

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**О. В. МАЙБОРОДА, І. В. ПЕТКОВ,
Н. О. РОМАНЧУК, С. С. КОВАЛЬ**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

У трьох частинах

Частина 1

Рекомендовано Вченою радою НУК



2025

УДК 51(075)

В95

Автори:

О. В. Майборода, канд. екон. наук, доцент кафедри фізики та математики НУК;
І. В. Петков, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фізики та математики НУК;
Н. О. Романчук, канд. пед. наук, доцент кафедри фізики та математики НУК;
С. С. Коваль, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фізики та математики НУК

Рецензенти:

Е. А. Лисенков, д-р фіз.-мат. наук, зав. кафедри фізики та математики ЧНУ;
А. В. Обрубов, д-р техн. наук, доцент кафедри суднових електроенергетичних систем НУК;
О. А. Гогоренко, канд. техн. наук, доцент, зав. кафедри двигунів внутрішнього згоряння, установок та технічної експлуатації НУК

*Рекомендовано Вченою радою НУК ім. адмірала Макарова
як навчальний посібник
(протокол № 06 від 28.06.2024 р.)*

Вища математика : навчальний посібник : у 3 ч. Ч. 1 / О. В. Майборода,
В95 І. В. Петков, Н. О. Романчук, С. С. Коваль. – Миколаїв : НУК, 2025. –
180 с.

ISBN 978-966-321-483-2

Вміщено теоретичні відомості, приклади розв'язання задач та індивідуальні завдання для самостійної роботи з розділів вищої математики: «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Аналітична геометрія на площині та в просторі».

Призначено для студентів денної та заочної форм навчання та буде корисний викладачам закладів вищої освіти.

УДК 51(075)

© О. В. Майборода, І. В. Петков,
Н. О. Романчук, С. С. Коваль, 2025

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2025

ISBN 978-966-321-483-2

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ I. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.....	6
§ 1. Матриці та дії над ними.....	6
§ 2. Визначники.....	10
§ 3. Обернена матриця. Ранг матриці.....	16
§ 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).....	21
§ 5. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	24
РОЗДІЛ II. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.....	34
§ 1. Декартова система координат.....	34
§ 2. Вектори.....	35
§ 3. Лінійна незалежність векторів, розклад вектора по базису.....	39
§ 4. Скалярний добуток векторів.....	46
§ 5. Векторний добуток векторів.....	47
§ 6. Мішаний добуток трьох векторів. Подвійний векторний добуток.....	49
§ 7. Застосування векторної алгебри до розв'язання фізичних задач.....	51
РОЗДІЛ III. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРИ.....	54
§ 1. Системи координат на площині та в просторі.....	54
§ 2. Основні задачі аналітичної геометрії на площині та в просторі.....	58

§ 3. Лінії на площині. Поверхні та лінії в просторі.....	63
§ 4. Пряма на площині.....	65
§ 5. Криві другого порядку.....	69
§ 6. Площина.....	79
§ 7. Пряма в просторі.....	86
§ 8. Поверхні другого порядку.....	105
§ 9. Деякі криві та поверхні, що зустрічаються в механіці.....	107
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	118
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	177

ВСТУП

Лінійна та векторна алгебра є основою багатьох розділів курсу вищої математики, а також широко використовується під час розв'язання прикладних задач природничо-наукового, ІТ та інженерно-економічного напрямку.

У даному посібнику розглянуто розділи «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Аналітична геометрія на площині та в просторі». Нумерація окрема в кожному розділі по параграфах.

Значна увага приділяється питанням, які знаходять застосування у фізиці та теоретичній механіці.

У кінці наведено індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів, а також зразок їх виконання – «нульовий варіант».

Індивідуальні завдання містять 15 задач для 20-ти варіантів.

РОЗДІЛ I

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Матриці та дії над ними

Матрицею розмірності $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, що складається з m рядків та n стовпчиків.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

a_{ij} – загальний елемент матриці, де i – номер рядка, j – номер стовпчика, на перетині яких стоїть даний елемент ($i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$).

Якщо $m = n$, то матриця називається *квадратною матрицею n -го порядку*.

Сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ називається *головною діагоналлю* квадратної матриці. Елементи $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{2(n-1)}, a_{1n}$ утворюють *побічну діагональ* матриці.

Спеціальні види матриць:

1. Матриця (вектор) – стовпчик

$$B_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

2. Матриця (вектор) – рядок

$$C_{1 \times n} = (c_{11} \quad c_{12} \quad \dots \quad c_{1n}).$$

3. Діагональна

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Одинична

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Права, або верхня трикутна

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

6. Трапецевидна (ступінчаста)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

7. Симетрична

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Операції над матрицями

1. *Транспонування* – заміна рядка стовпчиками з тими ж номерами.

Матрицею, транспонованою до (1.1), буде матриця

$$(A_{m \times n})^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

2. *Додавання*. Додавати можна матриці тільки однієї розмірності

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}, \quad A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (c_{ij}),$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

3. Множення на число:

$$A = (a_{ij}), \lambda - \text{деяке число},$$

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}).$$

4. Множення матриць. *Добутком* матриці $A_{m \times k}$ і матриці $A_{k \times n}$ називається матриця $C_{m \times n}$, така, що кожен елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпчика матриці B

$$A_{m \times k} \cdot B_{k \times n} = C_{m \times n}, \quad c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is} b_{sj}, \quad (i = 1 \dots m, j = 1 \dots n).$$

Добуток матриці A на B існує, якщо кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B . Такі матриці називаються *узгодженими*.

Властивості операцій над матрицями:

$$1. \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

$$2. \lambda(\mu A) = (\lambda \mu) A.$$

$$3. A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

$$4. A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

$$5. \lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B).$$

$$6. A \cdot E = E \cdot A = A.$$

7. Комутативний закон множення, зазвичай кажучи, не виконується, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Приклад: знайти матрицю $C = -4B + (A \cdot B)^T$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$-4B = \begin{pmatrix} -16 & -16 & -4 \\ -8 & -12 & -4 \\ -8 & -4 & 16 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2 & 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 28 & 24 & -15 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 4 & 28 & 8 \\ 2 & 24 & 6 \\ 0 & -15 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тоді шукана матриця C :

$$C = \begin{pmatrix} -16 & -16 & -4 \\ -8 & -12 & -4 \\ -8 & -4 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 28 & 8 \\ 2 & 24 & 6 \\ 0 & -15 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 4 \\ -6 & 12 & 2 \\ -8 & -19 & 13 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Визначники

Будь-якій квадратній матриці A n -го порядку ставиться у відповідність деяке число, що називається *визначником n -го порядку цієї матриці (детермінантом)*.

$$\Delta A, \det A, |A|.$$

Визначником n -го порядку називається число, яке дорівнює алгебраїчній сумі $n!$ членів, кожен з яких є добутком n елементів матриці, узятих по одному з кожного рядка і кожного стовпчика, причому знак кожного члена визначається як $(-1)^{r(j)}$, де $r(j)$ – число інверсій у перестановці j із номерів стовпчиків елементів матриці, якщо при цьому номери рядків записані в порядку зростання:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j)} (-1)^{r(j)} \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

На практиці обчислюють визначники за іншими формулами.

Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Приклад:

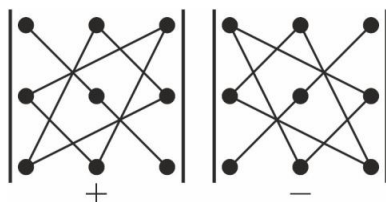
$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - (-3 \cdot 5) = 1.$$

Визначник третього порядку обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Схема обчислення (метод трикутників):



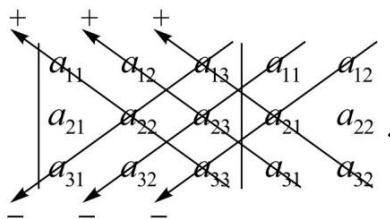
Приклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 6 + 7 \cdot 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \cdot (-4) - (-4) \cdot 4 \cdot 0 - 7 \cdot (-1) \cdot 6 - 5 \cdot 3 \cdot 2 = 72.$$

Правило Саррюса

Складемо допоміжну таблицю, допишемо з правого боку два перших стовпчика, не змінюючи порядку,



Аналогічно можна дописувати знизу два перших рядки.

Розглянемо поняття, необхідні для обчислення визначників більш високих порядків.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, який отримується із даного шляхом викреслювання i -го рядка та j -го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається мінор M_{ij} , узятий із знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема (про розклад визначника). *Визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка на їх алгебраїчні доповнення.*

$$\Delta = \sum_{s=1}^n a_{is} A_{is} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

(розклад визначника за елементами i -го рядка).

$$\Delta = \sum_{s=1}^n a_{sj} A_{sj} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

(розклад визначника за елементами j -го стовпчика).

Властивості визначників:

1. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) рівні нулю, то і сам визначник рівний нулю.
2. Транспонування не змінює визначника.
3. У разі перестановки двох сусідніх рядків (або стовпчиків) знак визначника змінюється на протилежний.
4. Якщо визначник має два однакові рядки (стовпчики), то він рівний нулю.
5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
6. Якщо визначник містить пропорційні рядки (стовпчики), то він рівний нулю.
7. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпчика) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, де елементи цього рядка першого визначника – перші доданки, другого – другі.
8. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпчика) додати відповідні елементи іншого

рядка (стовпчика), помножені на деяке число (відмінне від нуля).

9. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Деякі методи обчислення визначників:

1. Перетворення в нуль усіх елементів, крім одного, деякого рядка (стовпчика). Властивість 8 дає можливість перетворити в нуль усі елементи, крім одного, деякого рядка (стовпчика), а теорема про розклад визначника – звести обчислення визначника n -го порядку до визначника $n - 1$ -го порядку.

2. Метод зведення до трикутного вигляду.

Цей метод полягає в перетворенні визначника до такого вигляду, коли всі елементи, які розміщені по одну сторону від головної діагоналі дорівнюють нулю. Отриманий таким чином визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Приклад: обчислити визначник четвертого порядку:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка (або стовпчика);

б) методом зведення до трикутного вигляду

$$\begin{vmatrix} -10 & -15 & 20 & 10 \\ 7 & -3 & 8 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

а) використаємо властивість (5):

$$\begin{vmatrix} -10 & -15 & 20 & 10 \\ 7 & -3 & 8 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 8 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 8 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Третій рядок визначника містить нуль, тому раціонально обчислювати визначник, розкладаючи його за елементами третього рядка.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 8 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 3 \cdot A_{33} + 4 \cdot A_{34}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -20,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -48.$$

Тоді даний визначник:

$$\begin{vmatrix} -10 & -15 & 20 & 10 \\ 7 & -3 & 8 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -15 \cdot (6 \cdot (-20) + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-48)) = 4815;$$

б) зведемо заданий визначник до трикутного вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} -10 & -15 & 20 & 10 \\ 7 & -3 & 8 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -15 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 8 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \\
 & = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_2 - P_1 \\ P_4 - 2P_1 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \\
 & = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 6 \end{vmatrix} = -15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \end{vmatrix} = |P_4 + 6P_3| = \\
 & = -15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 107 \end{vmatrix} = -15 \cdot (1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 107) = 4815.
 \end{aligned}$$

§ 3. Обернена матриця. Ранг матриці

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Для кожної невинродженої матриці існує єдина *обернена* їй матриця, яка позначається A^{-1} , така, що

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Обчислення оберненої матриці:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів даної матриці.

Приклад: знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

і виконати перевірку.

Розв’язання: обчислимо визначник матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -20.$$

Визначник відмінний від нуля, матриця невироджена. Отже, для неї існує обернена матриця. Знайдемо алгебраїчні доповнення її визначника:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -7, & A_{12} &= 8, & A_{13} &= -9, \\ A_{21} &= -4, & A_{22} &= -4, & A_{23} &= -8, \\ A_{31} &= 1, & A_{32} &= -4, & A_{33} &= 7. \end{aligned}$$

Тоді обернена матриця:

$$A^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 1 \\ 8 & -4 & -4 \\ -9 & -8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & -\frac{7}{20} \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 1 \\ 8 & -4 & -4 \\ -9 & -8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Ранг матриці

Розглянемо матрицю $A_{m \times n}$. Виберемо в цій матриці довільно k рядків та k стовпчиків. Елементи, які стоять на перетині вибраних рядків і стовпчиків, утворюють квадратну матрицю k -го порядку.

Мінором k -го порядку матриці A називається визначник квадратної матриці, елементи якої знаходяться на перетині вибраних довільно k рядків і k стовпчиків.

Самі елементи матриці можна розглядати як мінори першого порядку. Деякі з мінорів матриці можуть бути рівні нулю, інші відмінні від нуля.

Рангом матриці називається найбільший з порядків відмінних від нуля її мінорів.

Якщо ранг матриці дорівнює r , то це означає, що матриця A має хоча б один відмінний від нуля мінор порядку r , але будь-який мінор порядку, більшого ніж r , дорівнює нулю. Ранг матриці A будемо позначати символом $\text{rang } A$, $r(A)$.

Приклад: методом «оточуючих мінорів» знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ 7 & -5 & -9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: обчислимо мінор четвертого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ 7 & -5 & -9 & -10 \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо мінор третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Цей мінор відмінний від нуля, тому $\text{rang } A = 2$.

Елементарні перетворення матриці:

1. Перестановка двох довільних рядків (стовпчиків) матриці.

2. Відкидання нульового рядка (стовпчика).

3. Множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпчика) матриці на число відмінне від нуля.

4. Додавання до елементів будь-якого рядка (стовпчика) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпчика) помножених на одне і те ж число відмінне від нуля.

5. Транспонування матриці.

Ранг матриці не зміниться під час виконання елементарних перетворень.

За допомогою елементарних перетворень матрицю можна звести до трапецевидного вигляду (зокрема, діагонального), ранг якої легко обчислюється.

Приклад: знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ 7 & -5 & -9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: за допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю до трапецевидного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ 7 & -5 & -9 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \\ 7 & -5 & -9 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що найвищий порядок відмінного від нуля мінору дорівнює двом. Отже, $\text{rang } A = 2$.

§ 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

[illegible]

де x_j – невідомі (змінні).

Числа a_{ij} – коефіцієнти системи, b_i – вільні члени системи.

Розв'язати систему означає – знайти сукупність чисел $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ підстановка яких, замість $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, перетворить рівняння в тотожність.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок; *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Сумісна система, яка має єдиний розв'язок називається *визначеною*, безліч розв'язків – *невизначеною*.

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{основна матриця системи (4.1);}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) - \text{розширена матриця (4.1);}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{стовпчик вільних членів;}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{стовпчик невідомих.}$$

Дві системи називаються *рівносильними*, якщо вони мають одну й ту ж саму множину розв'язків. Застосування елементарних перетворень до рядків розширеної матриці, приведе до розширеної матриці рівносильної системи.

Теорема Кронекера-Капеллі

Система (4.1) сумісна тоді й тільки тоді, коли $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$.

Зауваження: 1) якщо $\text{rang } A = n$ (n – кількість невідомих), то система визначена (має єдиний розв'язок); 2) якщо ж $\text{rang } A < n$, то система невизначена (має безліч розв'язків).

Приклад: дослідити наступну систему на сумісність:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання: складемо розширену матрицю системи і зведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\mapsto \\ &\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0.$$

Отже, $\text{rang } \bar{A} = 3$.

Таким чином, розв'язок даної системи має наступний вигляд:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Приклад: знайти розв'язок системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання: випишемо основну матрицю системи і стовпчик вільних членів

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матриця, обернена до матриці системи, була знайдена в § 3.

$$A^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 1 \\ 8 & -4 & -4 \\ -9 & -8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{20} & \frac{2}{5} & -\frac{7}{20} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо стовпчик невідомих:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 1 \\ 8 & -4 & -4 \\ -9 & -8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Метод Крамера

Розглянемо систему (5.1).

Нехай Δ – визначник основної матриці системи.

Δ_i – визначник, отриманий із визначника основної матриці системи шляхом заміни i -го стовпчика стовпчиком вільних членів.

Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система (5.1) має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулами Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2 \dots n.$$

Приклад: знайти розв’язок системи лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язання: із § 3 маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Складемо та обчислимо наступні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & -1 & -1 \\ 11 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 1 & 11 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -20.$$

Використовуючи формули Крамера,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-20} = 0, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-100}{-20} = 5, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1.$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Метод Гауса

Метод Гауса – метод послідовного виключення невідомих полягає в наступному: за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної системи ступінчастого (зокрема, трикутного) вигляду, із якої, починаючи з останнього рівняння, послідовно знаходимо всі невідомі.

Зауваження:

1. Зручно працювати не з рівняннями системи, а з її розширеною матрицею.

2. Метод Гауса дозволяє розв'язувати не тільки системи, у яких кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, а й довільні СЛАР.

3. Метод Гауса дозволяє одночасно визначити сумісність системи, а у випадку сумісності знайти її розв'язок.

Приклад 1. Розв'язати систему методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання: складемо розширену матрицю системи і зведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 11 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & -1 & -6 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & & & P_2 - 3P_1 \\ & & & P_3 - 5P_1 \end{array} \right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & 4 & 39 \\ 0 & 9 & 8 & 53 \end{array} \right) \mapsto |P_3 - P_2| \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 7 & 4 & 39 \end{array} \right) : 2 \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & 39 \end{array} \right) \mapsto |P_3 - 7P_1| \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right) : 10 \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Перейдемо до рівносильної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 11, \\ x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Підставляючи x_3 у друге рівняння, знайдемо x_2 :

$$x_2 = 7 - 2x_3 = 7 - 2 \cdot 1 = 5.$$

Підставляючи знайдені x_2 та x_3 в перше рівняння, знайдемо x_1 :

$$x_1 = 11 - 2x_2 - x_3 = 11 - 2 \cdot 5 - 1 = 0.$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання: складемо розширену матрицю системи і зведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array} \right) \mapsto$$

$$\begin{aligned} &\mapsto \left| \begin{array}{l} P_2 - 2P_1 \\ P_3 - 3P_1 \\ P_4 - 7P_1 \end{array} \right| \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array} \right) \mapsto \\ &\mapsto \left| \begin{array}{l} P_3 - P_2 \\ P_4 - 2P_2 \end{array} \right| \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Перейдемо до рівносильної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Виразимо із останнього рівняння невідому x_2 через x_3, x_4 :

$$x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3.$$

Підставимо в перше рівняння системи та виразимо невідому x_1 через x_3, x_4 :

$$\begin{aligned} x_1 + 13x_3 - 5x_4 + 3 - 5x_3 &= 2, \\ x_1 &= -8x_3 + 5x_4 - 1. \end{aligned}$$

Отримаємо загальний розв'язок даної системи:

$$\begin{cases} x_1 = -8x_3 + 5x_4 - 1, \\ x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3, \\ x_3 \in R, \\ x_4 \in R. \end{cases}$$

Невідомі x_3, x_4 в цьому випадку називаються *вільними*, невідомі x_1, x_2 — *базисними*.

Зауваження:

1. Якщо кількість рівнянь менше кількості невідомих, то система має ненульовий розв'язок.

2. Якщо кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, то система має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю.

Розв'язки однорідної системи мають наступні властивості:

1. Якщо $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ – розв'язок системи, то $(k\alpha_1; k\alpha_2; \dots; k\alpha_n)$ – також її розв'язки.

2. Якщо $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$, $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_n)$ – розв'язки системи, то $(\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \dots; \alpha_n + \beta_n)$ – також її розв'язки.

Таким чином, із множини розв'язків однорідної системи можна вибрати базис, а будь-який інший її розв'язок може бути виражений у вигляді лінійної комбінації розв'язків із цього базису.

Будь-який такий базис називається *фундаментальною системою розв'язків (ФСР)* однорідної системи.

Зауважимо, що, якщо $\text{rang } A < n$, то всяка її ФСР складається з $(n - r)$ розв'язків.

Приклад: знайти ФСР однорідної системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання: розв'яжемо систему методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left[\begin{array}{l} P_2 - 3P_1 \\ P_3 - 4P_1 \\ P_4 - 3P_1 \end{array} \right] \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array} \right) \cdot (-1) \mapsto$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array} \right) : (-3) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left| \begin{array}{c} P_3 - P_2 \\ P_4 - P_2 \end{array} \right| \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матриці $r = 2$. Тоді ФСР складається з $(n - r) = 4 - 2 = 2$ розв'язків.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Виберемо як вільні невідомі x_3, x_4 та виразимо через них базисні невідомі x_1, x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

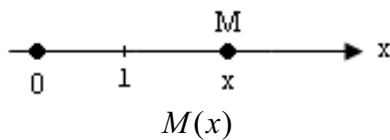
Надамо вільним невідомим довільних значень і складемо ФСР:

$$\begin{cases} x_1 = -7, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = -6, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

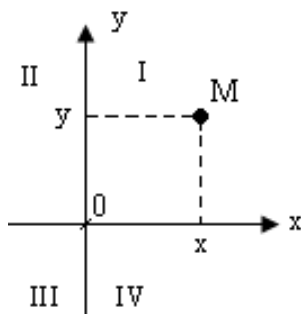
РОЗДІЛ II ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Декартова система координат

Координатна пряма Ox



Координати на площині

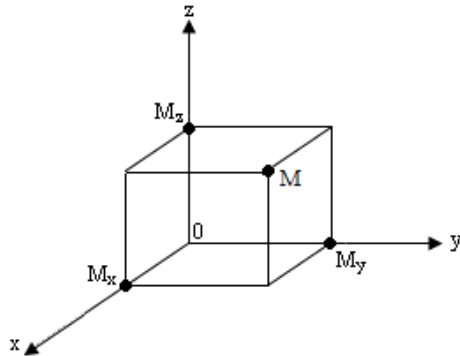


Ox – вісь абсцис

Oy – вісь ординат

$M(x; y)$

Координати у просторі



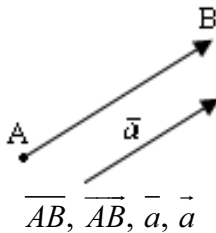
Ox – вісь абсцис
 Oy – вісь ординат
 Oz – вісь аплікат

Oxy , Oxz , Oyz – координатні площини. Площини розбивають простір на вісім октантів.

§ 2. Вектори

Основні поняття

Геометричний вектор – направлений відрізок.



