

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

В. І. НІКОЛАЄВ

**ВИКОНАННЯ ТЕХНІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ
ТА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ**

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як методичні вказівки*

Миколаїв 2009

УДК 517.3

Ніколаєв В.І. Виконання технічних обчислень та розрахунково-графічних робіт: Методичні вказівки. – Миколаїв: НУК, 2009. – 36 с.

Кафедра вищої математики

Методичні вказівки призначені для студентів 1 та 2 курсів корабле- та машинобудівного факультетів і мають на меті ознайомити студентів з раціональною практикою виконання технічних обчислень та розрахунково-графічних робіт, що склалася протягом багатьох років інженерної діяльності. Дотримання рекомендацій сприятиме виробленню у студентів культури розрахункової роботи, що приведе до значної економії часу і зробить навчання більш приємним.

Рецензент Зайцев В.В., д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри морських технологій Національного університету кораблебудування

*Згідно з наказом ректора НУК № 08 від 09.01.2008
методичні вказівки друкуються в авторській редакції
і відповідальність за їх редагування несе автор.*

ВСТУП

Під час навчання у вищому учбовому закладі студенти оволодівають великою кількістю теоретичного матеріалу, але вчасно не одержують достатніх навичок його практичного використання. Це приводить до зайвих витрат часу при навчанні, а також утруднює працю молодих спеціалістів на підприємствах чи установах.

Якщо мати на увазі інженерів машинобудівного спектру спеціальностей, то ця недостатність має, зокрема, такі аспекти: молодий інженер не завжди усвідомлює, що має справу не з точними, а з наближеними числами і ця наближеність має якось відбиватись на практиці розрахунків, другий аспект полягає в тому, що студенту мало відома практика виконання і оформлення усякого роду розрахунків, що склалася протягом багатьох десятиліть в конструкторських, проектних чи експлуатуючих установах. Після закінчення вузу студент має на місці самостійно опановувати елементи того, що становить культуру інженерної праці. Неувага до культури праці веде до неякісного виконання робіт, численних помилок та виправлень і врешті-решт – до невиправданих витрат часу.

Культура праці – це необхідність, а дійсно ефективний працівник – завжди працівник культурний.

В першій частині даного навчального посібника наведені простіші правила праці з наближеними числами та правила оцінки точності математичних операцій і розрахунків по формулах.

В другій частині посібника наведені поради щодо загальної організації праці та окремих її елементів. Виконання цих правил зменшить кількість помилок, зробить працю більш приємною та ефективною і збереже багато часу.

Автор висловлює щире вдячність к.т.н. доц. Чудінову С.Д. (Санкт-Петербурзький Морський технічний ун-т), чиї поради сприяли покращенню змісту посібника.

1. ВИКОНАННЯ ТЕХНІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

“Точность вычислений должна соответствовать точности данных и той практической потребности, для которой вычисления выполняются.”

“Помните, что каждая неверная цифра – это ошибка, всякая лишняя цифра – погрешность.”

Акад. А.Н.Крылов “Лекции о приближенных вычислениях”.

В різних галузях діяльності людини склалися дещо різні вимоги до точності чисел, що уживані, та правила виконання обчислень (загальне машинобудування, авіація, астрономія і т.п.). В цьому навчальному посібнику йде мова про вимоги та правила обчислень які притаманні техніці, тій області, в якій створюються усякі механізми та споруди.

Обчислення – це один з етапів створення машини чи споруди і його слід організувати так, щоб була забезпечена необхідна точність результатів, а витрати часу були б найменшими.

В технічних розрахунках, наприклад, припустимо вважати, що число $\pi = 3,14$ (або $3,142$) і не витратити час на обчислення з 10 знаками $\pi = 3,141592563$. Більше того, в технічних розрахунках немає необхідності обчислювати по точних формулах, якщо є простіші наближені формули, що забезпечують достатню точність. З цього витікає правило:

 ***З кількох формул для розрахунків слід обирати простіші, якщо вони забезпечують достатню точність.***

Наприклад. Необхідно обчислити момент опору кільцевого розрізу з зовнішнім діаметром $D = 162$ мм і стінкою завтовшки $t = 6$ мм. Внутрішній діаметр $d = 162 - 2 \cdot 6 = 150$ мм, середній діаметр $D_0 = d + t = 156$ мм.

Точна формула:

$$W = \frac{\pi}{32D} (D^4 - d^4) = 110,6 \text{ см}^3.$$

Але обчислити можна по наближеній формулі:

$$W = 0,76 t D_0^2 = 111 \text{ см}^3.$$

Остання формула містить 3 операції: піднесення в квадрат та два множення. Точна формула містить 10 операцій: двічі по три множення (піднесення в 4-й степінь) та ще два множення, ділення та віднімання.

Неточність по наближеній формулі не більше 2%, що практично завжди припустимо.

До того ж точна формула має одну особливість, яка не одразу кидається в очі – різницю $D^4 - d^4$. Якщо D та d відрізняються суттєво – відсотків на 15 чи більше то D^4 та d^4 будуть відрізнятися приблизно на 50%, тобто також суттєво, а сама різниця буде обчислена досить точно.

Якщо ж D та d будуть відрізнятися мало, лише на кілька відсотків, то $(D^4 - d^4)$ буде *малою різницею великих величин*. Вона завжди обчислюється дуже неточно і при її використанні відбувається втрата точності розрахунку. З цього витікає правило:

➔ ***Уникати використання формул, де є мала різниця великих величин.***

Слід користуватись наближеними формулами, що не містять малої різниці.

Про малу різницю буде ще мова нижче.

1.1. Абсолютні та відносні похибки наближених чисел

В інженерних розрахунках практично завжди замість істинного, точного значення величини $x_{\text{іст}}$ використовується її наближене значення x_0 .

Абсолютною похибкою $\Delta x_{\text{іст}}$ є різниця $\Delta x_{\text{іст}} = |x_{\text{іст}} - x_0|$.

Наприклад, абсолютна похибка числа 3,14, що уживається замість π , дорівнює $\pi - 3,14 = 0,00159265$.

Другий приклад. Заміряємо довжину виробу сталевую лінійкою з міліметровими поділками. Можна бути певним, що похибка не перебільшить $\pm 0,5$ мм. Якщо вимірювання дало, наприклад, 136 мм, то

можна стверджувати, що істинна довжина може бути будь-якою, але в межах

$$135,5 \leq x_{\text{іст}} \leq 136,5.$$

Таким чином, абсолютна похибка не перевищить 0,5 мм: $\Delta x_{\text{іст}} \leq \pm 0,5$ мм.

Як подано вище, абсолютна похибка є модулем різниці $x_{\text{іст}}$ та x_0 , вона завжди додатна. Але таке визначення інколи незручне. Тому залишимо за абсолютною похибкою знак. В наведеному вище прикладі $\Delta x_{\text{іст}} \leq \pm 0,5$ мм.

Абсолютну похибку, що має знак, будемо називати *граничною абсолютною похибкою* і позначати її Δx .

Істинне значення величини знаходиться в межах

$$x_{\text{іст}} = x_0 \pm \Delta x. \quad (1)$$

Використання граничної абсолютної похибки не завжди зручне і доцільне. Наприклад, визначення маси трактора з граничною абсолютною похибкою ± 1 кг є дивовижним як з точки зору точності визначення так і з точки зору нерозуміння суті справи тим, хто цей подвиг здійснив. З іншого боку, визначити масу кількох кілограмів цукру з похибкою ± 1 кг також дивовижне з точки зору неточності.

