

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О.С. Манойленко, Є.В. Сокурєнко

**Елементи лінійної, векторної алгебри
та аналітичної геометрії,
які застосовуються для розробки
математичних моделей економічного змісту**

Частина 2

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як методичні вказівки*

Миколаїв 2006

УДК 517: 681.3

Манойленко О.С., Сокурєнко Є.В. Елементи лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії, які застосовуються для розробки математичних моделей економічного змісту: Методичні вказівки. – Миколаїв: НУК, 2006. – Ч. 2. – 56 с.

Кафедра вищої математики

Методичні вказівки містять теоретичні питання, які повинен засвоїти студент для виконання завдань, а також наводяться зразки виконання завдань. Складаються із семестрових завдань, що охоплюють деякі розділи курсу вищої математики і призначені для студентів економічних спеціальностей.

Рецензенти канд. фіз.-мат. наук В.В. Крючковський;
 канд. фіз.-мат. наук В.П. Борко

ВСТУП

Методичні вказівки мають за мету допомогти студентам економічних спеціальностей у самостійному вивченні матеріалу. Кожен розділ містить розв'язки типових задач з докладними поясненнями та індивідуальні завдання в 30 варіантах для самостійної роботи. На початку кожного розділу є теоретичні питання, на які студент повинен дати відповідь в письмовій чи в усній формі при виконанні семестрового завдання.

Семестрове завдання виконується під контролем і при участі викладача (у формі індивідуальних консультацій). Контроль здійснюється у вигляді усного чи письмового захисту семестрового завдання.

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Теоретичні питання

1. Визначник, його властивості та обчислення.
2. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням визначника?
3. Що називається матрицею, їх види?
4. Дії з матрицями.
5. Ранг матриці.
6. Обернена матриця. Чи завжди вона існує і як вона знаходиться?
7. Матричний спосіб розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

8. За якої умови СЛАР має єдиний розв'язок?
9. Формули Крамера.
10. Лінійні операції над векторами.
11. Лінійна залежність та незалежність векторів.
12. Базис на площині і у просторі.
13. Проекція вектора на вісь.
14. Модуль вектора. Напрямні косинуси.
15. Скалярний добуток векторів, його властивості та вираз у координатах.
16. Векторний добуток, його властивості та вираз у координатах.
17. Мішаний добуток векторів, його властивості та вираз у координатах.
18. Умови колінеарності і компланарності векторів.

Варіанти завдання

Завдання 1

Номер варіанта	Матриця	Номер варіанта	Матриця
Знайти лінійну комбінацію матриць $3A - 2B$			
1	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & 8 \\ 2 & -3 & -9 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 11 \\ -7 & 8 & -9 \\ 1/2 & 5 & 7/2 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3/4 & 2/3 & 5/6 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 5/2 & 7/3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1/2 & 3/4 & 5/2 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 11 \\ -7 & 8 & -9 \\ 1/2 & 5 & 7/2 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 & 1/7 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/14 & 3/7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2/7 & -3/7 & 1/5 \end{pmatrix}$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Матриця	Номер варіанта	Матриця
Знайти многочлен від матриці $f(A)$, якщо $f(A) = 3x^2 - 5x + 7$			
5	$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 1/2 & 5 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 5/3 & 7/3 & -2/3 \\ 7/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 & -1/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & -1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$
Дані матриці A , B та E єдиного порядку. Визначити матрицю, яка задається наступним матричним виразом $3A - B^2 + 2AB + 5E$			
9	$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},$	14	$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Матриця	Номер варіанта	Матриця
	$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$		$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$	16	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
Обчислити добуток матриць A і B : AB і BA . Порівняти результати			
17	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -8 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	18	$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/3 \\ 2 & -1 & 3/4 \\ 1 & 2/3 & 7/2 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$
19	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	20	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
21	$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix},$	22	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Матриця	Номер варіанта	Матриця
21	$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	22	$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
23	$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	24	$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -7 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
Знайти ранг матриці			
25	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	26	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
27	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 12 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	28	$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
29	$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	30	$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Завдання 2

Задача 1. Чотири фірми випускають три види продукції. Задається матриця A випуску продукції на кінець третього місяця року:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 30 \\ 20 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 30 \end{pmatrix}.$$

Знайти обсяг випуску продукту на кожній фірмі за другий квартал, якщо матриця випуску A через три місяці має такий вигляд:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 40 & 60 & 70 \\ 50 & 40 & 40 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 30 & 50 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Дані про продаж у музичному магазині, який об'єднує три відділи, представлені матрицями:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 30 & 7 & 21 \\ 20 & 7 & 23 \\ 15 & 7 & 22 \\ 7 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 24 & 7 & 20 \\ 28 & 10 & 15 \\ 24 & 10 & 20 \\ 22 & 7 & 21 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 77 & 17 & 42 \\ 64 & 27 & 49 \\ 44 & 27 & 47 \\ 42 & 20 & 44 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} – гроші, отримані від продажу у першому, другому та третьому відділах за кожний сезон року.

Показати, що перший і другий відділ разом продали товару менше, ніж третій у кожному сезоні. Знайти загальну виручку від продажу однакових товарів трьома відділами.

Задача 3. Три майстерні випускають однакову продукцію чотирьох видів і звітують за кожний квартал. За перший квартал вони випускають продукцію, яку можна записати матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 17 & 8 & 10 \\ 11 & 5 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

за другий квартал – матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 9 & 3 \\ 7 & 6 & 8 & 5 \\ 12 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайти, яку кількість продукції випустили три майстерні за обидва квартали.

Задача 4. На базу завезли шість видів сировини, яку замовили чотири ферми. Всю продукцію можна записати у вигляді матриці

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 8 & 3 & 10 \\ 1 & 9 & 7 & 8 & 5 & 12 \\ 7 & 3 & 4 & 10 & 9 & 8 \\ 13 & 2 & 9 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Через деякий час товар був закуплений і залишок мав вигляд матриці

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & 7 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якою матрицею можна записати закуплений товар?

Задача 5. Підприємство випускає два види продукції, заданих матрицею-планом $X = (10; 15)$. Для випуску продукції потрібно три види сировини, яку можна записати за допомогою матриці $B = (b_{ik})$:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

де b_{ik} – витрати на одиницю i -го виду продукту k -го виду сировини.

Крім того, задається ціна одиниці кожного виду сировини матрицею $C = (5 \ 8 \ 10)$.

Знайти: 1) необхідну кількість сировини кожного виду для виконання плану X ; 2) ціну сировини для одиниці кожного виду продукту; 3) загальну ціну сировини для виконання плану X .

Задача 6. Підприємство має три цехи виробництва, які виготовляють п'ять видів деякої продукції. Задана матриця A випуску продукції на кінець шостого місяця року:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 40 & 35 & 10 & 55 & 70 \\ 30 & 40 & 20 & 75 & 95 \\ 50 & 40 & 30 & 80 & 25 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – накоплена продукція з початку року k -го виду ($k = \overline{1,5}$) продукту по i -му цеху ($i = \overline{1,3}$).

Знайти місячний обсяг випуску продуктів по кожному цеху, якщо аналогічна матриця через місяць має вигляд:

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 45 & 50 & 30 & 62 & 84 \\ 50 & 44 & 32 & 80 & 97 \\ 70 & 51 & 33 & 89 & 41 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Зі Львова до Харкова потрібно перевезти сировину трьох видів у кількості 149 тонн, 160 тонн, 80 тонн. Для перевезення сировини використовується транспорт трьох видів. Вантажопідйомність кожного виду задається матрицею $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 10 \\ 7 & 16 & 15 \\ 9 & 12 & 1 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) – кількість тонн сировини i -го виду, яку можна розмістити при перевезенні в k -му виду транспорту.

Скільки одиниць транспорту кожного виду повинно замовити підприємство для перевезення сировини, якщо допускається повне завантаження транспорту відповідно його вантажопідйомності.

Задача 8. З Цюрупинська до Херсона потрібно перевезти картоплю, гарбузи та горіхи у кількості 13 тонн, 19 тонн та 10 тонн. Для перевезення використовуються три види транспорту. Задається матриця вантажопідйомності транспорту $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) – кількість одиниць продукту i -го типу, який треба розмістити при перевезенні в кожній одиниці k -го виду транспорту.

Скільки одиниць транспорту кожного виду потрібно для перевезення картоплі, гарбузів та горіхів, якщо припускається повне завантаження транспорту відповідно до його вантажопідйомності.

Задача 9. З Києва до Херсона потрібно перевезти добрива трьох видів у кількості 196 тонн, 135 тонн та 142 тонн. Для перевезення використовуються три типи транспорту. Задається матриця вантажопідйомності транспорту $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) – кількість одиниць добрива, i -го типу, яку треба завантажити при перевезенні в k -й одиниці транспорту.

Скільки одиниць транспорту кожного типу повинен замовити завод для перевезення вказаної кількості добрива, якщо допускається повне завантаження транспорту відповідно до його вантажопідйомності.

Задача 10. Фірма реалізує три види продукції, для виготовлення яких потрібно п'ять видів сировини. Фірма повинна виробити певний обсяг продуктів, що задаються планом $X = (110; 80; 50)$. Затрати сировини представлені матрицею $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 4 & 8 & 3 \\ 7 & 10 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – затрати на виготовлення i -го виду продукту k -го виду сировини.