A – початок вектора

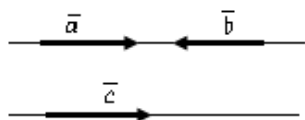
B – кінець вектора

Довжина, або модуль вектора – довжина відповідного направленого відрізка. Позначається $\overline{AB}$, $|\vec{a}|$.

Одиничний вектор – вектор, довжина якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом $\vec{a}$ називається *ортом цього напрямку* й позначається: $\vec{a}_0$. Тоді будь-який вектор може бути поданий як $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$.

Нульовим вектором називається вектор, початок і кінець якого співпадають. Очевидно, що довжина такого вектора дорівнює нулю.

Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній або паралельних прямих.



$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}, \vec{a} \parallel \vec{c},$$

$\vec{a} \uparrow \vec{c}$ – співнаправлені.

$\vec{a} \downarrow \vec{b}, \vec{b} \downarrow \vec{c}$ – протилежно направлені.

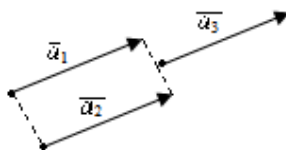
Будь-який вектор $\vec{a}$ колінеарний нульовому вектору.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ називаються *рівними*, якщо:

$$1. \vec{a} \uparrow \vec{b}.$$

$$2. |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Згідно з означенням, вектор не зміниться, якщо його перенести паралельно самому собі так, що його початок потрапить у будь-яку точку простору. Такі вектори утворюють *систему вільних векторів*.



У механіці й фізиці, окрім вільних векторів, розглядають також ковзні і зв'язані вектори. Вектори, початок яких закріплений у певній точці простору, утворюють *систему зв'язаних векторів* (наприклад, сила, прикладена в деякій точці нетвердого пружного тіла). Вектори, початок яких може бути перенесений тільки в точки, що лежать на прямій уздовж напрямку вектора, утворюють *систему ковзних векторів* (наприклад, сили, прикладені до абсолютно твердого тіла).

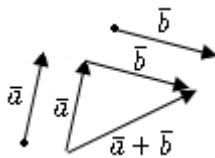
Надалі під вектором ми будемо розуміти вільний вектор.

Лінійні операції над векторами

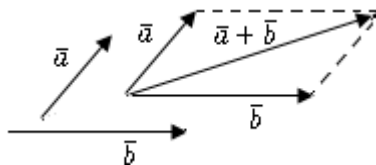
1. Сума.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, що йде із початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$, прикладений до кінця вектора $\vec{a}$.

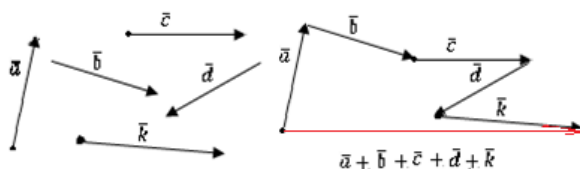
Таке правило додавання векторів називають *правилом «трикутника»*. Воно використовується у фізиці для знаходження вектора переміщення матеріальної точки.



Також можливо користуватися правилом «паралелограма», воно використовується в динаміці та статиці для знаходження вектора результуючих сил, прикладених до однієї точки.

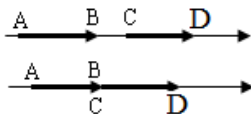


Узагальненням правила трикутника є правило многокутника:

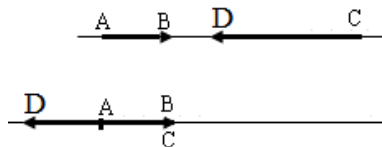


Для будь-якого вектора $\vec{a}$ існує протилежний йому вектор $(-\vec{a})$, такий, що $(-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

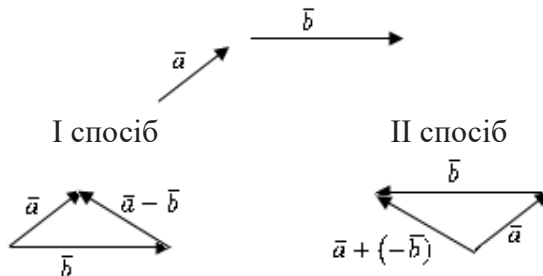
Приклад 1: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.



Приклад 2: $AB + CD = AD$.

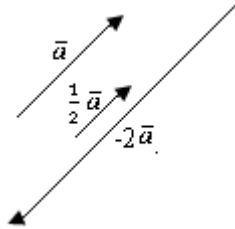


2. Різниця векторів.



3. Множення на скаляр.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, довжина якого $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$ і напрям, співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, і має протилежний напрям, якщо $\alpha < 0$.



Зокрема: $\pm 1 \cdot \vec{a} = \pm \vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Властивості лінійних операцій над векторами:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- 5) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
- 6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
- 7) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

§ 3. Лінійна незалежність векторів, розклад вектора по базису

Вираз вигляду $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, де $\alpha_i \in R$.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не всі рівні нулю, такі, що $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$. Якщо це співвідношення справедливе тільки при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*.

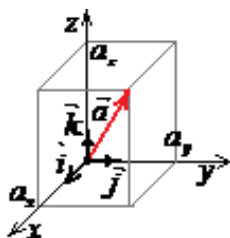
На площині будь-яка пара неколінеарних векторів є лінійно незалежною. У просторі лінійно незалежними є будь-які три некомпланарних вектори. Зокрема, ортогональні вектори завжди лінійно незалежні.

Будь-яка пара неколінеарних векторів, що лежить у деякій площині, утворює базис цієї площини. Аналогічно, будь-яка трійка некомпланарних векторів утворює базис простору.

Базис декартової прямокутної системи координат у просторі утворюють вектори $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$, такі, що

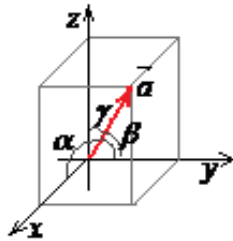
$$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{i} \perp \vec{k}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Будь-який вектор простору може бути єдиним чином поданий у вигляді лінійної комбінації базисних векторів цього простору: $\vec{a} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$, де $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – проєкції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. До того ж говорять, що *вектор розкладено по базису $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$* , а коефіцієнти розкладу $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ називають *координатами цього вектора в даному базисі*.



Довжина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Нехай вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox , Oy , Oz кути α , β , γ відповідно. Величини $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ називаються *напрямними косинусами вектора $\vec{a}$* .



Координати вектора $\vec{a}$ можуть бути обчислені за формулами

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

Тоді

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

До того ж $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Зокрема, координатами $\vec{a}_0$ одиничного вектора є його напрямні косинуси, тобто $\vec{a}_0 (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Приклад: чи можуть вектори $\vec{a}_1 = \{1, 1, 1\}$; $\vec{a}_2 = \{1, -1, 2\}$; $\vec{a}_3 = \{4, 1, 4\}$ утворювати базис?

Розв'язання: три вектори є лінійно залежними, якщо існують такі три числа $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ (хоча б одне з яких не дорівнює нулю), для яких справджується рівність $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$, тобто $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$, або

$$\alpha_1 \cdot \{1, 1, 1\} + \alpha_2 \cdot \{1, -1, 2\} + \alpha_3 \cdot \{4, 1, 4\} = \vec{0},$$

$$\{\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3; \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3; \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3\} = \{0, 0, 0\}.$$

Звідси отримуємо систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Система однорідна. Обчислимо основний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 8 + 4 - 2 - 4 = 3 \neq 0.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то однорідна система має тільки тривіальний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, тобто вектори $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3$ — лінійно незалежні, а отже, можуть утворювати базис.

Приклад: задано чотири вектори $\vec{a}_1 = \{0, 1, -2\}$; $\vec{a}_2 = \{2, 1, 1\}$; $\vec{a}_3 = \{1, 0, 1\}$; $\vec{a}_4 = \{2, 1, 3\}$. Перевірити, що $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис, та знайти координати вектора $\vec{a}_4$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Розв'язання: вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні, тобто

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0} \text{ або}$$

$$\alpha_1 \cdot \{0, 1, -2\} + \alpha_2 \cdot \{2, 1, 1\} + \alpha_3 \cdot \{1, 0, 1\} = \vec{0},$$

$$\{2\alpha_2 + \alpha_3; \alpha_1 + \alpha_2; -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\} = \{0, 0, 0\}.$$

Для заходження $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ отримуємо систему:

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 + 2 - 0 - 2 = 1 \neq 0.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то однорідна система має тільки тривіальний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, тобто вектори $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3$ — лінійно незалежні, а отже, можуть утворювати базис.

Зайдемо координати вектора $\vec{a}_4$ в базисі $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3$:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{a}_4,$$

$$\{2\alpha_2 + \alpha_3; \alpha_1 + \alpha_2; -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\} = \{2, 1, 3\}.$$

$$\text{Система: } \begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо $\alpha_1 = -2$; $\alpha_2 = 3$; $\alpha_3 = -4$.

Отже, вектор $\vec{a}_4$ в новому базисі має координати $\vec{a}_4 = \{-2; 3; -4\}$, тобто $\vec{a}_4 = -2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$.

Приклад: знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a} = \{12, -15, -16\}$.

Розв'язання:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(12)^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 225 + 256} = \sqrt{625} = 25;$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{25}; \quad \cos \beta = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}; \quad \cos \gamma = -\frac{16}{25}.$$

Приклад: чи може вектор утворювати з координатними осями такі кути?

$$\text{а) } \alpha = 135^\circ, \quad \beta = 30^\circ, \quad \gamma = 45^\circ;$$

б) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

Розв'язання:

а) $\cos \alpha = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \beta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos \gamma = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \\ & = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{7}{4} \neq 1. \end{aligned}$$

Відповідь: вектор не може утворювати з осями координат такі кути;

б) $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos \beta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos \gamma = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Відповідь: так, вектор може утворювати з осями координат такі кути.

Лінійні операції над векторами, що задані своїми координатами

Нехай $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді:

1. $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$.

2. $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot a_x \vec{i} + \alpha \cdot a_y \vec{j} + \alpha \cdot a_z \vec{k}$.

Якщо вектори $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ – колінеарні, то справедливе співвідношення: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ і навпаки.

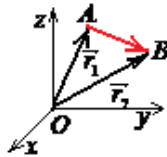
Радіус-вектором точки $M(x; y; z)$ називають вектор $\vec{r}(M) = \vec{r} = \overrightarrow{OM}$, початок якого знаходиться в початку координат, а кінець – у точці M . Координати радіус-вектора співпадають з координатами точки M .

Розклад радіус-вектора в базисі $\{\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ має наступний вигляд:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Зауважимо, що довільний вектор $\overrightarrow{AB}$ може бути поданий у вигляді різниці радіус-векторів точок B і A , тобто

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \text{ де } \vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}.$$



Координати вектора, що заданий двома точками

Нехай у деякій прямокутній системі координат дано дві точки $A(a_x, a_y, a_z)$ та $B(b_x, b_y, b_z)$. Тоді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB} = \{b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z\}.$$

Поділ відрізка в заданому відношенні

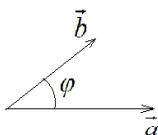
Кажуть, що точка M ділить відрізок AB у відношенні λ , якщо $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$. Нехай $A(a_x, a_y, a_z)$ та $B(b_x, b_y, b_z)$. Тоді координати точки $M = (m_x, m_y, m_z)$ обчислюються за формулами

$$m_x = \frac{a_x + \lambda b_x}{1 + \lambda}, \quad m_y = \frac{a_y + \lambda b_y}{1 + \lambda}, \quad m_z = \frac{a_z + \lambda b_z}{1 + \lambda}.$$

§ 4. Скалярний добуток векторів

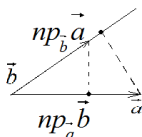
Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$



Оскільки $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$, $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$



Основні властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$ або один з них є нульовим вектором, і навпаки.
6. $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$, $\forall \vec{a} \neq \vec{0}$.

Якщо вектор $\vec{F}$ зображує силу, точка прикладання якої переміщується з початку в кінець вектора $\vec{s}$, то робота A цієї сили визначається рівністю: $\vec{A} = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Вираження скалярного добутку через координати співмножників:

якщо $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Кут між двома векторами

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Умови ортогональності (перпендикулярності) та колінеарності двох векторів.

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тобто $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Якщо ж вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – колінеарні, то $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

§ 5. Векторний добуток векторів

Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *правою (лівою)*, коли поворот від першого до другого і від другого до третього вектора здійснюється проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).

Система координат називається *правою (лівою)*, якщо базисні вектори утворюють праву (ліву) трійку векторів.

Для визначення орієнтації трійки векторів можна користуватися також правилом «правої руки» (правилом «буравчика», правилом «правого гвинта»).

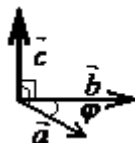
Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$, який задовольняє умови:

1. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

2. Напрямок вектора $\vec{c}$ вибирається так, щоб трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ була правою.

3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, де $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається одним із символів $[\vec{a}, \vec{b}]$ або $\vec{a} \times \vec{b}$.



Властивості векторного добутку:

1. Векторний добуток залежить від послідовності співмножників, а саме: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

2. Асоціативність відносно скалярного множника: $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

3. Розподільна властивість відносно додавання: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

4. Векторний добуток дорівнює нульовому вектору тоді й тільки тоді, коли вектори колінеарні, або один з них нульовий, тобто: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\forall \vec{a}$.

Вираження векторного добутку через координати співмножників:

нехай $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$, тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Застосування векторного добутку

1. Обчислення площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Модуль векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які віднесені до спільного початку. $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

2. Момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці M , відносно фіксованої точки O .

Якщо вектор $\vec{F}$ зображає силу, прикладену до точки M , а вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ є моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O , тобто $mom_O \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}$.

§ 6. Мішаний добуток трьох векторів.

Подвійний векторний добуток

Скалярний добуток вектора $\vec{c}$ на векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається *мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$* .

Мішаний добуток позначається символом $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Отже, згідно з означенням:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

Алгебраїчні властивості:

1. Мішаний добуток не зміниться від циклічної перестановки співмножників, тобто

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

2. Мішаний добуток не зміниться від перестановки скалярного й векторного добутку, тобто

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

3. Мішаний добуток змінює знак на протилежний у разі перестановки двох сусідніх векторів.

Геометричні властивості:

1. Критерій компланарності векторів: $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді й тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

2. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – некопланарні, то їх мішаний добуток дорівнює об'ємові V паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку), якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – права, і мінус V паралелепіпеда, коли ця трійка ліва. Отже, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V$.

Вираження векторного добутку через координати перемножуваних векторів: нехай $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ і $\vec{c}(c_x; c_y; c_z)$, тоді

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Умова компланарності трьох векторів

Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – компланарні, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Нехай задані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

Якщо вектор $\vec{b}$ векторно помножити на вектор $\vec{c}$, а вектор $\vec{a}$ також векторно помножити на векторний добуток $[\vec{b}, \vec{c}]$, то отримаємо вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, який називається *подвійним векторним добутком*,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]].$$

Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ справедливе співвідношення:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

§ 7. Застосування векторної алгебри до розв'язання фізичних задач

Векторна форма багатьох задач фізики більш детально відображає відповідні процеси та є більш простою і компактною.

Якщо в результаті руху вздовж деякої кривої матеріальна точка змістилася за час Δt із положення, що визначається радіус-вектором $\vec{r}_0$ у положення, що визначається радіус-вектором $\vec{r}$, то вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ називається *переміщенням матеріальної точки*, а довжина частини кривої між початковою і кінцевою точками – шлях ΔS .

Тоді середня швидкість переміщення – $\overline{v_{\text{cp}}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, а середня швидкість проходження шляху – $v_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Закон збереження кількості руху (імпульсу) у векторній формі:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \text{const}.$$

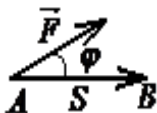
Положення центра мас системи визначається наступною рівністю:

$$\bar{r}_c = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots + m_n \bar{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

де $\bar{r}_i$ – радіус-вектори окремих малих тіл системи в довільній системі відліку, m_i – маси цих тіл, $\bar{r}_c$ – радіус-вектор центра мас системи.

Якщо матеріальна точка переміщується прямолінійно із положення A в положення B під дією постійної сили $\bar{F}$, що утворює кут φ з переміщенням $\overline{AB} = \bar{S}$, то скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення являє собою роботу цієї сили з переміщення точки, тобто

$$A = |\bar{F}| \cdot |\bar{S}| \cos \varphi = \bar{F} \cdot \bar{S}.$$

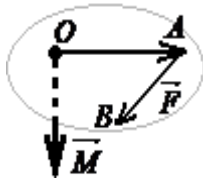


Кінетична енергія E_K тіла маси m , що рухається із швидкістю $\bar{v}$, обчислюється за формулою

$$E_K = \frac{1}{2} (m \bar{v}) \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} \bar{p} \cdot \bar{v},$$

тобто кінетична енергія тіла дорівнює половині скалярного добутку імпульсу та швидкості тіла.

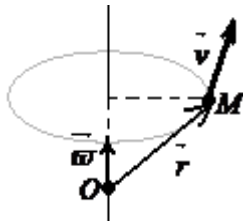
Якщо в точці A прикладена сила $\bar{F} = \overline{AB}$, і O – деяка точка простору, то векторний добуток вектора $\overline{OA}$ на вектор сили $\bar{F}$ виражає момент цієї сили відносно точки O , тобто $\bar{M} = \overline{OA} \times \bar{F}$.



Лінійна швидкість $\vec{v}$ точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі, визначається за формулою

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, O – деяка нерухома точка осі обертання.



Силу, яка діє на рухому частинку із зарядом q у магнітному полі (сила Лоренца), можна обчислити за формулою

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}),$$

де $\vec{v}$ – швидкість частинки, $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції.

РОЗДІЛ III

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРІ

§ 1. Системи координат на площині та в просторі

Полярна система координат

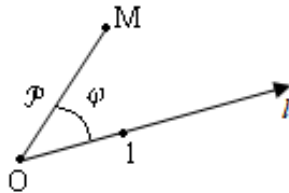
Полярна система координат – двовимірна система координат, у якій кожна точка на площині визначається двома числами – кутом та відстанню. Полярна система координат особливо корисна у випадках, коли відношення між точками найпростіше зобразити у вигляді відстаней та кутів. У більш поширеній, декартовій, або прямокутній системі координат, такі відношення можна встановити лише шляхом застосування тригонометричних рівнянь.

Полярна система координат задається променем, який називають *нульовим* або *полярною віссю*. Точка, з якої виходить цей промінь називається *початком координат* або *полюсом*. Будь-яка інша точка на площині визначається двома полярними координатами: радіальною та кутовою. Радіальна координата (зазвичай позначається ρ) відповідає відстані від точки до початку координат. Кутова координата, що також називається *полярним кутом* або азимутом (позначається φ) і дорівнює куту між полярною віссю та напрямком на точку.

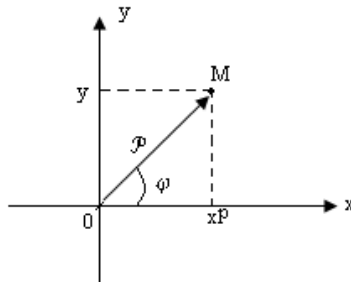
Визначена таким чином радіальна координата може набувати значення від нуля до нескінченості, а кутова координата змінюється в межах від 0° до 360° . Однак для зручності діапазон значень азимута можна розширити за межі

повного кута, а також дозволити йому набувати від'ємних значень, що відповідає повороту за годинниковою стрілкою.

Візьмемо на площині довільну точку O і вісь Ol з вибраним масштабом. Точка O називається *полюсом*, вісь Ol – *полярною віссю*, ρ – *полярним радіусом* точки M , φ – *полярним кутом*. Тоді точка M задається полярними координатами: $M(\rho; \varphi)$.



Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, а вісь Ox – з полярною віссю.



Із прямокутного трикутника OMP отримаємо формули зв'язку декартових та полярних координат:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\rho}, \\ \sin \varphi = \frac{MP}{OM} = \frac{y}{\rho}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

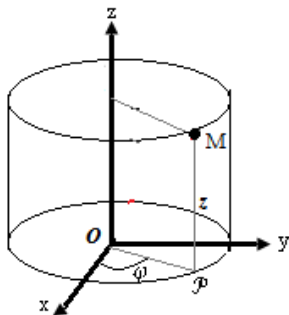
$$\begin{cases} OM^2 = OP^2 + PM^2, & \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, & 0 \leq \rho < +\infty; \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{PM}{OP}, \end{cases}$$

Зауважимо, що полярний кут визначається неоднозначно, а з точністю до періоду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Циліндрична система координат

Якщо у прямокутній системі координат $Oxyz$ замість перших двох координат x, y , узяти полярні координати ρ, φ , а третю координату z залишити без змін, то дістанемо циліндричну систему координат.

Точка M визначається трьома координатами: $M(\rho; \varphi; z)$, де $\rho \in [0; +\infty)$, $\varphi \in [0; 2\pi)$ – полярні координати проєкції точки на площину Oxy , $z \in \mathbb{R}$ – апліката точки M .

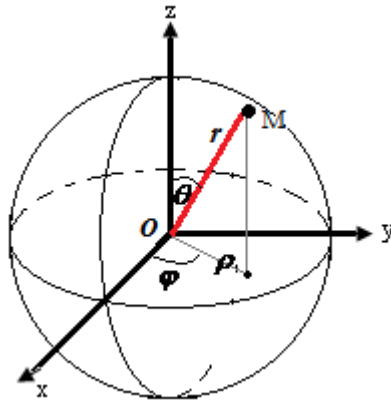


Формули зв'язку декартових координат і циліндричних:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \\ z = z. \end{cases}$$

Сферична система координат

Точка M визначається трьома координатами $M(r; \varphi; \theta)$, $r \in [0; \infty)$ – радіус-вектор точки, $\varphi \in [0; 2\pi)$ – кут між проєкцією радіус-вектора на площину Oxy і віссю Ox , що відкладається від цієї осі в додатному напрямку, $\theta \in [0; \pi]$ – кут між радіус-вектором і віссю Oz , що відкладається від цієї осі.



Зв'язок між сферичними та декартовими координатами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right). \end{cases}$$

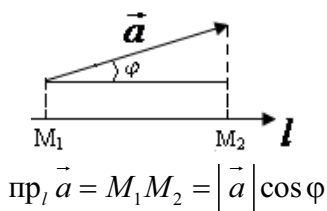
Іноді сферичні координати вводяться наступним чином: за кут $\theta \in [-\pi; \pi]$ беруть кут між радіус-вектором точки і площиною Oxy . До того ж координата називається *широтою*, а φ – *довготою*.