В подібних випадках точність визначення наближених величин доцільно характеризувати не абсолютною, а *відносною похибкою*: $\Delta x/x_{\text{іст}}$. Оскільки значення $x_{\text{іст}}$ не завжди відоме, замість $x_{\text{іст}}$ доцільно взяти близьку величину x_0 .

Гранична відносна похибка дорівнює

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_0}. \quad (2)$$

Істинне значення величини $x_{\text{іст}}$ пов'язане з наближеним значенням x_0 та відносною граничною похибкою δx очевидною формулою:

$$x_{\text{іст}} = x_0 (1 \pm \delta x). \quad (3)$$

Далі частіше за все будемо уживати поняття «гранична відносна похибка» називаючи її коротко «*відносна похибка*».

Часто використовується вираз «відносна точність». Очевидно, що *відносна точність* є величиною, оберненою до *відносної похибки*: якщо відносна похибка менше, то відносна точність – більше.

1.2. Умовний запис наближених чисел

Показати ступінь точності технічної величини можна різними способами:

- 1) подати межі, в яких вона знаходиться: $x = x_1 \div x_2$;
- 2) подати приблизне значення і відхилення від нього: $x = x_0 \pm \Delta x$;
- 3) подати приблизне значення і відносну похибку (форм. (3)) $x = x_0(1 \pm \delta x)$.

Приклади: $A = 331,61 \div 331,95$,
 $B = 321,61 \pm 0,06$,
 $C = 361,61(1 \pm 0,0002)$.

А тепер уявімо собі що числа A , B , C входять в деяку формулу, за якою необхідно щось обчислити. І замість букв підставимо величини A , B , C в тих формах як подано вище. Ясно, що замість формули одержимо громіздкий вираз з яким важко буде взагалі щось зробити, тим більше – обчислити.

Необхідна така форма запису за якою можна було б і обчислювати і оцінювати точність чисел. А подані вище способи вказання точності чисел доцільно використовувати для показання точності особливо важливих кінцевих результатів розрахунку.

В техніці існують загальновизнані правила запису чисел, які дозволяють оцінювати величину похибки без подання її точного значення.

Розглянемо ці правила.

Нехай маємо число

4 2 1 , 8 6 7 3 5 $\pm$ 0 , 0 5 6 .

цифра 2-го порядку мінус 2-й порядок
цифра 1-го порядку мінус 3-й порядок
цифра 0-го порядку мінус 2-й порядок
 мінус 1-й порядок

Число в цілому має той порядок, який має перша значуща цифра – цифра 4, вона 2-го порядку. Гранична абсолютна похибка 0,056 має мінус другий порядок, тому що такий порядок має 5 – перша значуща цифра.

Записане число має 8 значущих цифр: три до десятичної коми та п'ять після неї. Але чи дійсно записане число містить саме 7 тисячних, а не 9 чи 2?, чи дійсно воно містить 3 десятитисячних і так далі якщо похибка має мінус другий порядок і її перша цифра становить 5 сотих? Ясно що ні. Величина похибки починається з 0,05, це означає, що вже цифра 6 не вірна, сумнівна. Але тоді цифри, що стоять після неї – 7; 3 та 5 взагалі не вірні і тому не мають ніякого змісту. В граничному випадку, коли похибка становитиме 0,05 і більше, сумнівною буде і цифра 8: $421,86 + 0,05 = 421,91$, але це при майже граничному значенні похибки, що малоімовірно. Тому цифру 8 можна вважати точною. Виходить, що в записаному 8-значному числі вірними, значущими, такими, що мають сенс, є лише перші чотири цифри: 4; 2; 1; 8. Цифра 6 – сумнівна. Записувати цифри 7; 3 та 5 не слід.

Поданий вище запис числа не є грамотним.

Правильний запис числа одержимо, якщо будемо керуватись наступними правилами. В сукупності вони називаються “правилами округлення”.

Правило 1 | *Слід записувати лише ті цифри, порядок яких вище порядку похибки.*

В нашому випадку слід записати так:

$$421,86735 \pm 0,056 = 421,8.$$

Частину 0,06735 слід просто відкинути, як таку, що не має сенсу.

Однак записане число з чотирьох цифр також буде невірне, тому що порушене

Правило 2 | *Якщо частина, що відкидається, починається з цифри більше 5, або більше, ніж 51, то останню цифру з тих, що залишаються, необхідно збільшити на 1.*

В тій частині, що залишається, цифру 8 слід збільшити на 1 і записати так:

$$421,86735 \pm 0,056 = 421,9.$$

Правило 3  **Якщо частина, що відкидається, починається з 5, з меншої цифри, або з 50, то остання цифра в числі, що залишається, не змінюється.**

Наприклад:

$$421,85035 \pm 0,056 = 421,8.$$

Правило 4  **Якщо відкидаються цифри нульового, першого, другого і т.д. додатніх порядків, то їх неможна замінити нулями. Необхідно переходити на запис числа у вигляді добутку двох чисел: перше містить тільки вірні цифри, а друге – число 10 у відповідному степені.**

Наприклад: $1300,2 \pm 43 \text{ мм} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ мм}$.

Тут 1,3 означає, що зроблений перехід від первісного числа з розмірністю «міліметри» до числа з розмірністю «метри». Якщо це чомусь не бажане, то слід записати так: $1,3 \cdot 10^3 \text{ мм}$. Число, що стоїть перед 10^3 доцільно записувати так, щоб перед комою стояла одна цифра: не $13 \cdot 10^2$, а саме $1,3 \cdot 10^3$. При такому записі числами зручніше користуватись.

Правило 5  **Абсолютна похибка числа, що записане у відповідності з правилами, поданими вище, приймається рівною $5 \cdot 10^{n-1}$, де n - порядок останньої цифри в запису числа.**

Наприклад.

Абсолютну похибку числа $1,3 \cdot 10^3$ приймаємо рівною $0,05 \cdot 10^3$. Абсолютну похибку числа 12,8 вважаємо рівною 0,05. Похибка числа 12,80 дорівнює 0,005, тобто 5 одиниць цифри мінус третього порядку, оскільки остання значуща цифра числа – 0 – має мінус другий порядок: $n-1 = -2-1 = -3$.

Коли оцінюємо похибку по запису числа слід звертати увагу на зміст, характер величини, що оцінюється цим числом. Наприклад, у фразі «8 ящиків вагою 512,4 кг» число 8 є точним і не можна вважати, що кількість ящиків подана з точністю $8 \pm 0,5$ ящика, а загальна вага подана з точністю 0,05 кг.

Часто зручно замість абсолютної похибки користуватись відотною похибкою δx у відсотках. Вона визначається так: абсолютну похибку Δx поділити на число та помножити на 100.

Приклади. 1. Число 28, абсолютна похибка 0,5, відносна:

$$(0,5/28) \cdot 100 \approx 2\%.$$

2. Число $1,3 \cdot 10^3$, абсолютна похибка $-0,05 \cdot 10^3$, відносна похибка дорівнює $(0,05 \cdot 10^3 / 1,3 \cdot 10^3) \cdot 100 \approx 4\%$.

3. Число 17,3, абсолютна похибка 0,05, відносна дорівнює $0,05/17,3 \cdot 100 \approx 3\%$.

1.3. Необхідна точність

 ***Кількість значущих цифр у вхідних даних, розрахунках і результатах не повинна бути більше чотирьох.***

Написане є і правилом, і вимогою. Воно пояснюється тим, що вхідні дані для технічних розрахунків майже ніколи не мають похибку меншу за 5 одиниць четвертої значущої цифри. З цього випливає, що 5-а, 6-а та інші цифри не можуть бути вірними. А якщо так, то їх не слід одержувати і записувати.

Наведене правило має виключення: іноді необхідні числа з 5 чи 6 значущими цифрами. Але це буває дуже рідко і для технічних розрахунків не є типовим.