Крім того, задається ціна одиниці кожного виду сировини матрицею $C = (8 \ 5 \ 10 \ 11 \ 6)$ в умовних одиницях.

Знайти: 1) необхідну кількість сировини кожного виду для виконання плану X ; 2) ціну сировини для одиниці кожного виду продукції; 3) загальну ціну продукції X .

Задача 11. П'ять заводів виготовляють шість видів продукції. Задана матриця A виготовлення продукції на кінець першого кварталу:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 240 & 112 & 347 & 305 & 258 & 198 \\ 360 & 205 & 164 & 118 & 312 & 264 \\ 150 & 96 & 189 & 208 & 156 & 302 \\ 123 & 203 & 210 & 175 & 329 & 286 \\ 344 & 305 & 198 & 199 & 145 & 176 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – продукція, яка знаходиться на складі з початку року k -го виду по i -му заводу.

Знайти місячний обсяг випуску продукції на кожному заводі,

якщо аналогічна матриця через місяць має вигляд

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 256 & 172 & 396 & 349 & 317 & 283 \\ 379 & 289 & 205 & 218 & 340 & 347 \\ 205 & 150 & 264 & 303 & 273 & 343 \\ 198 & 280 & 309 & 285 & 354 & 364 \\ 360 & 370 & 284 & 318 & 229 & 259 \end{pmatrix}.$$

Задача 12. Відомість про надання послуг мережею перукарень відповідно представлена матрицями:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 87 & 79 & 54 & 59 \\ 64 & 58 & 86 & 64 \\ 51 & 69 & 61 & 85 \\ 49 & 47 & 75 & 73 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 54 & 45 & 69 & 29 \\ 49 & 37 & 54 & 49 \\ 38 & 34 & 27 & 35 \\ 25 & 28 & 31 & 50 \end{pmatrix},$$
$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 63 & 28 & 41 & 36 \\ 51 & 39 & 38 & 55 \\ 47 & 45 & 54 & 61 \\ 62 & 50 & 61 & 32 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} – гроші, виручені від надання різних послуг.

Показати, що в кожному сезоні перша і друга перукарні разом надали послуг (у грошовому вираженні) більше, ніж третя. Знайти загальну виручку від однакових видів послуг, наданих трьома перукарнями в кожному сезоні.

Задача 13. Завод випускає чотири види продукції, які задаються матрицею-планом $X = (10; 15; 20; 18)$. Для того щоб випустити продукцію, необхідно п'ять видів сировини. Отже, задається матриця $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 28 & 36 & 29 & 30 \\ 30 & 18 & 25 & 31 & 26 \\ 32 & 35 & 34 & 38 & 22 \\ 41 & 38 & 40 & 33 & 23 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – затрати на виготовлення i -го виду продукту k -го виду сировини.

Крім того, задається ціна одиниці кожного виду сировини матрицею $C = (15 \ 18 \ 16 \ 17 \ 12)$ в умовних одиницях.

Знайти: 1) необхідну кількість сировини кожного виду для виконання плану X ; 2) ціну сировини для одиниці кожного виду продукції; 3) загальну ціну сировини для виконання плану випуску X .

Задача 14. Кондитерська фабрика отримала замовлення на три види цукерок у кількості 68 кг, 80 кг та 120 кг. Для розфасування цукерок необхідно три види упаковок. Задається матриця місткості цукрових упаковок $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) кількість цукерок, кг, i -го виду, які треба розмістити у кожній одиниці k -го виду упаковки.

Скільки одиниць упаковок кожного виду повинен закупити завод для упакування необхідної кількості цукерок, якщо припустити, що цукерки будуть розфасовані в усі закуплені упаковки згідно з їх місткістю?

Задача 15. Три підприємства виробляють деяку продукцію в асортименті, який складається з шести груп товарів. Задана матриця A випуску продукції на кінець третього місяця року:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 25 & 65 & 30 & 40 & 30 & 80 \\ 40 & 50 & 75 & 55 & 20 & 75 \\ 30 & 85 & 45 & 35 & 65 & 50 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – накопичена продукція з початку року на вказаний момент k -ї асортиментної групи i -му підприємстві.

Знайти місячний обсяг випуску продукції на кожному підприємстві, якщо аналогічна матриця через місяць має вигляд

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 60 & 45 & 45 & 100 \\ 55 & 60 & 88 & 97 & 30 & 93 \\ 35 & 95 & 50 & 56 & 79 & 82 \end{pmatrix}.$$

Задача 16. Дистриб'ютерська фірма має три свої філіали. Відомість про продаж продукції цими філіалами роздрібним торговцям і підприємствам представлена матрицями:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 35 & 9 & 20 \\ 19 & 7 & 10 \\ 15 & 8 & 15 \\ 10 & 12 & 18 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 14 & 9 & 15 \\ 20 & 10 & 12 \\ 18 & 5 & 25 \\ 15 & 10 & 19 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 14 \\ 10 & 12 & 20 \\ 15 & 10 & 15 \\ 10 & 12 & 23 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} – гроші, виручені від продажу по першому, другому і третьому філіалах у кожному сезоні.

Наскільки більше продукції окремих видів у кожному сезоні продано першим та другим філіалами разом, ніж третім філіалом? Знайти загальну виручку від продажу однакових видів товарів трьома філіалами за два сезони.

Задача 17. Підприємство випускає три види продукції, які задаються матрицею-планом $X = (25; 18; 12)$. Для того щоб випустити продукцію, необхідно п'ять видів сировини. Отже, задається матриця $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 5 & 11 & 4 \\ 8 & 7 & 8 & 9 & 5 \\ 9 & 15 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – затрати на виготовлення i -го виду продукту k -го виду сировини.

Крім того, задається ціна одиниці кожного виду сировини матрицею $C = (13 \ 7 \ 15 \ 11 \ 2)$ в умовних одиницях.

Знайти: 1) необхідну кількість сировини кожного виду для виконання плану X ; 2) ціну сировини для одиниці кожного виду продукції; 3) загальну ціну сировини для виконання плану випуску X .

Задача 18. Чотири фірми випускають три види продуктів. Задається матриця A випуску продукції на кінець третього місяця року:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 40 \\ 30 & 40 & 20 \\ 40 & 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Знайти обсяг випуску продуктів на кожній фірмі за другий квартал, якщо матриця випуску A через три місяці має такий вигляд:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 50 & 70 & 80 \\ 60 & 50 & 50 \\ 50 & 60 & 70 \\ 80 & 40 & 60 \end{pmatrix}.$$

Задача 19. Дані про продаж у будівельному магазині, який об'єднує три відділи, представлені матрицями:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 40 & 17 & 31 \\ 30 & 17 & 33 \\ 25 & 17 & 32 \\ 17 & 20 & 30 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 34 & 17 & 30 \\ 38 & 20 & 25 \\ 34 & 20 & 30 \\ 32 & 17 & 31 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 87 & 27 & 52 \\ 74 & 37 & 59 \\ 54 & 37 & 57 \\ 52 & 30 & 54 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} – гроші, отримані від продажу у першому, другому та третьому відділах за кожний сезон року.

Показати, що перший і другий відділ разом продали товару

менше, ніж третій, у кожному сезоні. Знайти загальну виручку від продажу однакових товарів трьома відділами.

Задача 20. Три майстерні випускають однакову продукцію чотирьох видів і звітують за кожний квартал. За перший квартал вони випускають продукцію, яку можна записати матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 27 & 18 & 20 \\ 21 & 15 & 19 & 17 \\ 13 & 16 & 18 & 19 \end{pmatrix};$$

за другий квартал – матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 25 & 28 & 19 & 13 \\ 17 & 16 & 18 & 15 \\ 22 & 17 & 20 & 19 \end{pmatrix}.$$

Знайти, скільки продукції випустили три майстерні за обидва квартали.

Задача 21. На базу замовили шість видів сировини, яку замовили чотири ферми. Усю продукцію можна записати у вигляді матриці:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 15 & 17 & 19 & 18 & 13 & 20 \\ 11 & 19 & 17 & 18 & 15 & 22 \\ 17 & 13 & 14 & 20 & 19 & 28 \\ 23 & 12 & 19 & 15 & 17 & 24 \end{pmatrix}.$$

Через деякий час товар був закуплений і залишок мав вигляд

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 13 & 12 & 10 & 18 \\ 13 & 14 & 12 & 13 & 13 & 17 \\ 12 & 10 & 11 & 15 & 16 & 13 \\ 16 & 10 & 17 & 11 & 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

Якою матрицею можна записати закуплений товар?

Задача 22. Підприємство випускає два види продукції, заданих матрицею-планом $X = (20; 25)$. Для випуску продукції потрібно три види сировини, яку можна записати за допомогою матриці $B = (b_{ik})$:

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 17 \\ 13 & 16 & 12 \end{pmatrix},$$

де b_{ik} – витрати на одиницю i -го виду продукту k -го виду сировини.

Крім того, задається ціна одиниці кожного виду сировини матрицею $C = (15 \ 18 \ 20)$.

