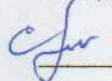


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування імені
адмірала Макарова

Навчально-науковий педагогічний інститут імені В.О. Сухомлинського
Кафедра методики викладання фізики та математики

«Допущений до захисту»

Завідувач кафедри

 Січко В.М.

« 3 » зрудня 2025 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»
зі спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

на тему:

МЕТОДИКА УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ
ЛІЦЕЇВ У НАВЧАННІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

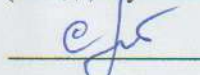
Виконала: студентка 6811м групи

 Єременко Г.В.
(підпис)

Керівник роботи:

доцент, к.ф.-м.н.

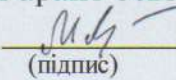
(посада, науковий ступень, вчене звання)

 Січко В.М.
(підпис)

Миколаїв – 2025 рік

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
Навчально-науковий педагогічний інститут імені В.О. Сухомлинського

Кафедра методики викладання фізики, математики
Спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика)
Освітня програма Середня освіта (Математика, інформатика)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Гарант освітньої програми

(підпис) Літвінова М.Б.
«22» жовтень 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТА
Єременко Г. В.

1. Тема роботи: «Методика узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв у навчанні теми «Похідна та її застосування»»
2. Керівник роботи: кандидат фізико-математичних наук, доцент Січко В.М.
затверджені наказом вищого навчального закладу
від «26» 11 2025 року № 1383-УЧ
2. Строк подання студентом роботи: 15.11.2025 року
3. Вихідні дані до роботи:

Державні освітні стандарти профільної середньої освіти України; нормативно-правові акти щодо впровадження компетентнісного підходу та цифровізації освіти; Концепція Нової української школи; навчальні програми з математики для 10-11 класів закладів загальної середньої освіти профільного рівня; типові освітні програми з математики, затверджені МОН України; Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти; наукові праці вітчизняних педагогів та методистів з проблем методики навчання математики, узагальнення та систематизації знань; наукові дослідження вітчизняних та зарубіжних учених з теорії та практики математичної освіти; психолого-педагогічні дослідження щодо закономірностей формування математичних знань та розвитку аналітичного мислення; методичні посібники та практичні керівництва з використання цифрових освітніх платформ; матеріали наукових конференцій та семінарів з проблем інноваційних педагогічних технологій, цифровізації освіти та міжпредметної інтеграції; монографії та статті у науково-методичних журналах щодо методики викладання математичного аналізу; досвід роботи закладів загальної середньої освіти України та світу щодо застосування цифрових інструментів та методик узагальнення знань на уроках математики; матеріали практик-конференцій учителів математики щодо впровадження компетентнісного підходу та формувального оцінювання; дослідницькі матеріали з міжпредметної інтеграції математики з фізикою, економікою, інформатикою та штучним

інтелектом; емпіричні дані констатувального експерименту щодо рівня засвоєння учнями теми «Похідна та її застосування» у традиційному освітньому процесі.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки:

Розділ 1. Теоретичні засади узагальнення і систематизації знань учнів у процесі навчання математики

Розділ 2. Експериментальна перевірка ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування»

5. Перелік графічного матеріалу:

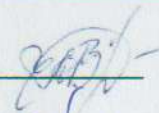
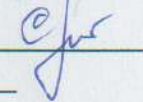
6. Консультанти розділів роботи:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання: 15.09.2024 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН на 2024-25 навчальний рік

N з/п	Назва етапів кваліфікаційну роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Затвердження теми і керівника кваліфікаційної роботи	16.09.2024	
2.	Видача завдання	16.10.2024	
3.	Підбір літератури, узгодження структури робіт	28.10.2024	
4.	Вступ. Розділ 1. Теоретичні засади узагальнення і систематизації знань учнів у процесі навчання математики	30.11.2024	
5.	Розділ 2. Експериментальна перевірка ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування»	09.05.2025	
6.	Вступ, висновки, список використаних джерел	12.09.2025	
7.	Захист магістерської роботи: Доповідь матеріали до захисту: - магістерська електронний варіант; - довідка з бібліотеки (перевірка	21.11.2025	

	на антиплагіат); - магістерська роздрукована робота (прошита); - наукова стаття у фаховому збірнику (тези) у співавторстві із керівником; - реферат (короткий зміст магістерської роботи); - відгук від керівника; - рецензія зовнішня не нижче кандидата наук; - презентація доповідь (захист)		
9.	Подача роботи в деканат	30.11.2025	
	Студент		<u>Єременко Г. В.</u>
	Керівник роботи		<u>Січко В.М.</u>

АНОТАЦІЯ

Єременко Г. В. Методика узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв у навчанні теми «Похідна та її застосування». Кваліфікаційна робота зі спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) освітньої програми «Середня освіта (Математика, інформатика)». Миколаїв: НУК ім. адм. Макарова, 2025. 84 сторінки.

У кваліфікаційній роботі було здійснено науково-теоретичне обґрунтування та експериментальна перевірка ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування».

Проведено науково-теоретичне дослідження методичних основ формування математичних знань у старшій школі та сутності процесів узагальнення і систематизації знань. У межах роботи розкрито роль узагальнення як складного пізнавального процесу виділення спільних ознак і закономірностей, та систематизації як упорядкування знань у логічно структуровану систему, що базується на взаємозв'язках між математичними поняттями.

Розроблено комплексну методику узагальнення і систематизації знань, яка поєднує компетентнісну спрямованість, цифровізацію освітнього процесу та міжпредметну інтеграцію. Методика включає чотири взаємопов'язаних етапи: мотиваційно-орієнтувальний, операційно-пізнавальний, інтегративно-систематизуючий та рефлексивно-корекційний, із застосуванням цифрових інструментів (GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha, Classtime, Mentimeter, Padlet, MindMeister).

Розроблено систему критеріїв оцінювання ефективності методики узагальнення та систематизації знань (когнітивний, практичний, метакогнітивний критерії) з відповідними показниками та трьома рівнями: високий, середній, низький.

Експериментально перевірено ефективність розробленої методики на базі закладу загальної середньої освіти. Розроблено практичні рекомендації

щодо впровадження методики узагальнення і систематизації знань з теми «Похідна та її застосування» у закладах загальної середньої освіти, які сприятимуть підвищенню якості математичної освіти та формуванню у учнів глибокого, осмисленого і творчого мислення.

Ключові слова: похідна, узагальнення знань, систематизація знань, компетентнісний підхід, цифровізація освіти, міжпредметна інтеграція, математичні компетентності, метакогнітивні вміння.

ABSTRACT

Yeremenko H. V. Methods of generalization and systematization of lyceum students' knowledge in teaching the topic 'Derivative and its applications'. Qualification work in the specialty 014.04 Secondary Education (Mathematics) of the educational program "Secondary Education (Mathematics, Informatics)". Mykolaiv: NUK named after adm. Makarov, 2025. 84 pages.

The qualification thesis presents scientific-theoretical substantiation and experimental verification of the effectiveness of the methodology for generalization and systematization of lyceum students' knowledge on the topic "Derivative and its applications."

A scientific-theoretical investigation of methodological foundations for forming mathematical knowledge in senior school was conducted, as well as the essence of generalization and systematization processes. The thesis reveals the role of generalization as a complex cognitive process of identifying common features and patterns, and systematization as the organization of knowledge into a logically structured system based on interconnections between mathematical concepts.

A comprehensive methodology for generalization and systematization of knowledge was developed that combines competency-based orientation, digitalization of the educational process, and interdisciplinary integration. The methodology includes four interrelated stages: motivational-orientational, operational-cognitive, integrative-systematizing, and reflexive-corrective, utilizing

digital tools (GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha, Classtime, Mentimeter, Padlet, MindMeister).

A system of criteria for evaluating the effectiveness of the generalization and systematization methodology was developed (cognitive, practical, and metacognitive criteria) with corresponding indicators and three levels: high, medium, and low.

The effectiveness of the developed methodology was experimentally verified on the basis of a general secondary education institution. Practical recommendations were developed for implementing the methodology for generalization and systematization of knowledge on the topic "Derivative and its applications" in general secondary education institutions, which will contribute to improving the quality of mathematics education and fostering in students deep, meaningful, and creative thinking.

Keywords: derivative, knowledge generalization, knowledge systematization, competency-based approach, digitalization of education, interdisciplinary integration, mathematical competencies, metacognitive skills.

ЗМІСТ

ВСТУП	9
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ	13
1.1. Методичні основи формування математичних знань учнів в ліцях та їх вплив на процес узагальнення знань.	13
1.2. Сутність узагальнення і систематизації знань учнів у навчальному процесі.	19
1.3. Похідна та її застосування в науці та у шкільній математиці	25
Висновки до першого розділу	33
РОЗДІЛ 2. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДИКИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ ЛІЦЕЇВ З ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»	35
2.1. Оцінка ефективності сучасних методик узагальнення і систематизації знань учнів в ліцях	35
2.2. Методика узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв у навчанні теми «Похідна та її застосування»	50
2.3. Аналіз результатів дослідно-експериментальної роботи	59
Висновки до другого розділу	63
ВИСНОВКИ	63
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	70
ДОДАТКИ	73

ВСТУП

Математична освіта у ліцєях виконує важливу роль у підготовці учнів до подальшого навчання, професійної діяльності та активної участі в суспільному житті. Вона не лише формує знання, а й розвиває логічне, критичне й алгоритмічне мислення, здатність до аналізу, моделювання та прогнозування. Однією з базових тем у курсі математики профільного рівня є тема «Похідна та її застосування», що виступає як завершальний етап вивчення властивостей функцій та перехід до основ математичного аналізу [3].

Опанування поняття похідної відкриває нові можливості для формалізації процесів зміни та моделювання реальних ситуацій. Воно є ключовим не лише в математиці, а й у таких предметах, як фізика, економіка, біологія, інформатика [15; 34]. Однак засвоєння даної теми потребує попередньої підготовки, узагальнення знань про границі, неперервність функцій, приріст аргументу та функції. Як зазначає Костриця Л. В., узагальнення та систематизація знань - це основа для формування глибокого розуміння та свідомого застосування математичних понять [15].

Успішне викладання теми «Похідна» передбачає не лише розгляд формальних означень і вивчення правил диференціювання, а й інтеграцію різних підходів: від інтуїтивного і геометричного тлумачення похідної -до її прикладного використання в завданнях оптимізації, побудови графіків, аналізу функціональних залежностей, тощо [3; 9].

У контексті сучасної освіти зростає роль цифрових технологій, інтерактивних платформ, програмного забезпечення для візуалізації математичних понять (GeoGebra, Wolfram Alpha, Desmos), а також систем автоматизованого оцінювання знань (Classtime, Google Forms, Всеосвіта) [10]. Їх використання не лише полегшує процес засвоєння складного теоретичного матеріалу, а й підвищує мотивацію учнів, дозволяє здійснювати ефективну діагностику знань, проводити моніторинг успішності, формувати індивідуальні освітні траєкторії.

Особливу цінність має демонстрація міжпредметного значення похідної в інформатиці - зокрема, в алгоритмах машинного навчання. Наприклад, градієнтний спуск, який лежить в основі навчання нейронних мереж, базується на обчисленні похідної функції втрат для корекції ваг зв'язків між нейронами [33]. Також важливим є алгоритм зворотного поширення помилки (backpropagation), що реалізує правило диференціювання складної функції, - завдяки чому математика набуває реального, практичного змісту в сучасних інтелектуальних технологіях [33].

Таким чином, актуальність теми дослідження зумовлена потребою розробки ефективної методики викладання теми «Похідна та її застосування», яка передбачає цілісне узагальнення знань, розвиток міжпредметного мислення та опанування сучасних технологічних підходів до аналізу математичних об'єктів.

Мета дослідження полягає у розробці та обґрунтуванні методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування» в умовах компетентнісного підходу до навчання, цифровізації освіти та міжпредметної інтеграції.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики в ліцеях.

Предмет дослідження – методика узагальнення і систематизації знань учнів у ліцеях з теми «Похідна та її застосування» у процесі навчання математики.

Завдання дослідження:

- 1) виокремити та описати методичні основи формування математичних знань учнів в ліцеях та їх вплив на процес узагальнення знань;
- 2) розкрити сутність узагальнення і систематизації знань учнів у навчальному процесі;
- 3) визначити критерії, показники і схарактеризувати рівні ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування»;

4) експериментально перевірити ефективність розробленої методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв у навчанні теми «Похідна та її застосування» в рамках дослідно-експериментальної роботи в закладі загальної середньої освіти.

Для досягнення поставленої мети та завдань застосовано такий комплекс методів наукового пошуку: теоретичні: аналіз психолого-педагогічної, методичної літератури з проблем навчання математики, узагальнення і систематизації знань; аналіз державних освітніх стандартів, навчальних програм та підручників з математики для ліцеїв; систематизація та узагальнення теоретичного матеріалу щодо застосування похідної в науці та шкільній математиці; моделювання методики узагальнення і систематизації знань учнів; емпіричні: педагогічне спостереження за навчальним процесом; діагностика рівня засвоєння знань (тестування, контрольні роботи, структуровані інтерв'ю, створення концептуальних карт, рефлексивні есе); педагогічний експеримент (констатувальний, формувальний та контрольний етапи); аналіз продуктів навчальної діяльності учнів.

Теоретична значущість дослідження полягає в поглибленні науково-теоретичного уявлення про сутність та специфіку узагальнення і систематизації знань як важливих дидактичних процесів у навчанні математики в ліцеях; теоретичному обґрунтуванні методичних основ формування математичних знань учнів з теми «Похідна та її застосування» на засадах компетентнісного підходу, цифровізації освіти та міжпредметної інтеграції, що розширює методологічні засади сучасної теорії та методики навчання математики; розробленні та науковому обґрунтуванні системи критеріїв, показників та рівнів оцінювання ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв (когнітивний, практичний та метакогнітивний критерії) в умовах інноваційного освітнього процесу.

Практична значущість одержаних результатів полягає в розробленні та апробуванні комплексної методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування», яка включає чотири

взаємопов'язаних етапи і може бути впроваджена в практику роботи закладів загальної середньої освіти; створенні діагностичного інструментарію для комплексного оцінювання рівня засвоєння знань учнів; обґрунтуванні ефективних прийомів використання цифрових освітніх ресурсів (GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha, Classtime, Mentimeter, Padlet, MindMeister) для візуалізації математичних понять, організації інтерактивного навчання та формувального оцінювання в процесі вивчення математичного аналізу.

Структура та обсяг кваліфікаційної роботи: складається зі вступу, двох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел (37 найменувань, які займають 3 сторінки), 4 додатки на 12 сторінках. Повний обсяг роботи становить 84 сторінки, із них 69 сторінок основного тексту. Робота містить 9 рисунків та 5 таблиць.

РОЗДІЛ 1.

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. Методичні основи формування математичних знань учнів в ліцєях та їх вплив на процес узагальнення знань.

У сучасній системі освіти особлива увага приділяється якості математичної підготовки учнів, адже математика є не лише окремим навчальним предметом, а й засобом формування логічного, критичного та аналітичного мислення. У цьому контексті методична організація навчання математики у ліцєях набуває особливого значення, оскільки саме в старшій школі відбувається поглиблене засвоєння математичних знань, які мають сформувати не просто набір фактів, а цілісну систему, здатну до подальшого розвитку й узагальнення [4, 11].

Формування математичних знань у здобувачів освіти ліцєїв є ключовим аспектом сучасного навчального процесу, який забезпечує не лише засвоєння конкретного матеріалу, а й розвиток загальнонаукових компетентностей: логічного і критичного мислення, уміння працювати з інформацією, моделювати реальні ситуації та робити обґрунтовані висновки. Особливу увагу слід приділяти формуванню знань з тем математичного аналізу, зокрема «Похідна та її застосування», що мають вагоме значення як у теоретичному, так і в прикладному аспектах [16, 23].

Відповідно до педагогічних положень, викладених у працях Костриці Л. В., Іваницького І. О., Бєвза Г. П., процес формування математичних знань має ґрунтуватися на таких методичних засадах:

1. Принцип науковості й доступності.

Зміст навчання повинен відповідати сучасному рівню розвитку математичної науки й одночасно бути адаптованим до рівня підготовки учнів, їхніх когнітивних можливостей і попереднього досвіду. Це означає, що

навчальний матеріал має подаватися з урахуванням принципу поступовості - від інтуїтивно зрозумілих прикладів і наочних моделей до строгих формально-логічних побудов. Зокрема, складні абстрактні поняття, такі як похідна, не можуть вводитися лише формальним способом через означення на основі границі відношення приростів. Натомість, доцільно починати з життєвих і практичних ситуацій, що знайомі учням, наприклад, спостереження за зміною швидкості руху автомобіля, або визначення нахилу дотичної до графіка функції як міри миттєвої зміни. Такий підхід дає змогу формувати початкове інтуїтивне розуміння сутності похідної як характеристики динамічних процесів. Після цього здійснюється поступовий перехід до аналітичних методів, формулюються загальні правила диференціювання, вводиться поняття похідної функції в точці та на множині, розглядаються властивості похідної й застосування у задачах різного типу. Завдяки такій дидактичній стратегії забезпечується як наукова точність викладу, так і доступність для учнів старших класів, що відповідає принципу науковості й доступності навчання [11, 26].

2. Наступність і системність.

