МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Український державний морський технічний університет
імені адмірала Макарова

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рекомендовано Методичною радою УДМТУ
як методичні вказівки

Миколаїв 2002

УДК 517:681.3

Павліщев В.І., Попова Н.І. Диференціальні рівняння. – Миколаїв: УДМТУ, 2002. – 44 с.

Кафедра *вищої математики*

Методичні вказівки відповідають програмі курсу вищої математики у технічному вузі. Містять диференціальні рівняння першого, другого і вищих порядків, системи диференціальних рівнянь та рівняння математичної фізики. Наведені вправи до кожного розділу.

Призначені для самостійної роботи студентів усіх спеціальностей, а також студентів-заочників.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доцент А.М. Кузнєцов.

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Поняття про диференціальне рівняння

При розв'язанні багатьох задач математики, фізики і техніки часто вдається скласти диференціальне рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, шукану функцію та її похідні різних порядків. Найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння, називається порядком диференціального рівняння.

Розглянемо деякі задачі, що приводять до постановки диференціальних рівнянь.

Задача 1. Знайти закон охолодження тіла, якщо температура навколишнього повітря підтримується постійною та дорівнює T°.

Розв'язання. Позначимо температуру тіла в деякий момент часу t через $T(t)$, тоді швидкість зміни температури за часом дорівнює похідній dT/dt.

Оскільки швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища, то одержуємо рівняння $dT/dt = -k(T - T_0)$, де k – додатний коефіцієнт пропорційності.

Задача 2. На площині xOy знайти криву, яка проходить через точку $O(0;0)$, у якій кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до будь-якої точки кривої, дорівнює подвоєній абсцисі точки торкання.

Розв'язання. Нехай $y = f(x)$ – рівняння шуканої кривої. За умовою задачі в кожній точці $M(x; f(x))$ є дотична до цієї кривої, кутовий коефіцієнт якої, тобто $f'(x)$, дорівнює $2x$. Таким чином, маємо задачу: знайти такий розв'язок рівняння $y' = 2x$, для якого $y(0) = 0$.

У загальному вигляді диференціальне рівняння першого порядку можна записати так:

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.1}$$

або

$$y'=f(x,y), \tag{1.2}$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція та y' – її похідна. Іноді рівняння першого порядку можна привести до вигляду в диференціалах

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dx=0. \tag{1.3}$$

Рівняння (1.1)–(1.3) мають частинні й загальні розв'язки.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається функція $B = \varphi(x)$, що перетворює його на тотожність відносно x. Загальний розв'язок містить довільну сталу C:

$$y = \varphi(x,C).$$

Якщо розв'язок рівняння отриманий у неявному вигляді $\varphi(x,y)=0$ або $\varphi(x,y,C)=0$, то він називається, відповідно, частинним або загальним інтегралом.

Процес відшукування розв'язку називається інтегруванням диференціального рівняння.

Графік розв'язків на площині xOy називається інтегральною кривою диференціального рівняння.

Розглянемо найпростіше рівняння

$$y'=1 \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx}=1 \quad \text{або} \quad dy=dx\,.$$

За допомогою інтегрування знаходимо

$$\int dy=\int dx+C \quad \text{або} \quad y=x+C.$$

Одержали загальний розв'язок, тому що він містить довільну сталу C і є записом усього різноманіття розв'язків. Надаючи сталій C конкретні числові значення, одержимо конкретні частинні розв'язки.

Диференціальному рівнянню відповідає нескінченна безліч інтегральних кривих і, отже, нескінченна безліч розв'язків. Для виділення з цієї безлічі конкретної інтегральної кривої необхідно задати точку (x_0, y_0), через яку повинна проходити крива, тобто поставити задачу Коші: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє задану початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Для рівняння (1.2) з умовою (1.4) справедлива наступна теорема існування й одиничності рішення.

Теорема. Якщо $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'(x, y)$ неперервні в деякій області D на площині xOy, що містить точку (x_0, y_0), то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє умові $y(x_0) = y_0$.

Геометричний зміст цієї теореми полягає в тому, що існує лише єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, графік якого проходить через точку (x_0, y_0).

Відзначимо, що не існує єдиного методу розв'язку диференціальних рівнянь.

Нижче розглянемо розв'язки лише деяких видів диференціальних рівнянь.

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд

$$\varphi_1(x)\varphi_2(y)dx + \psi_1(x)\psi_2(y)dx = 0. \tag{1.5}$$

Поділивши обидві частини рівняння (1.5) на $\varphi_2(y)\psi_1(x)$, перенесемо другий доданок у праву частину і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\Psi_1(x)}dx = -\frac{\varphi_2(y)}{\Psi_2(y)}dy.$$

Загальний інтеграл знаходиться інтегруванням обох частин

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\Psi_1(x)}dx = -\int \frac{\varphi_2(y)}{\Psi_2(y)}dy + C.$$

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння, отримане в задачі 1 § 1.1,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0).$$

Розв'язання. Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dT}{T - T_0} = -kdt.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\ln|T - T_0| = -kt + \ln C \quad \text{або} \quad T - T_0 = Ce^{-kt}.$$

Звідси одержуємо загальний розв'язок

$$T = Ce^{-kt} + T_0.$$

Для визначення параметра k і сталої C необхідно задати дві початкові умови.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(1+y^2)dx = xydy$, яке задовольняє початкові умови $y(2) = 1$.

Розв'язання. Відокремимо змінні, розділивши обидві частини рівняння на $(1+y^2)x$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{y}{1+y^2}dy.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, маємо

$$\ln|x| = (1/2)\ln(1+y^2) + \ln C \quad \text{або} \quad \ln|x| = \ln(C\sqrt{1+y^2}).$$

Потенціюючи, знаходимо загальний інтеграл рівняння

$$x = C\sqrt{1+y^2} \quad \text{або} \quad x^2 = C^2(1+y^2).$$

Задовольнимо початкові умови $y(2) = 1$:

$$2^2 = C^2(1+1) \quad \text{або} \quad C^2 = 2.$$

Звідси знаходимо частинний інтеграл

$$x^2 = 2(1 + y^2).$$

1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається однорідним, якщо його можна навести у вигляді

$$y = \varphi(y/x). \tag{1.6}$$

Воно може бути перетворене у рівняння з відокремлюваними змінними заміною

$$y/x = z(x), \tag{1.7}$$

де z – нова функція.

Диференціюючи рівність (1.7), одержимо

$$y' = z + xz'.$$

Підставимо y і y' у рівняння (1.6):

$$z + xz' = \varphi(x),$$

звідки

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Знайшовши його загальний розв'язок і замінивши z на y/x, одержимо загальний розв'язок однорідного рівняння (1.6).

