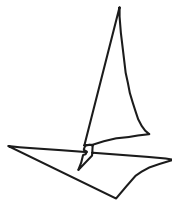


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Український державний морський технічний університет
імені адмірала Макарова

В.С. БЛІНЦОВ, А.Т. КІНАШ, М.Я. ХЛОПЕНКО

ОСНОВНІ МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

*Рекомендовано Методичною радою УДМТУ
як навчальний посібник*



Миколаїв
УДМТУ
2002

УДК 62-83
ББК 32.965.3
Б 69

Рекомендовано Методичною радою УДМТУ як навчальний посібник

Рецензенти:

В.П. Фролов, канд. фіз.-мат. наук, доцент;

Л.І. Бугрім, канд. техн. наук, доцент

Блінцов В.С., Кінаш А.Т., Хлопенко М.Я.

Б 69 Основні методи оптимального керування електромеханічних систем: Навчальний посібник. – Миколаїв: УДМТУ, 2002. – 44 с.

Навчальний посібник містить основні положення, методи і практичні додатки теорії оптимального керування стосовно до задач аналітичного конструювання оптимальних регуляторів і швидкодії електроприводів з урахуванням обмеження щодо нагрівання. Викладені методи супроводжуються необхідними теоретичними зведеннями і розбором прикладів. Велика увага приділяється варіаційним методам Ейлера–Лагранжа, принципу максимуму Л.С. Понтрягіна і принципу оптимальності Р. Беллмана, що увійшли в золотий фонд теорії оптимального керування електромеханічних систем.

Призначено для студентів і магістрів електротехнічного факультету УДМТУ, що навчаються за спеціальностями 8.092201 "Електричні системи і комплекси транспортних засобів" і 8.092203 "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод".

УДК 62-83
ББК 32.965.3

© Блінцов В.С., Кінаш А.Т.,
Хлопенко М.Я., 2002
© Видавництво УДМТУ, 2002

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1.1. Вступ до предмету

В теорії керування (управління) [1, 3, 4, 6, 7, 9] в загальному випадку розглядаються системи (об'єкти), на поведінку яких можна впливати (якими можна керувати) шляхом зміни параметрів управління. Останні обираються з урахуванням певних обмежень.

Теоретичний та практичний інтерес представляє оптимальне управління.

Метою теорії оптимального керування є розробка методу такого вибору параметрів управління, за якого буде досягнуто оптимум деякого функціоналу, наприклад: мінімум часу, мінімальний розхід палива, мінімальні витрати, максимум корисності і т. ін.

Задачі такого типу виникають не тільки при вивченні сучасної технології, де окремі процеси надзвичайно складні та детально розроблені, але й при дослідженні питань, пов'язаних з процесами виробництва: проблеми економічного зростання, виробниче планування, ціноутворення, аналіз виробничих ресурсів, управління запасами та ін.

В даному навчальному посібнику розглядаються сучасні методи теорії оптимального керування детермінованих електромеханічних систем.

1.2. Поняття про простір становищ

В загальному випадку об'єкт управління (динамічна система) може бути представлений у вигляді структурної схеми (рис. 1).

Уся сукупність параметрів, яка визначає стан об'єкта на даній структурній схемі, розбита на такі групи:

1. Вхідні параметри (зовнішні дії):

а) керуючі $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$;

б) випадкові збурювальні $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$.

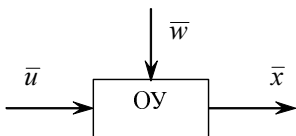


Рис. 1. Структурна схема об'єкта управління

2. Вихідні параметри $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, які характеризують стан управляючого об'єкта. Їх також називають змінними стану або *фазовими координатами*.

Множини усіх значень компонент, які мають вектори $\bar{x}, \bar{u}, \bar{w}$, утворюють відповідно простір стану (фазовий простір), простір управління та стохастичний простір збурень різної розмірності.

Стан об'єкта в кожний момент часу можна зобразити у вигляді точки n -вимірного простору, яка є кінцем фазового вектора $\bar{x}$, що виходить з початку координат.

При русі об'єкта кінець фазового вектора описує у n -вимірному просторі деяку криву – *фазову траєкторію*. Для механічних об'єктів фазова траєкторія має бути неперервною функцією часу.

1.3. Загальна постановка задачі оптимального управління

Поведінка неперервної динамічної системи для широкого класу задач може бути описана системою нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}[\bar{x}(t), \bar{u}(t), t], \quad (1.1)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n -вимірний вектор стану (фазовий вектор), який визначає становище системи; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$ – r -вимірний керуючий вектор; $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ – n -вимірна векторна функція; t – час.

Звичайно задача оптимального управління формулюється таким чином.

Дано:

1) рівняння стану (1.1);

2) системи граничних умов, які накладені на змінні стану в початковий та кінцевий моменти часу:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{X}_0, \quad \bar{x}(t_f) = \bar{X}_f, \quad (1.2)$$

де t_0, t_f – початковий та кінцевий моменти часу; $\bar{X}_0, \bar{X}_f$ – задані множини;

3) система обмежень, яка накладена на змінні стану та управління:

$$\bar{x}(t) \in \bar{X}_t, \quad \bar{u}(t) \in \bar{U}_t, \quad (1.3)$$

де $\bar{X}_t, \bar{U}_t$ – деякі множини (задані);

4) показник якості (критерій оптимальності) або функціонал

$$F = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt, \quad (1.4)$$

де g_0, f_0 – скалярні функції.

Треба знайти таке допустиме керування $\bar{u}(t)$, при якому $F \rightarrow \max(\min)$.

Управління, що є розв'язком цієї задачі, називають оптимальним, а відповідно йому траєкторію оптимальною.

В залежності від вигляду показника якості F звичайно відрізняють три класи задач оптимального управління:

1) задача Майєра:

$$F = F_1, \quad F_1 = g_0(\bar{x}(t_f), t_f, \bar{x}(t_0), t_0);$$

2) задача Лагранжа:

$$F = F_2, \quad F_2 = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt;$$

3) задача Больца:

$$F = F_1 + F_2.$$

Задача (1.1)–(1.4) є так званою *неавтономною* задачею оптимального управління з незакріпленим часом, тому що підінтегральна функція в показнику якості (1.4) явно залежить від часу. Якщо вказана функція в (1.4) не залежить явно від часу, то задачу (1.1)–(1.4) називають *автономною*.

2. ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ

2.1. Загальні відомості

Знаходження екстремуму функціонала (показника якості) відноситься до варіаційних задач [5], які мають велике значення в теорії оптимального управління.

Вперше варіаційна задача (задача про лінію найшвидшого спуску або про брахістохрону) була поставлена у 1696 році Іоганном Бернуллі.

У XVIII столітті Ейлером та Лагранжем були розроблені загальні методи розв'язання широкого класу варіаційних задач.

Фундаментальна теорія варіаційного числення остаточно сформувалася у XIX столітті. Нижче викладаються математичні методи даної теорії для найпростіших показників якості.

2.2. Рівняння Ейлера

Розглянемо функціонал:

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x, \dot{x}) dt,$$

де крапка означає похідну по часу t .

Серед допустимих траєкторій $x = x(t)$, які проходять через точки (t_0, x_0) та (t_f, x_f) , де $x_0 = x(t_0)$ та $x_f = x(t_f)$, знайдемо ту, для якої функціонал F має екстремальне значення.

Нехай $x = x(t)$ є така траєкторія (рис. 2).

Замінімо її другою близькою траєкторією:

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \eta,$$

де ε – деяке достатньо мале число; $\eta = \eta(t)$ – довільна функція, яка перетворюється в нуль на кінцях проміжку $t \in (t_0, t_f)$:

$$\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0.$$

Рис. 2. Екстремальна 1 та близька до неї траєкторія 2

Тоді

$$F = F(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x + \varepsilon \eta, \dot{x} + \varepsilon \dot{\eta}) dt. \quad (2.1)$$

Продиференціюємо по ε :

$$\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right) dt. \quad (2.2)$$

Проінтегруємо другий доданок, який стоїть під знаком інтегралу, за частинами:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} dt = \eta \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} dt = - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} dt. \quad (2.3)$$

Підставимо вираз (2.3) в (2.2):

$$\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] dt.$$

Якщо функція $\tilde{x}(t)$ дає екстремум інтегралу (2.1), то $\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$. Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (2.4)$$

Це рівняння отримане Ейлером і носить його ім'я. Воно виражає необхідну умову екстремуму функціонала. Достатня умова екстремуму

функціонала визначається по другій похідній $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}$. Якщо ця похідна позитивна, то має місце мінімум, а якщо від'ємна, то буде максимум. Таким

чином, визначивши похідну $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}$, можна одержати наступну умову

Лежандра для максимуму $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \leq 0$, а для мінімуму $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \geq 0$.