Новий навчальний матеріал повинен органічно й логічно продовжувати вже засвоєні знання, спираючись на сформовану базу понять та навичок. У контексті вивчення похідної особливо важливо забезпечити послідовність та наступність навчального процесу, оскільки це поняття базується на раніше вивчених фундаментальних темах, таких як границя функції, неперервність, а також зміна аргументу та функціональна залежність. Наприклад, щоб учень міг усвідомити суть похідної як границі відношення приростів, він має добре розуміти, що таке границя та як вона обчислюється, що означає неперервність функції в точці та як зміна аргументу впливає на значення функції. Саме тому перед вивченням похідної доцільно повторити або узагальнити ці ключові поняття, що забезпечує методичну послідовність і створює передумови для глибшого розуміння нового матеріалу. Такий підхід сприяє не лише кращому засвоєнню нового знання, але й ефективному узагальненню раніше вивченого,

дозволяючи учням побачити взаємозв'язки між математичними поняттями й сформувати цілісну картину предметної області. У результаті відбувається інтеграція знань, що є важливим аспектом сучасної методики навчання математики в ліцеї [4, 16].

3. Диференціація та індивідуалізація навчання.

Рівень підготовки учнів у ліцеях зазвичай є неоднорідним, що зумовлює необхідність упровадження диференційованого підходу до навчання. Для цього доцільно використовувати завдання різних рівнів складності, що дає змогу кожному учню працювати у власному темпі й на відповідному рівні складності. Зокрема, ефективними є диференційовані завдання, які охоплюють базовий, середній та високий рівні, а також завдання відкритого типу, що передбачають декілька шляхів розв'язання або потребують обґрунтування власної математичної стратегії. Такі завдання активізують мислення учнів, стимулюють їх до пошуку ідей, підвищують зацікавленість і дають змогу виявити креативність. Більше того, використання відкритих задач сприяє формуванню навичок аргументації, критичного аналізу та самостійного прийняття рішень - ключових компетентностей у сучасному освітньому процесі.

Запровадження диференціації дозволяє забезпечити особистісно орієнтований підхід, де кожен учень відчуває свою успішність, уникає перевантаження й водночас має змогу розвивати свій інтелектуальний потенціал. Таким чином, викладання стає більш гнучким, чутливим до освітніх потреб окремих учнів і орієнтованим на досягнення максимально можливого результату для кожного [23].

4. Інтеграція знань і міжпредметні зв'язки

Математичні знання мають бути тісно інтегровані з іншими навчальними дисциплінами - передусім із фізикою, інформатикою, економікою та технологіями. Такий міжпредметний підхід дозволяє учням бачити практичне застосування абстрактних понять, зокрема похідної, у реальних ситуаціях і різних галузях людської діяльності. Це не лише

розширює пізнавальний контекст та поглиблює розуміння навчального матеріалу, а й сприяє формуванню системного мислення, цілісного світогляду та міждисциплінарної компетентності.

У курсі фізики, наприклад, похідна застосовується для аналізу швидкості та прискорення руху. В економіці - для дослідження граничного прибутку чи витрат, а також у побудові моделей зміни доходів. Інтеграція з інформатикою відкриває широкі можливості для використання графіків, симуляцій, цифрових платформ і програмних засобів для аналізу функціональних залежностей.

Особливу увагу варто приділяти сучасним цифровим напрямам, зокрема інформатиці, штучному інтелекту та технологіям, де похідна є ключовим математичним інструментом. У методах оптимізації, на яких ґрунтуються алгоритми машинного навчання, аналізу даних та комп'ютерного моделювання, похідна дозволяє визначити напрямок найшвидшого зменшення похибки. Ознайомлення з такими прикладами підвищує мотивацію учнів до вивчення математики, сприяє усвідомленому засвоєнню знань, розвитку критичного мислення та кращій орієнтації в умовах сучасного інформаційного суспільства [16, 30, 32].

5. Використання інноваційних технологій навчання.

Інтерактивні цифрові ресурси, зокрема GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha, а також освітні платформи Classtime, Всеосвіта, На Урок, істотно розширюють дидактичні можливості сучасного вчителя математики. Вони забезпечують наочну візуалізацію абстрактних понять, дають змогу учням у режимі реального часу моделювати графіки функцій, будувати дотичні, досліджувати зміну похідної залежно від параметрів, а також інтерпретувати геометричний і фізичний зміст похідної. Це особливо важливо під час узагальнення та систематизації знань, коли учні мають побачити міжпредметні зв'язки та функціональність вивченого матеріалу.

Крім того, адаптивне тестування, інтерактивні вправи та системи моніторингу результатів навчання, доступні на вказаних платформах,

дозволяють оперативно оцінювати рівень засвоєння понять, виявляти типові помилки й організовувати диференційоване навчання. Такий підхід сприяє індивідуалізації освітнього процесу, підвищує мотивацію учнів до самостійної роботи, а також є ефективним засобом для формування ключових і предметних компетентностей у галузі математики [35, 37].

6. Розвиток логічного, критичного і алгоритмічного мислення.

Математика відіграє ключову роль у формуванні логічної культури мислення, що є необхідною складовою інтелектуального розвитку учнів. Особливо це проявляється через побудову математичних доведень, виявлення закономірностей, формулювання гіпотез та їх обґрунтовану перевірку. У процесі узагальнення та систематизації знань з теми «Похідна та її застосування» значне місце посідають практичні задачі на дослідження функцій і побудову їх графіків, які не лише поглиблюють розуміння математичних понять, а й розвивають аналітичне, критичне та прогностичне мислення. Саме такі завдання вимагають послідовного аналізу умов, аргументованого вибору методів розв'язання й узагальнення отриманих результатів, що, своєю чергою, сприяє формуванню цілісної математичної картини світу [11, 26].

7. Методичний вплив на процес узагальнення знань.

Узагальнення є завершальним і надзвичайно важливим етапом навчального процесу, який полягає у встановленні логічних зв'язків між різними поняттями, формулюванні загальних правил і закономірностей, а також у застосуванні набутого знання в нових, іноді нестандартних, умовах. Цей процес сприяє не лише глибшому розумінню теми, але й розвитку важливих метапредметних умінь - таких як аналіз, синтез, класифікація, узагальнення та систематизація інформації. Для підвищення ефективності узагальнення навчального матеріалу рекомендується використовувати різноманітні дидактичні засоби, зокрема: таблиці похідних, узагальнені алгоритми розв'язання задач, рефлексивне опитування, логічні схеми, карти понять (mind maps), кросворди та тести. Застосування таких інструментів

активізує пізнавальну діяльність учнів, стимулює критичне мислення і формує системний підхід до вивчення математики [16, 23].

В умовах сучасного освітнього простору України особливу роль відіграє формування ґрунтовних математичних знань як чинника розвитку особистості учня. Ліцеї, що забезпечують профільну й поглиблену підготовку, ставлять за мету не лише передати знання, а й розвинути вміння логічно мислити, аналізувати, робити узагальнення, будувати гіпотези. Методичні основи навчального процесу повинні відповідати принципам науковості, доступності, системності, послідовності та практичної спрямованості [4, 11].

Одним із ефективних підходів є проблемно-орієнтоване навчання, яке активізує мислення, формує здатність до самостійного пошуку рішень, прогнозування та аналізу. Такий підхід сприяє глибокому розумінню математичних ідей, встановленню міжпредметних і внутрішньопредметних зв'язків і природньому переходу до узагальнення знань [26, 32].

Інтерактивні методи навчання (обговорення, робота в парах, використання цифрових засобів) розвивають просторове та образне мислення, активізують конструювання й аналіз інформації, що підвищує якість засвоєння [35].

Проектна діяльність поєднує теорію з практикою, даючи змогу учням застосовувати математику у реальних ситуаціях, формувати математичні моделі і гіпотези. Це підсилює мотивацію, сприяє інтеграції знань і природньому узагальненню [30].

Особливу роль відіграє системно-діяльнісний підхід, який забезпечує цілісну організацію навчального процесу з послідовним формуванням узагальнених знань і розвитком універсальних навчальних дій: аналізу, порівняння, синтезу, узагальнення. Учні не лише виконують алгоритми, а й усвідомлюють їх значення, навчаються будувати власні стратегії вирішення [11, 23].

Процес узагальнення знань передбачає послідовні етапи: накопичення досвіду, аналіз, виділення головного, формулювання узагальнень і

перенесення знань у нові ситуації. Важливо, щоб учні самостійно доходили до узагальнень, адже це підвищує міцність і глибину засвоєння [16].

Отже, методичні основи формування математичних знань у ліцелях мають сприяти не лише засвоєнню формального змісту, а й розвитку глибокого, осмисленого і творчого мислення. Узагальнення знань постає як безперервний процес інтеграції й осмислення інформації, що розвиває аналітичну гнучкість і адаптивність учня. Ефективне застосування сучасних методик та технологій забезпечує якісну математичну підготовку і формує ключові компетентності для успішної професійної діяльності та соціальної реалізації.

1.2. Сутність узагальнення і систематизації знань учнів у навчальному процесі.

Узагальнення і систематизація знань учнів є ключовими методичними етапами навчального процесу, які забезпечують глибоке, цілісне і системне засвоєння теми «Похідна та її застосування» в курсі математики ліцею. Вони спрямовані на формування у здобувачів освіти структурованих, логічно впорядкованих математичних уявлень і навичок, що дозволяють усвідомлено і ефективно застосовувати знання про похідну в різноманітних теоретичних і практичних контекстах, зокрема при розв'язанні задач із прикладною спрямованістю та моделюванні змінних процесів у природничих і технічних науках [8, 20].

Теоретичні основи узагальнення та систематизації

Згідно з дослідженнями провідних педагогів та психологів, таких як Давидов В. В., Тальзіна Н. Ф. та Лернер І. Я., узагальнення - це складний пізнавальний процес, який полягає у виділенні спільних ознак, властивостей або закономірностей серед різних об'єктів, явищ чи понять. Цей процес дає змогу об'єднати окремі факти або поняття у більш широкі, узагальнені

категорії, що сприяє формуванню цілісного та системного розуміння навчального матеріалу [8].

В математиці узагальнення виступає як інструмент переходу від конкретного до абстрактного, від часткового до загального, що сприяє формуванню глибоких і стійких математичних уявлень. У контексті теми «Похідна та її застосування» процес узагальнення проявляється, зокрема, у таких аспектах:

1. Формулювання загальних правил та властивостей. Наприклад, правило, що похідна суми двох функцій дорівнює сумі їхніх похідних, є узагальненням окремих випадків і дозволяє застосовувати диференціювання до більш складних функціональних виразів. Аналогічно виводяться інші правила диференціювання: добутку, частки, складної функції тощо [2].

2. Класифікація методів розв'язання задач. У процесі навчання учні знайомляться з різними способами знаходження похідної: аналітичним (за допомогою формул і правил диференціювання), графічним (визначення похідної як нахилу дотичної до графіка функції) та чисельним (приблизні обчислення за допомогою різних чисельних методів). Узагальнення полягає у розумінні переваг і обмежень кожного з цих методів, а також у виборі найбільш ефективного способу залежно від конкретної задачі [20].

3. Виділення спільних закономірностей у різних типах функцій. Наприклад, учні навчаються розпізнавати, як похідна поводить себе для різних класів функцій (лінійних, квадратичних, експоненційних, тригонометричних), що допомагає їм швидко орієнтуватися у різноманітті математичних задач [1].

4. Об'єднання застосувань похідної у різних галузях науки та техніки. Узагальнення дозволяє розглянути похідну не лише як математичну абстракцію, а й як інструмент для аналізу змін у фізиці (швидкість, прискорення), економіці (аналіз функцій попиту та пропозиції), інформатиці (оптимізація алгоритмів) тощо [1].

Систематизація - це процес упорядкування знань, у ході якого інформація організовується в логічно структуровану систему, що базується на

взаємозв'язках між поняттями, фактами та явищами [20]. Вона допомагає не лише впорядкувати великий обсяг матеріалу, а й краще зрозуміти його сутність, виявити взаємозалежності та закономірності. У навчальному процесі систематизація сприяє формуванню цілісного уявлення про предмет, полегшує запам'ятовування і застосування знань на практиці.

Для прикладу в математичному курсі систематизація може проявлятися у різних формах:

1. Побудова схем і діаграм, що відображають зв'язки між ключовими поняттями, наприклад, між похідною, границею функції та поняттям неперервності. Такі схеми допомагають учням візуалізувати і зрозуміти, як ці поняття взаємопов'язані і впливають одне на одне.

2. Створення таблиць похідних елементарних функцій, що слугують наочним і зручним довідником, який дозволяє швидко знаходити необхідні формули і застосовувати їх у розв'язанні задач.

3. Класифікація або розподіл завдань за типами - наприклад, на задачі, що передбачають знаходження похідної, дослідження функції (аналіз її властивостей), чи оптимізацію (пошук максимумів або мінімумів). Це допомагає систематично підходити до опрацювання матеріалу [2], формувати навички вибору методів розв'язання і орієнтуватися у різноманітті задач.

Функції узагальнення та систематизації у навчанні

1. Пізнавальна функція.

Систематизація знань допомагає учням глибше усвідомити взаємозв'язки між різними математичними поняттями. Наприклад, розуміння того, як похідна пов'язана з дотичною до графіка функції або з швидкістю зміни величини, дозволяє сформулювати цілісне уявлення про природу математичних процесів. Це сприяє не просто запам'ятовуванню формул, а саме розумінню логіки та сенсу виконуваних операцій. Завдяки цьому учні уникають механічного зазубрювання, що часто є причиною поверхневого засвоєння матеріалу, і замість цього будують міцну основу для подальшого вивчення складніших тем [8].

2. Практична функція.

Систематизовані знання створюють умови для ефективного застосування теоретичних положень у реальних і нестандартних ситуаціях. Наприклад, навички знаходження екстремумів функцій - максимальних або мінімальних значень - широко використовуються у різних галузях, зокрема в економіці при моделюванні прибутків і витрат, у фізиці при дослідженні оптимальних параметрів систем, а також у техніці і біології. Такий підхід розвиває в учнів здатність адаптуватися до нових задач, знаходити рішення там, де потрібне творче мислення і аналітичний підхід [1].

3. Мотиваційна функція.

Систематизація знань підвищує зацікавленість учнів до предмета, оскільки демонструє практичне і прикладне значення вивченого матеріалу. Коли учні бачать, як поняття похідної застосовується у сучасних технологіях, наприклад, у машинному навчанні, робототехніці, оптимізації процесів, вони розуміють, що математика - це не просто набір абстрактних правил, а інструмент, який допомагає вирішувати реальні проблеми. Це стимулює бажання вчитися, досліджувати та розвиватися далі, формуючи внутрішню мотивацію і позитивне ставлення до навчання [20].

Методи узагальнення та систематизації знань з похідної

1. Структурно-логічні схеми.

Використання візуальних інструментів, таких як інтелект-карти (mind maps), допомагає наочно відобразити зв'язки між різними математичними поняттями. Це сприяє кращому запам'ятовуванню і розумінню матеріалу.

Наприклад, можна побудувати схему, яка дозволяє учням бачити логічний ланцюжок і розуміти, як одне поняття впливає з іншого та в яких сферах застосовується:

**Похідна → Геометричний зміст (кут нахилу дотичної)
→ Фізичний зміст (швидкість) → Застосування
(екстремуми, опуклість).**

2. Порівняльні таблиці.

Зіставлення правил диференціювання для різних функцій (стала, степенева, тригонометрична) допомагає структурувати правила і полегшує їх засвоєння.

3. Класифікація задач.

Групування завдань за типами сприяє послідовному вивченню та розвитку різних навичок:

- Обчислення похідної (знаходження формули похідної для заданої функції).
- Дослідження функції на монотонність (визначення інтервалів зростання або спадання).
- Задачі на оптимізацію (пошук максимумів і мінімумів функції, що має практичне застосування).

Класифікація дозволяє систематично опрацьовувати матеріал і не пропускати важливі типи задач.

4. Міжпредметні проекти:

Використання похідної в різних галузях науки демонструє її практичну значущість і допомагає мотивувати учнів [2]. Такі міжпредметні проекти не тільки сприяють глибшому розумінню математики, але й розвивають комплексне мислення, здатність інтегрувати знання з різних дисциплін та бачити їх практичне застосування у різних сферах життя.

Етапи організації узагальнення

1. Підготовчий етап.

На цьому етапі відбувається актуалізація попередніх знань учнів, що створює основу для подальшого узагальнення. Наприклад, нагадуються поняття границі функції та приросту функції, які є базовими для розуміння похідної. Мета - налаштувати учнів на нову тему, активізувати вже наявні у них знання та підготувати їх до сприйняття нової інформації [5].

2. Етап формування нових знань.

Учні знайомляться з новими поняттями і правилами: визначенням похідної, її основними властивостями, правилами диференціювання. Важливо на цьому етапі використовувати різні форми подачі матеріалу: теоретичні пояснення, графічні інтерпретації, приклади з практики. На цьому етапі відбувається розбір і глибоке осмислення цих понять, а також їхніх властивостей [17].

3. Етап узагальнення.

Учні систематизують отримані знання, виділяють загальні закономірності, встановлюють зв'язки між різними поняттями і методами. Цей етап передбачає роботу з таблицями похідних, алгоритмами розв'язання типових задач, порівняннями різних способів диференціювання. Наприклад, створення таблиці правил диференціювання, узагальнення понять похідної для різних типів функцій, аналіз алгоритму розв'язання задач на знаходження екстремумів [27].

4. Етап систематизації знань.

