

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

А. М. КУЗНЕЦОВ, О. Л. ЧОРНИЙ

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ У КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСАХ
У двох частинах
Частина II**

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв ♦ НУК ♦ 2015

УДК 517.91(076)

ББК 22.161.6я73

К 89

Автори: А. М. Кузнецов, кандидат фізико-математичних наук, професор Національного університету кораблебудування;

О. Л. Чорний, викладач

Рецензент В. П. Фролов, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано Методичною радою НУК

Кузнецов А. М.

К 89 Методичні вказівки до застосування диференціальних рівнянь у коливальних процесах : у 2 ч. Ч. II / А. М. Кузнецов, О. Л. Чорний. – Миколаїв: НУК, 2014. – 44 с.

Дані методичні вказівки відносяться до серії РОЗВ'ЯЗНИК і є продовженням частини першої. В них розглядається близько 30 задач теоретичної механіки на вимушені коливання та на вплив опору на вимушені коливання. Розв'язання таких задач є ніщо інше, як застосування теорії диференціальних рівнянь до руху матеріальної точки. У дужках вказано номер задачі зі збірника [4].

Призначені для студентів денної і заочної форм навчання, які вивчають відповідні розділи у вищій математиці і теоретичній механіці в умовах кредитно-модульної системи.

УДК 517.91 (076)
ББК 22.161.6я73

© Кузнецов А. М., Чорний О. Л., 2015

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2015

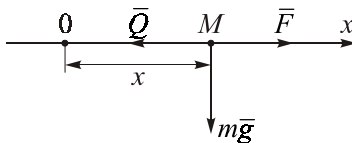
3. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

61 (32.78). Знайти рівняння прямолінійного руху точки масою m , що знаходиться під впливом відновлюючої сили $Q = -cx$ і постійної сили F_0 . В початковий момент $t = 0$, $x_0 = 0$ і $\dot{x}_0 = 0$. Знайти також період коливань.

Розв'язання

Диференціальне рівняння (д. р.) вимушених коливань в проекції на вісь Ox :

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \text{ або } \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{F_0}{m}. \quad (1)$$



Позначивши через $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, маємо $\ddot{x} + k^2x = \frac{F_0}{m}$. Загальний розв'язок неоднорідного д. р. II-го порядку

$$x = x^* + \bar{x},$$

де x^* – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $\bar{x}$ – будь-який частинний розв'язок. Характеристичне рівняння для даного однорідного д. р. $r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm ki$ і $x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$. Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\bar{x} = A$, $\dot{\bar{x}} = 0$ і $\ddot{\bar{x}} = 0$. Тоді із (1) маємо, що $k^2A = \frac{F_0}{m}$

и $A = \frac{F_0}{k^2m} = \frac{F_0}{c}$, а отже

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F_0}{c},$$

$$\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt).$$

Використовуємо початкові умови:
$$\begin{cases} 0 = C_1 + \frac{F_0}{c} \\ 0 = kC_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{F_0}{c}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Тоді рівняння прямолінійного руху
$$x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos kt).$$

Період коливань
$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

62 (32.79). Знайти рівняння прямолінійного руху точки масою m , що знаходиться під дією відновлюючої сили $Q = -cx$ і сили $F = \alpha t$. В початковий момент точка знаходиться в положенні статичної рівноваги і її швидкість дорівнює нулю.

Розв'язання

Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{\alpha}{m} t. \quad (2)$$

$$x = x^* + \bar{x}, \quad x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

де $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$. $\bar{x} = At$, $\dot{\bar{x}} = A$, $\ddot{\bar{x}} = 0$. Підставляючи ці значення в (2),

отримуємо, що $A = \frac{\alpha}{k^2 m}$. Таким чином, $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{\alpha}{k^2 m}$,

тоді $\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt)$. $x_0 = 0$ і $\dot{x}_0 = 0$.

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 0 = kC_2 + \frac{\alpha}{k^2 m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = -\frac{\alpha}{mk^3}. \end{cases}$$

$$x = \frac{\alpha}{mk^3}(kt - \sin kt).$$

63 (32.80). Знайти рівняння прямолінійного руху точки масою m , на яку діє відновлююча сила $Q = -cx$ і сила $F = F_0 e^{-\alpha t}$, якщо в початковий момент точка знаходилася в положенні рівноваги в стані спокою.

Розв'язання

Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}. \quad (3)$$

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0.$$

$$x = x^* + \bar{x}, x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \bar{x} = A e^{-\alpha t}, \dot{\bar{x}} = -A\alpha e^{-\alpha t},$$

$\ddot{\bar{x}} = A\alpha^2 e^{-\alpha t}$. Підставляючи ці значення в (3), отримаємо

$$A\alpha^2 + Ak^2 = \frac{F_0}{m} \text{ и } A = \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)}.$$

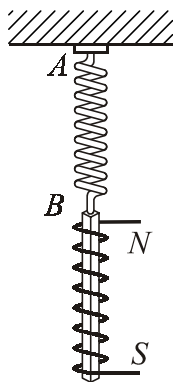
Отже,

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F_0 e^{-\alpha t}}{m(k^2 + \alpha^2)}$$

$$\text{і } \dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt) - \frac{\alpha F_0 e^{-\alpha t}}{m(k^2 + \alpha^2)}$$

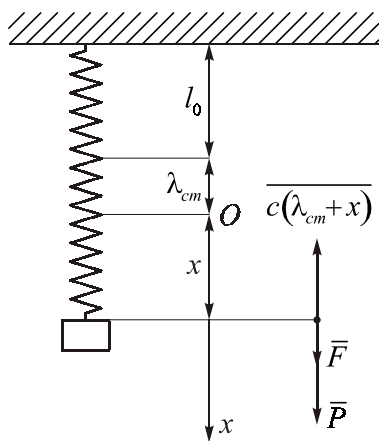
$$\begin{cases} 0 = C_1 + \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)}, & C_1 = -\frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)}, \\ 0 = kC_2 - \frac{\alpha F_0}{m(k^2 + \alpha^2)} & \Rightarrow C_2 = \frac{\alpha F_0}{km(k^2 + \alpha^2)}. \end{cases}$$

$$x = \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)} \left(e^{-\alpha t} - \cos kt + \frac{\alpha}{k} \sin kt \right), \text{ де } k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$



64 (32.81). На пружині, коефіцієнт жорсткості якої $c = 19,6$ Н/м, підвішено магнітний стержень масою 100 г. Нижній кінець магніту проходить через котушку, по якій проходить змінний струм $I = 20 \sin 8\pi t$ А. Струм йде з моменту часу $t = 0$, втягуючи стержень в соленоїд; до цього моменту магнітний стержень висів на пружині нерухомо. Сила взаємодії між магнітом і котушкою визначається рівністю $F = 0,016\pi IH$. Визначити вимушені коливання магніту.

Розв'язання



Положення статичної рівноваги, для якого $P = c\lambda_{cm}$, приймаємо за початок координат O . В момент часу t стержень буде знаходитись від цього положення на відстані x і д. руху набуває вигляду:

$$m\ddot{x} = P + F - c(\lambda_{cm} + x) = -cx + F,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{F}{m},$$

$$\text{але } F = 0,016\pi I = 0,32\pi \sin 8\pi t.$$

$$\frac{F}{m} = 3,2\pi \sin 8\pi t,$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{19,6}{0,1} = 196, \text{ звідки}$$

$$\ddot{x} + 196x = 3,2\pi \sin 8\pi t. \quad (4)$$

Вимушені коливання шукаємо у вигляді $x = A \cos 8\pi t + B \sin 8\pi t$.
 $\dot{x} = 8\pi(-A \sin 8\pi t + B \cos 8\pi t)$, $\ddot{x} = 64\pi^2(-A \cos 8\pi t - B \sin 8\pi t)$.
 Підставляємо знайдені значення в (4):

$$\begin{aligned} & -A64\pi^2 \cos 8\pi t - B64\pi^2 \sin 8\pi t + 196A \cos 8\pi t + 196B \sin 8\pi t = \\ & = 3,2\pi \sin 8\pi t \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos 8\pi t \\ \sin 8\pi t \end{array} \right\} \begin{array}{l} -64\pi^2 A + 196A = 0 \\ -64\pi^2 B + 196B = 3,2\pi \end{array} \Rightarrow A = 0, \end{aligned}$$

$$B = \frac{3,2\pi}{-64\pi^2 + 196} = -0,023 \text{ і } \underline{x = -0,023 \sin 8\pi t \text{ (м)}} = \underline{-2,3 \sin 8\pi t \text{ (см)}}$$

65 (32.82). В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху магнітного стержня, якщо його підвісили до кінця не розтягнутої пружини і відпустити без початкової швидкості.