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = y/x + (y/x)^2$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $y = xz$. Тоді $y' = z + xz'$ і рівняння набуде вигляду $z + xz' = z + z^2$ або $x\dfrac{dz}{dx} = z^2$.

Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо ліву і праву частини

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln C \quad \text{або} \quad -1/z = \ln|Cx|.$$

Заміняючи $z = y/x$ одержимо загальний інтеграл рівняння

$$\ln|Cx| = -x/y.$$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння називається лінійним, якщо воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідної y' і має вигляд

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{1.8}$$

Лінійне рівняння зводиться до двох рівнянь з відокремлюваними змінними, якщо шукану функцію замінити добутком двох допоміжних функцій.

Візьмемо $y = uv$. Тоді $y' = u'v + v'u$, і рівняння (1.8) набуде вигляду

$$vu' + u(v' + P(x)v) = Q(x). \tag{1.9}$$

Користуючись тим, що одну з допоміжних функцій, наприклад v, можна вибрати довільно, підберемо її так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю. За v візьмемо один з частинних розв'язків рівняння з відокремлюваними змінними

$$v' + P(x)v = 0.$$

Підставляючи отриманий розв'язок $v = v(x)$ у рівняння (1.9), одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$v(x)u' = Q(x).$$

Знайшовши загальний розв'язок останнього рівняння $u = u(x, C)$, одержимо загальний розв'язок лінійного рівняння (1.8)

$$y = u(x, C)v(x).$$

Приклад. Проінтегрувати рівняння

$$y'+2xy=2x^2e^{-x^2}.$$

Розв'язання. Покладемо $y=uv$. Тоді $y'=u'v+uv'$. Підставимо значення y і y' у задане рівняння:

$$u'v+uv'+2xuv=2x^2e^{-x^2} \quad \text{або} \quad u'v+v(u'+2xu)=2x^2e^{-x^2}. \quad (1.10)$$

Знайдемо з умови обернення виразу в дужках у нуль

$$u'+2xu=0 \quad \text{або} \quad \frac{du}{dx}=-2xu.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{du}{u}=-2xdx, \quad \ln|u|=-x^2, \quad u=e^{-x^2}.$$

Підставивши знайдене значення u у рівняння (1.10), отримаємо

$$e^{-x^2}v'=2x^2e^{-x^2}.$$

Відокремлюємо змінні

$$dv=2x^2dx$$

та інтегруємо

$$v=2/3x^3+C.$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння буде мати вигляд:

$$y=uv=e^{-x^2}(2/3x^3+C).$$

1.5. Вправи

Проінтегрувати наступні диференціальні рівняння:

а) з відокремлюваними змінними: 1) $x^2y'+y=0$; 2) $y'=2xy$, $y(0)=1$; 3) $y^2dy+\cos xdx=0$; 4) $y'=\dfrac{y}{x}, y(1)=1$;

б) однорідні: 5) $y' = (y^2 + y^2)/2xy$; 6) $y' = y/x + 1$;

в) лінійні: 7) $y' = y/x + x^2$; 8) $y' + 6x^2 y = 2xe^{-2x^3}$, $y(0) = 5$.

Відповіді:

1) $y = ce^{\frac{1}{x}}$; 2) $y = e^{x^2}$; 3) $1/3\,y^3 + \sin x = C$;

4) $y = x$; 5) $x^2 - y^2 - Cx = 0$; 6) $y = x\ln(Cx)$;

7) $y = (x^2/2 + C)x$; 8) $y = (x^2 + 5)e^{-2x^3}$.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО І ВИЩОГО ПОРЯДКІВ

2.1. Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку має загальний вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{2.1}$$

де x – незалежна змінна; $y = y(x)$ – шукана (невідома) функція від x; y' і y'' – похідні цієї невідомої функції.

Якщо вдається розділити рівняння (2.1) відносно старшої похідної y'' невідомої функції, то його переписують у вигляді

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2.2}$$

Розглянемо приклад. Нехай дане рівняння

$$y'' = 6x. \tag{2.3}$$

Інтегруючи його послідовно двічі, знайдемо

$$y' = 3x^2 + C_1, \tag{2.4}$$

$$y = x^3 + C_1 x + C_2. \tag{2.5}$$

Функція (2.5), яка залежить від двох довільних сталих C_1 і C_2, є загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3).

Щоб з (2.5) отримати частинний розв'язок диференціального рівняння (2.3), досить задати при деякому $x = x_0$ значення $y\big|_{x=x_0} = y_0$ і $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$, тобто задати дві початкові умови (за числом довільних сталих).

Нехай, наприклад: $x_0 = 1, y_0 = 6, y'_0 = 5$.

Тоді початкові умови мають вигляд

$$\begin{cases} y\big|_{x=1} = 6; \\ y'\big|_{x=1} = 5. \end{cases} \tag{2.6}$$

Підставляючи (2.6) у (2.5) та (2.4), знаходимо

$$\begin{cases} 5 = 3 + C_1 , \\ 6 = 1 + C_1 + C_2 , \end{cases}$$

звідки $C_1 = 2,\ C_2 = 3$ і шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y = x^3 + 2x + 3. \tag{2.7}$$

Функція (2.7) є частинним розв'язком диференціального рівняння (2.3), яке задовольняє початкові умови (2.6) (або, як прийнято говорити, розв'язком задачі Коші для диференціального рівняння (2.3) при початкових умовах (2.6)).

З геометричної точки зору загальне рішення задає безліч інтегральних кривих (частинних розв'язків) даного диференціального рівняння другого порядку. При цьому перша початкова умова $y\big|_{x=x_0} = y_0$ задає точку $M_0(x_0, y_0)$ на площині, через яку повинна проходити шукана інтегральна крива, а друга початкова умова $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$ задає кутовий коефіцієнт дотичної до шуканої інтегральної кривої в цій точці.

2.2. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку

У ряді окремих випадків удається понизити порядок диференціального рівняння. Розглянемо рівняння другого порядку.

1. Нехай рівняння (2.2) має вигляд

$$y'' = f(x) \qquad (2.8)$$

(права частина рівняння (2.2) не містить y і y').

Оскільки $y''dx = (y')'dx = d(y')$, то, множачи обидві частини рівняння (2.8) на dx і почленно інтегруючи отриману рівність, знаходимо

$$y' = \int f(x)dx + C_1, \qquad (2.9)$$

де невизначений інтеграл розуміємо як деяку конкретну первісну (тому що довільна постійна інтегрування вже вказана).

Інтегруючи тепер рівняння (2.9) (воно є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними), одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння (2.8):

$$y = \int (\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2).$$

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = \cos x$, що задовольняє початкові умови

$$y|_{x=0} = 2 \quad \text{і} \quad y'|_{x=0} = 1.$$

Маємо: $y' = \sin x + C_1$,

$$y = C_1x + C_2 - \cos x. \qquad (2.10)$$

Підставляючи в y і y' початкові умови, знайдемо $C_1 = 1$, $C_2 = 3$.