У випадку декількох незалежних змінних $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ функціонал $F = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt$, а рівняння Ейлера мають вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Приклад. На якій кривій може досягатися екстремум функціонала

$$F = \int_0^1 [(\dot{x})^2 - x^2] dt; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1?$$

Рішення. Рівняння Ейлера (2.4) має вигляд $\ddot{x} + x = 0$. Його загальним рішенням є $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Використовуючи граничні умови, знаходимо $C_1 = 0, C_2 = 1$. Таким чином, екстремум функціонала досягається при $x = \sin t$.

Трохи складніше розв'язуються задачі, коли граничні точки не закріплені і можуть знаходитися на деяких поверхнях чи лініях. Рівняння Ейлера для таких задач доповнюються умовами трансверсальності. Зміст їх полягає у наступному. Коли розглядалося рівняння Ейлера, то граничні точки були закріплені. Така задача називається задачею з закріпленими кінцями. З граничних умов визначалися постійні інтегрування і тим самим виходило конкретне розв'язування рівняння Ейлера. Наочно це показував наведений вище приклад. Якщо екстремаль повинна проходити між поверхнями чи лініями, то ніяких визначених граничних точок не задається. Тому для визначення постійних інтегрування потрібно мати додаткові умови. Їх називають умовами трансверсальності. Докладно про ці умови викладено в сучасних курсах теорії оптимального керування. У даному посібнику вони не розглядаються.

2.3. Рівняння Ейлера–Лагранжа

Розглянемо задачу Лагранжа.

Дано:

Цільова функція $F = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt \rightarrow \min$, де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; обмеження $g_i(t, \bar{x}) = 0, i = \overline{1, m}$.

Треба знайти векторну функцію $\bar{x}(t)$, яка дає мінімум інтегралу F .
 Введемо множники Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.
 Запишемо функцію Лагранжа:

$$L = L(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i.$$

Тоді

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L dt \rightarrow \min.$$

Цьому функціоналу відповідає рівняння Ейлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Зазначимо, що у задачі Лагранжа обмеження можуть мати вигляд

$$\int_{t_0}^{t_f} g_i(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Такі обмеження називають *ізопериметричними*, а відповідну варіаційну задачу – *ізопериметричною*.

Ізопериметрична задача зводиться до задачі на умовний екстремум шляхом заміни інтегральних умов диференційними. Для цього позначимо:

$$\int_{t_0}^t g_i(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt = y_i(t), \quad i = \overline{1, m},$$

причому $y_i(t_0) = 0$ і $y_i(t_f) = b_i$. Продиференціюємо $y_i(t)$ по часу t :

$$\dot{y}_i(t) = g_i(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}), \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким чином, ізопериметричні умови звелися до диференційних, а варіаційна задача – до задачі на умовний екстремум, для якої розв'язання уже відомо.

2.4. Застосування рівняння Ейлера–Лагранжа для знаходження оптимальної діаграми струму електродвигуна

Запишемо для двигуна постійного струму рівняння обертального руху ротора навколо нерухомої осі:

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_o - M_c,$$

де $M_d = c_m i$, M_c – моменти обертання і опору; Ω – кутова швидкість; J – момент інерції ротора відносно осі обертання.

Звідси при $M_c = 0$ (моментом опору нехтуємо)

$$i = \frac{J}{c_m} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (2.5)$$

Нагрів електродвигуна за час T визначається втратами у якорі:

$$Q = \int_0^T R i^2 dt,$$

де R – опір якоря.

Задача оптимального керування може бути сформульована таким чином: визначити $i = i(t)$ при відпрацюванні максимального переміщення за час T . Значення кута обертання $\varphi = \int_0^T \Omega dt \rightarrow \max$ при обмеженні $Q \leq A$ на нагрів.

Строга математична постановка сформульованої задачі може бути записана у наступному вигляді.

Дано:

- 1) рівняння стану (2.5);
- 2) граничні умови

$$\Omega(0) = 0, \quad \Omega(T) = 0, \quad i(0) = i_0, \quad i(T) = -i_0; \quad (2.6)$$

- 3) критерій оптимальності

$$F_1 = \varphi = \int_0^T \Omega dt \rightarrow \max; \quad (2.7)$$

4) ізопериметричне обмеження

$$F_2 = Q = \int_0^T R i^2 dt = A. \quad (2.8)$$

Треба знайти $i(t)$, для якого виконується умова (2.7) при обмеженні (2.8) і граничних умовах (2.6).

Підставимо в (2.8) значення струму (2.5):

$$F_2 = \frac{J^2 R}{c_m^2} \int_0^T \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)^2 dt = k \int_0^T \dot{\Omega}^2 dt, \quad (2.9)$$

де $k = \frac{J^2 R}{c_m^2}$.

Взявши до уваги (2.7) і (2.9), запишемо функцію Лагранжа: $L = \Omega + \lambda k \dot{\Omega}^2$, де λ – множник Лагранжа.

Тоді $F = \int_0^T L dt \rightarrow \max$.

Цьому функціоналу відповідає рівняння Ейлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = 1 - 2k\lambda \ddot{\Omega} = 0.$$

Розв'язуючи це диференціальне рівняння, знаходимо:

$$\Omega = \frac{1}{4\lambda k} t^2 + C_1 t + C_2; \quad (2.10) \quad i = \frac{J}{c_m} \dot{\Omega} = \frac{J}{c_m} \left(\frac{t}{2k\lambda} + C_1 \right). \quad (2.11)$$

Постійні інтегрування C_1 і C_2 визначаються з граничних умов (2.6):

$$C_1 = \frac{i_0 c_m}{J}; \quad C_2 = 0, \quad (2.12)$$

де $i_0 = -\frac{JT}{4\lambda k c_m}$, а множник Лагранжа λ – з умови (2.8).

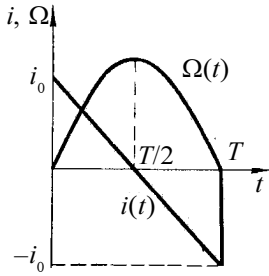
Підставивши (2.12) в (2.10) і (2.11), знаходимо оптимальні закони

зміни кутової швидкості і струму:

$$\Omega = \frac{c_m i_0}{JT} (Tt - t^2); \quad i = i_0 \left(1 - \frac{2}{T} t \right).$$

Визначаємо нагрів з урахуванням знайденої залежності для струму:

$$Q = \int_0^T R i^2 dt = \int_0^T R i_0^2 \left(1 - \frac{2}{T} t \right)^2 dt = \frac{1}{3} R i_0^2 T = A.$$



Звідси визначаємо припустиме початкове значення струму:

$$i_0 = \sqrt{\frac{3A}{RT}}.$$

Графіки зміни струму i і кутової швидкості Ω показані на рис. 3.

Рис. 3. Графіки оптимальної діаграми струму якоря і кутової швидкості при обмеженні нагріву електродвигуна

Таким чином, оптимальний закон зміни струму відповідно до заданих умов є лінійною функцією часу, а кутова швидкість описується параболою.

2.5. Канонічні рівняння Ейлера–Лагранжа

Розглянемо загальну задачу оптимального керування із закріпленими кінцями і фіксованим часом (задачу Лагранжа):

$$f_j(\bar{x}, \bar{u}, t) - \dot{x}_j = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.13)$$

$$g_i(\bar{x}, \bar{u}, t) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (2.14)$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \quad x_j(t_f) = x_j^f, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.15)$$

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \rightarrow \min, \quad (2.16)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$.

Складаємо функцію Лагранжа:

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{j=1}^n \psi_j (f_j - \dot{x}_j) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i,$$

де $\psi_0, \psi_j, \lambda_i$ – множники Лагранжа, при цьому $\psi_j = \psi_j(t)$, $j = \overline{1, n}$;
 $\psi_0 = \text{const}$, $\lambda_i = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$.

Одержимо при $\psi_0 \leq 0$ функціонал:

$$\tilde{F} = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{u}, \bar{\psi}, \bar{\lambda}, t) dt \rightarrow \max,$$

де $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$.

Тут функціонал $\tilde{F}$ максимізується, хоча функціонал F мінімізується, тому що множник ψ_0 при f_0 , або, що теж саме, при F у неособливому випадку приймається від'ємним ($\psi_0 = -1$). В особливому випадку ($\psi_0 = 0$) функціонал $\tilde{F}$ не залежить від F .