Знайти: 1) необхідну кількість сировини кожного виду для виконання плану X ; 2) ціну сировини для одиниці кожного виду продукту; 3) загальну ціну сировини для виконання плану X .

Задача 23. Підприємство має три цехи виробництва, які виготовляють п'ять видів деякої продукції. Задана матриця A випуску продукції на кінець шостого місяця року:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 50 & 45 & 20 & 65 & 80 \\ 40 & 50 & 30 & 85 & 105 \\ 40 & 50 & 40 & 90 & 35 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – накопичена продукція з початку року k -го виду ($k = \overline{1,5}$) продукту по i -му цеху ($i = \overline{1,3}$).

Знайти місячний обсяг випуску продуктів по кожному цеху, якщо аналогічна матриця через місяць має вигляд

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 55 & 60 & 40 & 72 & 94 \\ 60 & 54 & 42 & 90 & 107 \\ 80 & 61 & 43 & 99 & 51 \end{pmatrix}.$$

Задача 24. Із Києва до Херсона потрібно перевезти сировину трьох видів у кількості 4 тонни, 11 тонн, 11 тонн. Для перевезення сировини використовується транспорт трьох видів. Вантажопідйомність кожного виду задається матрицею $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) кількість тонн сировини i -го виду, яку можна розмістити при перевезенні в k -му виді транспорту.

Скільки одиниць транспорту кожного виду повинно замовити підприємство для перевезення сировини, якщо припускається повне завантаження транспорту відповідно до його вантажопідйомності?

Задача 25. Зі складу до магазину треба перевезти пральні машини, газові плити та водонагрівачі у кількості 13, 19 та 10 штук. Для перевезення використовуються три види транспорту. Задається матриця вантажопідйомності транспорту $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) – кількість одиниць продукту i -го типу, який треба розмістити при перевезенні в кожній одиниці k -го виду транспорту.

Скільки одиниць транспорту кожного виду треба для перевезення пральних машини, газових плит та водонагрівачів, якщо припускається повне завантаження транспорту відповідно до його вантажопідйомності?

Задача 26. Фірма реалізує три види продукції, для виготовлення яких потрібно чотири види сировини. Фірма повинна виготовити продукцію, яка задається планом $X = (10; 5; 4)$. Затрати сировини представлені матрицею $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 11 \\ 7 & 10 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – затрати на виготовлення i -го виду продукту k -го виду сировини.

Крім того, задається ціна одиниці кожного виду сировини матрицею $C = (10 \ 7 \ 15 \ 6)$ в умовних одиницях.

Знайти: 1) необхідну кількість сировини кожного виду для виконання плану X ; 2) ціну сировини для одиниці кожного виду продукції; 3) загальну ціну продукції X .

Задача 27. Два тепличні господарства вирощують сім сортів троянд. Задається матриця A вирощування троянд на кінець шостого місяця року

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 80 & 75 & 20 & 45 & 30 & 40 & 50 \\ 30 & 35 & 75 & 20 & 40 & 30 & 80 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – сорти троянд від початку року на вказаний момент i -го виду по k -му тепличному господарству.

Знайти місячний обсяг вирощування троянд у кожному господарстві, якщо аналогічна матриця через місяць має вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} 100 & 89 & 83 & 47 & 60 & 65 & 75 \\ 77 & 80 & 100 & 40 & 55 & 35 & 83 \end{pmatrix}.$$

Задача 28. Три магазини продають чотири сорти борошна. Задана матриця продажу борошна на кінець п'ятого місяця року $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 10 & 35 \\ 5 & 30 & 15 & 35 \\ 10 & 15 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} ($i=1, 2, 3$; $k=1, 2, 3, 4$) – накопичена продукція з початку року k -го сорту i -му магазину.

Знайти місячний обсяг продажу борошна з кожного магазину, якщо аналогічна матриця через місяць має вигляд:

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 28 & 40 & 20 & 40 \\ 14 & 70 & 25 & 49 \\ 22 & 19 & 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

Задача 29. Швейна фабрика виробляє чоловічі, жіночі та дитячі костюми. Фабрика повинна виготовити продукцію, які задається планом $X = (10; 7; 3)$. Для виготовлення одягу необхідно чотири види тканини, затрати якої представлені матрицею $A = (a_{ik})$:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 28 & 14 \\ 15 & 6 & 10 & 5 \\ 23 & 17 & 19 & 13 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – затрати на виготовлення i -го виду виробу k -го виду тканини.

Крім того, задається ціна одиниці кожного виду тканини матрицею $C = (6 \ 9 \ 14 \ 18)$ в умовних одиницях.

Знайти: 1) необхідну кількість сировини кожного виду для виконання плану X ; 2) ціну сировини для одиниці кожного виду продукції; 3) загальну ціну продукції X .

Задача 30. Дані про продаж у торговому центрі, який об'єднує три відділи, представлені матрицями:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 7 & 26 & 10 \\ 14 & 30 & 18 \\ 15 & 5 & 28 \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 18 \\ 18 & 16 & 19 \\ 20 & 10 & 40 \end{pmatrix},$$

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 19 & 15 & 20 \\ 44 & 27 & 47 \\ 23 & 17 & 3 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} – гроші, одержані від продажу у першому, другому та третьому відділах за кожний сезон року.

Показати, що перший і другий відділи, разом продали товару більше, ніж третій в кожному сезоні. Знайти загальну виручку від продажу однакових товарів трьома відділами.

Завдання 3

Номер варіанта	Завдання
Знайти рішення векторного рівняння $3\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + 2\vec{x} = \vec{d}$, де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ – задані вектори	
1	$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{d} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$
2	$\vec{a} = \{-2; 0; 4; 3\}$, $\vec{b} = \{0; 7; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{-\frac{1}{2}; 3; 2; -\frac{1}{3}\}$, $\vec{d} = \{\frac{1}{5}; 7; \frac{1}{2}; 8\}$
3	$\vec{a} = \{-3; 2\}$, $\vec{b} = \{0; -5\}$, $\vec{c} = \{1; 0\}$, $\vec{d} = \{5; 4\}$
4	$\vec{a} = 3\vec{l}_1 + 2\vec{l}_2 - \vec{l}_3 + 5\vec{l}_4$, $\vec{b} = \vec{l}_1 - \frac{1}{2}\vec{l}_2 + 3\vec{l}_3 - \frac{1}{2}\vec{l}_4$, $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{l}_1 - \frac{3}{2}\vec{l}_2 + \frac{1}{7}\vec{l}_3 + 8\vec{l}_4$, $\vec{d} = \{-3; 2; \frac{1}{3}; 7\}$
5	$\vec{a} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$
Знайти скалярний добуток $(3\vec{A}_1\vec{A}_2 - \vec{A}_1\vec{A}_3)(\vec{A}_2\vec{A}_3 + 2\vec{A}_2\vec{A}_1)$, якщо A_1, A_2, A_3, A_4 мають задані координати	
6	$A_1(-1; 2; 3)$, $A_2(2; 3; -4)$, $A_3(0; 1; 2)$, $A_4(1; -2; -3)$
7	$A_1(6; 0; 1)$, $A_2(2; -3; 4)$, $A_3(1; 2; 0)$, $A_4(4; 3; -2)$
8	$A_1(-1; 0; 3)$, $A_2(4; 0; 2)$, $A_3(1; 1; 2)$, $A_4(1; -5; 2)$
9	$A_1(2; 5; 1)$, $A_2(0; 1; 1)$, $A_3(7; 2; -5)$, $A_4(0; 2; -1)$
10	$A_1(-3; 0; 0)$, $A_2(1; 5; -8)$, $A_3(9; 3; -2)$, $A_4(-1; -4; -9)$

Знайти векторний добуток векторів $(\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{b} - \vec{c})$, де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – задані вектори

11	$\vec{a} = \{5; 7; -3\}$, $\vec{b} = \{-4; 1; 0\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; 5\}$
----	--

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Завдання
12	$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} - 2\vec{k}$
13	$\vec{a} = -\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} + 8\vec{k}$
14	$\vec{a} = 2\vec{j} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{j} + \vec{j} - 2\vec{k}$
15	$\vec{a} = \{4; -3; 2\}$, $\vec{b} = \{0; -1; 8\}$, $\vec{c} = \{3; -5; 0\}$
16	Обчислити векторно-скалярний добуток $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$, якщо $\vec{a} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{c} = \left\{ \frac{2}{7}; \frac{3}{5}; \frac{1}{4} \right\}$
17	Знайти трійку компланарних векторів $\vec{a} = \{-3; 1; -2\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{3; 2; -1\}$, $\vec{d} = \{-1; -1; 2\}$
18	При яких значеннях α точки A_1 , A_2 , A_3 , A_4 лежать на одній площині $A_1(-1; 2; 3)$, $A_2(4; \alpha; 3)$, $A_3(0; -1; 2)$, $A_4(1; -2; -1)$?
19	Серед векторів $\vec{a} = \{3; -4; 2\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -1; 1\}$, $\vec{d} = \left\{ 1; 1; -\frac{1}{2} \right\}$ знайти перпендикулярні вектори
20	Для вектора $\vec{a} = \{5; 11; -12\}$ знайти його направляючі косинуси
21	Нехай дані вектори $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ та $\vec{b} = \left\{ 2; -7; \frac{1}{2} \right\}$. Обчислити добуток $2\vec{b}(\vec{a} + \vec{b})$
22	При яких значеннях α та β вектори $\vec{a} = \{1; \alpha; 3\}$, $\vec{b} = \{4; 3; \beta\}$ колінеарні
23	Знайти $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, якщо $\vec{a} = \left\{ 2; \frac{1}{2}; 3 \right\}$ і $\vec{b} = \left\{ -5; \frac{1}{9}; \frac{3}{4} \right\}$
24	Дані $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$, $\vec{b} = \{2; 5; -7\}$. Знайти $\vec{a}_0 + \vec{b}_0$, де $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$ – одиничні вектори