Часто можна бачити, як виконавець працює з 8-9-значними числами лише тому, що індикатор калькулятора має 8-9 розрядів. На зауваження про те, що в числах тільки перші 3-4 цифри є вірними, він відповідає: “Що з того? Не я ж обчислюю, а калькулятор!”

Таке заперечення не є переконливим. Справа в тім, що перше, ніж ввести число в калькулятор, його слід прочитати, вписати в оперативну пам'ять мозку і після того мозок дасть команду натискати на клавіші. Одержавши 8-9-значне число на індикаторі калькулятора, його також слід прочитати і кудись записати. Ясно, що маніпулювання 3-4-значними числами значно простіше, ніж з 8-9-значними.

Робота з багатозначними числами швидко стомлює, хоча це й непомітно. Внаслідок втоми з'являються помилки, які ще треба знайти і виправити. Врешті-решт це викликає невиправдані втрати часу.

Корисно запам'ятати **принцип Крилова**:

Наближене число слід записувати так, щоб в ньому всі значущі цифри, крім останньої, були вірні, і лише остання цифра була сумнівною.

1.4. Точність результатів математичних операцій з наближеними числами

1.4.1 Додавання

Маємо два числа x та y , їх наближені значення x_0 та y_0 і граничні абсолютні похибки Δx та Δy :

$$x = x_0 \pm \Delta x,$$

$$y = y_0 \pm \Delta y.$$

Приблизне значення суми: $w = x_0 + y_0$.

Сума чисел буде дорівнювати: $w = w_0 + (\pm\Delta x \pm \Delta y) = w_0 \pm \Delta w$.

Тобто *гранична абсолютна похибка суми дорівнює сумі граничних абсолютних похибок доданків*.

Але абсолютні похибки можуть мати різні знаки. Якщо доданків мало, то доцільно вважати, що абсолютні похибки одного знаку. Цим загальна похибка суми буде дещо завищена.

Якщо ж доданків багато, то такий підхід буде невиправдано строгим, а похибка суми – надзвичайно завищеною.

Якщо припустити, що абсолютні похибки всіх доданків однакові, то одержимо дуже прості формули для абсолютної похибки суми:

– коли кількість доданків $n \leq 4$: $\Delta w = \pm n\Delta x$;

– коли кількість доданків $n > 4$: $\Delta w = \pm 2\Delta x\sqrt{n}$.

Число 4 взяте з практики: якщо доданків менше п'яти, то припущення, що всі вони мають похибки одного знаку, цілком слушне. Якщо доданків більше, то таке припущення частіше за все надто строге і дає явно завищену сумарну похибку.

Порівнюючи ці формули, бачимо, що при кількості доданків більше чотирьох похибка суми пропорційна не кількості доданків, а кореню з кількості! Вже при 20 доданках похибка суми по другій формулі

буде удвічі менше ніж по першій. Друга формула одержана з урахуванням малої імовірності того, що абсолютні похибки матимуть однакові знаки.

В техніці, щоб не розраховувати всякий раз похибки додавання, доцільно користуватись правилом:

 ***перед додаванням слід всі доданки скруглити до точності найменш точного доданка, після чого одержані числа скласти згідно звичайних правил арифметики.***

При наявності навички округлення можна робити в умі і не записувати скруглені значення окремо.

Для прикладу обчислимо суму наближених чисел:

$$215,83 + 6,3 + 0,0629.$$

Вважаємо, що числа записані згідно правил округлення які наведені вище та що їх запис відповідає фактичній точності чисел.

Маємо абсолютні похибки: першого числа – $\pm 0,005$ (5 одиниць цифри відсутнього мінус третього порядку після цифри 3), другого числа – $0,05$, третього – $0,00005$. Найбільшу абсолютну похибку має друге число: $0,05$. Тому перше і третє числа слід скруглити до десятих.

Для цього в першому числі досить відкинути цифру 3. В третьому числі прийдеться відкинути цифру 6 і все, що стоїть після неї, але (правила скруглення!) замість мінус першого порядку (нуль після коми) прийдеться записати 1 (це тому, що цифра 6, яка відкидається, більше 5!).

Тепер маємо скруглені числа та їх суму:

$$125,8 + 6,3 + 0,1 = 132,2.$$

Результат маємо з граничною абсолютною похибкою $\Delta w = \pm 0,05$.

Якщо ж скласти абсолютні похибки цих чисел, то маємо:

$$\Delta w = 0,005 + 0,05 + 0,00005 = 0,055,$$

майже те ж саме, третій доданок відкинутий, тому що він на 2 порядки менший за попередні.

Таким чином ***скруглення чисел перед додаванням не веде до втрати точності розрахунку.***

Вище аналіз операції додавання виконаний на основі абсолютної помилки. На практиці точність розрахунку оцінюють по похибкам відносним. Спеціальне дослідження дає такий результат:

відносна похибка суми менше ніж найбільша відносна похибка доданків!

Додавання – це одна з небагатьох математичних операцій, які не викликають зменшення відносної точності.

Числове інтегрування, тобто визначення суми великої кількості доданків з приблизно рівними абсолютними похибками, вхідні дані, ясно, не уточнює, але ***не викликає втрати точності***.

1.4.2 Віднімання

Операція віднімання має особливість, яка може причинити виконавцеві значні неприємності, якщо цю особливість не усвідомити.

Маємо два числа x та y , їх наближені значення x_0 та y_0 , а також абсолютні похибки Δx та Δy .

Різниця w чисел дорівнює: $w = x_0 - y_0 \pm (\Delta x - \Delta y)$. Абсолютна похибка різниці $\Delta w = \Delta x - \Delta y$. На перший погляд абсолютна похибка різниці зменшується. Але справа в тім, що заздалегідь не можна бути впевненим, що Δx та Δy мають **однакові** знаки! В найгіршому випадку ці похибки не віднімуться одна від одної, а додадуться. Тому доцільніше припустити, що $\Delta w = \Delta x + \Delta y$. Це означає, що ***абсолютна похибка різниці дорівнює сумі абсолютних похибок зменшуваного та від'ємника***.

Обчислимо відносну похибку різниці, знаючи відносні похибки δx та δy . Очевидно, що

$$\delta w = \frac{\Delta x + \Delta y}{x_0 - y_0} = \frac{x_0 \delta x + y_0 \delta y}{x_0 - y_0}.$$

Якщо в чисельнику відкинути $y_0 \delta y$ (доданок, зв'язаний з від'ємником) то цим зменшимо δw , якщо, до того ж, у знаменнику відкинути y_0 , від'ємник, то знову зменшимо дріб:

$$\delta w > \frac{x_0 \delta x}{x_0 - y_0} > \frac{x_0 \delta x}{x_0} = \delta x.$$

Одержане означає, що *відносна похибка різниці більше за відносну похибку зменшуваного*.

При відніманні відбувається зменшення точності розрахунку. Воно особливо велике коли x та y близькі одне до одного. Тоді виникає ситуація відома як “мала різниця великих величин”. Про втрату точності вже було сказано вище на прикладі обчислення моменту опору кільцевого перерізу в розділі 1.

Наведемо ще один приклад.

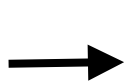
Маємо два числа $x = 101$, $y = 100$.

Якщо це точні числа, то різниця $101 - 100 = 1$ і тут нема ніяких проблем.

