

УДК 621.313

DOI [https://doi.org/10.15589/znп2025.4\(502\).28](https://doi.org/10.15589/znп2025.4(502).28)**COMPARATIVE ANALYSIS OF THE SYNTHESIS OF ELECTRIC DRIVE CONTROL SYSTEMS USING THE METHOD OF POLE ARRANGEMENT IN PHASE AND PHYSICAL STATE VARIABLES****ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИНТЕЗУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ МЕТОДОМ РОЗМІЩЕННЯ ПОЛЮСІВ У ФАЗОВИХ І ФІЗИЧНИХ ЗМІННИХ СТАНУ****Oleksiy S. Sadovyi¹**

sadovuyos@mnaeu.edu.ua

ORCID: 0000-0003-0424-6086

Andriy A. Stavinskiy¹

andrey.stavynskiy@mnaeu.edu.ua

ORCID: 0000-0001-7573-9238

Vitalii A. Mardziavko¹

mardzavko@mnaeu.edu.ua

ORCID: 0000-0001-7327-9215

Ivan S. Biljuk²

ivanbilyuk@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1654-7468

Rostislav A. Stavinskiy²

strostand7@gmail.com

ORCID: 0000-0002-0640-5717

О. С. Садовий¹,

канд. техн. наук, доцент

А. А. Ставинський¹,

докт. техн. наук, професор

В. А. Мардзявко¹,

асистент

І. С. Білюк²,

канд. техн. наук, доцент

Р. А. Ставинський²,

канд. техн. наук, доцент

¹ *Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv*² *Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv*¹ *Миколаївський національний аграрний університет, м. Миколаїв*² *Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв*

Abstract. Purpose. The purpose of this article is a comparative analysis of methods for synthesizing a two-loop system for the slave control of a DC electric drive using the pole placement method using phase and physical state variables, as well as a study of the dynamic and stability properties of the synthesized systems based on computer modeling. **Methods.** The study was performed using methods of the theory of automatic control, in particular, state-space modeling of electromechanical systems, the pole placement method for synthesizing controllers with full state feedback, and similarity transformation for the transition between phase and physical state variables. The analysis of the dynamic and stability properties of control systems was carried out by numerical computer modeling in the MATLAB/Simulink environment while varying the main parameters of the control object. **Results.** It is shown that control systems synthesized in phase and physical state variables with the same desired characteristic polynomial are dynamically equivalent and provide the specified performance and transient performance indicators. At the same time, it was established that models built in physical state variables are characterized by significantly greater reserves of parametric stability, in particular when changing the moment of inertia and electrical parameters of the engine. It was found that the use of phase state variables can lead to a loss of model stability in conditions that are not critical for a real electromechanical system. **Scientific novelty.** For the first time, a formalized comparative analysis of the synthesis of electric drive control systems was performed using the method of placing poles in phase and physical state variables for the same structure of an electromechanical system with a quantitative assessment of their parametric stability. The feasibility of using similarity transformation as a tool for combining the analytical simplicity of phase variables with the physical interpretability of real state coordinates was substantiated. **Practical significance.** The results obtained can be used in the design, analysis and modernization of electric drive control systems, where increased requirements are put forward for stability and reliability in conditions of changing load parameters and the control object. The proposed approach allows for a reasonable choice of the form of mathematical description of the system at different stages of design and to increase the robustness of electric drives in practical applications.

Key words: electric drive; feedback, phase state variables; pole placement; stability; transients; gain; stabilization.

Анотація. *Мета.* Метою даної статті є порівняльний аналіз методів синтезу двоконтурної системи підпорядкованого керування електроприводом постійного струму методом розміщення полюсів при використанні фазових і фізичних змінних стану, а також дослідження динамічних і стійкісних властивостей синтезованих систем на основі комп'ютерного моделювання. *Методика.* Дослідження виконано з використанням методів теорії автоматичного керування, зокрема стан-просторового моделювання електромеханічних систем, методу розміщення полюсів для синтезу регуляторів із повним зворотним зв'язком за станом та перетворення подібності для переходу між фазовими і фізичними змінними стану. Аналіз динамічних і стійкісних властивостей систем керування проведено шляхом чисельного комп'ютерного моделювання в середовищі MATLAB/Simulink при варіюванні основних параметрів об'єкта керування. *Результати.* Показано, що системи керування, синтезовані у фазових і фізичних змінних стану за однакового бажаного характеристичного полінома, є динамічно еквівалентними та забезпечують задані показники швидкодії і перехідних процесів. Водночас встановлено, що моделі, побудовані у фізичних змінних стану, характеризуються суттєво більшими запасами параметричної стійкості, зокрема при зміні моменту інерції та електричних параметрів двигуна. Виявлено, що використання фазових змінних стану може призводити до втрати стійкості моделі в умовах, які не є критичними для реальної електромеханічної системи. *Наукова новизна.* Уперше виконано формалізований порівняльний аналіз синтезу систем керування електроприводом методом розміщення полюсів у фазових та фізичних змінних стану для однієї і тієї ж структури електромеханічної системи з кількісною оцінкою їх параметричної стійкості. Обґрунтовано доцільність використання перетворення подібності як інструменту поєднання аналітичної простоти фазових змінних із фізичною інтерпретованістю реальних координат стану. *Практична значимість.* Отримані результати можуть бути використані при проектуванні, аналізі та модернізації систем керування електроприводами, де висуваються підвищені вимоги до стійкості та надійності в умовах зміни параметрів навантаження і об'єкта керування. Запропонований підхід дозволяє обґрунтовано обирати форму математичного опису системи на різних етапах проектування та підвищувати робастність електроприводів у практичних застосуваннях. **Ключові слова:** електропривод; зворотний зв'язок; фазові змінні стану; розміщення полюсів; стійкість; перехідні процеси; коефіцієнт підсилення; стабілізація.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Сучасний розвиток електромеханічних систем керування характеризується зростанням вимог до точності, швидкодії та надійності електроприводів, що зумовлено широким впровадженням автоматизованих та роботизованих технологічних процесів у промисловості. Електропривод як ключовий елемент таких систем повинен забезпечувати стабільну роботу в умовах змінних навантажень, параметричних збурень та невизначеностей об'єкта керування, що обумовлює необхідність застосування ефективних методів синтезу систем керування.