Підставляючи отримані значення довільних сталих у загальний розв'язок (2.10), знаходимо розв'язок задачі Коші: $y = x + 3 - \cos x$.

2. Нехай рівняння (2.2) має вигляд

$$y'' = f(x, y') \qquad (2.11)$$

(права частина рівняння (2.2) не містить у явному вигляді y).

Введемо нову невідому функцію $z = y'$. Тоді інтегрування рівняння (2.11) другого порядку зведеться до інтегрування системи двох рівнянь першого порядку: $y' = z, z' = f(x, z)$.

Таким чином, порядок шуканого рівняння (2.2) вдалося знизити.

Як приклад знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = \frac{2xy'}{1+x^2}. \qquad (2.12)$$

Оскільки тут маємо рівняння виду (2.2), і права частина не містить у явному вигляді y, то припускаємо

$$y' = z\,, \qquad (2.13)$$

звідки

$$z' = 2xz/(1+x^2). \qquad (2.14)$$

Рівняння (2.14) є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними.

Розділяючи змінні, знаходимо $dz/z = 2xdx/(1+x^2)$.

Інтегруючи, маємо $\ln|z| = \ln(1+x^2) + \ln C_1$ або

$$z = C_1(1+x). \qquad (2.15)$$

Підставляючи (2.15) у (2.13), маємо $y' = C_1(1+x)$, звідки

$$y = C_1(x + x^3/3) + C_2\,. \qquad (2.16)$$

Функція (2.16) є загальним розв'язком рівняння (2.12).

3. Нехай тепер рівняння (2.2) не містить в явному вигляді x:

$$y'' = f(y, y'). \qquad (2.17)$$

Для того щоб знизити порядок рівняння, візьмемо y за незалежну змінну. Тоді

$$y' = p, \qquad (2.18)$$

де $p = p(y)$.

При цьому

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = y'\frac{dy'}{dx} = p\frac{dp}{dy}. \qquad (2.19)$$

Підставляючи (2.18) і (2.19) у (2.17), одержуємо

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

тобто порядок рівняння знизився.

Як приклад знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \frac{(y')^2 + 1}{2y}. \tag{2.20}$$

Припустимо $y' = p(y)$; $y'' = p'_y y'_x = p'p = \frac{dp}{dy}p$. Одержимо $p\frac{dp}{dy} = \frac{p^2 + 1}{2y}$.

Відокремлюючи змінні, маємо

$$\frac{2pdp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y},$$

звідки $\ln(p^2 + 1) = \ln y + \ln C_1$ або $p^2 + 1 = C_1 y$.

Згадуючи тепер, що $p = y'$, знайдемо $(y')^2 + 1 = C_1 y$ або

$$y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}. \tag{2.21}$$

Відокремивши змінні, приведемо (2.21) до вигляду

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx,$$

Інтегруючи останнє рівняння, одержуємо

$$\pm 2\sqrt{C_1 y - 1} \big/ C_1 = x + C_2$$

або

$$y = (C_1^2 (x + C_2)^2 + 4)/(4C_1). \tag{2.22}$$

Функція (2.22) є шуканим загальним розв'язком рівняння (2.20).

Задамося тепер питанням: при виконанні яких умов задача Коші однозначно розв'язується для диференціального рівняння (2.2)?

Відповідь на це питання дає теорема існування й одиничності розв'язка задачі Коші, яка аналогічно формулюється для рівнянь більш високих порядків.

Теорема. Якщо функція f у рівнянні $y'' = f(x, y, y')$ та її частинні похідні $f'y$ та $f'y'$ неперервні в околі точки $P_0(x_0, y_0, y'_0)$, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

У даній теоремі точка $P_0(x_0, y_0, y'_0)$ належить тривимірному простору, причому y'_0 розглядається як апліката точки. $f'y'$ означає частинну похідну функції $f(x, y, y')$ за аргументом y', яку можна вважати третьою незалежною змінною.

Приклад. Розв'язати задачу Коші для рівняння $y'' = y'/x$ з початковими умовами

$$\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(1) = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо: $f = y'/x, f'y = 0$ (оскільки f не містить y у явному вигляді), $f'y' = 1/x$. Функції $f = y'/x$, $f'y = 0, f'y' = 1/x$ визначені і неперервні в околі точки $P_0(1;1;2)$. Отже, сформульована задача Коші має єдиний розв'язок.

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = C_1x^2 + C_2$, звідки $y' = 2C_1x$.

Підставляючи $x = 1, y = 1, y' = 2$ в останні дві рівності, одержуємо

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 2 = 2C_1. \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1, C_2 = 0$.

Отже, функція $y = x^2$ є розв'язком даної задачі Коші, і цей розв'язок єдиний.

2.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Структура загального розв'язання однорідного і неоднорідного рівнянь

Дуже багато задач науки і техніки приводять до лінійних диференціальних рівнянь.

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{2.23}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані неперервні функції від x у деякій розглядуваній області. Рівняння називають лінійним тому, що y, y', y'' входять у нього лінійно (так, наприклад, на відміну від рівняння (2.23), рівняння $y'' + e^y = x^2$ і $y'' + p(x)(y')^2 + q(x)y = f(x)$ є нелінійними).

Якщо $f(x) \equiv 0$, то лінійне рівняння набуває вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.24}$$

і називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку.

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (2.23) називається неоднорідним лінійним рівнянням другого порядку.

Наприклад, лінійне рівняння $y'' - xy' + x^2 y = 0$ є однорідним, а лінійне рівняння $y'' + x^3 y = \sin x$ – неоднорідним.

Дві функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ називаються лінійно залежними на відрізку $[a,b]$, якщо на цьому відрізку вони пропорційні, тобто $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = \text{const}$ на $[a,b]$.

Якщо ж $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{const}$ на $[a,b]$, то функції називають лінійно незалежними на цьому відрізку.

Так, наприклад, функції e^x, e^{2x} є лінійно незалежними на будь-якому відрізку, а функції e^x, $3e^x$ – лінійно залежні.

Про те, чи є два частинні розв'язки y_1, y_2 лінійного однорідного рівняння (2.21) лінійно незалежними, зручно з'ясувати по тому, як поводить себе визначник

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

який називається визначником Вронського.

Справедливим є наступне твердження.

Теорема. Рівність нулю визначника Вронського $W(y_1, y_2)$ є необхідною і достатньою умовою лінійної залежності розв'язків y_1, y_2 лінійного однорідного рівняння (2.24).