На цьому етапі матеріал впорядковується в логічну структуру, що полегшує його подальше засвоєння та застосування. Використовуються схеми, логічні карти, конспекти, що допомагають учням побачити повну картину теми.

Наприклад, складання ментальної карти, де поєднані всі ключові поняття теми: визначення похідної, правила диференціювання, застосування у задачах [7].

5. Практичний етап.

Отримані знання використовуються для розв'язання нових, більш складних задач або задач з прикладним контекстом.

Наприклад, учні можуть розглянути спрощені приклади обчислення похідних функції втрат по параметрах мережі, щоб зрозуміти, як похідна допомагає навчати штучний інтелект зокрема у методі зворотного поширення помилки (backpropagation) [12; 19].

Цей етап допомагає закріпити знання через практичну діяльність і розвиває вміння переносити теорію у реальні ситуації.

6. Етап контролю і рефлексії.

Проводиться перевірка рівня засвоєння матеріалу, аналізується успішність узагальнення знань. Важливо організувати рефлексію – осмислення учнями свого навчального досвіду, самооцінку, виявлення труднощів.

Наприклад, тестування, обговорення помилок, відповіді на питання типу «Що нового я дізнався?», «Що було складно?» [27].

Узагальнення та систематизація знань з теми «Похідна» відіграють ключову роль у формуванні у учнів цілісного і системного розуміння математичного матеріалу. Вони допомагають структурувати і пов'язати розрізнені фрагменти знань у логічну та послідовну систему, що сприяє більш глибокому засвоєнню теми.

Ці процеси стимулюють розвиток абстрактного та аналітичного мислення, адже учні навчаються знаходити закономірності, формулювати загальні правила та застосовувати їх у різних ситуаціях. Узагальнення знань сприяє формуванню метапредметних умінь, таких як аналіз, синтез і класифікація.

Крім того, систематизація матеріалу готує учнів до успішного розв'язання практичних задач із застосуванням похідної у науці, техніці, економіці та інших галузях, що є важливим етапом у розвитку їхніх компетентностей і підготовці до подальшого професійного життя [7; 19].

1.3. Похідна та її застосування в науці та у шкільній математиці

Тема «Похідна» посідає особливе місце у шкільному курсі математики, адже вона поєднує фундаментальні теоретичні поняття з практичними застосуваннями у різних галузях людської діяльності. Її вивчення не лише сприяє засвоєнню основ математичного аналізу, а й відкриває перед учнями

можливості для розуміння широкого спектру природничо-наукових, технічних і соціально-економічних процесів. Похідна є основним інструментом для дослідження змін величин, аналізу динаміки процесів, прогнозування тенденцій, що робить її важливою складовою як прикладної, так і міжпредметної підготовки [22].

У контексті сучасної освіти, яка зорієнтована на формування ключових компетентностей, креативності, аналітичного та критичного мислення, вивчення похідної набуває особливої актуальності. Вона забезпечує розвиток інтелектуальних і пізнавальних умінь учнів, створює можливості для моделювання реальних процесів, роботи з емпіричними даними, участі у дослідницьких проєктах. Під час вивчення похідної школярі ознайомлюються з поняттями миттєвої швидкості, граничної продуктивності, темпу змін, що формує підґрунтя для подальшого опанування матеріалу з фізики, економіки, біології, техніки, інформатики й навіть основ штучного інтелекту, де похідна відіграє ключову роль у процесах оптимізації (наприклад, у методі зворотного поширення помилки) [22; 31].

Разом з тим, поняття похідної виконує важливу функцію у внутрішній структурі курсу математики. Воно логічно пов'язує теми функцій, границь, неперервності, дослідження функцій, екстремумів, сприяючи усвідомленню цілісності математичних знань. Такий зв'язок між різними темами і міжпредметний зв'язок дозволяє учням глибше зрозуміти логіку побудови математичної науки, навчитись узагальнювати, систематизувати та застосовувати здобуті знання у нових контекстах [14; 29].

На думку провідних педагогів-методистів, ефективне навчання теми «Похідна» має ґрунтуватися на поєднанні теоретичної бази з практичною діяльністю, активному залученні учнів до пізнавальної та дослідницької роботи, а також цілеспрямованому застосуванню елементів узагальнення та систематизації знань на завершальному етапі навчання. Це дозволяє впорядкувати вивчений матеріал, сформувати в учнів системне бачення та забезпечити стійке засвоєння ключових понять [31; 29].

1. Теоретичне значення поняття похідної

Поняття похідної є одним із центральних у математичному аналізі й посідає провідне місце в шкільному курсі математики, оскільки поєднує строгі математичні концепти з інтуїтивно зрозумілими прикладами зі зміни величин у часі та просторі.

З формального погляду, похідна функції $f(x)$ в точці x_0 визначається як границя відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Це означає, що похідна описує миттєву швидкість зміни значення функції, тобто - як функція реагує на нескінченно малу зміну аргументу.

З геометричної точки зору, похідна в конкретній точці є тангенсом кута нахилу дотичної до графіка функції в цій точці. Таким чином, вона дає змогу описати локальну поведінку функції: зростання, спадання, точки перегину, максимуми й мінімуми.

З фізичної точки зору, похідна - це основа поняття швидкості в класичній механіці. Якщо $s(t)$ - координата тіла в момент часу t , то похідна $s'(t)$ описує його миттєву швидкість. У такий спосіб похідна дозволяє кількісно описувати процеси зміни у природничих і технічних науках.

Крім безпосереднього використання у задачах, поняття похідної має методологічне значення у навчанні: воно формує в учнів здатність оперувати абстрактними величинами, будувати математичні моделі реальних явищ, розвивати логічне, структурне мислення.

2. Застосування похідної в шкільній математиці

Викладання теми «Похідна» у шкільному курсі математики є не лише засобом формування навичок обчислення, але й важливим етапом у розвитку логіко-аналітичного мислення учнів, формуванні навичок моделювання та застосування математики до реальних ситуацій. Похідна стає важливою ланкою між абстрактними теоретичними поняттями та практичними задачами, з якими учні можуть стикатися як у повсякденному житті, так і у подальшому

навчанні. Основними напрямками застосування похідної у шкільній математиці є:

1. Дослідження функцій.

Одним із ключових напрямів застосування похідної є дослідження функцій на зростання і спадання, знаходження екстремумів, точок перегину, інтервалів опуклості та побудова графіків. Застосовуючи похідну, учні не лише опановують техніку обчислень, а й набувають глибшого розуміння геометричної та аналітичної суті функцій. Наприклад, аналіз поведінки функції на основі знаків похідної дозволяє будувати графіки без використання цифрових засобів, спираючись на логічний аналіз і дедукцію. Цей підхід формує міцну базу для вивчення більш складних тем математичного аналізу [22; 14].

2. Формування уявлень про математичне моделювання.

Вивчення похідної сприяє розвитку в учнів елементарних навичок моделювання динамічних процесів. Учні починають усвідомлювати, що похідна може описувати зміну швидкості автомобіля, зміну температури у часі, темпи зростання прибутку або витрат, похідна є ключовим інструментом при оптимізації моделей машинного навчання у сфері інформатики та штучного інтелекту.

3. Підготовка до ЗНО та продовження освіти.

Тема «Похідна» охоплює велику кількість задач, що є типовими у зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО). Це задачі на дослідження функцій, знаходження екстремумів, аналіз графіків та побудову моделей. Окрім цього, похідна є базовим інструментом для подальшого навчання у вищих навчальних закладах - як для математичних і фізико-технічних спеціальностей, так і для економічних, біологічних, ІТ-спрямованих програм. Формування навичок роботи з похідною забезпечує концептуальний зв'язок між шкільною та університетською математикою, даючи змогу учням з упевненістю перейти на вищий рівень математичного мислення [29].

Важливо, щоб учителі не обмежувалися виключно технічним опануванням методів обчислення похідної, а приділяли особливу увагу логіці її застосування. Зокрема, ефективним є використання задач прикладного змісту, які допомагають учням усвідомити практичну цінність похідної в моделюванні реальних процесів, аналізі функціональних залежностей та прийнятті обґрунтованих рішень. Такий підхід сприяє формуванню глибшого розуміння математичних понять, розвитку критичного мислення та мотивації до вивчення предмета.

3. Похідна в наукових і прикладних дослідженнях

У сучасній науці поняття похідної має надзвичайно широке застосування. Її використовують у фізиці, хімії, біології, економіці, інженерії, кібернетиці, інформатиці та багатьох інших галузях.

ФІЗИКА.

- Механіка:

Похідна переміщення за часом - швидкість: $v(t)=s'(t)$.

Похідна швидкості за часом - прискорення: $a(t)=v'(t)$.

- Термодинаміка: Аналіз теплових процесів через похідні температури.

Швидкість зміни ентропії за часом $\frac{dS}{dt}$

де S - ентропія (міра хаотичності) системи, яка змінюється з часом.

Вимірювання $\frac{dS}{dt}$ допомагає інженерам оцінювати, наскільки близький процес до ідеального, і оптимізувати теплові машини, підвищуючи їхню продуктивність.

Інтенсивність теплового потоку (залежність теплового потоку від температурного градієнта):

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

де q - тепловий потік,

k - коефіцієнт теплопровідності,

$\frac{dT}{dx}$ - похідна температури по просторовій координаті x (градієнт температури).

ЕКОНОМІКА.

- Маржинальний аналіз: Похідна витрат $\frac{dC}{dq}$ (доходів $\frac{dR}{dq}$) визначає оптимальний обсяг виробництва.

$$MC = \frac{dC}{dq}, \quad MR = \frac{dR}{dq}$$

Оптимальний обсяг виробництва досягається, коли граничні витрати (MC) дорівнюють граничним доходам (MR):

$$MC = MR$$

- Еластичність попиту за ціною E_p показує, як змінюється обсяг попиту $Q(p)$ залежно від зміни ціни p :

$$E_p = \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{p}{Q}$$

БІОЛОГІЯ ТА МЕДИЦИНА.

- Моделювання динаміки популяцій (наприклад, логістичне рівняння).
- Аналіз концентрації ліків у крові за допомогою диференціальних рівнянь.

ТЕХНІКА ТА ІНЖЕНЕРІЯ.

Аналіз механічних конструкцій, вивчення коливальних процесів, електроніки тощо.

ІНФОРМАТИКА ТА ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ:

- Градієнтний спуск: Алгоритм оптимізації, що використовує похідні для навчання нейронних мереж.
- Backpropagation: Метод зворотного поширення помилки, заснований на диференціюванні складної функції.

Таким чином, учні, які вивчають тему «Похідна», отримують не лише математичну компетентність, а й закладають основу для розуміння складних міжпредметних процесів. Розкриття застосувань похідної в науці і техніці

робить навчання більш мотиваційно насиченим і сприяє формуванню цілісної картини світу.

4. Значення теми «Похідна» для формування ключових компетентностей

Поглиблене вивчення похідної та її застосування сприяє формуванню у ліцеїстів:

Предметної математичної компетентності, що включає глибоке розуміння теоретичного змісту поняття похідної, володіння методами обчислення похідних для різних типів функцій, уміння застосовувати похідну для дослідження властивостей функцій, побудови їх графіків, знаходження екстремумів, визначення швидкостей і прискорень. Важливою складовою також є розвиток точності математичних міркувань, уміння логічно і грамотно оперувати математичними формулами та алгоритмами, що сприяє формуванню стійких навичок аналізу й обґрунтування розв'язань.

Метапредметної (аналітичної) компетентності, яка охоплює аналітичне мислення, яке проявляється в умінні розглядати математичні та прикладні ситуації з різних точок зору, логічно обґрунтовувати вибір методів розв'язання задач і прийняття рішень. Також важливою є здатність до узагальнення знань - уміння виділяти істотні ознаки математичних об'єктів і процесів, встановлювати зв'язки між поняттями з різних галузей знань, зокрема між математикою, фізикою, інформатикою чи економікою. Крім того, компетентність включає прогнозування - здатність використовувати аналітичну інформацію про функції, їх похідні та поведінку змінних для передбачення майбутніх результатів або змін у системах, що моделюються.

Ключових життєвих навичок, що охоплюють широкий спектр універсальних умінь. Насамперед це вміння розв'язувати проблеми - здатність знаходити ефективні рішення як для стандартних математичних задач, так і для нестандартних, прикладних або міждисциплінарних ситуацій, що розвиває гнучкість мислення та здатність адаптувати знання до нових умов. Навчання через діяльність сприяє активному залученню учнів до процесу пізнання через виконання практичних завдань, дослідницьких проєктів, аналіз реальних

прикладів і самостійне відкриття математичних закономірностей. Важливою є також міждисциплінарна інтеграція: учні починають бачити, як поняття похідної використовується в різних сферах - у фізиці (визначення швидкості та прискорення), інформатиці (градієнтний спуск, оптимізація в штучному інтелекті), біології (моделі динаміки популяцій), економіці (аналіз граничних витрат, еластичності попиту). Такий підхід не лише сприяє глибшому засвоєнню матеріалу, а й формує в учнів цілісне уявлення про єдність науки та практичне значення математики.

Ці аспекти є особливо важливими в контексті компетентнісного підходу, що лежить в основі сучасної української освіти. Аналіз теоретичних основ узагальнення та систематизації знань у процесі навчання математики свідчить про те, що ці процеси є ключовими механізмами формування цілісного, гнучкого, функціонального знання. Особливо яскраво їх роль виявляється у вивченні фундаментальних тем, таких як «Похідна та її застосування», яка інтегрує абстрактну математичну теорію з практичним мисленням, науковими уявленнями та міжпредметними зв'язками [29].

Поняття похідної виступає не лише важливою математичною конструкцією, а й універсальним дидактичним засобом, що забезпечує розвиток логіко-аналітичного, структурного і критичного мислення учнів [19]. Через опанування похідної школярі отримують інструменти для вивчення та моделювання змін, аналізу динаміки процесів, що відбуваються у природі, техніці, економіці, суспільстві. Це формує основу для наукового світогляду та компетентнісного мислення [29].

Зміст теми «Похідна» органічно поєднує низку важливих математичних понять - функцію, границю, неперервність, екстремум, що відкриває широкі можливості для систематизації знань. У процесі навчання вона дозволяє учням бачити зв'язки між різними темами, встановлювати логічні переходи між абстрактними поняттями та їх практичним застосуванням, що є суттю узагальнення знань [22; 31; 14]. Саме вивчення похідної створює передумови

для переходу від емпіричного рівня до рівня узагальнених понять і закономірностей.

Крім того, застосування похідної у задачах прикладного змісту, дослідницьких проектах, міжпредметних модулях сприяє формуванню ключових компетентностей: математичної, аналітичної, інформаційної, а також навичок критичного осмислення даних і прийняття рішень. У цьому контексті узагальнення та систематизація знань не є лише етапами навчання, а перетворюються на методологічні інструменти, які дозволяють забезпечити глибоке, стійке, внутрішньо організоване засвоєння знань [24; 28].

Таким чином, ефективне викладання поняття похідної через призму узагальнення та систематизації знань є не лише змістовною метою навчання математики, а й стратегічною педагогічною технологією, яка забезпечує підготовку учнів до подальшої освіти, наукової та професійної діяльності, формує вміння орієнтуватися в складному і динамічному світі.

Висновки до розділу 1

Здійснено аналіз психолого-педагогічної, науково-методичної літератури з проблеми узагальнення і систематизації знань учнів у процесі навчання математики, а також дослідження щодо методики викладання теми «Похідна та її застосування» в ліцях.

Виокремлено та описано методичні основи формування математичних знань учнів в ліцях та їх вплив на процес узагальнення знань. До ключових методичних засад віднесено: принцип науковості й доступності; наступність і системність; диференціацію та індивідуалізацію навчання; інтеграцію знань і міжпредметні зв'язки; використання інноваційних технологій навчання; розвиток логічного, критичного і алгоритмічного мислення; методичний вплив на процес узагальнення знань через використання різноманітних дидактичних засобів (таблиці, алгоритми, схеми, концептуальні карти).

Розкрито сутність узагальнення і систематизації знань учнів у навчальному процесі. Узагальнення визначено як складний пізнавальний

процес, який полягає у виділенні спільних ознак, властивостей або закономірностей серед різних об'єктів, явищ чи понять, що дає змогу об'єднати окремі факти або поняття у більш широкі, узагальнені категорії та сприяє формуванню цілісного й системного розуміння навчального матеріалу. Систематизація визначена як процес упорядкування знань, у ході якого інформація організовується в логічно структуровану систему, що базується на взаємозв'язках між поняттями, фактами та явищами. Встановлено, що ці процеси виконують пізнавальну, практичну та мотиваційну функції в навчанні математики.

Розкрито теоретичне, методичне та прикладне значення теми «Похідна та її застосування» в науці та у шкільній математиці. Визначено, що похідна є центральним поняттям математичного аналізу, яке має геометричний зміст (кутовий коефіцієнт дотичної), фізичний зміст (миттєва швидкість зміни величини) та широке застосування в різних галузях: фізиці (механіка, термодинаміка), економіці (маржинальний аналіз, еластичність попиту), біології та медицині (моделювання динаміки популяцій, концентрації ліків), техніці та інженерії, інформатиці та штучному інтелекті (градієнтний спуск, алгоритм зворотного поширення помилки). Обґрунтовано, що вивчення похідної сприяє формуванню предметної математичної, метапредметної (аналітичної) компетентностей та ключових життєвих навичок учнів ліцеїв.