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Завдання
25	Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ та його модуль
26	Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ та його модуль
27	Проекції вектора $\vec{a}$ на координатні вісі дорівнюють: $a_x = 2$, $a_y = 5$, $a_z = -3$. Знайти направляючі косинуси вектора $\vec{a}$
28	Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
29	Знайти суму векторів $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ а також проекцію $\vec{a} + \vec{b}$ на координатні вісі
30	Знайти різницю векторів $\vec{a} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, а також проекцію $\vec{a} - \vec{b}$ на координатні осі

Завдання 4

Задано координати вершин піраміди A_1, A_2, A_3, A_4 . Методами векторної алгебри знайти: 1) довжину ребра A_1A_2 ; 2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3 ; 3) площу грані $A_1A_2A_4$; 4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Номер варіанта	Вершини	Номер варіанта	Вершини
1	$A_1(1; 2; 0)$, $A_2(3; 5; 4)$, $A_3(6; 0; 1)$, $A_4(2; 4; 3)$	2	$A_1(1; 1; -1)$, $A_2(3; 2; 1)$, $A_3(0; 3; 0)$, $A_4(3; 0; 1)$
3	$A_1(1; 1; -2)$, $A_2(-2; 2; 1)$, $A_3(1; -2; 3)$, $A_4(4; -1; 1)$	4	$A_1(2; -1; 3)$, $A_2(3; 1; 2)$, $A_3(5; -5; 4)$, $A_4(1; 3; -8)$
5	$A_1(-1; 2; -1)$, $A_2(1; -2; 2)$, $A_3(1; 0; 3)$, $A_4(2; 1; 4)$	6	$A_1(3; -1; 1)$, $A_2(5; -2; 2)$, $A_3(6; 1; 3)$, $A_4(4; -3; 2)$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Вершини	Номер варіанта	Вершини
7	$A_1(5; -1; 4)$, $A_2(5; 1; 7)$, $A_3(7; -2; 3)$, $A_4(6; 2; 8)$	8	$A_1(7; 1; 2)$, $A_2(-5; 3; -2)$, $A_3(3; 3; 5)$, $A_4(4; 5; -1)$
9	$A_1(3; 1; 1)$, $A_2(1; 4; 1)$, $A_3(1; 1; 7)$, $A_4(3; 4; -1)$	10	$A_1(4; -3; -2)$, $A_2(2; 2; 3)$, $A_3(2; -2; 3)$, $A_4(-1; -2; 3)$
11	$A_1(5; 1; 0)$, $A_2(7; 0; 1)$, $A_3(2; 1; 4)$, $A_4(5; 5; 3)$	12	$A_1(4; 2; -1)$, $A_2(3; 0; 4)$, $A_3(0; 0; 4)$, $A_4(5; -1; -3)$
13	$A_1(2; -5; 3)$, $A_2(3; 2; -5)$, $A_3(5; -3; 2)$, $A_4(-5; 3; 2)$	14	$A_1(3; 2; 4)$, $A_2(2; 4; 3)$, $A_3(4; 3; -2)$, $A_4(-2; -4; -3)$
15	$A_1(2; -5; 3)$, $A_2(3; 2; 5)$, $A_3(5; -3; -2)$, $A_4(-5; 3; 2)$	16	$A_1(-1; 1; 3)$, $A_2(1; -1; 5)$, $A_3(1; 3; 1)$, $A_4(1; -1; 1)$
17	$A_1(-1; 1; 1)$, $A_2(1; -2; 2)$, $A_3(5; -5; 3)$, $A_4(1; 0; 3)$	18	$A_1(-2; -3; 2)$, $A_2(2; 3; -2)$, $A_3(0; 1; 6)$, $A_4(1; 0; 3)$
19	$A_1(1; -1; 6)$, $A_2(4; 5; -2)$, $A_3(-1; 3; 0)$, $A_4(6; 1; 5)$	20	$A_1(1; -3; 1)$, $A_2(-3; 2; -3)$, $A_3(-3; -3; -3)$, $A_4(-2; 0; -4)$
21	$A_1(1; 1; 1)$, $A_2(3; 4; 0)$, $A_3(-1; 5; 6)$, $A_4(4; 0; 5)$	22	$A_1(0; 0; 0)$, $A_2(5; 2; 0)$, $A_3(2; 5; 2)$, $A_4(1; 2; 4)$
23	$A_1(-2; 3; -2)$, $A_2(2; -3; 2)$, $A_3(2; 2; 0)$, $A_4(1; 5; 5)$	24	$A_1(1; 1; 1)$, $A_2(-1; 2; 4)$, $A_3(2; 0; 6)$, $A_4(-2; 5; -1)$
25	$A_1(0; 5; 0)$, $A_2(2; 3; 4)$, $A_3(0; 0; -6)$, $A_4(-3; 1; -1)$	26	$A_1(0; 0; 6)$, $A_2(4; 0; -4)$, $A_3(1; 3; -1)$, $A_4(4; -1; -3)$
27	$A_1(-5; 6; -1)$, $A_2(6; -5; 2)$, $A_3(6; 5; 1)$, $A_4(0; 0; 2)$	28	$A_1(6; 4; 4)$, $A_2(0; 6; 4)$, $A_3(4; 6; 0)$, $A_4(0; -6; -4)$
29	$A_1(6; 3; 5)$, $A_2(5; -6; 3)$, $A_3(3; 5; 6)$, $A_4(-6; -1; 2)$	30	$A_1(4; 2; 5)$, $A_2(3; 0; 4)$, $A_3(0; 0; 3)$, $A_4(5; -2; -4)$

Розв'язування типових задач

Задача 1. Дані матриці A і B . Обчислити їх добуток AB та BA , якщо можливо. Порівняйте добутки. Проаналізуйте результат.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Розв'язок

При множенні матриці A на матрицю B отримаємо третю матрицю C , кожний елемент C_{ij} якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A та j -го стовпця матриці B .

Тому добуток AB можливий лише тоді, коли розмірність рядка матриці A дорівнює розмірності стовпця B , а саме, коли виконується рівність

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p).$$

Використовуючи правило множення матриць, маємо нову матрицю

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 8 \\ 4 \cdot 4 + (-5) \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + (-5) \cdot (-2) + (-3) \cdot 7 & 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 5 + (-3) \cdot 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 26 & 17 \\ 19 & -7 & -37 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для даних матриць добуток BA неможливий, так як $B = (3, 3)$ і $A = (2, 3)$, розмір рядка матриці B дорівнює трьом, а розмір стовпця матриці A дорівнює двом.

Задача 2. Чотири фірми випускають три види продуктів. За-

дається матриця A випуску продукції на кінець першого кварталу:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 30 \\ 35 & 30 & 10 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix}.$$

Знайти місячний обсяг випуску продуктів на кожній фірмі, якщо матриця випуску A через місяць має такий вигляд:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 40 & 60 & 65 \\ 75 & 40 & 90 \\ 80 & 50 & 60 \\ 70 & 30 & 100 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок

Місячний обсяг випуску продуктів виразиться матрицею

$$C = A_1 - A = \begin{pmatrix} 40 & 60 & 65 \\ 75 & 40 & 90 \\ 80 & 50 & 60 \\ 70 & 30 & 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 30 \\ 35 & 30 & 10 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 55 \\ 55 & 30 & 60 \\ 45 & 20 & 50 \\ 40 & 15 & 55 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } C = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 55 \\ 55 & 30 & 60 \\ 45 & 20 & 50 \\ 40 & 15 & 55 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ визначені своїми проекціями $\vec{a}\{7, 2, -1\}$ та $\vec{b}\{1, 2, -3\}$. Знайти скалярний добуток цих векторів і кут між ними.

Розв'язок

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ визначені своїми проекціями, то їх ска-

лярний добуток обчислюється за формулою

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1)$$

Якщо позначити кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ через θ , для скалярного добутку будемо мати

$$\vec{a}\vec{b} = ab \cos \theta. \quad (2)$$

Підставляючи проекції даних векторів у формулу (1), отримаємо:

$$\vec{a}\vec{b} = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1)(-3) = 14.$$

З формули (2)

$$\cos \theta = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab}.$$

Таким чином, для визначення $\cos \theta$ треба знайти модулі векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ за формулами

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2},$$

звідси $a = \sqrt{54}$, $b = \sqrt{14}$.

$$\text{Отже, } \cos \theta = \frac{14}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{14}}; \quad \cos \theta \approx 0,509, \quad \theta \approx 59^\circ 24'.$$

Відповідь: $\vec{a}\vec{b} = 14$, $\theta \approx 59^\circ 24'$.