Приклад. Розглянемо лінійне однорідне рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0$. Безпосередньою підстановкою $y_1 = e^x$, $y_2 = 2e^x$, $y_3 = e^{4x}$ в рівняння можна переконатися, що саме ці функції є розв'язками даного однорідного рівняння.

Складемо й обчислимо вронскіани:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} = 0,$$

$$W(y_1, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} \neq 0.$$

Отже, розв'язки y_1, y_2 лінійно залежні, а розв'язки y_1, y_3 лінійно незалежні.

Визначення. Фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння (2.24) називається система з двох його лінійно незалежних частинних розв'язків.

Приклад. Як видно, для однорідного лінійного рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0$ функції $y_1 = e^x$, $y_3 = e^{4x}$ є лінійно незалежними частинними розв'язками. Тому ці функції утворюють фундаментальну систему розв'язків даного однорідного рівняння.

Відшукання загального розв'язку диференціального рівняння другого порядку в загальному випадку є дуже складною задачею. Але у випадку лінійного однорідного рівняння (2.24) для одержання загального розв'язку досить знайти фундаментальну систему розв'язків.

Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння. Якщо y_1, y_2 утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння (2.24), то функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі, є розв'язком рівняння (2.24).

Приклад. Оскільки для однорідного рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0$ функції $y_1 = e^x$, $y_3 = e^{4x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, то функція $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ є загальним розв'язком даного однорідного рівняння.

У випадку неоднорідного лінійного рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ будемо називати відповідним однорідним рівнянням рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, яке має таку ж ліву частину, що і задане неоднорідне.

Виявляється, що для одержання загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (2.23) досить знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння і будь-який частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (2.23) дорівнює сумі загального розв'язку y^{**} відповідного однорідного рівняння (2.24) і будь-якого частинного розв'язку y^{*} даного неоднорідного рівняння (2.23), тобто

$$y = y^{**} + y^{*}. \tag{2.25}$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'' - 5y' + 4y = 4x$.

Тут відповідне однорідне рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0$, має загальний розв'язок

$$y^{**} = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

Безпосередньою підстановкою в дане неоднорідне рівняння можемо переконатися, що функція $y^{*} = x + 5/4$ є частинним розв'язком цього неоднорідного рівняння. Але тоді за (2.25) одержуємо шуканий загальний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + x + 5/4.$$

З попередньої теореми випливає, що для одержання загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння треба, крім загального розв'язку y^{**} відповідного однорідного рівняння, знайти будь-який частинний розв'язок y^{*} цього неоднорідного рівняння.

Універсальним методом відшукання частинного розв'язку y^{*} лінійного неоднорідного рівняння, якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння, є метод Лагранжа.

2.4. Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих)

Якщо відома фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння (2.24) $y_1(x), y_2(x)$, то його загальний розв'язок має вигляд $y^{**} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де C_1, C_2 – довільні сталі; $y_1(x), y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння (2.24).

У методі Лагранжа варіації довільних сталих частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння (2.23) відшукується у вигляді

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \tag{2.26}$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна підібрати в такій же формі, як і загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2.24), але довільні сталі заміняємо на довільні функції $C_1(x), C_2(x)$, що робить функцію (2.26) дуже гнучкою.

Підставляючи (2.26) у неоднорідне рівняння (2.23), можна прийти до лінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \end{cases} \tag{2.27}$$

де $y_1, y_2, y_1', y_2', f(x)$ – відомі функції, $C_1(x), C_2(x)$ – невідомі функції, які треба визначити. Дана система (2.27) має визначник $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, оскільки, за умовою y_1, y_2 – лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння (2.24).

Тому система (2.27) має єдиний розв'язок. Розв'язуючи (2.27), знаходимо

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi(x); \\ C_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \tag{2.28}$$

Інтегруючи рівності (2.28), одержимо

$$\begin{cases} C_1(x) = \Phi(x) + C_1, \\ C_2(x) = F(x) + C_2, \end{cases} \tag{2.29}$$

де $\Phi(x) = \int \varphi(x)dx$, $F(x) = \int \psi(x)dx$, C_1, C_2 – довільні сталі інтегрування.

Вважаючи в (2.29) C_1, C_2 рівними нулю, одержуємо

$$\begin{cases} C_1(x) = \Phi(x); \\ C_2(x) = F(x). \end{cases} \tag{2.30}$$

Підставляючи (2.30) у (2.26), маємо

$$y^* = \Phi(x)y_1 + F(x)y_2 . \tag{2.31}$$

Таким чином, формула (2.31) дає шуканий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.23), якщо відомі лінійно незалежні частинні розв'язки y_1, y_2 відповідного однорідного рівняння (2.24).

Приклад. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'' - 5y' + 6y = e^x$, якщо відомі два лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$ відповідного однорідного рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння методом Лагранжа.

Складаємо систему (2.27):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{3x} = 0; \\ 2C_1'(x)e^{2x} + 3C_2'(x)e^{3x} = e^x . \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо

$$C_1'(x) = -e^{-x}, C_2'(x) = -e^{-2x} . \tag{2.32}$$

Інтегруючи (2.32), одержуємо $C_1(x) = e^{-x}, C_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Підставляючи в (2.26), маємо $y^* = e^{-x}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}e^{3x}$ або $y^* = \frac{1}{2}e^x$.

Але тоді за теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння $y = y^{**} + y^* = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^x$.

2.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Нехай лінійне однорідне рівняння (2.24) має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.33}$$

де p и q – сталі дійсні числа. Рівняння (2.33) будемо називати лінійним диференціальним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (2.33) у формі експоненти $y = e^{kx}$, де k – стала величина. Тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$.

Підставляючи отримані вирази в (2.33), знаходимо

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для знаходження k маємо рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{2.34}$$

Це алгебраїчне квадратне рівняння. Рівняння (2.34) називають характеристичним рівнянням лінійного однорідного диференціального рівняння (2.33).

Загальний розв'язок однорідного рівняння (2.33) будується відповідно до характеру коренів характеристичного рівняння (2.34):

1) якщо дискримінант характеристичного рівняння (2.34) $D > 0$ (корені характеристичного рівняння дійсні різні, $k_1 \neq k_2$), то загальний розв'язок рівняння (2.33) має вигляд

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx}; \tag{2.35}$$

2) дискримінанту $D = 0$ (дійсним збіжним кореням $k_1 = k_2 = r$ характеристичного рівняння) відповідає загальний розв'язок рівняння

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}; \tag{2.36}$$

3) від'ємному дискримінанту $D < 0$ (тобто парі комплексно-сполучених коренів характеристичного рівняння $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) відповідає загальний розв'язок рівняння

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \tag{2.37}$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 3k + 2$ має корені $k_1 = -1,\ k_2 = -2$. Отже, $e^{-x},\ e^{-2x}$ – частинні лінійно незалежні розв'язки, а загальний розв'язок згідно з (2.35) має вигляд $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 4k + 4 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = 2$ (дійсні і рівні). Загальний розв'язок згідно з (2.36) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$ має корені $k_{1,2} = -1 \pm 2i$. Отже, загальний розв'язок знаходимо за формулою (2.37): $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'' + 25y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 25 = 0$ має чисто уявні корені $k_{1,2} = \pm 5i$. Загальний розв'язок – $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y''' - 4y' = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^3 - 4k = 0$ або $k(k^2 - 4) = 0$ тобто $k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = 0$.