У цьому випадку формули зв'язку мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \cos \theta, \\ z = r \sin \theta, \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \\ \theta = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right). \end{cases}$$

§ 2. Основні задачі аналітичної геометрії на площині та в просторі

1. Проекція направленого відрізка на вісь.



Зауважимо, що проєкція вектора на вісь може брати і від'ємне значення, якщо вектор утворює з віссю тупий кут, а також може дорівнювати нулю, коли цей кут – прямий.

Приклад: відомо, що $|\vec{a}| = 2$, а кути, які утворює цей вектор з координатними осями: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Обчислити проєкції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

Розв'язання:

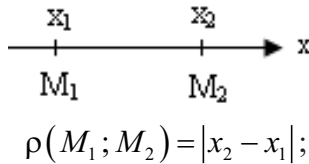
$$\text{пр}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha = 2 \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2};$$

$$\text{пр}_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta = 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

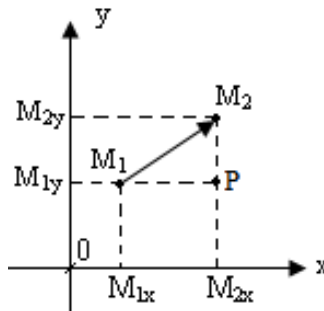
$$\text{пр}_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma = 2 \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

2. Відстань між точками.

а) на прямій –



б) на площині –



$$\rho(M_1; M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

в) у просторі –

$$\rho(M_1; M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

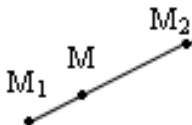
Приклад: дано дві точки $A(2, -1, 3)$, $B(5, 4, 0)$. Знайти довжину вектора $\vec{AB}$.

Розв'язання:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(5-2)^2 + (4+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}.$$

3. Поділ відрізка в заданому відношенні.

Кажуть, що точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ , якщо $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$.



Нехай $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і точка $M(x; y; z)$ ділить відрізок у заданому відношенні λ , тоді координати точки M :

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

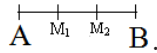
Зокрема, при $\lambda = 1$, точка M буде серединою заданого відрізка та її координати:

$$\begin{cases} x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, \\ z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}. \end{cases}$$

Зауважимо також, що при $\lambda < 0$ кажуть, що точка M ділить відрізок зовнішнім чином.

Приклад: відрізок із кінцями в точках $A(1, -3, 2)$, $B(4, 0, 5)$ розділений на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

Розв'язання:



Для точки M_1 : $\lambda = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{1}{2}$;

$$x_1 = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1 + 2}{\frac{3}{2}} = 2; \quad y_1 = \frac{-3 + \frac{1}{2} \cdot 0}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2;$$

$$z_1 = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2 + \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3.$$

Отже, $M_1(2, -2, 3)$.

Для точки M_2 : $\lambda = \frac{AM_2}{M_2B} = 2$;

$$x_1 = \frac{1 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3; \quad y_1 = \frac{-3 + 2 \cdot 0}{1 + 2} = \frac{-3}{3} = -1;$$

$$z_1 = \frac{2 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = \frac{12}{3} = 4.$$

Отже, $M_2(3, -1, 4)$.

Координати центра мас

Нехай дано систему матеріальних точок

$$M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), \dots, M_n(x_n; y_n; z_n),$$

у яких зосереджено маси $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Центр мас двох матеріальних точок M_1 і M_2 обчислюється за формулами

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

Центр мас трьох матеріальних точок M_1 , M_2 і M_3 обчислюється за формулами

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Центр мас системи n матеріальних точок –

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Указані формули використовуються для введення так званих *барицентричних координат*.

Розглянемо в декартовій площині три різні точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$, що не лежать на одній прямій, і фіксовану точку $M(x; y)$. З'ясуємо, чи існують такі три числа m_1, m_2, m_3 , що задовольняють рівняння $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ і такі, що дана точка M буде центром тяжіння системи трьох точок M_1, M_2, M_3 з масами m_1, m_2, m_3 відповідно. Можна показати, що для кожної точки $M(x; y)$ ці числа визначаються однозначно із системи:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 = 1, \\ x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 = x, \\ y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 = y. \end{cases}$$

Числа m_1, m_2, m_3 називаються *барицентричними координатами точки M відносно базисних точок M_1, M_2, M_3* .

У просторі барицентричні координати вводяться аналогічно. Для цього використовують чотири базисні точки, що не лежать в одній площині.

§ 3. Лінії на площині. Поверхні та лінії в просторі

Рівнянням лінії L у декартовій системі координат на площині називається рівняння вигляду $F(x, y) = 0$, яке задовольняють координати (x, y) кожної точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної іншої точки.

Лінія L розглядається як сукупність точок площини, координати (x, y) яких задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$.

Змінні x, y , які входять у рівняння $F(x, y) = 0$ називають довільними координатами точки.

Якщо рівняння $F(x, y) = 0$ можна записати у вигляді $y = f(x)$, то в цьому випадку лінія L збігається з графіком функції $y = f(x)$.

Лінію, яка лежить на площині, називають *плоскою*.

Приклад: рівняння $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ задає на площині коло з центром у точці $(x_0; y_0)$ і радіусом R .

Також лінії можуть бути задані в полярних координатах, тобто у вигляді $\rho = \rho(\varphi)$ або параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Якщо як параметр t взяти час, то параметричні рівняння визначають траєкторію плоского руху точки.

Точку перетину двох ліній знаходять із системи:

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ F_2(x; y) = 0. \end{cases}$$

Кажуть, що рівняння $F(x; y; z) = 0$ задає в просторі поверхню, якщо цьому рівнянню задовольняють координати всіх точок, що лежать на ній, і не задовольняють координати точок, що не лежать на поверхні.

Приклад: рівняння $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ задає в просторі сферу з центром у точці $(x_0; y_0; z_0)$ і радіусом R .

Поверхні в просторі можуть задаватися також параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(u; v), \\ y = y(u; v), \\ z = z(u; v), \\ u \in U, v \in V. \end{cases}$$

Наприклад, параметричні рівняння сфери радіуса R з центром на початку координат мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} x = R \cos \phi \sin \theta, \\ y = R \sin \phi \sin \theta, \\ z = R \cos \theta, \\ \phi \in [0; 2\pi), \\ \theta \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Лінію в просторі природно розглядати як перетин двох поверхонь:

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases}$$

Вона також може бути задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Якщо як параметр t взяти час, то параметричні рівняння визначають координати рухомої в просторі матеріальної точки.

§ 4. Пряма на площині

Якщо $M_0(x_0; y_0)$ і $\vec{n} = \{A; B\}$ – відповідно задана точка і ненульовий вектор, який перпендикулярний до прямої (його називають *нормальним* вектором), то вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ – перпендикулярні, де $M(x; y)$ – довільна точка прямої. Це означає, що скалярний добуток векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ дорівнює нулю, тобто

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0. \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) називається *рівнянням прямої, яке записане у векторній формі*.

У координатній формі рівняння (4.1) набуває наступного вигляду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (4.2)$$

і називається *рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B\}$* .

Виконавши заміну $C = -Ax_0 - By_0$ у рівнянні (4.2), отримаємо загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0. \quad (4.3)$$

Приклад: написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; -1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{3; 4\}$.

Розв’язання: згідно з (4.2) рівняння прямої має наступний вигляд: $3(x - 2) + 4(y + 1) = 0$, $3x - 6 + 4y + 4 = 0$, $3x + 4y - 2 = 0$ – загальне рівняння прямої.

Загальне рівняння (4.3) називається *повним*, якщо всі його коефіцієнти A, B, C відмінні від нуля. Якщо хоча б один з указаних коефіцієнтів дорівнює нулю, то рівняння називається *неповним*.

Неповні рівняння:

1. $C = 0, Ax + By = 0$ – пряма проходить через початок координат.

2. $A = 0, By + C = 0$ – пряма паралельна осі Ox .

3. $B = 0, Ax + C = 0$ – пряма паралельна осі Oy .

4. $B = 0, C = 0, Ax = 0$ – вісь Oy .

5. $A = 0, C = 0, By = 0$ – вісь Ox .

Рівняння прямої у «відрізках»:

$$l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (4.4)$$

де a, b – довжини відрізків, що відтинає пряма на координатних осях Ox і Oy відповідно.

Канонічне рівняння прямої

Якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до ненульового вектора $\vec{a}(a_x; a_y)$, який називається *напрямним вектором*, то її рівняння має наступний вигляд:

$$l: \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}. \quad (4.5)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$:

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4.6)$$

Параметричні рівняння прямої

Із канонічного рівняння маємо:

$$l: \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = t,$$

$$l: \begin{cases} x = a_x t + x_0 \\ y = a_y t + y_0 \\ t \in R \end{cases} \quad (4.7)$$

Якщо як параметр взяти час, то данні рівняння задають прямолінійний неперискорений рух зі швидкістю $v = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Приклад: скласти канонічне та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2; 1)$, $M_2(-1; 4)$.

Розв'язання: згідно з (4.6)

$$M_1 M_2: \frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-1}{4-1}; \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{3} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} \quad -$$

канонічне рівняння прямої.

$$\text{Згідно з (4.7)} \quad \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad - \text{ параметричні рівняння прямої.}$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

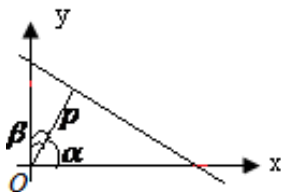
$$l: y - y_0 = k(x - x_0),$$

$$l: y = kx + b. \quad (4.8)$$

У рівнянні (4.8) $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі Ox . Величину k – називають *кутовим коефіцієнтом* прямої.

Нормальне рівняння прямої.

$$l: x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0.$$



Взаємне розташування прямих

Нехай прямі задані загальними рівняннями:

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Розглянемо вектори нормалі для цих прямих:

$$\overline{n_1}(A_1; B_1) \perp l_1, \quad \overline{n_2}(A_2; B_2) \perp l_2.$$

1. При $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$ прямі паралельні, $l_1 \parallel l_2$.

Зокрема, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямі співпадають.

2. Якщо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то прямі перетинаються під кутом

$$\cos \phi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Зокрема, якщо $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то прямі перпендикулярні $l_1 \perp l_2$.

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$\rho(M_0; l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

§ 5. Криві другого порядку

Загальним рівнянням другого порядку називається рівняння наступного вигляду:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де коефіцієнти A, B, C одночасно не рівні нулю.

Лінії, що визначаються такими рівняннями, називаються *кривими другого порядку*.

Центром деякої лінії називається така точка площини, по відношенню до якої точки цієї лінії розташовані симетрично парами.

Лінії другого порядку, що мають один центр називаються *центральними*.

Координати центра $S(x_0; y_0)$ лінії визначаються із системи:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

Позначимо через $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

При $\Delta \neq 0$ крива другого порядку буде центральною.

До того ж при $\Delta > 0$ рівняння буде рівнянням *еліптичного типу*. Кожне еліптичне рівняння є рівнянням або звичайного еліпса, або виродженого еліпса (точка), або уявного еліпса (у цьому випадку рівняння не визначає на площині ніякого геометричного образу).

При $\Delta < 0$ рівняння буде рівнянням *гіперболічного типу*. Кожне гіперболічне рівняння визначає або звичайну гіперболу, або вироджену (пару прямих, що перетинаються).

При $\Delta = 0$ лінія другого порядку не є центральною. Такі рівняння називаються рівняннями *параболічного типу* і визначають на площині або звичайну параболу, або пару

паралельних прямих, або прямих, що співпадають, або не визначають на площині ніякого геометричного образу.

Класифікація кривих другого порядку

Коло

Колом називається множина точок площини, відстань кожної з яких від заданої точки (центра) є сталою величиною.

Частковий випадок, коли $a = b$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$ фокуси співпадають в одній точці – центрі), еліпс вироджується в коло.

Канонічне рівняння:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (5.1)$$

Якщо ж центр кола міститься в точці $M_0(x_0; y_0)$, то

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (5.2)$$

Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases} \quad (5.3)$$

Приклад: написати рівняння кола в кожному з таких випадків:

а) центр кола знаходиться в початку координат, а його радіус дорівнює 5;

б) центр кола знаходиться в точці $C(-3, 2)$, а його радіус $R = 4$;

в) коло проходить через точки $A(1, 2)$, $B(0, -1)$, $C(-3, 0)$.

Розв'язання:

а) згідно з (5.1) маємо $x^2 + y^2 = 25$;

б) згідно з (5.2) маємо $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$;

в) нехай центр кола точка $C_1(x_1, y_1)$, тоді $R = AO_1 = BO_1 = CO_1$;

$$|AO_1|^2 = R^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2;$$

$$|BO_1|^2 = R^2 = x_1^2 + (y_1 + 1)^2;$$

$$|CO_1|^2 = R^2 = (x_1 + 3)^2 + y_1^2.$$

Попарно прирівнюючи

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 4y_1 + 4 = x_1^2 + y_1^2 + 2y_1 + 1, \\ x_1^2 + 6x_1 + 9 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2y_1 + 1, \end{cases}$$

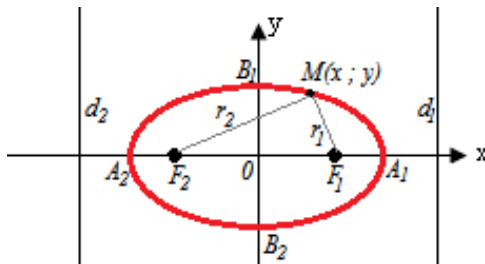
$$\begin{cases} 2x_1 + 6y_1 - 4 = 0, \\ 6x_1 - 2y_1 + 8 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3y_1 - 2 = 0, \\ 3x_1 - y_1 + 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 1. \end{cases},$$

тобто точка $C_1(-1, 1)$, тоді $R^2 = (-1)^2 + (1+1)^2 = 5$.

Отже, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$ – шукане рівняння кола.

Еліпс

Еліпс – множина точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок F_1, F_2 (фокусів) є сталою величиною, що дорівнює $2a$.



Елементи еліпса:

$A_1A_2 = 2a$ – велика вісь;

$B_1B_2 = 2b$ – мала вісь;

A_1, A_2, B_1, B_2 – вершини;

$F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$ – фокуси;

$F_1F_2 = 2c$ – фокальна відстань,

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – ексцентриситет. Ексцентриситет еліпса можна розглядати, як ступінь його «витягнутості»: чим більше ексцентриситет, тим менше відношення $\frac{b}{a}$.

$r_1 = a - \varepsilon x, r_2 = a + \varepsilon x$ – фокальні радіуси.

$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon}, d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$ – директриси.

Канонічне рівняння еліпса (координатні вісі співпадають з осями еліпса):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.4)$$

Якщо осі еліпса паралельні до осей координат, а центр еліпса міститься в точці $M_0(x_0; y_0)$, то рівняння еліпса має наступний вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (5.5)$$

Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad (5.6)$$

Приклад: написати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо відстань між фокусами дорівнює 10, а велика піввісь $a = 13$.

Розв'язання: згідно з умовою задачі: $|\overline{F_1 F_2}| = 2c = 10 \Rightarrow c = 5$.

Так як $b^2 = a^2 - c^2$, $a = 13$, то $b^2 = 169 - 25 = 144$, тому $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ – канонічне рівняння еліпса.

Приклад: написати рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси містяться в точках $F_1(-10, 0)$, $F_2(14, 0)$.

Розв'язання: так як $F_1(-10, 0)$, $F_2(14, 0)$, то центр еліпса міститься в точці $C(2, 0)$. За умовою задачі: $2a = 26 \Rightarrow a = 13$,

$$|\overline{F_1 F_2}| = \sqrt{(14 + 10)^2 + (0 - 0)^2} = 24 = 2c \Rightarrow c = 12.$$

Так як $b^2 = a^2 - c^2$, то $b^2 = 169 - 144 = 25$.

Отже, $\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ – канонічне рівняння еліпса.

Приклад: установити, що рівняння $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ визначає еліпс. Знайти координати його центра, півосі та ексцентриситет.

Розв'язання: виділимо повні квадрати:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 + 4 = 0;$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \text{ – канонічне рівняння еліпса.}$$

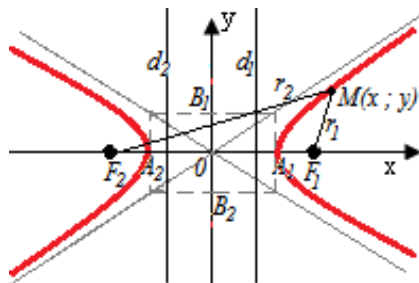
$C(1, -2)$ – центр еліпса. $a = 3$, $b = 2$,

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad c^2 = 9 - 4, \quad c^2 = 5,$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Гіпербола

Гіпербола – множина точок площини, різниця відстаней кожної з яких (за абсолютним значенням) від двох заданих точок (фокусів) є сталою величиною, що дорівнює $2a$.



Елементи гіперболи:

$A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь;

$B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь;

A_1, A_2 – вершини;

$F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$ – фокуси;

$F_1F_2 = 2c$ – фокальна відстань,

$c^2 = a^2 + b^2$;

$y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоти.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ – ексцентриситет. Його можна розглядати

як числову характеристику величини розхилу кута між асимптотами.

$r_1 = \pm(\varepsilon x - a), r_2 = \pm(\varepsilon x + a)$ – фокальні радіуси (верхній знак відповідає правій, нижній – лівій гілці).

$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon}, d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$ – директриси.

Канонічне рівняння гіперболи (координатні осі співпадають з осями гіперболи):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.7)$$

Якщо дійсна вісь гіперболи розміщена на прямій, паралельній осі абсцис, а точка $M_0(x_0; y_0)$ – центр гіперболи, то її рівняння має наступний вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (5.8)$$

Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t. \end{cases} \quad (5.9)$$

Рівняння гіперболи, спряженої до даної:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (5.10)$$

Приклад: задано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Знайти: 1) півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис.

Розв'язання:

1. Із умови $16x^2 - 9y^2 = 144$, поділивши ліву (почленно) і праву частину на 144, маємо:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ – канонічне рівняння гіперболи.}$$

Згідно з (5.7) $a = 3$, $b = 4$.

2. Так як $|F_1 F_2| = 2c$ і $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, то $|F_1 F_2| = 10$, тому $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$.

3. Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

4. Рівняння асимптот $y = \pm \frac{b}{a}x$, тому $y = \pm \frac{4}{3}x$.

5. Рівняння директрис $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, тому $x = \pm \frac{3}{5}$, $x = \pm \frac{9}{5}$.

Парабола

Параболою називається множина точок площини, кожна з яких рівновіддалена від заданої точки F (фокуса) і заданої прямої l (директриси).

Елементи параболи:

OF – фокальна вісь;

O – вершина;

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус;

$\varepsilon = 1$ – ексцентриситет;

$r = x + \frac{p}{2}$, ($p > 0$) – фокальний радіус;

$d: x = -\frac{p}{2}$ – директриса;

p – фокальний параметр.

Канонічне рівняння параболи (вісь Ox співпадає з фокальною віссю, початок координат – з вершиною параболи):

$$y^2 = 2px. \quad (5.11)$$

При $p < 0$ вітки параболи направлені вліво, при $p > 0$ – вправо.

Якщо парабола симетрична відносно прямої $y = y_0$, а вершина міститься в точці $M_0(x_0; y_0)$, то її рівняння має наступний вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \quad (5.12)$$

Якщо фокальна вісь співпадає з віссю Oy , то рівняння параболи має вигляд:

$$x^2 = 2py. \quad (5.13)$$

При $p > 0$ вітки параболи направлені вгору, при $p < 0$ – вниз.

Якщо парабола симетрична відносно прямої $x = x_0$, а вершина міститься в точці $M_0(x_0; y_0)$, то її рівняння має наступний вигляд:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \quad (5.14)$$

Приклад: написати канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку $M(3; 6)$.

Розв’язання: згідно з (5.11) рівняння параболи має вигляд: $y^2 = 2px$. Так як т. M належить параболі, то $36 = 2p \cdot 3 \Rightarrow p = 6$. Отже, $y^2 = 12x$ – шукане рівняння параболи.

Приклад: написати канонічне рівняння параболи, якщо відомо: а) фокус $F(0; 5)$;

б) директриса $x + 15 = 0$.

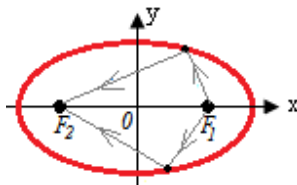
Розв’язання:

а) відомо, що $F(0; \frac{p}{2})$, тому $\frac{p}{2} = 5 \Rightarrow p = 10$. Отже, рівняння параболи має вигляд: $x^2 = 20y$;

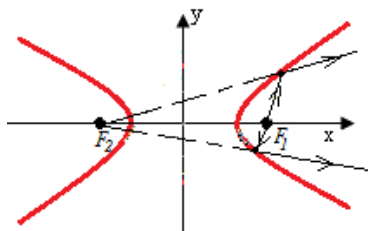
б) рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$. За умовою $x + 15 = 0$, $x = -15$, тобто $-\frac{p}{2} = -15 \Rightarrow p = 30$. Отже, рівняння параболи – $y^2 = 60x$.

Оптичні властивості кривих другого порядку

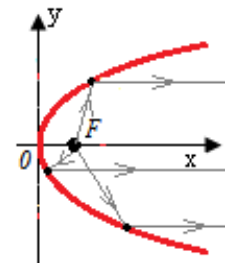
Для еліпса: промені світла, що виходять із одного фокуса еліпса, після дзеркального відображення від еліпса проходять через другий фокус.



Для гіперболи: продовження відображеного променя світла, що виходить з одного фокуса гіперболи, попадає у другий фокус.



Для параболи: промені світла, що виходять із фокуса параболи, після дзеркального відображення від неї утворюють пучок променів, паралельних її фокальній осі.



Рівняння в полярних координатах

Полярне рівняння, загальне за формою для еліпса, однієї гіперболи та параболи має наступний вигляд:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi},$$

де φ , ρ – полярні координати довільної точки лінії, p – параметр, ε – ексцентриситет. До того ж полярна система координат вибрана наступним чином: полюс знаходиться у фокусі, полярна вісь направлена в бік, протилежний найближчого до цього фокуса директриси.