Одним із найбільш поширених та формалізованих підходів до синтезу систем керування є метод розміщення полюсів, який дозволяє цілеспрямовано формувати динамічні властивості замкненої системи шляхом вибору бажаного характеристичного рівняння. Ефективність даного методу значною мірою залежить від форми математичного опису електромеханічної системи, зокрема від вибору змінних стану, у яких здійснюється синтез регуляторів.

У практиці проектування систем керування електроприводами широко застосовуються як фазові (узгаальнені) змінні стану, так і фізичні змінні, що безпосередньо відповідають вимірюваним електричним та механічним величинам. Використання фазових змінних забезпечує компактність математичного опису та спрощує процедуру синтезу, однак ускладнює фізичну інтерпретацію отриманих результатів і може призводити до зменшення запасів параметричної стійкості.

Натомість синтез у фізичних змінних стану дозволяє більш адекватно враховувати реальні властивості електромеханічної системи, проте супроводжується підвищеною обчислювальною та методичною складністю.

У зв'язку з цим актуальним є проведення порівняльного аналізу методів синтезу систем керування електроприводом на основі фазових та фізичних змінних стану з метою визначення їх переваг, обмежень та областей доцільного застосування. Особливий інтерес становить оцінювання впливу вибору змінних стану на динамічні показники та параметричну стійкість системи керування.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У сучасній науковій літературі моделювання і керування електроприводами, зокрема двигунами постійного струму, розглядається як комплексна задача, що вимагає застосування різних математичних методів для забезпечення стабільності, необхідної динаміки та робастності системи. Одним із широко застосовуваних підходів є подання моделі у стан-просторі, яке дозволяє описати динаміку об'єкта у вигляді системи перших порядків диференціальних рівнянь, де станова змінна відповідає фізичній величині (наприклад, струм якоря, кутова швидкість) і використовується для побудови повного зворотного зв'язку з керуванням [1].

Дослідження М. Kuczmanna (2024) [2] демонструє, що моделювання двигуна постійного струму

та лінійні методи контролю на основі стан-простору є ефективними для побудови як традиційних PID-регуляторів, так і сучасних повних стан-зворотних контролерів із розміщенням полюсів, що дозволяє оптимально формувати динаміку замкненої системи. У цій роботі також розглядається ідентифікація параметрів моделі та порівняння поведінки різних контролерів у лабораторних умовах, що підтверджує практичну придатність методів моделювання у фізичних змінних стану.

Метод розміщення полюсів є базовим елементом синтезу контролерів на основі повного зворотного зв'язку станів, що дозволяє цілеспрямовано задавати власні значення замкненої системи у бажаних точках комплексної площини. Відомо, що для реалізації такого підходу система повинна бути керованою (controllable) [3, 4], а система повного зворотного зв'язку дозволяє сформувати бажані динамічні характеристики через вибір матриці коефіцієнтів контролера [5].

Практичні застосування state-feedback підходів з розміщенням полюсів і проектуванням спостерігачів також описані у технічних працях, де автори розробляють і тестують алгоритми для DC-моторів, включно з питаннями насичення контролера та вимірювання всіх станів системи. Це підтверджує, що синтез у стан-просторовому поданні не лише теоретично обґрунтований, але й реалізований у практичних лабораторних дослідженнях [6, 7, 8].

Варто зазначити, що окремі дослідження зосереджуються на оптимізації параметрів регуляторів та застосуванні нечітких і адаптивних стратегій керування, які виходять за межі традиційного стан-просторового підходу, але їхня актуальність саме для задач із фазовими та фізичними змінними стану потребує окремого глибшого аналізу [9, 10].

Загалом, попередні дослідження підтверджують актуальність та ефективність підходів із використанням моделей у фізичних змінних стану для синтезу систем керування електроприводами, а також підкреслюють важливість методів розміщення полюсів у формуванні динамічних властивостей керованих систем. Однак порівняльний аналіз саме між фазовими та фізичними змінними стану залишається менш представленим у відкритих джерелах, що обґрунтовує потребу в подальших дослідженнях у рамках обраної теми.

ВІДОКРЕМЛЕННЯ НЕВИРІШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ

У наявних дослідженнях синтез систем керування електроприводами методом розміщення полюсів переважно виконується у фазових змінних стану без детального аналізу впливу їх вибору на параметричну стійкість системи. Недостатньо вивченими залишаються причини зниження запасів стійкості таких моделей при зміні моменту інерції та електричних параметрів двигуна [4, 10]. Відсутній

також формалізований порівняльний аналіз фазових і фізичних змінних стану для однієї й тієї ж системи керування за однакового бажаного характеристичного полінома, що ускладнює обґрунтований вибір підходу для практичного проектування.

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної статті є порівняльний аналіз методів синтезу двоконтурної системи підпорядкованого керування електроприводом постійного струму методом розміщення полюсів при використанні фазових і фізичних змінних стану, а також дослідження динамічних і стійкісних властивостей синтезованих систем на основі комп'ютерного моделювання.

МЕТОДИ, ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Об'єктом дослідження є двоконтурна система підпорядкованого керування електроприводом постійного струму, що включає електромеханічний перетворювач, регулятори струму та швидкості і працює в умовах зміни навантаження та параметрів об'єкта керування.

Предметом дослідження є динамічні та стійкісні властивості системи керування електроприводом, синтезованої методом розміщення полюсів у фазових та фізичних змінних стану, а також вплив вибору змінних стану на параметричну стійкість і робастність замкненої системи.

Методи дослідження включають методи теорії автоматичного керування, зокрема стан-просторове моделювання електромеханічних систем, метод розміщення полюсів для синтезу регуляторів з повним зворотним зв'язком за станом, метод перетворення подібності для переходу між фазовими та фізичними змінними стану, а також чисельне комп'ютерне моделювання в середовищі MATLAB/Simulink.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Математична модель однієї і тієї ж електромеханічної системи може бути записана в різних формах, в залежності від того, яким чином були сформовані диференціальні рівняння. Так, якщо система рівнянь об'єкта керування (ОК) формується на основі приведеної передавальної функції, то координати представляють з себе фазові змінні стану. Якщо ж система диференціальних рівнянь описує кожен динамічну структурну ланку окремо, то ОК представлений координатами, що являються фізичними змінними стану.

