5} - (H-x)^{2,5}],$$

$$\text{де } b = \frac{R^2}{0,6r^2H^2\sqrt{2g}};$$

б) для другого резервуара

$$\begin{aligned} t &= b \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{H-x}} = b \int_{H-x}^H \frac{(H-z)^2 dz}{\sqrt{z}} = b \int_{H-x}^H (H^2 z^{-0,5} - 2Hz^{0,5} + z^{1,5}) dz = \\ &= b \left(2H^2 z^{0,5} - \frac{4}{3} H z^{1,5} + 0,4 z^{2,5} \right) \Big|_{H-x}^H = \\ &= b \left\{ 2H^2 [H^{0,5} - (H-x)^{0,5}] - \frac{4}{3} H [H^{1,5} - (H-x)^{1,5}] + 0,4 [H^{2,5} - (H-x)^{2,5}] \right\}. \end{aligned}$$

Будемо розглядати отримані залежності t від x для першого та другого резервуарів як рівняння з шуканими невідомими t та x . Розв'яжемо їх як систему, виключаючи змінну t . Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} [H^{2,5} - (H-x)^{2,5}] &= 2H^2 [H^{0,5} - (H-x)^{0,5}] - \frac{4}{3} H [H^{1,5} - (H-x)^{1,5}] + \\ &+ \frac{2}{5} [H^{2,5} - (H-x)^{2,5}]; \end{aligned}$$

$$H [H^{0,5} - (H-x)^{0,5}] - \frac{2}{3} [H^{1,5} - (H-x)^{1,5}] = 0;$$

$$\sqrt{H-x}(H+2x) = \sqrt{H^3}; \quad 3H^2 - 4x^2 = 0; \quad x = \frac{H\sqrt{3}}{2}.$$

За знайденим значенням x з першого (або другого) рівняння визначимо t : $t = \frac{2}{5} b H^{2,5} \left[1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2,5} \right]$.

Через цей проміжок часу після початку витікання води з обох резервуарів рівень води в них буде однаковим і становитиме

$$h = H - x = H \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 0,15H.$$

ОБГОВОРЕННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ВИСНОВКИ

Отримані результати можуть мати широке застосування при вивченні питань безпеки та надійності судового обладнання, будівництві судових установок та гідротехнічного устаткування. Їх також можна використовувати як базові при підготовці спеціалістів відповідного профіля та молодих науковців інженерних спеціальностей.

REFERENCES

- [1] Dubovoi, V. M., Kvietyi, R. N., Mykhalov, O. I., i A.V. Usov, A. V. (2017). *Modeliuvannia ta optymizatsiia system. [Modeling and optimization of systems]*. Vinnytsia: PP «TD Edelweis» [in Ukrainian].
- [2] Syvash S.B., Sokolovska H.V. (2022). *Matematychni metody v zadachakh vodnoi inzhenerii*. [Mathematical methods in water engineering problems]. Tavriiskyi naukovyi visnyk. Vyp. 1. Kherson, 175-180 [in Ukrainian]. <https://journals.ksauniv.ks.ua/index.php/tech/issue/view/11>
- [3] Banerjee, S. (2021). *Mathematical modeling*. New York. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781351022941>
- [4] Tkachenko, S.I., Stepanova, N.D. (2012). *Hidrozadynamika. [Hydrogas dynamics]*. Vinnytsia. VNTU [in Ukrainian].
- [5] Kolchunov, V.I. (2004). *Teoriia i prykladna hidromekhanika*. Kyiv [in Ukrainian].
- [6] Syvash, S. B. (2023). Kraiovi zadachi dlia biharmonichnoho rivniannia z ekstremalnoiu hranychnoiu umovoio. *Zbirnyk nauk. prats NUK im. Makarova*. № 2-3(491-492), 29-35. <http://znp.nuos.mk.ua/2-3-2023> [in Ukrainian].
- [7] Levkin, D. (2023). Application of calculation methods for solving applied problems of head and mass exchange in complex systems. *MEASURING AND COMPUTING DEVICES IN TECHNOLOGICAL PROCESSES*, (2), 179-182. <https://doi.org/10.31891/2219-9365-2023-74-24>
- [8] Soonhung Han, Yeon-Seung Lee & Young Boc Choi (2012). Hydrodynamic hull form optimization using parametric models. *Journal of Marine Science and Technology* :1–17. <https://doi.org/10.1007/s00773-011-0148-8>

- [9] Yang C., & Huang F. (2016). An overview of simulation-based hydrodynamic design of ship hull forms. *J Hydrodyn Ser B*. 28(6):947–960. [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(16\)60696-0](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60696-0).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Дубовой, В. М., Кветний, Р. Н., Михальов, О. І., і Усов, А. В. (2017). *Моделювання та оптимізація систем*. Вінниця: ПП «ТД Едельвейс».
- [2] Сиваш, С.Б., Соколовська, Г.В. (2022). Математичні методи в задачах водної інженерії. *Таврійський науковий вісник. Вип. 1. Херсон*, 175-180. <https://journals.ksauniv.ks.ua/index.php/tech/issue/view/11>
- [3] Banerjee, S. (2021). *Mathematical modeling*. New York. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781351022941>
- [4] Ткаченко, С.Й., Степанова, Н.Д. (2012). *Гідрогазодинаміка*. Вінниця: ВНТУ.
- [5] Колчунов, В.І. (2004). *Теорія і прикладна гідромеханіка*. Київ.
- [6] Сиваш, С. Б. (2023). Крайові задачі для бігармонічного рівняння з екстремальною граничною умовою. *Збірник наук. праць НУК ім. Макарова. № 2-3(491-492)*, 29-35. <http://znp.nuos.mk.ua/2-3-2023>
- [7] Levkin, D. (2023). Application of calculation methods for solving applied problems of head and mass exchange in complex systems. *MEASURING AND COMPUTING DEVICES IN TECHNOLOGICAL PROCESSES*, (2), 179-182. <https://doi.org/10.31891/2219-9365-2023-74-24>
- [8] Soonhung, Han, Yeon-Seung Lee&Young Boc Choi (2012). Hydrodynamic hull form optimization using parametric models. *Journal of Marine Science and Technology* :1-17. <https://doi.org/10.1007/s00773-011-0148-8>
- [9] Yang, C., & Huang, F. (2016). An overview of simulation-based hydrodynamic design of ship hull forms. *J Hydrodyn Ser B*. 28(6):947–960. [https://doi.org/10.1016/S1001-6058\(16\)60696-0](https://doi.org/10.1016/S1001-6058(16)60696-0).

© Сиваш С. Б.

Дата надходження статті до редакції: 12.11.2024

Дата затвердження статті до друку: 25.11.2024