Задача 4. Задано початок $A(-1; 2; 3)$ і кінець $B(2; 6; -2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$. Знайти вектор $\overrightarrow{AB}$ та його довжину.

Розв'язок

Якщо відомі координати початку $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінця $B(x_2; y_2; z_2)$ вектора, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Маємо $\overrightarrow{AB} = (2 - (-1); 6 - 2; -2 - 3)$, звідси $\overrightarrow{AB} = (3; 4; -5)$.

Довжина вектора $\overrightarrow{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$, $|\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{2}$.

Задача 5. Дано вершини трикутника $A(0; -1; 2)$, $B(3; -1; 1)$, $C(5; 0; 3)$. Методами векторної алгебри знайти кут α при вершині A .

Розв'язок

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

За визначенням

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Якщо вектори задані координатами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a} \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Кут між двома векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Задача зводиться до знаходження кута між векторами $\vec{AB} = (3; 0; -1)$ і $\vec{AC} = (5; 1; 1)$.

Тоді

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{27}} \approx 0,852.$$

$$\alpha = \arccos 0,852 \approx 32^\circ.$$

Задача 6. Дано вершини трикутника $A(2; 1; -1)$, $B(4; -2; 0)$, $C(3; 1; 3)$. Методами векторної алгебри знайти обчислити площу цього трикутника.

Розв'язок

Площу трикутника ABC знайдемо за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \vec{AC}|, \text{ де } \vec{AB} \vec{AC} - \text{векторний добуток векторів.}$$

Векторним добутком $\vec{a} \times \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий третій вектор, довжина якого чисельно дорівнює площині

паралелограма, побудованого на двох даних. Якщо вектори задані своїми координатами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то векторний добуток знаходимо за допомогою визначника

$$\vec{a} \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Обчисливши вектори $\vec{AB} = (2; -3; 1)$ і $\vec{AC} = (1; 0; 4)$, знайдемо їх векторний добуток:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}. \end{aligned}$$

Отже,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + (-7)^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{202} \text{ кв. од.}$$

Задача 7. Дано вершини піраміди $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Методами векторної алгебри знайти об'єм піраміди.

Розв'язок

Об'єм піраміди $ABCD$ обчислимо за формулою

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}|,$$

де $\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}$ – мішаний добуток векторів.

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається ска-

лярний добуток векторного добутку перших двох на третій. Якщо вектори задані своїми координатами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$, мішаний добуток знаходиться за формулою

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Визначаємо його за координатами векторів: $\vec{AB} = (2; -2; -3)$, $\vec{AC} = (4; 0; 6)$, $\vec{AD} = (-7; -7; 7)$.

Отже,

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3} \text{ куб. од.}$$

2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Теоретичні питання

1. Поняття фігури. Лінії та їх рівняння на площині.
2. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
3. Пряма на площині. Різні види рівняння прямої на площині.
4. За якою формулою можна знайти кут між прямими?
5. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.
6. Криві другого порядку – еліпс, гіпербола, парабола.
7. Канонічні рівняння кривих другого порядку. Їх властивості.
8. Лінійне рівняння у просторі.
9. Рівняння площини за точкою і нормальним вектором.
10. Взаємне розміщення двох площин.
11. Відстань від точки до площини.
12. Пряма в просторі.
13. Взаємне розміщення прямої і площини.

Варіанти завдання

Завдання 1

Номер варіанта	Задача
1	Визначити кут між прямими $y = 5x$ і $y = -3x + 5$
2	Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат та паралельно до прямої $y = 4x - 5$
3	Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат та перпендикулярно до прямої $3x + 4y - 5 = 0$
4	Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(5; 2)$ та паралельна вісі абсцис
5	Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(5; -2)$ та паралельна до прямої $5x + 3y - 2 = 0$
6	Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-7; 3)$ та утворює кут у 60° з прямою $2x + y - 1 = 0$
7	Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-7; 3)$ та перпендикулярна прямій $2x + 7y - 1 = 0$
8	Задано вершини трикутника $A(4; 6)$, $B(-5; 1)$, $C(6; -5)$. Знайти медіану, яка проведена з вершини C
9	Задано чотири точки $A(-2; 2)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$, $D(3; 1)$. Знайти рівняння прямих AD , BC та координати точки їх перетину
10	Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; 7)$ та перпендикулярно до прямої $3x - 2y - 8 = 0$
11	Знайти віддаль прямої $9x + 12y + 7 = 0$ до точки $A(2; 7)$
12	Знайти віддаль прямої $9x + 12y + 7 = 0$ до прямої $3x + 4y - 15 = 0$
13	Задано вершини трикутника $A(-12; -3)$, $B(12; -10)$, $C(-6; 14)$. Скласти рівняння висоти AD
14	Визначити кут між прямими $3x + 4y - 7 = 0$ і $4x - 3y + 8 = 0$
15	Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x + 2y + 3 = 0$ і $2x + 3y + 4 = 0$ паралельно прямій $5x + 8y = 0$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Задача
16	Показати, що точки $A_1(2;1)$, $A_2(-3;3)$, $A_3(7;-1)$ лежать на одній прямій. Знайти їх рівняння.
17	Задано вершини трикутника $A(-12;-3)$, $B(12;-10)$, $C(-6;14)$. Знайти довжину висоти AD
18	Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2;3)$ та утворює кут у 60° з додатнім напрямком осі Ox
19	Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;3)$ та точку перетину прямих $3x+4y+7=0$ і $x-y+2=0$
20	Визначити кут між прямими $2x-y+4=0$ і $3x-y-1=0$
21	Знайти відстань між двома паралельними прямими $2x+y+11=1$ і $4x+2y+1=0$
22	Записати рівняння сторони AB та медіани трикутника AE , якщо його вершини мають координати $A(3;0)$, $B(-2;3)$, $C(-1;-4)$
23	Задано вершини трикутника $A(-12;-3)$, $B(12;-10)$, $C(-6;14)$. Скласти рівняння медіани AE
24	Задані сторони трикутника $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$ і $5x-3y-14=0$. Скласти рівняння висот
25	Задано вершини трикутника $A(3;4)$, $B(2;5)$, $C(7;6)$. Скласти рівняння висоти BD
26	Визначити гострий кут між прямими $2x-y+3=0$ і $x-y-2=0$
27	Визначити кут між прямою $2x-3y+6=0$ і прямою, що проходить через точки $A(4;-5)$ і $B(-3;2)$
28	При яких значеннях параметра a прямі $3ax-8y+13=0$ та $(a+1)x-2ay-21=0$ будуть рівняннями перпендикулярних прямих, паралельних прямих
29	Записати рівняння сторони AB та медіани трикутника AE , якщо його вершини мають координати $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(-2;-1)$
30	Під яким кутом перетинаються прямі $x-2y+2=0$ і $y=\frac{1}{2}x+3$

Завдання 2

Номер варіанта	Завдання
1	Визначити координати центра і довжину радіуса кола $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
2	Скласти рівняння кола, що проходить через точки $A(7;7)$ і $B(-2;4)$, якщо її центр лежить на прямій $2x - y - 2 = 0$
3	Скласти рівняння кола, що проходить через точки $A(1;2)$, $B(0;-1)$ і $C(-3;0)$
4	Скласти рівняння кола, що проходить через дві точки: $A(-5;5)$, $B(1;3)$ і має радіус $r = \sqrt{10}$
5	Написати рівняння кола з центром в точці $O(2;1)$, що проходить через точку $A(5;5)$
6	Написати рівняння кола з центром в точці $O(-3;2)$, що проходить через точку $A(-4;0)$
7	Скласти рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 8 і велика піввісь дорівнює $4\sqrt{5}$
8	Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що велика піввісь дорівнює 10, ексцентриситет $e = 0,5$
9	Скласти рівняння еліпса, координати фокусів якого $(\pm 3; 0)$, а довжина великої вісі дорівнює 12
10	Скласти рівняння еліпса, якщо відомо, що сума півосей дорівнює 12 і відстань між фокусами дорівнює $4\sqrt{6}$
11	Дано рівняння еліпса: $9x^2 + 16y^2 = 144$. Обчислити довжину малої та великої вісі, координати фокусів та ексцентриситет
12	Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки з координатами $M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ і $N\left(-2; \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$
13	Скласти рівняння еліпса, координати фокусів якого $(0; \pm 5)$, а ексцентриситет дорівнює $\frac{2}{3}$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Завдання
14	Скласти рівняння еліпса, якщо відомо, що сума півосей дорівнює 10 і відстань між фокусами дорівнює $4\sqrt{5}$
15	Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо, що її фокуси мають координати $(0; \pm 5)$, а дійсна вісь дорівнює 8
16	Визначити координати фокусів, довжину осей та ексцентриситет гіперболи $16y^2 - 9x^2 = 144$
17	Скласти рівняння гіперболи, вершини і фокуси якої знаходяться у відповідних фокусах і вершинах $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$
18	Записати рівняння гіперболи, що проходить через точку $A(9; 8)$, якщо асимптоти гіперболи мають рівняння $y = \pm \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) x$
19	Дано рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. Визначити її вісі та відстані між фокусами
20	Знайти координати вершин і фокусів гіперболи $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$
21	Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо, що її фокуси мають координати $(\pm 4; 0)$, а дійсна вісь дорівнює 6
22	Визначити координати фокусів, довжину осей та ексцентриситет гіперболи $24x^2 - 25y^2 = 600$
23	Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо, що її ексцентриситет дорівнює 2 і фокуси співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
24	Парабола з вершиною $O(0; -7)$ проходить через точку $M(6; -1)$, причому її вісь симетрії паралельна вісі Ox . Написати рівняння параболи

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Завдання
25	Написати рівняння параболи, якщо відомо, координати фокуса F і рівняння директриси: $F(-1; 2)$, $x - 3 = 0$
26	Написати рівняння параболи, якщо відомо, координати вершини O і рівняння директриси: $O(4; 1)$, $y + 2 = 0$
27	Написати рівняння параболи, якщо відомо, координати фокуса F і вершини O : $F(3; 0)$, $O(3; -3)$
28	На параболі $y^2 = 8x$ знайти точку, відстань якої від директриси дорівнює 4
29	Скласти рівняння директриси і знайти координати фокуса параболи $y^2 = 4x$
30	Знайти координати фокуса параболи $2y^2 - 5x = 0$

Завдання 3

Які лінії визначаються заданими рівняннями? Побудувати їх.