Дослідження систем керування методом розміщення полюсів здійснено на системі підпорядкованого керування двигуном постійного струму (рис. 1).

Передавальна функція розімкненої системи з урахуванням ПІ – регулятора швидкості та П – регулятора струму запишеться наступним чином:

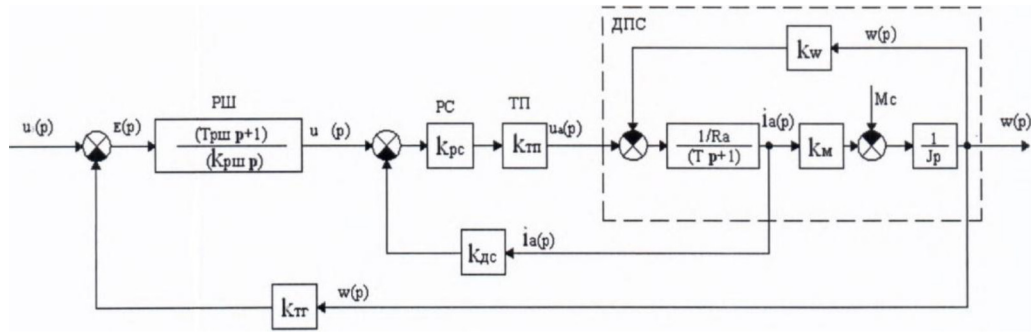


Рис. 1. Структурна схема двоконтурної системи підпорядкованого регулювання електропривода

$$\begin{aligned}
 W_{\text{роз}}(p) &= \frac{T_{\text{РШ}} p + 1}{k_{\text{РШ}} p} k_{\text{РС}} k_{\text{ТП}} \frac{k_{\omega}}{T_E T_M p^2 + T_M p + 1} = \\
 &= \frac{k(T_{\text{РШ}} p + 1)}{p(T_E T_M p^2 + T_M p + 1)} = \frac{\omega(p)}{\varepsilon(p)}, \\
 p(T_E T_M p^2 + T_M p + 1) \omega(p) &= k(T_{\text{РШ}} p + 1) \varepsilon(p),
 \end{aligned} \quad (1)$$

Позначимо: $k = k_{\text{РС}} k_{\text{ТП}} / (k_{\text{РШ}} k_{\omega})$; $a_3 = T_M T_E$; $a_2 = T_M$; $a_1 = 1$; $c_1 = k T_{\text{РШ}}$; $c_0 = k$.

Зв'язок між вхідною та вихідною величиною розімкненої системи виражається наступним чином:

$$\begin{aligned}
 \omega(p) &= \frac{c_1 p + c_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p} \varepsilon(p); \\
 \varepsilon(p) &= [a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p] x_1(p); \\
 \omega(p) &= [c_1 p + c_0] x_1(p),
 \end{aligned} \quad (2)$$

Для зручності проектування системи керування вводимо до розгляду фазові змінні стану, тоді рівняння динаміки системи представимо у векторно-матричній формі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -\frac{a_1}{a_3} x_2 - \frac{a_2}{a_3} x_3 + \frac{1}{a_3} \varepsilon, \\ \omega = c_1 x_1 + c_0 x_1, \end{cases} \quad (3)$$

або ту ж саму систему запишемо у векторно-матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} \varepsilon; \quad (4)$$

$$\omega = [c_0 \quad c_1 \quad 0] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

Уведені фазові змінні стану є узагальненими координатами, що формуються шляхом лінійних перетворень фізичних величин електропривода. Кожна змінна стану не має безпосереднього фізичного виміру, проте відображає певну динамічну складову системи та використовується для математично зручного опису її руху [3, 11]. Такий підхід спрощує аналітичний синтез системи керування методом розміщення полюсів, однак не дозволяє безпосередньо інтерпретувати вплив окремих фізичних параметрів на динаміку електропривода. Унаслідок цього при аналізі параметричної стійкості та робастності системи керування виникають труднощі, пов'язані з відсутністю прямого зв'язку між фазовими змінними стану та фізичними параметрами об'єкта керування.

Так як керуючий сигнал представляє собою лінійну комбінацію змінних стану, то для стабілізуючої системи такий сигнал з урахуванням сигналу завдання має вигляд:

$$u_y = \varepsilon = u_3 - k^T x = u_3 - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3, \quad (5)$$

де $k^T = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$.

Сформований закон керування реалізує повний зворотний зв'язок за станом, при якому керуюча дія визначається зваженою сумою фазових змінних. Коефіцієнти зворотного зв'язку підбираються таким чином, щоб забезпечити розміщення полюсів замкненої системи у заздалегідь заданих положеннях комплексної площини, що визначає бажані показники швидкодії та стійкості електропривода [12].

Далі визначаємо матрицю коефіцієнтів замкненої системи A_3 :

$$A_3 = A - b k^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{a_3} & -\frac{a_1 + k_2}{a_3} & -\frac{a_2 + k_3}{a_3} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Тоді матриця $(pI - A_3)$ та її визначник $\det(pI - A_3)$, що представляє характеристичне рівняння замкненої системи, мають вигляд:

$$pI - A_3 = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ \frac{k_1}{a_3} & \frac{a_1 + k_2}{a_3} & p + \frac{a_2 + k_3}{a_3} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\det(pI - A_3) = p^3 + n_3 p^2 + n_2 p + n_1,$$

де $n_1 = k_1/a_3$; $n_2 = (a_1 + k_2)/a_3$; $n_3 = (a_2 + k_3)/a_3$; p – оператор Лапласа.

Бажані динамічні властивості замкненої системи задаються у вигляді бажаного характеристичного рівняння третього порядку.

$$\alpha_{БДЖ}(p) = p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = p^3 + 7p^2 + 14p + 8. \quad (8)$$

При цьому у подальшому аналізі використовуються типові нормовані характеристичні поліноми третього порядку, параметризовані через узагальнену частоту ω_0 , що дозволяє забезпечити задані показники швидкодії та кильовальності системи.

