

*Петрюк О.В., асистент,
Національний університет ім. адм. Макарова, м. Миколаїв
Петрюк П.В., асистент,
Національний аерокосмічний університет ім. Жуковського, м. Харків*

СТІЙКІСТЬ ОРТОТРОПНОЇ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ УДК 629.584, 539.3

В технологіях виробництва конструкцій із ізотропних конструкційних матеріалів існує проблема мінімізації власної ваги конструкцій. Особливо гостро така проблема стоїть перед конструкторами транспортних засобів, в першу чергу у ракето- та авіабудуванні, у суднобудуванні, залізничному та автомобільному транспорті. Щодо перших трьох галузей, то ця проблема пов'язана з економічністю експлуатації об'єктів, і навіть у конструкціях з металу інколи використовують елементи конструкцій змінного перерізу. Але технології вироблення стрижнів, листів, оболонок змінного перерізу є складними, а інколи і неможливим, особливо при використанні прокатної заготовки.

Розглянуто пластину з лінійним вздовж координати x законом зміни товщини

$$\delta(x) = \delta_0 + \frac{\delta_a - \delta_0}{a} x \quad (\text{рис. 1}).$$

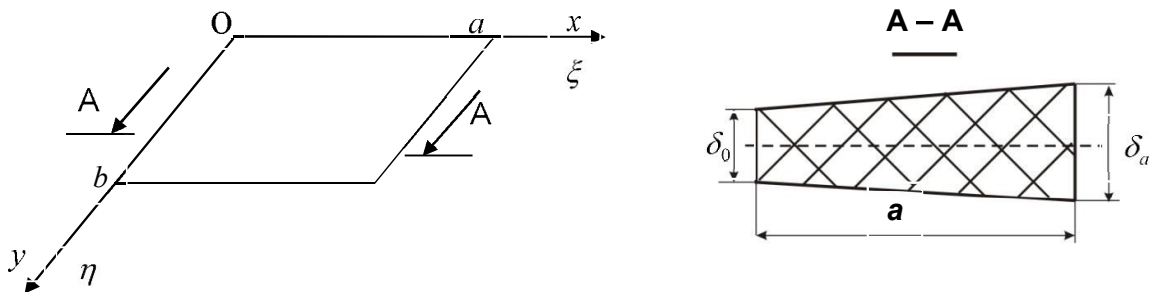


Рис. 1 – Ортотропна пластина з лінійним відносно x законом зміни товщини

На основі традиційних гіпотез Кірхгофа-Ляве [1] для жорсткої ортотропної пластини з полімерного композиційного матеріалу, товщина якої $\delta(x, y)$ змінюється у напрямку обох координат отримано наступне диференціальне рівняння її згину (і стійкості у малому):

$$\frac{\delta^3}{12} \left(Q_{yx}'' + Q_{xh}'' + 4\Pi \right) + \frac{Q_{yx}'}{2} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{Q_{xy}'}{2} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\Gamma_{yx}^0}{4} \Delta_x[\delta] + \frac{\Gamma_{xy}^0}{4} \Delta_y[\delta] +$$

$$+ G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Delta_{xy}[\delta] = -q - T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1)$$

де $\Delta_x[\delta] = 2\delta \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 + \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}$; $\Delta_y[\delta] = 2\delta \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 + \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}$; $\Delta_{xy}[\delta] = 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial y}$;

$$Q_{yx}'' = \Gamma_{yx}'' + 2\Lambda_{yx}' + \Omega_{yx}^0 \quad Q_{xy}'' = \Gamma_{xy}'' + 2\Lambda_{xy}' + \Omega_{xy}^0$$

$$Q_{yx}' = \Gamma_{yx}' + 2\Lambda_{yx}^0 + 2 \left(\frac{\partial G_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + G_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right);$$

$$Q_{xy}' = \Gamma_{xy}' + 2\Lambda_{xy}^0 + 2 \left(\frac{\partial G_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + G_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right);$$

$$\Gamma_{yx}'' = \frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial x^2} \Gamma_{yx}; \Gamma_{xy}'' = \frac{\partial^2 \bar{E}_y}{\partial y^2} \Gamma_{xy}; \Gamma_{yx}' = \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x} \Gamma_{yx}; \Gamma_{xy}' = \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial y} \Gamma_{xy};$$