Інша справа, коли це наближені числа і абсолютні похибки відповідно до запису дорівнюють $\pm 0,5$, тобто $x = 101 \pm 0,5$, $y = 100 \pm 0,5$. Віднімаючи друге число від першого при умові, що *похибки мають різні знаки*, маємо:

$$x - y = (101 + 0,5) - (100 - 0,5) = 2.$$

Тобто, абсолютна похибка різниці $\Delta w = +0,5 - (-0,5) = 1$ дорівнює самій різниці! **Відносна** похибка різниці складає 100%.

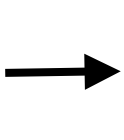


Підступність операції віднімання полягає в тім, що коли зменшуване і від’ємник близькі одне до другого відбувається повна втрата точності розрахунку.

Інженер повинен знати про цю особливість віднімання та звертати особливу увагу на точність зменшуваного та від’ємника і намагатись збільшити її (якщо ці числа «не занадто близькі» це допомагає), або уникати використання формул в яких присутня мала різниця великих величин.

Можна навести багато прикладів з галузей опору матеріалів, будівельної механіки чи аеродинаміки, коли теоретично бездоганий метод чи формула виявляються непридатними саме через наявність малої різниці великих величин.

В практичних розрахунках, коли нема особливих вимог до точності, слід керуватися тим самим правилом як і при додаванні:



перед відніманням слід округлити зменшуване та від'ємник до найменш точного з них по абсолютним похибкам, а потім виконати віднімання звичайним способом.

Приклад: $125,812 - 6,3 - 0,0651 = 125,8 - 6,3 - 0,1 = 119,4$.

1.4.3 Множення та ділення

Аналіз точності цих операцій зручніше виконати за допомогою відносних похибок.

Розглянемо множення x та y . Їх приблизні значення x_0 та y_0 , а відносні похибки $\pm\delta x$ та $\pm\delta y$:

$$x = x_0(1 \pm \delta x),$$

$$y = y_0(1 \pm \delta y).$$

Добуток величин дорівнює:

$$w = xy = x_0 y_0 (1 \pm \delta x)(1 \pm \delta y) = x_0 y_0 (1 \pm \delta x \pm \delta y \pm \delta x \delta y).$$

Величину $\delta x \delta y$ одразу відкинемо оскільки вона мала в порівнянні з δx та δy , тобто мала другого порядку.

Позначимо $w_0 = x_0 y_0$, $\delta w = \delta x + \delta y$, тоді $w = x_0 y_0 (1 \pm \delta x \pm \delta y) = w_0 (1 \pm \delta w)$.

Отже, *відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок множників.*

Нехай, наприклад, перемножаються два числа з відносними похибками +2% та +3%. Похибка добутку складе $+2 + 3 = +5\%$. Це коли знаки однакові. А коли різні то похибка складе $+2 - 3 = -1\%$ (або $+1\%$). Відбудеться часткова компенсація похибок. Але знаки похибок відомі дуже рідко. Щоб їх визначити потрібен аналіз (хоч не завжди складний). Тому розумна обережність вимагає вважати знаки однаковими.

Окремий випадок – множення точного числа x на наближене y . Вище було: $\delta w = \delta x + \delta y$. Оскільки x – число точне, то $\delta x = 0$ і $\delta w = \delta y$.

Відносна похибка добутку точного числа на наближене дорівнює відносній похибці наближеного числа.

Відносно абсолютної похибки маємо інший результат:

Абсолютна похибка добутку точного числа x на наближене у дорівнює абсолютній похибці Δu помноженій на точне число: $\Delta w = x\Delta u$.

З викладеного витікає практичне правило про кількість знаків в добутку. Якщо, наприклад, помножити 3-значне наближене число на 5-значне, то калькулятор дасть 7–8 знаків, що зовсім не означає, що в результаті вірні всі цифри. Частину їх прийдеться відкинути згідно правил округлення. Дійсна точність результату не зменшиться, якщо в добутку залишити стільки знаків скільки їх в найменш точному множнику. В нашому випадку слід залишити 3 знаки, в усякому разі не більше 4, а всі останні – відкинути як такі, що не мають сенсу.

Приклад: $24,8 \cdot 48,256 = 1196,7488 = 1197,0$.

Якщо застосувати викладений вище підхід до ділення, то одержимо:

$$w_0(1 + \delta w) = \frac{x_0}{y_0}(1 + \delta x - \delta y).$$

Але відносні похибки можуть бути **різних** знаків і логічно прийняти, що

відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника.

Як і у випадку множення число значущих цифр частки повинно дорівнювати числу значущих цифр діленого чи дільника (що менше). Нехай, наприклад, 3-значне число ділиться на 5-значне. В результаті слід залишити 3 цифри, а всі інші відкинути як такі, що не мають сенсу.

1.4.4 Піднесення до степеня і виділення кореня

Піднесення до степеня і виділення кореня це, по суті, одна операція. Вся справа в тім, яким числом заданий степінь – цілим чи дробним. Будемо завжди вважати, що степінь – цілий чи дробний – число точне.

Аналіз точності, подібний до наведеного вище, дає такий результат:

→ **Відносна точність при піднесенні в квадрат або куб зменшується відповідно в два або три рази, а відносна похибка – збільшується.**

→ **При добуванні кореня (піднесення в дробовий степінь) 2-го чи 3-го степеня відносна точність збільшується, а відносна похибка – зменшується.**

Добування кореня та додавання не ведуть до зменшення точності.

При технічних обчисленнях оцінку точності виконують рідко. Тому корисно пам'ятати, що вона не зменшується, якщо користуватись правилом:

→ **при піднесенні до степеня чи добуванні кореня в результаті слід залишати стільки знаків скільки їх було в числі.**

Приклад 1. В куб підноситься 3-значне число 327 (тобто $327 \pm 0,5$):

$$327^3 = 34\,965\,783 = 350 \cdot 10^3 = 3,50 \cdot 10^5.$$

↑
на індикаторі
калькулятора

Приклад 2. Виділити корінь квадратний з числа 32,7 (тобто $32,7 \pm 0,05$):

$$\sqrt{32,7} = 5,7183913 = 5,72.$$

↑
на індикаторі
калькулятора

В обох випадках необхідно в результатах залишити по 3 цифри.

1.5. Методи загальної оцінки точності результатів

Вище наведений аналіз похибок окремих математичних операцій з наближеними числами. На практиці розрахунки роблять по формулах, коли виконується деяка сукупність операцій. З них одні операції зменшують точність всього розрахунку, другі – не зменшують, треті – збільшують. А що буде в конкретному випадку, при даній комбінації операцій? Необхідні способи оцінки похибки розрахунку по формулі в цілому.

Простішим таким методом є *метод крайніх значень*.

Суть метода в наступному:

- по формі подання чисел, що використовуються в формулі, треба визначити їх граничні абсолютні похибки та межі, в яких ці величини можуть знаходитись, тобто їхні крайні значення – найбільше та найменше;

- в залежності від виду формули взяти таку комбінацію крайніх значень, щоб результат розрахунку був найбільшим – $w_{нб}$ та обчислити його;

- взяти іншу комбінацію крайніх значень, щоб результат розрахунку був найменшим – $w_{нм}$ та також обчислити його.

Ясно, що результати розрахунків по цій формулі будуть в межах від $w_{нм}$ до $w_{нб}$.

Середнє значення результату буде: $w_0 = 0,5 \cdot (w_{нм} + w_{нб})$, а гранична абсолютна похибка буде $\Delta w = 0,5 \cdot (w_{нм} - w_{нб})$.

Цим методом оцінимо абсолютну похибку розрахунку величини T по формулі

$$T = \frac{K^2 \cdot t}{p}.$$

Значення величин: $K = 23$; $t = 14$; $p = 7,2$; степінь 2 вважаємо точним.