Номер варіанта	Рівняння	Номер варіанта	Рівняння
1	а) $x - 5y - 10 = 0$, б) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$, в) $x = -2\sqrt{-y}$	2	а) $x - 2y + 4 = 0$, б) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$, в) $x^2 = 3y - 6$
3	а) $-3x + y = 0$, б) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$, в) $y^2 = -4x + 2$	4	а) $x - 2y + 3 = 0$, б) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$, в) $x = -\sqrt{3y}$
5	а) $7x + y + 7 = 0$, б) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$, в) $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$	6	а) $x + 5y + 5 = 0$, б) $2x^2 + 4y^2 + 8x + 5 = 0$, в) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{9 + y^2}$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Рівняння	Номер варіанта	Рівняння
7	а) $3y - 5 = 0$, б) $4x^2 + 36y^2 - 16x + 72y - 92 = 0$, в) $x = \frac{1}{5}\sqrt{25 - y^2}$	8	а) $2x - 5y + 5 = 0$, б) $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$, в) $x = -2\sqrt{y^2 - 1}$
9	а) $2x - 4y - 8 = 0$, б) $3x^2 - 4y^2 + 6x - 16y - 25 = 0$, в) $x^2 = -3y$	10	а) $2x + 7 = 0$, б) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$, в) $25x^2 - 16y^2 = 1$
11	а) $3x - 2y - 6 = 0$, б) $y = 4x - 2x^2$, в) $5x^2 + y^2 = 5$	12	а) $2x - y = 0$, б) $y = 2 + 2 \cdot \sqrt{3 + 2x - x^2}$, в) $x^2 - 2y^2 = 4$
13	а) $3x - 2y - 12 = 0$, б) $x^2 + 6x + 3y - 5 = 0$, в) $4x^2 + y^2 = 4$	14	а) $2x - y + 6 = 0$, б) $y^2 + 8x - 16 = 0$, в) $x^2 - 2y^2 = 4$
15	а) $4x - 5y - 15 = 0$, б) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, в) $-x^2 + 4y^2 = 4$	16	а) $3x - y + 2 = 0$, б) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$, в) $y^2 = x + 2$
17	а) $x + 2y = 0$, б) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$, в) $y = 4\sqrt{-x}$	18	а) $2x + 3y + 2 = 0$, б) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$, в) $x^2 = 2y + 2$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Рівняння	Номер варіанта	Рівняння
19	а) $2x + y + 4 = 0$, б) $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$, в) $x = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - y^2}$	20	а) $4x + 3y + 4 = 0$, б) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 18y + 9 = 0$, в) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$
21	а) $5x - 3y + 5 = 0$, б) $4x^2 + 25y^2 - 24x - 64 = 0$, в) $x = 4\sqrt{-2y}$	22	а) $3x - y - 5 = 0$, б) $9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0$, в) $x^2 = 3y + 3$
23	а) $3x - 10 = 0$, б) $x^2 - 12x + 6y + 42 = 0$, в) $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$	24	а) $2x - 3y - 6 = 0$, б) $y^2 = 2x + 1$, в) $x = 4\sqrt{-y}$
25	а) $5x + y + 5 = 0$, б) $x = y^2 + 4y + 5$, в) $x^2 + 4y^2 = 8$	26	а) $5x - y + 5 = 0$, б) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$, в) $4x^2 + 9y^2 = 36$
27	а) $2x - y = 0$, б) $y = -3 + 2\sqrt{x^2 - 2x - 3}$, в) $5x^2 - 9y^2 = 45$	28	а) $3x + y = 0$, б) $y = 2x - x^2 + 2$, в) $9x^2 + 4y^2 = 36$
29	а) $7x - 10 = 0$, б) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$, в) $3x^2 + 4y^2 = 12$	30	а) $x - 5y - 5 = 0$, б) $3x^2 - y^2 + 5x + 6y - 2 = 0$, в) $x^2 + 4y^2 = 4$

Завдання 4

Номер варіанта	Задача
1	Знайти величини відрізків, які площина $2x - 3y - z + 12 = 0$ відсікає на осях координат та побудувати її в системі координат OXY
2	Записати рівняння площини, яка паралельна вісі OX та проходить через дві точки $A(4; 1; 2)$, $B(1; -3; 2)$. Намалювати площину у системі координат
3	Знайти величини відрізків, які площина відсікає на осях координат, та побудувати її в системі координат: $2x + 4y + 5z - 20 = 0$
4	Знайти кут між площинами $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ та $x - 4y - z + 9 = 0$
5	Знайти кут між площинами $3x - y + 2z + 15 = 0$ та $6x + 2y - 4z + 17 = 0$
6	Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1; 3; 4)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = (-7; 1; 2)$
7	Знайти канонічне рівняння прямої, яка проходить через дані точки: $M_1(3; -2; 1)$, $M_2(5; 7; -3)$. Визначити направляючий вектор
8	Знайти канонічне рівняння прямої, яка проходить через дані точки: $M_1(0; -5; 2)$, $M_2(6; -3; 0)$. Визначити направляючий вектор
9	Записати у канонічному вигляді рівняння прямих $\begin{cases} 3x - z + 2 = 0 \\ -x - 2y + z - 7 = 0 \end{cases}$
10	Якими повинні бути невідомі коефіцієнти, щоб прямі $\frac{x-2}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z+5}{2}$ та $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{5}$ були паралельними
11	Якими повинні бути невідомі коефіцієнти, щоб прямі $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-1}{5}$ та $\frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{p}$ були паралельними

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Задача
12	Якими повинні бути невідомі коефіцієнти, щоб прямі: $\frac{x+5}{-2} = \frac{y-3}{n} = \frac{z+2}{-4}$ та $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{n} = \frac{z-1}{3}$ були перпендикулярні
13	Знайти рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$, $M_3(2; 0; 2)$
14	Знайти кут між прямою $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{5}$ і площиною $x - 3y + z + 5 = 0$
15	Знайти кут між прямою $\frac{x+5}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-8}{0}$ і площиною $x + 5y + 2z + 4 = 0$
16	Знайти кут між прямою $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+2}{-1}$ і площиною $x - y + z + 7 = 0$
17	Знайти точку перетину прямої та площини $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$, $x - 2y + 4z + 15 = 0$
18	Знайти точку перетину прямої та площини $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$, $3x - y + 5z + 1 = 0$
19	Знайти віддаль від точки $M_0(5; 0; -7)$ до площини $2x + 3y - z + 11 = 0$
20	Знайти віддаль від точки $M_0(2; 1; -1)$ до площини $3x - 2y + 5z - 1 = 0$
21	Знайти кут між прямими $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ та $\frac{x+5}{3} = \frac{y-25}{4} = \frac{z-7}{-2}$

Продовж. таблиці

Номер варіанта	Задача
22	Знайти кут між прямими $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z-2}{4}$ та $\frac{x}{-3} = \frac{y+5}{7} = \frac{z+3}{-1}$
23	Дані вершини трикутника ABC : $A(-3; 2; 5)$, $B(1; 2; -3)$, $C(-3; -2; 7)$. Знайти канонічне рівняння медіани, яка проходить через вершину B , та параметричне рівняння прямої BC
24	Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-2; 5; -3)$ паралельно осі OZ
25	Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 1; 3)$ паралельно прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-3}{8}$
26	При якому значенні коефіцієнту A площина $Ax - 5y + 3z + 7 = 0$ буде паралельна прямій $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{-2}$
27	При якому значенні коефіцієнту B площина $3x + By + 5z - 1 = 0$ буде паралельна прямій $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{-2}$
28	При якому значенні коефіцієнтів A та B площина $Ax + By + 8z - 11 = 0$ буде перпендикулярна прямій $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{4}$
29	Знайти рівняння перпендикуляра, який проведений через точку $A(-1; 3; 5)$ до площини $2x + y + z - 2 = 0$
30	Знайти рівняння перпендикуляра, який проведений через точку $A(3; 0; 4)$ до площини $5x - 3z + 14 = 0$

Завдання 5

Задача 1. Фірма випускає чотири види продуктів у кількості $X = (11; 15; 20; 25)$. Для виробництва цих продуктів використовують 5 видів сировини. Задається матриця витрат сировини

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 11 & 13 \\ 9 & 5 & 6 & 2 & 3 \\ 12 & 18 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – витрати k -го виду сировини на одиницю i -го продукту. Знайти необхідну кількість сировини кожного виду для виробництва плану X .