Зокрема, при $\varepsilon = 0$, отримаємо рівняння кола в полярних координатах:

$$\rho = R.$$

§ 6. Площина

Кожна площина може бути виражена лінійним рівнянням відносно вибраної декартової системи координат і, навпаки, кожне лінійне рівняння відносно декартової системи координат визначає площину.

Іншими словами, площина є єдиною алгебраїчною поверхнею першого порядку.

Дійсно, нехай ω – довільна площина, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – одна з її точок, $\vec{n} = \{A, B, C\}$ – перпендикулярний до неї вектор. Тоді якщо точка $M(x; y; z)$ належить площині ω , то вектори $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ і $\vec{n} = \{A, B, C\}$ – перпендикулярні, тобто $(\overline{M_0M}, \vec{n}) = 0$, або в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (6.1)$$

Отже, рівняння (6.1) визначає площину, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ називають *нормальним вектором площини*.

Якщо в рівнянні (6.1) розкрити дужки та ввести позначення $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то воно набуває наступного вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (6.2)$$

Рівняння (6.2) називається *загальним рівнянням площини*.

Неповні рівняння площини:

1. $D = 0, Ax + By + Cz = 0$ – площина проходить через початок координат.

2. $A = 0, By + Cz + D = 0$ – площина паралельна осі Ox .

3. $B = 0, Ax + Cz + D = 0$ – площина паралельна осі Oy .

4. $C = 0, Ax + By + D = 0$ – площина паралельна осі Oz .

5. $A = B = 0, z = -\frac{D}{C}$ – площина паралельна площині Oxy .

6. $A = C = 0, y = -\frac{D}{B}$ – площина паралельна площині Oxz .

7. $B = C = 0, x = -\frac{D}{A}$ – площина паралельна площині Oyz .

8. $A = B = D = 0, z = 0$ – площина співпадає з площиною Oxy .

9. $A = C = D = 0, y = 0$ – площина співпадає з площиною Oxz .

10. $B = C = D = 0, x = 0$ – площина співпадає з площиною Oyz .

Рівняння площини «у відрізках»:

$$\omega: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1, \quad (6.3)$$

де m, n, p – величини відрізків, які відтинає площина на координатних осях.

Рівняння площини, яка проходить через точку M_0 паралельно векторам $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$:

$$\omega: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

Рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ паралельно вектору $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

$$\omega: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \omega: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \quad \omega: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0. \quad (6.5)$$

Рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

$$\omega: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.6)$$

Параметричні рівняння площини.

$$\omega: \begin{cases} x = a_x u + b_x v + x_0, \\ y = a_y u + b_y v + y_0, \\ z = a_z u + b_z v + z_0, \\ u \in R, v \in R. \end{cases} \quad (6.7)$$

Нормальне рівняння площини.

$$\omega: x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (6.8)$$

де α, β, γ – кути, що утворює вектор нормалі з координатними осями, а p – відстань від початку координат до площини.

Щоб звести загальне рівняння площини (6.2) до нормального вигляду (6.8), треба перемножити всі його коефіцієнти

на число $\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, яке називається *нормувальним множником рівняння*. Знак нормувального множника рівняння λ протилежний до знака вільного члена D . Отже, нормальне рівняння площини (6.2) буде мати наступний вигляд:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \quad (6.9)$$

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(4; 5; 6)$ і має нормальний вектор $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$.

Розв'язання: згідно з (6.1)

$$1 \cdot (x - 4) - 2 \cdot (y - 5) + 3 \cdot (z - 6) = 0, \quad x - 2y + 3z - 4 + 10 - 18 = 0, \\ x - 2y + 3z - 12 = 0 - \text{шукане рівняння площини.}$$

Приклад: скласти рівняння площини α , яка проходить через точку $M_0(1; 2; 3)$ паралельно векторам $\vec{a}_1 = \{1; -1; 0\}$ та $\vec{a}_2 = \{-1; 2; 1\}$.

Розв'язання: на площині α візьмемо довільну точку M з біжучими координатами $(x; y; z)$: $M(x; y; z)$. Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$; $\overrightarrow{M_0M} = \{x - 1; y - 2; z - 3\}$. Вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – компланарні.

Умова компланарності $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$.

Маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad -1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-3) = 0,$$

$$x - 1 + y - 2 - z + 3 = 0,$$

$x + y - z = 0$ – шукане рівняння площини.

Приклад: скласти рівняння площини α , яка проходить через точки $M_1(2; -1; 3)$ і $M_2(3; 1; 2)$ паралельно вектору $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

Розв'язання: на площині α візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - 2; y + 1; z - 3\}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{1; 2; -1\}.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}$ – компланарні. Отже, $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad 7 \cdot (x-2) - 7 \cdot (y+1) - 7 \cdot (z-3) = 0,$$

$$x - 2 - y - 1 - z + 3 = 0,$$

$x - y - z = 0$ – шукане рівняння площини.

Приклад: знайти відрізки, які відтинає площина $3x - 4y + 2z - 12 = 0$ на координатних осях.

Розв'язання: із рівняння площини $3x - 4y + 2z - 12 = 0$:

$$3x - 4y + 2z - 12 = 0 \mid :12$$

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1.$$

Згідно з (6.3) $m = 4, n = -3, p = 6$.

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$, $M_3(2; 0; 2)$.

Розв'язання: згідно з (6.6) маємо:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$3 \cdot (x-3) + 3 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-2) = 0,$$

$$3x - 9 + 3y + 3 + z - 2 = 0,$$

$3x + 3y + z - 8 = 0$ – шукане рівняння площини.

Взаємне розташування площин

Нехай площини задані загальними рівняннями:

$$\omega_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\omega_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Розглянемо нормальні вектори цих площин:

$$\overline{n_1}(A_1; B_1; C_1) \perp \omega_1, \quad \overline{n_2}(A_2; B_2; C_2) \perp \omega_2.$$

1. При $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$: $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$ площини паралельні $\omega_1 \parallel \omega_2$.

2. Зокрема, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ площини співпадають.

3. Якщо подвійна рівність $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ не виконується, то площини перетинаються під кутом

$$\cos \varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (6.10)$$

Зокрема, якщо $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$, то площини перпендикулярні $\omega_1 \perp \omega_2$.

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\rho(M_0; l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (6.11)$$

Приклад: обчислити кут між площинами $\omega_1: x + \sqrt{2}y + z + 1 = 0$, $\omega_2: x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

Розв'язання: для площини $\omega_1: \overline{n_1} = \{1; \sqrt{2}; 1\}$, для $\omega_2: \overline{n_2} = \{1; \sqrt{2}; -1\}$.

Згідно з (6.10)

$$\cos \varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1+2+1} \cdot \sqrt{1+2+1}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Приклад: обчислити відстань від точки $M_0(-2; -4; 3)$ до площини $\omega: 2x - y + 2z + 3 = 0$.

Розв'язання: згідно з (6.11)

$$d = \frac{|2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-4 + 4 + 6 + 3|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3,$$

$d = 3$ – відстань від даної точки до заданої площини.

§ 7. Пряма в просторі

Нехай пряма l задана в просторі точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, тобто вектором паралельним прямій l .

Канонічне рівняння прямої:

$$l: \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}. \quad (7.1)$$

Із канонічного рівняння маємо:

$$l: \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z} = t.$$

Параметричні рівняння прямої:

$$l: \begin{cases} x = a_x t + x_0, \\ y = a_y t + y_0, \\ z = a_z t + z_0, \\ t \in R. \end{cases} \quad (7.2)$$

Якщо як параметр взяти час, то параметричні рівняння задають прямолінійний неприскорений рух зі швидкістю

$$v = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

$$l: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (7.3)$$

Загальне рівняння прямої.

Пряму можна розглядати, як лінію перерізу (перетину) двох непаралельних площин, заданих загальними рівняннями, тобто пряму в просторі можна задати системою двох лінійних рівнянь:

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Кут між прямими в просторі

Нехай дві прямі в просторі задані канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x-x_1}{a_x} = \frac{y-y_1}{a_y} = \frac{z-z_1}{a_z},$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{b_x} = \frac{y-y_2}{b_y} = \frac{z-z_2}{b_z}.$$

Тоді задача визначення кута між цими прямими зводиться до визначення кута між їх напрямними векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (7.5)$$

Зокрема, якщо $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, то прямі паралельні $l_1 \parallel l_2$;

якщо $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$, то прямі перпендикулярні $l_1 \perp l_2$.

Приклад: скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; -3; 6)$ паралельно до вектора $\vec{a} = \{3; 4; 5\}$.

Розв'язання: згідно з (7.1)

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{5} \text{ — канонічне рівняння прямої.}$$

Згідно з (7.2)

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 4t - 3 \\ z = 5t + 6 \end{cases} \text{ – параметричні рівняння прямої.}$$

Приклад: скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(2; 4; 5)$, $M_2(-1; -2; 3)$.

Розв'язання: згідно з (7.3)

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-4}{-2-4} = \frac{z-5}{3-5},$$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-5}{-2}, \text{ або так}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-5}{2} \text{ – канонічне рівняння прямої.}$$

$$\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = 6t + 4, \\ z = 2t + 5 \end{cases} \text{ – параметричні рівняння прямої.}$$

Приклад: звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

Розв'язання: оскільки пряма перпендикулярна до нормальних векторів $\vec{n}_1 = \{1; 2; -1\}$ і $\vec{n}_2 = \{2; -1; 1\}$, то за напрямний вектор $\vec{a}$ прямої можна взяти векторний добуток

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2, \text{ тобто } \vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

І тому $a_x = 1$, $a_y = -3$, $a_z = -5$.

Точку M_0 знайдемо, якщо візьмемо в обох рівняннях, наприклад, $x = 0$:
$$\begin{cases} 2y - z - 6 = 0, \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5, \\ z = 4. \end{cases}$$

Тому $M_0(0; 5; 4)$.

Отже, канонічне рівняння прямої має наступний вигляд:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{-5}.$$

Приклад: знайти кут між прямими

$$l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{-1}, \text{ і } l_2: \begin{cases} x = 2t-1, \\ y = 0, \\ z = t-3. \end{cases}$$

Розв'язання: з рівняння $l_1: \vec{a}_1 = \{3; 0; -1\}$, з рівняння $l_2: \vec{a}_2 = \{2; 0; 1\}$. Згідно з (7.5)

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = \\ &= \frac{6-1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Отже, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Деякі задачі на пряму та площину в просторі

1. Кут між прямою та площиною.

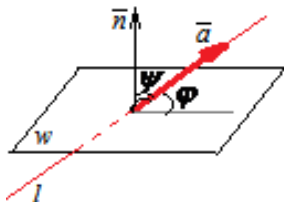
Нехай пряма задана канонічним рівнянням, а площина – загальним рівнянням.

$$l: \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z},$$

$$\omega: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Відповідні напрямний та нормальний вектори:

$$\bar{a}(a_x; a_y; a_z) \parallel l, \quad \bar{n}(A; B; C) \perp \omega.$$



$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \psi = \sin \varphi,$$

$$\sin \varphi = \frac{Aa_x + Ba_y + Ca_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8.1)$$

Зокрема, якщо $\frac{a_x}{A} = \frac{a_y}{B} = \frac{a_z}{C}$, то пряма перпендикулярна площині $l \perp \omega$, якщо $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$, то пряма паралельна площині $l \parallel \omega$.

Приклад: знайти кут між прямою $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-8}{-3}$ та площиною $2x + 4y - 6z + 7 = 0$.

Розв'язання: напрямний вектор прямої – $\bar{a}(1; 2; -3)$, нормальний вектор площини – $\bar{n}(2; 4; -6)$. Використовуючи формулу (7.6), отримаємо

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-6)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2}} = \\ &= \frac{2 + 8 + 18}{\sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{4 + 16 + 36}} = \frac{28}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = \frac{28}{\sqrt{784}} = \frac{28}{28} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

2. Перетин прямої і площини.

Нехай потрібно знайти точку перетину прямої

$$\begin{cases} x = a_x t + x_0, \\ y = a_y t + y_0, \\ z = a_z t + z_0 \end{cases} \text{ з площиною } Ax + By + Cz + D = 0.$$

Розв'язуючи рівняння в системі, отримаємо

$$(Aa_x + Ba_y + Ca_z)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (8.2)$$

З останнього рівняння знаходимо значення параметра t , яке відповідає точці перетину прямої і площини.

Тут можливі такі випадки:

1. $Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0$ – пряма перетинає площину в одній точці.

2. $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ – пряма паралельна площині.

3. $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ – пряма належить площині.

Приклад: знайти точку перетину прямої і площини:

$$\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}, \quad 3x - y + 2z - 5 = 0.$$

Розв'язання: параметричні рівняння даної прямої:

$$\begin{cases} x = 5t + 7, \\ y = t + 4, \\ z = 4t + 5. \end{cases}$$

Підставляючи значення x , y , z із рівнянь прямої в рівняння площини, отримаємо

$$3(5t + 7) - (t + 4) + 2(4t + 5) - 5 = 0,$$

$$15t + 21 - t - 4 + 8t + 10 - 5 = 0, \quad 22t + 22 = 0, \quad t = -1.$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} x = 5(-1) + 7, \\ y = (-1) + 4, \\ z = 4(-1) + 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = 1. \end{cases}$$

Шукана точка має координати (2; 3; 1).

3. Рівняння прямої, яка проходить через точку перпендикулярно до даної площини.

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$, має наступний вигляд:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}. \quad (8.3)$$

Приклад: скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(1; -3; 5)$ перпендикулярно до площини $x + 6y - 5z - 17 = 0$.

Розв'язання: згідно з (8.3) маємо: $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 3}{6} = \frac{z - 5}{-5}$.

4. Рівняння площини, яка проходить через точку паралельно до заданої площини.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$, має наступний вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (8.4)$$

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(4; 1; 0)$ паралельно до площини $5x - y - 6z + 2 = 0$.

Розв'язання: згідно з (8.4) маємо

$$\begin{aligned} 5(x - 4) - (y - 1) - 6(z - 0) &= 0, \quad 5x - 20 - y + 1 - 6z = 0, \\ 5x - y - 6z - 19 &= 0. \end{aligned}$$

5. Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до даної прямої.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, має наступний вигляд:

$$m(x-x_1) + n(y-y_1) + p(z-z_1) = 0. \quad (8.5)$$

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(5; 7; -1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-2}$.

Розв'язання: згідно з (8.5) маємо

$$2(x-5) - (y-7) - 2(z+1) = 0, \quad 2x - 10 - y + 7 - 2z - 2 = 0$$

або $2x - y - 2z - 5 = 0$.

6. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.

Нехай шукана площина проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і пряму $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ та $\vec{s} = \{m, n, p\}$ (тут $M(x, y, z)$ – довільна точка площини) – компланарні, тобто мішаний добуток $(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}) = 0$, або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \quad (8.6)$$

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2; -2; 1)$ та пряму $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t - 3. \end{cases}$

Розв'язання: згідно з (8.6) маємо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 1-2 & 2+2 & -3-1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-4(x-2) - 6(y+2) - 5(z-1) = 0,$$

$$4(x-2) + 6(y+2) + 5(z-1) = 0, \quad 4x + 6y + 5z - 1 = 0.$$

7. Рівняння площини, яка проходить через пряму паралельно іншій прямій.

Нехай площина проходить через пряму $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ і паралельна до прямої $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$.

Якщо $M(x, y, z)$ – довільна точка площини, то вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ та $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ – компланарні, тобто $(\overrightarrow{M_1M}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.7)$$

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ паралельно прямій $\begin{cases} x = -t + 2, \\ y = 3t + 1, \\ z = 4t - 2. \end{cases}$

Розв'язання: згідно з (8.7) маємо

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$15(x+1) - 7y + 9(z-2) = 0 \text{ або } 15x - 7y + 9z - 3 = 0.$$

8. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини.

Нехай площина проходить через пряму $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ перпендикулярно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{s}$ та $\vec{n}$ — компланарні, тобто $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{s}, \vec{n}) = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \quad (8.8)$$

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через пряму перпендикулярно до заданої площини, якщо $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$, $3x + 4y - z - 1 = 0$.

Розв'язання: згідно з (8.8) маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} -8(x-1) + y - 20z &= 0, & 8(x-1) - y + 20z &= 0 \\ \text{або } 8x - y + 20z - 8 &= 0. \end{aligned}$$

9. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.

Нехай площина проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$, $\frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{p}$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x-x_1; y-y_1; z-z_1\}$ ($M(x, y, z)$ – довільна точка площини), $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$, та $\vec{s} = \{m, n, p\}$ – компланарні. Тому мішаний добуток $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}) = 0$, або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \quad (8.9)$$

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

Розв'язання: згідно з (8.9) маємо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1-2 & 2+1 & -3-3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$6(x-2) - 20(y+1) - 11(z-3) = 0 \quad \text{або} \quad 6x - 20y - 11z + 1 = 0.$$

10. Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.

Нехай прямі $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ та $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ перетинаються. Тоді вектор $\vec{M_1M} = \{x-x_1; y-y_1; z-z_1\}$ ($M(x, y, z)$ – довільна точка площини, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка, через яку проходить перша пряма), $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ та $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ – компланарні. Тому їх мішаний добуток $(\vec{M_1M}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.10)$$

Приклад: скласти рівняння площини, яка проходить через дві прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$, $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$.

Розв'язання: згідно з (8.10) маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} -2(x-1) + 16(y+2) + 13(z-5) &= 0, \\ 2(x-1) - 16(y+2) - 13(z-5) &= 0 \text{ або } 2x - 16y - 13z + 31 = 0. \end{aligned}$$

11. Рівняння перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.

Для того, щоб вивести рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на пряму $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, потрібно:

1) через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ провести площину перпендикулярно до заданої прямої, яка згідно з п. 5 має наступний вигляд: $m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0$;

2) знайти точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перетину прямої $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ з площиною $m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0$;

3) через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ проводимо пряму, рівняння якої $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ і буде рівнянням перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.

Приклад: скласти рівняння перпендикуляра опущеного з точки $B(3; 1; -3)$ на пряму AC , якщо $A(1; -2; -4)$, $B(5; 1; -7)$.

Розв'язання: рівняння прямої AC : $\frac{x - 1}{4} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z + 4}{-3}$.

Рівняння площини, яка проходить через точку B перпендикулярно до прямої AC має наступний вигляд: $4(x - 3) + 3(y - 1) - 3(z + 3) = 0$ або $4x + 3y - 3z - 24 = 0$.

Знайдемо точку M перетину отриманої площини із заданою прямою AC .

$$\text{Параметричні рівняння } AC : \begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -3t - 4. \end{cases}$$

$$4(4t + 1) + 3(3t - 2) - 3(-3t - 4) - 24 = 0, \quad 34t - 14 = 0, \quad t = \frac{7}{17}.$$

$$M: \begin{cases} x = 4 \cdot \frac{7}{17} + 1, \\ y = 3 \cdot \frac{7}{17} - 2, \\ z = -3 \cdot \frac{7}{17} - 4, \end{cases} \begin{cases} x = \frac{45}{17}, \\ y = -\frac{13}{17}, \\ z = -\frac{89}{17}. \end{cases}$$

Отже, $M(\frac{45}{17}; -\frac{13}{17}; -\frac{89}{17})$.

Координати вектора $\overrightarrow{MB} = \left\{ \frac{45}{17} - 3; -\frac{13}{17} - 1; -\frac{89}{17} + 3 \right\}$,
 $\overrightarrow{MB} = \left\{ -\frac{6}{17}; -\frac{30}{17}; -\frac{38}{17} \right\}$. За напрямний вектор шуканої
 прямої можна взяти вектор $\vec{a} = \{3; 15; 19\}$.

Отже, шуканий перпендикуляр має рівняння:
 $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{15} = \frac{z+3}{19}$.

12. Відстань від точки до прямої.

Відстань від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої
 $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_0 M_1}, \vec{s} \right] \right|}{\left| \vec{s} \right|}, \quad (8.11)$$

де $\overrightarrow{M_0 M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$, $\vec{s} = \{m, n, p\}$.

Приклад: обчислити відстань від точки $M_1(1; 3; 5)$ до
 прямої $\frac{x+30}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+2,5}{-1}$.

Розв'язання: відповідно до умови задачі маємо

$$M_0(-30; 0; -2, 5), \quad \vec{s} = \{6; 2; -1\} \text{ і } \overrightarrow{M_0M_1} = \{31; 3; 7, 5\}.$$

$$\text{Тоді } \left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s} \right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 31 & 3 & 7,5 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -18\bar{i} + 76\bar{j} + 44\bar{k},$$

$$\left| \left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s} \right] \right| = \sqrt{324 + 5776 + 1936} = \sqrt{8036}$$

$$\text{і } |\vec{s}| = \sqrt{36 + 4 + 1} = \sqrt{41}.$$

Отже, шукана відстань

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s} \right] \right|}{|\vec{s}|} = \sqrt{\frac{8036}{41}} = \sqrt{196} = 14.$$

13. Відстань між паралельними прямими.

Нехай прямі $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ та $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ – паралельні. Тоді вектори $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ та $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ – колінеарні. Тому відстань між цими прямими можна знайти як відстань від довільної точки першої прямої до другої, тобто

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_2 \right] \right|}{|\vec{s}_2|} = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1 \right] \right|}{|\vec{s}_1|}. \quad (8.12)$$

Приклад: обчислити відстань між двома паралельними прямими $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$, $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$.

Розв'язання: точка $M_1(0; 3; 2)$ належить першій прямій, а точка $M_2(3; -1; 2)$ – другій прямій.

Тоді $\overrightarrow{M_1M_2} = \{3; -4; 0\}$,

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_2 \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k},$$

$$\left| \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_2 \right] \right| = \sqrt{16+9+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$$

Отже, згідно з формулою (8.12) шукана відстань дорівнює $d = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{6}\sqrt{30}$.

14. Найкоротша відстань між двома мимобіжними прямими.

Дві прямі, які не належать одній площині, називаються *мимобіжними*. Якщо прямі $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ мимобіжні, то можна провести єдину пару паралельних площин, до кожної з яких належить одна із прямих. Тому найкоротша відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між двома паралельними площинами, до яких вони належать. Отже, щоб знайти відстань між мимобіжними прямими, потрібно:

1) скласти рівняння площини, яка проходить через першу пряму паралельно другій;

2) знайти відстань від будь-якої точки другої прямої до цієї площини.