Для дослідження динамічних властивостей синтезованої системи керування електроприводом виконаємо моделювання в середовищі Matlab, використовуючи програмний пакет Simulink.

Нехай параметри системи мають наступні значення: коефіцієнт передачі тиристорного перетворювача $k_{ТП} = 30$; коефіцієнт передачі регулятора швидкості $k_{РШ} = 10$ с; коефіцієнт електромагнітного моменту $k_M = 7,7 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-1}$; сумарний момент інерції електроприводу і механізму навантаження, приведенного до валу двигуна $J = 0,162 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2$; опір якорного ланцюга ДПС $R_a = 0,67 \text{ Ом}$; електромагнітна постійна часу ДПС $T_E = 0,0075 \text{ с}$; електромеханічна постійна часу ДПС $T_M = 0,0217 \text{ с}$; коефіцієнт проти ЕРС $k_\omega = 0,65 \text{ В} \cdot \text{с}$; коефіцієнт передачі регулятора струму $k_{РС} = 0,022 \text{ с}$.

На основі рівнянь динаміки системи в фазових змінних стану та способу формування керуючого

сигналу можна зобразити структурну схему системи керування електроприводу (СКЕП) (рис. 2).

Досліджуючи реакцію системи на одиничний ступінчастий сигнал завдання при нульових початкових умовах при значенні постійної часу ПІ – регулятора швидкості $T_{РШ} = 1 \text{ с}$, отримуємо перехідний процес, як показано на рис. 3 (крива 1).

Перехідні характеристики для випадків, коли бажані динамічні характеристики СКЕП задані у вигляді типових нормованих рівнянь третього порядку: біноміального розкладу $(p + 1)^n$ представлені кривою 2, а розкладу по Баттерворту $a^2 + \omega^2 + \omega_0^2$ – кривою 3. Вони характеризуються величинами перерегулювання відповідно 0 % та 7,1 %, а також величинами відносного часу перехідного процесу відповідно 6,3 с та 5,9 с, що відображено на відповідних перехідних характеристиках.

Узагальнені результати синтезу регуляторів для різних форм математичного опису системи та різних типів бажаних характеристичних поліномів зведені в таблицю 1, що дозволяє виконати їх формалізоване порівняння.

Використання векторно-матричного представлення системи керування у *фазових змінних стану* значно спрощує розрахунок коефіцієнтів зворотного зв'язку [5]. Але фазові змінні стану не відображають реальні фізичні зв'язки між змінними в електромеханічній системі, тобто системі керування електроприводом.

Сформуємо матричну модель для даної двоконтурної системи у фізичних змінних стану:

– Регулятор швидкості (РШ):

$$u_{РШ}(p) = \left[\frac{T_{РШ}}{k_{РШ}} + \frac{1}{k_{РШ} p} \right] \varepsilon(p), \quad (9)$$

де $k_{П} = T_{РШ}/k_{РШ}$ – пропорційна складова; $k_i = 1/k_{РШ}$ – інтегральна складова;

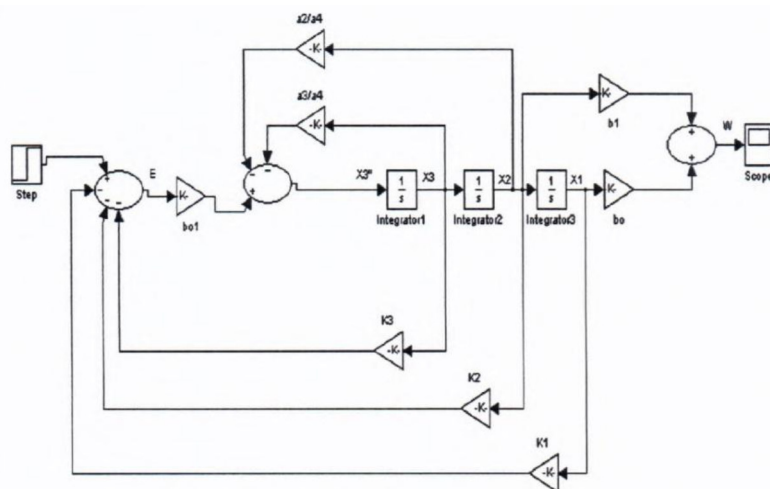


Рис. 2. Структурна схема для моделювання системи керування електроприводом

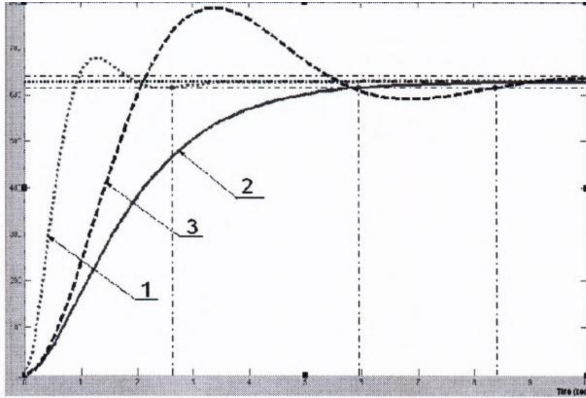


Рис. 3. Перехідні характеристики для вихідної змінної СКЕП

ОК: двигун постійного струму

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{k_M}{J} i_a \\ \frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} u_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k_\omega}{L_a} \omega \end{cases}, \quad (10)$$

де $u_a = k_{TP} k_{PC} [u_1(p) + u_2(p)]$.

Система матрично-векторних рівнянь, що представляє собою динамічну модель у фізичних змінних стану, буде мати вигляд:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_M}{J} & 0 \\ -\frac{k_\omega}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_{TP} k_{PC}}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{TP} k_{PT} k_{PI}}{L_a} \\ k_i \end{bmatrix} \varepsilon; \quad (11)$$

$$y = \omega = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

або $\dot{z} = F_z + b_z \varepsilon$, $y = c_z^T z$.