Задача 2. Задається вектор об'ємів, який характеризує завантаженому продукцію $\vec{a} = \{25; 30; 40; 70; 120\}$. Відомі транспортні витрати на одиницю кожного виду продукту: $c = (35; 45; 80; 70; 40)$. Визначити загальну суму транспортних витрат.

Задача 3. Нехай початкова вартість машини є b одиниць гривень. Крім того, відомо, що вартість машини рівномірно відносно часу роботи переноситься на виготовлену продукцію до повного зносу. Час повного зносу машини дорівнює a років. Визначити математичну модель залежності вартості машини від терміну її роботи. Побудувати в системі координат одержану залежність.

Задача 4. Розв'язати задачу 3 за умови, що $b = 30$ тис. гривень, $a = 10$ років. Побудувати лінію залежності вартості машини від строку її роботи. Чому буде дорівнювати вартість машини через сім років?

Задача 5. Виробництво випускає три види продукції, витрати на які задаються матрицею

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 8 \\ 9 & 4 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

де b_{ik} – витрати k -го виду сировини на одиницю i -го продукту. Матриця $C = (10; 8; 7; 5; 11)$ задає вартість одиниці сировини кожного виду. Визначити вартість сировини для кожного виду продукту.

Задача 6. Мале підприємство випускає продукцію в асортименті й кількості, описаними вектором $\vec{b} = \{25; 30; 40; 20\}$. Податок з одиниці продукту має вигляд $\vec{c} = \{5; 10; 15; 7\}$. Визначити, загальну суму податку.

Задача 7. Витрати деякого виробництва 10 одиниць товару дорівнюють 1000 гривень, а 50 одиниць – 2000 гривень. Знайти математичну модель залежності витрат від обсяг виробництва товару, якщо відомо, що ця залежність лінійна. Побудувати графік.

Задача 8. Продукція фірми перевозиться до місця реалізації двома видами транспорту. Залежність транспортних витрат має вигляд: $y = 50x + 150$ і $y = 25x + 250$, де x – віддаль перевезень в сотнях кілометрів, а y – транспортні витрати. Визначити, з якої віддалі та який вид з поданих є економічним? Дати економічну інтерпретацію коефіцієнтам при x та вільним членам.

Задача 9. У результаті досліджень попиту на деякий товар за ряд років одержана така модель для прогнозу попиту цієї продукції протягом січня–квітня року: $y = 2x + 60$, де $D(y) = [0, 6]$ та y – в тис. штук. Обчислити попит на продукт y : а) у березні, б) у травні.

Задача 10. Два підприємства, які знаходяться на відстані 100 км, випускають одну і ту саму продукцію, причому ціна реалізації виробу на обох підприємствах однакова і дорівнює p гривень. Транспортні витрати на перевезення одиниці товару від підприємства A до покупців (споживачів) дорівнюють 1 грн/км, а від підприємства B – 2 грн/км. Для яких покупців витрати на закупку одиниці товару у підприємствах A і B повинні бути однаковими? Як цілеспрямовано прикріпити покупців за підприємствами?

Задача 11. Розв'язати задачу 10 за умови, що транспортні витрати на перевезення одного виробу від підприємства A до покупця (споживача) дорівнюють 9 грн/км, а від підприємства B – 3 грн/км. Знайти потужність N виробництва A , при якій попит закріплених до нього покупців буде виконаним, якщо середня щільність покупців (споживачів) вважається рівною 0,2 покуп./км², а попит кожного покупця складає 1000 виробів на рік.

Задача 12. Розв'язати задачу 10 за умови, що транспортні витрати на 1 км шляху перевезення одного виробу від підприємств A і B до покупців однакові і дорівнюють 12 грн/км, а ціна реалізації кожного виробу на підприємствах A і B дорівнює 200 грн і 225 грн відповідно.

Задача 13. Нехай у момент $t=0$ почали випускати деякі машини, причому виробництво їх відбувається рівномірно відносно часу. Річний обсяг випуску продукції в гривні має 1000000 одиниць. Повний термін використання їх складає 10 років. Визначити математичну модель залежності вартості машинного парку, враховуючи знос машин від часу t , де $t \in [0; 10]$. Побудувати графік.

Задача 14. Використовуючи умови задачі 13, розв'язати задачу, якщо термін експлуатації машин дорівнює 20 рокам. Визначити вартість машинного парку на кінець 10-го року з часу початку роботи підприємства. Побудувати графік.

Задача 15. Витрати на x одиниць продукції деякого підприємства дорівнюють $5 + 0,6x$ грн. Знайти ціну одиниці продукту. Побудувати відповідний графік залежності ціни від обсягу виробленої продукції.

Задача 16. Нехай середній розмір заробітної плати на одного робітника, який має x членів сім'ї, дорівнює A гривень. Визначити середній прибуток на одного члена сім'ї, якщо члени сім'ї не працюють. Побудувати лінію.

Задача 17. Знайти розв'язок задачі 16 при доповненні, що відомий середній обсяг B виплат і пільг за рахунок соціальних фондів та прибутків від особистого підсобного господарства на душу населення.

Задача 18. При виготовленні виробів двох видів використовуються деталі чотирьох типів. Задана матриця витрат деталей

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} ($i=1,2$; $k=1,2,3,4$) – кількість деталей k -го типу, яка використовується для виготовлення i -го виду виробів. Крім того, задаються три варіанти виробництва однотипних деталей, вартість однієї з яких описується матрицею

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 0,3 & 0,3 \\ 4 & 0,7 & 0,7 \\ 5 & 5,0 & 3,0 \\ 6 & 0,5 & 4,0 \end{pmatrix},$$

де c_{ik} ($i=1,2,3,4$; $k=1,2,3$) – вартість в гривнях однієї деталі i -го виду, виготовленої по k -му варіанту.

Обчислити матрицю питомої вартості виробів по варіантах виробництва. Для кожного виробу визначити, при якому варіанті виробництва вартість виробу найменша.

Задача 19. Нехай початкова сума вкладу складає A гривень. Процентна ставка дорівнює q відсотків річних. Визначити числову послідовність для обчислення грошових накопичень з рахунків простих відсотків.

Задача 20. Знайти суму грошових накопичень, якщо початкова сума $A = 6000$ гривень, використовуючи прості відсотки, через три роки при відсотковій ставці 2% , 3% річних. Обчислити відповідні прирости функцій накопичення за три роки для обох випадків.

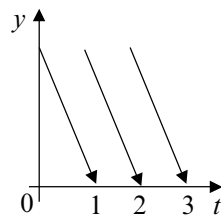
Задача 21. Побудувати числову послідовність для характеристики грошових накопичень, використовуючи складні відсотки (A – початкова сума вкладу, r – річні відсотки).

Задача 22. Побудувати числову послідовність для характеристики грошових накопичень, враховуючи складні відсотки за умови, що відсотки накопичуються рівномірно m разів за рік щоразу по нормі r/m на новий залишок вкладу (сума вкладу стабільна протягом року).

Задача 23. Знайти розв'язок задачі 22 за умови, що відсотки нараховуються безперервно.

Задача 24. Початкова вартість станка дорівнює A_0 гривень та амортизаційні відчислення дорівнюють $p\%$ річних. Вважаючи, що відчислення проводяться безперервно, визначити залишкову вартість станка через t років.

Задача 25. Нехай y – рівень запасів деякої продукції на складі в момент t . Вважаємо, що виконуються такі умови: 1) запаси витрачаються рівномірно від деякого початкового рівня $c > 0$ до повного їх використання; 2) поповнення запасів виконується вмить. На рисунку наводиться графік функції зміни запасів. Записати вид цієї функції та дослідити її на неперервність.



Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2,5)$ паралельно прямої $3x - 4y + 15 = 0$.

Розв'язок

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $A(x_1; y_1)$ у даному напрямку, з кутовим коефіцієнтом k :

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Це рівняння визначає пучок прямих, що проходять через точку $A(x_1; y_1)$, яка називається центром пучка.

Точка $A(2; 5)$, через яку проходить пряма нам відома, тому, підставляючи у рівняння пучка прямих значення $k = \frac{3}{4}$, $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, отримаємо

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x - 2); \quad 4y - 20 = 3x - 6.$$

Після спрощення рівняння шуканої прямої буде мати наступний вигляд

$$3x - 4y + 14 = 0.$$

Відповідь: $3x - 4y + 14 = 0$.

Задача 2. Скласти рівняння окружності, що проходить через три точки: $A(0; 1)$, $B(2; 0)$ і $C(3; -1)$.