З іншого боку, вектори $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$, $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ — некопланарні. Тому на цих векторах можна побудувати паралелепіпед. Тоді довжина висоти паралелепіпеда і буде шуканою відстанню, тобто

$$d = \frac{\left| \left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \right) \right|}{\left| \left[\vec{s}_1, \vec{s}_2 \right] \right|}. \quad (8.13)$$

Приклад: знайти найкоротшу відстань між двома прямими $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ і $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

Розв'язання:

1. Складемо рівняння площини, яка проходить через першу пряму паралельно другій. Згідно із співвідношенням (8.7) отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } x-3y-7z+1=0.$$

2. Знайдемо відстань від точки $M_2(-2; 0; 3)$ до отриманої площини. Згідно з формулою (6.11)

$$d = \frac{|-2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 7 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1+9+49}} = \frac{22}{\sqrt{59}}.$$

Тепер знайдемо відстань d , використовуючи формулу (8.13). Маємо

$$d = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\left| \vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k} \right|} = \frac{|-6+10-2-15-1-8|}{\sqrt{59}} = \frac{22}{\sqrt{59}}.$$

15. Знаходження точки, симетричної даній точці відносно заданої площини або заданої прямої.

Для того, щоб знайти точку Q , яка симетрична точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ відносно площини $Ax + By + Cz + D = 0$, потрібно:

1) через точку M_0 провести пряму перпендикулярно площині $Ax + By + Cz + D = 0$. Її рівняння має наступний

$$\text{вигляд: } \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C};$$

2) знайти точку P перетину отриманої прямої і площини. Точка P – це проєкція точки M_0 на площину;

3) ураховуючи, що точка P – середина відрізка M_0Q , тобто

$$\frac{x_Q - x_0}{2} = x_P; \quad \frac{y_Q - y_0}{2} = y_P; \quad \frac{z_Q - z_0}{2} = z_P, \quad (8.14)$$

з указаних співвідношень знайдемо координати точки $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$.

Для того, щоб знайти точку Q , яка симетрична точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ відносно прямої $l: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$, потрібно:

1. Через точку M_0 провести площину α перпендикулярно до прямої l .

2. Знайти точку P перетину прямої l та площини α .

3. Знайти точку Q , ураховуючи, що точка P – середина відрізка M_0P .

Приклад: знайти точку Q , яка симетрична точці $M_0(1; 3; -4)$ відносно площини $3x + y - 2z = 0$.

Розв'язання: складемо параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 паралельно нормальному

вектору площини $\vec{n} = \{3; 1; -2\}$. Маємо $l: \begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = t + 3, \\ z = -2t - 4, \end{cases}$

підставимо отримані значення x, y, z у рівняння площини: $3(3t + 1) + (t + 3) - 2(-2t - 4) = 0$, звідки $t = -1$.

Підставивши значення $t = -1$ у параметричні рівняння прямої, одержимо точку $P(-2; 2; -2)$, яка є проєкцією точки M_0 на площину. Координати симетричної їй точки Q знайдемо із співвідношення (8.14).
 $x_Q = 2x_P - x_0; \quad y_Q = 2y_P - y_0; \quad z_Q = 2z_P - z_0$.

Отже, $Q(-5; 1; 0)$.

Приклад: знайти точку Q , яка симетрична точці $M_0(4; 3; 10)$ відносно прямої $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

Розв'язання: через точку M_0 проведемо площину, перпендикулярну до прямої l : $2(x - 4) + 4(y - 3) + 5(z - 10) = 0$ або $2x + 4y + 5z - 70 = 0$.

Розв'язуючи систему $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}, \\ 2x + 4y + 5z - 70 = 0 \end{cases}$, отримаємо

точку $P(3; 6; 8)$ – проєкцію точки M_0 на пряму l . Із співвідношень (8.14) знайдемо $Q(2; 9; 6)$.

§ 8. Поверхні другого порядку

Поверхнями другого порядку називають поверхні, які в заданій декартовій системі координат записуються алгебраїчними рівняннями другого степеня, тобто рівняннями наступного вигляду:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

де хоча б один із коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля.

Центром деякої поверхні називається така точка простору, по відношенню до якої точки цієї поверхні розташовані симетрично парами.

Поверхні другого порядку, які мають єдиний центр, називаються *центральною*.

Координати центра $S(x_0; y_0; z_0)$ такої поверхні визначаються із системи (якщо вона має розв'язок):

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Ez_0 + G = 0, \\ Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H = 0, \\ Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + I = 0. \end{cases}$$

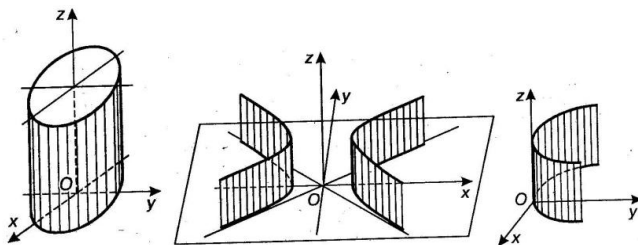
Центральними поверхнями другого порядку є еліпсоїд, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїд, конус.

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку:

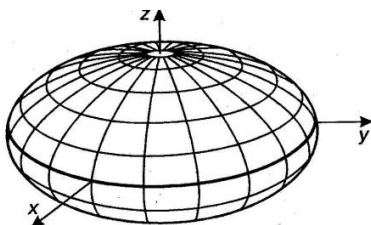
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — еліптичний циліндр;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — гіперболічний циліндр;}$$

$$x^2 = 2py \text{ — параболічний циліндр;}$$



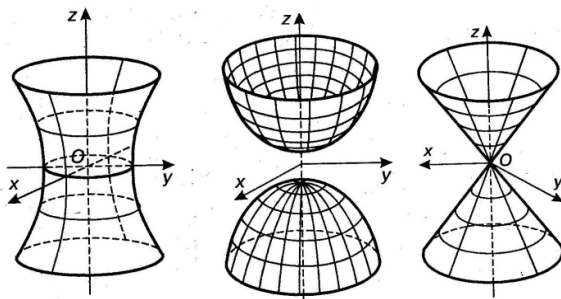
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — еліпсоїд;}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — однопорожнинний гіперболоїд;}$$

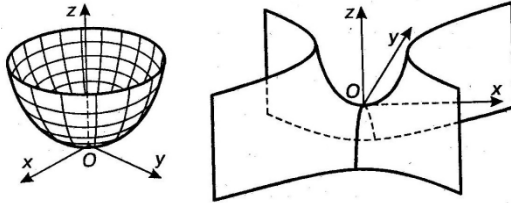
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — двопорожнинний гіперболоїд;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ — конус;}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ — еліптичний параболоїд;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ — гіперболічний параболоїд;}$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ — пара площин, що перетинається;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ — пара паралельних площин;}$$

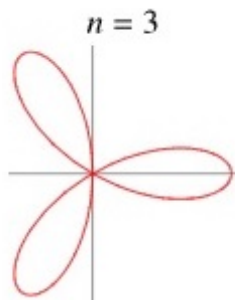
$$x^2 = 0 \text{ — пара площин, що співпадають.}$$

§ 9. Деякі криві та поверхні, що зустрічаються в механіці

Крива троянди, також звана трояндою Гранді або багатолистої, є кривою, що має форму квітки з пелюстками. Ця крива була названа *rhodonea* («*rhodonea*», від дав.-грец. *ρόδον* — «троянда») італійським математиком Гвідо Гранді між 1723 і 1728 роками, тому що вона нагадує троянду. Полярне рівняння троянди зазвичай записується як

$$A = a \cdot \cos \varphi.$$

Трипелюсткова троянда:



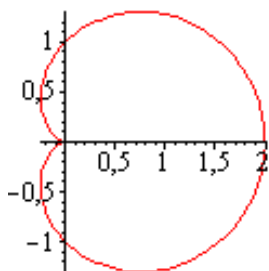
Версія повернена на 90 градусів задається рівнянням

$$\rho = a \cdot \sin \varphi .$$

Кардіоїда – (грец. *кардіа* – серце, грец. *εἶδος* – вид) – плоска лінія, яка описується фіксованою точкою M кола радіуса R , що котиться по нерухомому колу з таким же радіусом. Отримала свою назву через схожість своїх обрисів зі стилізованим зображенням серця.

У прямокутних координатах

$$(x^2 + y^2 + 2Rx)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0 .$$



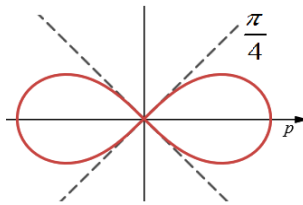
Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = 2R \cos t (1 + \cos t), \\ y = 2R \sin t (1 + \cos t), \\ t \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

Рівняння в полярних координатах:

$$\rho = 2R(1 + \cos \varphi).$$

Лемніската Бернуллі – геометричне місце точок, добуток відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) незмінна і дорівнює квадрату половини відстані між фокусами. Назва походить з античного Риму, де «лемнісгатою» називали бантик, за допомогою якого прикріпляли вінок до голови переможця на спортивних іграх. Цю лемніскату називають на честь швейцарського математика Якоба Бернуллі, який поклав початок її вивченню.



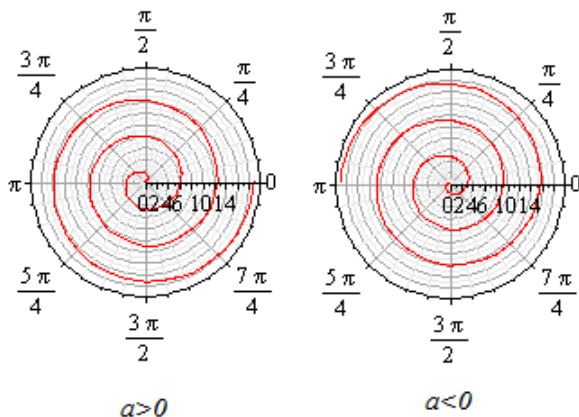
Рівняння в полярних координатах:

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

У прямокутних координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Спіраль Архімеда – лінія, описана точкою M , що рівномірно рухається по променю, який сам рівномірно обертається навколо свого початку.



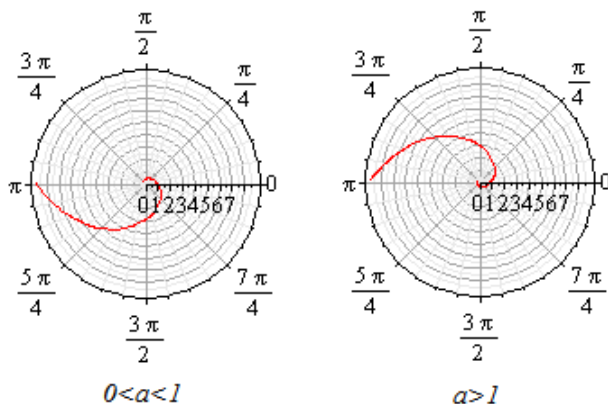
Рівняння в полярних координатах:

$\rho = a\varphi$, де $a > 0$ – стала величина.

Логарифмічна спіраль

Рівняння в полярних координатах:

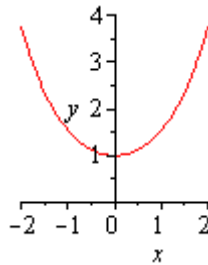
$$\rho = a^\varphi, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$



Логарифмічна спіраль перетинає полярні радіуси всіх своїх точок під одним і тим самим кутом. На цій властивості ґрунтується її застосування в техніці.

Так у різних різучих інструментах і машинах обертові ножі мають профіль, окреслений по дузі логарифмічною спіраллю. Тому кут різання залишається постійним. Логарифмічна спіраль застосовується в теорії механізмів під час проєктуванні зубчастих коліс із змінним передавальним числом (тобто відношенням їх кутових швидкостей).

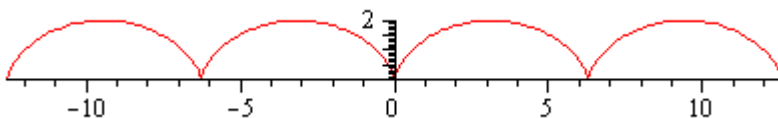
Ланцюгова лінія, катенарія (анг. *catenary*) – лінія, форму якої приймає гнучка однорідна нерозтяжна важка нитка, або ланцюг (звідси назва) із закріпленими кінцями в однорідному гравітаційному полі. Вона є плоскою трансцендентною кривою.



Рівняння в декартових координатах:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad a > 0.$$

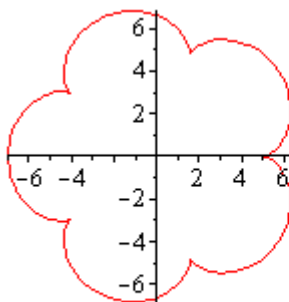
Циклоїда – траєкторія фіксованої точки кола, яка котиться без ковзання вздовж нерухомої прямої.



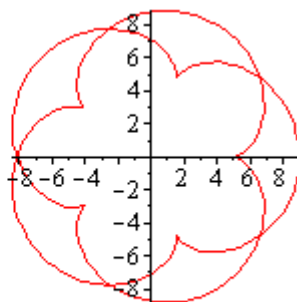
Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \\ t \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

Епіциклоїда – траєкторія фіксованої точки кола радіуса r , що котиться без ковзання по зовнішній стороні іншого нерухомого кола радіуса R (вважаємо, що $R > r$).



$R=5, r=1$

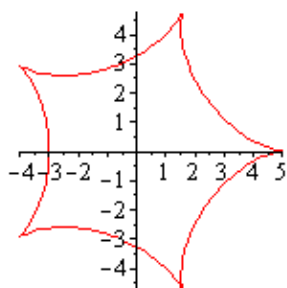


$R=5, r=2$

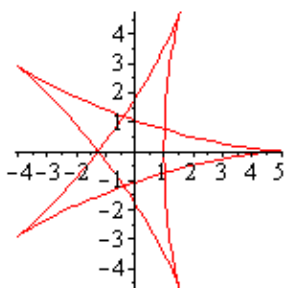
Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = (R+r) \cos \frac{r}{R}t - r \cos \left(t + \frac{r}{R}t \right), \\ y = (R+r) \sin \frac{r}{R}t - r \sin \left(t + \frac{r}{R}t \right), \\ t \in R. \end{cases}$$

Гіпоциклоїда – траєкторія фіксованої точки кола радіуса r , що котиться без ковзання по внутрішній стороні іншого нерухомого кола радіуса R (вважаємо, що $R > r$).



$$R=5, r=1$$

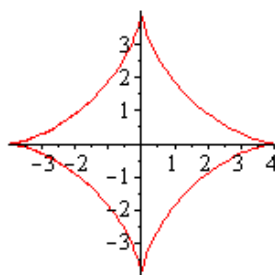


$$R=5, r=2$$

Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = (R-r) \cos \frac{r}{R} t + r \cos \left(t - \frac{r}{R} t \right), \\ y = (R-r) \sin \frac{r}{R} t - r \sin \left(t - \frac{r}{R} t \right), \\ t \in R. \end{cases}$$

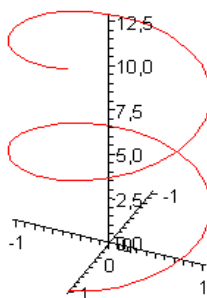
Зокрема, при $R = 4r$, епіциклоїда називається *астроїдою*.



Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = R \cos^3 t, \\ y = R \sin^3 t, \\ t \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

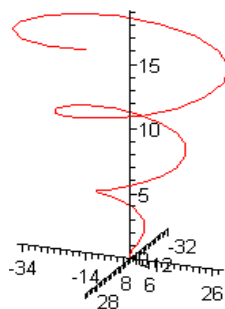
Гвинтова лінія – лінія, описана точкою, що рухається зі швидкістю v по твірній кругового циліндра радіуса R , який до того ж обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω .



Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t, \\ y = R \sin \omega t, \\ z = vt, \\ t \in [0; \infty). \end{cases}$$

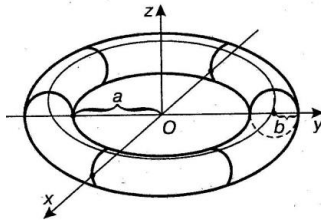
Конічна лінія – лінія, описана точкою, що рухається зі швидкістю v по твірній кругового конуса, який до того ж обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω .



Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = t \cos \omega t, \\ y = t \sin \omega t, \\ z = vt, \\ t \in [0; \infty). \end{cases}$$

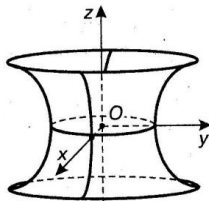
Тор – геометричне тіло, що утворюється обертанням кола навколо осі, котра лежить в одній площині з колом, але не перетинає його. Форма тора зовні нагадує бублик.



Параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v, \\ y = (a + b \cos u) \sin v, \\ z = b \sin u, \\ u \in [0; 2\pi), \quad v \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

Катеноїд – поверхня, що отримана обертанням ланцюгової лінії навколо її осі.



Нехай ланцюгова лінія

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \frac{u}{a}, \\ y = 0, \\ z = u. \end{cases}$$

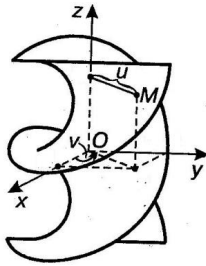
обертається навколо осі Oz .

Параметричні рівняння катеноїда:

$$\begin{cases} x = \left(a \operatorname{ch} \frac{y}{a} \right) \cos v, \\ y = \left(a \operatorname{ch} \frac{y}{a} \right) \sin v, \\ z = u, \\ u \in R, \quad v \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

Катеноїд є єдиною мінімальною поверхнею серед поверхонь обертання. Для того щоб описати цю властивість, розглянемо два кола, отримані перетином катеноїда площинами $z = -c$, $z = c$. Будь-яка поверхня, краї якої збігаються з цими колами має площу більшу, ніж частина катеноїда, розташована між зазначеними колами. Так, наприклад, мильна плівка, що з'єднує дані кола, під дією сил внутрішнього тяжіння набуває форми катеноїда.

Гелікоїд – поверхня, що утворена прямою, яка обертається з постійною кутовою швидкістю навколо нерухомої осі, перетинає вісь під постійним кутом α і одночасно переміщується поступально з постійною швидкістю вздовж цієї осі.



При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ гелікоїд називають *прямим*, у протилежному випадку гелікоїд називають *косим*.

Параметричні рівняння прямого гелікоїда:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = av, \quad a = \text{const}, \\ u \geq 0, \quad v \in R. \end{cases}$$

Наочне уявлення про стан окремих прямих (променів) при $v = \text{const}$ дають гвинтові сходи.

Уявлення про гелікоїд можна також скласти, наприклад, спостерігаючи рух гвинта гелікоптера під час його вертикального зльоту.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1. Обчислити матрицю C , якщо дано матриці A і B .

№ варіанта	Матриці A і B	Матриця C
1	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$C = A \cdot B - 2A^T$
2	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$C = -2B^T + A \cdot B$
3	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$C = 4A - (A \cdot B)^T$
4	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$C = 3A + (A \cdot B)^T$
5	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$C = 2A + (A \cdot B)^T$
6	$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$C = 3B^T - A \cdot B$

№ варіанта	Матриці A і B	Матриця C
7	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$C = -B + (A \cdot B)^T$
8	$A = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$C = -A + (A \cdot B)^T$
9	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$C = 2(A \cdot B)^T - A$
10	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 10 & 7 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$C = -(A \cdot B)^T + 3A$
11	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$C = (A \cdot B)^T - 2B$
12	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = (A \cdot B)^T - 3B$
13	$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$C = -2B + (A \cdot B)^T$
14	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$C = -2A + (A \cdot B)^T$
15	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$C = -3A - (A \cdot B)^T$

№ варіанта	Матриці A і B	Матриця C
16	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$C = (A \cdot B)^T - B$
17	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$C = 3A - 4B + (A \cdot B)^T$
18	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$C = 4A - (A \cdot B)^T$
19	$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$C = -3B + (A \cdot B)^T$
20	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$C = 2A^T + A \cdot B$

Завдання № 2. Обчислити визначник:

а) розкладом за елементами будь-якого рядка чи стовпчика;

б) методом ефективного пониження порядку.

№ варіанта	Визначник	№ варіанта	Визначник
1	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 8 & 4 \end{vmatrix}$	7	$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 0 & 6 & 5 \\ 4 & 9 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 10 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	9	$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 7 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -4 & 6 \end{vmatrix}$	10	$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \\ 8 & 4 & 9 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 10 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

№ варіанта	Визначник	№ варіанта	Визначник
13	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 8 & 6 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -10 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
14	$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -8 \\ 5 & -3 & 9 & -7 \\ 0 & -4 & 6 & -6 \end{vmatrix}$
15	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$	19	$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} -3 & 3 & -6 & 4 \\ 2 & 7 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

Завдання № 3. Знайти ранг матриці.

№ варі- анта	Матриця	№ варі- анта	Матриця
1	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ -12 & 4 & -8 & 10 & -8 \\ -5 & 0 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$	7	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & -2 & -3 \\ -3 & 9 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 0 & 2 \\ -10 & -4 & 11 & 9 & 2 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -8 & -13 & 19 & 12 & -6 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 & -2 & -3 \\ -5 & -8 & -10 & -23 & 5 \\ -1 & 5 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$	9	$A = \begin{pmatrix} 27 & 23 & 6 & 15 & 10 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 18 & -19 & -8 & -25 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 5 & -3 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 6 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & 0 & 20 & 1 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 9 & 16 & -1 & 16 & 4 \\ 4 & -1 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$	11	$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 14 & -2 & 11 & -5 \\ 10 & 2 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$
6	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -4 & 0 & 6 \\ 13 & 8 & 9 & 13 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -2 & -3 & 9 \\ 5 & 6 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & -2 & 2 \\ -9 & -6 & -1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

№ варі- анта	Матриця	№ варі- анта	Матриця
13	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 & 2 \\ 13 & 12 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$	17	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ -7 & 4 & -7 & 10 & 13 \\ 1 & 8 & -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
14	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -4 & -3 & -1 \\ 13 & 0 & -4 & -6 & -2 \\ 4 & -5 & 12 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	18	$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ -5 & -4 & 13 & 4 & 10 \\ -5 & 8 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 4 & -1 \\ -5 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 12 & -5 & -9 & -1 \\ 12 & 1 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$	19	$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & -1 & -2 \\ 16 & 5 & -4 & 11 & -2 \\ 5 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ -7 & 10 & -7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$
16	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ -10 & 10 & -7 & 3 & -9 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$	20	$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 & 12 & -1 \\ 3 & -3 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 5 & -2 \\ -8 & 12 & 8 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Завдання № 4. Розв'язати систему рівнянь:

- а) методом оберненої матриці;
- б) методом Крамера;
- в) методом Гауса.