Запишемо рівняння Ейлера–Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 0, & j = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial L}{\partial u_s} = 0, & s = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Введемо функцію Гамільтона

$$H = \sum_{j=0}^n \psi_j f_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i.$$

Тоді

$$L = H - \sum_{j=1}^n \psi_j \dot{x}_j.$$

Отже, система (2.17) набирає вигляду

$$\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_s} = 0, \quad s = \overline{1, r}. \quad (2.19)$$

Вона називається канонічними рівняннями Ейлера–Лагранжа. Рівняння (2.18) називають *спряженою системою*, а (2.19) – умовами *стаціонарності*.

Умови стаціонарності (2.19) показують, що на екстремалі гамільтоніан H розглядається при кожному фіксованому $t \in (t_0, t_f)$ як функція від керування $\bar{u}$ і задовольняє необхідну умову екстремуму. На оптимальній траєкторії гамільтоніан H як функція від управління $\bar{u}$ досягає максимуму (або точніше верхньої межі) при оптимальному керуванні.

Тепер сформулюємо *правило множників Лагранжа*. Якщо допустима пара $(\bar{u}, \bar{x})$ є розв'язком задачі оптимального управління (2.13)–(2.16), то знайдуться такі множники Лагранжа, які не дорівнюють нулю, що ця пара задовольняє рівнянням Ейлера–Лагранжа (2.18) і (2.19).

Згідно з цим правилом, щоб знайти оптимальне управління і оптимальну траєкторію, слід розв'язати систему рівнянь (2.13), (2.14), (2.18) і (2.19) за крайових умов (2.15). Рівняння Ейлера–Лагранжа отримано за умови, що вектор управління $\bar{u}$ є неперервною функцією, а траєкторія $\bar{x}$ гладка на проміжку $[t_0, t_f]$. Правило множників Лагранжа залишається таким, що справджується і тоді, коли $\bar{u}$ належить до кусково-неперервних функцій, тобто таких, в яких кожна компонента на відрізку визначення має скінчену кількість точок розриву першого роду, а $\bar{x}$ відноситься до кусково-гладких. Якщо оптимальне управління $\bar{u}$ має розрив першого роду в якихось точках (ці точки називають кутовими), то воно саме і відповідна йому траєкторія $\bar{x}$ мають задовольняти вказані раніше рівняння лише в точках неперервності управління. У кутових точках мають виконуватись умови Вейерштраса–Ердмана:

$$\psi^- = \psi^+; \quad H^- = H^+,$$

де індекси "–" і "+" означають ліву та праву межі відповідних функцій.

Відмітимо, що рівняння Ейлера–Лагранжа є лише потрібними умовами, тобто будь-який розв'язок початкової задачі є *екстремаллю* (так зветься оптимальна траєкторія), але не кожна екстремаль, що задовольняє граничні умови, може бути розв'язком. Але якщо розв'язок задачі існує й екстремаль, що задовольняє граничні умови, єдина, то ця екстремаль й буде розв'язком.

Задача. Розглянемо задачу обертання валу електродвигуна на заданий кут при мінімальній витраті енергії:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0; \quad F = \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min.$$

Рішення. Функція Гамільтона має вигляд

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \psi_0 = -1.$$

Використовуючи систему рівнянь Ейлера–Лагранжа (2.18) і (2.19), знаходимо

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 = 0.$$

Проінтегруємо цю систему:

$$\psi_1 = C_1; \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2; \quad u = \psi_2 / 2 = (-C_1 t + C_2) / 2.$$

Знаходимо

$$x_2 = -C_1 t^2 / 4 + C_2 t / 2 + C_3; \quad x_1 = -C_1 t^3 / 12 + C_2 t^2 / 4 + C_3 t + C_4.$$

Використовуючи краєві умови, отримуємо

$$C_3 = 0; \quad C_4 = 0; \quad C_2 = 12; \quad C_1 = 24.$$

Для оптимальних управління та фазової траєкторії маємо

$$u^*(t) = 6(1 - 2t); \quad x_1^*(t) = t^2(3 - 2t); \quad x_2^*(t) = 6t(1 - t).$$

3. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Принцип максимуму Понтрягіна

В багатьох прикладних задачах на керування накладаються обмеження типу нерівності. Часто оптимальне керування у таких задачах має розрив. Метод множників Лагранжа не дозволяє визначити число та місцеположення точок розриву, і тому в цих випадках він не дозволяє знаходити оптимальне керування. Такі задачі ефективно розв'язуються за допомогою принципу максимуму. Цей принцип уперше був сформульований академіком Л.С. Понтрягіним у 1953 році і розвинений згодом його учнями В.Г. Болтянським, Р.В. Гамкрелідзе та ін.

Розглянемо задачу оптимального керування із закріпленими кінцями та фіксованим часом (задачу Лагранжа).

Дано:

$$\dot{x}_j = f_j(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad j = \overline{1, n}; \quad (3.1)$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \quad x_j(t_f) = x_j^f; \quad j = \overline{1, n}; \quad (3.2)$$

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \rightarrow \min. \quad (3.3)$$

Потрібно мінімізувати функціонал F шляхом вибору вектора припустимого керування $\bar{u}(t)$, причому $\bar{u}(t) \in \bar{U}$, де $\bar{U}$ припустима множина значень керування. Приймається припустимим керування $\bar{u}(t)$, яке належить до класу кусково-неперервних функцій та яке набирає значення з припустимої множини $\bar{U}$.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{j=1}^n \psi_j (f_j - \dot{x}_j) = H - \sum_{j=1}^n \psi_j \dot{x}_j, \quad (3.4)$$

де гамільтоніан $H = \psi_0 f_0 + \sum_{j=1}^n \psi_j f_j$.

Відповідно підходу Лагранжа, який розглядався раніше, поставлена задача (3.1)–(3.3) з урахуванням (3.4) зводиться до задачі

$$\tilde{F} = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{u}, \bar{\psi}, t) dt \rightarrow \max_{\bar{u} \in \bar{U}} \quad \text{при} \quad \psi_0 = -1; \quad (3.5)$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \quad x_j(t_f) = x_j^f, \quad j = \overline{1, n},$$

де $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T$ – n -вимірний вектор-стовпець.

Нехай $(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\psi}^*(t))$ – рішення цієї задачі.

Очевидно, задача (3.5) рівносильна наступним двом:

$$\tilde{F}_1 = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{u}^*, \bar{\psi}, t) dt \rightarrow \max_{\bar{x}, \bar{\psi}}; \quad \tilde{F}_2 = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}^*, \dot{\bar{x}}^*, \bar{u}, \bar{\psi}^*, t) dt \rightarrow \max_{\bar{u} \in \bar{U}}$$

чи

$$\tilde{F}_1 = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\bar{x}, \bar{u}^*, \bar{\psi}, t) - \sum_{j=1}^n \psi_j \dot{x}_j \right] dt \rightarrow \max_{\bar{x}, \bar{\psi}}; \quad (3.6)$$

$$\tilde{F}_2 = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\bar{x}^*, \bar{u}, \bar{\psi}^*, t) - \sum_{j=1}^n \bar{\psi}_j^* \dot{x}_j^* \right] dt \rightarrow \max_{\bar{u} \in \bar{U}} \quad (3.7)$$

за тих граничних умов, що й у задачі (3.5).

Задача (3.6) – це найпростіша задача варіаційного числення. Для неї рівняння Ейлера мають вигляд (вони виконують необхідні умови екстремуму)

$$\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}; \quad (3.8) \quad \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial \psi_j}, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.9)$$

і називаються системою Гамільтона.

Рішення задачі (3.7) було дано Л.С. Понтрягіним спочатку у вигляді гіпотези: керування $\bar{u}^*(t)$ дає максимум в цій задачі в тому і тільки в тому випадку, коли на всьому проміжку $[t_0, t_f]$, крім точок розриву $\bar{u}^*(t)$,

виконана рівність

$$\max_{\bar{u} \in \bar{U}} H(\bar{x}^*, \bar{u}, \bar{\psi}^*, t) = H(\bar{x}^*, \bar{u}^*, \bar{\psi}^*, t). \quad (3.10)$$

Необхідні умови задачі (3.6) сумісно з умовою (3.10) складають необхідні умови початкової задачі (3.1)–(3.3).

Умови задачі (3.6) сумісно із (3.10) називаються принципом максимуму Понтрягіна.

Рівності (3.9) збігаються з рівностями (3.1) об'єкта, тому їх можна не розглядати. Рівності (3.8), як відзначалось раніше, називаються спряженими рівностями чи спряженою системою.