По формі запису чисел відновимо їх абсолютні похибки і межі зміни:

$K = 23 \pm 0,5$; найбільше значення $K_{нб} = 23,5$; найменше $K_{нм} = 22,5$,

$t = 14 \pm 0,5$; $t_{нб} = 14,5$; $t_{нм} = 13,5$;

$p = 7,2 \pm 0,05$; $p_{нб} = 7,25$; $p_{нм} = 7,15$.

Тепер одержимо найбільше $T_{\text{нб}}$ і найменше $T_{\text{нм}}$ значення:

$$T_{\text{нб}} = \frac{K_{\text{нб}}^2 t_{\text{нб}}}{p_{\text{нм}}}; \quad T_{\text{нм}} = \frac{K_{\text{нм}}^2 t_{\text{нм}}}{p_{\text{нб}}}.$$

В першій формулі в чисельнику стоять найбільші значення $K_{\text{нб}}$ та $t_{\text{нб}}$, а в знаменнику – найменше $p_{\text{нм}}$. В другій формулі – навпаки.

$$T_{\text{нб}} = \frac{23,5^2 \cdot 14,5}{7,15} = 1120 \quad T_{\text{нм}} = \frac{22,5^2 \cdot 13,5}{7,25} = 943.$$

Середнє значення

$$T_{\text{ср}} = 0,5 \cdot (T_{\text{нб}} + T_{\text{нм}}) = 0,5 \cdot (1120 + 943) = 1031.$$

Абсолютна похибка

$$\Delta T = 0,5 \cdot (T_{\text{нб}} - T_{\text{нм}}) = 0,5 \cdot (1120 - 943) = 88.$$

Отже, $T = 943 \div 1120 = 1031 \pm 88$.

На практиці цей метод може виявитись дуже складним. В складних випадках не завжди ясно, які саме поєднання крайніх значень величин можуть дати крайні результати.

Тому часто зручніший інший метод – *метод частинних похідних*.

Запишемо вираз для диференціалу функції $T = \frac{k^2 t}{p}$:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial k} dk + \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial p} dp.$$

Частинні похідні $\frac{\partial T}{\partial k}$; $\frac{\partial T}{\partial t}$; $\frac{\partial T}{\partial p}$ доведеться обчислити для серед-

ніх значень k , t , та p (вони позначені індексом “нуль”):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial k} &= \frac{2kt}{p}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial k} \right)_0 = \frac{2 \cdot 23 \cdot 14}{7,2} = 89; \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{k^2}{p}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_0 = \frac{23^2}{7,2} = 73; \\ \frac{\partial T}{\partial p} &= -\frac{k^2 t}{p^2}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_0 = -\frac{23^2 \cdot 14}{7,2^2} = -143. \end{aligned}$$

Абсолютна похибка буде

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial k} \right)_0 dk + \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_0 dt + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_0 dp =$$
$$= 89 \cdot 0,5 + 73 \cdot 0,5 + 143 \cdot 0,05 = 88.$$

Порівнюючи цей результат з попереднім, відмічаємо, що вони однакові. Це просто випадок. Методи різні і в загальному випадку результати будуть різні, хоч і близькі.

2. ВИКОНАННЯ ПОЯСНЮВАЛЬНИХ ЗАПИСОК ТА РОЗРАХУНКІВ

2.1. Виконання пояснювальних записок

1. Всяка досить велика робота (завдання) повинна супроводжуватись поясненнями (пояснювальною запискою). Її обсяг залежить від обсягу та складності завдання і може складати від десятка рядків тексту до десятків сторінок. **Але пояснення повинні бути завжди.**

2. Пояснювальна записка до роботи (основний текст роботи) повинна містити такі логічні частини:

а) виклад завдання, вхідні дані;

б) виклад послідовності виконання роботи (ходу вирішення задачі). Тут необхідно дати обґрунтування обраного методу та короткі пояснення щодо мети і змісту кожної частини розрахунків або частини виконання.

в) висновок, кінцевий результат роботи.

Пояснювальна записка може бути поділена на частини, глави, підглави; або на частини, розділи, параграфи, статті і т.д. На практиці частіше за все об'єм записки (як і документу) ділять на

- розділи;
- підрозділи;
- пункти.

Всі вони нумеруються арабськими цифрами з крапкою після них.

Якщо розділ великий, він ділиться на підрозділи, що мають порядкові номери в межах розділа.

Якщо і підрозділи великі, то вони діляться на пункти, що також мають порядкові номери в межах підрозділів.

Приклад позначення частин записки:

2.1.12 – 12-й пункт 1-го підрозділу 2-го розділу.

Викладене вище не є стандартом, це лише загальна рекомендація. В залежності від дисципліни та кафедри вимоги до оформлення можуть дещо змінюватися.

3. Якщо робота велика і складається з кількох частин то сказане вище відноситься до кожної частини.

4. Неприпустима довільна послідовність виконання окремих частин роботи. Послідовність виконання і подання повинна бути такою, яка вказана в завданні на виконання роботи.

5. В кінці пояснювальної записки слід подати список використаної літератури. В ньому для кожної книги слід вказати прізвище автора та його ініціали, видавництво, місце видання, рік видання та об'єм (кількість сторінок).

Приклад:

2. Міхненко В.В. Газове паливо та його використання. – Львів: Каменярь, 1998. – 324 с.

В цьому прикладі 2 – номер книги за списком, Львів – місце видання, Каменярь – назва видавництва, далі – рік видання та об'єм. При складанні списку слід бути уважним і ставити крапки, тире, двокрапку та кому так, як подано в прикладі.

Якщо авторів багато, то в посиланні можна залишити прізвище тільки першого автора, наприклад: Міхненко В.В. та інші.

Посилання на статтю в журналі або збірнику статей виконується дещо інакше.

Приклад:

Колпак Н.Д., Наталюк В.Ф. Вимоги до розробки методики виконання вимірювань // Методи та прилади контролю якості. – 1999. – №3. – С.59–63.

В цьому прикладі дві косі риски відокремлюють назву статті від назви журналу чи збірника статей, 1999 – рік видання, №3 – номер журналу, с.59 – 63 – сторінки, на яких надрукована стаття.

В списку літератури назви подаються мовою книги чи статті, тобто мовою оригіналу.

Послідовність книг та статей в списку як правило визначається послідовністю згадування їх у тексті (як у тексті – так і в списку) або за алфавітом по першим літерам авторів. Коли авторів книги багато, їх прізвища не виносяться на обкладинку, тоді книга ставиться в список за першою літерою назви.

В самому тексті книга чи стаття згадуються так: «це подано В.В.Міхненком в [2] ...», або «це показано в [2] ...». Можна взагалі обмежитись номером книги, поданим в квадратних дужках.

6. Текст пояснювальної записки виконується на окремих аркушах паперу, які потім скріплюються. На першому, титульному аркуші обов'язково слід вказати:

- назву учбового закладу,
- назву та тему завдання,
- прізвище та ініціали виконавця,
- номер групи,
- назву кафедри та прізвище і ініціали викладача, який повинен прийняти роботу.

Текст виконується тільки на одній стороні аркуша.

7. Креслення, графіки та таблиці можуть бути внесені в текст. Якщо це чомусь недоцільно, то мають бути додані до записки. В усякому разі вони повинні бути пронумеровані і в самому тексті на них повинні бути посилання. Якщо на якийсь графік в тексті нема посилання, то він не потрібен і його можна просто викинути.

8. Необхідно пояснити всі введені літерні позначення, навіть тоді, коли виконавцю здається, що «тут і без пояснень все зрозуміло». Вірно, «все зрозуміло» виконавцю в момент написання тексту, а чи буде все зрозуміло читачу чи самому виконавцю через деякий час – то це ще питання.

