

Нові апроксимації на ізопараметричних скінченних елементах

Хомченко А.Н. д.ф.-м.н.

Чорноморський національний університет ім. П. Могили (Миколаїв)

Астіоненко І.О. к.ф.-м.н., Литвиненко О.І. к.т.н.

Херсонський національний технічний університет

Метод скінченних елементів (МСЕ) використовують при розв'язанні найрізноманітніших задач математичної фізики. У МСЕ задача інтерполяції розв'язується у локальній області – скінченному елементі (СЕ), за допомогою яких виконують дискретизацію неперервної конструкції.

У 1968 році Ергатудіс, Айронс, Зенкевич та Ахмад запропонували сім'ю «ізопараметричних» елементів з криволінійними границями [1]. Вигадливим підбором поліномів за допомогою заданих граничних вузлів ці автори несподівано відкрили елементи, що апроксимують достатньо загальні границі. Зенкевич запропонував назву «serendipity» family і цей термін відразу став звичним у науково-технічній літературі. Наведені у літературних джерелах базисні функції серендипових скінченних елементів (ССЕ) називають стандартними. Усі стандартні базиси серендипових скінченних елементів, крім білінійного, мають недоліки. До них можна віднести наявність від'ємних навантажень у повузловому розподілі рівномірної масової сили, а також кратні нулі у вузлах. Інтерполяційні властивості функцій форми в МСЕ мають надзвичайно важливу роль, тому спроби їх удосконалення почалися ще в 70-х роках минулого століття.

Обернені задачі серендипових апроксимацій привели до створення комбінованого (алгебро-геометричного) методу конструювання базисів ССЕ. Об'єднання двох підходів в один ефективний метод є природним наслідком історичного розвитку алгебри і геометрії. У комбінованому методі отримали подальший розвиток з одного боку ідеї Уачспреса, а з іншого боку традиційна техніка матричного аналізу.

Автори створили і розвинули процедуру конструювання багатопараметричних інтерполяційних поліномів з кількістю ступенів волі, яка регулюється керуючим параметром [2]. Поява такого керуючого параметра дозволила авторам отримати нові багатопараметричні моделі на серендипових скінченних елементах на площині і у просторі (наприклад, на ССЕ-8, ССЕ-20 – вперше отримані альтернативні базиси), які не тільки задовольняють основним властивостям базисів МСЕ, а і реалізують додаткові умови:

- мають меншу кількість кратних нулів у інтерполяційному поліномі;
- реалізують експериментальний спектр навантажень;
- задовольняють інтегральним критеріям гармонічності Привалова і Кьобе;
- задовольняють критерію повноти.

Наявність параметра дозволяє не тільки досліджувати базиси ССЕ, а також керувати серендиповою поверхнею з метою оптимізації інтерполяційних властивостей і обчислювальних якостей нових моделей. Виконано тестування альтернативних базисів серендипового скінченного елемента при розв'язанні задач еліптичного типу. Доведено, що кращі обчислювальні властивості має базис, при якому матриця жорсткості має мінімальний слід. Запропоновані процедури універсальні і поширюються на просторові СЕ.

1. Ergatoudis I. Curved isoperimetric “quadrilateral” elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. Irons, O. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct., — № 4. — 1968. — P. 31-42.
2. Астіоненко И.А. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций / И.А. Астіоненко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. Выпуск 2 (35). – Херсон: ХНТУ, 2009. – С. 36-42.