Розв'язання

Згідно розв'язку задачі 64 д. р. руху магнітного стержня має вигляд

$$\ddot{x} + 196x = 3,2\pi \sin 8\pi t. \quad (1)$$

Загальний розв'язок (1): $x = x^* + \bar{x}$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, де $k = \sqrt{196} = 14$. Частинні розв'язки знайдемо у вигляді

$$\bar{x} = -2,3 \sin 8\pi t \text{ (см)}.$$

Таким чином, $x = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t - 2,3 \sin 8\pi t \text{ (см)}$.

$$\begin{aligned} \text{Початкові умови: } t = 0, \quad x_0 = -\lambda_{cm} &= -\frac{mg}{c} = -\frac{0,1 \cdot 9,8}{19,6} = \\ &= -0,05 \text{ см} = -5 \text{ мм}, \quad \dot{x}_0 = v_0 = 0, \quad \dot{x} = 14(-C_1 \sin 14t + C_2 \cos 14t) - \\ &- 2,3 \cdot 8\pi \cos 8\pi t. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -5 = C_1, \\ 0 = 14C_2 - 2,3 \cdot 8\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -5, \\ C_2 = 4,13. \end{cases}$$

$$\underline{x = -5 \cos 14t + 4,13 \sin 14t - 2,3 \sin 8\pi t \text{ (см).}}$$

66 (32.83). В умовах задачі 64 знайти рівняння руху магнітного стержня, якщо йому в положенні статичної рівноваги надали початкову швидкість $v_0 = 5 \text{ см/с}$.

Розв'язання

Згідно задачі 64 д.р. руху

$$\ddot{x} + 196x = 10,05 \sin 8\pi t. \quad (1)$$

Загальний розв'язок $x = x^* + \bar{x}$. Знайдено, що $\bar{x} = -2,3 \sin 8\pi t$. Шукаємо загальний розв'язок однорідного рівняння $x^* = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t$.

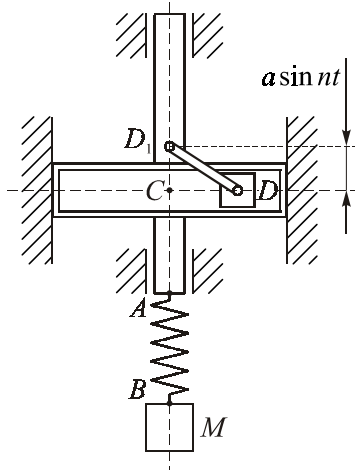
$$x = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t - 2,3 \sin 8\pi t.$$

Початкові умови: $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 5 \text{ см/с}$.

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 5 = 14C_2 - 2,3 \cdot 8\pi \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = \frac{5 + 57,8}{14} = 4,486.$$

$$\underline{x = 4,486 \sin 14t - 2,3 \sin 8\pi t.}$$

67 (32.84). Гиря M підвішена на пружині AB , верхній кінець якої здійснює гармонічні коливання по вертикальній прямій амплітуди a і частоти n , так що $D_1 C = a \sin nt \text{ см}$. Визначити вимушені коливання гирі M при наступних даних: маса гирі рівна 400 г , від дії сили $39,2 \text{ Н}$ пружина подовжується на 1 м , $a = 2 \text{ см}$, $n = 7 \text{ рад/с}$.



Розв'язання

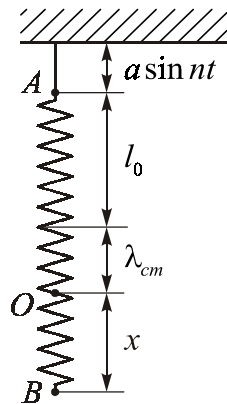
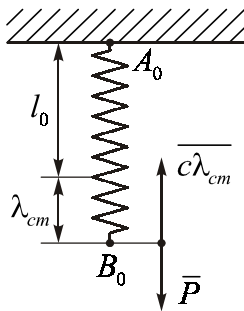
Початок координат O вибираємо в положенні статичної рівноваги вантажу, коли куліса займає середнє положення B . Диференціальне рівняння руху вантажу:

$$m\ddot{x} = P - c\lambda = P - c(x + l_0 + \lambda_{cm} - a \sin nt - l_0)$$

$$\text{або } \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{ac}{m} \sin nt.$$

Позначимо $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{ac}{m} = h$. Шукаємо частинний розв'язок, що визначає вимушені коливання, так:

$$x = A \sin nt + B \cos nt, \quad \dot{x} = An \cos nt - Bn \sin nt, \\ \ddot{x} = -An^2 \sin nt - Bn^2 \cos nt.$$



Підставляємо ці значення в д. р.:

$$-An^2 \sin nt - Bn^2 \cos nt + Ak^2 \sin nt - Bk^2 \cos nt = h \sin nt.$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin nt \\ \cos nt \end{array} \right| \begin{array}{l} -An^2 + Ak^2 = h \\ -Bn^2 + Bk^2 = 0 \end{array} \Rightarrow A = \frac{h}{k^2 - n^2}, B = 0.$$

$$h = \frac{2 \cdot 39,2}{0,4} = 196, \text{ тоді } A = \frac{196}{\frac{39,2}{0,4} - 49} = 4.$$

Закон вимушених коливань: $x = 4 \sin 7t \text{ см.}$

68 (32.85). Визначити рух гирі M (див. задачу 67), що підвішена на пружині AB , верхній кінець якої A здійснює гармонічні коливання по вертикалі амплітуди a і кругової частоти k , статичний розтяг пружини під дією ваги гирі рівний δ . В початковий момент точка A займає своє середнє положення, а гиря M знаходиться в спокої; початкове положення гирі прийняти за початок координат, а вісь Ox направити по вертикалі вниз.

Розв'язання

Диференціальне рівняння руху вантажу M буде (див. розв'язок задачі 67)

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin nt, \quad (1)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{ac}{m}.$$

$$\begin{aligned} &\text{Загальний розв'язок цього рівняння для } n \neq k: x = x_1 + x_2 = \\ &= C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{h}{k^2 - n^2} \sin nt, \text{ тому } \dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt + \\ &+ \frac{hn}{k^2 - n^2} \cos nt. \end{aligned}$$

$$\text{Початкові умови: } \begin{matrix} t=0, \\ x_0=0, \\ \dot{x}_0=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 0=C_2, \\ 0=C_1k+\frac{hn}{k^2-n^2}, \end{cases} \quad C_1=\frac{hn}{k(k^2-n^2)}.$$

$$\text{Отже, } x = -\frac{hn}{k(k^2-n^2)}\sin kt + \frac{h}{k^2-n^2}\sin nt = \frac{h}{n^2-k^2} \times \\ \times \left(\frac{n}{k}\sin kt - \sin nt \right). \text{ Так як } k^2 = \frac{c}{m} = \frac{mg}{\delta m} = \frac{g}{\delta}, \text{ то } k = \sqrt{\frac{g}{\delta}}, h = \frac{ac}{m} = \frac{ag}{\delta} \\ \text{і } x = \frac{ag}{k^2\delta - g} \left(n\sqrt{\frac{\delta}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\delta}}t - \sin nt \right).$$

Для $n = k$ частинний розв'язок шукаємо у вигляді $x_2 = Dt \sin nt$ і тоді $D = -\frac{ak}{2}$, загальний розв'язок д. р. з урахуванням початкових умов набуває вигляду $x = \frac{a}{2} \left(\sin \sqrt{\frac{g}{\delta}}t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}t \cdot \cos \sqrt{\frac{g}{\delta}}t \right).$

69 (32.86). Статичний прогин ресор завантаженого товарного вагону $\Delta l_{cm} = 5$ см. Визначити критичну швидкість V руху вагону, при якій почнеться "галопування" вагону, якщо на стиках рейок вагон отримує поштовхи, що викликають вимушені коливання вагону на ресорах; довжина рейок $L = 12$ м.

Розв'язання

Товарний вагон представимо матеріальною точкою маси m , вагою $P = mg$. Статичний прогин ресор $\Delta l_{cm} = \frac{P}{c}$.