$$\Gamma_{yx}^0 = \bar{E}_x \Gamma_{yx}; \Gamma_{xy}^0 = \bar{E}_y \Gamma_{xy}; \Gamma_{yx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \Gamma_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (2)$$

$$\Lambda_{yx}' = \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x} \Lambda_{yx}; \Lambda_{xy}' = \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial y} \Lambda_{xy}; \Lambda_{yx}^0 = \bar{E}_x \Lambda_{yx}; \Lambda_{xy}^0 = \bar{E}_y \Lambda_{xy}$$

$$\Lambda_{yx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu_{yx} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial \mu_{yx}}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \Lambda_{xy} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\Omega_{yx}^0 = \bar{E}_x \left(\mu_{yx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial \mu_{yx}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu_{yx}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right);$$

$$\Omega_{xy}^0 = \bar{E}_y \left(\mu_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + 2 \frac{\partial \mu_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu_{xy}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right);$$

$$\Pi = \frac{\partial^2 G_{xy}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial G_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial G_{xy}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + G_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

При виведенні диференційного рівняння згину ортотропної пластинки перемінної товщини зроблено припущення, що така товщина змінюється скрізь поступово, без різких стрибків, тобто $\delta(x, y)$ - рівна функція координат.

Фактично, підстановка позначень (2) у (1) дає достатньо громіздке диференційне рівняння згину жорсткої ортотропної пластини змінної товщини

відносно невідомої функції прогину $w(x, y)$. Загальний порядок такого рівняння у частинних похідних – четвертий (старші похідні по x та y - $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ та $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ - входять до складу функцій Ω_{xy}^0 та Ω_{yx}^0). Це рівняння зі змінними коефіцієнтами, оскільки $\delta = \delta(x, y)$ - задана змінна функція. Таке рівняння при відомих граничних умовах можна використати для дослідження стійкості пластин у лінійній теорії стійкості, а також для розрахунку на згин жорсткої ортотропної пластини змінної товщини, нехтуючи впливом ланцюгових зусиль ($T_x = T_y = S = 0$).

В якості прикладу розглянуто процедуру визначення критичного навантаження клиноподібної пластини, стисненої вздовж вісі x погонним рівномірним зусиллям $T_1 = const$, товщина якої змінюється за законом $\delta(x) = \delta_0 + \frac{\delta_{max} - \delta_0}{a} x$ $\delta(x) = \delta_0 + \frac{\delta_{max} - \delta_0}{a} x$.

Рівняння стійкості (1) спрощується

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^3(x)}{12} \left[\overline{E}_x \left(\mu_{yx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \overline{E}_y \left(\mu_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 4G_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \\ & + \frac{\delta^2(x)}{2} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x} \left[\overline{E}_x \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + 2G_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \delta(x) \left(\frac{\partial \delta(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\overline{E}_x}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \quad (3) \\ & = -T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Для шарнірно опертої на кромках прямокутної пластини ненульові рішення рівняння (3) визначаються у вигляді подвійного ряду за синусами [2]:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\pi\xi \sin m\pi\eta \quad (4)$$

Після використання до рівняння (3) процедури Бубнова-Галеркіна отримано систему лінійних однорідних рівнянь. Утримуючи $m = 1$ та $n = 1, 2, \dots, N$ з цієї зрізаної системи визначено числові (для $N = 1, 2, 3$) значення критичної сили T_{1k} для пластин з різним співвідношенням сторін прямокутника $\gamma = \frac{a}{b}$ ($\gamma = 1; 1,5; 2; 2,5$).

Висновки:

1. Отримано лінійну систему диференціальних рівнянь згину (та стійкості) жорстких прямокутних пластин змінної товщини $\delta(x, y)$ зі змінними коефіцієнтами.
2. Для випадку клиноподібної пластини у напрямку вісі x отримано числові значення для критичних зусиль при стисненні шарнірно опертої пластини вздовж вісі x для пластин з різним співвідношенням сторін γ .
3. Аналіз числових результатів показав, що клиноподібна пластина стиснена вздовж клину втрачає стійкість при навантаженнях менших, ніж еквівалентна за масою пластина сталої товщини. А при стисненні впоперек клину істотної різниці для критичних навантажень не виявлено.

Список літератури. 1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1966. – 984 с. **2. Суслов, В. П.** Строительная механика корабля и основы теории упругости [Текст] : учеб. для вузов / В. П. Суслов, Ю. П. Кочанов, В. Н. Спихтаренко. – Л. : Судостроение, 1972. – 720 с.