У поданій математичній моделі змінними стану є безпосередньо вимірювані фізичні величини електропривода: струм якорного кола, що визначає електромагнітний момент двигуна; кутова швидкість обертання вала, яка характеризує механічний стан системи; а також інтегральна складова ПІ-регулятора швидкості, що забезпечує компенсацію статичної похибки за швидкістю. Такий вибір змінних стану дозволяє наочно простежити вплив параметрів об'єкта керування на динамічні властивості електромеханічної системи та коректно оцінювати її стійкість при зміні навантаження і параметрів двигуна.

Для переходу від математичного запису у фазових до запису у фізичних змінних стану необхідно ввести до розгляду допоміжну матрицю перетворення Q . Матриця перетворення Q встановлює

однозначний зв'язок між фазовими та фізичними змінними стану електромеханічної системи. Використання даної матриці дозволяє здійснити перехід від абстрактного математичного опису до змінних, що мають чітку фізичну інтерпретацію, зберігаючи при цьому динамічну еквівалентність моделей. Це є принципово важливим для практичної реалізації синтезованих регуляторів.

Знаючи значення коефіцієнтів матриці перетворення можливо від параметрів модального регулятора для фазових змінних стану здійснювати відносно легкий перехід до параметрів регулятора по фізичним змінним. Легкість такого переходу є необхідною умовою синтезу СКЕП методом розміщення полюсів для систем високого порядку.

Запишемо вирази для переходу між різними математичними моделями в змінних стану:

$$\dot{z} = Q\dot{x}; \quad F = QAQ^{-1}; \quad FQ = QA, \quad (12)$$

$$\text{де } Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} - \text{матриця перетворення.}$$

$$c_z^T = c^T Q^{-1}; \quad c_z^T Q = c^T, \quad (13)$$

Перетворюючи вираз отримаємо:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{k_M}{J} & 0 \\ -\frac{k_\omega}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & \frac{k_{TP}}{k_{PC}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$[1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = [c_0 \ c_1 \ 0], \quad (15)$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь, знаходимо коефіцієнти матриці перетворення Q :

$$\begin{aligned} q_{11} &= c_0; \quad q_{12} = c_1; \quad q_{13} = 0; \quad q_{21} = 0; \\ q_{22} &= c_0 \frac{J}{k_M}; \quad q_{23} = c_1 \frac{J}{k_M}; \quad q_{31} = c_0 \frac{k_\omega}{k_{TP} k_{PC}}; \\ q_{32} &= \frac{L_a}{k_{TP} k_{PC}} \left[-\frac{a_1}{a_3} \frac{J}{k_M} c_1 + \frac{k_\omega}{L_a} c_1 + \frac{R_a J}{L_a k_M} c_0 \right]; \\ q_{33} &= \frac{L_a J}{k_{TP} k_{PC} k_M} \left[c_0 + \left(\frac{R_a}{L_a} - \frac{a_2}{a_3} \right) c_1 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

Підставляючи значення параметрів у дані вирази ми зможемо побудувати матрицю перетворення

у числовому вигляді для конкретного електроприводу.

У вищезрозглянутій електромеханічній системі в прямому ланцюгу керування знаходиться ПІ – регулятор швидкості. Таким чином реалізовується чіткий аперіодичний характер перехідного процесу.

З теорії систем керування електроприводів найбільш розповсюдженою схемою являється схема, в якій використовуються ПІ – регулятор швидкості та ПІ – регулятор струму. Це викликано тим, що при різкій зміні характеру збуджуючого сигналу в системі (наприклад, при різкому збільшенні навантаження на валу електродвигуна) система повинна відпрацювати стрибки струму саме в якірному ланцюзі.

Для синтезу заданої системи керування електроприводом запишемо передавальну функцію розімкнутої системи керування:

$$\begin{aligned} W_{\text{роз}}(p) &= \frac{\omega(p)}{\varepsilon(p)} = \\ &= k_{\text{рш}} \frac{T_{\text{рс}} p + 1}{k_{\text{рс}} p} k_{\text{тп}} \frac{1/k_{\omega}}{T_{\text{е}} T_{\text{м}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1} = \\ &= \frac{b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p}, \end{aligned} \quad (17)$$

Як видно із цього виразу, характеристичне рівняння передавальної функції розімкнутої системи з ПІ – регулятором струму ідентичне характеристичному рівнянню передавальної функції з ПІ – регулятором швидкості. Це означає, що значення коефіцієнтів 33 (параметри модального регулятора) обох систем рівні. Перехідні процеси обох систем абсолютно ідентичні, відповідно для різних бажаних характеристичних поліномів.

Знайдемо коефіцієнти зворотних зв'язків (33) СКЕП в моделі з використанням фізичних змінних стану (рис. 4) методом розміщення полюсів без використання матриці перетворення подібності.

Для напруги якірного ланцюга запишемо рівняння в операторній формі з урахуванням ПІ-регулятора струму:

$$\begin{aligned} u_a(p) &= k_{\text{тп}} u_{\text{рс}}(p) = k_{\text{тп}} \left(\frac{T_{\text{рс}}}{k_{\text{рс}}} + \frac{1}{k_{\text{рс}} p} \right) \cdot k_{\text{рш}} \cdot \varepsilon(p); \\ u_a(p) &= \frac{k_{\text{тп}} k_{\text{рш}} T_{\text{рс}}}{k_{\text{рс}}} \varepsilon(p) + \frac{k_{\text{тп}} k_{\text{рш}} \varepsilon(p)}{k_{\text{рс}} p} = k_{\text{п}} \varepsilon(p) + u_1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{де } k_{\text{п}} = \frac{k_{\text{тп}} k_{\text{рш}} T_{\text{рс}}}{k_{\text{рс}}}; \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{k_{\text{тп}} k_{\text{рш}} \varepsilon(p)}{k_{\text{рс}}} = k_i \varepsilon(p).$$

На основі цього сформуємо систему диференціальних рівнянь у формі Коши для даної СКЕП:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{k_{\text{м}}}{J} i_a, \\ \frac{di_a}{dt} = \frac{k_{\text{п}}}{L_a} \varepsilon + \frac{1}{L_a} u_1 - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k_{\omega}}{L_a} \omega, \\ \frac{du_1}{dt} = k_i \varepsilon, \end{cases} \quad (19)$$