Приклад. «Використаємо рівняння прямої лінії

$$y = kx + b,$$

де x та y – поточні координати, k – кутовий коефіцієнт, b – початкова ордината».

При повторному використанні тієї ж формули або позначення в межах даного розділу чи частини знов пояснити їх не треба.

Неприпустимо уживати різні літери для позначення однієї величини, або навпаки, уживати одну і ту ж саму літеру для позначення різних величин. Таке не просто вияв недбалості, а гірше.

9. Слід бути уважним до написання індексів. Якщо, наприклад,

якась величина позначена a_j то ні в якому разі не можна в цій самій роботі чи частині роботи позначати її через a або a_2 . Якщо ж це вкрай необхідно то слід подати докладне пояснення.

10. Взагалі слід бути уважним при написанні математичних знаків. Наприклад, неприпустимо пропускати крапку над i , або писати літери h , n , u так, що їх важко розрізнити.

Слід навчитися розбірливому написанню незвичних для нас грецьких літер ξ , ζ , ρ , σ (ксі, дзета, ро, сігма) і так далі. Часто, наприклад, літеру сігма σ пишуть так, що її можна прийняти за цифру 6.

Слід привчити себе писати так, щоб великі літери були такі великими, а малі – малими. Неприпустимо, наприклад, писати a^n (n – степінь), або a_n (n – індекс) схожими на an (добуток a та n).

При переліку позначень їх слід відокремлювати не комою, а **комою з крапкою**, тому що кому можна прочитати як індекс, або як кому, що відокремлює цілу частину від дробової. Такі помилки надзвичайно важко виявляти.

11. Кожна фраза в тексті пояснень повинна бути точною, ясною, граматично вірною. Слід уникати довгих та заплутаних («науко-вподібних») фраз. Не можна уживати скорочень, що не є загально-визначеними.

Приклад. Фраза “ $(\cdot)x=a$ є ос. $(\cdot)$ диф. р-ня.” може вживатися в конспекті, але не в пояснювальному тексті. В ньому фразу слід записати так:

«Точка $x=a$ є особливою точкою диференціального рівняння.»

12. Не можна скорочувати слова, навіть ті, що часто вживаються: «рівняння», «більше або менше», «дорівнює» і т. ін.

Неможна змішувати математичні знаки зі словами тексту: «швидкість = 5 м/с», повинно бути «швидкість дорівнює 5 м/с».

Перед числами не слід ставити тире, навіть коли це бажано за змістом, тому що його можна прочитати як знак “мінус”.

13. Записи повинні бути строго послідовними. Якщо окремі невеликі рівняння або вирази записуються в один рядок, то їх слід відокремлювати **комою з крапкою**.

Краще за все послідовні вирази записувати стовпчиком, коли кожна формула починається з нового рядка. Такий текст легко сприймається.

Зовсім неприпустимо таке безладдя, коли, наприклад, спершу вирази записуються стовпчиком, а потім – в рядок, або навпаки, потім – збоку від стовпчика і т.д.

Не треба в одному рядку записувати формулу, а далі – текст пояснення (крім пояснення позначень). В науковій та науково-технічній літературі нема, наприклад, таких записів:

« $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – загальний розв’язок даного диференціального рівняння».

Слід записати так:

«Загальний розв’язок даного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

14. Знак «дорівнює» слід ставити тільки між тими величинами та виразами, які є дійсно рівними. Неприпустимо записавши вираз і знак «=» після нього в тому самому або в наступному рядку записати щось таке, що не дорівнює йому.

Приклад неприпустимого запису:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx =$$
$$\ln x = t; \quad \frac{dx}{x} = dt = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C$$

Треба записати так:

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx;$$
$$\ln x = t; \quad \frac{dx}{x} = dt;$$
$$I = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

15. Якщо необхідно послатися на формули, то їм слід надати номери, наприклад, (2); (5), або так: (2.1); (5.3), що означає «1-а формула розділу 2», «3-я формула розділу 5» і т.п.

2.2. Виконання математичних розрахунків та графіків

1. Розрахунки, навіть чорнові, слід виконувати не в зошитах, а на окремих аркушах нерозлінованого паперу. По ходу виконання роботи заповнені аркуші скріплюються. Це дуже зручно – виняти потрібний

аркуш і покласти його перед очима, замість того, щоб кожний раз перегортати сторінки зошита. Працювати з нелінованим папером зручніше, ніж з лінованим: в очі не лізуть непотрібні лінії і написане краще видно. Виконавцю треба менше напружувати увагу, він менше стомлюється і робить менше помилок.

2. Записи ведуться м'яким олівцем, а не пастою.

Якщо ви грубо помилились, то написане слід стерти гумкою і на це місце записати те, що треба. Якщо ви пишете пастою, то написане прийдеться замазати, закреслити – так у записах з'являється бруд, який в свою чергу може бути причиною помилок.

3. Розрахунок виконується в два заходи: начорно, а потім переписується начисто. Часто студенти вважають, що охайним і чистим повинен бути тільки чистовик – те, що здається викладачу. А поточні розрахунки можна виконувати на чому завгодно і як завгодно. Але справа в тім, що з чистовиком студент не працює, він його показує викладачу, дещо виправляє, а потім здає. Працює студент лише з чорновиком. І якщо записи виконуються недбало, неохайно, на різнорідних папірцях – ви будете часто помилятися, довго шукати помилки, робити їх знову і т.д. – врешті навіть нескладна робота перетвориться на нескінченне і нудне писання і переправлення.

Чистий, охайний чорновик – це засіб економії часу і свідомість культури виконання.

Всі поради, що є в цьому посібнику, стосуються перш за все етапу роботи з чорновиком.

4. Всі розрахунки, навіть в чорновику, слід супроводжувати короткими, але чіткими поясненнями. Ця порада скоріш за все викличе здивування: «Це що, я сам собі буду щось пояснювати?! Я і так знаю, що написав!» – скаже студент. Так, вірно. В мить написання він усвідомлює, що саме записав (припустимо це), але що буде, коли розрахунки прийдеться перервати і повернутися через кілька днів чи тижнів? Ні, краще записувати коротенькі пояснення, ніж потім ламати голову: «А що це я написав? До чого воно?».

5. При записуванні розрахунків по формулах слід робити так: записати первісну формулу, а потім замість кожної букви підставити

вираз або числове значення. Слід підставляти також 0 і 1, і ні в якому разі не записувати результат множення на 0 чи на 1. **Формулу слід повторити в числах**, і тільки після цього записати результат, як у наступному прикладі:

$$y = t^2 \frac{x - \cos ax}{|a - b|} = 1^2 \cdot \frac{\frac{3}{2} - \cos\left(0 \cdot \frac{3}{2}\right)}{|0 - 2|} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Передостанній, проміжний дріб можна не писати, якщо формула нескладна.

При такому порядку запису менше імовірність помилитись, а якщо помилка таки зроблена, то легше перевірити і знайти її.

6. **Підставляючи в формулу числа замість позначень, ні в якому разі не слід вписувати розмірність чисел. Розмірності можна множити, ділити, підносити в степінь і т.д., але в стороні, окремо.**

Якщо вписувати числа разом з розмірностями (як цьому вчать в деяких школах), то легко саму розмірність прийняти за число. Так виникають дуже неприємні помилки, які важко виявити.

Майже двостолітній досвід інженерів свідчить про те, що з **числами слід працювати окремо від їх розмірностей**.

7. В проміжних розрахунках чи викладах не бажано заміняти точні величини їх наближеними значеннями, наприклад, замінити π на 3,14, а $\sqrt{2}$ на 1,41. Це треба робити при закінченні, коли одержується кінцевий числовий результат.