На матеріальну точку пружна сила

$$F = c(\Delta l_{cm} + x)$$

а також збурююча періодична сила

$$Q = A \sin pt,$$

де $p = \frac{2\pi}{T}$, T – час, витрачений на одне коливання і рівний

$T = \frac{L}{V}$. Отже, рух точки визначається наступним д. р.:

$$\ddot{x} + \frac{g}{\Delta l_{cm}} x = \frac{Ag}{p} \sin pt.$$

Галоупування виникає при збігу частоти збурюючої сили

p і частоти вільних коливань k , тобто при $p = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi L}{V \cdot 3,6}$

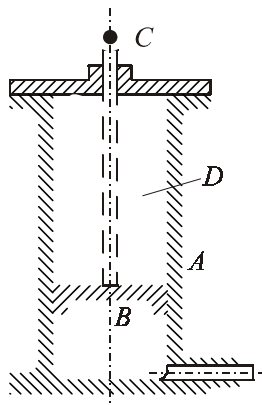
$$([V] = \frac{\text{км}}{\text{год}}).$$

$$\begin{aligned} \frac{g}{\Delta l_{cm}} = \frac{4\pi^2 V^2}{L^2} \Rightarrow V &= \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta l_{cm}}} = \frac{12}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{9,81}{0,05}} = \\ &= 26,75 \text{ м/с} \approx \underline{\underline{96,3 \text{ км/год}}}. \end{aligned}$$

70 (32.87). Індикатор машини складається з циліндра A , в якому ходить поршень B , що упирається в пружину D ; з поршнем з'єднаний стержень BC , до якого прикріплено пишучий штифт C . Припускаючи, що тиск пару, виражений в паскалях,

змінюється згідно з формулою $p = 10^5 \left(4 + 3 \sin \frac{2\pi t}{T} \right)$,

де T – час одного оберту валу, визначити амплітуду вимушених коливань штифта C , якщо вал здійснює 180 об/хв, при наступних даних: площа поршня індикатора $\sigma = 4 \text{ см}^2$, маса рухомої частини індикатора 1 кг, пружина стискається на 1 см силою 29,4 Н.



Розв'язання

Диференціальне рівняння руху поршня індикатора

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = 10^5 \left(4 + 3 \sin \frac{2\pi t}{T} \right) \sigma. \quad (1)$$

Час одного оберту валу $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \text{ с}$. Врахо-

вуючи, що $1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2}$, а $\sigma = 4 \text{ см}^2 = 0,0004 \text{ м}^2$,

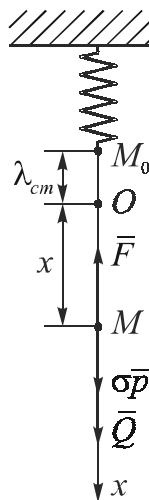
отримаємо, що $10^5 \left(4 + 3 \sin \frac{2\pi t}{T} \right) \sigma = 10 \cdot (16 + 12 \sin 6\pi t) (\text{Н})$.

Частинний розв'язок (1) шукаємо у вигляді:

$$x = A + B \sin 6\pi t \Rightarrow \dot{x} = 6\pi B \cos 6\pi t,$$

$\ddot{x} = -36 \cdot \pi^2 B \sin 6\pi t$. Знайдені значення підставляємо в (1), враховуючи, що $c = 2940 \text{ Н/м}$:

$$-36\pi^2 B \sin 6\pi t + 2940 B \sin 6\pi t = 10(16 + 12 \sin 6\pi t) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow A = \frac{10 \cdot 16}{2940} = 5,44 \text{ см};$$

$$B = \frac{10 \cdot 12}{-36\pi^2 + 2940} = 0,0464 \text{ м} = 4,46 \text{ см}.$$

Таким чином, $x = 4,64 \sin 6\pi t + 5,44$ (см).

71 (32.89). Вантаж масою $m = 200$ г, підвішений на пружині, коефіцієнт жорсткості якої $9,8$ Н/см, знаходиться під дією сили $S = H \sin pt$, де $H = 20$ Н, $p = 50$ рад/с. В початковий момент $x_0 = 2$ см, $v_0 = 10$ см/с. Початок координат вибрано в положенні статичної рівноваги. Знайти рівняння руху вантажу.

Розв'язання

Диференціальне рівняння руху вантажу

$$m\ddot{x} + cx = H \sin pt \text{ або } \ddot{x} + 4900x = 100 \sin 50t. \quad (1)$$

Відповідне однорідне рівняння

$$\ddot{x} + 4900x = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$r^2 + 4900 = 0, \quad r_{1,2} = \pm 70i.$$

Загальний розв'язок цього однорідного рівняння

$$x_1 = C_1 \cos 70t + C_2 \sin 70t.$$

Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного д. р. (1) у вигляді $x_2 = A \sin 50t + B \cos 50t$, $\dot{x}_2 = 50A \cos 50t - 50B \sin 50t$, $\ddot{x}_2 = -2500A \sin 50t - 2500B \cos 50t$.

Підставляємо ці значення в (1):

$$\begin{aligned}
 & -2500A \sin 50t - 2500B \cos 50t + 4900A \sin 50t + 4900B \cos 50t = \\
 & = 100 \sin 50t \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin 50t \\ \cos 50t \end{array} \right| \begin{array}{l} -2500A + 4900A = 100, \\ -2500B + 4900B = 0 \end{array} \Rightarrow \\
 & \begin{array}{l} B = 0, \\ A = 0,0417 \end{array} \Rightarrow x_2 = 0,0417 \sin 50t.
 \end{aligned}$$

Загальний розв'язок $x = x_1 + x_2 = C_1 \cos 70t + C_2 \sin 70t + 0,0417 \sin 50t$.

Використовуємо початкові умови: при $t=0$ $x_0 = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$, $v_0 = 10 \text{ см/с} = 0,1 \text{ м/с}$; $\dot{x} = -70C_1 \sin 70t + 70C_2 \cos 70t + 2,085 \cos 50t$. Тоді $\begin{cases} 0,02 = C_1, \\ 0,1 = 70C_2 + 2,085 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0,02, \\ C_2 = -0,0283. \end{array}$

Таким чином, $x = 0,02 \cos 70t - 0,0283 \sin 70t + 0,0417 \sin 50t \text{ м} =$
 $= \underline{2 \cos 70t - 2,83 \sin 70t + 4,17 \sin 50t \text{ см.}}$

72 (32.91). Вантаж масою 24,5 кг висить на пружині з жорсткістю 392 Н/м. На вантаж починає діяти сила $F(t) = 156,8 \sin 4t \text{ Н}$. Визначити закон руху вантажу.

Розв'язання

Д.р. руху вантажу

$$24,5\ddot{x} + 392x = 156,8 \sin 4t \quad (1)$$

Характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння

$$24,5r^2 + 392 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 4i; \quad x_1 = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t.$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $x_2 = At \cos 4t + Bt \sin 4t$, $\dot{x}_2 = A \cos 4t + B \sin 4t - 4At \sin 4t + 4Bt \cos 4t$,

$\ddot{x}_2 = -8A \sin 4t + 8B \cos 4t - 16At \cos 4t - 16Bt \sin 4t$. Знайдені значення підставляємо в (1): $-196A \sin 4t + 196B \cos 4t - 392At \cos 4t - 392Bt \sin 4t + 392At \cos 4t + 392Bt \sin 4t = 156,8 \sin 4t$.

$$\left. \begin{array}{l} \sin 4t \\ \cos 4t \end{array} \right| \begin{array}{l} -196A = 156,8, \\ 196B = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B = 0, \\ A = -0,8. \end{array} \quad \text{Тоді } x = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t - 0,8t \cos 4t; \dot{x} = -4C_1 \sin 4t + 4C_2 \cos 4t - 0,8 \cos 4t + 3,2t \sin 4t. \text{ Вважаємо, що при } t=0 \ x_0=0 \text{ і } \dot{x}_0=0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = C_1, \\ 0 = 4C_2 - 0,8 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0, \\ C_2 = 0,2 \end{array} \text{ і } \underline{x = 0,2 \sin 4t - 0,8t \cos 4t}.$$

73 (32.92). Вантаж масою 24,5 кг висить на пружині жорсткістю 392 Н/м. Визначити рух вантажу, якщо на нього починає діяти сила $F = 32,2 \cos 6t$ Н.