Фізичні змінні стану для даної системи електропривода $x_1 = \omega$; $x_2 = i_a$; $x_3 = u_1$. З урахуванням введених позначень запишемо дану систему об'єкту керування у векторно-матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{\text{м}}}{J} & 0 \\ -\frac{k_{\omega}}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{\text{п}}}{L_a} \\ \frac{k_i}{k_i} \end{bmatrix} \varepsilon \quad (20)$$

$$\varepsilon = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

Матриця коефіцієнтів для замкнутої системи запишеться у вигляді:

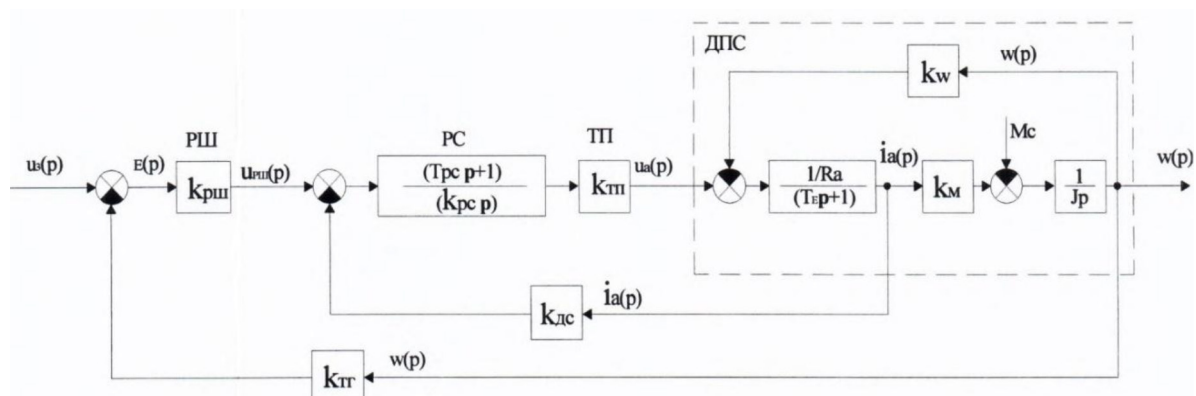


Рис. 4. Структурна схема двоконтурної системи підкороного регулювання електропривода

$$A_3 = A - bK^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_M}{J} & 0 \\ \frac{k_\omega}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{II}k_1}{L_a} & \frac{k_{II}k_2}{L_a} & \frac{k_{II}k_3}{L_a} \\ k_i k_1 & k_i k_2 & k_i k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

де

$$n_{12} = \frac{k_M}{J}; n_{21} = \frac{k_\omega + k_{II}k_1}{L_a}; n_{22} = -\frac{R_a + k_{II}k_2}{L_a};$$

$$n_{23} = \frac{1 - k_{II}k_3}{L_a}; n_{31} = -k_i k_1;$$

$$n_{32} = -k_i k_2; n_{33} = -k_i k_3.$$

Визначник, що представляє собою характеристичне рівняння замкненої системи керування електроприводом, визначається векторно-матричним виразом $pI - A_3$:

$$\det(pI - A_3) = p^3 + (-n_{33} - n_{22})p^2 + (n_{22}n_{33} - n_{23}n_{32} - n_{21}n_{12})p + (n_{12}n_{21}n_{33} - n_{12}n_{23}n_{31}). \quad (22)$$

Нехай бажане характеристичне рівняння має вигляд:

$$\alpha_{БДЖ} = p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = p^3 + 7p^2 + 14p + 8, \quad (23)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях останніх двох характеристичних поліномів та враховуючи усі проведені заміни, сформуємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів 33 k_i :

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{k_{II}}{L_a} k_2 + \frac{k_{III}k_{PШ}}{k_{PC}} k_3 + \frac{R_a}{L_a}, \\ \alpha_1 = \frac{k_M k_{II}}{J L_a} k_1 + \frac{k_{III}k_{PШ}}{k_{PC} L_a} k_2 + \frac{k_{III}k_{PШ} R_a}{k_{PC} L_a} k_3 + \frac{k_M k_\omega}{J L_a}, \\ \alpha_0 = \frac{k_{III}k_{PШ} k_M}{k_{PC} L_a J} k_1 + \frac{k_{III}k_{PШ} k_M k_\omega}{k_{PC} L_a J} k_3, \end{cases} \quad (24)$$

На основі цього порівнюємо трудомісткість даного методу синтезу з методом при використанні фазових змінних стану.

Прирівнюючи коефіцієнти модального регулятора, отримані за допомогою синтезу САК методом розміщення полюсів на основі фізичних змінних стану для системи з ПІ – регулятором швидкості (рис. 1) та системи з ПІ – регулятором струму (рис. 4), бачимо, що суттєвих відмінностей не існує, як в особливостях запису математичної моделі, так і в отриманих значеннях. Приведені викладки підтверджують, що використання перетворення подібності є абсолютно виправданим для визначення коефіцієнтів 33 для фізичних змінних стану, тому що це значно полегшує складність їх визначення у порівнянні з їх безпосереднім обчисленням.

Для дослідження математичних моделей СКЕП з використанням як фазових, так і фізичних змінних стану, в Simulink сформуємо структурні схеми відповідно до виду використаних змінних та числових значень параметрів ОК, та порівняємо дані по дослідженню стійкості цих моделей. Шляхом зміни параметрів, що коливаються, встановимо їх обмеження, в рамках яких система зберігає стійкість.

Структурна схема СКЕП, побудована з використанням фазових змінних стану представлена на рис. 5.