На основі наведених викладок сформулюємо принцип максимуму: щоб допустима для задачі (3.1)–(3.3) пара $(\bar{u}^*(t), \bar{x}^*(t))$ була її розв'язком, необхідно, щоб існували константа $\psi_0^* \leq 0$ і рішення $\bar{\psi}^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*)^T$ спряженої системи (3.8) при $\bar{x}(t) = \bar{x}^*(t)$ і $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(t)$, які не перетворюються одночасно в нуль, що при будь-яких $t \in [t_0, t_f]$, крім точок розриву $\bar{u}^*(t)$, функція $\tilde{H} = H(\bar{x}^*, \bar{u}, \bar{\psi}^*, t)$ досягає при $\bar{u} = \bar{u}^*(t)$ максимуму, тобто виконується відношення (3.10).

3.2. Задача про швидкодію матеріальної точки

Розглянемо задачу про прямолінійний рух матеріальної точки однічною масою під дією сили $u = u(t)$.

Відповідно другому закону Ньютона рівняння руху запишемо у вигляді

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u.$$

На силу накладемо обмеження $|u| \leq 1$, або $-1 \leq u \leq 1$.

Потрібно з даного початкового стану $\bar{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ потрапити на початок фазових координат за мінімальну годину:

$$F = \int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min.$$

Рішення. Функція Гамільтона $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$.

Спряжена система рівнянь (2.19) або (3.8) має вигляд

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Проінтегруємо цю систему. Тоді знайдемо

$$\psi_1 = C_1; \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2,$$

де C_1, C_2 – постійні інтегрування.

Згідно принципу максимуму Понтрягіна

$$H = \max_{|u| \leq 1} (\psi_1 x_2 + \psi_2 u).$$

Тому

$$u(t) = +1, \text{ якщо } \psi_2(t) > 0; \quad u(t) = -1, \text{ якщо } \psi_2(t) < 0.$$

Інакше

$$u(t) = \operatorname{sgn} \psi_2(t) = \operatorname{sgn}(-C_1 t + C_2).$$

Звідси випливає, що кожне оптимальне керування $u(t)$ на проміжку $t \in [t_0, t_f]$ є кусково-постійною функцією, яка набирає значення $+1$ і яка має не більше двох інтервалів постійності (бо лінійна функція $-C_1 t + C_2$ не більше одного разу змінює знак на відрізку $t_0 \leq t \leq t_f$).

Для відрізка часу, на якому $u = 1$, маємо:

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{x_2}{u} \quad \text{або} \quad \frac{dx_1}{dx_2} = x_2,$$

звідки знаходимо:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2 + C. \quad (3.11)$$

Таким чином, кусок фазової траєкторії, для якого $u = +1$, являє собою дугу параболи.

Сім'я парабол зображена на рис. 4,а. Вони виходять одна з одної зсувом. По цим параболом фазові точки рухаються знизу нагору.

Аналогічно, для відрізка часу, на якому $u = -1$, маємо

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -x_2,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2)^2 + C. \quad (3.12)$$

Сім'я парабол зображена на рис. 4,б. По параболом фазові точки рухаються зверху вниз.

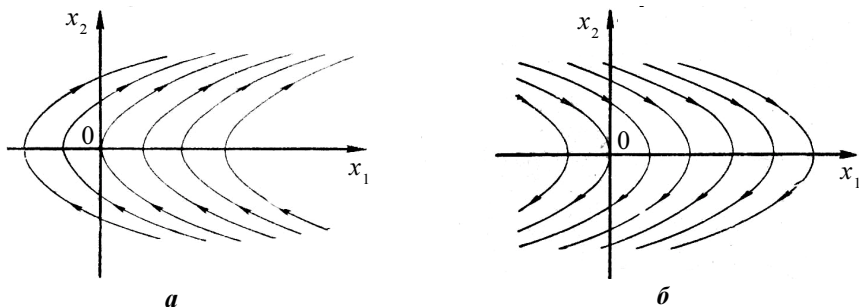


Рис. 4. Рух точки по фазовим траєкторіям (параболам) знизу нагору (а) і зверху вниз (б)

Як було вказано вище, кожне оптимальне керування $u(t)$ є кусково-постійною функцією, яка набирає значення $+1$ і яка має не більше двох інтервалів постійності. Якщо керування $u(t)$ спочатку впродовж деякого часу дорівнює $+1$, а потім дорівнює -1 , то фазова траєкторія складається з двох кусків парабол (рис. 5,а), які примикають одна до одної, причому другий з цих кусків лежить на тій з парабол, яка проходить через початок координат, так як шукана траєкторія повинна вести в початок координат.

Коли ж навпаки, спочатку $u = -1$ і потім $u = +1$, то ми одержимо фазову траєкторію, яка показана на рис. 5,б.

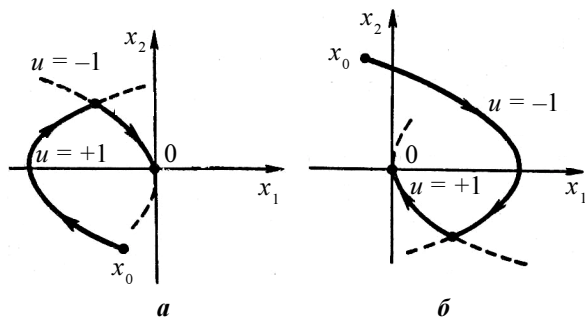


Рис. 5. Рух точки через початок фазових координат:
а - $u = \pm 1$; б - $u = \mp 1$

Таким чином, відповідно до принципу максимуму оптимальними будуть такі траєкторії, які зображені на рис. 6.

Тут $A0$ – дуга параболу $x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2$, а $B0$ – дуга параболу $x_1 = -\frac{1}{2}(x_2)^2$.

Якщо початкова точка $\bar{x}_0$ розташована вище лінії $A0B$, то фазова точка починає рухатися по дузі параболи (3.12), яка проходить через $\bar{x}_0$. Інакше кажучи, коли початкове положення $\bar{x}_0$ знаходиться вище лінії $A0B$, то фазова точка повинна рухатися під дією керування $u = -1$ до тих пір, поки вона не потрапляє на дугу $A0$. У момент улучення на дугу $A0$ значення u переключасться і стає рівним $+1$ аж до моменту улучення в початок координат. Аналогічно для випадку місцеположення точки $\bar{x}_0$ нижче лінії $A0B$ фазова точка починає рухатися під дією $u = +1$ по дузі параболи (3.11), а потім після переключення u на -1 по дузі $0B$ в початок координат.

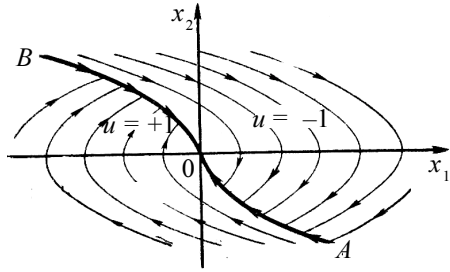


Рис. 6. Рух точки з будь-якого початкового стану в початок фазових координат

3.3. Задача про швидкодію слідкуючого електроприводу^{*)}

В роботах [2, 8] описана теорія та наведені результати розробки слідкуючого приводу з двома параметрами керування. Система близька до оптимальної по швидкодії. Задача була розв'язана за допомогою принципу максимуму. Ці роботи можна вважати першими, в яких принцип максимуму був застосований до рішення технічної задачі. Оригінальною рисою системи є керування двигуном постійного струму з незалежним збудженням. На цей двигун надходять два керуючих діяння. Одне з них – напруга U_1 , яка подається на вхід електромашинного посилювача (ЕМП), який живить ланцюг якоря двигуна. Іншим керуючим діянням є напруга U_2 , яка подається на обмотку збудження двигуна. Керування створюється одночасно обома діяннями U_1 і U_2 .

Схема силової частини слідкуючого приводу показана на рис. 7. Тут I_y – струм обмотки збудження ЕМП, яка має постійною часу T_1 . Струм обмотки збудження двигуна, яка має постійною часу T_2 , визначений як I_b . Постійну часу поперечної обмотки ЕМП

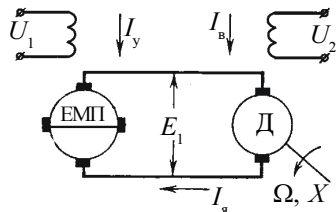


Рис. 7. Схема силової частини слідкуючого електроприводу

^{*)} Викладається за монографією [9].