Розв'язання

Аналогічно попередній задачі д. р. руху таке

$$24,5\ddot{x} + 392x = 32,2 \cos 6t.$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $x_1 = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$. Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного д. р. у вигляді $x_2 = A \cos 6t + B \sin 6t \Rightarrow \dot{x}_2 = -6A \sin 6t + 6B \cos 6t$, $\ddot{x}_2 = -36A \cos 6t - 36B \sin 6t$. Підставляємо ці значення в початкове д. р.:

$$\begin{aligned} & -882A \cos 6t - 882B \sin 6t + 392A \cos 6t + 392B \sin 6t = \\ & = 32,2 \cos 6t \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos 6t \\ \sin 6t \end{array} \right| \begin{array}{l} -882A + 392A = 32,2 \\ -882B + 392B = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -0,08, \\ B = 0. \end{array} \end{aligned}$$

$$x_2 = -0,08 \cos 6t.$$

Загальний розв'язок $x = x_1 + x_2 = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t - 0,08 \cos 6t$.
 Вважаємо, що при $t = 0$ $x_0 = 0$ і $\dot{x}_0 = 0$. $\dot{x} = -4C_1 \sin 4t + 4C_2 \cos 4t +$
 $+ 0,048 \sin 6t \Rightarrow \left. \begin{matrix} 0 = C_1 - 0,08 \\ 0 = 4C_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 0,08, \\ C_2 = 0 \end{matrix}$, і $x = 0,08 \cos 4t -$
 $- 0,08 \cos 6t = 0,08(\cos 4t - \cos 6t) = 0,16 \sin 5t \sin t$ м =
 $= 16 \sin 5t \sin t$ см.

Коливання носять характер биття.

Примітка. Биття – явище, що виникає при накладанні двох періодичних коливань, наприклад, гармонічних, близьких по частоті, що виражається в періодичному зменшенні і збільшенні амплітуди сумарного сигналу. Частота зміни амплітуди сумарного сигналу рівна різниці частот вихідних сигналів.

74. (32.93). Вантаж на пружині коливається так, що його рух описується диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x} + cx = 5 \cos \omega t + 2 \cos 3\omega t.$$

Знайти закон руху вантажу, якщо в початковий момент його зміщення і швидкість рівні нулю, а також визначити при яких значеннях ω настане резонанс.

Розв'язування

Корні характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння $r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} i$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння

$$x_1 = C_1 \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t.$$

Вважаючи, що $\sqrt{\frac{c}{m}} \neq \omega$ і $\sqrt{\frac{c}{m}} \neq 3\omega$, шукаємо частинний

розв'язок для правої частини $5\cos\omega t$ у вигляді $x_2 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\dot{x}_2 = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$, $\ddot{x}_2 = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$. Під-

ставляючи ці значення у вихідне д. р. отримаємо: $A = \frac{5}{c - m\omega^2}$,

$B = 0$, тобто $x_2 = \frac{5}{c - m\omega^2}\cos\omega t$.

Шукаємо частинний розв'язок для правої частини $2\cos 3\omega t$

у вигляді $x_3 = D\cos 3\omega t + E\sin 3\omega t$, $\dot{x}_3 = -3D\omega\sin 3\omega t + 2E\omega\cos 3\omega t$,

$\ddot{x}_3 = -9D\omega^2\cos 3\omega t - 9E\omega^2\sin 3\omega t$.

Підставляючи ці значення у вихідне д. р. отримаємо:

$D = \frac{2}{c - 9m\omega^2}$, $E = 0$, тобто $x_3 = \frac{2}{c - m\omega^2}\cos 3\omega t$. Тоді $x =$

$= C_1\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{5}{c - m\omega^2}\cos\omega t + \frac{2}{c - 9m\omega^2}\cos 3\omega t$,

$\dot{x} = -C_1\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2\sqrt{\frac{c}{m}}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t - \frac{5\omega}{c - m\omega^2}\sin\omega t -$

$-\frac{6}{c - 9m\omega^2}\sin 3\omega t$. Враховуючи, що при $t = 0$ $x = 0$ і $\dot{x} = 0$,

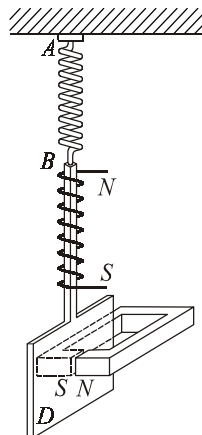
маємо $\begin{cases} 0 = C_1 + \frac{5}{2 - m\omega^2} + \frac{2}{c - 9m\omega^2}, \\ 0 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{47m\omega^2 - 7c}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$

$$x = \frac{47m\omega^2 - 7c}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)} \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t + \frac{5}{c - m\omega^2} \cos \omega t + \frac{2}{c - 9m\omega^2} \cos 3\omega t$$

Резонанс настане в двох випадках: $\omega_1_{кр} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{c}{m}}$ і $\omega_2_{кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

4. ВПЛИВ ОПОРУ НА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

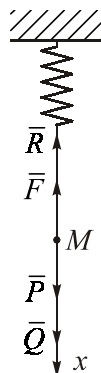
75 (32.94). На пружині, коефіцієнт жорсткості якої $c = 19,6$ Н/м, підвішені магнітний стержень масою 50 г, що проходить через соленоїд, і мідна пластинка масою 50 г, що проходить між полюсами магніту. По соленоїду протікає струм $i = 20 \sin 8\pi t$ А, який розвиває силу взаємодії з магнітним стержнем $0,016\pi$ Н. Сила гальмування мідної пластинки внаслідок вихрових струмів рівна $k\nu\Phi^2$, де $k = 0,001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб і ν – швидкість пластинки в м/с. Визначити вимушені коливання пластинки.



Розв'язання

Сила опору $R = k\nu\Phi^2 = 0,01 \cdot 500\nu = 0,5\nu = 0,5\dot{x}$ Н; збурююча сила $Q = 0,016\pi i = 0,016\pi \cdot 20 \sin 8\pi t = 0,32\pi \sin 8\pi t$ Н; сила пружності $F = c(\lambda_{ст} + x) = 19,6(\lambda_{ст} + x)$ Н. Тоді д.р. руху вантажу M маси m запишеться:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= P + Q - R - F \text{ або} \\ m\ddot{x} &= P + 0,32\pi \sin 8\pi t - 0,5\dot{x} - 19,6\lambda_{ст} - 19,6x, \\ m\ddot{x} + 0,5\dot{x} + 19,6x &= 0,32\pi \sin 8\pi t. \end{aligned}$$



(1)

m – спільна маса стержня і мідної пластинки, $m = 100 \text{ г} = 0,1 \text{ кг}$.
Розділивши обидві частини рівності (1) на $m = 0,1$, отримаємо

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 196x = 3,2\pi \sin 8\pi t. \quad (2)$$

Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння

$$r^2 + 5r + 196 = 0, \quad (3)$$

$$r_{1,2} = \frac{-5 \pm 27,5i}{2} = -2,5 \pm 13,75i.$$

Частинний розв'язок неоднорідного д. р. (закон вимушених коливань) шукаємо у вигляді: $\bar{x} = A \sin 8\pi t + B \cos 8\pi t \Rightarrow$
 $\Rightarrow \dot{\bar{x}} = 8\pi(A \cos 8\pi t - B \sin 8\pi t), \quad \ddot{\bar{x}} = 64\pi^2(-A \sin 8\pi t - B \cos 8\pi t).$
 Підставляємо ці значення в (2):

$$-64\pi^2 A \sin 8\pi t - 64\pi^2 B \cos 8\pi t + 40\pi A \cos 8\pi t - 40\pi B \sin 8\pi t + \\ + 196A \sin 8\pi t + 196B \cos 8\pi t = 3,2\pi \sin 8\pi t,$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 8\pi t \quad \left| \quad -64\pi^2 A - 40\pi B + 196A = 3,2\pi, \right. \\ \cos 8\pi t \quad \left| \quad -64\pi^2 B + 40\pi A + 196B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (196 - 64\pi^2)A - 40\pi B = 3,2\pi, \\ 125,66A + (196 - 64\pi^2)B = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -435,65A - 125,66B = 10,05, \\ 125,66A - 435,65B = 0. \end{array} \right.$$

$$A = \frac{435,65}{125,66} = 3,4698; \quad -1510,35B - 125,66B = 10,05 \Rightarrow$$

$\Rightarrow B = -0,0061, \quad A = -0,0213. \quad \sqrt{A^2 + B^2} = 0,022.$ Кут φ лежить в 3-й чверті ($\sin \varphi < 0$ і $\cos \varphi < 0$) і тому $\varphi = 180^\circ -$

$$-\arctg \frac{0,0061}{0,0213} = 180^\circ - \arctg 0,2864 = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ \approx 0,91\pi.$$

Тоді $\bar{x} = -0,0213 \sin 8\pi t - 0,0061 \cos 8\pi t$ або

$$\bar{x} = 0,022 \sin(8\pi t - 0,91\pi) \text{ м} = 2,2 \sin(8\pi t - 0,91\pi) \text{ см.}$$

76 (32.95). За умовами попередньої задачі знайти рівняння руху пластинки, якщо її підвісили разом з магнітним стержнем до кінця не розтягнутої пружини і надали їм початкову швидкість 5 см/с, направлену донизу.