РОЗДІЛ 2.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДИКИ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ ЛІЦЕЇВ З ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

2.1. Оцінка ефективності сучасних методик узагальнення і систематизації знань учнів в ліцеях

Постійне вдосконалення освітньої системи, вивчення європейського досвіду у підвищенні якості математичної освіти та впровадження різних методичних підходів у роботу українських ліцеїв дедалі більше зосереджує увагу педагогів на розвитку математичної культури особистості, формуванні усвідомленого і глибокого розуміння складних математичних понять та підвищенні мотивації до активного засвоєння матеріалу як ключових характеристик розвитку учнів старших класів. Згідно з сучасними освітніми стандартами, питання застосування інноваційних методик узагальнення та систематизації знань у навчанні математики стає особливо важливим, оскільки компетентнісний підхід та інтегровані освітні технології розглядаються як інтегральна здатність до успішної адаптації сучасних учнів до вимог інформаційного суспільства, у пріоритеті розвиток інтересу до глибокого вивчення математики, формування свідомого ставлення до набуття математичних компетентностей та підвищення ефективності навчально-виховного процесу з математики в старшій школі.

Вивчивши науково-педагогічну та методичну літературу щодо проблеми узагальнення та систематизації знань учнів ліцеїв під час вивчення теми «Похідна та її застосування», ми поставили за мету експериментально перевірити ефективність розробленої методики узагальнення і систематизації знань як умови підвищення якості засвоєння цієї теми та формування стійких математичних компетентностей.

До експериментальної роботи було залучено учнів 11-А та 11-Б класів фахового коледжу НУК імені адмірала Макарова у кількості 62 особи (експериментальна група – 32 учні і контрольна група – 30 учнів).

Метою констатувального етапу експерименту було визначити початковий рівень ефективності засвоєння учнями матеріалу з теми «Похідна та її застосування» та готовність до упровадження сучасних методик узагальнення та систематизації знань. Відповідно до мети було визначено завдання:

- виділити критерії, показники та рівні ефективності процесу узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування»;
- обрати відповідні методики визначення рівня засвоєння теоретичного матеріалу, розвитку аналітичного мислення та сформованості практичних навичок застосування похідної, розробити діагностичні завдання для старшокласників;
- провести діагностичне дослідження початкового стану засвоєння знань та умінь учнів 11 класів з теми «Похідна та її застосування»;
- проаналізувати результати діагностичного дослідження, сформулювати висновки про стартові можливості впровадження методики узагальнення та систематизації знань у процес навчання математики як умови підвищення його ефективності та якості.

Для об'єктивної оцінки ефективності застосування розробленої методики узагальнення і систематизації знань з теми «Похідна та її застосування» виникла необхідність визначення чітких критеріїв діагностики. Успішне вирішення поставлених завдань експерименту потребувало науково обґрунтованого підходу до створення діагностичного апарату, який би дозволив достовірно оцінити як початковий стан засвоєння учнями знань та умінь, так і якісні й кількісні зміни, що відбудуться в процесі впровадження

інноваційних методичних підходів до узагальнення та систематизації. У зв'язку з цим першочерговим завданням стало теоретичне обґрунтування та практичне визначення критеріїв, показників і рівнів ефективності процесу узагальнення та систематизації знань старшокласників з математичного аналізу, зокрема з теми «Похідна та її застосування».

Критерій – це базовий структурний компонент педагогічного дослідження, ознака, на основі якої здійснюється об'єктивна діагностика ефективності педагогічного процесу, незалежно від суб'єктивної думки. Під критерієм ми розуміємо ідеальний зразок, еталон, який визначає вищий, найдосконаліший рівень ефективності узагальнення та систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування», порівняно з яким можна встановити ступінь відповідності та наближення його реального рівня до ідеалу.

Показники – це параметри, які підтверджують критерії, взаємодіють і утворюють цілісність педагогічного процесу навчання математики. Показниками ефективності узагальнення та систематизації знань виступають такі інтегральні прояви особистості учня, як система математичних цінностей, здатність застосовувати похідну в різних контекстах, проявляти в ній цілеспрямованість, усвідомленість, самостійність, творчу активність та відповідальність за якість засвоєння знань.

Таким чином у дослідженні виділені три основні критерії ефективності методики узагальнення та систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування» з відповідними показниками:

- когнітивний критерій: рівень засвоєння теоретичного змісту поняття похідної, розуміння її геометричного та фізичного сенсу, знання основних правил диференціювання та розуміння взаємозв'язків між математичними поняттями;

- практичний критерій: здатність учнів ефективно застосовувати знання про похідну для розв'язування різноманітних задач, включаючи дослідження функцій, задачі оптимізації та прикладні задачі з реальними ситуаціями;
- метакогнітивний критерій: рівень розвитку метакогнітивних умінь учнів, пов'язаних з узагальненням та систематизацією знань, включаючи здатність до аналізу, синтезу, класифікації, встановлення міжпредметних зв'язків та критичного мислення.

Відповідно до кожного з визначених критерії були підібрані відповідні показники, які представлено в таблиці 2.1

Таблиця 2.1

Критерії та показники ефективності методики узагальнення та систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування»

Критерії	Показники
Когнітивний	1. Обсяг та глибина теоретичних знань про похідну (означення, властивості, геометричний та фізичний зміст)
	2. Розуміння логічних зв'язків між похідною та іншими математичними поняттями (границя, неперервність, монотонність)
	3. Знання правил диференціювання для різних типів функцій та вміння їх застосовувати
Практичний	1. Навички обчислення похідної та розв'язування задач на дослідження функції, знаходження екстремумів
	2. Вміння розв'язувати прикладні задачі з похідною (оптимізація, побудова графіків)
	3. Здатність самостійно вибирати методи розв'язання та обґрунтовувати правильність результатів

Метакогнітивний	1. Здатність структурувати знання через узагальнення, встановлення зв'язків та створення логічних схем
	2. Вміння встановлювати міжпредметні зв'язки похідної з фізикою, економікою та інформатикою
	3. Рівень розвитку критичного мислення, аналітичних умінь та здатність до рефлексії навчального досвіду

На основі визначених критеріїв і показників було схарактеризовано рівні ефективності методики узагальнення та систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування»: високий, середній, низький.

Високий рівень ефективності узагальнення та систематизації знань учнів засвідчує наявність глибокого розуміння теоретичного змісту похідної, усіх її властивостей, геометричного та фізичного сенсу; учні цього рівня демонструють міцні знання правил диференціювання та вміло застосовують їх до розв'язування різних типів задач. Старшокласники легко встановлюють логічні зв'язки між похідною та іншими математичними поняттями (границя, неперервність, монотонність), розуміють їхню взаємозалежність та органічність в межах курсу математичного аналізу.

Учні високого рівня проявляють стійкий інтерес до математики, готові до сприйняття математичних знань як цінності та усвідомлено застосовують їх у розв'язуванні прикладних задач. Вони вільно розв'язують задачі на дослідження функцій, знаходження екстремумів, оптимізацію, побудову графіків, демонструючи при цьому навички критичного аналізу та самоконтролю. Особливо характерною є їхня здатність встановлювати міжпредметні зв'язки похідної з фізикою (швидкість, прискорення), економікою (граничні витрати), інформатикою (градієнтний спуск), розуміючи практичне значення математичних знань. Учні цього рівня готові до емоційного та усвідомленого сприйняття математичних цінностей, проявляють готовність до самостійного розширення знань та вирішення проблемних ситуацій.

Учні із **середнім рівнем** ефективності узагальнення та систематизації знань мають задовільні показники засвоєння теоретичного матеріалу з теми «Похідна та її застосування». У них простежується епізодичне розуміння означення похідної та її геометричного сенсу, вони знають основні правила диференціювання, але застосовують їх переважно за алгоритмом, не завжди усвідомлюючи логіку виконуваних операцій. Учні цього рівня вміють розв'язувати типові задачі на знаходження похідної та дослідження функцій, дотримуючись встановлених методів, але часто відчують труднощі під час розв'язування нестандартних або прикладних задач.

Вони здатні встановлювати окремі зв'язки між похідною та іншими математичними поняттями, однак повна системна картина утворюється в них лише частково. Учні проявляють епізодичний інтерес до вивчення похідної та її застосування, залежно від зовнішніх чинників (складність матеріалу, підтримка учителя). Вони не демонструють готовності до систематичного самовдосконалення та самостійного поглиблення знань, не мають стійких навичок структурування матеріалу через узагальнення та створення логічних схем. Критичне мислення розвинене на задовільному рівні, учні можуть обґрунтувати свої розв'язання, але не завжди критично підходять до вибору методів розв'язання та не виявляють готовності до рефлексії свого навчального досвіду.

Низький рівень ефективності узагальнення та систематизації знань учнів характерний для старшокласників, у яких спостерігаються значні прогалини в засвоєнні теоретичного матеріалу з теми «Похідна та її застосування». Вони знають назву поняття та окремі правила диференціювання, але не можуть дати чітке означення похідної, докладно не розуміють її геометричного та фізичного сенсу, не можуть пояснити логіку правил диференціювання, не навести практичних прикладів застосування похідної у різних галузях науки та техніки.

Учні цього рівня відчують значні труднощі при розв'язуванні навіть типових задач на знаходження похідної та дослідження функцій, часто

припускаються обчислювальних помилок та не виявляють елементарних навичок самоконтролю. Відсутній інтерес до математичного змісту теми, не спостерігається прагнення до розуміння взаємозв'язків між математичними поняттями. Учні низького рівня не налаштовані на встановлення логічних зв'язків, не видно готовності до узагальнення та систематизації знань, не вміють структурувати матеріал через створення схем та логічних карт. За наявності труднощів у розв'язуванні задач вони не проявляють елементарних навичок аналізу ситуації та пошуку альтернативних методів; спостерігається небажання взаємодіяти з учителем та однолітками у розв'язуванні проблемних питань. Критичне мислення у таких учнів розвинене на низькому рівні, вони не здатні обґрунтовувати свої розв'язання, не готові до рефлексії та аналізу своїх помилок. Ці учні не налаштовані емоційно сприймати математичні цінності та не виявляють позитивного ставлення до вивчення математики та розвитку власних компетентностей.

Для комплексної оцінки ефективності методики узагальнення та систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування» за визначеними критеріями було підібрано систему діагностичних методик, які забезпечують об'єктивність і валідність вимірювання. Кожен з трьох критеріїв за допомогою двох спеціально адаптованих методик, що дозволило отримати всебічну картину рівня засвоєння знань учнів та ефективності навчального процесу.

Для оцінки когнітивного критерію, що охоплює рівень засвоєння теоретичного змісту поняття похідної, розуміння її геометричного та фізичного сенсу, знання основних правил диференціювання та розуміння взаємозв'язків між математичними поняттями, були застосовані наступні методики:

Методика 1. Тестування теоретичних знань з теми «Похідна та її застосування». Дана методика являє собою структурований тест, що складається з 20 завдань різних типів: завдання з вибором однієї правильної відповіді (10 завдань), завдання на встановлення відповідності (5 завдань) та

завдання відкритого типу з короткою відповіддю (5 завдань). Тест охоплює всі ключові теоретичні аспекти теми: означення похідної через границю, геометричний зміст похідної як кутового коефіцієнта дотичної, фізичний зміст похідної як швидкості зміни величини, таблицю похідних елементарних функцій, основні правила диференціювання (похідна суми, добутку, частки, складної функції). Інструкцію щодо проведення цієї методики наведено у додатку А.

Структура тесту була розроблена таким чином, щоб забезпечити діагностику різних рівнів засвоєння знань за таксономією Блума: знання (відтворення означень, формул), розуміння (пояснення геометричного та фізичного змісту), застосування (використання правил диференціювання в типових ситуаціях) та аналіз (встановлення зв'язків між поняттями). Кожне правильно виконане завдання оцінювалося в 1 бал, максимальна кількість балів за тест становила 20.

Оцінювання результатів здійснювалося за наступною шкалою:

- високий рівень: 17-20 балів (85-100% правильних відповідей);
- середній рівень: 11-16 балів (55-80% правильних відповідей);
- низький рівень: 0-10 балів (менше 55% правильних відповідей).

Тест проводився у письмовій формі протягом одного навчального заняття (45 хвилин), що забезпечувало однакові умови для всіх учасників експерименту. Використання тестової форми контролю дозволило забезпечити об'єктивність оцінювання та можливість порівняння результатів між експериментальною та контрольною групами.

Аналіз результатів тестування представлено у таблиці 2.2 та рисунках 2.1 та 2.2

Таблиця 2.2

Результати тестування теоретичних знань з теми «Похідна та її застосування»

Група	Рівні
-------	-------

	Високий	Середній	Низький
ЕГ	18,7%	47,0%	34,3%
КГ	16,7%	46,7%	36,6%



Рис 2.1. Узагальнені результати тестування (ЕГ)



Рис 2.2. Узагальнені результати тестування (КГ)

Методика 2. Метод структурованого інтерв'ю з елементами усного опитування передбачав глибоке з'ясування розуміння учнями теоретичних

основ теми «Похідна та її застосування». Цей метод дозволив оцінити не лише знання формальних означень і правил, а й глибину розуміння їх сутності, здатність пояснити логіку математичних операцій, встановити причинно-наслідкові зв'язки між поняттями.

Інтерв'ю проводилося індивідуально з кожним учнем протягом 10-15 хвилин і включало 8 основних запитань, організованих за принципом від простого до складного:

1. Сформулюйте означення похідної функції в точці. Поясніть кожен елемент означення.
2. У чому полягає геометричний зміст похідної? Наведіть приклад.
3. Який фізичний зміст має похідна? Як це пов'язано з реальними процесами?
4. Поясніть взаємозв'язок між поняттями границі, неперервності та похідної.
5. Чому похідна константи дорівнює нулю? Обґрунтуйте математично.
6. Поясніть, чому правило диференціювання суми функцій виглядає саме так.
7. Як пов'язані поняття похідної та монотонності функції?
8. Наведіть приклади застосування похідної в різних галузях науки (фізиці, економіці, інформатиці).

Відповіді учнів оцінювалися за спеціально розробленою аналітичною шкалою, що враховувала повноту відповіді, правильність використання математичної термінології, здатність до обґрунтування та логічність викладу. Кожне запитання оцінювалося за 3-бальною шкалою:

- 2 бали: повна, правильна відповідь з обґрунтуванням, використанням коректної термінології та наведенням прикладів;
- 1 бал: часткова відповідь, наявність неточностей, недостатнє обґрунтування;
- 0 балів: неправильна відповідь або відсутність відповіді.

Використання методу структурованого інтерв'ю як додаткової діагностичної методики дозволило компенсувати обмеження тестової форми контролю та отримати якісні дані про глибину розуміння учнями теоретичного матеріалу, їхню здатність до рефлексії та усного математичного мовлення.

Для оцінки практичного критерію, що відображає здатність учнів ефективно застосовувати знання про похідну для розв'язування різноманітних задач, було обрано наступні методики:

Методика 3. Контрольна робота з розв'язування задач на застосування похідної - це основна методика діагностики практичного критерію, що складалася з 8 задач різного рівня складності та різних типів. Структура контрольної роботи була побудована таким чином, щоб охопити всі основні види практичного застосування похідної, що вивчаються в шкільному курсі математики (див. Додаток Б).

Час виконання контрольної роботи становив 90 хвилин (2 навчальні години), що відповідає стандартним вимогам до проведення підсумкового контролю знань у старшій школі. Використання різнорівневих завдань дозволило диференціювати учнів за рівнем практичних навичок та виявити як базові, так і поглиблені вміння застосування похідної.

Методика 4. Практикум з розв'язування прикладних задач (кейс-метод), що передбачав розв'язування комплексних прикладних задач з реальним контекстом. Учням пропонувалося три різні ситуаційні завдання (кейси), з яких вони мали вибрати одне для детального опрацювання. Кожен кейс представляв собою реальну або близьку до реальної ситуацію, що потребувала математичного моделювання з використанням апарату похідної. Приклади кейсів можна переглянути у додатку В.

Оцінювання виконання кейсу здійснювалося за наступними критеріями:

- правильність математичної моделі (0-3 бали);
- коректність застосування апарату похідної (0-3 бали);
- точність обчислень (0-2 бали);

- якість інтерпретації результатів (0-3 бали);
- обґрунтованість висновків і рекомендацій (0-2 бали);
- оформлення та презентація розв'язання (0-2 бали).

Використання кейс-методу дозволило оцінити не лише технічні навички обчислення похідних, а й здатність учнів застосовувати математичні знання в комплексних, наближених до реальності ситуаціях, що є важливою складовою практичної компетентності.

Для оцінки метакогнітивного критерію, що відображає рівень розвитку метакогнітивних умінь учнів, пов'язаних з узагальненням та систематизацією знань, включаючи здатність до аналізу, синтезу, класифікації, встановлення міжпредметних зв'язків та критичного мислення, були використані наступні методики:

Методика 5. Створення концептуальної карти (mind map) теми «Похідна та її застосування». Концептуальні карти (інтелект-карти, mind maps) є ефективним інструментом діагностики метакогнітивних умінь, оскільки вони відображають здатність учнів структурувати знання, встановлювати зв'язки між поняттями, виділяти головне та другорядне, організовувати інформацію в логічну систему. Для діагностики учням пропонувалося створити власну концептуальну карту теми «Похідна та її застосування», використовуючи як паперові, так і цифрові засоби (за бажанням).

Завдання формулювалося наступним чином: «Створіть концептуальну карту теми «Похідна та її застосування», відобразивши на ній всі ключові поняття, їхні властивості, взаємозв'язки, методи обчислення та сфери застосування. Використовуйте різні кольори, символи, стрілки для позначення різних типів зв'язків. Покажіть міжпредметні зв'язки з фізикою, економікою, інформатикою».