Шуканий загальний розв'язок розглянутого рівняння $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3$.

2.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2.38}$$

де p і q – сталі; $f(x)$ – задана функція

Як відзначалося вище, для побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, частковим випадком якого є рівняння (2.38), треба знайти його частинний розв'язок y^*. Для цього можна використати розглянутий вище метод варіації довільних сталих.

Однак у тому випадку, коли права частина рівняння (2.38) має спеціальний вигляд

$$F(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x], \tag{2.39}$$

то простіше для знаходження частинного розв'язку застосувати метод невизначених коефіцієнтів. У формулі (2.39) α, β – сталі величини (можуть дорівнювати нулю); $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – багаточлени від x відповідно до n-го і m-го степенів.

Частинний розв'язок у цьому випадку відшукується у вигляді

$$y^*(x) = x^r e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]. \qquad (2.40)$$

У формулі (2.40) r дорівнює показнику кратності кореня $\alpha + i\beta$ у характеристичному рівнянні $k^2 + pk + q = 0$.

Якщо характеристичне рівняння такого кореня не має, то треба покласти $r = 0$. Функції $P_l(x)$, $Q_l(x)$ – повні багаточлени від x степеня l з невизначеними коефіцієнтами, причому $l = \max(n, m)$:

$$P_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \ldots + A_l, Q_l(x) = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \ldots + B_l.$$

Невизначені коефіцієнти A_i, B_i $(i = 0, 1, \ldots, l)$ можна знайти із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаних ототожненням коефіцієнтів подібних членів у правій і лівій частинах вихідного рівняння після підстановки в нього $y^*(x)$ замість y.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y' = 5x + 3$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = -1$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y^{**} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Права частина даного рівняння має вигляд (2.39), де $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_1(x) = 5x + 3$. Частинний розв'язок відповідно до формули (2.40) треба шукати у вигляді $y^* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$.

Підставимо y^* у задане рівняння:

$$(Ax^2 + Bx)'' + (Ax^2 + Bx)' = 5x + 3 \quad \text{або} \quad 2A + 2Ax + B = 5x + 3.$$

Порівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, маємо таку систему рівнянь: $\left.\begin{array}{c|l} x & 2A = 5 \\ x^0 & 2A + B = 3 \end{array}\right\}$. З неї знаходимо: $A = 2{,}5$; $B = -2$.

Частинний розв'язок $y^* = 2{,}5x^2 - 2x$, а загальний розв'язок

$$y = y^{**} + y^* = C_1 + C_2 e^{-x} + 2{,}5x^2 - 2x.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+4y'+5y=$ $=2\cos x-\sin x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+4k+5=0$ має корені $k_{1,2}=-2\pm i$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y^{**}=$ $=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

У правій частині заданого рівняння $\alpha=0$, $\beta=1$, $P_0(x)=2$, $Q_0(x)=1$.

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^{*}=A\cos x+B\sin x$:

$$y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x,\quad y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x.$$

Підставляємо в задане рівняння y^{*}, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$, маємо

$$-A\cos x-B\sin x+4(-A\sin x+B\cos x)+$$
$$+5(A\cos x+B\sin x)=2\cos x-\sin x.$$

Порівняємо коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ в обох частинах останньої рівності:

$$\begin{array}{l\|l}\cos x & -A+4B+5A=2 \\ \sin x & -B-4A+5B=-1\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2A+2B=1\\4A-4B=1\end{array}\right\}.$$

Розв'язавши систему, отримуємо $A=\frac{3}{8}$, $B=\frac{1}{8}$, $y^*=\frac{3}{8}\cos x+$ $+\frac{1}{8}\sin x$.

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y=y^{**}+y^{*}=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x.$$

2.7. Вправи

Розв'язати рівняння:

1. $y''=x^3$.   2. $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-q$, якщо $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

3. $y''=y^{-3}$.   4. $y''=\dfrac{y'^2}{y}$.   5. $y''-2y'-8y=0$.

6. $y'' - 6y' + 9y = 0.$ 7. $y'' - 6y' + 13y = 0.$ 8. $y'' + 3y' + 2y = x^2.$

9. $y'' - 2y' - 3y = (x+2)e^{3x}.$ 10. $y'' + 4y = 5\sin 2x.$

Відповіді:

1. $y = \frac{1}{20}x^5 + C_1x + C_2.$ 2. $x = v_0t - \frac{gt^2}{2}.$

3. $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2.$ 4. $y = C_2e^{C_1x}.$

5. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}.$ 6. $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)..$

7. $y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$

8. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$

9. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{8}x(x + \frac{7}{2})e^{3x}.$

10. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{5}{4}x\cos 2x.$

3. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Нормальна система диференціальних рівнянь

У багатьох задачах математики, фізики і техніки потрібно визначити відразу кілька функцій, пов'язаних між собою декількома диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь називається *системою диференціальних рівнянь*. Зокрема, до таких систем приводять задачі, у яких вивчається рух тіл у просторі під дією заданих сил.

Надалі ми обмежимося вивченням тільки системи рівнянь першого порядку спеціального вигляду заданих відносно шуканих функцій $y_1(x), y_2(x), y_3(x), ..., y_n(x)$. Ця система має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n); \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n); \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \end{cases} \tag{3.1}$$

і називається *системою в нормальній формі* або *нормальною системою*.

У нормальній системі праві частини рівнянь не містять похідних шуканих функцій.

Розв'язком системи (3.1) називається сукупність функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, які задовольняють кожному з рівнянь цієї системи. Для інтегрування системи (3.1) можна застосувати метод, за допомогою якого наведена система зводиться до одного рівняння n-го порядку відносно однієї невідомої функції. Цей метод називається *методом виключення невідомих*.