позначимо T_3 , а електрорушійну силу (е.р.с.) ЕМП позначимо E_r . Далі, нехай $R_{\text{я}}$ – загальний опір ланцюга якорів ЕМП та двигуна, Ω – кутова швидкість валу, $E_d = c\Omega I_B$ – проти-е.р.с. двигуна, $I_{\text{я}}$ – струм якоря, $M_d = k_3 I_{\text{я}} I_B$ – обертальний момент, J – момент інерції, приведений до валу двигуна, X – кутове положення вихідного валу. Індуктивністю в ланцюгу якорів, реакцією якоря та моментом опору на валу двигуна нехтуємо.

Тоді рівняння схеми рис.7 можна записати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \zeta \Omega, & J \frac{d\Omega}{dt} &= k_3 I_{\text{я}} I_B; \\ T_1 \frac{dI_y}{dt} + I_y &= k_1 U_1, & T_2 \frac{dI_B}{dt} + I_B &= k_2 U_2; \\ T_3 \frac{dE_r}{dt} + E_r &= k_4 I_y, & E_r - c\Omega I_B &= I_{\text{я}} R_{\text{я}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Тут $\zeta, k_1, k_2, k_3, k_4$ – постійні коефіцієнти посилення ланок. Якщо $T_1 \ll T_3$, то після перетворень та приведення до відносного часу можна записати систему рівнянь (3.13) об'єкту, зображеного на рис. 7, в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \zeta_0 \omega, & \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{1-\mu} i_B e_r - \omega i_B^2, \\ \frac{de_r}{dt} &= -\beta_1 e_r + \beta_1 u_1, & \frac{di_B}{dt} &= -\beta_2 i_B + \beta_2 u_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

У цих рівняннях позначено:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{X}{X_{\text{max}}}, & e_r &= \frac{E_r}{E_{r \text{ max}}}, & i_B &= \frac{I_B}{I_{B \text{ max}}}, \\ \omega &= \frac{\Omega}{\Omega_{\text{ном}}}, & u_1 &= \frac{U_1}{U_{1 \text{ max}}}, & u_2 &= \frac{U_2}{U_{2 \text{ max}}}, \\ \beta_1 &= \frac{T_{\text{ем}}}{T_3}, & \beta_2 &= \frac{T_{\text{ем}}}{T_2}, \\ T_{\text{ем}} &= \frac{J R_{\text{я}}}{k_3 c I_{B \text{ max}}^2}, & \eta &= \frac{E_{r \text{ max}}}{E_{r \text{ ном}}} > 1, & \mu &= \frac{I_{\text{я ном}} R_{\text{я}}}{E_{r \text{ ном}}} < 1, \end{aligned} \right\}$$

індекси "max" і "ном" стоять відповідно при максимальному та номінальному значеннях величини.

В рівняннях (3.14), як і в [3], збережено позначення t для безрозмірного часу; за базисну величину прийнята електромеханічна постійна часу $T_{\text{ем}}$.

Напруга U_1 не може перевищувати за модулем максимальне припустиме значення. Напругу U_2 , крім того, не можна надмірно зменшувати з метою запобігання розносу при малому моменті навантаження. Тому на u_1 і u_2 накладаються обмеження:

$$|u_1| \leq 1, \quad \lambda \leq u_2 \leq 1, \quad (3.15)$$

де $\lambda = \text{const} > 0$.

Розглянемо перехідний процес відпрацювання навчального непогодження, яке еквівалентно скачку A_0 задавального впливу, де A_0 – довільна постійна. Введемо нові координати, які зв'язані зі старими координатами рівностями

$$x_1 = A_0 - x; \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt} = -\zeta_0 \omega; \quad x_3 = -e_r; \quad x_4 = i_b.$$

Підставивши ці вирази в (3.14), приходимо до системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_3 x_4 - x_2 x_4^2; \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\beta_1 x_3 - \beta_1 u_1, & \frac{dx_4}{dt} &= -\beta_2 x_4 + \beta_2 u_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{\eta}{1 - \mu}.$$

Нехай задані початкові значення $x_i(0)$ ($i = \overline{1, 4}$). Треба знайти оптимальні керування $u_1(t)$ та $u_2(t)$, які переводять за мінімальний час зображену точку до нульового положення. Останнє являє собою точку з координатами $(0, 0, 0, \gamma)$, де $\lambda < \gamma < 1$ – деяке фіксоване число.

Рівняння (3.16) у векторному вигляді можуть бути записані таким чином:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}) + B\bar{u},$$

де $\bar{x}$ і $\bar{f}$ – вектори, компоненти яких вказані в (3.16), вектор $\bar{u}$ має компоненти u_1 і u_2 , а B – прямокутна матриця:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Складемо систему спряжених рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= 0, & \frac{d\psi_2}{dt} &= -\psi_1 + x_4^2 \psi_2; \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= -\alpha x_4 \psi_2 + \beta_1 \psi_3; \\ \frac{d\psi_4}{dt} &= (2x_2 x_4 - \alpha x_3) \psi_2 + \beta_2 \psi_4. \end{aligned} \right\}$$

Сформуємо гамільтоніан:

$$H = \left\langle \bar{\psi}, \frac{d\bar{x}}{dt} \right\rangle = \left\langle \bar{\psi}, \bar{f}(\bar{x}) + B\bar{u} \right\rangle = \left\langle \bar{\psi}, \bar{f}(\bar{x}) \right\rangle + \left\langle \bar{\psi}, B\bar{u} \right\rangle.$$

Лише другий доданок у цьому виразі залежить від $\bar{u}$. Випишемо його в розгорнутому вигляді:

$$\langle \bar{\psi}, B\bar{u} \rangle = -\psi_3(t) \beta_1 u_1 + \psi_4(t) \beta_2 u_2.$$

Звідси з урахуванням (3.15) видно, що максимум H має місце за таких умов:

$$u_1 = -\text{sign } \psi_3(t) \quad \text{і} \quad u_2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \psi_4(t) > 0, \\ \lambda, & \text{якщо } \psi_4(t) < 0. \end{cases}$$

Отже, коли оптимальне керування існує, то воно складається з декількох інтервалів, в кожному з яких діяння u_1 і u_2 підтримуються на одному з своїх граничних значень.

Щоб знайти закон оптимального керування в явному вигляді, необхідно знати вектор $\bar{\psi}$ у кожній точці $\bar{x}$ оптимальної траєкторії. В загальному випадку розв'язання відповідної граничної задачі можливо лише за допомогою обчислювальних пристроїв. Але в деяких випадках задачу синтезу оптимальної системи можливо вирішити аналітично. Розглянемо найпростіший випадок, коли постійні часу T_2 поперечної обмотки генератора, T_3 – обмотки збудження двигуна зневажливо малі у порівнянні з $T_{\text{ем}}$ – електромеханічною постійною часу. Тоді $\beta_1 = \infty$ і $\beta_2 = \infty$, і рівняння об'єкту набирають вигляду

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -u_2^2 x_2 - \alpha u_1 u_2.$$

Обмеження, які накладаються на u_1 і u_2 виражені умовами (3.15). Спряжену систему запишемо тепер у вигляді

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0; \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + u_2^2 \psi_2. \quad (3.17)$$

Сформуємо гамільтоніан:

$$H = \langle \bar{\psi}, \bar{f}(x) \rangle = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-u_2^2 x_2 - \alpha u_1 u_2). \quad (3.18)$$

Рішення рівнянь (3.17) мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_{10} = \text{const}, \\ \psi_2(t) &= \exp \left\{ \int_0^t u_2^2(\tau) d\tau \right\} \left[\psi_{20} - \int_0^t \psi_{10} \exp \left\{ - \int_0^s u_2^2(s) ds \right\} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

З останнього виразу видно, що $\psi_2(t)$ може змінювати знак не більш ніж один раз.