Розв'язання

Згідно з отриманими коренями характеристичного рівняння (3) задачі 32.94 загальний розв'язок неоднорідного д. р. (2) набуває вигляду

$$\begin{aligned} y &= e^{-2,5t} (C_1 \cos 13,75t + C_2 \sin 13,75t) + 2,2 \sin(8\pi t - 0,91\pi), \\ y' &= -2,5e^{-2,5t} (C_1 \cos 13,75t + C_2 \sin 13,75t) + 2,2 \sin(8\pi t - 0,91\pi) + \\ &+ 13,75e^{-2,5t} (-C_1 \sin 13,75t + C_2 \cos 13,75t) + 2,2 \cdot 8\pi \sin(8\pi t - 0,91\pi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Початкові умови: при } t=0 \quad x_0 &= -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{P}{c} = -\frac{0,1 \cdot 9,8}{19,6} = \\ &= -0,05 \text{ м} = -5 \text{ см і } \dot{x}_0 = v_0 = 5 \text{ см/с.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -5 = C_1 + 2,2 \sin(-0,91\pi), \\ 5 = -2,5C_1 + 13,75C_2 + 55,26 \cos(-0,91\pi) \end{cases} \quad (0,91\pi = 164^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 = C_1 - 2,2 \sin 164^\circ, \\ 5 = -2,5C_1 + 13,75C_2 + 55,26 \cos 164^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 = C_1 - 2,2 \cdot 0,276, \\ 5 = -2,5C_1 + 13,75C_2 - 55,26 \cdot 0,961 \end{cases}$$

$$C_1 = -4,39, C_2 = 3,42.$$

$$x = e^{-2,5}(-4,39\cos 13,75t + 3,42\sin 13,75t) + 2,2\sin(8\pi t - 0,91\pi) \text{ см.}$$

77 (32.96). Матеріальна точка масою $m = 2$ кг підвішена до пружини, коефіцієнт жорсткості якої 4 кН/м. На точку діє збурююча сила $S = 120\sin(pt + \delta)$ Н і сила опору руху $R = 0,5\sqrt{mc} \cdot v$ Н. Чому рівне найбільше значення $A_{\max}$ амплітуди вимушених коливань? При якій частоті p амплітуда вимушених коливань досягає найбільшого значення?

Розв'язання

Аналогічно попередній задачі д. р. руху набуває вигляду

$$m\ddot{x} + 0,5\sqrt{mc}\dot{x} + cx = 120\sin(pt + \delta) \quad (1)$$

$$\text{або } \ddot{x} + \frac{0,5\sqrt{mc}}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{120}{m}\sin(pt + \delta).$$

$$\text{Позначивши через } 2n = \frac{0,5\sqrt{mc}}{m} = \frac{0,5\sqrt{2 \cdot 4000}}{2} = 22,36;$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{4000}{2} = 2000; h = \frac{120}{m} = \frac{120}{2} = 60, \text{ отримаємо у загаль-}$$

ному випадку д.р. вимушених коливань при дії сили опору вигляду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin(pt + \delta). \quad (2)$$

Частинний розв'язок (закон вимушених коливань) шукаємо у вигляді

$$\bar{x} = A \sin(pt + \delta - \xi),$$

тоді $\dot{\bar{x}} = Ap \cos(pt + \delta - \xi)$, $\ddot{\bar{x}} = -Ap^2 \sin(pt + \delta - \xi)$. Підставимо знайдені значення $\bar{x}$, $\dot{\bar{x}}$ і $\ddot{\bar{x}}$ в (2):

$$-Ap^2 \sin(pt + \delta - \xi) + Ak^2 \sin(pt + \delta - \xi) = h \sin(pt + \delta) \quad (3)$$

Перетворимо праву частину рівності (3): $h \sin(pt + \delta) = h \sin((pt + \delta - \xi) + \xi) = h \sin(pt + \delta - \xi) \cos \xi + h \cos(pt + \delta - \xi) \sin \xi$.
Тоді (3) запишеться: $(A(k^2 - p^2) - h \cos \xi) \sin(pt + \delta - \xi) + (2nAp - h \sin \xi) \cos(pt + \delta - \xi) = 0$. Ця рівність можлива, якщо коефіцієнти при синусах і косинусах рівні нулю, тобто $A(k^2 - p^2) = h \cos \xi$, $2nAp = h \sin \xi$. З урахуванням того, що $\sin^2 \xi + \cos^2 \xi = 1$ отримаємо, що

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \xi = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Максимальне значення амплітуди коливань A буде тоді, коли вираз $(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$ приймає мінімальне значення. Знайдемо похідну цього виразу по p і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{d}{dp} \left((k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 \right) = 2(k^2 - p^2) \cdot (-2p) + 4n^2 \cdot 2p = 0.$$

Корені цього рівняння $p_1 = 0$, $p_2 = \sqrt{k^2 - 2n^2}$. Підставивши p_2 в формулу для A отримаємо, що

$$A_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{60}{22,36 \cdot \sqrt{2000 - 125}} = \frac{60}{22,36 \cdot 43,3} = 0,062 \text{ м} = \underline{6,2 \text{ см.}}$$

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{2000 - 2 \cdot 11,18^2} = \underline{41,83 \text{ рад/с.}}$$

Примітка. В тому, що вираз $(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2$ приймає мінімальне значення при $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ можна переконатися, взявши другу похідну по p .

78 (32.98). Матеріальна точка масою 3 кг підвішена на пружині з коефіцієнтом жорсткості $c = 117,6 \text{ Н/м}$. На точку діє збурююча сила $F = H \sin(6,26t + \beta) \text{ Н}$ і сила опору середовища $\bar{R} = -\alpha \bar{v} \text{ Н}$. Як зміниться амплітуда вимушених коливань точки, якщо внаслідок зміни температури в'язкість середовища (коефіцієнт α) збільшиться в 3 рази?

Розв'язання

Амплітуда вимушених коливань (див. задачу 77) $A = \frac{H}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$. При $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{117,6}{3} = 39,2$; $p = 6,26$;

$2n = \frac{\alpha}{3}; \Rightarrow n^2 = \frac{\alpha^2}{36}$ маємо, що при коефіцієнті α амплітуда

$$A_{\alpha} = \frac{H}{\sqrt{(39,2 - 6,26^2)^2 + 4 \cdot \frac{\alpha^2}{36} \cdot 6,26^2}} = \frac{3H}{2 \cdot 6,26} \cdot \text{Амплітуда } A_{3\alpha} =$$

$$= \frac{H}{\sqrt{4 \cdot \frac{9\alpha^2}{36} \cdot 6,26^2}} = \frac{H}{\alpha \cdot 6,26} \Rightarrow \frac{A_{3\alpha}}{A_{\alpha}} = \frac{1}{3}, \text{ тобто амплітуда ви-}$$

мущених коливань зменшується в 3 рази.

79 (32.98). В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху точки, якщо в початковий момент її положення і швидкість були рівні: $x_0 = 2$ см, $v_0 = 3$ см/с. Частота збурюючої сили $p = 30$ рад/с, початкова фаза збурюючої сили $\delta = 0$. Початок координат вибрати в положенні статичної рівноваги.