8. Всі числові розрахунки слід виконувати згідно правил роботи з наближеними числами, які викладені в першій частині цього посібника. Єдиний відступ від них полягає в тому, що для уникання накопичення похибки від округлення чисел кількість знаків в них можна збільшити на один: замість 2-значного числа взяти 3-значне і т.д. Але в усякому разі кількість знаків не повинна бути більше 5.

Розрахунок, виконаний з більшим числом знаків, ніж це дійсно необхідно, є проявом низького рівня виконавчої культури.

9. Імовірність похибок в розрахунку можна звести майже до нуля якщо вживати поточний контроль правильності. Його форми можуть бути дуже різними:

а) якщо необхідно обчислити об'єм тіла або площу поверхні і т. ін., то перш ніж почати розрахунок, прикиньте порядок результату (якщо це площа, – то одиниці, чи десятки, чи сотні квадратних метрів; якщо витрати палива – то літри чи сотні літрів; якщо це прогнутість балки – то сантиметри чи метри). Це зробити зовсім неважко, бо здоровий глузд є в кожного;

б) повторити розрахунок в іншій послідовності;

в) якщо розрахунок виконується в табличній формі, то дуже корисно (і дуже просто!) в таблиці прослідити характер зміни величин. Частіше за все вони змінюються плавно, і порушення плавності – це практично завжди ознака присутності похибки.

Часто буває і так: студент двічі-тричі робить розрахунок, але одержує один і той самий явно помилковий результат. А похибка (колись вона таки буде знайдена!) міститься в попередніх, підготовчих і простих розрахунках, на які не звертають увагу через їх простоту!

10. Однотипні числові розрахунки виконуються тільки в табличній формі.

Таблична форма розрахунку містить всі етапи обчислення, поділені на елементарні кроки і в такій формі, коли обчислення на кожному кроці виконуються дуже просто (менше імовірність похибки) і дуже легко перевіряються. Невеликі витрати часу на складання таблиці і розрахунки компенсуються економією часу внаслідок малої імовірності помилок.

Числа в стовпчиках таблиць слід розташовувати так, щоб класи чисел були один під одним (сотні – під сотнями, десятки – під десятками і т.д.). В такому разі таблицю легше читати і зменшується імовірність помилки при зчитуванні.

Приклад. Треба обчислити з чотирма вірними знаками значення функції

$$T(x) = \frac{\pi + \ln(1+x)}{\sqrt{2+x^2}}$$

на інтервалі $[0; 1]$ з кроком $\Delta x = 0,1$, тобто треба табулювати функцію $T(x)$.

Всяка таблиця повинна мати назву і напис «Таблиця № ...»

Рядком нижче виписуються константи, що використані в розрахунку, в нашому прикладі це π та $\ln 10$.

1-й рядок – значення незалежної змінної x .

Зміст величин в інших рядках ясний з самої таблиці.

Розрахункові формули для кроків розрахунку містяться в 1-й колонці. Числа в дужках є номери рядків. Напис $1 + x = 1 + (1)$ означає, що до 1 слід додати те, що міститься в 1-у рядку.

Таблиця 1

Таблювання $T(x)$
 $\pi = 3,1416; \ln 10 = 2,3026$

1	x	0	0,1	0,2	0,3
2	$1 + x = 1 + (1)$	1,0	1,1	1,2	1,3
3	$\lg(1 + x) = \lg(2)$	0	0,041393	0,079181	0,11394
4	$\ln(1 + x) = \ln 10 \cdot \ln(1 + x) = 2,3026 \cdot (3)$	0	0,095311	0,18232	0,26236
5	$\pi + \ln(1 + x) = 3,1416 + (4)$	3,1416	3,2369	3,3239	3,4040
6	$x^2 = (1)^2$	0	0,01	0,04	0,09
7	$2 + x^2 = 2 + (6)$	2,00	2,01	2,04	2,09
8	$\sqrt{2 + x^2} = \sqrt{(7)}$	1,4142	1,4177	1,4283	1,4457
9	$y = \frac{\pi + \ln(1 + x)}{\sqrt{2 + x^2}} = \frac{(5)}{(8)}$	2,221	2,283	2,327	2,355

Таблиця заповнюється не по колонках, а по рядках.

В рядку 5 міститься значення чисельника, в рядку 8 – знаменника, в 9 – результат.

Оскільки треба мати результат з 4 вірними знаками, розрахунок виконується з 5 знаками. Кінцевий результат має 4 знаки.

Якщо розрахунок дуже громіздкий, то він виконується в кількох таблицях – основній (туди вписуються вхідні дані, найбільш важливі проміжні та кінцеві) і допоміжних (проміжні розрахунки).

Після закінчення розрахунку викидати допоміжні таблиці не можна, бо це утруднить перевірку, пошук та виправлення помилок.

Якщо об'єм обчислень великий, то доцільно використати програмований калькулятор. Тоді об'єм таблиці можна зменшити, іноді до подання тільки вхідних і вихідних даних. Але в цьому разі слід подати текст програми і контрольний приклад розрахунку, що доводить вірність програми.

11. Про калькулятори

Сьогодні наявність власного калькулятора – норма. У продажу завжди є кілька десятків модифікацій широкого діапазону – по можливостям і по ціні.

Всі калькулятори природно об'єднуються в три групи:

- а) арифметичні (шкільні);
- б) інженерні;
- в) для науковців.

Найпростіші калькулятори – арифметичні. Вони дуже дешеві і виконують чотири арифметичні операції, добування квадратного кореня та обчислення відсотків. Це видно по написах на кнопках. Всякий калькулятор повинен мати пам'ять. Про її наявність свідчать написи на кнопках: М; М+; М- і т.п. з буквою М.

Використання цих приладів дуже просте і ніякої спеціальної підготовки не потребує.

Інженерний калькулятор дозволяє одразу одержати значення таких типових функцій як синус, косинус і т.п. Ці калькулятори мають два режими: арифметичний та формульний. Після вводу аргумента слід натиснути кнопку переходу в формульний режим, а після неї – кнопку, біля якої є назва потрібної функції. Всі калькулятори цієї групи мають також кнопки, на яких позначені круглі та квадратні дужки. Вони необхідні для обчислень по формулах. Для цього вводяться потрібні числа, знаки операцій та дужки. Після чого розрахунок виконується автоматично. Якщо треба, наприклад, 10 разів обчислити за однією і тією ж формулою, то необхідно 10 разів вводити всі числа, включаючи константи. Це не завжди зручно.

Недолік цих приладів в тому, що неможливий проміжний контроль на відсутність похибок. Для впевненості в їх відсутності розрахунок слід повторити кілька разів та використати інші способи контролю, про які сказано вище. Ось чому калькулятор не може замінити розрахунки в формі таблиць («кожному – своє»).

Калькулятори для науковців дозволяють ввести програму обчислень (до 100 кроків і більше) і розраховувати по ній стільки разів, скільки треба. Ці калькулятори відрізняються великою кількістю кнопок і спеціальними позначеннями на них, наприклад: К; ИП; П; БП; ПП і т.д. Ці кнопки дозволяють організацію циклічних розрахунків, перевод калькулятора з інженерного режима в програмний і т.п.

З вітчизняних калькуляторів найбільш поширені «Електроника МК-61»; «Електроника МК-52» та «Електроника МК-54» (бухгалтерський) Київського заводу автоматики. Досить поширені зарубіжні аналоги фірм Hewlett-Packard та Texas Instruments (обидва – США).