№ варіанта	Система	№ варіанта	Система
1	$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$	9	$\begin{cases} -4x + y - z = -10, \\ 4x - 5y - 2z = -5, \\ 5x + 5y - z = 29. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - z = 5. \end{cases}$	10	$\begin{cases} -2x + 4y + z = -2, \\ x + y - z = -3, \\ -x + y + z = 1. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x \quad \quad + z = -7. \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x + 5y + 5z = 21, \\ x + 3y - 5z = 4, \\ x - z = 2. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x + y + z = 4, \\ 2x - y + 3z = 1, \\ -5x + 2y + 4z = -3. \end{cases}$	12	$\begin{cases} 4x - 3y - z = 4, \\ 3x + y - 5z = -10, \\ 3x + 2y + 2z = -14. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y - z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$	13	$\begin{cases} -2x + 4y + 5z = -18, \\ -3x + 3y + 2z = -4, \\ 5x + y + 2z = -28. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x + y + 4z = 16, \\ -9x + 5y + z = 4, \\ 4x - 3y \quad + z = 1. \end{cases}$	14	$\begin{cases} -3x + 5z = 6, \\ y - z = 3, \\ 2x - 5y + 2z = -19. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x - y + 3z = 10, \\ -4x - 2y + 3z = 2, \\ -4x - 3y + 2z = -5. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 3x + 4y + 4z = 13, \\ -5x - 3y + 3z = 5, \\ 3x + y + 4z = 7. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = -16, \\ 4x + 3y + 3z = -15, \\ -2x + z = 9. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 4x - 4y - z = -16, \\ 2x - 4y + 5z = -36, \\ 3x + 4y + z = 2. \end{cases}$

№ варіанта	Система	№ варіанта	Система
17	$\begin{cases} 2x - y + 3z = 20, \\ -x + 3y + 2z = -1, \\ x + y + 3z = 13. \end{cases}$	19	$\begin{cases} x - y - z = 1, \\ 3x - y - 4z = 10, \\ x + y - 2z = 8. \end{cases}$
18	$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2, \\ 4y + 3z = 17, \\ 3x + y - 4z = 10. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x - 5y + 5z = 6, \\ -3x + 4y + 4z = -18, \\ -5x + y + 2z = 2. \end{cases}$

Завдання № 5. Знайти загальний та два часткові розв'язки системи рівнянь.

№ варіанта	Система	№ варіанта	Система
1	$\begin{cases} -4x_1 + 4x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ -10x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -5, \\ -5x_1 + 1x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$	7	$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -8x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = -1. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -4, \\ -10x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 8, \\ 5x_1 + 6x_2 + 15x_3 - 8x_4 = -2. \end{cases}$	8	$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ -4x_1 - x_2 + 7x_3 + 5x_4 = -4, \\ -x_1 + 6x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 4, \\ 11x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 11x_4 = -10. \end{cases}$	9	$\begin{cases} -2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 4, \\ -4x_1 - 7x_2 - 11x_3 + 10x_4 = -14, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -11. \end{cases}$
4	$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ -13x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$	10	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 7x_1 - 6x_2 - 13x_3 = -3, \\ 13x_1 - 9x_2 - 12x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -5, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 8x_1 + 11x_2 - 13x_3 + x_4 = -8, \\ 7x_1 + 14x_2 - 12x_3 - x_4 = -17. \end{cases}$	11	$\begin{cases} 4x_1 - x_3 - 3x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 7, \\ 10x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 11x_4 = 13. \end{cases}$
6	$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ -5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 3, \\ -2x_1 + 13x_2 - 2x_3 = -5, \\ -3x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 0. \end{cases}$	12	$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 = -4, \\ -11x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ -4x_1 - 10x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4. \end{cases}$

№ варі- анта	Система	№ варі- анта	Система
13	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -2, \\ -4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + -13x_3 + 4x_4 = -5. \end{cases}$	17	$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 2, \\ -5x_1 - 12x_2 + 6x_3 + 12x_4 = -4, \\ -8x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1. \end{cases}$
14	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -4, \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 13x_4 = 10, \\ -2x_1 + 12x_2 - 14x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 1x_3 + 4x_4 = -2, \\ 7x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 10, \\ 9x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$	19	$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 6, \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$
16	$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ 9x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 7x_4 = -3, \\ 11x_1 + 16x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3. \end{cases}$	20	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\ -4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -10, \\ -7x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 8x_4 = -15. \end{cases}$

Завдання № 6. Показати, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють базис у просторі та знайти розклад вектора $\bar{d}$ у цьому базису.

№ варі- анта	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
1	(3;4;3)	(6;4;2)	(-1;1;-3)	(-3;1;7)
2	(-2;5;-3)	(1;5;4)	(1;3;1)	(1;-4;-6)
3	(4;-2;3)	(4;-2;-3)	(-1;6;-2)	(1;3;1)
4	(2;5;-4)	(-4;-2;1)	(4;-3;-2)	(-1;0;2)
5	(1;3;5)	(-1;-3;1)	(-2;-4;1)	(-2;-3;1)
6	(-1;4;2)	(1;-4;5)	(2;-1;1)	(5;4;-6)
7	(6;2;2)	(3;1;2)	(3;3;-2)	(1;2;0)
8	(6;1;-2)	(1;3;-3)	(5;-3;1)	(4;-2;10)
9	(-2;5;4)	(4;-1;-1)	(3;6;-4)	(-3;4;10)
10	(-1;-3;5)	(5;-1;-3)	(5;-1;2)	(-4;4;12)
11	(5;5;-1)	(0;-4;5)	(-3;-1;4)	(4;2;-6)
12	(1;-4;-3)	(3;-3;-1)	(-3;5;5)	(0;4;4)
13	(4;-3;-1)	(5;1;0)	(-3;5;3)	(-1;2;4)
14	(2;-2;2)	(6;5;-4)	(0;-2;2)	(5;5;-5)
15	(1;5;0)	(6;-2;-1)	(1;0;1)	(4;0;-8)
16	(-1;2;0)	(4;6;0)	(6;1;5)	(5;-3;13)
17	(2;6;-2)	(5;1;-1)	(-3;-2;-4)	(2;3;-1)
18	(-1;1;0)	(1;-2;5)	(4;2;2)	(-3;1;7)
19	(-1;2;1)	(1;-4;3)	(4;4;3)	(3;4;-2)
20	(2;0;4)	(3;-3;-3)	(2;6;-2)	(-1;-2;0)

Завдання № 7. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3 ;
- 2) площу перерізу, що проходить через середину ребра A_1A_4 і вершини піраміди A_2 і A_3 ;
- 3) об'єм піраміди.

№ варіанта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(-4; -3; 0)	(0; 4; 0)	(2; 2; -5)	(-2; 7; 6)
2	(0; 6; 1)	(6; -2; 4)	(1; 7; 3)	(-6; 2; -6)
3	(5; 2; -4)	(-5; -2; 3)	(-7; 8; 4)	(1; -6; 2)
4	(-3; -1; -3)	(-6; -5; -1)	(5; 8; -5)	(-7; -7; -6)
5	(1; -7; 0)	(-2; -3; 3)	(-1; 0; -2)	(-7; 3; 7)
6	(-2; -6; -1)	(0; -1; -6)	(7; 7; -7)	(-2; -7; 7)
7	(4; -2; -1)	(7; 0; 7)	(5; 6; 4)	(-5; -1; -1)
8	(2; 1; 6)	(-7; 1; 4)	(3; -2; -1)	(2; -4; 7)
9	(1; 1; -6)	(-3; -7; -2)	(8; -5; 7)	(-1; 1; -3)
10	(1; 4; 2)	(-3; -7; -1)	(-3; 7; -4)	(-4; -7; -6)
11	(6; -2; 0)	(-4; 3; 6)	(3; -1; -4)	(-4; 6; 0)
12	(3; 3; -5)	(0; -3; 6)	(1; -6; -2)	(-1; 7; -1)
13	(-6; 1; 5)	(8; -3; -4)	(-3; 2; -7)	(-7; -5; 5)
14	(0; -3; 6)	(7; -1; -2)	(-7; -2; 6)	(-4; 1; 3)
15	(3; -7; 0)	(6; 3; 5)	(-7; -2; 4)	(5; 8; -4)
16	(-6; 0; 5)	(1; -6; -4)	(-1; -5; -2)	(-3; -2; 3)
17	(-5; 4; 6)	(-2; -3; 6)	(7; -3; 1)	(-5; -2; 0)
18	(2; 0; -5)	(-1; -4; 1)	(-5; 1; -1)	(5; 3; 3)
19	(4; 0; 3)	(6; 3; 3)	(-7; -5; 1)	(0; 0; -4)
20	(5; 8; 6)	(1; -1; -7)	(0; 0; -2)	(7; 6; 4)

Завдання № 8. У вершинах піраміди (із завдання 7) розміщені маси $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 1$, $m_4 = 2$ відповідно. Знайти координати центра тяжіння системи точок.

Завдання № 9. Дано три сили $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, прикладені в точці A . Обчислити:

1) роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується в точку B ;

2) момент рівнодійної цих сил відносно точки B .

№ варіанта	$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$\overline{F}_3$	A	B
1	(3; -2; 4)	(-4; 3; -3)	(3; 4; 2)	(1; -4; 3)	(4; 0; -2)
2	(3; -4; 2)	(2; 3; -5)	(-3; -2; 4)	(5; 3; -7)	(4; -1; -4)
3	(7; 3; -4)	(9; -4; 2)	(-6; 1; 4)	(-7; 2; 5)	(4; -2; 11)
4	(9; -4; 4)	(-4; 6; -3)	(3; 4; 2)	(5; -4; 3)	(4; -5; 9)
5	(5; 5; -6)	(7; -6; 6)	(-4; 3; 4)	(-9; 4; 7)	(8; -1; 7)
6	(9; -3; 4)	(5; 6; -2)	(-4; -2; 7)	(-5; 4; -2)	(4; 6; -5)
7	(5; -3; 1)	(4; 2; -6)	(-5; -3; 7)	(-5; 3; 7)	(3; 8; -5)
8	(-5; 8; 4)	(6; -7; 3)	(3; 1; -5)	(2; -4; 7)	(0; 7; 4)
9	(7; -5; 2)	(3; 4; -8)	(-2; -4; 3)	(-3; 2; 0)	(6; 4; -3)
10	(5; -2; 3)	(4; 5; -3)	(-1; -3; 6)	(7; 1; -5)	(2; -3; -6)
11	(3; -5; 4)	(5; 6; -3)	(-7; -1; 8)	(-3; 5; 9)	(5; 6; -3)
12	(-10; 6; 5)	(4; -9; 7)	(5; 3; -3)	(4; -5; 9)	(4; 7; -5)
13	(7; -6; 2)	(-6; 2; -1)	(1; 6; 4)	(3; -6; 1)	(6; -2; 7)
14	(4; -2; 3)	(-2; 5; 6)	(7; 3; -1)	(-3; -2; 5)	(9; -5; 4)
15	(2; -1; -3)	(3; 2; -1)	(-4; 1; 3)	(-1; 4; -2)	(2; 3; -1)
16	(3; -4; 2)	(2; 3; -5)	(-3; -2; 4)	(5; 3; -7)	(4; -1; -4)
17	(4; -2; -5)	(5; 1; -3)	(-6; 2; 5)	(-3; 2; -6)	(4; 5; -3)
18	(7; 3; -4)	(3; -2; 2)	(-5; 4; 3)	(-5; 0; 4)	(4; -3; 5)
19	(6; -4; 5)	(-4; 7; 8)	(5; 1; -3)	(-5; -4; 2)	(7; -3; 6)
20	(2; -2; 3)	(-1; 6; -1)	(2; -6; -7)	(2; -3; 5)	(3; -2; -1)

Завдання № 10. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ (із завдання 7). Знайти:

- 1) рівняння прямої A_1A_4 ;
- 2) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
- 3) кут між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$;
- 4) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

Завдання № 11. Скласти параметричне рівняння прямої.

№ варіанта	Пряма	№ варіанта	Пряма
1	$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x + 5y + 5z = 21, \\ x + 3y - 5z = 4. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 4x + y - z = 5. \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x + y - 5z = -10, \\ 3x + 2y + 2z = -14. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33. \end{cases}$	13	$\begin{cases} -3x + 3y + 2z = -4, \\ 5x + y + 2z = -28. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x + y + z = 4, \\ 2x - y + 3z = 1. \end{cases}$	14	$\begin{cases} -3x + 5z = 6, \\ 2x - 5y + 2z = -19. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 3x + 4y + 4z = 13, \\ -5x - 3y + 3z = 5. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x + y + 4z = 16, \\ 4x - 3y + z = 1. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 4x - 4y - z = -16, \\ 3x + 4y + z = 2. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x - y + 3z = 10, \\ -4x - 3y + 2z = -5. \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x - y + 3z = 20, \\ x + y + 3z = 13. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = -16, \\ 4x + 3y + 3z = -15. \end{cases}$	18	$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2, \\ 4y + 3z = 17. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x - 5y - 2z = -5, \\ 5x + 5y - z = 29. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 3x - y - 4z = 10, \\ x + y - 2z = 8. \end{cases}$
10	$\begin{cases} x + y - z = -3, \\ -x + y + z = 1. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x - 5y + 5z = 6, \\ -5x + y + 2z = 2. \end{cases}$

Завдання № 12. Знайти точку Q , симетричну точці P відносно площини α або відносно прямої l .

№ варіанта	P	Пряма / площина
1	$(-4; -3; 0)$	$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}$
2	$(0; 6; 1)$	$\frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}$
3	$(5; 2; -4)$	$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}$
4	$(-3; -1; -3)$	$\frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}$
5	$(1; -7; 0)$	$\frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}$
6	$(-2; -6; -1)$	$4x + 6y + 4z - 25 = 0$
7	$(4; -2; -1)$	$2x + 6y - 2z + 11 = 0$
8	$(2; 1; 6)$	$2x + 4y - 3 = 0$
9	$(1; 1; -6)$	$y + z + 2 = 0$
10	$(1; 4; 2)$	$4x - 5y - z - 7 = 0$
11	$(6; -2; 0)$	$\frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}$
12	$(3; 3; -5)$	$\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}$
13	$(-6; 1; 5)$	$\frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}$
14	$(0; -3; 6)$	$\frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$
15	$(3; -7; 0)$	$\frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}$
16	$(-6; 0; 5)$	$x + 2y - z - 2 = 0$
17	$(-5; 4; 6)$	$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}$

18	$(2; 0; -5)$	$5x - y + 4z + 3 = 0$
19	$(4; 0; 3)$	$3x - 2y - 4z - 8 = 0$
20	$(5; 8; 6)$	$\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}$

Завдання № 13. Дано рівняння лінії в полярній системі координат. Знайти рівняння цієї лінії у вигляді $F(x; y) = 0$ і побудувати її.

№ варіанта	Рівняння лінії	№ варіанта	Рівняння лінії
1	$\rho = \frac{2}{5-3\cos\varphi}$	11	$\rho = \frac{2}{5-3\sin\varphi}$
2	$\rho = \frac{3}{4-3\cos\varphi}$	12	$\rho = \frac{3}{4-3\sin\varphi}$
3	$\rho = \frac{2}{5+3\cos\varphi}$	13	$\rho = \frac{2}{5+3\sin\varphi}$
4	$\rho = \frac{3}{4+3\cos\varphi}$	14	$\rho = \frac{3}{4+3\sin\varphi}$
5	$\rho = \frac{2}{3-5\cos\varphi}$	15	$\rho = \frac{2}{3-5\sin\varphi}$
6	$\rho = \frac{3}{3-4\cos\varphi}$	16	$\rho = \frac{3}{3-4\sin\varphi}$
7	$\rho = \frac{2}{3+5\cos\varphi}$	17	$\rho = \frac{2}{3+5\sin\varphi}$
8	$\rho = \frac{3}{3+4\cos\varphi}$	18	$\rho = \frac{3}{3+4\sin\varphi}$
9	$\rho = \frac{2}{3-3\cos\varphi}$	19	$\rho = \frac{2}{3-3\sin\varphi}$
10	$\rho = \frac{2}{3+3\cos\varphi}$	20	$\rho = \frac{2}{3+3\sin\varphi}$

Завдання № 14. Дано параметричні рівняння лінії, виключивши параметр t , знайти рівняння цієї лінії у вигляді $F(x; y) = 0$. Зробити схематичний рисунок.

№ варіанта	Рівняння лінії	№ варіанта	Рівняння лінії
1	$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1. \end{cases}$	11	$\begin{cases} x = t^2 + 4t + 1, \\ y = t + 2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = \frac{2}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = 2 \cos 3t, \\ y = 2 \sin 3t. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$	13	$\begin{cases} x = \operatorname{ch} 2t, \\ y = 3 \operatorname{sh} 2t. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = t^2 - 4t + 3, \\ y = t - 2. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = 2 \sin^2 t. \end{cases}$	15	$\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = 2 \cos^2 t. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \operatorname{ctg}^2 t. \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \cos^2 3t. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 2 \operatorname{sh} t, \\ y = 3 \operatorname{ch} t. \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = \frac{3}{\sin t}, \\ y = \operatorname{ctg} t. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = 2t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = -3 \sin^2 t, \\ y = 2 \cos^2 t. \end{cases}$

Завдання № 15. Визначити тип поверхні другого порядку, що задана рівнянням $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} + \frac{z^2}{p} = 1$ і проходить через три задані точки.

№ варіанта	A_1	A_2	A_3
1	(-4; -3; 0)	(-2; 5; 1)	(2; 2; 0)
2	(-3; 3; 1)	(0; -2; 4)	(1; 2; 3)
3	(3; 2; 1)	(-2; 1; 4)	(4; -3; 2)
4	(3; -1; -3)	(-2; 5; -1)	(5; 0; 4)
5	(-2; 3; 0)	(0; 2; 3)	(-1; 0; 2)
6	(-2; -3; 1)	(-1; 1; 0)	(0; -2; 3)
7	(4; -2; -1)	(-5; -1; 0)	(0; 6; 4)
8	(2; 1; 6)	(0; 1; 4)	(3; -2; -1)
9	(1; 1; -6)	(-3; 0; -1)	(2; 2; 0)
10	(1; 4; 2)	(-3; 0; -1)	(4; 4; -3)
11	(6; -2; 0)	(-4; 3; 6)	(3; -1; -4)
12	(3; 3; -5)	(-1; 2; -1)	(1; -6; -2)
13	(-2; 1; 1)	(3; -3; -4)	(-1; 2; 0)
14	(-4; 1; 3)	(1; -1; -2)	(0; -2; 5)
15	(5; 1; -4)	(0; 3; 5)	(-1; -2; 4)
16	(-3; -2; 3)	(1; -2; -4)	(-1; 0; -2)
17	(-5; 4; 1)	(-2; -3; 2)	(0; -3; 1)
18	(5; 3; 3)	(-1; -4; 1)	(-2; 1; -1)
19	(4; 0; 3)	(2; 3; 3)	(1; -5; 1)
20	(5; 0; 6)	(1; -1; 2)	(1; 2; 4)

Зразок виконання індивідуального завдання

Варіант № 0

Завдання № 1. Обчислити матрицю C , якщо дано матриці A і B : $C = (A \cdot B)^T + 3B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 13 & -19 & 38 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} -1 & 13 & 1 \\ 4 & -19 & -3 \\ -7 & 38 & 6 \end{pmatrix},$$

$$3B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 6 & -9 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Тоді шукана матриця C :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 13 & 1 \\ 4 & -19 & -3 \\ -7 & 38 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 6 & -9 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & -2 \\ 10 & -28 & 9 \\ -4 & 32 & 21 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -1 & 16 & -2 \\ 10 & -28 & 9 \\ -4 & 32 & 21 \end{pmatrix}.$

Завдання № 2. Обчислити визначник:

а) розкладом за елементами будь-якого рядка чи стовпчика;

б) методом ефективного пониження порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

а) запишемо розклад за елементами 3-го рядка:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} + 0 + 5 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \\ &\quad + 2 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-36 + 12 - 4 + 48 + 2 - 18) + 5 \cdot (6 + 6 - 16 - 12 - 4 + 12) - \\ &\quad - 2 \cdot (-1 - 18 - 12 - 9 + 12 - 2) = \\ &= 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-8) - 2 \cdot (-30) = 8 - 40 + 60 = 28. \end{aligned}$$

Відповідь: $\Delta = 28$;

б) метод ефективного пониження порядку:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{виберемо елемент } a_{22} \text{ і зробимо} \\ \text{нулі у 2-му стовпчику} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} P_1 - 2P_2 \\ P_4 - 4P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 7 & 11 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 11 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_2 - P_1 \\ P_3 - P_1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2 + 16) = 2 \cdot 14 = 28.\end{aligned}$$

Відповідь: $\Delta = 28$.

Завдання № 3. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: знайдемо ранг методом еквівалентних перетворень. Будемо зводити матрицю до східчастого вигляду. Для початку поміняємо місцями перший і останній рядки (це не обов'язкова операція і зроблена виключно для зручності). Усі наступні перетворення будуть описані нижче. Наприклад, запис « $P_3 + P_1 \cdot 4$ » читаємо як «до третього рядка додаємо перший, помножений на 4». Зауважимо, що змінюватися буде тільки рядок, до якого ми додаємо.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \left| \begin{array}{l} P_2 + P_1 \\ P_3 + P_1 \cdot 4 \\ P_4 + P_1 \cdot 2 \end{array} \right| \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & 9 & 12 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \left| P_3 \cdot \frac{1}{3} \right| \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{array}{l} P_3 + P_2 \cdot (-1) \\ P_4 + P_2 \cdot (-1) \end{array} \right| \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отримана матриця має східчастий вигляд і містить два ненульові рядки. Отже, її ранг дорівнює 2.

Зауваження.

Нульовий рядок — це рядок, що повністю складається з нулів.