Покажемо його застосування на прикладі. Для простоти обмежимося системою двох рівнянь. Нехай дана система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Диференціюючи перше з рівнянь системи за t, знаходимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Підставляючи в цю рівність похідну $\dfrac{dy}{dt}$, знайдену із другого рівняння системи, одержимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + (-2x - 5y).$$

Замінюючи, нарешті, функцію y її виразом з першого рівняння системи

$$y = \frac{dx}{dt} + 7x, \tag{3.2}$$

приходимо до лінійного однорідного рівняння другого порядку відносно однієї невідомої функції:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5\left(\frac{dx}{dt} + 7x\right) \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо його загальний розв'язок

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Диференціюючи x, знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

Підставляючи вираз для x і $\frac{dx}{dt}$ у рівність (3.2) і приводячи подібні члени, одержимо

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) +$$
$$+7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{-6t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t].$$

Функції

$$\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t); \\ y = e^{-6t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t] \end{cases} \tag{3.3}$$

є розв'язками даної системи.

Отже, інтегруючи нормальну систему двох диференціальних рівнянь, ми одержали її розв'язок, який залежить від двох довільних сталих C_1, C_2. Можна показати, що в загальному випадку для нормальної системи, яка складається з n рівнянь, її загальний розв'язок залежить від n довільних сталих.

Як приклад виділимо з отриманого вище загального розв'язання (3.3) частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

При заданих початкових умовах з розв'язку (3.3) одержуємо систему рівнянь для визначення сталих:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0; \\ 1 = (C_2 + C_1) \cdot 1 + (C_2 - C_1) \cdot 0. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Отже, шуканий частинний розв'язок має такий вигляд:

$$x = e^{-6t} \sin t, \quad y = e^{-6t} (\cos t + \sin t).$$

3.2 Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Крім розглянутого методу інтегрування нормальної системи рівнянь, можна вказати ще один метод, який застосовують для розв'язання тільки нормальних систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Нехай дана нормальна система лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для простоти обмежимося системою трьох рівнянь із трьома невідомими функціями

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \dfrac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \tag{3.4}$$

Будемо шукати частинний розв'язок у вигляді

$$\text{x} = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}, \quad z = \gamma e^{kt}. \tag{3.5}$$

Необхідно визначити коефіцієнти α, β, γ і показник ступеня k так, щоб функції (3.5) були розв'язком системи (3.4). Підставляючи ці функції в рівності (3.4) і скорочуючи на множник $e^{kt} \neq 0$, одержимо

$$\begin{cases} k\alpha = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma; \\ k\beta = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma; \\ k\gamma = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma. \end{cases}$$

Переносячи всі члени в одну сторону, одержимо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих α, β, γ:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0; \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta + a_{23}\gamma = 0; \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-k)\gamma = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Система (3.6) є однорідною системою рівнянь. Як відомо, для того, щоб однорідна система мала розв'язки, відмінні від нульового, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю. Таким чином, для того, щоб система (3.6) мала розв'язки, відмінні від нульового, повинна виконуватися рівність

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{3.7}$$

Рівність (3.7) являє собою рівняння третього степеня відносно k і називається *характеристичним рівнянням* для системи (3.4). Обмежимося випадком, коли характеристичне рівняння має різні дійсні корені k_1, k_2, k_3. Для кожного з цих коренів напишемо відповідну систему рівнянь (3.6) і визначимо коефіцієнти $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Якщо позначити *частинні* розв'язки системи, які відповідають кореню характеристичного рівняння k_1, через x_1, y_1, z_1; які відповідають кореню k_2 – через x_3, y_3, z_3 і кореню k_3 – через x_3, y_3, z_3, то *загальний* розв'язок системи диференціальних рівнянь (3.4) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3; \\ y(t) = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3; \\ Z(t) = C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3 \end{cases}$$

або $$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1e^{k_1t} + C_2\alpha_2e^{k_2t} + C_3\alpha_3e^{k_3t}; \\ y(t) = C_1\beta_1e^{k_1t} + C_2\beta_2e^{k_2t} + C_3\beta_3e^{k_3t}; \\ Z(t) = C_1\gamma_1e^{k_1t} + C_2\gamma_2e^{k_2t} + C_3\gamma_3e^{k_3t}. \end{cases}$$

Приклад. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння (3.7), яке відповідає даній системі диференціальних рівнянь, має вигляд

$$\begin{vmatrix} -2-k & -3n \\ -1 & 0-k \end{vmatrix} = 0$$

або $k^2 + 2k - 3 = 0.$ Його корені $k_1 = -3,\ k_2 = 1$. Частинний розв'язок знайдено у формі

$$x_1 = \alpha_1 e^{k_1 t},\ y_1 = \beta e^{k_1 t},\ x_2 = \alpha_2 e^{k_2 t},\ y_2 = \beta\alpha e^{k_2 t}.$$

Система рівнянь (3.6), для визначення α, β при $k_1 = -3$ запишеться таким чином:

$$\begin{cases} (-2-(-3))\alpha_1 - 3\beta_1 = 0; \\ -\alpha + (0-(-3))\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \alpha_1 - 3\beta_1 = 0; \\ -\alpha_1 + 3\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Ця система має нескінченну безліч розв'язків, тому що друге рівняння є наслідком першого. Беручи, наприклад, $\beta_1 = 1$, знаходимо $\alpha_1 = 3$.

Отже, кореню характеристичного рівняння $k_1 = -3$ відповідають частинні розв'язки $x_1 = 3e^{-3t},\ y_1 = e^{-3t}$.

Система рівнянь (3.6) для визначення α, β при $k = 1$ має вигляд

$$\begin{cases} -3\alpha_2 - 3\beta_2 = 0; \\ -\alpha_2 - \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Як розв'язок цієї системи можна взяти $\alpha_2 = 1$ $\beta_2 = -1$. Тоді кореню характеристичного рівняння $k = 1$ відповідають частинні розв'язки $x_2 = e^t,\ y_2 = -e^t$

Загальний розв'язок системи такий:

$$\begin{cases} x(t)=3C_1e^{-3t}+C_2e^{t}; \\ y(t)=C_1e^{-3t}-C_2e^{t}. \end{cases}$$

3.3. Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+2y; \\ \dfrac{dy}{dt}=y+2x. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=2y_1+y_2+y_3; \\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_1+2y_2+y_3; \\ \dfrac{dy_3}{dt}=y_1+y_2+2y_3. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=y_1+2y_2+e^{t}; \\ \dfrac{dy_2}{dt}=2y_1+y_2. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+2y+e^{t}; \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+e^{3t}. \end{cases}$$

Відповіді:

1. $$\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}; \\ y=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y_1=-(C_1+C_2)e^{t}+C_3e^{4t}; \\ y_2=C_1e^{t}+C_3e^{4t}; \\ y_3=C_2e^{t}+C_3e^{4t}. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} y_1=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}; \\ y_2=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}-\dfrac{1}{2}e^{t}. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{3t}; \\ y=C_1e^{3t}-C_2e^{-t}+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{t}{2}\right)e^{3t}. \end{cases}$$

4. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

4.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними

Багато задач в математиці, фізиці, електро- та радіотехніці та в інших науках приводять до диференціальних рівнянь відносно функцій двох, трьох та більшого числа аргументів.