Перевіримо параметричну стійкість методом моделювання зміни параметрів та встановимо межі

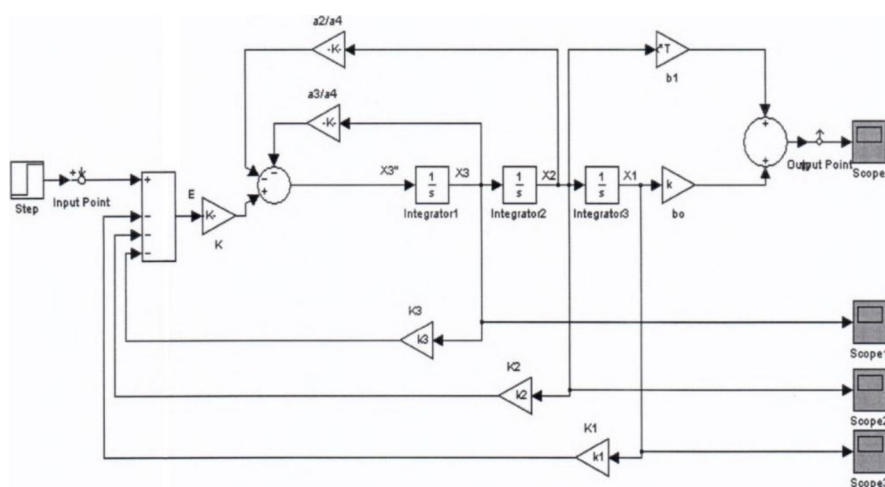


Рис. 5. Структурна схема математичної моделі СКЕП, синтезованої методом розміщення полюсів за використання фазових змінних стану

їх зміни за допомогою безпосереднього аналізу перехідного процесу.

При номінальних значеннях опору якірного ланцюга $R_{an} = 0,67 \text{ Ом}$ та приведенного моменту інерції $J_H = 0,162 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; час перехідного процесу $\tau = 3 \text{ с}$. Значення даних параметрів, при яких система зберігає стійкість: $R_a \geq 0,64 \text{ Ом}$, $J \geq 0,154 \text{ кг} \cdot \text{м}$. При цьому момент інерції на холостому ходу складає $J_{XX} = 0,035 \text{ кг} \cdot \text{м}$.

Тобто, згідно моделі, при відсутності махового моменту на валу, тобто коли двигун працює на холостому ходу, математична модель системи нестійка і її робота виявляється непередбачуваною.

Втрата стійкості математичної моделі, синтезованої у фазових змінних стану, при зменшенні приведенного моменту інерції $J \rightarrow 0$ зумовлена особливостями вибору узагальнених координат, які не враховують реальні фізичні обмеження електромеханічної системи. За відсутності махового моменту механічна підсистема втрачає властивість накопичення кінетичної енергії, що в моделі фазових змінних призводить до некоректного опису енергетичного обміну між електричною та механічною частинами електропривода. У результаті цього замкнена система стає чутливою до малих збурень параметрів і демонструє нестійку поведінку, яка не відповідає реальним фізичним процесам.

Для порівняння перевіримо параметричну стійкість для моделі в фізичних змінних стану (рис. 6) аналогічним покачуванням параметрів ОК та аналізу перехідного процесу.

Для номінальних значень досліджуваних параметрів $R_{an} = 0,67 \text{ Ом}$; $J_H = 0,162 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; час перехідного процесу $\tau = 3 \text{ с}$. Межі стійкості математичної моделі в фізичних змінних стану: $R_a \geq 0,64 \text{ Ом}$, $J \geq 0$. При цьому при $J_{XX} = 0,035 \text{ кг} \cdot \text{м}$, час перехідного процесу $\tau = 1,5 \text{ с}$.

Як бачимо, згідно до моделі в фізичних змінних стану, електромеханічна система являється

стійкою в досить широких межах зміни параметрів, що коливаються, особливо відносно моменту інерції J у порівнянні з попередньою моделлю, яка записана за допомогою фазових змінних стану.

ОБГОВОРЕННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Аналіз зведених параметрів регуляторів, наведених у таблиці 1, показав, що при однаковому виборі бажаного характеристичного полінома числові значення коефіцієнтів регуляторів, визначених для математичних моделей у фазових та фізичних змінних стану, забезпечують динамічну еквівалентність систем керування. Водночас моделі, синтезовані у фізичних змінних стану, характеризуються більшим запасом параметричної стійкості, що підтверджує доцільність їх використання при аналізі та практичному проектуванні електроприводів.

ВИСНОВКИ

Виконано порівняльний аналіз методів синтезу систем керування електроприводом на основі фазових та фізичних змінних стану із застосуванням методу розміщення полюсів. Показано, що обидва підходи дозволяють забезпечити задані динамічні характеристики замкненої системи та є динамічно еквівалентними за умови коректного вибору бажаного характеристичного полінома і параметрів регуляторів.

Встановлено, що синтез у фазових змінних стану характеризується меншою трудомісткістю та зручністю аналітичних розрахунків, однак обмежує можливості фізичної інтерпретації процесів і призводить до зменшення запасів параметричної стійкості при значних відхиленнях параметрів об'єкта керування. Натомість використання фізичних змінних стану забезпечує більш адекватне відображення реальних електромеханічних процесів та підвищує

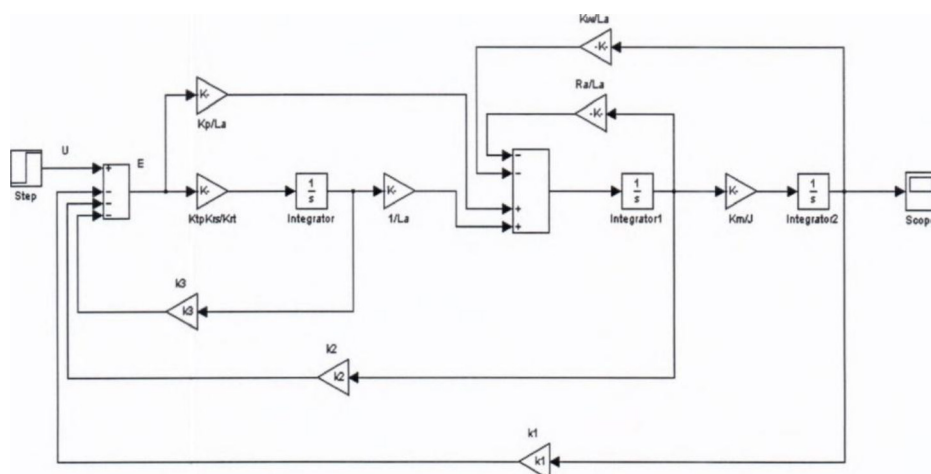


Рис. 6. Структурна схема математичної моделі СКЕП, синтезованої методом розміщення полюсів з використанням фізичних змінних стану