Для виконання завдання учням відводилося 45 хвилин. Вони могли використовувати підручники, конспекти, довідкові матеріали, що дозволяло

зосередитися не на відтворенні інформації з пам'яті, а на її структуруванні та організації.

Методика 6. Рефлексивне есе з самоаналізом навчальної діяльності, яке дозволяє оцінити здатність учнів до критичного аналізу власного навчального досвіду, усвідомлення своїх труднощів та успіхів, планування подальших кроків у навчанні. Рефлексія є важливою складовою метакогнітивної компетентності, оскільки передбачає усвідомлення власних розумових процесів, стратегій навчання, сильних і слабких сторін.

Учням пропонувалося написати есе обсягом 300-500 слів на тему «Моє розуміння похідної: труднощі, відкриття, застосування». Для структурування есе надавався орієнтовний план та перелік питань для роздумів:

- 1) Які аспекти теми «Похідна та її застосування» були для мене найскладнішими? Чому?
- 2) Що допомогло мені подолати труднощі в розумінні похідної?
- 3) Які відкриття я зробив/зробила під час вивчення цієї теми?
- 4) Як я розумію практичне значення похідної? Де я можу застосувати ці знання?
- 5) Які зв'язки я бачу між похідною та іншими темами математики (функції, границі тощо)?
- 6) Як вивчення похідної змінило моє уявлення про математику?
- 7) Які стратегії навчання виявилися найефективнішими для засвоєння цієї теми?
- 8) Що б я порадив/порадила іншим учням, які починають вивчати похідну?
- 9) Які питання щодо похідної залишилися для мене не до кінця зрозумілими?
- 10) Як я планую використовувати знання про похідну в майбутньому?

На написання есе відводилося 45 хвилин. Учні виконували роботу самостійно, без використання додаткових матеріалів, оскільки завдання

полягало не у відтворенні теоретичних знань, а у рефлексії власного навчального досвіду. Критерії оцінювання есе надано у додатку Г.

Результати діагностики за кожною методикою фіксувалися в індивідуальних протоколах, що містили бали за окремими критеріями та загальний бал. Далі здійснювалося узагальнення даних за критеріями шляхом усереднення балів за відповідними методиками та переведення їх у рівні (високий, середній, низький). Ці дані представлено у таблиці 2.3 та рисунку 2.3

Таблиця 2.3

**Рівні ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів
(констатувальний етап)**

	Рівні						Всього
	Високий		Середній		Низький		
	к-ть дітей	%	к-ть дітей	%	к-ть дітей	%	
КГ	3	10,0	17	56,7	10	33,3	30 / 100%
ЕГ	3	12,5	20	59,4	9	28,1	32 / 100 %

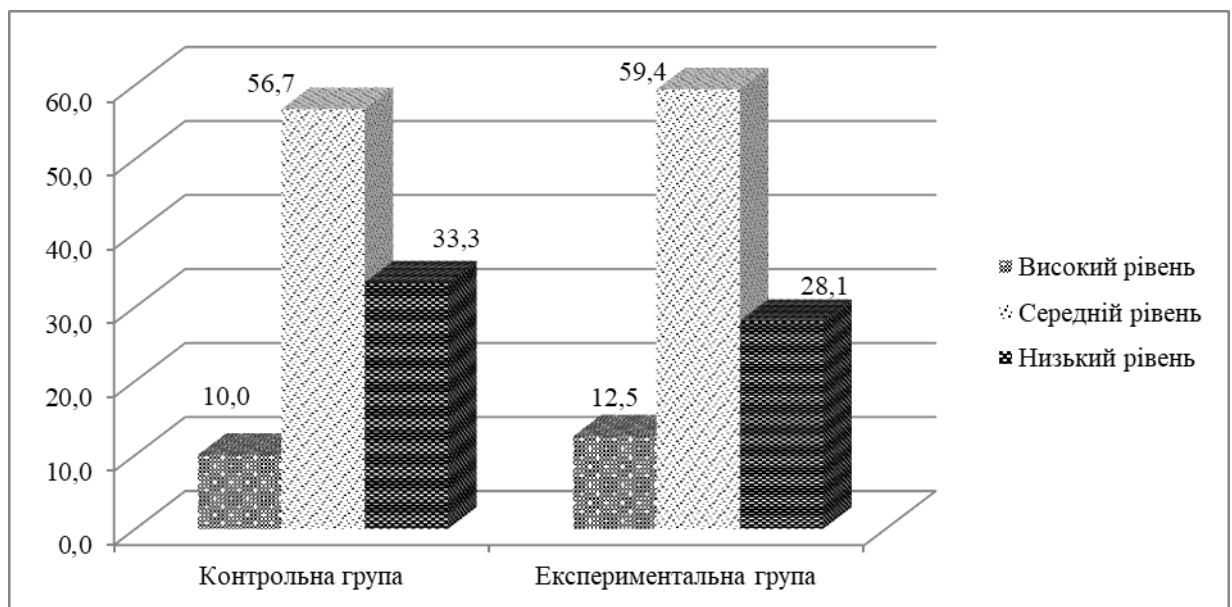


Рис. 2.3. Розподіл учнів старших класів за рівнями ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів на констатувальному етапі експерименту

Аналіз узагальнених результатів констатувального етапу експерименту (табл. 2.3, рис. 2.3) показав, що ефективність методики узагальнення і систематизації знань учнів старших класів з теми «Похідна та її застосування» у досліджуваних групах знаходиться переважно на середньому рівні.

У контрольній групі розподіл за рівнями ефективності склав: високий рівень мають лише 3 учні (10,0%), що свідчить про незначну кількість старшокласників з оптимальними показниками теоретичних знань, практичних навичок та метакогнітивних умінь. Середній рівень зафіксовано у 17 учнів (56,7%), що становить більшість учасників контрольної групи. Низький рівень демонструють 10 учнів (28,1%), які потребують цілеспрямованого педагогічного впливу для підвищення ефективності узагальнення та систематизації знань.

В експериментальній групі спостерігається подібна тенденція: високий рівень характерний для 3 учнів (12,5%), середній рівень – для 20 учнів (59,4%), низький рівень – для 9 учнів (30,3%). Порівняння показників обох груп засвідчує їх статистичну однорідність та відсутність суттєвих відмінностей у початкових умовах експерименту (за критерієм χ^2 Пірсона, $p > 0,05$).

Особливо критичною є ситуація з низьким рівнем ефективності, який демонструють 28,1% учнів контрольної групи та 30,3% учнів експериментальної групи. Ці показники вказують на системні проблеми у формуванні як теоретичних знань, так і практичних навичок застосування похідної, а також у розвитку метакогнітивних умінь старшокласників, що підтверджує актуальність пошуку інноваційних педагогічних рішень.

Найбільш проблемними виявилися показники метакогнітивного критерію, що обґрунтовує доцільність впровадження спеціальної методики узагальнення і систематизації знань як ефективного інструменту модернізації математичної освіти. Слабкий розвиток метакогнітивних умінь перешкоджає формуванню цілісного системного бачення теми, встановленню міжпредметних зв'язків та усвідомленому застосуванню математичних знань у різних контекстах.

Таким чином, результати констатувального етапу експерименту дозволяють зробити висновок про необхідність розробки та впровадження спеціальної методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування», яка має бути спрямована на: підвищення рівня теоретичних знань через застосування методів, що сприяють глибокому розумінню взаємозв'язків між математичними поняттями; розвиток практичних навичок застосування похідної через використання різнорівневих та прикладних задач; формування метакогнітивних умінь через впровадження технік узагальнення, систематизації, структурування знань та рефлексивних практик.

2.2. Методика узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв у навчанні теми «Похідна та її застосування»

На основі результатів констатувального етапу експерименту, які засвідчили недостатній рівень сформованості теоретичних знань, практичних навичок та метакогнітивних умінь учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування», було розроблено та впроваджено на формуальному етапі експерименту спеціальну методику узагальнення і систематизації знань в освітній процес ЕГ. Ця методика базується на таких концептуальних положеннях:

1. Компетентнісна спрямованість навчання: освітній процес орієнтовано на формування не лише предметних математичних компетентностей (володіння теоретичними знаннями про похідну, вміння обчислювати похідні, досліджувати функції), а й ключових компетентностей: уміння вчитися (метакогнітивні навички, рефлексія), математична компетентність (застосування математики в реальних ситуаціях), інформаційно-цифрова компетентність (використання цифрових інструментів), підприємницька компетентність (прийняття рішень на основі аналізу даних).

2. Цифровізація освітнього процесу: систематичне використання цифрових освітніх ресурсів та інструментів для візуалізації математичних понять (GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha), організації інтерактивного навчання (онлайн-платформи Classtime, Всеосвіта, Kahoot), проведення формувального оцінювання (Google Forms, Mentimeter), створення цифрових портфоліо учнів.

3. Міжпредметна інтеграція: демонстрація застосування похідної в різних предметних галузях: фізиці (швидкість, прискорення, динаміка процесів), економіці (граничні витрати, еластичність попиту), інформатиці (градієнтний спуск, алгоритми машинного навчання), біології (моделювання популяційної динаміки), що сприяє формуванню цілісного наукового світогляду.

4. Діяльнісний підхід: організація навчання через активну пізнавальну діяльність учнів (дослідницькі проєкти, розв'язування проблемних задач, групову роботу, самостійне конструювання знань, рефлексію навчального досвіду).

5. Поетапність узагальнення та систематизації: узагальнення знань здійснюється не одномоментно наприкінці теми, а послідовно на кожному етапі вивчення матеріалу через використання спеціальних методичних прийомів та інструментів систематизації.

Реалізація методики включала чотири взаємопов'язаних етапи.

Етап 1. Мотиваційно-орієнтувальний полягав в актуалізації попередніх знань учнів, формуванні мотивації до вивчення теми через демонстрацію практичної значущості похідної, створенні проблемної ситуації.

На першому занятті «Похідна навколо нас: від фізики до штучного інтелекту» учням було запропоновано переглянути мультимедійну презентацію, яка демонструвала застосування похідної в сучасних технологіях та різних сферах діяльності: використання похідних в системах автопілота для оптимізації траєкторії руху; використання похідної в економіці для

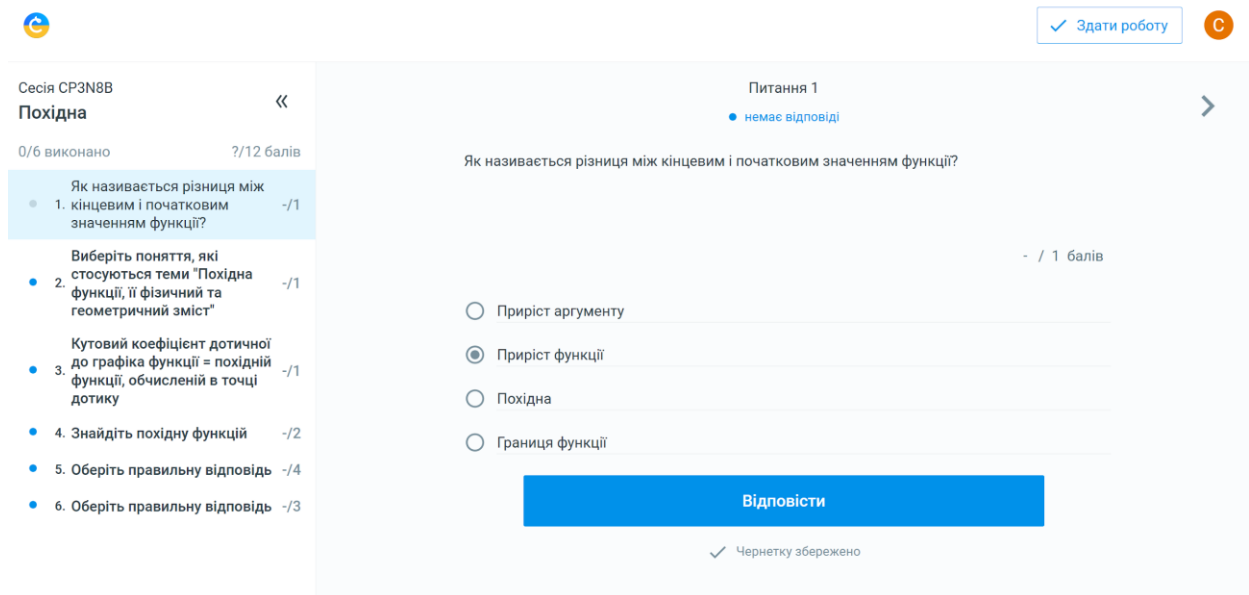


Рис. 2.5. Інтерфейс платформи Classtime (тестування, вигляд з учнівського облікового запису)

Зазначені форми роботи та використані засоби для їх реалізації мали за мету сформувати позитивну мотивацію до вивчення теми, актуалізувати необхідні базові знання, визначити індивідуальні траєкторії навчання.

Етап 2. Операційно-пізнавальний спрямований на формування глибоких теоретичних знань про похідну, розвиток навичок обчислення похідних, створення умов для поступової систематизації знань через їх практичне застосування.

На цьому етапі учнів познайомили з формальним математичним означенням похідної як границею відношення приросту функції до приросту аргументу. Проте, на відміну від традиційного викладення, означення було представлено не як абстрактна формула, а як результат розв'язування практичної задачі на знаходження миттєвої швидкості рухомого тіла.

З метою забезпечення глибокого розуміння геометричного змісту похідної була використана динамічна візуалізація в середовищі GeoGebra. Учням було запропоновано інтерактивне завдання, в якому вони спостерігали, як при наближенні точки вздовж графіка функції до фіксованої точки січна пряма «наближається» до дотичної, а кутовий коефіцієнт січної наближається

до похідної в даній точці (рисунок 2.6). Такий підхід забезпечив перехід від абстрактного розуміння до конкретного бачення геометричного змісту похідної та сприяв свідомому засвоєнню матеріалу.

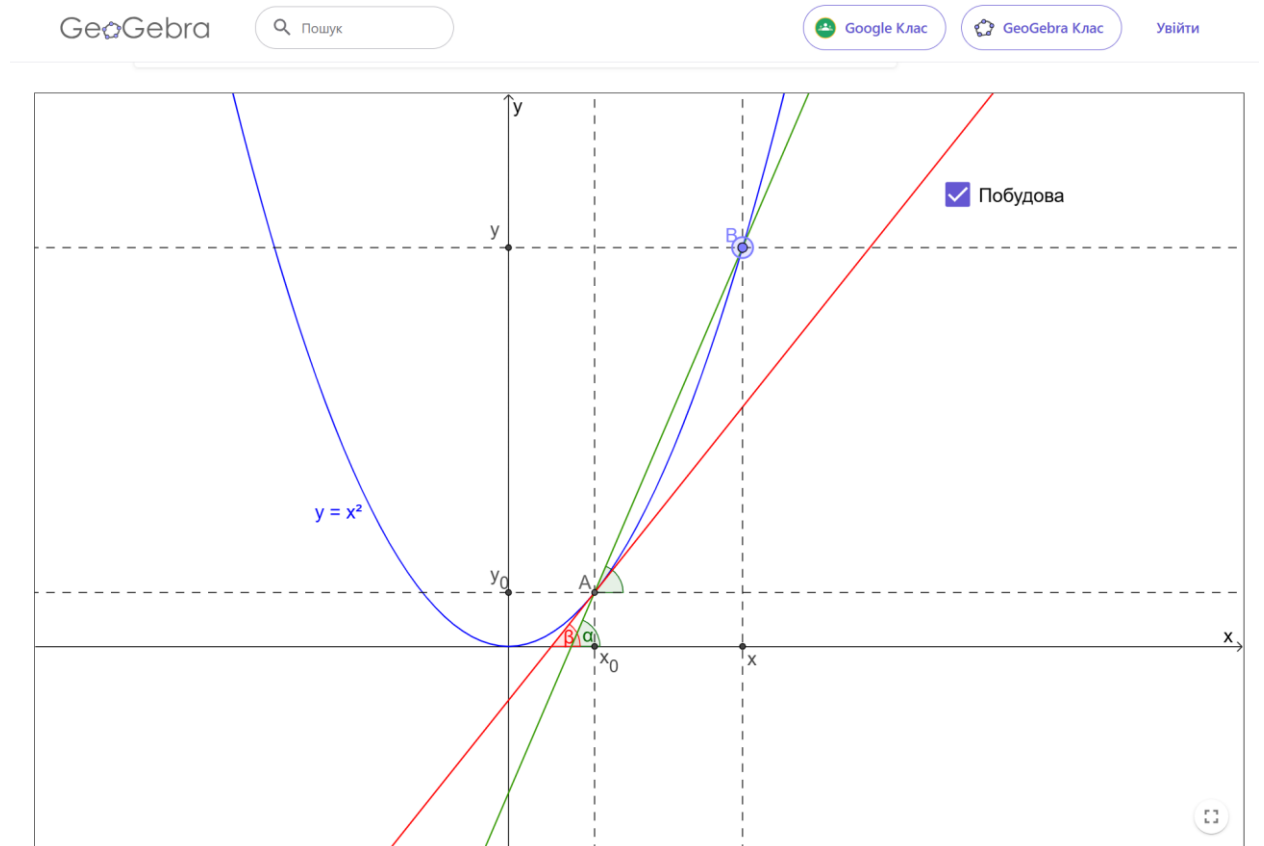


Рис. 2.6. Візуалізація геометричного змісту похідної на платформі GeoGebra

Практичні навички обчислення похідних формувалися через систему послідовних дій: спочатку – розв’язування типових завдань на застосування одного правила диференціювання; далі – комбіновані завдання, що вимагали послідовного застосування декількох правил; потім – диференційовані завдання різних рівнів складності, що дозволяло кожному учню працювати на оптимальному для нього рівні.