Розв'язання

Д. р. вимушених коливань

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta), \quad (1)$$

$$2n = 22,36; n = 11,18; k^2 = 2000; h = 60; p = 30.$$

$$\text{Амплітуда } A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2 p^2}} =$$

$$= \frac{60}{\sqrt{(2000 - 900)^2 + 4 \cdot 11,18^2 \cdot 900}} = 0,047 \text{ м} = 4,7 \text{ см. Згідно}$$

задачі 77 частинний розв'язок при $\delta = 0$ шукаємо у вигляді

$$\bar{x} = A \sin(pt - \xi) \quad \text{tg } \xi = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{2 \cdot 11,18 \cdot 30}{2000 - 900} = 0,6098 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi = 31^\circ 18' \approx 0,174\pi.$$

Таким чином, $\bar{x} = 4,7 \sin(30t - 0,174\pi)$.

Відповідне однорідне рівняння приймає вигляд

$$\ddot{x} + 22,36\dot{x} + 2000x = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$r^2 + 22,36r + 2000 = 0,$$

його корені $r_{1,2} = -11,18 \pm \sqrt{125 - 2000} = -11,18 \pm 43,3i$.

Загальний розв'язок даного однорідного рівняння

$$x^* = e^{-11,18t} (C_1 \cos 43,3t + C_2 \sin 43,3t).$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (закон руху матеріальної точки)

$$x = x^* + \bar{x} = e^{-11,18t} (C_1 \cos 43,3t + C_2 \sin 43,3t) + 4,7 \sin(30t - 0,174\pi).$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -11,18e^{-11,18t} (C_1 \cos 43,3t + C_2 \sin 43,3t) + \\ & + 43,3e^{-11,18t} (-C_1 \sin 43,3t + C_2 \cos 43,3t) + 141 \cos(30t - 0,174\pi). \end{aligned}$$

Використовуємо початкові умови: $t = 0$ $x_0 = 2$ см,
 $\dot{x}_0 = v_0 = 3$ см/с.

$$\begin{cases} 2 = C_1 - 4,7 \sin 0,174\pi, \\ 3 = -11,18C_1 + 43,3C_2 + 141 \cos 0,174\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = C_1 - 2,44, \\ 3 = -11,18C_1 + 43,3C_2 + 120 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 4,44; C_2 = -1,56.$$

$$\text{Отже, } \underline{x = e^{-11,18t} (4,44 \cos 43,3t - 1,56 \sin 43,3t) + 4,7 \sin(30t - 0,174\pi)}.$$

80 (32.99). Тіло масою 2 кг, прикріплене пружиною до нерухокої точки A , рухається по гладкій похилій площині, що утворює з горизонтом кут α , під дією збурюючої сили $S = 180 \sin 10t$ Н і сили опору, пропорційній швидкості $\bar{R} = -29,4\bar{v}$ (Р в Н). Коефіцієнт жорсткості пружини $c = 5$ кН/м. В початковий момент тіло знаходилося в спокої в положенні статичної рівноваги. Знайти рівняння руху тіла, періоди T вільних і T_1 вимушених коливань; зсув фази вимушених коливань і збурюючої сили.

Розв'язання

За другим законом Ньютона

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{R} + \bar{F} + \bar{S}, \quad (1)$$

$$\bar{R} = -29,4\bar{v}, \quad F = c(\lambda_{cm} + x),$$

$$S = 180 \sin 10t.$$

Спроєкуємо (1) на вісь Ox :

$$m\ddot{x} = P \sin \alpha - 29,4\dot{x} - 5000x -$$

$$-c\lambda_{cm} = 180 \sin 10t, \quad P \sin \alpha = c\lambda_{cm},$$

$$\text{тоді } 2\ddot{x} + 29,4\dot{x} + 5000x =$$

$$= 180 \sin 10t \Rightarrow \ddot{x} + 14,7\dot{x} + 2500x = 90 \sin 10t. \quad (2)$$

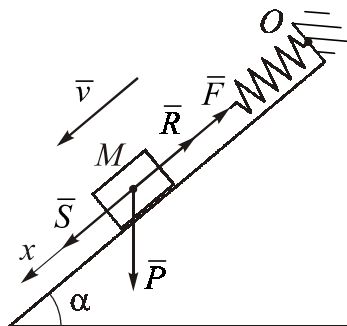
Характеристичне рівняння для відповідного однорідного

$$r^2 + 14,7r + 2500 = 0,$$

$$r_{1,2} = \frac{-14,7 \pm \sqrt{216,09 - 10000}}{2} = \frac{-14,7 \pm 98,9}{2} = -7,35 \pm 49,46.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$x^* = e^{-7,35t} (C_1 \cos 49,46t + C_2 \sin 49,46t).$$



Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\bar{x} = A \cos 10t + B \sin 10t$,
 $\dot{\bar{x}} = -10A \sin 10t + 10B \cos 10t$, $\ddot{\bar{x}} = -100A \cos 10t - 100B \sin 10t$.
 Знайдені значення підставляємо в (2):

$$\begin{aligned}
 & -100A \cos 10t - 100B \sin 10t - 147A \sin 10t + 147B \cos 10t + \\
 & + 2500A \cos 10t + 2500B \sin 10t = 90 \sin 10t. \\
 & \begin{cases} \cos 10t & -100A + 147B + 2500A = 0, \\ \sin 10t & -100B - 147A + 2500B = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2400A + 147B = 0, \\ -147A + 2400B = 90. \end{cases} \\
 & B = -\frac{2400}{147}A, -147A - \frac{2400^2}{147}A = 90 \Rightarrow A = -0,0023; B = 0,0376.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= -0,0023 \cos 10t + 0,0376 \sin 10t = \\
 &= \underbrace{\sqrt{0,0023^2 + 0,0376^2}}_{0,0377} \cdot \left(\underbrace{-\frac{0,0023}{0,0377}}_{-\sin 3^\circ 30'} \cos 10t + \underbrace{\frac{0,0376}{0,0377}}_{\cos 3^\circ 30'} \sin 10t \right) = \\
 &= 0,0377 \sin(10t - 3^\circ 30').
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= x^* + \bar{x} = e^{-7,35t} (C_1 \cos 49,46t + C_2 \sin 49,46t) + \\
 &+ 0,0377 \sin(10t - 3^\circ 30').
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -7,35e^{-7,35t} (C_1 \cos 49,46t + C_2 \sin 49,46t) + e^{-7,35t} \times \\
 &\times 49,46(-C_1 \sin 49,46t + C_2 \cos 49,46t) + 0,377 \cos(10t - 3^\circ 30').
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Початкові умови } t=0 \quad x_0=0 \quad \dot{x}_0=0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} 0 = C_1 - 0,0023, \\ 0 = -7,35C_1 + 49,46C_2 + 0,3763 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0,0023 \quad C_2 = -0,00727
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Таким чином, } x = e^{-7,35t} (0,0023 \cos 49,46t - 0,00727 \sin 49,46t) + \\ + 0,0377 \sin(10t - 3^\circ 30') \text{ м} = \underline{e^{-7,35t} (0,23 \cos 49,46t - 0,72 \sin 49,46t) +} \\ \underline{+ 3,77 \sin(10t - 3^\circ 30') \text{ см.}} \end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{6,28}{49,46} = \underline{0,127}; T_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{6,28}{10} = \underline{0,628}; \xi = \underline{-3^\circ 30'}.$$

81 (32.100). На тіло масою 0,4 кг, прикріплене до пружини з коефіцієнтом жорсткості $c = 4 \text{ кН/м}$, діє сила $S = 40 \sin 50t \text{ Н}$ і сила опору $\bar{R} = -\alpha \bar{v}$, де $\alpha = 25 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$, $\bar{v}$ – швидкість тіла (v в м/с). В початковий момент тіло знаходиться в положенні статичної рівноваги. Знайти закон руху тіла і визначити значення частоти збудовуючої сили, при якому амплітуда вимушених коливань буде максимальною.