Розв'язок

Шукане рівняння має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Оскільки окружність проходить через указані точки, координати кожної з них задовольняють рівнянню окружності. Підставляючи по черзі у шукане рівняння координати даних точок, отримаємо три рівняння для визначення a , b і r :

$$\begin{cases} a^2 + (1 - b)^2 = r^2 \\ (2 - a)^2 + b^2 = r^2 \\ (3 - a)^2 + (-1 - b)^2 = r^2 \end{cases}.$$

Візьмемо рівняння перше і друге, а потім перше і третє. Праві

частини цих рівнянь між собою рівні, тому рівні їх ліві частини. Звідси маємо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = (2-a)^2 + b^2 \\ a^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + (-1-b)^2 \end{cases}.$$

Після спрощення отримаємо:

$$\begin{cases} 4a - 2b = 3 \\ 6a - 4b = 9 \end{cases}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{9}{2}.$$

Підставляючи значення a і b у перше рівняння системи, отримаємо $r^2 = \frac{65}{2}$.

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{65}{2},$$

або після спрощення

$$x^2 + y^2 + 3x + 9y - 10 = 0.$$

Задача 3. Знайти довжину малої та великої осі, координати фокусів та ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 = 144$.

Розв'язок

Перетворимо це рівняння до найпростішого вигляду

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Розділивши обидві частини заданого рівняння на 144, отримаємо

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Звідси $a^2 = 36$, $b^2 = 16$. Отже, $a = 6$, $2a = 12$; $b = 4$, $2b = 8$. Таким чином, довжина малої та великої осі відповідно 8 і 12.

Між величинами a , b і c у еліпса існує залежність $a^2 - b^2 = c^2$, де $2a$ – велика вісь еліпса, $2b$ – мала вісь еліпса, $2c$ – відстань між фокусами.

Підставимо $a = 6$, $b = 4$ у дане співвідношення і отримаємо $c = 2\sqrt{5}$. Координати фокусів будуть $(2\sqrt{5}; 0)$ і $(-2\sqrt{5}; 0)$.

Ексцентриситетом еліпса називається відношення відстані між фокусами цього еліпса до довжини його великої вісі, отже,

$$e = \frac{c}{a}, \quad e = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Задача 4. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між її вершинами дорівнює 20, а відстань між фокусами 30.

Розв'язок

Вершини гіперболи лежать на її дійсній осі. За умовою $2a = 20$, $2c = 30$. Отже, $a = 10$, $a^2 = 100$; $c = 15$, $c^2 = 225$.

Величини a , b і c у гіперболи пов'язані співвідношенням $a^2 + b^2 = c^2$; звідси $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100$; $b^2 = 125$.

Найпростіше рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, тому шукане рівняння буде мати вигляд

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1.$$

Задача 5. Які лінії визначаються заданими рівняннями? Побудувати їх.

а) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$,

б) $2x - y + 4 = 0$,

в) $-x^2 + 3y^2 = 3$.

Розв'язок

а) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$.

Виділимо повні квадрати:

$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 4y) + 16 = 0;$$

$$4(x^2 - 4x + 4) - 16 + 9(y^2 + 4y + 4) - 36 + 16 = 0;$$

$$4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Це рівняння визначає еліпс з півосями $a=3$, $b=2$, центром $C(2; -2)$ (рис. 1).

б) $2x - y + 4 = 0$.

Це лінійне рівняння, а тому воно визначає пряму лінію. Зведемо його до рівняння прямої у "відрезках":

$$2x - y = -4, \quad \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1,$$

$a=-2$, $b=4$ – відрізки, які пряма відтинає на осях координат (рис. 2).

в) $-x^2 + 3y^2 = 3$.

Зведемо до канонічного вигляду:

$$-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Це рівняння визначає гіперболу з півосями $a=\sqrt{3}$ (уявна), $b=1$ (дійсна). Центр гіперболи лежить на початку координат, вершини і фокуси розміщені на осі Oy . Побудуємо основний прямокутник і його діагоналі, що є асимптотами гіперболи, і зобразимо вітки лінії (рис. 3).

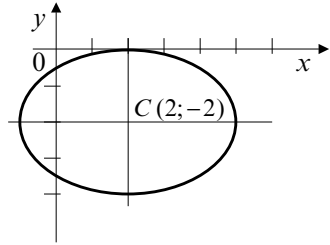


Рис. 1

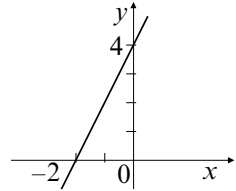


Рис. 2

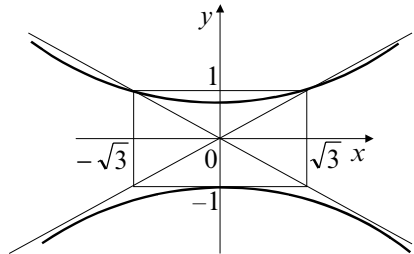


Рис. 3

Задача 6. Знайти відстань від точки $A(2; 3; -1)$ до площини $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

Розв'язок

Відстань від точки $M(x_1; y_1; z_1)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається по формулі:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (3)$$

в якій слід покласти $A = 7$, $B = -6$, $C = -6$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, отже,

$$d = \frac{|7 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) + 42|}{\sqrt{7^2 + (-6)^2 + (-6)^2}}, \quad d = \frac{|14 - 18 + 6 + 42|}{11} = 4.$$

Відповідь: $d = 4$.

Задача 7. Шведський економетрік Л. Торнквіст зробив прогноз про залежність витрат на предмети першої необхідності від загального прибутку по кривій

$$y = \frac{ax}{x+b}, \quad (4)$$

де y – витрати, x – загальний прибуток, a , b – параметри.

Визначити вигляд кривої витрат Торнквіста та побудувати її, якщо $a = 2$; $b = -1$.

Розв'язок

З формули (4) маємо $yx + yb = ax$. Запишемо це рівняння в системі $x' = x - m$; $y' = y - n$. Звідси отримаємо

$$\begin{cases} x = x' + m \\ y = y' + n \end{cases}. \quad (5)$$

Підставимо вираз (5) в рівняння (4):

$$(x' + m)(y' + n) = a(x' + m) - b(y' + n).$$

Після спрощення маємо:

$$x'y' = -y'(m + b + x'(a - n)) - mn - nb + am.$$

Числа m та n вибираємо так, щоб в даному рівнянні були відсутні члени першого виміру, тобто $m + b = 0$, $m = -b$ та $a - n = 0$, $a = n$.

Рівняння кривої має після спрощення вигляд:

$$x'y' = -ab.$$

Якщо $a = 2$; $b = -1$, тоді $x'y' = 2$. Це рівняння гіперболи, у якої асимптотами є осі x' та y' , а центр гіперболи знаходиться в точці (рис. 4).

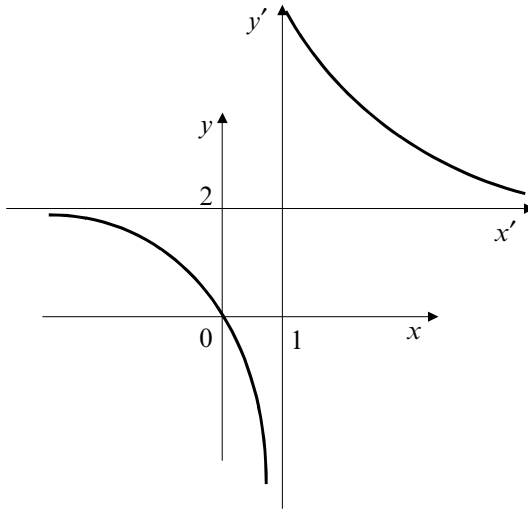


Рис. 4

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевников Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Мир и образование, 2003.
3. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1969.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.
5. Кузнецов Л. А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высш. шк., 1982.
6. Минорский В. П. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1987.
7. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1967.
8. Шипачев В. С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985.

ЗМІСТ

Вступ	3
1. Елементи лінійної та векторної алгебри	3
Теоретичні питання	3
Варіанти завдання	4
Розв'язування типових задач	26
2. Аналітична геометрія	31
Теоретичні питання	31
Варіанти завдання	32
Розв'язування типових задач	45
Рекомендована література	52

Навчальне видання

**МАНОЙЛЕНКО Олена Семенівна
СОКУРЕНКО Єлізавета Василівна**

**Елементи лінійної, векторної алгебри
та аналітичної геометрії, які застосовуються для розробки
математичних моделей економічного змісту**

Частина 2

Методичні вказівки

(українською мовою)

Редактор О.Г. Тулузакова
Комп'ютерна правка та верстка Н.В. Чудновцева
Коректор Н.О. Шайкіна

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1150 від 12.12.2002 р.

Підписано до друку 03.01.06. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 3,1. Обл.-вид. арк. 3,3.
Тираж 100 прим. Вид. № 4. Зам. № 3. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5



ВИДАВНИЦТВО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ



Шановні панове!

Запрошуємо Вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого забезпечать оперативне та якісне виконання замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника в повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригіналу-макета, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізку на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублюкатором фірми "Duplo" формату А3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати **підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки**, – ми до Ваших послуг.

© Національний університет кораблебудування

✉ Україна, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5,

видавництво НУК

☎ 8(0512) 47-83-86; 39-81-42, 39-73-39, fax 8(0512) 42-46-52;

E-mail: publishing@usmtu.edu.ua

ДЛЯ НОТАТОК