Одним з ключових інструментів цифровізації на цьому етапі став аналітичний калькулятор Wolfram Alpha. На початку кожного практичного завдання учні обчислювали похідну традиційним способом (вручну), а потім перевіряли результат за допомогою Wolfram Alpha (рисунок 2.7). У разі

розбіжності результатів учнів спонукали до аналізу своїх обчислень, виявлення помилок та їх усунення. Такий підхід формував навички самоконтролю та відповідальності за якість роботи, а також демонстрував учням можливості та цифрових інструментів.

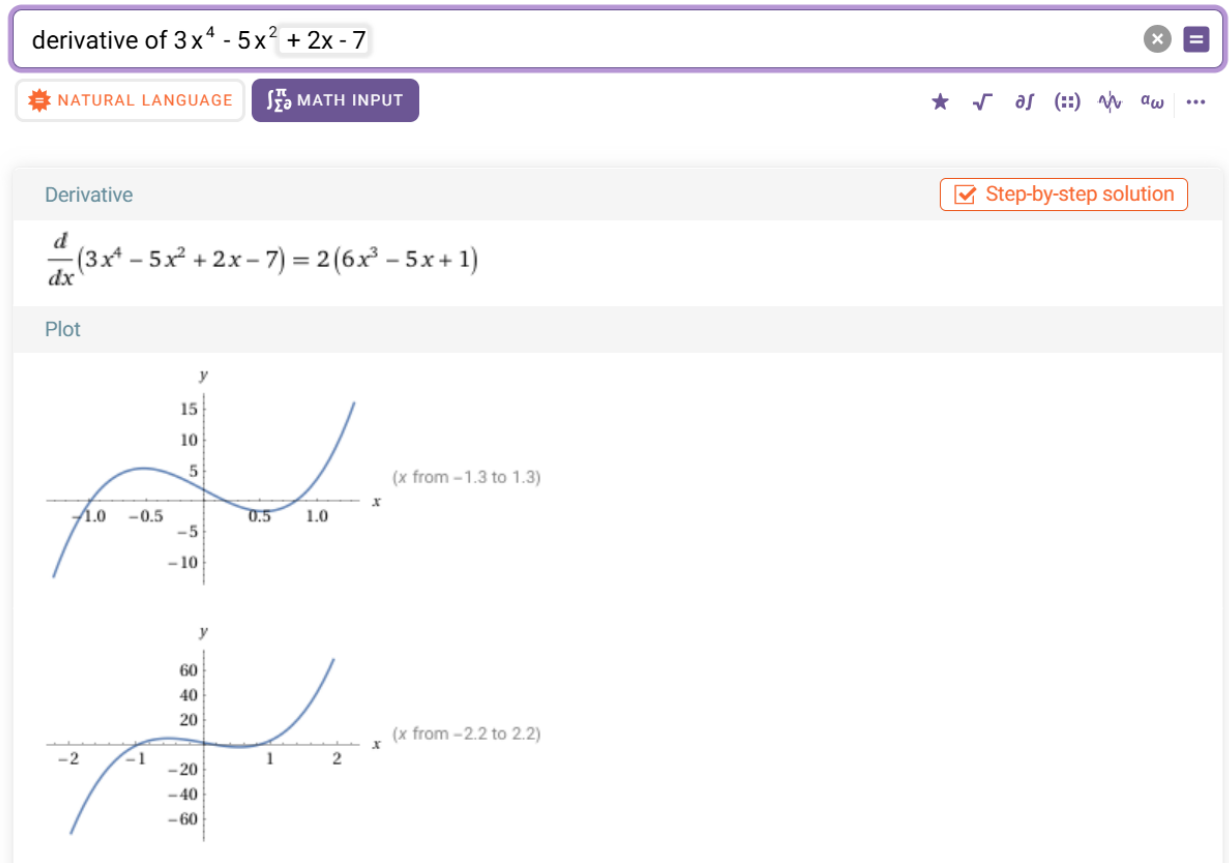


Рис. 2.7. Аналітичний калькулятор Wolfram Alpha (зразок використання)

Для організації групової роботи та колективного обговорення було використано платформу Padlet, на якій учні викладали свої розв'язання типових задач. Однокласники мали змогу коментувати і оцінювати один одного, обговорювати різні підходи до розв'язання однієї задачі, визначати найраціональніший метод. Така форма роботи сприяла формуванню критичного мислення, розвивала комунікативні навички та дозволяла вчителю отримати формувальні дані про рівень розуміння матеріалу без потреби проведення трудомісткого перевірки індивідуальних робіт.

Етап 3. Інтегративно-систематизуючий розглядався як центральний в запропонованій методиці, спрямований на забезпечення цілісного бачення теми через встановлення внутрішніх зв'язків між поняттями похідної, через демонстрацію застосування похідної у різних математичних контекстах та через міжпредметну інтеграцію. Наведемо приклади використаних технологічних прийомів узагальнення знань.

Прийом 1. Побудова концептуальної карти теми здійснювалася як колективний процес. На першому занятті етапу учитель презентував свідомо неповну та частково «помилкову» концептуальну карту теми на інтерактивній дошці. Учні, працюючи в групах по 4-5 осіб, знаходили пропуски, виправляли помилки, додавали нові зв'язки та уточнення. Це завдання вимагало від учнів глибокого розуміння взаємозв'язків між поняттями, критичного мислення та здатності до аргументованої дискусії.

Кінцева версія концептуальної карти була створена в цифровому форматі за допомогою інструменту MindMeister, що дозволило зробити її інтерактивною: кожен елемент карти мав посилання на приклади задач, на графічні представлення, на приклади застосування в реальних ситуаціях. Такий гіпермедійний простір став цінним ресурсом для повторення та систематизації матеріалу впродовж навчання.

Прийом 2. Порівняльний аналіз методів розв'язування однієї задачі полягав у тому, що учням пропонувалась одна задача, яку можна було розв'язати кількома різними способами. Наприклад, задача на знаходження максимуму функції могла бути розв'язана: (а) класичним методом через знаходження критичних точок за допомогою похідної; (б) графічно з використанням GeoGebra; (в) чисельно методом перебору з допоміжною програмою; (г) аналітично через альтернативні формули. Обговорення переваг та недоліків кожного методу, аналіз їхньої застосовності в різних ситуаціях розвивав у учнів гнучкість математичного мислення та розуміння того, що математична задача часто має багато розв'язків.

Прийом 3. Міжпредметна інтеграція через практичні проєкти становила особливо важливу частину інтегративно-систематизуючого етапу. Учні розподілилися на групи (5-6 груп по 5-6 осіб), кожна з яких отримала міжпредметне завдання-проєкт:

Проєкт 1 (фізика): «Використання похідної для моделювання руху. Від кінематики до динаміки». Учні аналізували рух тіл, складали диференціальні рівняння руху, розв'язували їх з використанням похідної та порівнювали теоретичні результати з експериментальними даними, отриманими з відеозапису.

Проєкт 2 (економіка): «Похідна в економіці: від маржинального аналізу до оптимізації прибутку». Учні розв'язували реальні економічні задачі: визначали еластичність попиту для різних товарів, оптимізували витрати виробництва, аналізували беззбитковість підприємств з використанням похідної як інструменту маржинального аналізу.

Проєкт 3 (інформатика): «Гradientний спуск: як машини навчаються. Похідна у штучному інтелекті». Учні вивчали основи машинного навчання, розуміли роль похідної в алгоритмі gradientного спуску, реалізовували цей алгоритм в Python для простої моделі передбачення, проводили експерименти з різними темпами навчання.

Проєкт 4 (біологія/екологія): «Моделювання популяційної динаміки. Похідна в описанні змін чисельності популяцій». Учні складали диференціальні рівняння для моделей росту популяцій, досліджували стабільність екосистем, прогнозували довгострокові зміни.

Проєкт 5 (медицина): «Фармакокінетика: як похідна допомагає медикам. Моделювання концентрації лікарського засобу в організмі». Учні вивчали моделі концентрації ліків у крові, розраховували оптимальні схеми приймання препаратів.

Кожна група мала 2 тижні для виконання свого проєкту. Презентація результатів проводилась у форматі «наукової конференції», де кожна група мала 10-12 хвилин для презентації свого проєкту перед класом і вчителями

відповідних предметів (фізики, економіки, інформатики тощо). Ця форма роботи не лише глибоко закріпила розуміння застосування похідної у різних галузях, але й мотивувала учнів, показуючи реальне значення математичних знань.

Етап 4. Рефлексивно-корекційний спрямований на осмислення учнями своєї навчальної діяльності, виявлення прогалин у розумінні, планування подальшого навчання та корекцію методики викладання на основі отриманих даних.

На даному етапі було проведено низку рефлексивних заходів, зокрема учні писали короткі рефлексивні записи (5-7 хвилин письма) на заданий учителем питання, наприклад: «Що мені найкраще вдалося засвоїти? Які показники успіху я можу назвати?», «З якими аспектами теми я ще маю труднощі? Що саме мене бракує для розуміння?», «Які стратегії навчання виявилися найефективнішими для мене? Чому?» тощо.

Рефлексивні записи збиралися вчителем, аналізувалися, та результати обговорювалися на наступному занятті. Учні, які фіксували однотипні труднощі (наприклад, розуміння правила диференціювання складної функції або застосування похідної до задач оптимізації), об'єднувалися у мініфокус-групи для додаткових консультацій.

Окрім того, на рефлексивно-корекційному етапі було запроваджено практику взаємного оцінювання учнів один одного за допомогою спеціально розробленого чек-листу критеріїв (правильність розв'язання, ясність пояснення, креативність підходу, дотримання математичної мови). Учні обмінювалися контрольними роботами та письмово надавали одне одному зворотний зв'язок, що розвивало в них критичне мислення та комунікативні навички.

Запропонована методика узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв із теми «Похідна та її застосування» представляє собою комплексний підхід, який органічно поєднує компетентнісну спрямованість, цифровізацію освітнього процесу та міжпредметну інтеграцію. Послідовна реалізація

чотирьох взаємопов'язаних етапів – мотиваційно-орієнтувального, операційно-пізнавального, інтегративно-систематизуючого та рефлексивно-корекційного – забезпечила створення умов для свідомого засвоєння учнями не лише теоретичних основ похідної, а й розвитку практичних навичок та метакогнітивних умінь.

Ключовою особливістю розробленої методики є поетапність узагальнення та систематизації знань, яка запобігає фрагментарному розумінню матеріалу й дозволяє учням побудувати цілісну систему знань про похідну як фундаментальне математичне поняття з широким спектром застосування. Використання сучасних цифрових інструментів (GeoGebra, Desmos, Wolfram Alpha, платформи Classtime, Mentimeter, Padlet, MindMeister) не лише активізувало пізнавальну діяльність учнів, але й розвинуло їхню інформаційно-цифрову компетентність, що є надзвичайно актуальним у сучасному освітньому контексті.

Важливо підкреслити, що впровадження міжпредметних проєктів (у галузях фізики, економіки, інформатики, біології та медицини) сприяло формуванню в учнів розуміння універсальної значущості похідної, перетворюючи абстрактне математичне поняття на практичний інструмент для розв'язування реальних проблем. Рефлексивно-корекційний етап, у свою чергу, забезпечив адаптивність методики до індивідуальних потреб учнів та створив середовище для розвитку їхніх саморегуляції й критичного мислення.

Для визначення ефективності розробленої методики та перевірки гіпотези дослідження було проведено контрольний етап експерименту, метою якого став аналіз результатів навчання учнів експериментальної групи та їх порівняння з результатами контрольної групи.

2.3. Аналіз результатів дослідно-експериментальної роботи

На контрольному етапі експерименту проводилась комплексна оцінка ефективності впровадженої методики узагальнення і систематизації знань.

Метою цього етапу було виявити динаміку формування предметних компетентностей, практичних навичок та метакогнітивних умінь учнів, а також оцінити якість засвоєння ними змісту теми «Похідна та її застосування» в експериментальній групі порівняно з контрольною групою, яка навчалася за традиційною методикою.

Після завершення формувального етапу експерименту було повторно проведено комплексну діагностику рівня ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування» за тією ж методикою (за всіма критеріями: когнітивним, практичним та метакогнітивним), що й на констатувальному етапі. Отримані дані представлені у зведеній таблиці 2.4 та рисунку 2.8.

Таблиця 2.4

**Рівні ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів
ліцеїв з теми «Похідна та її застосування» за групами
(контрольний етап)**

	Рівні						Всього
	Високий		Середній		Низький		
	К-ТЬ дітей	%	К-ТЬ дітей	%	К-ТЬ дітей	%	
КГ	4	13,3	14	46,7	12	40,0	30 / 100%
ЕГ	8	25,0	21	65,6	3	9,4	32 / 100 %

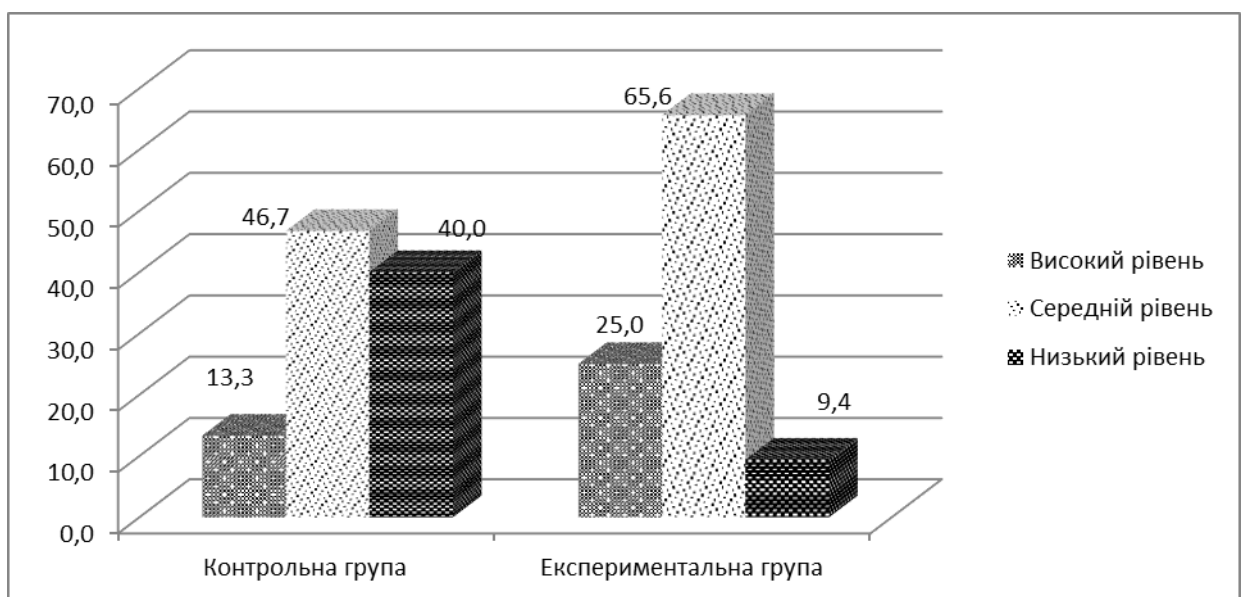


Рис. 2.8. Розподіл учнів за рівнями ефективності узагальнення та систематизації знань на контрольному етапі експерименту

Аналіз даних таблиці 2.4 та рисунка 2.8 засвідчує, що на контрольному етапі у КГ високий рівень засвоєння матеріалу продемонстрували 13,3% учнів. В ЕГ 25,0% учнів досягли високого рівня ефективності узагальнення та систематизації знань, що відображає суттєве підвищення результатів порівняно з констатувальним етапом.

Порівняльні результати діагностики ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування» у експериментальній та контрольній групах на констатувальному та контрольному етапах дослідно-експериментальної роботи представлені в таблиці 2.5 та рисунку 2.9.

Таблиця 2.5

Динаміка рівнів ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів з теми «Похідна та її застосування» у контрольній та експериментальній групах на констатувальному та контрольному етапах дослідження

Рівні	Контрольна група				Експериментальна група			
	до експерименту		після експерименту		до експерименту		після експерименту	
	к-ть дітей	%	к-ть дітей	%	к-ть дітей	%	к-ть дітей	%
Високий	3	10,0	4	13,3	3	12,5	8	25,0
Середній	17	56,7	14	46,7	20	59,4	21	65,6
Низький	10	33,3	12	40,0	9	28,1	3	9,4
Всього	30	100	30	100	32	100	32	100

Результати ЕГ демонструють виражену позитивну динаміку за всіма показниками. Найбільш значущим досягненням стало збільшення частки учнів з високим рівнем засвоєння матеріалу з 12,5% до 25,0%. Це свідчить про те, що впровадження розробленої методики, яка поєднує цифровізацію освітнього процесу, міжпредметну інтеграцію та рефлексивні практики, сприяло повноцінному розкриттю потенціалу найбільш мотивованих старшокласників та забезпечило їм можливість для досягнення глибокого

розуміння теоретичних основ похідної, розвитку практичних навичок та формування метакогнітивних умінь.