Якщо невідома функція $z = f(x,y)$ є функцією двох змінних, то в загальному випадку диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку для цієї функції має вигляд

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)=0.$$

Зокрема, в електротехніці, радіотехніці та особливо у техніці електричного зв'язку часто розглядаються диференціальні рівняння двопровідної однорідної лінії (довгої лінії) з частинними похідними другого порядку

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (r_0 C_0 + g_0 L_0)\frac{\partial i}{\partial t} - r_0 g_0 i = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (r_0 C_0 + g_0 L_0)\frac{\partial u}{\partial t} - r_0 g_0 u = 0,$$

де незалежними змінними є відстань x, яка відраховується від початку або від кінця лінії, і час t, а невідомими функціями – миттєві значення струму $i(x,t)$ і напруга $u(x,t)$ в будь-якому перерізі лінії, r_0 – активний опір прямого і зворотного проводів, L_0 – індуктивність петлі, яка утворюється прямими і зворотними проводами; g_0 – провідність (витік), зумовлена недосконалістю ізоляції між проводами; C_0 – ємність між проводами.

Якщо знехтувати втратами через ізоляцію та якщо опір дуже малий ($g_0 \approx 0, r_0 \approx 0$), то можна одержати відоме рівняння коливань:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де $a = \sqrt{\dfrac{1}{L_0 C_0}}$.

При розрахунку електричних полів постійних струмів, а також при розгляді задач про стаціонарний тепловий режим, задач дифузії, гідро- та аеродинаміки зустрічається рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

або рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a=0.$$

Задача інтегрування рівняння з частинними похідними полягає в тому, щоб знайти всі розв'язки даного рівняння.

Виявляється, що в розв'язки рівнянь з частинними похідними входять довільні функції тих же аргументів, від яких залежить невідома функція.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0.$

Розв'язання. Запишемо це рівняння з частинними похідними другого порядку так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

Звідси випливає, що $\frac{\partial z}{\partial y}$ не залежить від x, тобто $\frac{\partial z}{\partial y}=\theta(y)$, де $\theta(y)$ – будь-яка функція y.

Інтегруючи останню рівність за y, визначимо

$$z=\int\theta(y)dy+\varphi(y)=\varphi(x)+\Psi(y),$$

де $\varphi(x)$ – довільна функція, яка залежить тільки від x; $\Psi(y)=$ $=\int\theta(y)dy$ – довільна функція y.

У розглянутому прикладі розв'язок рівняння з частинними похідними другого порядку залежить від двох довільних функцій.

Для визначення довільних функцій задають крайові умови.

До крайових умов відносяться: початкові умови, які описують стан системи у початковий момент часу (при $t = 0$), та граничні умови, яким повинна задовольняти шукана функція $u(x,t)$, наприклад, при $x = 0$, $x = 1$. Крайові умови формулюються завжди згідно з фізичними умовами задачі. Так, наприклад, для однорідної двопровідної лінії початковими умовами є миттєві значення струму і напруги на початку (або на кінці) лінії при $t = 0$, а граничні умови будуть визначатися зв'язками між струмами та напругами на початку (або на кінці) лінії, які у свою чергу залежать від заданого режиму лінії.

4.2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Введемо позначення:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x,\ \frac{\partial u}{\partial u} = u_y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}.$$

Розглянемо диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x,y),$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f(x,y)$ – задані функції x, y.

Таке диференціальне рівняння називається лінійним, оскільки воно є лінійним відносно функції u, її перших та других частинних похідних. Якщо $f(x,y) \equiv 0$, то рівняння називається лінійно однорідним, у протилежному випадку – лінійно неоднорідним.

Якщо усі коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c,$ – сталі, то рівняння називається лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Диференціальні рівняння в точці M будемо називати рівнянням

гіперболічного типу, якщо в точці M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;
еліптичного типу, якщо в точці M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$;
параболічного типу, якщо в точці M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Приклад. Визначити тип рівняння $u_{xx} + yu_{yy} = 0$.

Розв'язання. $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1 \cdot y = -y$.

При $y < 0$ отримуємо $D > 0$. Отже, рівняння має гіперболічний тип.

При $y = 0$ отримуємо $D = 0$. Отже, рівняння має параболічний тип.

При $y > 0$ отримуємо $D < 0$. Отже, рівняння має еліптичний тип.

Хвильове рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є рівнянням гіперболічного типу.

Рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є рівнянням параболічного типу.

Рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ є рівнянням еліптичного типу.

4.3. Розв'язання хвильового рівняння методом д'Аламбера

Поширення хвиль у випадку необмеженої струни, нескінченно довгої лінії, необмеженого стержня задача ставиться так:

Знайти розв'язок хвильового рівняння $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$, який задовольняє початковим умовам $u(x,0) = \varphi(x)$; $u_1(x,0) = \psi(x)$, де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – задані в $]-\infty;+\infty[$ функції.

Приведемо хвильове рівняння до канонічного вигляду. Введемо нові змінні: $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

Тоді

$$\xi_x = 1;\ \xi_t = -a;\ \eta_x = 1;\ \eta_t = a; \quad u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = -au_\xi + au_\eta .$$

Підставляючи u_{xx}, u_{tt} у початкове рівняння, отримаємо

$$a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta} - a^2\left(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) = 0,$$

$$-4a^2 u_{\xi\eta} = 0, \quad u_{\xi\eta} = 0.$$

Інтегруючи останнє рівняння (див. п. 4.1), отримаємо $u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, де $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ – довільні функції аргументів ξ та η.

Враховуючи, що $\xi = x - at$, $\eta = x - at$, отримуємо загальний розв'язок даного рівняння у вигляді

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at).$$

Задовольняємо початкові умови:

$$u(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=af_1'(x)+af_2'(x)=\Psi(x).$$

Для визначення функцій f_1, f_2 маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \\ -af_1'(x)+af_2'(x)=\Psi(x). \end{cases}$$

Інтегруючи другу рівність, отримуємо:

$$-f_1(x)+f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\Psi(z)dz+C,$$

де x_0, C – сталі. Отже,

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x); \\ -f_1(x)+f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\Psi(z)dz+C. \end{cases}$$

Звідси знаходимо

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\Psi(z)dz-\frac{C}{2};$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\Psi(z)dz+\frac{C}{2}.$$

Підставляючи у вираз для $u(x,t)$ знайдені значення f_1, f_2, отримаємо

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\Psi(z)dz-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\Psi(z)dz$$

або

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz.$$

Ця рівність називається ***формулою д'Аламбера***.