У формулі (3.18) для гамільтоніана H величини u_2 і α завжди позитивні. Тому підбір u_1 , який максимізує H , приводить до виразу

$$u_1 = -\text{sgn} \psi_2(t).$$

Щоб з'ясувати закон керування для $u_2(t)$, перепишемо формулу (3.18)

в такому вигляді:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 \left[-x_2 \left(u_2 + \frac{\alpha u_1}{2x_2} \right)^2 + \frac{\alpha^2 u_1^2}{4x_2} \right]. \quad (3.20)$$

Можливі два випадки:

а) $\psi_2(t) < 0$, $u_1 = +1$. При $x_2 > 0$ величина u_2 повинна також набирати свого найбільшого значення, яке дорівнює одиниці. Якщо $x_2 < 0$, то, як видно з (3.20), треба обирати для максимізації H

$$u_2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \left| \frac{\alpha}{2x_2} \right| \geq 1, \\ \left| \frac{\alpha}{2x_2} \right|, & \text{якщо } \lambda \leq \left| \frac{\alpha}{2x_2} \right| \leq 1, \\ \lambda, & \text{якщо } \left| \frac{\alpha}{2x_2} \right| \leq \lambda; \end{cases} \quad (3.21)$$

б) $\psi_2(t) > 0$, $u_1 = -1$. Тоді, щоб максимізувати H , треба обирати при $x_2 > 0$

$$u_2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{\alpha}{2x_2} \geq 1, \\ \frac{\alpha}{2x_2}, & \text{якщо } \lambda \leq \frac{\alpha}{2x_2} \leq 1, \\ \lambda, & \text{якщо } \frac{\alpha}{2x_2} \leq \lambda. \end{cases} \quad (3.22)$$

Коли $x_2 < 0$, то величина $\left(u_2 + \frac{2u_1}{2x_2} \right)$ повинна набирати найбільшого значення, а для цього треба покласти $u_2 = 1$.

Оскільки $\psi_2(t)$ змінює знак не більш одного разу, то й $u_1(t)$ складається із двох інтервалів; в одному з них $u_1 = +1$, а в іншому $u_1 = -1$. Крива $u_2(t)$ складається з чотирьох інтервалів. Три з них відповідають першому інтервалу u_1 , а четвертий – другому інтервалу u_1 . В першому інтервалі u_2 максимально у відповідності з першим рядком (3.21). У дру-

тому інтервалі u_2 неперервно змінюючись, пробігає відрізок $[\lambda, 1]$ (див. другі рядки формул (3.21) і (3.22)). В третьому інтервалі $u_2 = \lambda$. Нарешті, на останній ділянці діяння u_2 повинно набирати знову максимальне значення, щоб в кінці його, при $x_1 = x_2 = 0$, гамільтоніан H набирав максимум.

Оптимальні траєкторії на фазовій площині показані на рис. 8, а при-
близні криві $u_1(t)$, $u_2(t)$, $x_1(t)$ – на рис. 9.

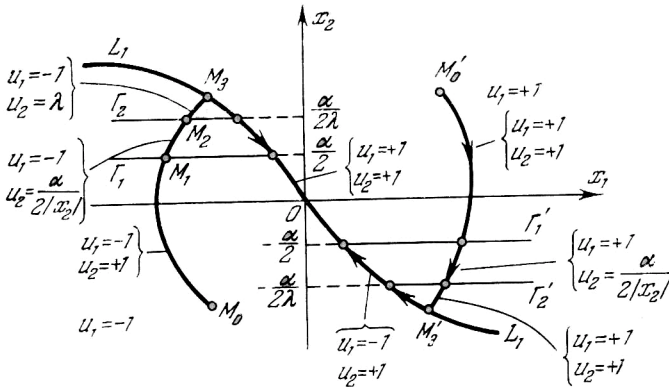
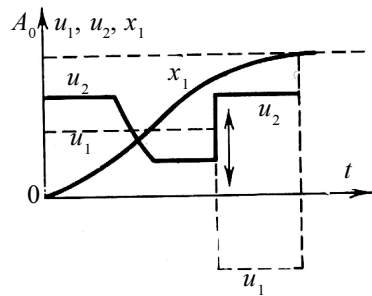


Рис. 8. Оптимальні траєкторії на фазовій площині

Рис. 9. Залежність параметрів керування u_1 , u_2 і безрозмірного кута повороту вала x_1 від часу t



До початку координат 0 підходять лише дві оптимальні траєкторії. Одна з них, позначена як L_1 відповідає значенням $u_1 = -1$, $u_2 = +1$. Друга траєкторія, яка позначена як L_1' , відповідає значенням $u_1 = +1$, $u_2 = +1$. До цих траєкторій підходять траєкторії сімейств L_2 та L_2' . Розглянемо, наприклад, типову траєкторію $M_0M_1M_2M_3$, яка веде до L_1' . Вся область зліва від кривої перемикання L_1 , L_1' для u_1 відповідає значенню $u_1 = -1$, а вся область справа від цієї кривої – значенню $u_1 = +1$. Таким чином, процес відбувається з одним перемиканням діяння, як це зображено на

рис. 9. Що стосується u_2 то процес зміни цього діяння більш складний. Проведемо в області $u_1 = -1$ дві горизонтальні прямі Γ_1 (пряма $x_2 = \frac{\alpha}{2}$) і Γ_2 (пряма $x_2 = \frac{\alpha}{2\lambda}$). Аналогічні прямі в області $u_1 = +1$ позначені Γ'_1 (пряма $x_2 = -\frac{\alpha}{2}$) і Γ'_2 (пряма $x_2 = -\frac{\alpha}{2\lambda}$).

Якщо початкова точка M_0 знаходиться в третьому квадранті, то вона рухається по оптимальній траєкторії $M_0M_1M_2M_3O$. На ділянці $M_0M_1M_2M_3$ цієї траєкторії значення u_1 дорівнює -1 , а на ділянці M_3O $u_1 = +1$. На ділянці M_0M_1 величина $u_2 = 1$, на ділянці M_1M_2 , в зоні між прямими Γ_1 і Γ_2 , величина u_2 неперервно змінюється, підпо-

рядковуючись закону $u_2 = \frac{\alpha}{2x_2}$. В точці M_2 значення u_2 дорівнює λ і підтримується на цьому рівні на ділянці M_2M_3 . В точці M_3 стрибком змінюється не тільки u_1 , але й u_2 ; останнє досягає величини $+1$ і підтримується на тому рівні на всій ділянці M_3O .

Аналогічно відбувається зміна u_1 і u_2 на оптимальній траєкторії $M'_0M'_1M'_2M'_3O$, яка виходить із точки M'_0 , що розташована в першому квадранті. Різниця лише в тому, що на ділянці $M'_0M'_1M'_2M'_3$ величина $u_1 = +1$, а на ділянці M'_3O значення $u_1 = -1$. Величина u_2 змінюється таким же чином, як і для траєкторії $M_0M_1M_2M_3O$. Приблизні графіки $x_1(t)$, $u_2(t)$, $u_1(t)$ (останній з них показаний пунктиром та в іншому масштабі ніж u_2) зображені на рис. 9. Вони відповідають траєкторії $M'_0M'_1M'_2M'_3O$. З рис. 9 видно, що крива $u_2(t)$ складається з чотирьох, а крива $u_1(t)$ — з двох інтервалів.

4. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Принцип оптимальності. Рівняння Беллмана

Метод розвитий американським вченим Р. Беллманом та його співробітниками в 1950–1953 рр.

В основі методу динамічного програмування лежить *принцип опти-*

мальності Р. Беллмана. Він формулюється так: *оптимальна стратегія не залежить від "передісторії" системи та визначається лише її становищем у момент часу, який розглядається.*

Іншими словами, майбутня поведінка системи повністю або статистично визначається її становищем у теперішній час. Тому вона не залежить від характеру її передісторії, тобто від поведінки системи в минулому, коли система знаходиться в даний момент у даному стані.

Нехай поведінка об'єкту керування описується векторним рівнянням

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (4.1)$$

при заданих граничних умовах

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(t_f) = \bar{x}_f, \quad (4.2)$$

обмеженні

$$\bar{u} \in \bar{U} \quad (4.3)$$

та узагальненому показнику якості Больца

$$F = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \rightarrow \min. \quad (4.4)$$

Припустимо, що знайдена оптимальна траєкторія $\bar{x}(t)$, для якої $F \rightarrow \min$.

Відповідно до принципу оптимальності ділянка траєкторії, починаючи з будь-якої точки $\bar{x}(t)$, що відповідає моменту часу $t_0 < t < t_f$, також є оптимальною траєкторією, а функціонал (4.4) на цьому інтервалі

$$F = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt$$

досягає мінімуму.

Введемо функцію Беллмана

$$S(\bar{x}, t) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} F = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(g_0 + \int_t^{t_f} f_0 dt \right),$$

причому

$$S(\bar{x}(t_f), t_f) = g_0(\bar{x}(t_f), t_f). \quad (4.5)$$

Розглянемо дві близькі точки оптимальної траєкторії: точку $\bar{x}(t)$, що відповідає моменту часу t , і точку $\bar{x}(t + \Delta t)$, що відповідає часу $t + \Delta t$. Точка $\bar{x}(t + \Delta t)$ знаходиться ближче до кінцевого стану $\bar{x}(t_f)$. Тому, відповідно принципу оптимальності Беллмана, ділянку траєкторії від точки $\bar{x}(t)$ до точки $\bar{x}(t_f)$ будемо розглядати за умови, що ділянка від точки $\bar{x}(t + \Delta t)$ до точки $\bar{x}(t_f)$ вже оптимальна. Розіб'ємо інтервал інтегрування на два: від t до $t + \Delta t$ і від $t + \Delta t$ до t_f .