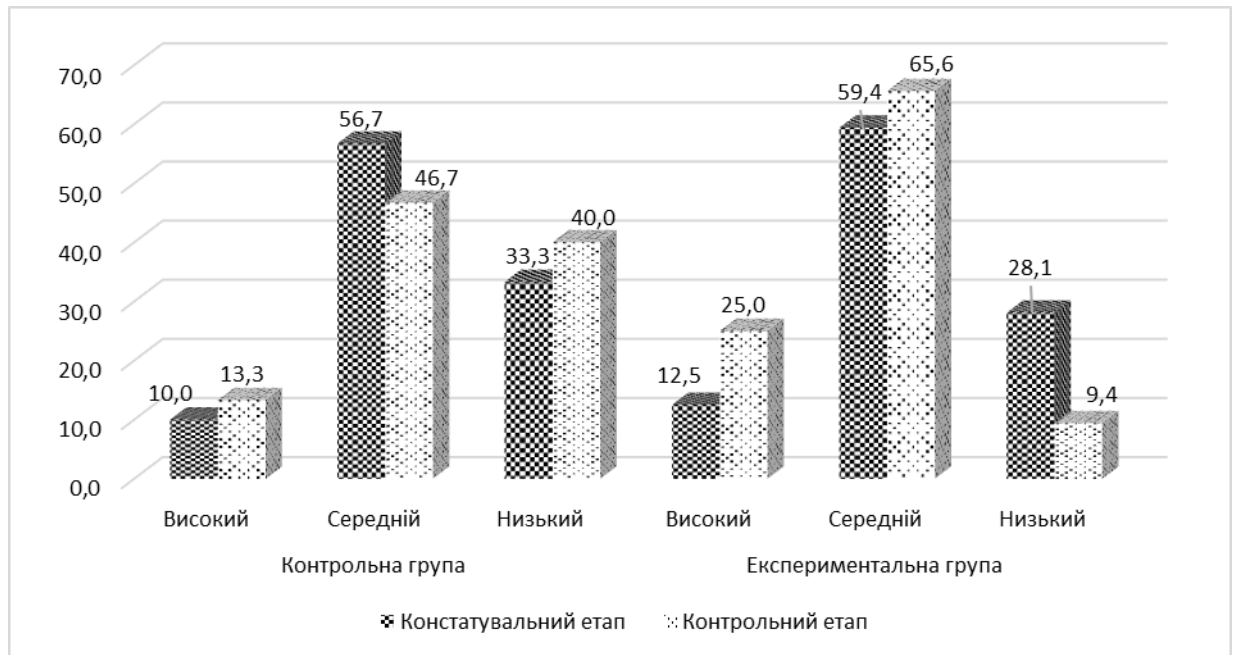


Рис. 2.9. Динаміка розподілу учнів старших класів за рівнями ефективності узагальнення та систематизації знань у експериментальній та контрольній групах

Не менш важливим результатом стало кардинальне скорочення кількості учнів з низьким рівнем засвоєння знань і умінь з 28,1% до 9,4%, це підтверджує ефективність запропонованої методики у подоланні труднощів найбільш відстаючих учнів через диференціацію та індивідуалізацію навчального процесу, використання адаптивних цифрових платформ, а також через систематичну рефлексію та корекцію. Одночасно спостерігалось помірне збільшення частки учнів із середнім рівнем на 6,2%, що свідчить про загальну тенденцію до покращення показників ефективності узагальнення та систематизації знань у всій експериментальній групі.

На противагу цьому, контрольна група, яка навчалася за традиційною методикою, продемонструвала мінімальні зміни у розподілі учнів за рівнями ефективності засвоєння теми.

Найбільш виражені покращення у ЕГ спостерігалися за когнітивним критерієм, де учні продемонстрували суттєве посилення глибини теоретичних

знань про похідну, розуміння геометричного та фізичного сенсу похідної, а також досягнення логічних зв'язків між похідною та іншими математичними поняттями. Це підтверджує ефективність розробленої методики щодо створення умов для свідомого засвоєння математичного змісту теми. Старшокласники не тільки засвоїли формальні означення і правила диференціювання, але й навчилися глибоко розуміти їхню сутність та системно застосовувати їх для розв'язування різноманітних задач.

Значущі позитивні зміни відбулися також за практичним критерієм, що пов'язано з впровадженням диференційованої системи задач різних рівнів складності та міжпредметних проєктів. Учні розвинули навички обчислення похідних, досвід розв'язування прикладних задач, вміння вибирати оптимальні методи розв'язання та обґрунтовувати правильність одержаних результатів. Використання цифрових інструментів (GeoGebra, Wolfram Alpha, Desmos) та платформ для групової роботи (Padlet, MindMeister) суттєво підвищило якість практичної підготовки учнів та розвинуло їхню здатність застосовувати математичні знання в комплексних реальних ситуаціях.

Метакогнітивний критерій також показав помітні покращення завдяки систематичному впровадженню технік узагальнення та систематизації знань, створенню концептуальних карт, проведенню рефлексивних практик та написанню рефлексивних есе.

Отже, дослідно-експериментальна робота підтвердила основну гіпотезу про можливість підвищення ефективності узагальнення та систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування» через цілеспрямоване застосування розробленої комплексної методики.

Висновки до розділу 2

Дослідно-експериментальна робота, у відповідності з гіпотезою і завданнями дослідження, полягала в реалізації та перевірці результативності впровадження розробленої методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування».

Визначено критерії, показники та рівні ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування», які забезпечили комплексну діагностику навчального процесу. До системи діагностики увійшли три основні критерії: когнітивний (обсяг та глибина теоретичних знань про похідну, розуміння логічних зв'язків між похідною та іншими математичними поняттями, знання правил диференціювання), практичний (навички обчислення похідної та розв'язування задач на дослідження функції, вміння розв'язувати прикладні задачі, здатність самостійно вибирати методи розв'язання) та метакогнітивний (здатність структурувати знання через узагальнення, вміння встановлювати міжпредметні зв'язки, рівень розвитку критичного мислення та здатність до рефлексії).

На основі розроблених критеріїв схарактеризовано три рівні ефективності методики узагальнення та систематизації знань: високий, середній та низький. Високий рівень засвідчує глибоке розуміння теоретичного змісту похідної, міцні практичні навички розв'язування різних типів задач та розвинені метакогнітивні вміння. Середній рівень характеризується задовільним засвоєнням теоретичного матеріалу, умінням розв'язувати типові задачі за алгоритмом та частковою готовністю до узагальнення знань. Низький рівень притаманний учням зі значними прогалинами в теоретичних знаннях, труднощами при розв'язуванні навіть типових задач та несформованими навичками систематизації матеріалу.

На констатувальному етапі експериментального дослідження здійснено діагностику початкового рівня ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів 11-х класів (62 особи: ЕГ – 32 учні, КГ – 30 учнів) за допомогою комплексу діагностичних методик (тестування теоретичних знань, структуроване інтерв'ю, контрольна робота, практикум з розв'язування прикладних задач, створення концептуальної карти, рефлексивне есе). Результати засвідчили, що переважна більшість старшокласників демонструє середній рівень ефективності (59,4% в ЕГ та 56,7% в КГ), що свідчить про

наявність певного потенціалу для підвищення якості навчального процесу. Водночас значна частина учнів (28,1% в ЕГ та 33,3% в КГ) має низький рівень ефективності, що вказує на системні проблеми у формуванні як теоретичних знань, так і практичних навичок застосування похідної.

На формувальному етапі експериментального дослідження здійснено практичну реалізацію розробленої методики узагальнення і систематизації знань, яка включала чотири взаємопов'язаних етапи. Впровадження мотиваційно-орієнтувального етапу передбачало актуалізацію попередніх знань учнів через адаптивне тестування на платформі Classtime та формування мотивації через демонстрацію практичної значущості похідної з використанням мультимедійних презентацій і платформи Mentimeter. Реалізація операційно-пізнавального етапу спрямовувалася на формування глибоких теоретичних знань через динамічну візуалізацію в середовищі GeoGebra, використання аналітичного калькулятора Wolfram Alpha для самоконтролю та організацію групової роботи на платформі Padlet. Інтегративно-систематизуючий етап реалізовувався через побудову концептуальних карт у MindMeister, порівняльний аналіз методів розв'язування однієї задачі та виконання міжпредметних проєктів у галузях фізики, економіки, інформатики, біології та медицини. Рефлексивно-корекційний етап забезпечував осмислення учнями своєї навчальної діяльності через рефлексивні записи, взаємне оцінювання та створення електронних портфоліо досягнень.

На контрольному етапі експериментального дослідження зафіксовано значущі позитивні зміни в ЕГ порівняно з КГ за всіма критеріями ефективності методики узагальнення та систематизації знань. В експериментальній групі кількість учнів з високим рівнем ефективності збільшилася з 12,5% до 25,0%, тоді як у контрольній групі зростання було лише з 10,0% до 13,3%. Найбільш вражаючими виявилися зміни за низьким рівнем ефективності: в експериментальній групі кількість таких учнів скоротилася більш ніж утричі – з 28,1% до 9,4%, натомість у контрольній групі спостерігалось погіршення з

33,3% до 40,0%. Найвиразніші покращення відбулися за когнітивним та метакогнітивним критеріями, що підтверджує ефективність впровадження розробленої методики для формування глибокого розуміння теми «Похідна та її застосування», розвитку практичних навичок та метакогнітивних умінь старшокласників.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі представлено теоретико-методичне обґрунтування і результати дослідно-експериментальної перевірки ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування». Результати дослідження дали підстави сформулювати такі висновки:

1) Виокремлено та описано методичні основи формування математичних знань учнів в ліцеях та їх вплив на процес узагальнення знань. До ключових методичних засад віднесено: принцип науковості й доступності; наступність і системність; диференціацію та індивідуалізацію навчання; інтеграцію знань і міжпредметні зв'язки; використання інноваційних технологій навчання; розвиток логічного, критичного і алгоритмічного мислення; методичний вплив на процес узагальнення знань через використання різноманітних дидактичних засобів (таблиці, алгоритми, схеми, концептуальні карти).

2) Розкрито сутність узагальнення і систематизації знань учнів у навчальному процесі. Узагальнення визначено як складний пізнавальний процес, який полягає у виділенні спільних ознак, властивостей або закономірностей серед різних об'єктів, явищ чи понять, що дає змогу об'єднати окремі факти або поняття у більш широкі, узагальнені категорії та сприяє формуванню цілісного й системного розуміння навчального матеріалу. Систематизація визначена як процес упорядкування знань, у ході якого інформація організовується в логічно структуровану систему, що базується на взаємозв'язках між поняттями, фактами та явищами. Встановлено, що ці процеси виконують пізнавальну, практичну та мотиваційну функції в навчанні математики.

3) Визначено критерії, показники та рівні ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв з теми «Похідна та її застосування», які забезпечили комплексну діагностику навчального процесу.

До системи діагностики увійшли три основні критерії: когнітивний (обсяг та глибина теоретичних знань про похідну, розуміння логічних зв'язків між похідною та іншими математичними поняттями, знання правил диференціювання), практичний (навички обчислення похідної та розв'язування задач на дослідження функції, вміння розв'язувати прикладні задачі, здатність самостійно вибирати методи розв'язання) та метакогнітивний (здатність структурувати знання через узагальнення, вміння встановлювати міжпредметні зв'язки, рівень розвитку критичного мислення та здатність до рефлексії). На основі розроблених критеріїв схарактеризовано три рівні ефективності методики узагальнення та систематизації знань: високий, середній та низький.

4) *Експериментально перевірено ефективність розробленої методики в рамках дослідно-експериментальної роботи в закладі загальної середньої освіти.* На констатувальному етапі здійснено діагностику початкового рівня ефективності методики узагальнення і систематизації знань учнів за допомогою комплексу діагностичних методик. На формувальному етапі експериментального дослідження здійснено практичну реалізацію розробленої методики узагальнення і систематизації знань, яка включала чотири взаємопов'язаних етапи.

На контрольному етапі експериментального дослідження зафіксовано значущі позитивні зміни в ЕГ порівняно з КГ за всіма критеріями ефективності методики узагальнення та систематизації знань. В експериментальній групі кількість учнів з високим рівнем ефективності збільшилася з 12,5% до 25,0%, тоді як у контрольній групі зростання було лише з 10,0% до 13,3%. Найбільш вражаючими виявилися зміни за низьким рівнем ефективності: в експериментальній групі кількість таких учнів скоротилася більш ніж утричі – з 28,1% до 9,4%, натомість у контрольній групі спостерігалось погіршення з 33,3% до 40,0%. Найвиразніші покращення відбулися за когнітивним та метакогнітивним критеріями, що підтверджує ефективність впровадження розробленої методики для формування глибокого розуміння теми «Похідна та

її застосування», розвитку практичних навичок та метакогнітивних умінь старшокласників.

Доведена ефективність експериментальної методики дозволяє рекомендувати її для широкого впровадження в закладах загальної середньої освіти як перспективний шлях модернізації системи навчання математики відповідно до викликів сучасної освіти та потреб суспільства у формуванні математично грамотної молоді з розвиненим аналітичним мисленням, здатністю до узагальнення знань та їх застосування в різних предметних галузях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. 2014. (міжнародний стандарт).
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики. К.: Освіта, 2019.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика. Профільний рівень: підручник для 11 класу. К.: Освіта, 2020. С. 45–78.
4. Бевз Г. П., Сакун В. В. Методика викладання математики у старшій школі. Київ: Видавничий центр «Академія», 2014.
5. Беляєва Л. С. Інтерактивні методи навчання математики: теорія і практика. Львів: Видавництво ЛНУ, 2016.
6. Бондаренко В. І. Математика та методи навчання в сучасній школі. Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2013.
7. Вишневський О. В. Теоретичні основи сучасної педагогіки. Київ: Знання, 2017.
8. Давидов В. В. Теорія розвивального навчання. К.: Педагогіка, 2000.
9. Єршова А. П., Голобородько В. В. Математичний аналіз: похідна та її застосування. Харків: Ранок, 2019. С. 112–135.
10. Іваницький І. О. Використання комп'ютерних технологій у викладанні математики. Тернопіль: Навчальна книга, 2017. С. 65–80.
11. Іваницький І. О. Психолого-педагогічні основи навчання математики. Львів: Світ, 2010.
12. Іванова О. В. Методика викладання математики в старшій школі. Київ: Освіта, 2018.
13. Капіносов А. М. Методика навчання математики у профільній школі. К.: Літера, 2016.
14. Капіносов А. Я. Математичний аналіз: Навчальний посібник. К.: Центр навчальної літератури, 2016. 384 с.
15. Костриця Л. В. Методика навчання математики у старшій школі. К.: Либідь, 2018. С. 89–102.

16. Костриця Л. В. Формування математичних компетентностей учнів ліцеїв. Миколаїв: МНУ ім. В. О. Сухомлинського, 2017.
17. Кузьмін С. П. Психолого-педагогічні основи навчання математики. Харків: Ранок, 2019.
18. Кузьмінов В. О. Методика викладання математики в школах України: проблеми і перспективи розвитку. Київ: Освітянська книга, 2015.
19. Левченко М. І. Використання похідної у прикладних задачах та штучному інтелекті. *Матеріали конференції "Інновації в освіті"*, 2021. С. 58-62.
20. Лернер І. Я. Процес навчання та його закономірності. Х.: Основа, 2005.
21. Ляшенко О. І. Компетентнісний підхід у навчанні математики: теорія і практика. К.: Інститут педагогіки НАПН України, 2019.
22. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика. Профільний рівень: підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2019. 320 с.
23. Назаренко О. В. Методика навчання математики у вищій школі. Харків: Ранок, 2018.
24. Онопрієнко О. В. Системно-діяльнісний підхід у сучасній освіті. К.: Педагогічна думка, 2015.
25. Остроменко В. М., Попович Н. В. Методика навчання математики в середніх школах. Київ: НВП "Освітні технології", 2018.
26. Петренко С. М. Інноваційні технології у викладанні математики. Київ: Либідь, 2015.
27. Петрова Н. І. Узагальнення знань у процесі навчання математики. *Журнал "Педагогічні ідеї"*. 2020. №4, С. 35-40.
28. Саутіна Н. П. Методичні засади узагальнення та систематизації знань з математики. *Математика в школі*. 2021. №6. С. 12–17.
29. Семенова З. І. Розвиток міжпредметних компетентностей учнів у процесі вивчення математичного аналізу. *Математика в школах України*. 2021. № 2. С. 12–18.

30. Ситник В. І. Міжпредметні зв'язки в системі математичної освіти. Запоріжжя: ЗНУ, 2019.
31. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М. Методика навчання математики в старшій школі: навчальний посібник. К.: Видавничий дім «Слово», 2018. 296 с.
32. Ткаченко Л. М. Психолого-педагогічні умови формування логічного мислення учнів. Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2020.
33. Черкасов В. І. Математика і штучний інтелект: навчальний посібник. К.: Наука, 2022. С. 79–94.
34. Шапіро О. В. Міжпредметні зв'язки у викладанні точних наук. Львів: Світ, 2021. С. 153–168.
35. Шевченко А. П. Цифрові технології у навчанні математики. Київ: Освіта України, 2021.
36. Шкваренко В. І. Системно-діяльнісний підхід у навчанні математики. Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2017.
37. Яковенко Н. В. Методика узагальнення та систематизації знань у навчанні математики. Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2016.