Процес поширення коливань, які описуються функцією $u(x,t)$, являє собою накладання прямої $f_1(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz$ та зворотної $f_2(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz$ біжучих хвиль без викривлень.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $u_{tt}=4u_{xx}$, якщо $u(x,0)=x$, $u_t(x,0)=1$.

Розв'язання. Тут $a=2, \varphi(x)=x; \Psi(x)=1.$ Тому

$$u(x,t)=\frac{(x-2t)+(x+2t)}{2}+\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}dz=x+t.$$

4.4. Розв'язання хвильового рівняння методом Фур'є

При розгляданні малих поперечних коливань закріпленої струни, а також для коливань струму (напруги) у випадку коротких високочастотних повітряних ліній та коаксіальних кабелів задача зводиться до визначення розв'язку хвильового рівняння

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \tag{4.1}$$

при початкових умовах

$$u(x,t)=\varphi(x), \qquad u_t(x,t)=\psi(x) \tag{4.2}$$

і граничних умовах

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0. \tag{4.3}$$

Розв'язання хвильового рівняння проведемо методом Фур'є (методом розділення змінних).

Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4.4}$$

Очевидно, що функція $u(x,t)$ при будь-якій функції $T_n(t)$ задовольняє граничним умовам (4.3), оскільки вона дорівнює нулю при $x = 0$ та $x = l$. Дізнаємось, яким умовам повинні задовольняти функції $T_n(t)$, щоб функція $u(x,t)$ задовольняла заданим початковим умовам.

Використовуючи відомі початкові умови, отримуємо:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Ці рівності являють собою розвинення в ряд Фур'є за синусами функцій $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Тоді

$$T_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \tag{4.5}$$

$$T_n'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{4.6}$$

Визначимо величини $u_{tt}(x,t)=\sum_{n-1}^{\infty}T_n''(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ та $u_{xx}(x,t)=$ $=-\sum_{n-1}^{\infty}T_n(t)(\frac{n\pi}{l})^2\sin\frac{n\pi x}{l}$.

Підставляючи значення u_{tt}, u_{xx} у рівняння (4.1), отримаємо

$$\sum_{n-1}^{\infty}\left(T_n''(t)+\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2T_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=0.$$

Отже, для того, щоб функція $u(x,t)$ задовольняла рівняння (4.1) та початкові умови (4.2), функції $T_n(t)$ повинні задовольняти диференціальне рівняння

$$T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0 \tag{4.7}$$

та своїм початковим умовам (4.5) та (4.6).

Диференціальне рівняння (4.7) має загальний розв'язок

$$T_n(t)=A\cos\frac{an\pi t}{l}+B\sin\left(\frac{an\pi t}{l}\right).$$

Задовольняючи початкові умови (4.5) та (4.6), отримаємо $A =$ $= T_n(0)$; $B = \frac{l}{an\pi} T_n'(0)$.

Отже, враховуючи (4.5) та (4.6), маємо

$$T_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^1 \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\cos\frac{an\pi t}{l} + \frac{2}{an\pi}\int_0^1 \Psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\sin\frac{an\pi t}{l}. \quad (4.8)$$

Отже, розв'язок хвильового рівняння (4.1) зі своїми крайовими умовами буде описано формулою (4.4), де $T_n(t)$ обчислюється за формулою (4.8).

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $u_{tt} = u_{xx}$, який задовольняє початкові та граничні умови $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=1$, $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$.

Розв'язання. Маємо $a=1$; $l=1$; $\varphi(x) = 0$; $\psi(x) = 1$; $T_n(0)=0$.

$$T_n'(0) = 2\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{1}dx = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}(\cos 0 - \cos(n\pi)) =$$

$$= \left(\begin{array}{ll} 0 & \text{при} \quad n = 2k; \\ \frac{4}{(2k-1)\pi} & \text{при} \quad n = 2k-1. \end{array}\right.$$

$$A = 0; \quad B = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}; \quad T_n(t) = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\sin(2k-1)\pi t;$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\sin(2k-1)\pi t\sin(2k-1)\pi x =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)\pi t\sin(2k-1)\pi x.$$

4.5. Вправи

1. Розв'язати рівняння з частинними похідними першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$.

2. Визначити тип рівняння $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.

3. Знайти розв'язок рівняння $u_{tt} = u_{xx}$, якщо $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = -x$.

4. Знайти розв'язок рівняння $u_{tt} = 9u_{xx}$, якщо $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \cos x$.

5. Знайти розв'язок рівняння $u_{tt} = u_{xx}$, який задовольняє крайові умови $u(x,0) = x(2-x)$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(2,t) = 0$.

Відповіді:

1. $z = x^2 y + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – довільна функція.

2. При $x < 0$ гіперболічний тип, при $x = 0$ параболічний тип, при $x > 0$ еліптичний тип.

3. $u = x(1-t)$.

4. $u = \frac{1}{3}\cos x \sin 3t$.

5. $u = \frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М*. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры. 1981. – 448 с.

2. Высшая математика. Специальные главы / *П.И. Чинаев* и др.: – К.: Вища школа, 1981. – 368 с.

3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Операционное исчисление. Двойной интеграл: Методические указания / *Г.И. Якимович, В.И. Павлищев, Р.И. Заросский, Е.М. Дриз*. – Николаев: НКИ, 1989. – 46 с.

4. *Кузнецов А.Н., Касянчук А.В*. Методические указания к решению

задач по дифференциальным уравнениям и их приложениям. – Николаев: НКИ, 1988. – 69 с.

5. Методические указания к изучению высшей математики на первом курсе / *Г.И. Якимович, А.А. Щеглов, В.И. Павлищев, М.А. Черемушева*. – Николаев: НКИ, 1986. – 111 с.

6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Для втузов. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1976. – Т. 2. – 576 с.

7. *Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М*. Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.

ЗМІСТ

ПАВЛІЩЕВ Валентин Іванович
ПОПОВА Наталія Іванівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Редактор І.Ю. Цицюра
Комп’ютерна правка Ю.В. Зайцева
Комп'ютерна верстка Т.М. Чередніченко
Коректор Н.О. Шайкіна

Підписано до друку 07.11.02. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Ум.друк. арк. 2,4. Обл.-вид. арк. 2,6. Тираж 150 прим. Вид. № 23. Зам. № 341.
Ціна договірна.

Видавництво УДМТУ. 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО МОРСЬКОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Шановні панове!

Запрошуємо вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого дозволяють оперативно і якісно виконати замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника у повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригінал-макету, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізка на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублікатором фірми "Duplo" формату А3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати ***підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки,*** *– ми до ваших послуг.*

✉ Україна, 54002, м.Миколаїв, вул.Скороходова, 5,
видавництво УДМТУ
☎ 8(0512) 37-33-42; 39-81-46, 39-73-39, fax 8(0512) 39-73-26;
E-mail: publishing@usmtu.edu.ua