Тоді

$$S(\bar{x}, t) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(g_0 + \int_t^{t+\Delta t} f_0 dt + \int_{t+\Delta t}^{t_f} f_0 dt \right)$$

або

$$S(\bar{x}, t) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(\int_t^{t+\Delta t} f_0 dt + S(\bar{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \right), \quad (4.6)$$

тому що ділянка траєкторії на другому інтервалі оптимальна.

Припустимо, що функція $S(\bar{x}, t)$ має частинні похідні за усіма фазовими координатами і часом.

Тоді з точністю до нескінченно малої більш високого порядку мализни

$$\int_t^{t+\Delta t} f_0 dt = f_0 \Delta t; \quad S(\bar{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) = S(\bar{x}, t) + \langle \text{grad} S, \bar{f} \rangle \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t$$

і вираз (4.6) набуває вигляду:

$$S(\bar{x}, t) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(f_0 \Delta t + S(\bar{x}, t) + \langle \text{grad} S, \bar{f} \rangle \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t \right).$$

Так як $S(\bar{x}, t)$ і $\frac{\partial S}{\partial t} \Delta t$ не залежать від вектора управління і можуть бути винесені за знак мінімуму, одержуємо:

$$S(\bar{x}, t) = S(\bar{x}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \min_{\bar{u} \in \bar{U}} (f_0 \Delta t + \langle \text{grad} S, \bar{f} \rangle \Delta t),$$

звідки після скорочень

$$\min_{\bar{u} \in U} (f_0 + \langle \text{grad } S, \bar{f} \rangle) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Це рівняння носить ім'я Беллмана.

Якщо в рівнянні Беллмана функція S диференційна, то для того щоб припустима пара $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$ була розв'язанням поставленої задачі (4.1)–(4.4), необхідно, щоб вона задовольняла рівняння (4.7) при граничній умові (4.5).

Якщо мінімум у лівій частині рівняння Беллмана (4.7) досягається у внутрішніх точках множини, то це рівняння можна представити у вигляді

$$f_0 + \langle \text{grad } S, \bar{f} \rangle = -\frac{\partial S}{\partial t}; \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{du_s} (f_0 + \langle \text{grad } S, \bar{f} \rangle) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r. \quad (4.9)$$

Таким чином, (4.9) замінює пропущену в (4.8) операцію мінімізації по керуванню.

Приклад. Знайти оптимальне управління $u^*(t)$ наступної задачі:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \\ x_1(t_f) &= 0, \quad x_2(t_f) = 0; \\ F &= \int_0^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Рішення. В цій задачі S не залежить від $t = 0$, тому $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

Запишемо рівняння Беллмана:

$$f_0 + \langle \text{grad } S, \bar{f} \rangle = -\frac{\partial S}{\partial t}; \quad \frac{\partial}{\partial u_s} (f_0 + \langle \text{grad } S, \bar{f} \rangle) = 0 \quad s = 1, 2, \dots, r.$$

Так як

$$f_0 = x_1^2 + u^2, \quad \bar{f} = (f_1, f_2) = (x_2, u), \quad \text{grad } S = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2} \right),$$

то

$$\begin{cases} x_1^2 + u^2 + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + u \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \\ 2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння цієї системи дістаємо $u^* = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2}$ і підставляємо в перше рівняння системи:

$$x_1^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 = 0.$$

Шукаємо розв'язок знайденого нелінійного диференційного рівняння у вигляді квадратичної форми

$$S = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Маємо:

$$x_1^2 - \frac{1}{4} (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2)^2 + (2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)x_2 = 0$$

або

$$(1 - a_{12}^2)x_1^2 + (2a_{11} - 2a_{12}a_{22})x_1x_2 + (2a_{12} - a_{22}^2)x_2^2 = 0,$$

звідки дістаємо

$$1 - a_{12}^2 = 0; \quad 2a_{11} - 2a_{12}a_{22} = 0; \quad 2a_{12} - a_{22}^2 = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо:

$$a_{12} = \pm 1; \quad a_{22} = \pm \sqrt{2}; \quad a_{11} = \pm \sqrt{2}.$$

Так як $S(\bar{x}, t) = \int_t^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt > 0$ при усіх $t \neq t_f$, то квадратична форма повинна бути позитивно-визначеною.

Цю умову задовольняє розв'язок:

$$a_{12} = 1, \quad a_{22} = \sqrt{2}, \quad a_{11} = \sqrt{2}, \quad S = \sqrt{2} x_1^2 + 2x_1 x_2 + \sqrt{2} x_2^2.$$

Параметр оптимального управління буде

$$u^*(\bar{x}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2} = -(x_1 + \sqrt{2} x_2).$$

4.2. Достатня умова оптимальності^{*)}

Рівняння Беллмана

$$\min_{\bar{u} \in \bar{U}} (f_0 + \langle \text{grad } S, \bar{f} \rangle) = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.10)$$

виражає необхідну умову оптимальності, так як отримано в припущенні, що функція $S = S(\bar{x}, t)$ є гладкою, тобто неперервною диференційною. Однак це припущення не впливає з умови задачі оптимального керування і в ряді випадків не виконується. Тому метод динамічного програмування, який застосовується для задач оптимального управління, потребує обґрунтування. За певних умов цей метод дає достатні умови оптимальності. Ці умови можуть бути сформульовані у вигляді такої теореми.

Теорема. Нехай $S(\bar{x}, t)$ – гладке розв'язування рівняння Беллмана (4.10) при граничній умові:

$$S(\bar{x}(t_f), t_f) = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) \quad (4.11)$$

і функція управління $\bar{u}^*(t)$, яка вирахована з умови оптимальності Беллмана:

$$\min_{\bar{u} \in \bar{U}} f_0 + \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(\langle \text{grad } S, \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(f_0 + \frac{dS}{dt} \right)$$

^{*)} Викладається за підручником Теория автоматического управления: В 2 ч. / А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохин и др.; Под ред. А.А. Воронова. – М., 1986. – Ч. 2. – 504 с.

або, що те ж саме, із рівняння

$$f_0(\bar{x}, \bar{u}^*, t) + \langle \text{grad } S, \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}^*, t) \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\bar{u} \in U} \left(f_0 + \frac{dS}{dt} \right),$$

породжує єдину траєкторію $\bar{x}^*(t)$, яка задовольняє поставлену вище задачу. Уздовж цієї траєкторії функція $\bar{u}^*(t) = \bar{u}^*(\bar{x}^*(t), t)$ кусково-неперервна. Тоді функція $\bar{u}^*(\bar{x}, t)$ є оптимальним керуванням вказаної задачі.

Дійсно, згідно визначенню оптимального управління $\bar{u}^*(\bar{x}, t)$ в кожній точці його неперервності правдиве рівняння

$$f_0(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \frac{dS(\bar{x}^*, t)}{dt} = 0.$$

Проінтегруємо це рівняння по t від t_0 до t_f :

$$\int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) dt + S(\bar{x}^*(t_f), t_f) - S(\bar{x}^*(t_0), t_0) = 0.$$

Звідси з урахуванням (4.11) та рівняння $\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}_0$ знаходимо:

$$S(\bar{x}_0, t_0) = g_0(\bar{x}^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) dt.$$

Візьмемо будь-яке інше управління $\bar{u}(t)$ та відповідний йому фазовий вектор $\bar{x}(t)$. Тоді, в силу визначення кусково-неперервної функції $\bar{u}^* = \bar{u}^*(t) = \bar{u}^*(\bar{x}^*(t), t)$, маємо:

$$f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) + \frac{dS(\bar{x}, t)}{dt} \geq f_0(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \frac{dS(\bar{x}^*, t)}{dt} = 0.$$

Проінтегруємо обидві частини цієї нерівності по t від t_0 до t_f . Тоді отримаємо з урахуванням (4.11) та умови $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt + g_0(\bar{x}(t_f), t_f) \geq S(\bar{x}_0, t_0).$$

З даної нерівності виходить, що при $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(\bar{x}, t)$ критерій оптимальності Больца $F \rightarrow \min$. Отже, управління $\bar{u}^*(\bar{x}, t)$ є оптимальним.

4.3. Застосування методу динамічного програмування для аналітичного конструювання регулятора

Розглянемо застосування методу динамічного програмування для визначення закону керування оптимального регулятора з обліком обмеження швидкості керуючого органа.