ДОДАТКИ

Додаток А

Методика тестування теоретичних знань з теми «Похідна та її застосування»

Тема: "Похідна та її застосування"

ІНСТРУКЦІЯ ДЛЯ ВЧИТЕЛЯ

Мета тестування

Діагностика рівня засвоєння теоретичних знань учнів 10 класу з теми "Похідна та її застосування" за таксономією Блума (знання, розуміння, застосування, аналіз).

Структура тесту

Частина А: 10 завдань з вибором однієї правильної відповіді (№1-10)

Частина Б: 5 завдань на встановлення відповідності (№11-15)

Частина В: 5 завдань відкритого типу з короткою відповіддю (№16-20)

Загальна кількість завдань: 20

Максимальна кількість балів: 20 (по 1 балу за кожне завдання)

Час виконання

45 хвилин (один урок)

Умови проведення

Тест виконується в письмовій формі

Учні працюють самостійно, без допоміжних матеріалів

Дозволяється використовувати чернетку

Калькулятор не використовується

Система оцінювання

Кількість балів за правильну відповідь:

Частина А (№1-10): 1 бал за кожне завдання

Частина Б (№11-15): 1 бал за повністю правильну відповідність

Частина В (№16-20): 1 бал за правильну відповідь

Шкала переведення балів у рівні:

Високий рівень: 17-20 балів (85-100%)

Середній рівень: 11-16 балів (55-80%)

Низький рівень: 0-10 балів (менше 55%)

Шкала переведення в оцінки (за бажанням вчителя):

18-20 балів — 12 балів (відмінно)

15-17 балів — 10-11 балів (добре)

11-14 балів — 7-9 балів (задовільно)

0-10 балів — 1-6 балів (незадовільно)

Інструкція з перевірки

Частина А: За кожну правильну відповідь — 1 бал. Неправильна відповідь або відсутність відповіді — 0 балів.

Частина Б: 1 бал виставляється тільки за повністю правильно встановлену відповідність. Якщо є хоча б одна помилка — 0 балів.

Частина В: 1 бал за правильну відповідь. Допускаються різні форми запису математично еквівалентних відповідей.

БЛАНК ТЕСТУ ДЛЯ УЧНІВ

ІБ учня: _____

Клас: _____ **Дата:** _____

ІНСТРУКЦІЯ ДЛЯ УЧНІВ

Тест містить 20 завдань трьох типів. Уважно читайте умову кожного завдання.

Частина А (№1-10): оберіть один правильний варіант відповіді.

Частина Б (№11-15): встановіть відповідність між поняттями.

Частина В (№16-20): запишіть коротку відповідь.

Час виконання: 45 хвилин. Максимальна кількість балів: 20.

ЧАСТИНА А

Завдання з вибором однієї правильної відповіді (1-10)

1. Похідна функції в точці визначається як:

- А) значення функції в цій точці
- Б) границя відношення приросту функції до приросту аргументу
- В) кутовий коефіцієнт прямої
- Г) швидкість руху точки

2. Геометричний зміст похідної полягає в тому, що $f'(x_0)$ дорівнює:

- А) довжині дотичної до графіка функції
- Б) кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці x_0
- В) площі під графіком функції
- Г) значенню функції в точці x_0

3. Чому дорівнює похідна константи ($C' =$)?

- А) 0
- Б) 1
- В) C
- Г) x

4. Похідна функції $f(x) = x^5$ дорівнює:

- А) $5x^4$
- Б) x^4
- В) $5x^6$
- Г) $x^6/6$

5. Яка формула виражає правило диференціювання суми функцій?

- А) $(u + v)' = u' + v'$
- Б) $(u + v)' = u' \cdot v'$
- В) $(u + v)' = u'v + uv'$
- Г) $(u + v)' = u'/v'$

6. Похідна добутку двох функцій обчислюється за формулою:

- А) $(uv)' = u'v'$
- Б) $(uv)' = u'v + uv'$
- В) $(uv)' = u' + v'$
- Г) $(uv)' = (u' + v')/2$

7. Чому дорівнює похідна функції $f(x) = \sin x$?

- А) $\cos x$
- Б) $-\cos x$
- В) $-\sin x$
- Г) $\operatorname{tg} x$

8. Фізичний зміст похідної координати по часу — це:

- А) прискорення
- Б) швидкість
- В) переміщення
- Г) траєкторія

9. Похідна функції $f(x) = e^x$ дорівнює:

- А) e^x
- Б) xe^{x-1}
- В) $e^x \ln e$
- Г) 1

10. Якщо $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$, то $f'(x)$ дорівнює:

- А) $6x + 2$
- Б) $3x + 2$

В) $6x^2 + 2x$

Г) $6x - 5$

ЧАСТИНА Б**Завдання на встановлення відповідності (11-15)****11. Встановіть відповідність між функцією та її похідною:**

Функція	Похідна
1) $f(x) = x^3$	А) $3x^2$
2) $f(x) = \cos x$	Б) $-\sin x$
3) $f(x) = \ln x$	В) $1/x$
4) $f(x) = \sqrt{x}$	Г) $1/(2\sqrt{x})$
	Д) $2x$

Відповідь: 1-, 2-, 3-, 4-**12. Встановіть відповідність між правилом диференціювання та його формулою:**

Правило	Формула
1) Похідна суми	А) $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$
2) Похідна добутку	Б) $(u + v)' = u' + v'$
3) Похідна частки	В) $(uv)' = u'v + uv'$
4) Похідна складної функції	Г) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
	Д) $(u - v)' = u' - v'$

Відповідь: 1-, 2-, 3-, 4-**13. Встановіть відповідність між функцією та значенням її похідної в точці $x = 1$:**

Функція	Значення похідної в точці $x = 1$
1) $f(x) = x^2$	А) 1
2) $f(x) = x^3$	Б) 2
3) $f(x) = 2x$	В) 3
4) $f(x) = x$	Г) 4
	Д) 0

Відповідь: 1-, 2-, 3-, 4-**14. Встановіть відповідність між поняттям та його означенням:**

Поняття	Означення
1) Дотична до графіка	А) Пряма, що має з графіком одну спільну точку в околі точки дотику
2) Похідна функції	Б) Границя відношення $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$
3) Диференціювання	В) Значення похідної в конкретній точці
4) Швидкість зміни функції	Г) Процес знаходження похідної
	Д) Друга похідна функції

Відповідь: 1-, 2-, 3-, 4-

15. Встановіть відповідність між графіком функції та знаком її похідної на проміжку:

Поведінка функції	Знак похідної
1) Функція зростає	А) $f'(x) > 0$
2) Функція спадає	Б) $f'(x) < 0$
3) Функція має максимум	В) $f'(x) = 0$
4) Функція стала	Г) $f'(x)$ змінює знак з + на -
	Д) $f'(x)$ не існує

Відповідь: 1-, 2-, 3-, 4-

ЧАСТИНА В

Завдання з короткою відповіддю (16-20)

16. Обчисліть похідну функції $f(x) = 4x^3 - 6x + 1$.

Відповідь: $f'(x) =$ _____

17. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 3x$ в точці $x_0 = 2$.

Відповідь: $k =$ _____

18. Тіло рухається за законом $s(t) = 2t^3 - 5t$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах). Знайдіть швидкість тіла в момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: $v(2) =$ _____ м/с

19. Обчисліть похідну функції $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$.

Відповідь: $f'(x) =$ _____

20. Знайдіть похідну функції $f(x) = (3x - 1)^4$.

Відповідь: $f'(x) =$ _____

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ТЕСТУВАННЯ

Бланк для вчителя

ПІБ учня	Частина А (0-10)	Частина Б (0-5)	Частина В (0-5)	Всього (0-20)	Рівень	%

Рівні: В — високий, С — середній, Н — низький

Статистичний звіт класу:

Високий рівень (17-20 балів): _____ учнів (____%)

Середній рівень (11-16 балів): _____ учнів (____%)

Низький рівень (0-10 балів): _____ учнів (____%)

Середній бал класу: _____

Якість знань (високий + середній рівні): _____%

Аналіз типових помилок:

Частина А: _____

Частина Б: _____

Частина В: _____

Рекомендації щодо корекційної роботи:

Дата проведення тестування: _____

Вчитель: _____

КОНТРОЛЬНА РОБОТА З МАТЕМАТИКИ

Тема: "Похідна та її застосування"

ІНСТРУКЦІЯ ДЛЯ ВЧИТЕЛЯ**Мета контрольної роботи**

Діагностика рівня сформованості практичних навичок застосування похідної для розв'язування математичних та прикладних задач у учнів 10 класу.

Структура контрольної роботи

Завдання №1-2: Обчислення похідних функцій різних типів (базовий рівень) — по 2 бали

Завдання №3-4: Знаходження рівняння дотичної до графіка функції (середній рівень) — по 3 бали

Завдання №5-6: Дослідження функції на монотонність та екстремуми (середній рівень) — по 3 бали

Завдання №7: Задача на оптимізацію (високий рівень) — 4 бали

Завдання №8: Прикладна задача з реальним контекстом (високий рівень) — 4 бали

Загальна кількість завдань: 8

Максимальна кількість балів: 24

Розподіл балів за рівнями складності:

Базовий рівень (№1-2): 4 бали (2+2)

Середній рівень (№3-6): 12 балів (3+3+3+3)

Високий рівень (№7-8): 8 балів (4+4)

Час виконання

90 хвилин (2 навчальні години)

Умови проведення

Контрольна робота виконується в письмовій формі

Учні працюють самостійно

Дозволяється використовувати чернетку

Калькулятор можна використовувати для арифметичних обчислень

Необхідно показувати повний хід розв'язання

Система оцінювання

Критерії оцінювання кожного завдання:

Базовий рівень (завдання №1-2, по 2 бали):

2 бали — правильне розв'язання з повним обґрунтуванням

1 бал — правильний підхід, але є обчислювальні помилки або неповне оформлення

0 балів — неправильне розв'язання або відсутність розв'язання

Середній рівень (завдання №3-6, по 3 бали):

3 бали — правильне та повне розв'язання

2 бали — правильний метод, незначні помилки в обчисленнях або неповне розв'язання

1 бал — частково правильний підхід, але значні помилки

0 балів — неправильне розв'язання або відсутність розв'язання

Високий рівень (завдання №7-8, по 4 бали):

4 бали — повне правильне розв'язання з обґрунтуванням, правильна відповідь

3 бали — правильний метод, але є помилки в обчисленнях; відповідь не зовсім точна

2 бали — правильно розпочато розв'язання, але не доведено до кінця або є суттєві помилки

1 бал — є спроба розв'язання, правильно зрозумілі окремі елементи задачі

0 балів — неправильне розв'язання або відсутність розв'язання

Шкала переведення балів у рівні:

Високий рівень: 20-24 бали (понад 80%)

Правильне розв'язання всіх базових і середніх завдань

Успішне виконання принаймні одного завдання високого рівня

Середній рівень: 12-19 балів (50-79%)

Правильне розв'язання більшості базових і середніх завдань

Можливі помилки у завданнях високого рівня

Низький рівень: 0-11 балів (менше 50%)

Значні труднощі навіть з базовими завданнями

Шкала переведення в оцінки (за 12-бальною системою):

22-24 бали — 12 балів (відмінно)

20-21 бал — 11 балів (відмінно)

18-19 балів — 10 балів (добре)

15-17 балів — 9 балів (добре)

13-14 балів — 8 балів (добре)

12 балів — 7 балів (задовільно)

10-11 балів — 6 балів (задовільно)

8-9 балів — 5 балів (задовільно)

6-7 балів — 4 бали (незадовільно)

4-5 балів — 3 бали (незадовільно)

2-3 бали — 2 бали (незадовільно)

0-1 бал — 1 бал (незадовільно)

Рекомендації щодо перевірки

Оцінюйте не тільки правильність відповіді, а й логіку розв'язання

Враховуйте правильність використання математичних методів

Оцінюйте якість оформлення роботи (чіткість запису, послідовність)

При обчислювальних помилках, які не впливають на метод розв'язання, знімайте не більше 1 балу

Якщо учень використав альтернативний правильний метод — оцінюйте за повною шкалою

БЛАНК КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ДЛЯ УЧНІВ

ПІБ учня: _____

Клас: _____ Варіант: ____ Дата: _____

ІНСТРУКЦІЯ ДЛЯ УЧНІВ

Контрольна робота містить 8 завдань різного рівня складності. Виконуйте завдання послідовно, показуючи повний хід розв'язання.

Оформлення роботи:

Записуйте номер завдання

Показуйте всі проміжні обчислення

Чітко виділяйте відповідь

Час виконання: 90 хвилин

Максимальна кількість балів: 24

ВАРІАНТ 1

БАЗОВИЙ РІВЕНЬ (по 2 бали)

Завдання 1. Знайдіть похідну функції:

а) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 2$

б) $g(x) = (x^3 + 1)(2x - 3)$

Завдання 2. Обчисліть похідну функції:

а) $y = \sin 2x + \cos x$

б) $y = e^x \cdot \ln x$

СЕРЕДНІЙ РІВЕНЬ (по 3 бали)

Завдання 3. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Завдання 4. Знайдіть точки графіка функції $f(x) = x^2 - 4x + 5$, в яких дотична паралельна прямій $y = 2x + 1$.

Завдання 5. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Завдання 6. Дослідіть функцію $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на екстремум. Знайдіть точки екстремуму та екстремальні значення функції.

ВИСОКИЙ РІВЕНЬ (по 4 бали)

Завдання 7. Знайдіть два додатних числа, сума яких дорівнює 20, а добуток є найбільшим.

Завдання 8. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$, де s — шлях у метрах, t — час у секундах. Знайдіть:

- а) швидкість тіла в момент часу $t = 3$ с;
- б) у які моменти часу тіло зупинялося (швидкість дорівнювала нулю);
- в) прискорення тіла в момент часу $t = 2$ с.

БЛАНК ОЦІНЮВАННЯ

Індивідуальна картка оцінювання

ПІБ учня: _____

Клас: _____ Варіант: _____

Завдання	Макс. бал	Отримано балів	Примітки
1	2		
2	2		
3	3		
4	3		
5	3		
6	3		
7	4		
8	4		
ВСЬОГО	24		

Рівень сформованості навичок: _____ (високий/середній/низький)

Оцінка за 12-бальною шкалою: _____

Підпис вчителя: _____ Дата перевірки: _____

Ситуаційні завдання (кейси) для методики №4

Кейс 1 (фізичний контекст): Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$, де s - координата в метрах, t - час у секундах. Необхідно визначити: а) швидкість і прискорення тіла в момент часу $t=2$ с; б) у які моменти часу тіло змінює напрямок руху; в) побудувати графіки переміщення, швидкості та прискорення; г) інтерпретувати отримані результати з фізичної точки зору.

Кейс 2 (економічний контекст): Підприємство виробляє продукцію, функція загальних витрат якої задається формулою $C(q) = 0,1q^3 - 2q^2 + 15q + 100$, де q - кількість одиниць продукції. Необхідно: а) знайти функцію граничних витрат; б) визначити обсяг виробництва, при якому граничні витрати мінімальні; в) проаналізувати економічну доцільність збільшення виробництва; г) надати рекомендації керівництву підприємства.

Кейс 3 (технічний контекст): При проектуванні резервуара циліндричної форми об'ємом 1000 м^3 потрібно мінімізувати витрати матеріалу на його виготовлення. Необхідно: а) скласти функцію площі поверхні резервуара; б) знайти оптимальні розміри (радіус основи та висоту); в) обчислити мінімальну площу поверхні; г) порівняти з іншими можливими варіантами розмірів.

Критерії оцінювання есе

1. Глибина рефлексії та самоаналізу (0-4 бали):
 - 4 бали: глибокий, детальний аналіз власного досвіду навчання;
 - 3 бали: достатньо детальний самоаналіз;
 - 2 бали: поверхневий самоаналіз;
 - 1 бал: мінімальна рефлексія;
 - 0 балів: відсутність рефлексії.
 2. Усвідомлення взаємозв'язків між математичними поняттями (0-3 бали):
 - 3 бали: чітко артикульовано зв'язки між поняттями;
 - 2 бали: зв'язки згадано частково;
 - 1 бал: слабке усвідомлення зв'язків;
 - 0 балів: зв'язки не усвідомлено.
 3. Розуміння практичного значення та застосувань похідної (0-3 бали):
 - 3 бали: наведено конкретні приклади застосування в різних сферах;
 - 2 бали: загальне розуміння практичного значення;
 - 1 бал: фрагментарне розуміння;
 - 0 балів: не розуміє практичного значення.
 4. Критичність мислення (здатність аналізувати труднощі, помилки) (0-3 бали):
 - 3 бали: критично аналізує власні труднощі та стратегії їх подолання;
 - 2 бали: частковий критичний аналіз;
 - 1 бал: слабкий критичний аналіз;
 - 0 балів: відсутність критичного аналізу.
 5. Здатність до планування навчальної діяльності (0-2 бали):
 - 2 бали: конкретні плани щодо подальшого навчання;
 - 1 бал: загальні наміри;
 - 0 балів: відсутність планування.
 6. Зрілість і самостійність суджень (0-3 бали):
 - 3 бали: самостійні, зрілі судження;
 - 2 бали: частково самостійні судження;
 - 1 бал: несамостійні судження;
 - 0 балів: відсутність власних суджень.
- Максимальна кількість балів за есе – 18. Рівні визначалися так:
- високий рівень: 14-18 балів (розвинені метакогнітивні вміння, критичне мислення);
 - середній рівень: 9-13 балів (часткова здатність до рефлексії);
 - низький рівень: 0-8 балів (слабкі метакогнітивні вміння).