Для користування науковими калькуляторами слід навчитися

програмуванню на них. Цікаво, що у всіх калькуляторів такого типу – вітчизняних і зарубіжних – дуже близькі мови програмування. Це не Бейсік, не Паскаль і т.п., а спеціальна мова, що ґрунтується на так званій «польській логіці». Згідно неї вираз, що звичайно записується як $a \times b = c$ (згідно з звичайною «алгебраїчною» логікою) має бути записаний (і введений) так: $a; b; \times$. В перекладі на розмовну мову це означає: «число a та число b перемножити, добуток записати на місце a ».

Опанувати програмування досить просто навіть для школярів. В бібліотеках є десятки книжок про це, наприклад, дуже добре написана книжка І.Д. Данілова [5] (дивись список літератури в кінці цього посібника), а також [1, 3, 5, 7].

Програмовані калькулятори випускаються давно. Для них напрацьована величезна кількість програм, що опубліковані [1, 5, 7]. Вони заповнюють нішу між інженерними калькуляторами та комп'ютерами і використовуються тоді, коли інженерні калькулятори слабкі і незручні, а комп'ютери – надто потужні і дорогі.

Вибираючи, калькулятор слід мати на увазі, що опубліковані програми розроблені для вітчизняних приладів. Імпортні прилади НР мають дуже близькі мови програмування, але написи на кнопках зовсім не ті, що на вітчизняних, і ввести в них програму з вітчизняного довідника просто неможливо.

Калькулятори ТІ використовують звичайну, алгебраїчну, логіку. Про програмування на НР та ТІ можна довідатись з [5] та інструкцій по експлуатації.

12. Побудова графіків

Вони викреслюються по результатах розрахунків на спеціальному папері – міліметрівці.

Бувають такі види (кольори) паперу:

- блідно-жовта міліметрівка;
- жовта;
- блідно-синя;
- синя.

Останні два види паперу дуже незручні в користуванні, тому що вимагають напруження зору і тому їх слід всіляко уникати. Найбільш придатна міліметрівка – блідно-жовта.

Перед побудовуванням графіка слід олівцем накреслити **координатні вісі** та зробити їх **розмітку**. Початок координат слід взяти на

перехресті товстих ліній, що проведені через кожні 50 мм. Розміщувати шкали слід так, щоб ними було зручно користуватись: щоб лінії на папері, які проведені через 10 мм, співпадали зі “зручними” значеннями величини, графік якої будується.

Приклад. По горизонтальній осі слід розмістити шкалу в градусах від 0° до 40° . Розмічати так, щоб 50 мм осі відповідали 5° , або 10° , або 20° . І ніяк не припустимо, щоб, наприклад, 8° , 35° і т.д.

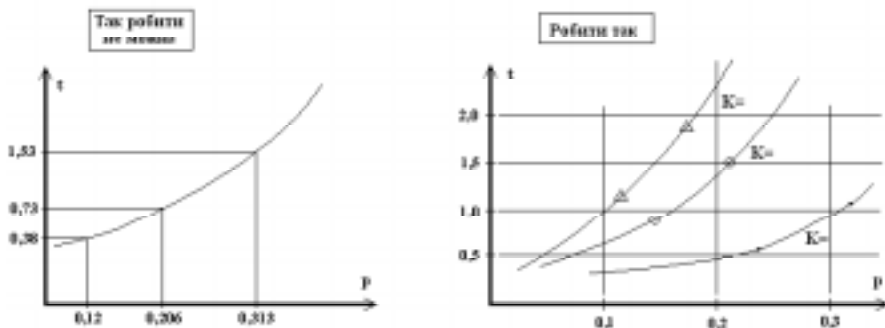
Ще приклад. По вертикальній осі слід розмістити шкалу сили від 100 до 1000 ньютон. Тоді доцільно зробити, щоб 10 мм шкали відповідали б 100, або 50, або 20 ньютонам. І неприпустимо, щоб 10 мм осі відповідали 17,5 або 122 ньютонам і т.д.

Незручна розмітка шкал робить неможливим використання графіка для визначення значень величин, що на ньому зображені.

Після розмітки шкал слід нанести точки графіка і з'єднати їх за допомогою лекала. Ні в якому разі **не слід проводити ліній**, що відповідають координатам цих точок: такі лінії лише **затемнюють** графік, та роблять його дуже незручним у роботі.

Якщо на графіку необхідно провести кілька ліній, то доцільно точки однієї позначити просто точками, другої лінії – точками в маленькому колі, третьої – точками в трикутничках і т.д.

Приклади того, як слід і як не слід будувати графіки, подані на наступному рисунку.



Як будувати графіки

На лівому рисунку шкали навіть не розмічені – виконавець тримав їх у голові. Спробуйте по такому графіку визначити t , якщо,

наприклад, $p = 0,25$! Це практично неможливо. Так будувати графіки неможна.

На правому рисунку зроблена зручна розмітка шкал і визначити t при $p = 0,25$ не становить ніякої проблеми. Тут же нанесені криві, що відповідають кільком значенням параметра K , що входить в залежність t від p . Щоб уникнути непорозумінь, слід на кожній кривій написати значення K , якому вона відповідає.

Якщо графіки виконуються не на міліметровці, а на нерозлінованому папері, то на графіку слід провести тонкі горизонтальні та вертикальні лінії, що відповідають поділкам на шкалах, як це подано на мал. 1, справа. Такими графіками користуватись і зручніше, і приємніше, і помилок буде менше.

13. Виконуючи розрахункові та графічні роботи, слід керуватись такими загальними принципами.

Принцип 1



Неохайність та безладдя при виконанні робіт завжди приводять до багатьох помилок, величезних витрат часу та праці на їх пошук та виправлення.

Принцип 2



Всяку роботу виконавець робить не для себе, а для інших. Виконана робота – це обличчя виконавця, звернене до споживачів. І треба, щоб воно було-таки обличчям.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барановская Г.Г., Любченко И.Н.* Микрокалькуляторы в курсе высшей математики. – К.: Вища школа, 1987. – 286 с.
2. *Давыдов В.В.* Технические вычисления в кораблестроении. – М.: Речной транспорт, 1961. – 248 с.
3. *Данилов И.Д.* Секреты программируемого калькулятора. – М.: Наука, 1986. – 160 с.
4. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
5. *Дьяконов В.П.* Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
6. *Крылов А.Н.* Лекции о приближенных вычислениях. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1954. – 402 с.
7. *Трохименко Я.К.* Программирование микрокалькуляторов «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61». – К.: Техника, 1987. – 208 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. <i>Виконання технічних обчислень</i>	4
1.1. Абсолютні та відносні похибки наближених чисел.....	5
1.2. Умовний запис наближених чисел.....	7
1.3. Необхідна точність.....	10
1.4. Точність результатів математичних операцій з наближе- ними числами.....	11
1.4.1. Додавання.....	11
1.4.2. Віднімання.....	13
1.4.3. Множення та ділення.....	15
1.4.4. Піднесення до степеня і виділення кореня.....	16
1.5. Методи загальної оцінки точності результатів.....	18
2. <i>Виконання пояснювальних записок та розрахунків</i>	20
2.1. Виконання пояснювальних записок.....	20
2.2. Виконання математичних розрахунків та графіків.....	24
Список використаної літератури.....	33

Навчальне видання

НІКОЛАЄВ Володимир Іванович

**ВИКОНАННЯ ТЕХНІЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ
ТА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ**

Методичні вказівки

(українською мовою)

Комп'ютерна верстка *В.Г. Мазанко*

Коректор *М.О. Паненко*

Свідцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції

ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 31.03.09. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 2,1. Обл.-вид. арк. 2,3.
Тираж 100 прим. Вид. 11. Зам. № 112. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

This image shows a single page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There are no vertical margin lines, and the page is completely blank except for the lines themselves.