Таблиця 1. Зведена таблиця параметрів регуляторів для різних варіантів синтезу

№	Варіант синтезу системи керування	Тип регулятора швидкості	Тип регулятора струму	Характеристичний поліном (бажаний)	Перерегулювання, %	Відносний час перехідного процесу, с	Особливості синтезу
1	Синтез у фазових змінних стану	ПІ	П	Базовий (заданий через розміщення полюсів)	Залежить від вибору полюсів	Залежить від вибору полюсів	Простота розрахунку, відсутність фізичної інтерпретації змінних
2	Фазові змінні стану	ПІ	П	Біноміальний поліном 3-го порядку	0	6,3	Аперіодичний характер, підвищена робастність
3	Фазові змінні стану	ПІ	П	Поліном Баттерворта 3-го порядку	7,1	5,9	Компроміс між швидкодією та коливальністю
4	Фізичні змінні стану	ПІ	П	Біноміальний поліном 3-го порядку	0	6,3	Реальна фізична інтерпретація змінних, більша складність синтезу
5	Фізичні змінні стану	ПІ	П	Поліном Баттерворта 3-го порядку	7,1	5,9	Краща параметрична стійкість порівняно з фазовими змінними
6	Фізичні змінні стану (без перетворення подібності)	ПІ	ПІ	Заданий через пряме прирівнювання коефіцієнтів	Аналогічно фазовій моделі	Аналогічно фазовій моделі	Підвищена трудомісткість синтезу
7	Фазові змінні стану з перетворенням подібності	ПІ	П	Еквівалентний фізичним змінним	Ідентичне	Ідентичний	Спрощений перехід до фізичних параметрів
8	Фізичні змінні стану з перетворенням Q	ПІ	П	Біноміальний / Баттерворта	0–7,1	5,9–6,3	Найбільш універсальний і рекомендований варіант

робастність системи щодо зміни навантаження і параметрів електропривода.

Показано, що застосування перетворення подібності дозволяє ефективно поєднати переваги обох підходів, забезпечуючи простоту синтезу регуляторів у фазових змінних стану з подальшим переходом до фізично інтерпретованих координат без втрати динамічних властивостей системи. Результати комп'ютерного моделювання в середовищі MATLAB/Simulink підтвердили коректність теоретичних положень і дозволили кількісно оцінити вплив вибору

змінних стану на показники якості та стійкості системи керування.

Отримані результати свідчать про доцільність використання фізичних змінних стану на етапах аналізу та практичного проектування систем керування електроприводами, а також підтверджують ефективність методу розміщення полюсів як інструменту формування заданих динамічних властивостей. Запропонований підхід може бути використаний при розробці та модернізації систем керування електроприводами різного призначення.

REFERENCES

- [1] Besekerskyi, V. O., & Popov, Ye. P. (2003). *Teoriia system avtomatychnoho keruvannia* [Theory of automatic control systems]. Kyiv : Lybid.
- [2] Kuczmam, M. (2024). Modeling and state-space control of a DC motor for educational and laboratory applications. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 61(2), pp. 1–15.
- [3] Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall.
- [4] Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable feedback control: Analysis and design* (2nd ed.). Chichester, UK: Wiley.
- [5] Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2017). *Modern control systems* (13th ed.). Boston, MA: Pearson.
- [6] Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2015). *Feedback control of dynamic systems* (7th ed.). Boston, MA: Pearson.
- [7] Bishop, R. H., & Dorf, R. C. (2008). Design of state-feedback and observer-based controllers for DC motor drives. *IEEE Transactions on Education*, 51(4), 492–499. <https://doi.org/10.1109/TE.2008.917191>

- [8] Hernandez-Guzman, V. M., & Silva-Ortigoza, R. (2018). Velocity control of DC motors using state feedback: Experimental results. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(5), pp. 4154–4162.
- [9] Bose, B. K. (2022). Artificial intelligence techniques in smart grid and renewable energy systems: Some example applications. *Proceedings of the IEEE*, 110(1), 75–100.
- [10] Zhou, K., Doyle, J. C., & Glover, K. (1996). *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.
- [11] Leonhard, W. (2001). *Control of electrical drives* (3rd ed.). Berlin, Germany: Springer.
- [12] Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Бесекерський, В. О., & Попов, Є. П. (2003). *Теорія систем автоматичного керування*. Либідь.
- [2] Kuczmam, M. (2024). Modeling and state-space control of a DC motor for educational and laboratory applications. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 61(2), pp. 1–15.
- [3] Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- [4] Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable feedback control: Analysis and design* (2nd ed.). Chichester, UK: Wiley.
- [5] Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2017). *Modern control systems* (13th ed.). Boston, MA: Pearson.
- [6] Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2015). *Feedback control of dynamic systems* (7th ed.). Boston, MA: Pearson.
- [7] Bishop, R. H., & Dorf, R. C. (2008). Design of state-feedback and observer-based controllers for DC motor drives. *IEEE Transactions on Education*, 51(4), 492–499. <https://doi.org/10.1109/TE.2008.917191>
- [8] Hernandez-Guzman, V. M., & Silva-Ortigoza, R. (2018). Velocity control of DC motors using state feedback: Experimental results. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(5), pp. 4154–4162.
- [9] Bose, B. K. (2022). Artificial intelligence techniques in smart grid and renewable energy systems: Some example applications. *Proceedings of the IEEE*, 110(1), 75–100.
- [10] Zhou, K., Doyle, J. C., & Glover, K. (1996). *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.
- [11] Leonhard, W. (2001). *Control of electrical drives* (3rd ed.). Berlin, Germany: Springer.
- [12] Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.

© Садовий О. С., Ставинський А. А., Мардзявко В. А., Білюк І. С., Ставинський Р. А.

Дата надходження статті до редакції: 05.11.2025

Дата затвердження статті до друку: 21.11.2025

Опубліковано: 30.12.2025

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0