Розв'язання

$$m\bar{a} = \bar{Q} + \bar{S} + \bar{R} + \bar{F}.$$

В проекції на вісь Ox дане рівняння має

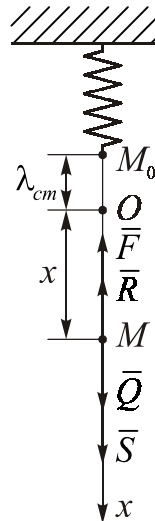
$$m\ddot{x} = Q + S - R - F. \quad (1)$$

$$F = c(\lambda_{cm} + x), R = 25\dot{x}, S = 40 \sin 50t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,4\ddot{x} + 25\dot{x} + 4000x = 40 \sin 50t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 62,5\dot{x} + 10000x = 100 \sin 50t. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Характеристичне рівняння } r^2 + 62,5r + \\ + 10000 = 0, r_{1,2} = -31,25 \pm \sqrt{976,5625 - 10000} = \\ = -31,25 \pm 95i. \end{aligned}$$



Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x^* = e^{-31,25t} (C_1 \cos 95t + C_2 \sin 95t).$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\bar{x} = A \cos 50t + B \sin 50t, \quad \dot{\bar{x}} = -50A \sin 50t + 50B \cos 50t,$$

$$\ddot{\bar{x}} = -2500A \cos 50t - 2500B \sin 50t.$$

Знайдені значення $\bar{x}$, $\dot{\bar{x}}$, $\ddot{\bar{x}}$ підставляємо в (2):

$$-2500A \cos 50t - 2500B \sin 50t - 3125A \sin 50t + 3125B \cos 50t + \\ + 10000A \cos 50t + 10000B \sin 50t = 100 \sin 50t.$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 50t \quad \left| \quad -2500A + 3125B + 10000A = 0, \right. \\ \sin 50t \quad \left| \quad -2500B - 3125A + 10000B = 100 \right. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7500A + 3125B = 0, \\ -3125A + 7500B = 100 \end{cases} \Rightarrow B = -2,4A, \quad A = -0,0047 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 0,0113.$$

$$\bar{x} = -0,0047 \cos 50t + 0,0113 \sin 50t = \underbrace{\sqrt{0,0047^2 + 0,0113^2}}_{0,0122} \times$$

$$\times \left(\frac{0,0113}{0,0122} \sin 50t - \frac{0,0047}{0,0122} \cos 50t \right) =$$

$$= 0,0122 (0,9262 \sin 50t - 0,3852 \cos 50t) = 0,0122 \sin (50t - 22^\circ 36').$$

$$x = e^{-31,25t} (C_1 \cos 95t + C_2 \sin 95t) + 0,0122 \sin (50t - 22^\circ 36'),$$

$$\dot{x} = -31,25e^{-31,25t} (C_1 \cos 95t + C_2 \sin 95t) +$$

$$+ 95e^{-31,25t} (-C_1 \sin 95t + C_2 \cos 95t) + 0,61 \cos (50t - 22^\circ 36').$$

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0.$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 - 0,0047, \\ 0 = -31,25C_1 + 95C_2 + 0,564 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0,0047, \\ C_2 = 0,0044 \end{cases}$$

$$\sqrt{0,0047^2 + 0,0044^2} = 0,00644.$$

$$\begin{aligned} x &= 0,00644e^{-31,25t} \sin(95t - 46^\circ 55') + 0,0122 \sin(50t - 22^\circ 36') \text{ м} = \\ &= \underline{0,644e^{-31,25t} \sin(95t - 46^\circ 55') + 1,22 \sin(50t - 22^\circ 36') \text{ см.}} \end{aligned}$$

Максимальна амплітуда вимушених коливань буде при частоті збурюючої сили $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ (див. [6], с. 70). В нашому ви-

$$\begin{aligned} \text{падку } k^2 = 10000, 2n = 62,5 \Rightarrow n = \frac{62,5}{2} \text{ і } p &= \sqrt{10000 - \frac{62,5^2}{2}} = \\ &= 89,8e^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\max} &= \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{100}{\sqrt{(10000 - 89,8^2)^2 + 4 \cdot 31,25^2 \cdot 89,8^2}} = \\ &= \underline{0,01684 \text{ м} = 1,684 \text{ см.}} \end{aligned}$$

82 (32.95). На тіло масою M кг, прикріплене до пружини з коефіцієнтом жорсткості c Н/м, діє збурююча сила $S = H \sin pt$ і сила опору $\bar{R} = -\alpha \bar{v}$ (R в Н), де $\bar{v}$ – швидкість тіла. В початковий момент тіло знаходилось в положенні статичної рівноваги і не мало початкової швидкості. Знайти рівняння руху

$$\text{тіла, якщо } c > \frac{a^2}{4M}.$$

Розв'язання

Згідно теорії вимушених коливань з опором закон руху точки наступний:

$$x = e^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \\ + \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \left((k^2 - p^2) \sin pt - 2np \cos pt \right),$$

де $h = \frac{H}{M}$, $k^2 = \frac{c}{M}$, $n = \frac{\alpha}{2M}$. Тоді

$$\dot{x} = -ne^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \\ + e^{-nt} \sqrt{k^2 - n^2} \left(-C_1 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \\ + \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \left(p(k^2 - p^2) \cos pt + 2np^2 \sin pt \right).$$

Початкові умови: $t = 0 \Rightarrow x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$.

$$\begin{cases} 0 = C_1 - \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}, \\ 0 = -nC_1 + \sqrt{k^2 - n^2} C_2 + \frac{np(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{k^2 - n^2}} \cdot \frac{2n^2 ph - hp(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}.$$

Остаточно

$$x = \frac{hpe^{-nt}}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \left(2n \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{2n^2 + p^2 - k^2}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2} \left((k^2 - p^2) \sin pt - 2np \cos pt \right).$$

83 (32.102). На тіло масою 6 кг, підвішене до пружини з жорсткістю $c = 17,64$ кН/м, діє збурююча сила $P_0 \sin pt$. Опір рідини пропорційний швидкості. Яким повинен бути коефіцієнт опору α в'язкої рідини, щоб максимальна амплітуда вимушених коливань дорівнювала потроєному значенню статичного подовження пружини? Чому дорівнює коефіцієнт розладу z (відношення кругової частоти вимушених коливань до кругової частоти вільних коливань)? Знайти зсув фази вимушених коливань і збурюючої сили.

Розв'язання

Максимальне значення коефіцієнта динамічності рівне:

$$\eta = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}}, \text{ де } \gamma = \frac{n}{k}, n = \frac{\alpha}{2m}, k = \sqrt{\frac{c}{m}} \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2mk} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{cm}}.$$

$$\text{За умовою задачі } \eta = 3 \text{ тобто } \frac{1}{2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}} = 3 \Rightarrow 36\gamma^4 - 36\gamma^2 + 1 = 0$$

$$i\gamma = \sqrt{\frac{18 \pm \sqrt{324 - 36}}{36}}, \gamma_1 = \sqrt{\frac{35}{36}} = \sqrt{0,97} \approx 0,985, \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{36}} \approx 0,167.$$

$$1. \gamma_1 = 0,985 : 0,985 = \frac{\alpha_1}{2} \sqrt{\frac{1}{17640 \cdot 6}} \Rightarrow \alpha_1 = 640,86 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}.$$

$$2. \gamma_2 = 0,167 : 0,167 = \frac{\alpha_2}{2} \sqrt{\frac{1}{17640 \cdot 6}} \Rightarrow \alpha_2 = 108,65 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}.$$

Розглядаємо $\alpha_2 = 108,65$, оскільки при $\alpha_1 = 640,86$ рух тіла буде аперіодичним.

Кругова частота вимушених коливань $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$, де

$$n = \frac{\alpha_2}{2m}. \text{Тоді } p = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{2\alpha_2^2}{4m^2}} \Rightarrow \text{коефіцієнт розладу } z = \frac{p}{k} =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = \sqrt{1 - \frac{\alpha_2^2}{2mc}} = \sqrt{1 - \frac{108,65^2}{2 \cdot 6 \cdot 17640}} = 0,97.$$

$$\text{Якщо } \varepsilon - \text{зсув фази вимушених коливань, то } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} =$$

$$= \frac{2n\sqrt{k^2 - 2n^2}}{2n^2} = \sqrt{\frac{k^2}{n^2} - 2} = \sqrt{\frac{4cm}{\alpha_2^2} - 2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 17640 \cdot 6}{108,65^2} - 2} = 5,82 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \operatorname{arctg} 5,82 = 80^\circ 7'.$$

84 (32.103). На тіло масою 0,1 кг, прикріплене до пружини з коефіцієнтом жорсткості $c = 5 \text{ кН/м}$, діє сила $S = H \sin pt$, де $H = 100 \text{ Н}$, $p = 100 \text{ рад/с}$, і сила опору $R = \beta v$, де $\beta = 50 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$. Написати рівняння вимушених коливань і визначити значення p , при якому амплітуда вимушених коливань буде максимальною.