Нехай поведінка об'єкта управління описується наступною системою рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u,$$

де a_1, a_2 – постійні.

Показник якості, що характеризує мінімум квадратичної помилки, запишемо у вигляді

$$F = \int_0^{\infty} (b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + u^2 + \dot{u}^2) dt \rightarrow \min,$$

де b_1, b_2 – постійні.

Потрібно знайти закон управління $\dot{u} = \dot{u}(t)$.

Рішення. Введемо додаткове рівняння:

$$\dot{u} = v. \quad (4.12)$$

Запишемо рівняння Беллмана

$$f_0 + \langle \text{grad } S, \bar{f} \rangle = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

де $f_0 = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + u^2 + v^2$; $\bar{f} = (x_2; a_1 x_1 + a_2 x_2 + u; v)$.

У даному випадку функції f_0 і $\bar{f}$ не залежать від часу t . Тому $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$

і рівняння Беллмана має вигляд

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + u^2 + v^2 + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + u) \frac{\partial S}{\partial x_2} + v \frac{\partial S}{\partial u} = 0. \quad (4.13)$$

Продиференціюємо це рівняння по v :

$$2v + \frac{\partial S}{\partial u} = 0. \quad (4.14)$$

Звідси

$$v = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial u}.$$

Підставляючи (4.14) в (4.13), одержимо

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + u^2 + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + u) \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2.$$

Рішення записаного рівняння шукаємо у вигляді квадратичної форми фазових координат x_1, x_2 і функції керування u :

$$S = c_{11} x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2 + c_1 x_1 u + c_2 x_2 u + r u^2. \quad (4.15)$$

Коефіцієнти цієї квадратичної форми обчислюються точно так само, як і в розглянутому вище прикладі. Тому їхній висновок опускаємо. Нарешті, прийнявши до уваги (4.15), (4.14), із (4.12), знаходимо:

$$v = \dot{u} = -\frac{1}{2} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + 2ru).$$

Цей вираз показує, що на вході об'єкта необхідно увімкнути виконавчий механізм із постійної часу $T = 1/r$ або, у загальному випадку, аперіодичну ланку першого порядку.

5. КЕРОВАНІСТЬ І СПОСТЕРЕЖНІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

5.1. Керованість лінійних систем

Для розв'язування задач керування важливо знати, чи володіє об'єкт властивістю керованості в смислі переводу з даного початкового становища в будь-яке інше кінцеве становище. Раніше при розгляданні задач оптимального керування припускалося, що об'єкт такою властивістю володіє, інакше не мало б сенсу ставити ці задачі. Разом з тим не виключені помилки у виборі структури системи керування, через що об'єкт не буде мати вказану властивість. Тому виникає проблема керованості. Перші теоретичні дослідження з проблеми керованості об'єктів належать Р. Каллману.

Обмежимося розглядом властивостей керованості, які застосовуються до об'єктів, становище яких описується системою лінійних диференціальних рівнянь вигляду:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t),$$

де A, B – постійні параметри.

Такі об'єкти називаються лінійними.

Перейдемо до строгого математичного визначення керованості.

Визначення. Лінійний об'єкт з диференціальним рівнянням становища

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

є повністю керованим, коли він може бути переведений з початкового становища $\bar{x}(t_f)$ за кінцевий час $t_f - t_0$.

Тут мається на увазі, що існує кусково-неперервний вхідний вектор керування $\bar{u}(t), t_0 \leq t \leq t_f$, який переводить об'єкт з одного становища в інше.

Теорема. n – вимірний лінійний об'єкт з постійними параметрами

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

є повністю керованим тоді і тільки тоді, коли ранг матриці керованості

$$P = (B \quad AB \quad A^2B \dots A^{n-1}B)$$

дорівнює n .

Приклад. Дослідити керованість об'єкту, який описується рівняннями

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u_1 + u_2; \quad \dot{x}_2 = x_2 + 3u_2$$

або у векторній формі рівнянням $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Так як

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

то матриця керованості

$$P = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці $\text{rang } P = n = 2$. Отже, об'єкт є повністю керованим.

5.2. Спостережність лінійних систем

В теорії оптимального керування велику роль має задача відновлення вектора стану за результатами спостереження щодо входу та виходу об'єкта.

Неперервна лінійна система

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \quad (5.1)$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \quad (5.2)$$

має назву *спостережної*, якщо вектор стану $\bar{x}(t_0)$ можна визначити, знаючи вихідний вектор $\bar{y}(t)$, вимірюваний на деякому інтервалі часу $t \in [t_0, t_f]$. Якщо це справедливо для будь-якого t_0 , то система називається повністю спостережною.

Справедливе *твердження*: система (5.1), (5.2) повністю спостережна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці спостережності

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad N = (C \quad CA \quad CA^2 \dots CA^{n-1})^T$$

дорівнює n .

Приклад. Об'єкт керування заданий рівняннями

$$\dot{x}_1 = -8x_1 + 3x_2 + 3u_1;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + 2u_2;$$

$$y = x_1 - 2x_2.$$

Цим рівнянням відповідають такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad -2).$$

Визначник матриці керованості

$$P = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 3 & -8 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 2 & -1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}$$

не дорівнює нулю, тому $\text{rang} P = 2$ і система повністю керована.

Матриця спостережності

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 \cdot (-8) + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Її $\det N \neq 0$. Отже, $\text{rang} N = 2$ і система є повністю спостережною.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
2. *Бор-Раменский А., Сун Цзянь.* Оптимальный следящий привод с двумя параметрами управления // Автоматика и телемеханика. – 1961. – Т. 22, № 2. – С. 157–170.
3. *Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э.* Математические основы теории управляемых систем. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
4. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
5. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Кисилев А.И.* Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973. – 192 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов / *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко.* – М.: Физматгиз, 1961. – 391 с.
7. *Олейников В.А., Зотов Н.С., Пришвин А.М.* Основы оптимального и экстремального управления. – М.: Высшая школа, 1969. – 296 с.
8. *Сун Цзянь.* Оптимальное управление в одной нелинейной системе // Автоматика и телемеханика. – 1960. – Т. 21, № 2. – С. 3–14.
9. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966. – 624 с.

ЗМІСТ

1. Основні положення теорії оптимального управління	3
1.1. Вступ до предмету	3
1.2. Поняття про простір становищ	3
1.3. Загальна постановка задачі оптимального управління	4
2. Варіаційні методи	6
2.1. Загальні відомості	6
2.2. Рівняння Ейлера	6
2.3. Рівняння Ейлера–Лагранжа	8
2.4. Застосування рівняння Ейлера–Лагранжа для знаходження оптимальної діаграми струму електродвигуна	10
2.5. Канонічні рівняння Ейлера–Лагранжа	12
3. Принцип максимуму Понтрягіна і його застосування	16
3.1. Принцип максимуму Понтрягіна	16
3.2. Задача про швидкодію матеріальної точки	18
3.3. Задача про швидкодію слідкуючого електроприводу	21
4. Метод динамічного програмування	28
4.1. Принцип оптимальності. Рівняння Беллмана	28
4.2. Достатня умова оптимальності	33
4.3. Застосування методу динамічного програмування для аналі- тичного конструювання регулятора	35
5. Керованість і спостережність лінійних систем	37
5.1. Керованість лінійних систем	37
5.2. Спостережність лінійних систем	38
Рекомендована література	40

БЛІНЦОВ Володимир Степанович
КІНАШ Анатолій Тимофійович
ХЛОПЕНКО Микола Якович

ОСНОВНІ МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Видавництво УДМТУ, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1150 від 12.12.2002 р.

Редактор О.В. Забава
Комп'ютерна правка А.Й. Тріщ
Комп'ютерна верстка Т.М. Чередніченко
Коректор Н.О. Шайкіна

Підписано до друку 15.11.02. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Ум.друк.арк. 2,4.
Обл.-вид.арк. 2,6. Тираж 200 прим. Вид. № 9. Зам. № 241. Ціна договірна.



ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО МОРСЬКОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ



Шановні панове!

Запрошуємо Вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого забезпечать оперативне та якісне виконання замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника у повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригіналу-макета, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізку на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублюкатором фірми "Duplo" формату A3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати **підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки**, – ми до Ваших послуг.

© Український державний морський технічний університет

✉ Україна, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5,

видавництво УДМТУ

☎ 8(0512) 37-33-42; 39-81-46, 39-73-39, fax 8(0512) 39-73-26;

E-mail: publishing@usmtu.edu.ua

ДЛЯ НОТАТОК