Завдання № 4. Розв'язати систему рівнянь:

- а) методом оберненої матриці;
- б) методом Крамера;
- в) методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -1, \\ x - y + 2z = 2, \\ 3x + y + 4z = 14. \end{cases}$$

Розв'язання:

- а) методом оберненої матриці:

Запишемо систему у вигляді матричного рівняння:

$$A \cdot X = B,$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник основної матриці системи:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot (-3) - 3 \cdot (-1) \cdot (-3) - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4 = -22.$$

Оскільки $\det A = -22 \neq 0$, то існує A^{-1} – матриця, обернена до матриці системи і розв'язок системи може бути знайдений за допомогою формули

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -7 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -7 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} (-6) \cdot (-1) + (-7) \cdot 2 + (-1) \cdot 14 \\ 2 \cdot (-1) + 17 \cdot 2 + (-7) \cdot 14 \\ 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ -66 \\ -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$;

б) методом Крамера:

Оскільки

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -22 \neq 0,$$

то система має єдиний розв'язок, який може бути знайдений за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Знайдемо детермінанти Δ_i , $i=1, 2, 3$. Для цього замінімо i -й стовпчик матриці A стовпчиком вільних членів і обчислимо детермінанти одержаних матриць:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 14 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -22; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 14 & 4 \end{vmatrix} = -66;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -44.$$

$$\text{Звідси маємо: } x = \frac{-22}{-22} = 1; \quad y = \frac{-66}{-22} = 3; \quad z = \frac{-44}{-22} = 2;$$

в) методом Гауса.

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 14 \end{array} \right) = (A \mid B).$$

Система сумісна (тобто має розв'язки), якщо ранги основної та розширеної матриці співпадають. Знайдемо ці ранги методом еквівалентних перетворень. Для зручності поміняємо місцями перший і другий рядки.

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} P_2 + P_1 \cdot (-2) \\ P_3 + P_1 \cdot (-3) \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1) P_2 + P_3 \cdot (-1) \\ 2) P_2 \cdot (-1) \\ 3) P_3 \cdot (1/2) \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1) P_3 + P_2 \cdot (-2) \\ 2) P_3 \cdot (-1/11) \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \operatorname{Rg} \bar{A} = \operatorname{Rg} A = 3.
 \end{aligned}$$

Отже, система сумісна і має єдиний розв'язок тому, що ранг дорівнює кількості невідомих системи. Знайдемо цей розв'язок. Для цього запишемо відповідну систему (отриману після еквівалентних перетворень) і розв'яжемо її.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ y + 5z = 13, \\ z = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y - 2z, \\ y = 13 - 5z, \\ z = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \\ z = 2. \end{cases}$$

Завдання № 5. Знайти загальний та два часткові розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання: для розв'язання цієї системи використаємо метод Гауса. Аналогічно розв'язанню пункту (в) завдання № 4 (див. також завдання № 3!), знайдемо ранги основної та розширеної матриці системи.

Запишемо розширену матрицю системи і зробимо всі необхідні елементарні перетворення:

$$\begin{aligned} \bar{A} = (A \mid B) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left| \begin{array}{c} P_2 + P_1 \cdot (-2) \\ P_4 + P_1 \cdot (-1) \end{array} \right| \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left| \begin{array}{c} P_3 + P_2 \\ P_4 + P_2 \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Основна й розширена матриці мають два ненульові рядки, тобто $\text{Rg } \bar{A} = \text{Rg } A = 2$. Отже, система сумісна і має безліч розв'язків (ранг менше кількості невідомих системи). Урахуємо, що мінор, який містить змінні x_1 та x_2 відмінний від нуля: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$. Тому ці змінні візьмемо за базові, а змінні x_3 та x_4 – за вільні.

Перенесемо вільні змінні у праву частину рівностей і виразимо базові змінні через вільні.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4, \\ -2x_2 = -1 - 3x_3 + x_4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(2 + x_3 + 3x_4 - x_2), \\ x_2 = -\frac{1}{2}(-1 - 3x_3 + x_4), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} \cdot (3 - x_3 + 7x_4), \\ x_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 3x_3 - x_4). \end{cases}$$

Змінні x_3 та x_4 – вільні, вони можуть набувати будь-яких значень. Тому загальний розв’язок системи запишемо в наступному вигляді:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3 - x_3 + 7x_4}{4} \\ \frac{1 + 3x_3 - x_4}{2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \in R.$$

Звідси вже легко розв’язати другу частину завдання – знайти два часткові розв’язки системи. Перший з них отримаємо, узявши, наприклад, $x_3 = 1$ та $x_4 = 0$, другий – при $x_3 = 0$ та $x_4 = 1$. Позначимо ці два розв’язки через X_1 та X_2 відповідно. Маємо

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання № 6. Показати, що вектори $\vec{a} = (1; 2; 4)$, $\vec{b} = (3; 1; -3)$, $\vec{c} = (-2; 2; 1)$ утворюють базис у просторі і знайти розклад вектора $\vec{d} = (-9; 3; 18)$ у цьому базисі.

Розв'язання: покажемо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Для цього обчислимо визначник

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 24 + 12 + 8 + 6 - 6 = 45.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Тому вектор $\vec{d}$ запишемо в наступному вигляді:

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c},$$

$$\text{тобто } (-9; 3; 18) = \alpha \cdot (1; 2; 4) + \beta \cdot (3; 1; -3) + \gamma \cdot (-2; 2; 1).$$

Знайдемо координати α , β , γ , розв'язавши систему

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - 2\gamma = -9, \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 3, \\ 4\alpha - 3\beta + \gamma = 18. \end{cases}$$

Використаємо метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 45, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 18 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 90,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 18 & 1 \end{vmatrix} = -135, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 18 \end{vmatrix} = 45.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -3, \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Відповідь: $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Завдання № 7. Дано координати вершин піраміди $A_1(2; 3; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(6; 3; 7)$, $A_4(-5; -4; 8)$. Знайти:

- 1) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3 ;
- 2) площу перерізу, що проходить через середину ребра A_1A_4 і вершини піраміди A_2 і A_3 ;
- 3) об'єм піраміди.

Розв'язання:

1. Складаємо вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$ та $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (4 - 2; 1 - 3; -2 - 1) = (2; -2; -3);$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (6 - 2; 3 - 3; 7 - 1) = (4; 0; 6).$$

Кут ϕ між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ (це і є кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3) знайдемо за формулою

$$\cos \phi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_3}|}.$$

Далі обчислюємо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ (вираз у чисельнику) та добуток їх довжин (вираз у знаменнику). Маємо

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = (2; -2; -3) \cdot (4; 0; 6) =$$

$$= 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 6 = 8 + 0 - 18 = -10,$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17},$$

$$|\overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52},$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_3}| = \sqrt{17} \cdot \sqrt{52} = \sqrt{884} = 2\sqrt{221}.$$

Отже,

$$\cos \varphi = \frac{-10}{2\sqrt{221}} = -\frac{5}{\sqrt{221}}$$

і шуканий кут $\varphi = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{221}}\right) \approx 110^\circ$.

2. Нехай точка B – середина ребра A_1A_4 . Тоді шуканим перерізом буде трикутник BA_2A_3 .

Площу ΔBA_2A_3 можна знайти, використовуючи векторний добуток, а саме, формулу

$$S(\Delta BA_2A_3) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BA_2} \times \overrightarrow{BA_3}|.$$

Отже, план дій такий:

- а) знаходимо координати точки B ;
- б) складаємо вектори $\overrightarrow{BA_2}$ і $\overrightarrow{BA_3}$;
- в) знаходимо векторний добуток $\overrightarrow{BA_2} \times \overrightarrow{BA_3}$;
- г) обчислюємо довжину вектора $\overrightarrow{BA_2} \times \overrightarrow{BA_3}$;
- д) поділивши результат попереднього пункту на 2, отримаємо шукану площу перерізу.

Проведемо всі необхідні обчислення:

- а) точка B – середина відрізка A_1A_4 , де $A_1(2;3;1)$ і $A_4(-5;-4;8)$. Звідси

$$B\left(\frac{2+(-5)}{2}; \frac{3+(-4)}{2}; \frac{1+8}{2}\right) = B\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right);$$

- б) точка $A_2(4;1;-2) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{BA_2} = \left(4 - \left(-\frac{3}{2}\right); 1 - \left(-\frac{1}{2}\right); -2 - \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{13}{2}\right),$$

точка

$$A_3(6; 3; 7) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BA_3} = \left(6 - \left(-\frac{3}{2} \right); 3 - \left(-\frac{1}{2} \right); 7 - \frac{9}{2} \right) = \left(\frac{15}{2}; \frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \overrightarrow{BA_2} \times \overrightarrow{BA_3} &= \left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{13}{2} \right) \times \left(\frac{15}{2}; \frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} (11; 3; -13) \times (15; 7; 5) = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & 3 & -13 \\ 15 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\begin{vmatrix} 3 & -13 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 11 & -13 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (106\vec{i} - 250\vec{j} + 32\vec{k}) = \frac{1}{2} \cdot (53\vec{i} - 125\vec{j} + 16\vec{k}). \end{aligned}$$

$$\text{Таким чином, } \overrightarrow{BA_2} \times \overrightarrow{BA_3} = \frac{1}{2} \cdot (53; -125; 16);$$

$$\begin{aligned} \text{г) } |\overrightarrow{BA_2} \times \overrightarrow{BA_3}| &= \left| \frac{1}{2} \cdot (53; -125; 16) \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{53^2 + (-125)^2 + 16^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2809 + 15625 + 256} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18690}; \end{aligned}$$

д) площа перерізу

$$S(\Delta BA_2 A_3) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA_2} \times \overrightarrow{BA_3}| = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{18690} \approx 34,18 \text{ (кв. од.)}.$$

3. Для знаходження об'єму піраміди $A_1 A_2 A_3 A_4$ використаємо формулу

$$V(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overrightarrow{A_1 A_2} \times \overrightarrow{A_1 A_3} \right) \cdot \overrightarrow{A_1 A_4} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \det(\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}, \overrightarrow{A_1 A_4}) \right|.$$

Вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$ та $\overrightarrow{A_1A_3}$ беремо з пункту (1), вектор $\overrightarrow{A_1A_4} = (-5-2; -4-3; 8-1) = (-7; -7; 7)$.

Тепер обчислюємо визначник

$$\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308.$$

Отже, об'єм піраміди

$$V(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{1}{6} \cdot |308| = \frac{154}{3} \text{ (куб. од.)}.$$

Завдання № 8. У вершинах піраміди $A_1A_2A_3A_4$ (із завдання 7) розміщенні маси $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 1$, $m_4 = 2$ відповідно. Знайти координати центра тяжіння системи точок.

Розв'язання: із завдання 7 запишемо точки

$$A_1(2; 3; 1), A_2(4; 1; -2), A_3(6; 3; 7) \text{ та } A_4(-5; -4; 8).$$

Нехай точка $O(0; 0; 0)$, тоді очевидно, що $\overrightarrow{OA_1} = (2; 3; 1)$, $\overrightarrow{OA_2} = (4; 1; -2)$, $\overrightarrow{OA_3} = (6; 3; 7)$ та $\overrightarrow{OA_4} = (-5; -4; 8)$.

Позначимо через G – центр тяжіння системи точок. Справедлива формула

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1}{M} \cdot \overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2}{M} \cdot \overrightarrow{OA_2} + \frac{m_3}{M} \cdot \overrightarrow{OA_3} + \frac{m_4}{M} \cdot \overrightarrow{OA_4},$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 2 + 3 + 1 + 2 = 8$ – загальна маса всіх точок.

Маємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{2}{8} \cdot (2; 3; 1) + \frac{3}{8} \cdot (4; 1; -2) + \frac{1}{8} \cdot (6; 3; 7) + \frac{2}{8} \cdot (-5; -4; 8) = \\ &= \frac{1}{8} ((4; 6; 2) + (12; 3; -6) + (6; 3; 7) + (-10; -8; 16)) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (12; 4; 19) = \left(\frac{12}{8}; \frac{4}{8}; \frac{19}{8} \right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{19}{8} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, центром тяжіння системи точок є точка $G\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{19}{8}\right)$.

Завдання № 9. Дано три сили $\vec{F}_1 = (3; -4; 2)$, $\vec{F}_2 = (2; 3; -5)$, $\vec{F}_3 = (-3; -2; 4)$, прикладені в точці $A(5; 3; -7)$.

Обчислити:

1) роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується в точку $B(4; -1; -4)$;

2) момент рівнодійної цих сил відносно точки B .

Розв'язання: знайдемо рівнодійну $\vec{F}$ сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3; -4; 2) + (2; 3; -5) + (-3; -2; 4) = (2; -3; 1).$$

Тепер перейдемо до розв'язання кожного з пунктів.

1. Шукану роботу знайдемо за формулою

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Оскільки вектор переміщення $\overrightarrow{AB} = (-1; -4; 3)$, то

$$\begin{aligned} W &= (2; -3; 1) \cdot (-1; -4; 3) = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = \\ &= -2 + 12 + 3 = 13. \end{aligned}$$

Отже, робота W , яку виконує сила $\vec{F}$, дорівнює 13.

2. Момент рівнодійної $\vec{F} = (2; -3; 1)$, прикладеної до точки $A(5; 3; -7)$, відносно точки $B(4; -1; -4)$, обчислимо за формулою

$$M_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}.$$

Вектор $\overrightarrow{BA} = (1; 4; -3)$, отже

$$M_B(\vec{F}) = (1; 4; -3) \times (2; -3; 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -5\vec{i} - 7\vec{j} - 11\vec{k}.$$

Таким чином, шуканий момент

$$M_B(\vec{F}) = (-5; -7; -11).$$

Завдання № 10. Дано координати вершин піраміди $A_1(2; 3; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(6; 3; 7)$, $A_4(-5; -4; 8)$. Знайти:

- 1) рівняння прямої A_1A_4 ;
- 2) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
- 3) кут між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$;
- 4) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язання:

1. Рівняння (канонічні) прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$ має наступний вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

У нашому випадку це точки $A_1(2; 3; 1)$ та $A_4(-5; -4; 8)$. Таким чином, легко отримати

$$\frac{x-2}{-5-2} = \frac{y-3}{-4-3} = \frac{z-1}{8-1}, \quad \frac{x-2}{-7} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-1}{7},$$

звідки $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$ – рівняння прямої A_1A_4 .

Зауваження.

Параметричні рівняння цієї прямої мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3 - t, \quad t \in R. \\ z = 1 + t; \end{cases}$$

Вони є більш «корисними» для застосувань, ніж канонічні рівняння, тому (якщо тільки не вимагають іншого) краще писати саме параметричні рівняння прямої.

2. Рівняння площини, що проходить через точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ та $A_3(x_3; y_3; z_3)$ має наступний вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

У нас точки $A_1(2; 3; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$ та $A_3(6; 3; 7)$.
Отже,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 4-2 & 1-3 & -2-1 \\ 6-2 & 3-3 & 7-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши останній визначник і звівши подібні, отримаємо шукане рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$(x-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - (y-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (z-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-12 \cdot (x-2) - 24 \cdot (y-3) + 8 \cdot (z-1) = 0, \quad | : (-4)$$

$$3 \cdot (x-2) + 6 \cdot (y-3) - 2 \cdot (z-1) = 0,$$

$$3x - 6 + 6y - 18 - 2z + 2 = 0,$$

$$3x + 6y - 2z - 22 = 0.$$

3. Якщо задано напрямний вектор $\vec{a}$ прямої та нормальний вектор $\vec{n}$ площини, то кут α між прямою і площиною може бути знайдено з формули

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}.$$

З пункту (4) цієї задачі маємо $\vec{a} = (-1; -1; 1)$ – напрямний вектор прямої A_1A_4 ; з пункту (5) маємо $\vec{n} = (3; 6; -2)$ – нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$. Отже, обчисливши

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = (-1; -1; 1) \cdot (3; 6; -2) = (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-2) = -11$$

та

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}, |\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\text{отримаємо } \sin \alpha = \frac{|-11|}{\sqrt{3} \cdot 7} = \frac{11}{7\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{11}{7\sqrt{3}}\right) \approx 72^\circ.$$

4. Відстань від точки $A_4(-5; -4; 8)$ до площини $(A_1A_2A_3)$: $3x + 6y - 2z - 22 = 0$ знайдемо за формулою (6.11). Маємо

$$d = \frac{|3 \cdot (-5) + 6 \cdot (-4) - 2 \cdot 8 - 22|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{77}{\sqrt{49}} = \frac{77}{7} = 11.$$

Завдання № 11. Скласти параметричне рівняння прямої

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання: пряма, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{a} = (l; m; p)$, визначається параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Оскільки мінор, який містить змінні x та y відмінний від нуля: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$, то поклавши, наприклад, $z_0 = 0$ у сис-

темі $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0, \end{cases}$ знайдемо точку M_0 , що належить прямій:

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 - 4 = 0, \\ 3x_0 + 2y_0 - 4 = 0, \\ z_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 + 4, \\ 3(2y_0 + 4) + 2y_0 - 4 = 0, \\ z_0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -1, \\ z_0 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, $M_0(2; -1; 0)$.

Напрямний вектор прямої можна обчислити за формулою $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, де $\vec{n}_1 = (1; -2; 3)$ та $\vec{n}_2 = (3; 2; -5)$ — нормальні вектори площини $x - 2y + 3z - 4 = 0$ та $3x + 2y - 5z - 4 = 0$ відповідно.

$$\text{Маємо } \vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k} = (4; 14; 8).$$

Шукані параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + 14t, \\ z = 8t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Завдання № 12.

1. Знайти точку Q , симетричну точці $P(3; -4; -6)$ відносно площини $x - y - 4z - 13 = 0$.

2. Знайти точку Q , симетричну точці $P(2; -5; 7)$ відносно прямої $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}$.

Розв'язання: розв'язання розіб'ємо на три кроки.

Що буде означати розв'язання пункту (1)?

Крок 1. Напишемо параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $P(3; -4; -6)$ перпендикулярно до площини $x - y - 4z - 13 = 0$ (рис. 12.1).

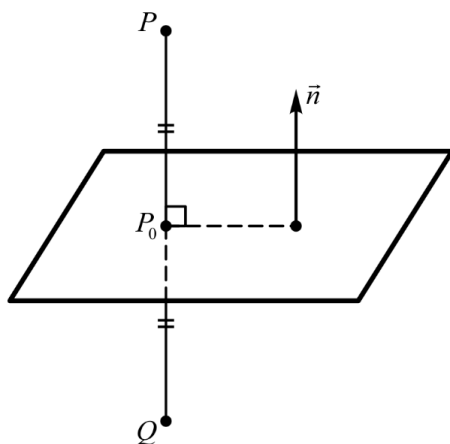


Рис. 12.1

Оскільки нормальний вектор $\vec{n}(1; -1; -4)$ площини буде напрямним вектором шуканої прямої, то її параметричні рівняння мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} x = 3 + 1 \cdot t, \\ y = -4 + (-1) \cdot t, \\ z = -6 + (-4) \cdot t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -4 - t, \\ z = -6 - 4t. \end{cases}$$

Крок 2. Знайдемо координати точки P_0 – проєкції точки P на площину $x - y - 4z - 13 = 0$. Ця точка є точкою перетину прямої (рівняння якої ми знайшли на попередньому кроці) та площини. Підставляючи $x = 3 + t$, $y = -4 - t$, $z = -6 - 4t$ у рівняння площини $x - y - 4z - 13 = 0$, маємо

$$\begin{aligned} (3 + t) - (-4 - t) - 4 \cdot (-6 - 4t) - 13 &= 0, \\ 18t + 18 &= 0, \\ t_0 &= -1. \end{aligned}$$

Таким чином, точка

$$P_0(3 + t_0; -4 - t_0; -6 - 4t_0) = P_0(2; -3; -2).$$

Крок 3. Знайдемо координати точки Q – симетричної до точки P відносно площини. Нехай $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$.

Оскільки точка P_0 є серединою відрізка PQ , то її координати задовольняють рівності

$$2 = \frac{3 + x_Q}{2}, \quad -3 = \frac{-4 + y_Q}{2}, \quad -2 = \frac{-6 + z_Q}{2}.$$

Звідси легко знаходимо $Q(1; -2; 2)$.

(2) Аналогічно пункту 1 цього завдання, розв'язання розіб'ємо на три кроки.

Крок 1. Напишемо рівняння площини, що проходить через точку $P(2; -5; 7)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}$ (рис. 12.2).

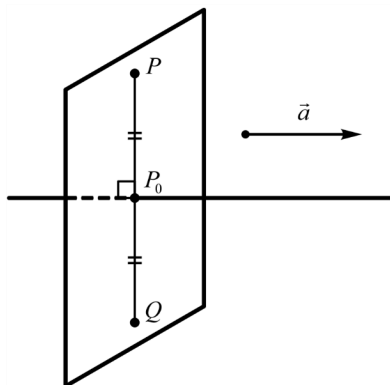


Рис. 12.2

Відомо, що рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C) \neq \vec{0}$ має наступний вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

У нашому випадку замість точки M_0 можна взяти точку $P(2; -5; 7)$, а замість вектора $\vec{n}$ – напрямний вектор прямої

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}, \text{ тобто вектор } \vec{a} = (1; 3; 2). \text{ Маємо рів-}$$

няння площини

$$\begin{aligned} 1 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y + 5) + 2 \cdot (z - 7) &= 0, \\ x - 2 + 3y + 15 + 2z - 14 &= 0, \quad x + 3y + 2z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Крок 2. Знаходимо координати точки P_0 – проєкції точки P на пряму. Зрозуміло, що потрібно знайти точку перетину прямої і площини.

Переписавши рівняння прямої у параметричному вигляді $\begin{cases} x = 5 + t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = 6 + 2t \end{cases}$, і підставивши в рівняння площини

$x + 3y + 2z - 1 = 0$, отримаємо

$$(5 + t) + 3 \cdot (4 + 3t) + 2 \cdot (6 + 2t) - 1 = 0,$$

$$14t + 28 = 0,$$

$$t_0 = -2.$$

Звідси точка $P_0(5 + t_0; 4 + 3t_0; 6 + 2t_0) = P_0(3; -2; 2)$.

Крок 3. Знаходимо координати шуканої точки Q – симетричної до точки P відносно прямої.

Позначимо $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$. Тоді, урахувуючи те, що точка P_0 є серединою відрізка PQ , маємо

$$3 = \frac{2 + x_Q}{2}, \quad -2 = \frac{-5 + y_Q}{2}, \quad 2 = \frac{7 + z_Q}{2}.$$

Звідси $Q(4; 1; -3)$.

Завдання № 13. Дано рівняння лінії в полярній системі координат. Знайти рівняння цієї лінії у вигляді $F(x, y) = 0$ і побудувати її.

$$1) \ r = \frac{1}{1 - \cos \varphi}; \quad 2) \ r = \frac{144}{13 - 5 \cos \varphi}; \quad 3) \ r = \frac{18}{4 - 5 \cos \varphi}.$$

Розв'язання: зв'язок між декартовими та полярними координатами задається формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, & r > 0, \\ \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Тепер перейдемо до розв'язання кожного з пунктів.

1. Підставляючи $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ та $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ у рівняння $r = \frac{1}{1 - \cos \varphi}$, отримаємо

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

$$\left| : \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \right.$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1.$$

Зауваження.

В останніх рівностях ми вважаємо $\sqrt{x^2 + y^2} - x \neq 0$, тобто $y \neq 0$ при $x > 0$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x + 1.$$

Піднесемо до квадрата, за умови $x > -1$ (права частина останньої рівності повинна бути додатною).

$$x^2 + y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$y^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Останнє рівняння задає параболу з вершиною в точці $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, віссю симетрії якої є вісь Ox , гілки направлені вправо (рис. 13.1).

Зауваження.

1) умови $y \neq 0$ при $x > 0$ та $x > -1$, очевидно, виконуються;

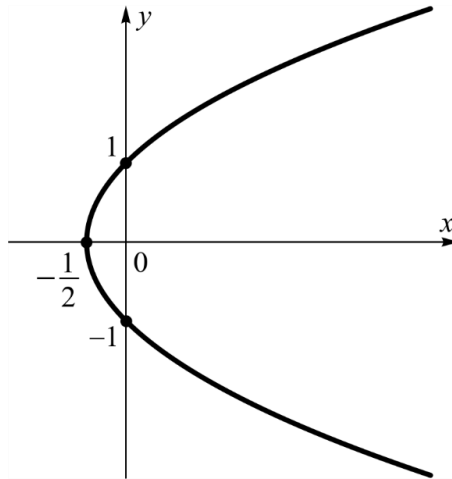


Рис. 13.1

$$2) \quad r = \frac{144}{13 - 5 \cos \phi}. \text{ Аналогічно пункту (1) маємо}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{144}{13 - 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{144 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{13 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - 5x} \quad | : \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$$

$$1 = \frac{144}{13 \sqrt{x^2 + y^2} - 5x} \Leftrightarrow 13 \sqrt{x^2 + y^2} - 5x = 144$$

або так

$$13 \sqrt{x^2 + y^2} = 5x + 144.$$

$$\text{Піднесемо до квадрата, за умови } x > -\frac{144}{5} = -28,8,$$

$$169(x^2 + y^2) = (5x + 144)^2,$$

$$169x^2 + 169y^2 = 25x^2 + 1440x + 20736,$$

$$144x^2 - 1440x + 169y^2 = 20736,$$

$$144(x^2 - 10x + 25 - 25) + 169y^2 = 20736,$$

$$144 \cdot (x - 5)^2 - 144 \cdot 25 + 169y^2 = 20736,$$

$$144(x - 5)^2 + 169y^2 = 24336, \quad | : 24336 = 169 \cdot 144$$

$$\frac{(x - 5)^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

Останнє рівняння задає еліпс з центром у точці $(5; 0)$ та півосями $a = \sqrt{169} = 13$, $b = \sqrt{144} = 12$. Цей еліпс зображено на рис. 13.2. Умова $x > -28,8$, очевидно, виконується;

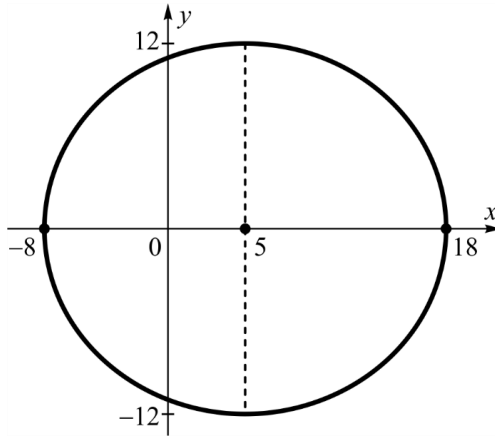


Рис. 13.2

$$\begin{aligned}
 3) \quad r &= \frac{18}{4 - 5 \cos \varphi}. \text{ Знову підставляємо } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ та} \\
 \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{18}{4 - 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{18\sqrt{x^2 + y^2}}{4\sqrt{x^2 + y^2} - 5x} \\
 &\quad \Big| : \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \\
 1 &= \frac{18}{4\sqrt{x^2 + y^2} - 5x} \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 + y^2} - 5x = 18 \Leftrightarrow \\
 &\quad 4\sqrt{x^2 + y^2} = 5x + 18.
 \end{aligned}$$

Підносимо до квадрата, за умови $x > -\frac{18}{5} = -3,6$,

$$16(x^2 + y^2) = (5x + 18)^2, \quad 16x^2 + 16y^2 = 25x^2 + 180x + 324,$$

$$\begin{aligned}
 9x^2 + 180x - 16y^2 + 324 &= 0, \\
 9(x^2 + 20x + 100 - 100) - 16y^2 + 324 &= 0, \\
 9(x+10)^2 - 9 \cdot 100 - 16y^2 + 324 &= 0, \\
 9(x+10)^2 - 16y^2 = 576 & \text{ : } 576 = 64 \cdot 9 = 36 \cdot 16
 \end{aligned}$$

$$\frac{(x+10)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Останнє рівняння задає гіперболу з центром у точці $(-10, 0)$ та півосями $a = \sqrt{64} = 8$ (дійсна піввісь), $b = \sqrt{36} = 6$ (уявна піввісь). Ця гіпербола зображена на рис. 13.3.

Ураховуючи умову $x > -3,6$, маємо, що рівняння $r = \frac{18}{4 - 5 \cos \varphi}$ задає праву гілку гіперболи $\frac{(x+10)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Вона на рис. 13.3 зображена жирною суцільною лінією.

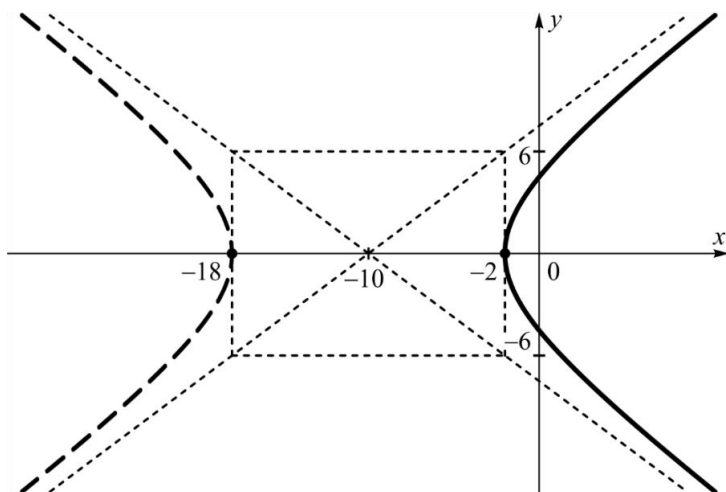


Рис. 13.3

Завдання № 14. Дано параметричні рівняння лінії. Виключивши параметр t , знайти рівняння цієї лінії у вигляді $F(x, y) = 0$. Зробити схематичний рисунок:

$$1) \begin{cases} x = 4 \sin^2 t, \\ y = -5 \cos^2 t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t^2 - 6t + 8, \\ y = t - 3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = 5 \sin 2t, \\ y = 10 \cos^2 t; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x = \frac{2}{\sin t}, \\ y = \operatorname{ctg} t; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x = 3 \operatorname{sh} 4t, \\ y = 2 \operatorname{ch} 4t. \end{cases}$$

Розв'язання: для розв'язання завдання № 14 корисними будуть наступні формули, що є правильними для всіх допустимих значень t :

$$(t+a)^2 = t^2 + 2at + a^2, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t,$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \quad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

$$1. \begin{cases} x = 4 \sin^2 t, \\ y = -5 \cos^2 t. \end{cases}$$

Оскільки $|\sin t| \leq 1$, то $0 \leq x \leq 4$. Аналогічно з $|\cos t| \leq 1 \Rightarrow -5 \leq y \leq 0$.

Далі, так як $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, то всі точки лінії $\begin{cases} x = 4 \sin^2 t, \\ y = -5 \cos^2 t, \end{cases}$ лежать на прямій $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$.

Ця пряма проходить через точки $(4; 0)$ та $(0; -5)$.

Ураховуючи обмеження на змінні x та y , отримаємо відповідь: графік заданої лінії – це відрізок прямої $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$, що з'єднує точки $(4; 0)$ та $(0; -5)$. Цей відрізок зображено на рис. 14.1.

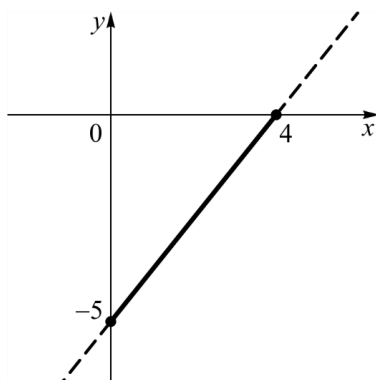


Рис. 14.1

$$2. \begin{cases} x = t^2 - 6t + 8, \\ y = t - 3. \end{cases}$$

Оскільки $(t - 3)^2 = t^2 - 6t + 9 = t^2 - 6t + 8 + 1$, то $y^2 = x + 1$. Таким чином, усі точки лінії лежать на параболі з вершиною в точці $(-1; 0)$, вісь симетрії цієї параболі – вісь Ox , гілки направлені вправо.

Так як $y = t - 3$ може брати будь-які дійсні значення, то маємо наступну відповідь: лінія $\begin{cases} x = t^2 - 6t + 8, \\ y = t - 3 \end{cases}$ – це параболу $y^2 = x + 1$. Вона зображена на рис. 14.2.

$$3. \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $-4 \leq x \leq 4$ та $-5 \leq y \leq 5$.

Далі, $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow$ всі точки лінії

лежать на еліпсі $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, центр якого знаходиться

в точці $(0; 0)$, а півосі рівні $a = \sqrt{16} = 4$, $b = \sqrt{25} = 5$. Цей еліпс зображено на рис. 14.3, обмеження на x та y , очевидно, виконані.

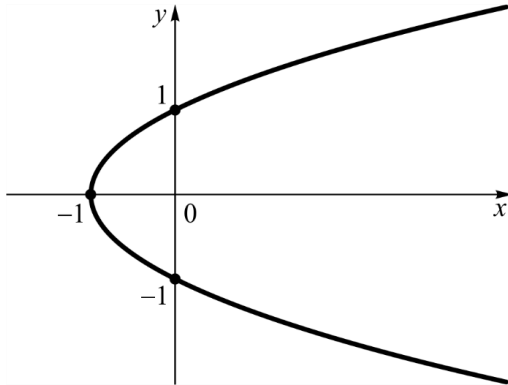


Рис. 14.2

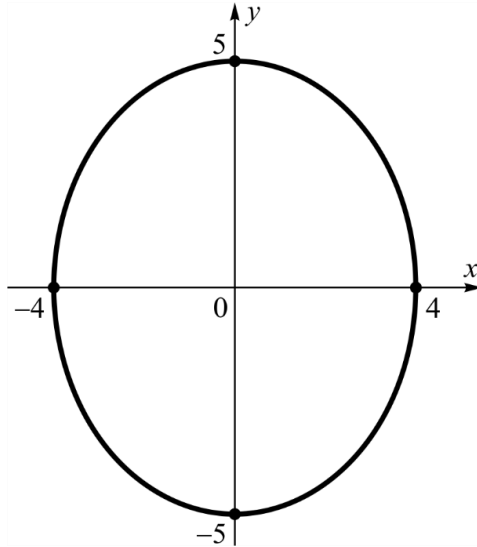


Рис. 14.3

$$4. \begin{cases} x = 5 \sin 2t, \\ y = 10 \cos^2 t. \end{cases}$$

З умови випливає, що $-5 \leq x \leq 5$ та $0 \leq y \leq 10$.

Тут виключити параметр t допоможуть наступні дві формули: $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$ та $\cos^2(2t) + \sin^2(2t) = 1$.

Так як $y = 10 \cos^2 t = 5 \cdot 2 \cos^2 t = 5(\cos 2t + 1) = 5 \cos 2t + 5$, то $\left(\frac{y-5}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^2 = \cos^2(2t) + \sin^2(2t) = 1$, то всі точки лінії лежать на кривій

$$\frac{(y-5)^2}{25} + \frac{x^2}{25} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-5)^2 = 5^2.$$

Останнє рівняння задає коло з центром у точці $(0; 5)$ і радіусом $R = 5$ (рис. 14.4). Умови $-5 \leq x \leq 5$ та $0 \leq y \leq 10$ також виконані.

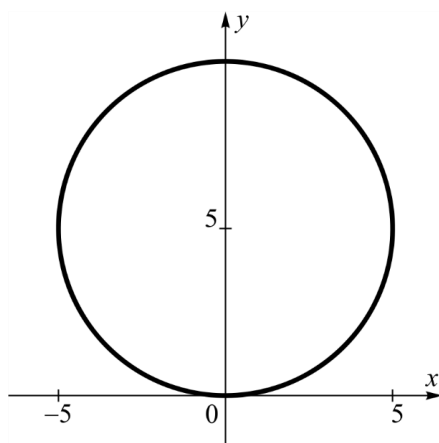


Рис. 14.4

$$5. \begin{cases} x = \frac{2}{\sin t}, \\ y = \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

Обмеження є тільки на змінну x : $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, змінна y може брати будь-які дійсні значення.

Параметр t виключимо за допомогою формули

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Маємо

$$1 + y^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}.$$

Отже, усі точки лінії лежать на кривій $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Останнє рівняння задає гіперболу з центром у точці $(0; 0)$ і півосями $a = \sqrt{4} = 2$ (дійсна піввісь), $b = \sqrt{1} = 1$ (уявна піввісь). Ця гіпербола зображена на рис. 14.5.

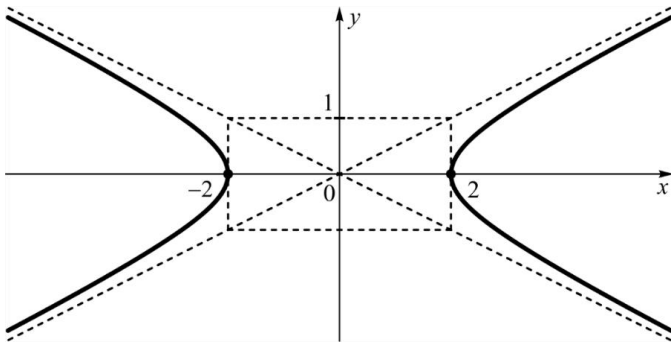


Рис. 14.5

$$6. \begin{cases} x = 3 \operatorname{sh} 4t, \\ y = 2 \operatorname{ch} 4t. \end{cases}$$

Відомо, що $\operatorname{ch} a \in [1; +\infty)$, при $a \in \mathbb{R}$. Отже $y \geq 2$.
На змінну x обмежень немає.

Так як $\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \operatorname{ch}^2 4t - \operatorname{sh}^2 4t = 1$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, то
всі точки лінії лежать на гіперболі

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

яка зображена на рис. 14.6. Для цієї гіперболи: центр у точці $(0; 0)$, $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{4} = 2$.

Ураховуючи обмеження, отримуємо відповідь: графіком лінії $\begin{cases} x = 3 \operatorname{sh} 4t, \\ y = 2 \operatorname{ch} 4t, \end{cases}$ є верхня гілка гіперболи $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

На рис. 14.6 вона зображена жирною суцільною лінією.

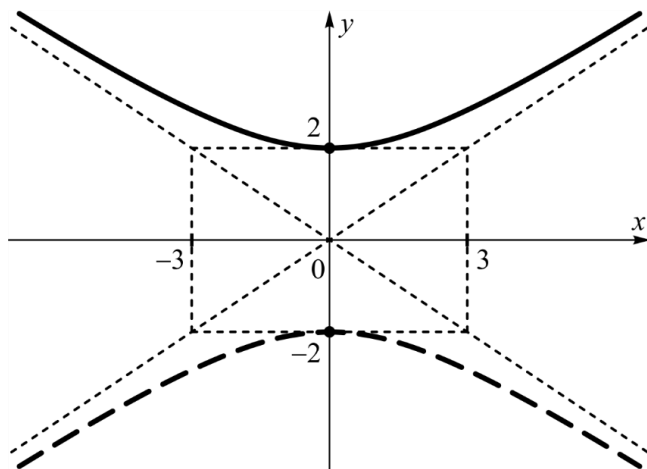


Рис. 14.6

Завдання № 15. Визначити тип поверхні другого порядку, що задана рівнянням $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} + \frac{z^2}{p} = 1$ і проходить через три задані точки $A_1(2; 3; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(6; 3; 7)$.

Розв'язання: підставивши координати точок A_1, A_2, A_3 у рівняння $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} + \frac{z^2}{p} = 1$, ми отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{2^2}{m} + \frac{3^2}{n} + \frac{1^2}{p} = 1, \\ \frac{4^2}{m} + \frac{1^2}{n} + \frac{(-2)^2}{p} = 1, \\ \frac{6^2}{m} + \frac{3^2}{n} + \frac{7^2}{p} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{m} + \frac{9}{n} + \frac{1}{p} = 1, \\ \frac{16}{m} + \frac{1}{n} + \frac{4}{p} = 1, \\ \frac{36}{m} + \frac{9}{n} + \frac{49}{p} = 1. \end{cases}$$

Якщо ввести позначення $\frac{1}{m} = \alpha$, $\frac{1}{n} = \beta$, $\frac{1}{p} = \gamma$, то будемо мати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних α, β, γ :

$$\begin{cases} 4\alpha + 9\beta + \gamma = 1, \\ 16\alpha + \beta + 4\gamma = 1, \\ 36\alpha + 9\beta + 49\gamma = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, наприклад, методом Крамера (до того ж для обчислення визначників можна використати онлайн-калькулятор, або щось подібне!), знаходимо $\alpha = \frac{12}{175}$, $\beta = \frac{3}{35}$, $\gamma = -\frac{8}{175}$.

Отже, рівняння поверхні має наступний вигляд:

$$\frac{12}{175}x^2 + \frac{3}{35}y^2 - \frac{8}{175}z^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{175/12} + \frac{y^2}{35/3} - \frac{z^2}{175/8} = 1.$$

Залишилось зауважити, що рівняння вигляду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ задає *однопорожнинний гіперболоїд* (рис. 15.1).

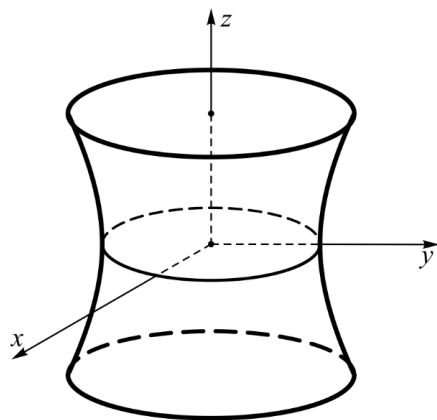


Рис. 15.1

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. / В. В. Булдигін та ін. / за ред. проф. В. В. Булдигіна. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. Київ : А.С.К., 2006. 648 с.
3. Кириченко В. В., Петкевич Н. Ю., Петравчук А. П. Лекції з аналітичної геометрії. Київський нац. ун-т. Кам'янець-Подільський : Вид-во «Аксиома», 2011. 255 с.
4. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Ю. К. Рудавський та ін. Львів : Видавництво «Бескид Біт», 2002. 256 с.
5. Саприкіна Л. Т., Цеберна Н. О., Петков І. В. Аналітична геометрія : навч. посіб. Миколаїв : Вид-во НУК, 2011. 116 с.
6. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика : підруч. : у 3 кн. Київ : Либідь, 1994. Кн. 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. 280 с.
7. Strang G. Introduction to Linear Algebra : Sixth Edition / Gilbert Strang. Wellesley, MA : Wellesley-Cambridge Press, 2023. 440 p.

Додаткова література

1. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори) для студентів університетів. Київ : Видав.-поліграф. центр «Київський університет», 2009. 257 с.

2. Бортош М. Ю., Тилищак О. А., Юрченко Н. В. Збірник завдань з алгебри та аналітичної геометрії. Частина 2. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2021. 61 с.

3. Збірник задач з аналітичної геометрії / за ред. В. В. Кириченка. Кам'янець-Подільський : Аксіома, 2005. 228 с.

4. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2020. 205 с.

5. Стороженко І. П. Вища математика : навч. посіб. : у 2 ч. Харків : ХНТУСГ, 2019. Ч. 1. Лінійна алгебра й аналітична геометрія. 80 с.

6. Тилищак О. А., Юрченко Н. В. Збірник завдань з алгебри та аналітичної геометрії. Частина 1. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2020. 61 с.

7. Шапочка І. В. Лінійна алгебра : навч. посіб. для індивідуальних робіт. Ужгород : Вид-во УжНУ «Говерла», 2020. 95 с.

Інформаційні ресурси в мережі «Інтернет»

1. Дидактичні та методичні матеріали кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського. URL: <http://matan.kpi.ua/uk/files.html>.

2. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського. URL: <http://www.nbuv.gov.ua>.

3. Репозитарій, методичні роботи науково-педагогічних працівників кафедри алгебри ДВНЗ «Ужгородський національний університет». URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/123456789/103>.

4. Сайт електронного навчання ДВНЗ «Ужгородський національний університет». URL: <http://e-learn.uzhnu.edu.ua>.

5. MIT OpenCourseWare – проєкт Массачусетського технологічного інституту з публікації у відкритому доступі матеріалів усіх курсів інституту. Опубліковані матеріали включають у плани курсів, конспекти лекцій,

домашні завдання, екзаменаційні питання. Для деяких курсів доступні відеозаписи лекцій. URL: <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/>.

Навчальне видання

МАЙБОРОДА Олександр Валерійович
ПЕТКОВ Ігор Васильович
РОМАНЧУК Наталія Олександрівна
КОВАЛЬ Сергій Станіславович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

У трьох частинах

Частина 1

Комп'ютерна правка й коректура *О. Г. Костенко*
Комп'ютерне верстання *Ю. С. Семенченко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 10,46. Тираж 100 прим. Вид. № 27. Зам. № 2506-36.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54007
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.