Розв'язання

Д. р. руху вантажу

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = H \sin pt, \quad (1)$$

$$\text{або } \ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{H}{m} \sin pt$$

$$\ddot{x} + 500 \dot{x} + 50000 x = 10000 \sin 100t. \quad (2)$$

Закон вимушених коливань – це частинний розв'язок рівняння (2), який шукаємо у вигляді $x = A \sin 100t + B \cos 100t$,

$$\dot{x} = 100(A \cos 100t - B \sin 100t) \quad \ddot{x} = 10000(-A \sin 100t - B \cos 100t).$$

Знайдені значення підставляємо в (2):

$$\begin{aligned} & -10000A \sin 100t - 10000B \cos 100t + 50000A \cos 100t - \\ & - 50000B \sin 100t + 50000A \sin 100t + 50000B \cos 100t = \\ & = 100000 \sin 100t. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 100t \quad | \quad 40000A - 50000B = 100000, \\ \cos 100t \quad | \quad 50000A + 40000B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B = -\frac{5}{4}A,$$

$$A = 0,98, \quad B = -1,22.$$

$$\underline{x = 0,98 \sin 100t - 1,22 \cos 100t \text{ (м)}}.$$

$$\text{Амплітуда } A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad A_{\max} \text{ буде при міні-}$$

мумі знаменника $\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}$. Знаходимо похідну

$$\frac{d}{dp} \left((k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2 \right) = -2p(k^2 - p^2) + 8n^2 p. \quad -2p(k^2 - p^2) +$$

$$+ 8n^2 p^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0, \quad p_2 = \sqrt{k^2 - 2n^2}; \quad p_2 > 0 \text{ при } k^2 - 2n^2 > 0,$$

$$\text{тобто при } k > n\sqrt{2}. \text{ В нашому випадку } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{5000}{0,1}} \approx 223,6,$$

$n = \frac{\beta}{2m} = \frac{50}{2 \cdot 0,1} = 250$, тобто $k < n\sqrt{2}$ і максимума амплітуди не існує.

85 (32.104). В умовах попередньої задачі визначити зсув фази вимушених коливань і збурюючої сили.

Розв'язання

Згідно з теоремою про вимушені коливання зсув фаз між вимушеними коливаннями і збурюючою силою визначається форму-

лою $\varepsilon = \arctg \frac{2np}{p^2 - k^2}$; $n = \frac{\beta}{2m} = 250$, $p^2 = 10000$, $k^2 = 50000$.

Значить $\varepsilon = \arctg \frac{2 \cdot 250 \cdot 100}{10000 - 5000} = \arctg(-1,25) = -\arctg 1,25 =$
 $= -51^\circ 20'$.

86 (32.105). Вантаж масою 0,2 кг підвішений на пружині, коефіцієнт жорсткості якої $c = 19,6$ Н/м. На вантаж діє збурююча сила $S = 0,2 \sin 14t$ і сила опору $R = 49v$. Визначити зсув фаз вимушених коливань і збурюючої сили.

Розв'язання

Зсув фаз визначається формулою $\varepsilon = \arctg \frac{2np}{p^2 - k^2}$, де

$n = \frac{\beta}{2m} = \frac{49}{2 \cdot 0,2} = 122,5$; $p^2 = 14^2 = 196$; $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{19,6}{0,2} = 98$.

Отже, $\varepsilon = \arctg \frac{2 \cdot 122,5 \cdot 14}{196 - 98} = \arctg 35 = 91^\circ 38'$.

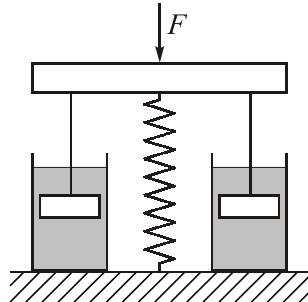
87 (32.106). В умовах попередньої задачі знайти коефіцієнт жорсткості нової пружини, якою необхідно замінити дану пружину, щоб зсув фаз вимушених коливань і збурюючої сили став рівним $\pi/2$.

Розв'язання

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty.$$

Ця умова буде виконуватися при $k^2 = p^2 = 196$. $k^2 = \frac{c}{m} = 196 \Rightarrow c = 196 \cdot m = 196 \cdot 0,2 = \underline{39,2 \text{ Н/м.}}$

88 (32.101). Для зменшення дії на тіло маси m збурюючої сили $F = F_0 \sin(pt + \delta)$ встановлюють пружинний амортизатор з рідинним демпфером. Коефіцієнт жорсткості пружини c . Вважаючи, що сила опору пропорційна першій степені швидкості ($F_{\text{оп}} = \alpha v$), знайти максимальний динамічний тиск всієї системи на фундамент при встановившихся коливаннях.



Розв'язання

Д.р. коливального руху

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = F_0 \sin(pt + \delta)$$

або

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 = h \sin(pt + \delta),$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m}, n = \frac{\alpha}{2m}, n = \frac{F_0}{m}.$$

Вимушені коливання тіла відбуваються за законом

$$x = A \sin(pt + \delta - \varepsilon), \text{ де } A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

Динамічний тиск всієї системи на фундамент визначається формулою

$$N = \alpha \dot{x} + cx$$

(тут x означає вертикальне переміщення тіла, що відраховується від положення рівноваги).

Так як $\dot{x} = Ap \cos(pt + \delta - \varepsilon)$, то

$$N = A(\alpha p \cos(pt + \delta - \varepsilon) + c \sin(pt + \delta - \varepsilon)) = \frac{F_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \times \\ \times \underbrace{(2np \cos(pt + \delta - \varepsilon) + k^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon))}_M.$$

Визначаємо максимальне значення виразу, що стоїть в дужках:

$$\frac{dM}{dt} = -2np^2 \sin \theta + k^2 p \cos \theta, \text{ де } \theta = pt + \delta - \varepsilon.$$

Прирівнявши цю похідну до нуля, отримаємо $\operatorname{tg} \theta = \frac{k^2}{2np}$,

отже, дуга $\theta = \operatorname{arctg} \frac{k^2}{2np}$ в першій чверті, тому $\sin$ і $\cos$ цієї дуги додатні.

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = -2np^3 \cos \theta - k^2 p^2 \sin \theta < 0.$$

Отже, M має максимальне значення, коли $\operatorname{tg} \theta = \frac{k^2}{2np}$.

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + 4n^2 p^2}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{2np}{\sqrt{k^2 + 4n^2 p^2}}.$$

$$M_{\max} = \frac{4n^2 p^2 + k^4}{\sqrt{k^2 + 4n^2 p^2}} = \sqrt{4n^2 p^2 + k^4}. \quad N_{\max} = F_0 \sqrt{\frac{4n^2 p^2 + k^4}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст] : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1964. – Т. 2. – 664 с.

2. **Кузнецов, А. Н.** Решебник задач по теме "Дифференциальные уравнения" [Текст] / А. Н. Кузнецов. – Николаев : НУК, 2006. – 310 с.

3. Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки [Текст] / А. В. Каплунова, В. А. Михайловський, І. П. Сірош, В. І. Станкевич, А. А. Фельдман. – К. : Державне видавництво сільськогосподарської літератури, 1961. – 390 с.

4. **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике [Текст] / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

5. **Пономарев, К. К.** Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач [Текст] / К. К. Пономарев. – М. : ГУПИМП РСФСР, 1962. – 184 с.

6. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики [Текст] : в 2 т. / А. А. Яблонский. – М. : Высшая школа, 1971. – Т. 2. – 488 с.

7. **Яблонский, А. А.** Курс теории колебаний [Текст] / А. А. Яблонский, С. С. Корейко. – М. : Высшая школа, 1966. – 256 с.

ЗМІСТ

3. Вимушені коливання	3
4. Вплив опору на вимушені коливання	19
Рекомендована література	40

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВ Альберт Миколайович
ЧОРНИЙ Олександр Леонідович

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬУ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСАХ
У двох частинах
Частина II**

Комп'ютерне верстання *А. Д. Літвінова*
Коректор *М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 2,6. Тираж 100 прим. Вид. № 9. Зам. № 96.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції

ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАДАТОК