

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Миколаївський національний університет

імені В.О. Сухомлинського

В. Д. БОРИСЕНКО, С. А. УСТЕНКО, І. В. УСТЕНКО

**ОСНОВИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
В ІНЖЕНЕРНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ**

Навчальний посібник

Затверджено рішенням вченої ради Миколаївського
національного університету імені В. О. Сухомлинського

УДК 004.942
ББК 32.973.26
Б82

Авторський колектив:

В. Д. Борисенко, д-р техн. наук, професор кафедри комп'ютерної інженерії Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського;

С. А. Устенко, д-р техн. наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського;

І. В. Устенко, канд. техн. наук, доцент кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

Рецензенти:

В. М. Корчинський, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри електронних засобів телекомунікацій Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара;

М. П. Мусієнко, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій і програмних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили;

О. В. Шоман, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут".

Затверджено рішенням вченої ради Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (протокол № 6 від 18 жовтня 2016 р.).

Борисенко В. Д.

Б 82 Основи комп'ютерного моделювання в інженерній діяльності: навчальний посібник / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, І. В. Устенко. – Миколаїв: МНУ, 2016. – 276 с.

У посібнику розглянуті питання використання сучасних інформаційних технологій в комп'ютерному моделюванні різноманітних об'єктів, процесів і явищ. Він призначений для подальшого становлення та удосконалення інформаційної та програмної культури майбутніх фахівців. Опанування студентами основ комп'ютерного моделювання та отримання досвіду їх практичного застосування дозволить їм з більшою ефективністю виконувати реальні проектні задачі.

Для студентів спеціальності 123 "Комп'ютерна інженерія", може бути корисним студентам інших спеціальностей, які цікавляться питаннями комп'ютерного моделювання в своїх предметних галузях.

УДК 004.942
ББК 32.973.26

ISBN 978-617-7424+18-3

© Борисенко В. Д., Устенко С. А.,
Устенко І. В., 2016

ЗМІСТ

ВСТУП	7
1. ПОНЯТТЯ ІНЖЕНЕРНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ	9
1.1. Технічна та інженерна діяльність	9
1.2. Етапи розвитку інженерної діяльності	12
1.3. Диференціація інженерної діяльності	14
1.4. Поняття комп'ютерної інженерії	17
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	19
2. КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ	20
2.1. Модель і моделювання.....	20
2.2. Ознаки класифікації моделей	22
2.3. Класифікація систем	36
2.4. Основні принципи моделювання	37
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	38
3. ПОНЯТТЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ МОДЕЛІ ТА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	39
3.1. Комп'ютерна модель	39
3.2. Види комп'ютерних моделей	41
3.3. Області застосування комп'ютерних моделей	43
3.4. Комп'ютерне моделювання	44
3.5. Програмне забезпечення комп'ютерного моделювання	47
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	53
4. МЕТА ТА ЕТАПИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	54
4.1. Цілі та основні етапи та комп'ютерного моделювання	54
4.2. Вибір вхідних параметрів	58
4.3. Пошук математичного опису моделі.....	60
4.4. Числовий метод дослідження та алгоритм розрахунку.....	63
4.5. Програмна реалізація математичної моделі	67
4.6. Оцінка адекватності та ідентифікація моделі	69
4.7. Програмування, налагодження алгоритму і програми	71
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	74
5. ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА АЛГОРИТМІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНИХ МОДЕЛЕЙ	75
5.1. Формалізація комп'ютерних моделей.....	75

5.2. Штучні формалізовані мови	77
5.3. Аксиоматичний метод.....	79
5.4. Алгоритмізація моделі та її комп'ютерна реалізація	80
5.5. Форми подання моделюючих алгоритмів.....	83
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	84
6. ЧИСЛОВЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	85
6.1. Основні поняття математичного моделювання.....	85
6.2. Аналітичне моделювання	87
6.3. Моделювання числовими методами.....	89
6.4. Розрахунок поля температур в однорідній штабі за явною схемою	93
6.5. Розрахунок поля температур в однорідній штабі за неявною схемою	98
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	104
7. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	105
7.1. Поняття імітаційного моделювання	105
7.2. Переваги та недоліки імітаційного моделювання	107
7.3. Моделюючі алгоритми та принципи їх побудови.....	111
7.4. Методи імітаційного моделювання	113
7.5. Моделювання коливального контуру.....	114
7.6. Алгоритмічні мови моделювання	118
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	120
8. СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	121
8.1. Поняття випадкового процесу та випадкової події	121
8.2. Обчислення площі методом Монте-Карло	124
8.3. Задача Бюффона	126
8.4. Моделювання рівномірно розподіленої випадкової величини.	128
8.5. Моделювання випадкової величини з довільним законом ро- зподілу	132
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	134
9. ФРАКТАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	135
9.1. Історична довідка	135
9.2. Поняття "фрактал"	141
9.3. Класифікація фракталів	142
9.4. Системи ітерованих функцій.....	147
9.5. Алгоритм побудови IFS-фракталів.....	149

<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	151
10. МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ КАТАСТРОФ. МОДЕЛЮВАННЯ ХАО- ТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ	152
10.1. Структурна стійкість і нестійкість функцій	152
10.2. Біфуркації стаціонарних станів	153
10.3. Теорія катастроф	156
10.4. Сім елементарних катастроф по Тому	157
10.5. Запис і класифікація катастроф по Арнольду	164
10.6. Застосування теорії катастроф	165
10.7. Моделювання хаотичних процесів	167
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	170
11. ТЕОРЕТИКО-ІГРОВЕ КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	171
11.1. Теорія ігор	171
11.2. Подання і застосування теорії ігор	175
11.3. Опис і моделювання ігор	176
11.4. Класифікація ігор	177
11.5. Теорія ігор і конфліктні ситуації	181
11.6. Математичний апарат теорії ігор	183
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	184
12. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ	185
12.1. Поняття системи масового обслуговування	185
12.2. Характеристика основних елементів структури масового обслуговування	188
12.3. Задачі теорії масового обслуговування	190
12.4. Класифікація систем масового обслуговування	192
12.5. Характеристики систем масового обслуговування	193
12.6. Дисципліна очікування та пріоритети	196
12.7. Моделювання систем масового обслуговування та метод Монте-Карло	197
12.8. Числове моделювання систем масового обслуговування	198
12.9. Поняття системи масового обслуговування банку	200
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	202
13. МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ	203
13.1. Фізика і моделювання	203
13.2. Детерміновані моделі	204
13.3. Моделювання вільного падіння тіла	206

13.4. Модель руху тіла, кинутого під кутом до горизонту.....	207
13.5. Рівняння математичної фізики	209
13.6. Практичний приклад – розподіл температури в трубі квад- ратного перерізу	211
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	214
14. ОСНОВИ АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ	215
14.1. Поняття проектування та його стадії	215
14.2. Система автоматизованого проектування	219
14.3. Цілі, задачі та принципи створення САПР	220
14.4. Структура САПР.....	222
14.5. Класифікація САПР.....	225
14.6. Класифікація САПР з використанням англійських термінів..	227
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	229
15. НАУКОВА ОРГАНІЗАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.....	230
15.1. Поняття експерименту, спостереження, дослідів	230
15.2. Сутність і мета планування експерименту	231
15.3. Математична модель	232
15.4. Вимоги до відгуків і факторів	237
15.5. Повні факторні плани експерименту.....	238
15.6. Розрахунок оцінок коефіцієнтів регресійного рівняння	241
15.7. Дробові факторні плани експерименту	243
15.8. Плани другого порядку	245
15.9. Рототабельний центральний композиційний план	247
15.10. Складання матриці РЦКП.....	248
15.11. Трирівневі плани Бокса-Бенкіна	249
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	252
16. ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	253
16.1. Мета і задачі геометричного моделювання	253
16.2. Моделювання кривих ліній	257
16.3. Складені криві. Сплайни.....	260
16.4. Моделювання поверхонь	267
<i>Запитання і завдання для самоперевірки</i>	274
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	275

ВСТУП

У сучасних умовах інженерна діяльність тісно пов'язана з використанням обчислювальної техніки. Комп'ютери широко застосовується для виконання розрахунків, автоматизації проектування, організації і планування експериментальних досліджень, для обробки результатів випробування машин, механізмів, апаратів і для багатьох інших цілей. Особливо плідним виявилось застосування комп'ютерів в сфері моделювання різноманітних об'єктів, процесів, явищ, систем.

Комп'ютерне моделювання – це сучасний підхід до розв'язання питань, пов'язаних з моделюванням різноманітних об'єктів, процесів, явищ і складних багаторівневих систем, це також новий інструмент пізнання, нові технології проектування у різних галузях науки і техніки.

Але освоїти моделювання як робочий інструмент і розвивати методологію моделювання можна тільки при повному оволодінні прийомами і технологією практичного вирішення задач моделювання на ЕОМ. У зв'язку з чим інженери будь-якого фаху мають набути вміння і навички вирішення виробничих і наукових задач за допомогою ЕОМ.

З цією метою в навчальні плани всіх інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів введені дисципліни, які забезпечують поглиблене вивчення математики, програмування, обчислювальної техніки, нових інформаційних технологій.

Одним із способів пізнання світу є моделювання. Поняття моделювання досить складне, воно включає в себе величезне розмаїття способів його здійснення: від створення натуральних моделей (зменшених чи збільшених копій реальних об'єктів) до виведення математичних формул.

Удосконалення обчислювальної техніки і широке поширення комп'ютерів відкрило перед моделюванням величезні перспективи для дослідження об'єктів, систем, процесів і явищ навколишнього світу, включаючи людське суспільство, яке стрімко переходить від суспільства постіндустріального до суспільства інформаційного.

Зараз великого значення набуло вивчення та засвоєння сучасних методів використання комп'ютерів для розв'язання різноманітних практичних задач. У першу чергу це відноситься до комп'ютерного моделювання, яке перетворилося в потужний і гнучкий засіб дослідження складних об'єктів, явищ і процесів різної природи.

Навчальна дисципліна "Комп'ютерне моделювання в інженерній діяльності" призначена для формування у студентів знань, вмінь і навичок, необхідних для раціонального використання інформаційних технологій комп'ютерного моделювання різноманітних об'єктів, процесів і явищ; ознайомлення з перспективами розвитку сучасних інформаційних технологій в сфері комп'ютерного моделювання різноманітних інженерних задач; подальшого становлення та удосконалення інформаційної та програмної культури майбутніх фахівців. Опанування студентами основ комп'ютерного моделювання й отримання досвіду їх практичного застосування дозволить з більшою ефективністю виконувати реальні проектні задачі.

Тематика, визначена в назві цього посібника – комп'ютерне моделювання – практично безмежна. Кожному виду моделювання, яке виконується із застосуванням комп'ютерів, можна присвятити окреме видання. Метою ж цього посібника є висвітлення методів комп'ютерного моделювання, прийнятої в цій справі термінології, основним поняттям і визначенням теорії моделювання. Майбутні фахівці мають навчитися виконувати постановку задач, формалізовувати та алгоритмізовувати задачі моделювання в різних галузях науки і техніки. У той же час треба відмітити, що у посібнику немає готових рецептів побудови складних математичних моделей конкретних прикладних проблем, він не є вступом у числові методи, які використовуються в сучасних пакетах моделювання. У посібнику приділено рівно стільки уваги цим питанням, скільки необхідно для розуміння основних проблем, які зустрічаються при моделюванні складних об'єктів. До нього включені ті питання, які визначаються набором компетенцій, що подаються до фахівців з комп'ютерної інженерії.

При роботі над посібником автори спирались на власний досвід моделювання та викладання дисципліни, на оприлюднені видання з тематики посібника, а також перероблених та адаптованих до тематики видання літературних джерел знайдених у мережі Internet, авторство яких встановити майже неможливо. На цій підставі автори посібника вважали за можливе не робити посилання на джерела інформації, які наведені у посібнику.

Автори висловлюють щире подяку рецензентам за уважне прочитання рукопису посібника, зроблені цінні зауваження та пропозиції щодо поліпшення його змісту.

1. ПОНЯТТЯ ІНЖЕНЕРНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

1.1. Технічна та інженерна діяльність

Властивість організмів приходити під впливом зовнішнього середовища в стан діяльності є фундаментальною ознакою для живої матерії, необхідною умовою обміну речовин, а, отже, й самого життя. Діяльність є основною "одиницею" життєвого процесу всіх живих організмів – від найпростіших тварин до людини. Але між діяльністю тварин і людини є істотні відмінності. Діяльність тварин за своїм характером є інстинктивно-біологічною.

На відміну від тварин діяльність людини є свідомою та продуктивною. В процесі своєї діяльності люди пристосовують природу до себе, змінюють її у відповідності зі своїми потребами, які постійно розвиваються. Ці зміни природи відбуваються в процесі основної форми людської діяльності – праці. Праця характеризується певними рисами. Одна з них – це виготовлення та вживання знарядь праці, завдяки яким реалізується опосередковане відношення людей до природи.

Отже, *діяльність* – це форма прояву активності суб'єкта. У першу чергу нас цікавитиме технічна діяльність.

Технічна діяльність – це сукупність дій, які забезпечують реалізацію наукових, виробничих і соціальних задач, що можуть бути розглянуті на двох рівнях:

- 1) теоретичному (як технічна творчість);
- 2) практичному, який починається з інженерних досліджень і проектування, проходить стадію конструювання і завершується створенням промислових зразків.

До поняття "техніка" входять:

- сукупність технічних пристроїв і машин, інструментів, приладів, апаратів (від найпростіших знарядь праці до складних технічних систем);
- сукупність різних видів технічної інженерної діяльності зі створення певних пристроїв, включаючи їх дослідження, проектування, виготовлення й експлуатацію;
- сукупність технічних знань, включаючи науково-технічні й системотехнічні, які розвиваються в системі суспільного виробництва.

Слово "техніка" з грецької мови перекладається як "мистецтво", "майстерність", "вправність". Отже, цей термін служить для позначення скоріше методів і способів праці, технології. В українській мові техніка і технологія є різними поняттями.

Техніка – це, в першу чергу, машини, пристрої, засоби праці для задоволення виробничих потреб суспільства.

Технологія – це сукупність методів застосування техніки та засобів виробництва продукції того чи іншого виду.

Техніка і технологія в поєднанні з технічним знанням (включаючи науково-технічні і системотехнічні знання), яке розвивається в системі суспільної свідомості, формують техносферу цивілізації.

Технічний прогрес вимагає створення нових або модернізації існуючих машин з метою досягнення бажаних результатів, усунення виявлених експлуатаційних недоліків, а у випадку перенасичення ринку збуту машинами попередніх поколінь чи модифікацій – їх ліквідації. Удосконалення техніки при незмінному фізичному принципі можливе шляхом оптимізації параметрів або шляхом переходу до більш раціонального технічного рішення. У випадку ж вичерпання можливостей використаного принципу дії необхідно переходити до іншого, більш досконалого фізичного принципу при кардинально нових технічних рішеннях.

У сучасному суспільстві технічна діяльність дуже різноманітна. Вона має широкий спектр різних реалізацій, пов'язаних зі створенням технічних пристроїв: від науково-технічного дослідження й проектування до їх виготовлення на виробництві та експлуатації, від розробки окремих елементів технічних систем до системного дослідження й проектування.

Нині технічна діяльність спрямована на реалізацію в процесі виробництва інженерних рішень, а діяльність інженерів націлена на проектування, конструювання та ефективне функціонування техніки, вона є важливим видом технічної діяльності.

Інженерна діяльність – це самостійний специфічний вид технічної діяльності всіх наукових і практичних працівників, зайнятих у сфері матеріального виробництва, який виділився на певному етапі розвитку суспільства з технічної діяльності і став основним джерелом технічного прогресу.

Слово інженер походить від латинського слова *ingenium* – хитромудрий, дотепний, винахідливий. Словом "інженер" почали називати творців

деяких військових машин у другому столітті нашої ери, а згодом – творців всяких хитромудрих пристроїв. Зауважимо, що паралельно з'явилося слово машина для позначення підйомного пристрою в древньогрецькому театрі. У сучасному значенні фігура інженера з'являється в 18 столітті з виникненням крупного машинного виробництва.

Діяльність інженера на відміну від діяльності інших верств інтелігенції (педагогів, лікарів, акторів, композиторів тощо) за своєю роллю в суспільному виробництві є продуктивною працею. Інженери безпосередньо беруть участь у створенні внутрішнього національного продукту держави.

Сучасне суспільство дає надзвичайно суперечливу оцінку інженерної діяльності, вбачаючи в ній не тільки джерело життєвих благ, а й соціального зла (наприклад, це ті інженери, які створюють військову техніку). Тому виникає проблема відповідальності інженерної діяльності.

У сучасній своїй сутності інженерна діяльність – це технічне застосування науки, спрямоване на виробництво техніки й задоволення суспільних технічних потреб. У процесі діяльності інженера закони науки зі своєї теоретичної форми трансформуються в технічні принципи, які знаходять своє практичне застосування.

Інженерній діяльності притаманний певний ступінь ризику, який вважається неминучим. З метою забезпечення необхідної надійності створюваних технічних засобів і технологій розробляються методи та засоби подолання цього ризику шляхом встановлення певних параметрів, стандартів і використання статистичного обліку випадків можливих аварій.

Істотні ознаки інженерної діяльності:

1) це діяльність у сфері матеріального виробництва або діяльність, яка спрямована на вирішення питань матеріального виробництва;

2) це діяльність практична, тобто має справу з реально існуючими об'єктами на відміну від теоретичної чи духовної діяльності, де існують уявні, ідеальні об'єкти;

3) ця діяльність розв'язує протиріччя між об'єктом (природою) і суб'єктом (суспільством), є процесом перетворення природного в соціальне, природного в штучне;

4) ця діяльність займає проміжне положення між теорією і практикою (праця інженера є розумовою працею у сфері матеріального виробництва).

1.2. Етапи розвитку інженерної діяльності

Для задоволення духовних, матеріальних та інших потреб людське суспільство здійснює сукупність цілеспрямованих дій, в тому числі й інженерну діяльність. Ці дії ґрунтовані на майстерності, умінні та мистецтві і забезпечують отримання та обробку (або переробку) матеріалів, перетворення їх у придатні для використання вироби. З цією метою, окрім матеріалів, застосовуються енергія й інформація, а також сукупність гуманітарних знань та естетичних понять.

Сучасна людина з раннього віку потрапляє у світ, невід'ємною частиною якого є техніка. Її не дивують такі досягнення людського розуму, як електрика, телебачення, запис звуку і зображення, літальні апарати в повітряному просторі з їх величезною масою і швидкістю переміщення, космічні населені станції та багато чого іншого. Усе це сприймається як звичайне, що завжди існувало, хоча за мірками історії все перелічене з'явилося порівняно недавно. Розвиток науки і техніки відбувається нерівномірно. Кінець XIX ст. та все XX ст. характеризувалися надзвичайно швидкими темпами розвитку. За останні 50 років з'явилися мікроелектроніка, робототехніка, автоматизоване виробництво і методи його автоматизованого проектування, біотехнології, лазери, атомна енергетика, надзвукова реактивна авіація і космічна техніка, спеціальне матеріалознавство, комп'ютери, комунікаційні й обчислювальні мережі і т. д. З розвитком техносфери різко зросла роль фундаментальних наук, на основі яких здійснюється подальше удосконалення технічних систем.

Основою матеріального життя людини є виробництво матеріальних благ, яке включає цілеспрямовану працю (починаючи від примітивної в початковий період розвитку до висококваліфікованої в теперішній час), засоби та предмети праці. Праця людини спрямована на створення цінностей для задоволення власних потреб. При цьому витрачається розумова й фізична енергія, використовуються матеріали, об'єкти та явища природи. Прагнення до забезпечення ефективності праці проявлялося у використанні знарядь праці. І якщо на початковому етапі застосовувалися природні знаряддя, то наступний важливий етап характеризується "цільовим" виготовленням знарядь праці, що є відмінною рисою людства. Саме в цьому періоді починається інтелектуальна інженерна діяльність людини, в результаті якої техніка пройшла еволюцію від кам'яної сокири і кістяних но-

жів до складних автоматизованих пристроїв і машин – авіації і металорізальних обробних центрів, автомобілів і комп'ютерів, ядерних реакторів і космічної техніки.

Історія інженерної діяльності тісно пов'язана з історією цивілізації та закономірностями розвитку техніки. Нині можна умовно виділити п'ять етапів розвитку інженерної діяльності.

Перший (праінженерний) етап був етапом становлення інженерної діяльності в епоху рабовласництва, пов'язаний, головним чином, з будівництвом і архітектурою.

Другий (передінженерний) етап інженерної діяльності почався в епоху Відродження і розвивався в умовах феодалізму й зародження машинного виробництва. Основною сферою інженерної діяльності у ті часи залишалися будівництво, а також створення військових машин і фортифікаційних споруд. Найвидатнішим інженером того часу був Леонардо да Вінчі – художник, архітектор, механік, експериментатор і винахідник, геніальність якого була підкріплена широкими технічними знаннями. До цього часу інженер і архітектор практично не розрізнялися – розумілося, що це той, хто керує створенням складних штучних споруд.



Леонардо да Вінчі

Третій етап становлення інженерної діяльності мав місце в епоху промислового перевороту та поширення робочих машин на базі парового двигуна.

Четвертий етап являв собою вплив інженерної діяльності на розвиток машин і технічних наук в умовах монополістичного капіталізму. У XIX ст. з розвитком науки і машинного виробництва з'явилися соціальні інститути технічних наук, була науково обґрунтована технічна діяльність, яка з цього часу вважається інженерною. Ця подія стала ключовою для формування поняття "інженер" в сучасному значенні. З виникненням інженерів за професією, як людей з науково-методичною підготовкою та технічними навичками, реалізується ідея єдності науки і практичних мистецтв, яка раніше розглядалася лише як ідеал.

П'ятий етап – формування сучасного інженера в епоху науково-технічної революції. У XX ст. інженерія розділилася на величезну кіль-

кість галузей і підгалузей: фізична (електрична, механічна, радіо і т. п.), хімічна, біохімічна інженерія, інформаційна та обчислювальна техніка є лише деякими її розділами. Але для всіх них характерно одне: інженер – це не той, хто робить штучний об'єкт, а той, хто керує процесами його створення, планує або проектує складну технічну систему.

Сучасний інженер – це комплексний технічний спеціаліст, який творчо вирішує фундаментальні й прикладні професійні задачі щодо управління та оптимізації виробництва у всіх його сферах.

З розвитком масового машинного виробництва в науці формується особлива сфера технічних наук, спеціально орієнтованих на вирішення інженерних задач у різних областях інженерної практики. У даний час відбувається диференціація інженерної діяльності по окремих вузьких напрямках та інтеграція із суміжними галузями, що призводить до появи якісно нових напрямів інженерної сфери.

На перших етапах свого професійного розвитку інженерна діяльність була орієнтована на застосування знань природничих наук, а також математики і включала в себе: винахідництво, конструювання дослідного зразка, розробку технології виготовлення нової технічної системи.

Нинішній етап розвитку інженерної діяльності характеризується системним підходом до вирішення складних науково-технічних задач, зверненням до всього комплексу природничих і технічних дисциплін.

Зараз багато технічних вузів готує цілу армію інженерів різного профілю для самих різних галузей народного господарства.

1.3. Диференціація інженерної діяльності

Інженерна діяльність у сучасному її розумінні виникає, коли розвиток техніки як способу діяльності вже не міг ґрунтуватися тільки на виробничих навичках, традиціях, умінні працівників виробництва, а вимагало цілеспрямованого використання наукових знань. Разом з ускладненням виробничих процесів інженерна діяльність диференціювалась на:

- інженерно-дослідну;
- інженерно-конструкторську;
- інженерно-технологічну.

Якщо на перших етапах свого розвитку інженерна діяльність була орієнтована на пряме використання природничонаукових знань, а в її здійс-

сненні брали участь багато вчених-натуралістів, то починаючи з кінця XVIII століття становище змінюється.

По-перше, розчленовується наукова діяльність, крім вчених-теоретиків і вчених-експериментаторів з'являються фахівці в галузі технічних наук і прикладних досліджень, задачами яких є обслуговування інженерної діяльності. Їх поява пов'язана насамперед з необхідністю спеціального навчання інженерів і з виникненням вищих технічних шкіл.

По-друге, відбувається диференціація самої інженерної діяльності, в якій відокремлюються спочатку винахід і конструювання, а потім і інженерне проектування.

Інженерну діяльність, яка здійснювалася на перших етапах свого розвитку, сьогодні можна було б назвати "винахідницькою". У цій діяльності відповідно до технічних вимог, які подаються до роботи механізму, спочатку встановлювався принциповий зв'язок між певним природним процесом, описаним в природничій науці (наприклад, рух маятника по циклоїді), і поданими вимогами. Потім цей зв'язок відтворювався (реалізовувався) за допомогою наявних технічних засобів у вигляді конкретної конструкції. Іншими словами, інженер як би винаходив новий принцип дії майбутнього інженерного об'єкта. При цьому на перших етапах розвитку інженерної діяльності він не тільки аналізував можливість технічної реалізації того чи іншого закону природи, а й розраховував у всіх деталях відповідну конструкцію інженерного об'єкта, а потім виготовляв і навіть випробував її.

Проте вже на початку XIX ст. конструювання інженерних об'єктів набуває вигляду самостійної діяльності. Конструювання, як правило, починається з того моменту, коли закінчується винахідництво, тобто коли винахід вже відбувся і інженер-винахідник продемонстрував дослідний зразок машини або механізму. Він свою задачу вирішив, але замовник залишився незадоволеним: йому потрібен не стільки цей одиничний, дослідний екземпляр, скільки його варіації – подібні йому екземпляри з іншими параметрами й характеристиками.

Отже, для цілей масового виробництва і варіювання технічних характеристик необхідні додаткові інженерні розрахунки та врахування ряду нових вимог (простота й економічність виготовлення, зручність використання, дотримання певних габаритів і можливість застосування стандартних або вже наявних конструктивних елементів).

На підставі дослідного, одиничного зразка, в якому інженер-винахідник установив принциповий зв'язок між природними процесами та їх технічним втіленням, між призначенням інженерного об'єкта та його конструкцією для класу подібних об'єктів, конструктор розраховує конкретні конструктивно-технічні характеристики, які враховують специфічні умови його виготовлення на даному виробництві.

Деякі параметри інженерного об'єкта конструктору відомі (вони відповідають вихідним даним, крім того, ряд умов і співвідношень отримані від винахідника), інші ж він повинен визначити сам. Розрахунок невідомих параметрів інженерного об'єкта передбачає не тільки знання методів розрахунку, вихідних теоретичних відносин (формул) і емпіричних констант, які застосовуються у відповідній технічній науці, а й особливе зображення конструйованого об'єкта на робочих, складальних і монтажних кресленнях, за якими ведеться виготовлення цього об'єкта на виробництві.

Процеси формування теоретичних положень для розрахунків і розвиток засобів зображення сприяють формуванню, з одного боку, технічних наук, які зробили величезний вплив на інженерну діяльність, а з іншого – ведуть до виділення з винахідницької діяльності і конструювання специфічного виду технічної діяльності – інженерного проектування.

Однак вже до початку XX сторіччя виготовлення інженерних об'єктів стає масовою індустріальною діяльністю і тому в стислий термін набуває ряд нових рис. Конструктор вже не може один контролювати та організовувати виготовлення машин і механізмів, він передоручає це спеціальним інженерам, майстрам, робітникам. Він також передоручає іншим фахівцям (креслярам) виготовлення креслень і схем, залишаючи за собою лише розробку вихідної ідеї і розрахунки, тобто найбільш творчий етап роботи.

У зв'язку з цим відбувається диференціація креслень: одні з них тепер використовуються спеціально для виготовлення та адресуються інженеру, майстру та робочому (так звані робочі креслення), а інші – для розробки самих робочих креслень і адресуються креслярам (ескізи, проектні креслення). Виникла також необхідність готувати фахівців з виготовлення креслень і схем, що спричинило за собою розвиток і усвідомлення нової діяльності, яка сформувалася й отримала назву "проектування".

Праця проектувальника завершує період інженерної підготовки виробництва; технічна ідея набуває свою остаточну форму у вигляді креслень робочого проекту.

Інженерно-технологічна діяльність пов'язана з виконанням наступної частини інженерної задачі: як виготовити те, що спроектовано? Інженер-технолог повинен з'єднати технічні процеси з трудовими і зробити це таким чином, щоб у результаті взаємодії людей і техніки витрати часу й матеріалів були мінімальні, а технічна система працювала продуктивно. Успіх чи неуспіх технолога визначає цінність усієї інженерної праці, витраченої перед цим на створення технічного об'єкта.

Узагалі, інженерно-технологічна діяльність – це цілеспрямована, організована й упорядкована інженерна діяльність, яка включає певний спосіб, етапи, послідовність дій і операцій, пов'язаних з процесом виготовлення виробів.

Диференціація інженерної діяльності призводить до того, що вона розпадається на ряд видів діяльностей, і насамперед на винахід, проектування і конструювання. У сферу інженерної діяльності потрапляє, крім того, організація виготовлення та впровадження інженерного об'єкта, його експлуатація (операторська діяльність), а також оцінка його функціонування.

Однією з перших областей, в яких найбільш рельєфно проявилися процеси диференціації, була радіоелектроніка. У період після Другої світової війни відбулося значне ускладнення інженерної діяльності в цій області, зріс її зв'язок з різними суміжними галузями техніки. У створенні радіоапаратури почали приймати участь об'єднання колективів, що включають, крім фахівців з радіоелектроніки, металургів, хіміків, математиків, фізиків. У той же час відбувалося подальше відділення інженерних робіт від допоміжних, розмежування роботи проектувальників, конструкторів і фахівців з технології та виробництва радіоапаратури.

Таким чином, інженерна діяльність утворює замкнутий цикл, до якого включені всі види діяльності, які взаємно забезпечують один одного в процесі досягнення єдиної мети – створення інженерного об'єкта.

1.4. Поняття комп'ютерної інженерії

У зв'язку з бурхливим розвитком комп'ютерної техніки з'явилась нова сфера діяльності інженерів – це комп'ютерна інженерія, яка займається комп'ютерними системами, які стосуються як фізичних компонентів цих систем (*hardware*), так і програмного забезпечення (*software*). Комп'ютерні

інженери працюють з апаратними і програмними аспектами проектування та розробки комп'ютерних систем і мереж. Не рідко вони працюють як єдиний колектив, який розробляє нові обчислювальні пристрої або комп'ютерне обладнання, системи і програмне забезпечення.

Робота комп'ютерного інженера зосереджена на проектуванні, виробництві, плануванні, експлуатації, тестуванні комп'ютерів, створенні комп'ютерних мереж, контролюванні виготовлення комп'ютерної та іншої автоматизованої техніки.

Комп'ютерні інженери – це фахівці з апаратно-програмних засобів обчислювальної техніки, комп'ютерних мереж і технологій. Вони, як правило, мають професійну підготовку в області електротехніки, програмного та апаратно-програмного забезпечення, технічних засобів захисту інформації, систем діагностики та тестування. Комп'ютерні інженери займаються багатьма аспектами обчислень: від проектування окремих мікропроцесорів, чипів, комп'ютерів до суперкомп'ютерів. Зазвичай задачі, пов'язані з комп'ютерною інженерією, включають написання програмного і мікропрограмного забезпечення для вбудованих мікроконтролерів, проектування надвеликих інтегральних схем, аналогових датчиків, плат змішаних сигналів, а також розробку операційних систем.

Фахівці з комп'ютерної інженерії мають навички в сфері програмування, але вони більше пов'язані з аналізом і рішенням задач системного програмування, створенням різноманітних додатків, спеціалізованих програмних утиліт, ніж з безпосереднім написанням прикладних програм.

У той же час розробники програмного забезпечення часто залучаються до проектування і розробки програмних систем для автоматизації процесів виробництва, бізнесу та управління. Вони можуть приймати участь у дослідженні, розробці та тестуванні програмного забезпечення операційної системи, тих чи інших компіляторів, пов'язаних з перетворенням програм, написаних мовою високого рівня, в команди, зрозумілі комп'ютеру, з метою підвищення швидкодії програмного забезпечення особливо того, яке орієнтоване на мережеві технології.

Комп'ютерна інженерія має важливий вплив на моделювання, яке є одним із способів пізнання світу. Поняття моделювання досить складне, воно включає в себе величезну різноманітність способів моделювання: від створення натуральних моделей (зменшених чи збільшених копій реальних об'єктів) до виведення складних математичних формул.

Удосконалення обчислювальної техніки і широке поширення персональних комп'ютерів відкрило перед моделюванням величезні перспективи для дослідження процесів і явищ навколишнього світу, включаючи сюди і людське суспільство. Важливу роль у цій справі відіграють комп'ютерні інженери.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. У чому різниця між технічною та інженерною діяльністю?
2. Перелічите істотні ознаки інженерної діяльності.
3. Розтлумачте поняття "техніка".
4. Назвіть етапи розвитку інженерної діяльності.
5. Що розуміють під диференціацією інженерної діяльності?
6. На чому зосереджена робота комп'ютерного інженера?



2. КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ

2.1. Модель і моделювання

Слово "модель" походить від латинського слова "*modulus*" та означає такі поняття як "міра", "зразок". Його первинне значення було пов'язане з будівельним мистецтвом, і майже в усіх європейських мовах воно вживалося для позначення способу або речі, подібній в якомусь відношенні з іншою річчю. Наприклад, перед будівництвом будівлі, споруди робили їх зменшену копію для обговорення, поліпшення, затвердження проекту.

Метод дослідження, що базується на розробці та використанні моделей, називається *моделюванням*. Метою моделювання є:

1. Зрозуміти сутність досліджуваного об'єкта.
2. Навчитися керувати об'єктом і визначати найкращі способи управління.
3. Прогнозувати прямі чи непрямі наслідки впливу об'єкта дослідження.
4. Розв'язувати прикладні задачі.

Іншими словами, моделювання – це вивчення об'єкта шляхом побудови та дослідження його моделі, що здійснюється з визначеною метою і полягає у заміні експерименту на оригіналі експериментом на моделі. Отже, *модель* – це об'єкт-замінник деякого об'єкта-оригіналу, який може забезпечити вивчення заданих властивостей оригіналу.

Подібність між об'єктом, що моделюється, і моделлю може бути фізичною, структурною, функціональною, динамічною, імовірнісною та геометричною.

Моделювання як метод наукового пізнання виникло у зв'язку з необхідністю розв'язування задач, які з тих чи інших причин не можуть бути розв'язані безпосередньо. Вони виникають у випадках, коли: об'єкт недосяжний за своєю природою; об'єкт ще не існує і потрібно обрати кращий варіант його створення; дослідження реального об'єкта вимагає багато часу, економічно не вигідне та ін.

Історично першими моделями, які заміщали реальні об'єкти, ймовірно, були мовні знаки. Вони виникли в ході розвитку людства і поступово перетворилися в розмовну мову. Отже, слово було першою моделлю реального об'єкта (явища).

Перші документально зареєстровані наскальні малюнки (петрогліфи) були графічними моделями, які зображували побутові сцени, тварин і сцени полювання. Вік цих малюнків оцінюється величиною 200 тисяч років.

Наступним етапом розвитку моделювання можна вважати виникнення числових знаків. Відомості про результати рахунків спочатку зберігалися у вигляді зарубок. Поступове вдосконалення цього методу призвело до зображення чисел у вигляді системи знаків. Можна припустити, що саме зарубки були прототипом римських цифр.

Моделі є певним умовним образом об'єкта дослідження. Характерною рисою моделей вважають їх спрощеність відносно оригіналу або реальної життєвої ситуації, яку моделюють.

Ознаки моделі:

1. Модель не може існувати ізольовано, оскільки вона завжди пов'язана з оригіналом, тобто тією матеріальною або ідеальною системою, яку вона заміщує в процесі пізнання.

2. Модель повинна бути не тільки схожа з оригіналом, але й відмінна від нього, причому модель відображає ті властивості та відношення оригіналу, які суттєві для того, хто її застосовує.

3. Модель обов'язково має цільове призначення.

Моделювання в наукових дослідженнях почало застосовуватися ще в глибоку давнину і поступово захоплювало все нові області наукових знань: технічне конструювання, будівництво та архітектуру, астрономію, фізику, хімію, біологію тощо. Значних успіхів і визнання практично у всіх галузях сучасної науки метод моделювання досяг у XX столітті. Однак методологія моделювання довгий час розвивалася окремими науками незалежно одна від одної. Були відсутніми єдина система понять, єдина термінологія. Лише поступово почала усвідомлюватися роль моделювання як універсального методу наукового пізнання.

Термін "модель" широко використовується в різних сферах людської діяльності і має багато смислових значень.

З появою і розвитком інформаційних технологій можна в дещо іншому сенсі трактувати поняття "модель". Отже, модель – це матеріальний або теоретично сконструйований об'єкт, або інакше інформаційний об'єкт, який в процесі дослідження заміщає об'єкт-оригінал, якому притаманні його істотні інформаційні властивості (якісно-логічні та кількісно-математичні). Отже, вивчення моделі дає нові знання про об'єкт-оригінал. По суті модель

є видом інформаційної системи, яка копіює цільові системи (інформаційні, енергетичні, речові), призначеної для вивчення властивостей об'єктів-оригіналів. За формою модель може бути відтворена на будь-якому фізичному носії: матеріальному виробі, комп'ютерній програмі, мозку людини.

Моделювання – процес побудови, вивчення й застосування моделей. Воно тісно пов'язане з такими категоріями, як абстракція, аналогія, гіпотеза та ін. Процес моделювання обов'язково включає й побудову абстракцій, і умовиводи за аналогією, і конструювання наукових гіпотез. Головна особливість моделювання полягає в тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єктів-замінників.

Модель виступає як своєрідний інструмент пізнання, який дослідник ставить між собою та об'єктом, і за допомогою якого вивчає об'єкт, що його цікавить. Саме ця особливість методу моделювання визначає специфічні форми використання абстракцій, аналогій, гіпотез і методів пізнання.

У самому загальному випадку при побудові моделі дослідник відкидає ті характеристики, параметри об'єкта-оригінала, які несуттєві для вивчення об'єкта. Вибір характеристик об'єкта-оригінала, які при цьому зберігаються і входять у модель, визначається цілями моделювання.

Основна вимога до моделей – це їх адекватність реальним процесам або об'єктам, які заміщає модель.

Практично у всіх науках про природу, живу та неживу, про суспільство, побудова та використання моделей є потужним знаряддям пізнання. Реальні об'єкти і процеси бувають настільки багатограними і складними, що кращим (а іноді і єдиним) способом їх вивчення часто є побудова та дослідження моделі, яка відображає лише деяку грань реальності і тому багаторазово є більш простою, ніж ця реальність. Багатовіковий досвід розвитку науки довів на практиці плідність такого підходу. Більш конкретно, необхідність використання методу моделювання визначається тим, що багато об'єктів (або проблеми, які стосуються цих об'єктів) безпосередньо досліджувати або взагалі неможливо, або ж це дослідження вимагає занадто багато часу і коштів.

2.2. Ознаки класифікації моделей

Ще раз повернемося до понять моделювання та модель. Моделювання – це метод, який ґрунтується на використанні моделі як засобу дослідження об'єктів, процесів і явищ. Під моделями розуміють системи, що

замінюють об'єкт пізнання і служать джерелом інформації стосовно нього. Моделі – це такі аналоги, подібність яких до оригіналу суттєва, а розбіжність – несуттєва. У той же час моделі мають адекватно відображати оригінал принаймні з тих сторін, які цікавлять дослідника.

Моделювання може охоплювати найрізноманітніші галузі життєдіяльності людини, будь-які явища природи, процеси в фізиці, хімії, біології, соціальній сфері, а також явища і процеси, які важко описати та уявити через те, що з ними ніколи не мали справи, а тільки вважали, що вони можуть існувати.

Вище вказувалося, що моделі є певним умовним образом об'єкта дослідження. Характерною рисою моделей вважають їх спрощеність відносно оригіналу або реальної життєвої ситуації, яку моделюють.

Перш ніж приступити до класифікації моделей визначимося з тим, що розуміється під класифікацією. Класифікація характеризується використанням методом класифікації, ознаками класифікації, послідовністю та кількістю рівнів класифікації, кількістю угруповань. Це також сукупність методів і правил розподілу множини об'єктів на підмножину відповідно до ознак схожості або несхожості. Об'єктом класифікації виступає елемент класифікаційної множини.

З чого починається класифікація моделей? Це поділ розмаїття моделей на "родинні" групи, які мають одну або кілька загальних ознак. При цьому важливо насамперед правильно виділити якусь єдину ознаку (параметр), а потім об'єднати ті об'єкти, в яких він збігається.

Класифікація моделей дуже складна та неоднозначна. Створити вичерпну класифікацію моделей досить складно, бо сам процес моделювання має творчий та індивідуальний характер, тому розглянемо найуживаніші визначення моделей, оскільки до класифікації моделей можна підходити з різних позицій, поклавши в основу класифікації різні принципи та ознаки.

Класифікувати моделі можна за наступними ознаками:

- за областю використання;
- за галузями наук;
- за вживаним логіко-математичним апаратом;
- за ступенем визначеності;
- за областю зміни параметрів і змінних моделей;
- за засобами опису та оцінювання;

- за фактором часу;
- за формою подання.

У більш наочному вигляді класифікацію моделей можна побачити на рис. 2.1.

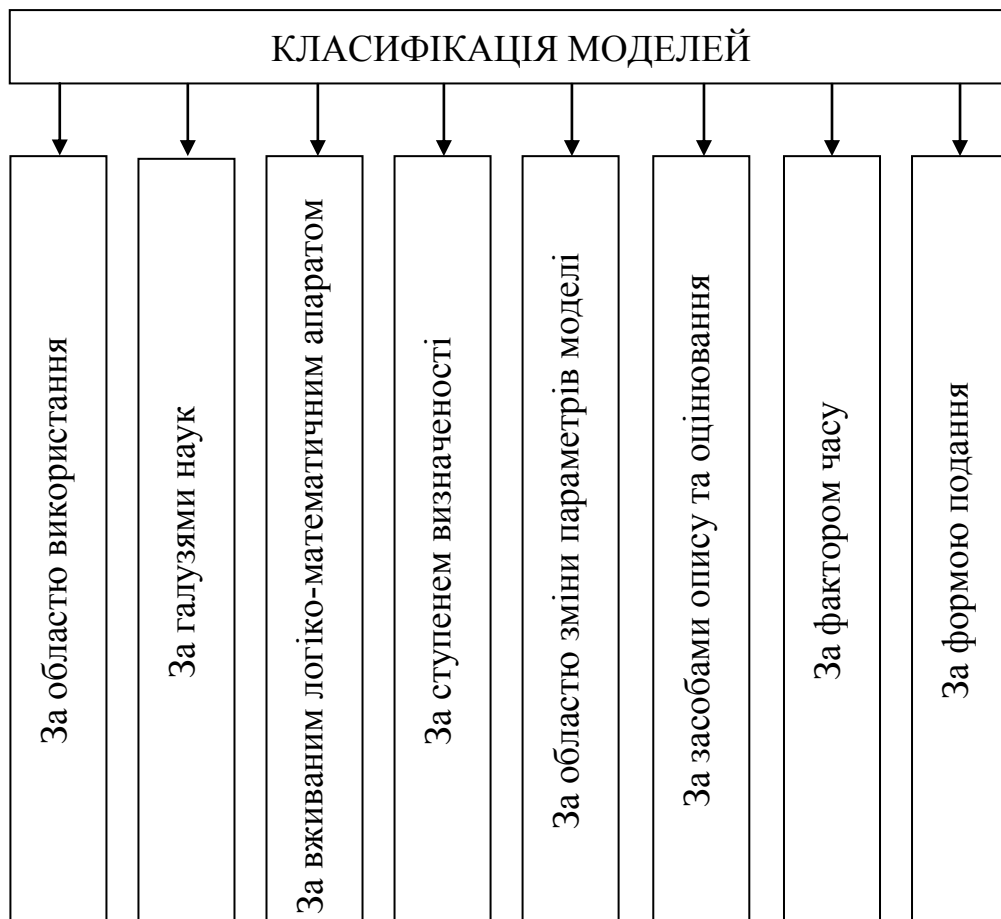


Рисунок 2.1 – Приклад класифікації моделей

Незалежно від того, за якою ознакою класифікована модель, їх розділяють на дві групи: активні та пасивні.

Активні моделі взаємодіють з користувачем; можуть не лише, як пасивні, видавати відповіді на питання користувача, коли той про це робить запит, але й самі активують діалог, змінюють його лінію, мають власні цілі. Все це відбувається за рахунок того, що активні моделі можуть самі змінюватись.

Пасивні моделі – це моделі, яким не притаманна взаємодія з користувачем. Ці моделі не мають можливості змінюватися.

З розвитком наукових досліджень ускладнюється й проблема класифікації моделей, що використовуються. Разом із виникненням нових типів моделей (особливо змішаних типів) і нових ознак їх класифікації здійсню-

ється процес інтеграції моделей різних типів у більш складні модельні конструкції.

Класифікація моделей за областю використання. Розглядаючи моделі з позиції того, для чого вони створені та з якою метою використовуються, можна застосовувати класифікацію, зображену на рис. 2.2.

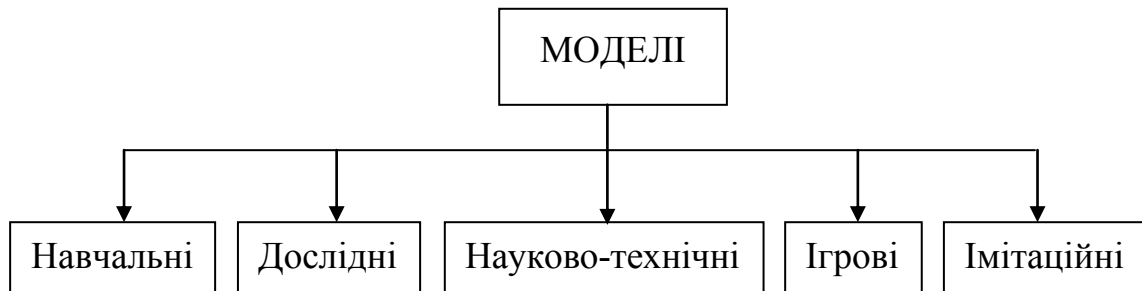


Рисунок 2.2 – Класифікація моделей за областю використання

Навчальні моделі – використовуються при навчанні. Це різні посібники, тренажери, навчальні програми. Навчальні моделі належать до логіко-семіотичних моделей, які конструюються зі спеціальних знаків, символів і структурних схем.

Дослідні моделі – це зменшені або збільшені копії проєктованого об'єкта. Їх називають також натурними і використовують для дослідження об'єкта та прогнозування його майбутніх характеристик. Наприклад, модель корабля випробовується в басейні для визначення стійкості судна при качці, а зменшена копія автомобіля "продувається" в аеродинамічній трубі для вивчення обтічності його кузова. На моделі перевіряється кожен елемент конструкції будівлі, а модель гідроелектростанції ще при розробці проєкту допомагає вирішити гідротехнічні, екологічні та багато інших проблем.

Науково-технічні моделі – створюються для дослідження процесів і явищ. До них можна віднести, наприклад, синхрофазотрон – прискорювач елементарних частинок, стенд для перевірки автомобілів тощо.

Ігрові моделі – це військові, економічні, спортивні, ділові ігри. Вони нібито репетирують поведінку об'єкта в різних ситуаціях, програючи їх з урахуванням можливої реакції з боку конкурента, союзника або супротивника. Це, в якійсь мірі, репетиція поведінки об'єкта в різних умовах.

Ігрові моделі можуть мати відношення не тільки до дитячих ігор (у тому числі і до комп'ютерних), але й до речей вельми серйозних. Наприклад, полководець перед битвою в умовах наявності неповної інформації про

військо противника, що протистоїть його армії, повинен розробити план, в якому порядку вводити в бій ті чи інші частини тощо, враховуючи можливу реакцію супротивника. У сучасній математиці є спеціальний розділ – теорія ігор, який вивчає методи прийняття рішень в умовах неповної інформації.

Імітаційні моделі – це відображення процесу функціонування системи в часі шляхом моделювання елементарних явищ, це також відображення в системі реальності в тій чи іншій мірі (це метод проб і помилок). Вони дозволяють врахувати такі різноманітні властивості елементів системи, як неперервність і дискретність, детермінізм і стохастичність, лінійність і нелінійність. Імітаційне моделювання зводиться до проведення певної кількості обчислювальних експериментів (розрахунків) на ЕОМ шляхом багаторазового "прогону" (запуску на розрахунок) складеної програми для сукупності вихідних даних, що імітують події, які можуть відбутися, наприклад, в системі масового обслуговування. Вихідні дані при імітаційному моделюванні змінюються за різними випадковими законами. Підсумки моделювання отримують шляхом статистичної обробки їх результатів (виконують розрахунок математичного очікування, дисперсії, ймовірностей і т. п.).

Отже, при дослідженні складних систем саме імітаційне моделювання в багатьох випадках є єдиним практичним методом отримання інформації про поведінку системи.

Класифікація моделей за галузями наук. Класифікація моделей за галузями наук розуміється як класифікація за сферами діяльності людини. У зв'язку з цим моделі можуть бути математичними, фізичними, біологічними, соціологічними, економічними, історичними тощо. Різні науки досліджують об'єкти і процеси під різними кутами зору і будують відповідні типи моделей. Головною вимогою при цьому є адекватне відображення найбільш істотних сторін досліджуваного об'єкта або явища з точністю, яка необхідна для практичних потреб даної галузі наук. Так, у фізиці вивчаються процеси взаємодії та зміни об'єктів, в хімії – їх хімічний склад, в біології – будова і поведінка живих організмів і т. д.

Класифікація моделей за вживаним логіко-математичним апаратом. Поняття "логіка" походить від грецького слова *logos* (логос), що означає "слово", "поняття", "смысл". З наукової точки зору під логікою розуміють науку про способи доведень й спростувань. Математична логіка, яку ще називають символічною або теоретичною логікою, вийшла із логіки

традиційної. Але математика суттєво розширила можливості традиційної логіки. З одного боку, логіко-математичний апарат базується на математичних методах для вивчення загальних структур (форм) правильного мислення і тим самим відноситься до розділу математики, з іншого – він зробив предметом свого вивчення процес доведення математичних теорем, а також безпосереднє вивчення самих математичних теорем. Логіко-математичний апарат, будучи більш загальним і більш абстрактним, ніж апарат традиційної формальної логіки, є більш конкретним, дає можливість розв'язувати велику кількість конкретних задач, нерозв'язних засобами традиційної формальної логіки.

Логіко-математичне моделювання використовує для своєї побудови і для вивчення об'єкта апарат логіки, математики та обчислювальної техніки. Розрізняють:

- моделі, засновані на використанні логік: формальної, математичної, булевої, модальної, нечіткої. Це моделі, в яких подані різні варіанти вибору дій на основі умовиводів та аналізу умов;

- моделі засновані на використанні числових математичних методів: диференціальних рівнянь; стохастичних методів; дискретних алгебраїчних перетворень і т. д.

Роль логіко-математичного апарату при цьому полягає в тому, що цей апарат: а) є засобом доказового вирішення поставленого завдання; б) надає змісту дослідження абстрактний характер; в) забезпечує моделі простоту та конкретність її будови і зв'язків на основі поєднання кількісного та якісного показників.

Класифікація моделей за ступенем визначеності. За цією ознакою моделі класифікуються як детерміновані, стохастичні та з невизначеністю (рис. 2.3).

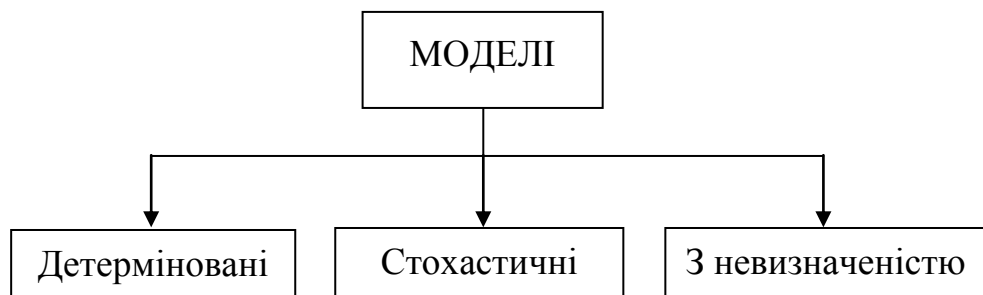


Рисунок 2.3 – Класифікація моделей за ступенем визначеності

Детерміновані моделі – це моделі, які при певних конкретних зна-

ченнях вхідних змінних на виході забезпечують лише один результат. У детермінованих моделях вхідні параметри піддаються вимірюванню однозначно і з будь-яким ступенем точності, тобто є детермінованими величинами. Відповідно, процес еволюції такої системи детермінований.

Стохастичні моделі – це моделі, в яких змінні, параметри, умови функціонування та характеристики стану системи представляються випадковими величинами та пов'язані стохастичними (випадковими) залежностями. У зв'язку з цим характеристики стану та реакції в моделі визначаються законами розподілу ймовірностей їх виникнення. У процесі побудови стохастичних моделей для отримання характеристик моделі та опрацювання результатів моделювання широко використовуються методи регресійного, кореляційного та факторного аналізу.

У моделях з невизначеністю розподіл ймовірностей певних параметрів може або взагалі не існувати, або ж бути невідомим.

Класифікація моделей за областю зміни параметрів. Унаочнення класифікації моделей за областю зміни параметрів наведено на рис. 2.4. За цією ознакою моделі підрозділяються на: дискретні, неперервні та дискретно-неперервні.

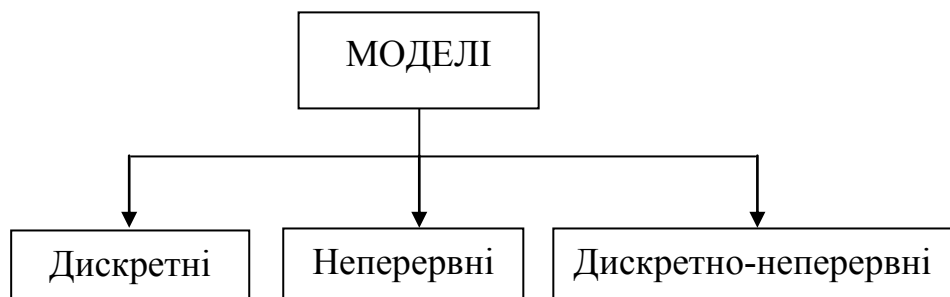


Рисунок 2.4 – Класифікація моделей за областю зміни параметрів

Дискретні – це моделі, для яких характерним є те, що множини припустимих значень параметрів і змінних у них є дискретними. Дискретна модель може відображати як дискретні, так і неперервні системи, які в цьому випадку представляються в дискретному вигляді шляхом введення різноманітного типу шкал, бальних оцінок та ін.

Неперервні – це моделі, в яких всі параметри та змінні мають неперервний характер. Типовий представник моделей такого виду – системи диференціальних рівнянь.

Дискретно-неперервні – це моделі, в яких параметри та змінні можуть бути як дискретними, так і неперервними.

Класифікація комп'ютерних моделей за типом математичної схеми. Класифікація комп'ютерних моделей за типом математичної схеми наведена на рис. 2.5.

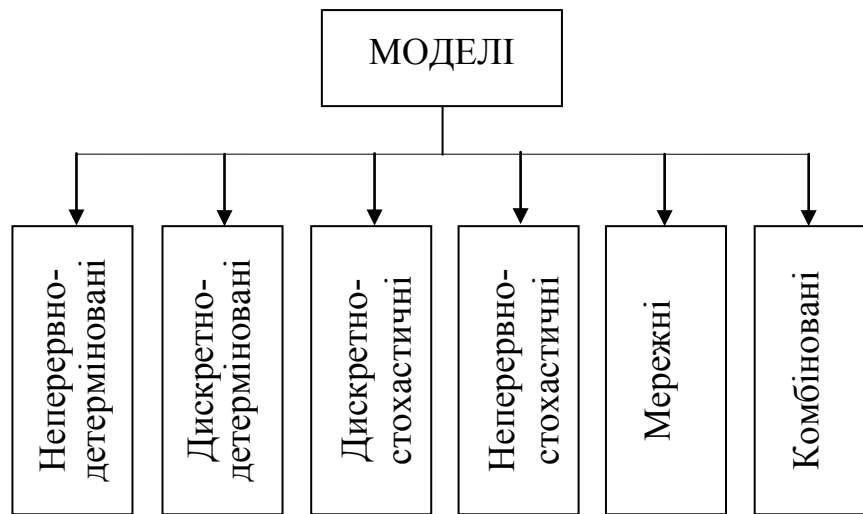


Рисунок 2.5 – Класифікація моделей за типом математичної схеми

Неперервно-детерміновані – це моделі, які використовуються для моделювання динамічних систем і припускають розв’язання системи диференціальних рівнянь. Їх часто підрозділяють на моделі з зосередженими параметрами і моделі з розподіленими параметрами. Моделі з зосередженими параметрами описуються за допомогою скінченної кількості звичайних диференціальних рівнянь для залежних від часу змінних. Простір станів має тут скінченну розмірність (число ступенів свободи системи є скінченним).

У протилежність цьому під моделями з розподіленими параметрами розуміють моделі, що описуються скінченним числом диференціальних рівнянь в частинних похідних. Тут змінні стану в кожен момент часу є функціями однієї або кількох просторових змінних. Простір станів має в цьому випадку нескінченну розмірність, тобто система має нескінченну кількість ступенів свободи.

Дискретно-детерміновані – це моделі, які використовуються для дослідження дискретних систем, які можуть перебувати в одному з багатьох внутрішніх станів.

Дискретно-стохастичні – це моделі, що припускають використання схеми імовірнісних автоматів, функціонування яких містить елемент випадковості.

Неперервно-стохастичні – це моделі, які, як правило, застосовуються для вивчення систем масового обслуговування. При функціонуванні деяких економічних, виробничих, технічних систем можлива випадкова поява вимог (заявок) на обслуговування та випадковий час обслуговування.

Мережні – це моделі, що використовуються для аналізу складних систем, в яких одночасно протікає кілька процесів.

Комбіновані схеми, які ґрунтуються на понятті агрегативної системи.

Класифікація моделей за засобами опису та оцінювання. За цією ознакою моделі підрозділяються на описові та нормативні (рис. 2.6).

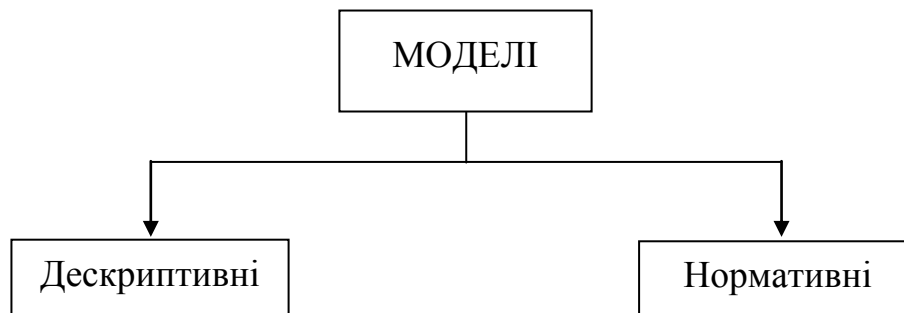


Рисунок 2.6 – Класифікація моделей за засобами опису та оцінювання

Описові (описові) – ці моделі не включають наочно сформульованого критерію (чи критеріїв) оцінки якості функціонування об'єкта, що моделюється, а тому за допомогою таких моделей можна лише описувати, аналізувати поведінку системи.

Приклад. Моделюючи рух комети, яка вторглася в Сонячну систему, фахівці описують ситуацію (передбачають траєкторію польоту комети, відстань, на якій вона пройде від Землі тощо), тобто ставлять чисто описову мету. У людини немає ніяких можливостей вплинути на рух комети, щось змінити в процесі моделювання.

Нормативні – це моделі, які включають наочно сформульовані критерії та вказують норму функціонування системи, що моделюється. Нормативна модель може використовувати й описову модель як складову частину. Так, система обмежень в оптимізаційній задачі є не чим іншим, як описовою моделлю, а наявність критерію перетворює її в нормативну.

Якщо модель використовується для опису та кращого розуміння системи, то вона має описовий характер. Якщо ж за допомогою моделі на основі прогнозування коригується процес ухвали рішень (розробка рекомендацій для конкретних умов, наприклад, експлуатації виробу; знахо-

дження оптимальних рішень), то модель належить до класу нормативних моделей.

Нормативну модель звичайно можна використовувати в якості дескриптивної, обернене твердження не дійсне. Більшу цінність з точки зору практичних застосувань мають нормативні моделі, які спрямовані не лише на пояснення, але в основному служать допоміжними засобами при розробці нових більш якісних систем.

Класифікація моделей за фактором часу. Як уже згадувалося, одна з класифікацій моделей пов'язана з фактором часу. Моделі можна розділити на статичні і динамічні (рис. 2.7) в залежності від того, як відображаються процеси, що в них відбуваються.

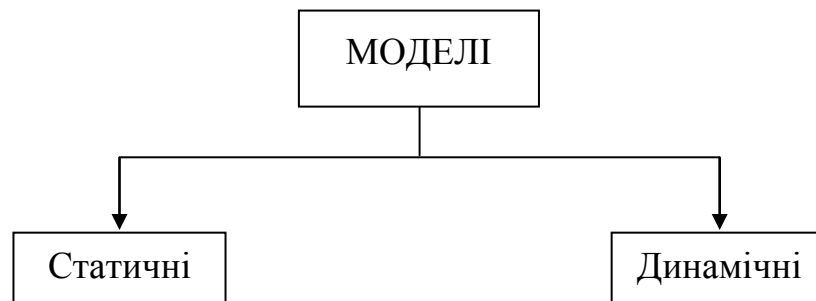


Рисунок 2.7 – Класифікація моделей за фактором часу

Статичні – моделі, що описують стан системи в певний момент часу (одноразовий зріз інформації по даному об'єкту). Приклади моделей: класифікація тварин, будова молекул, список посаджених дерев, звіт про обстеження стану здоров'я студентів і т. д. У статичних моделях залежності від часу в явному вигляді відсутні.

Динамічні – моделі, що описують процеси зміни і розвитку системи в часі. Приклади: опис руху тіл, розвитку організмів, процес хімічних реакцій. Динамічну модель в принципі можна звести до статичної, однак при цьому вона стає надзвичайно громіздкою і практично не піддається аналізу.

Зазначимо, що той же самий об'єкт можливо вивчати, застосовуючи і статичну, і динамічну моделі.

Класифікація моделей за формою подання. За цією ознакою моделі діляться на дві великі групи: матеріальні та інформаційні.

Матеріальні – це предметні (фізичні) моделі. Вони завжди мають реальне втілення. Ці моделі відображають зовнішню властивість і внутрішній устрій вихідних об'єктів, суть процесів і явищ об'єкта-оригіналу. Це експериментальний метод пізнання навколишнього середовища.

Матеріальна (натурна, фізична) модель – це копія об'єкта, яка виконана з іншого матеріалу, в іншому масштабі, можливо з відсутністю ряду несуттєвих деталей. Наприклад, це іграшковий кораблик, будиночок з кубиків, дерев'яна модель літака в натуральну величину, що використовується в авіаційному конструюванні та ін.

Процеси, які мають місце в реальному об'єкті, в матеріальній моделі можуть бути замінені процесами іншої фізичної природи. Створення й використання матеріальних моделей фактично відноситься до експериментального методу пізнання навколишнього світу.

Абстрактні (нематеріальні) – ці моделі не мають реального втілення, вони існують тільки у розумі людини і відображають реальність шляхом не матеріальних, а інформаційних зв'язків – словесним описом у вільній формі, описом, формалізованим за якимись правилами, математичними співвідношеннями і т. п. Це теоретичний метод пізнання навколишнього середовища. Наукові теорії, правила, протоколи – все це приклади абстрактних моделей.

Інформаційні моделі – цілеспрямовано відібрана інформація про об'єкт, явище або процес, яка відображає найбільш істотні для дослідника властивості цього об'єкта (явища, процесу), а також взаємозв'язок із зовнішнім світом.

Інформаційні моделі не мають матеріального втілення тому, що будуються тільки на інформації. В основі цього методу моделювання лежить інформаційний підхід до вивчення навколишньої дійсності.

Типи інформаційних моделей.

Вербальні (від лат. *verbalis* – усний) – уявні моделі виражені в розмовній формі. Використовується для передачі думок.

Табличні – об'єкти та їх властивості представлені у вигляді списку, а їх значення розміщуються в клітинках прямокутної форми. Перелік однотипних об'єктів розміщений в першому стовпці (або рядку), а значення їх властивостей розміщуються в наступних стовпцях (або рядках).

Ієрархічні – об'єкти розподілені за рівнями. Кожен елемент високого рівня складається з елементів нижнього рівня, а елемент нижнього рівня може входити до складу лише одного елемента більш високого рівня.

За ступенем формалізації інформаційні моделі бувають *образно-знаковими* і *знаковими*. За формою подання образно-знакові моделі можна об'єднати в наступні групи:

Геометричні моделі (графічні форми, рисунки, піктограми, креслення, карти, плани, об'ємні зображення), які відображають зовнішній вигляд оригіналу. Інструментом для створення геометричних моделей можуть бути програми, які працюють з графікою, тобто графічні редактори. За їх допомогою можливо моделювати як плоскі, так і об'ємні зображення, керувати графічними об'єктами.

Структурні моделі, які відображатимуть будову об'єктів і зв'язки їх параметрів (таблиці, графіки, схеми, діаграми).

Яскравим прикладом образно-знакової моделі є географічна карта. Колір і форма материків, океанів, гір, зображених на карті, відразу підключають образне мислення людини, яка розглядає карту.

Алгоритмічні моделі – моделі, які представляють процес у вигляді програми, записаної спеціальною мовою. Це може бути також нумерований список, блок-схема.

Знакові моделі – інформація, що характеризує об'єкт або процес, може мати різний обсяг і форму подання, виражатися різними засобами, спеціальними знаками, тобто засобами будь-якої формальної мови. Знакові моделі можна підрозділити на мовні, в яких система описується за допомогою формалізованої або напівформалізованої мови, та математичні, в яких поведінка об'єкта, що моделюється, та зв'язки між його елементами описуються засобами математики.

Математичні моделі – це моделі, які представлені математичними формулами, що відображають зв'язок різних параметрів об'єкта або процесу. Серед математичних моделей певну роль відіграють аналітичні моделі, які описують функціонування системи у вигляді певних функціональних залежностей та (або) логічних співвідношень.

Спеціальні моделі – це моделі, які представляються спеціальними мовами (ноти, хімічні формули тощо).

Окремо від вище зазначених в класифікаціях моделей розглядаються оптимізаційні та багатокритеріальні моделі.

В оптимізаційних моделях можна впливати на процеси, намагаючись досягти певної мети. У цьому випадку в модель вводять один або кілька параметрів, на які можна впливати. Наприклад, змінюючи тепловий режим в зерносховищі, можна підібрати такий режим, щоб досягти максимальної схоронності зерна. Для цього застосовується оптимізаційний процес.

Часто доводиться оптимізувати процес за кількома параметрами відразу, причому цілі можуть бути досить суперечливими. Наприклад, знаючи

ціни на продукти і потребу людини в їжі, організувати харчування великих груп людей (в армії, літньому таборі та ін.) якомога корисніше та дешевше. Ясно, що ці цілі, взагалі кажучи, зовсім не збігаються, тобто при моделюванні буде кілька критеріїв, між якими треба шукати баланс чи компроміс. У цьому випадку говорять, що моделі багатокритеріальні.

Слід зазначити, що в літературних джерелах чітко визначеної класифікації моделей за формою подання знайти не вдалося. Наближена класифікація моделей за цією формою показана на рис. 2.8.

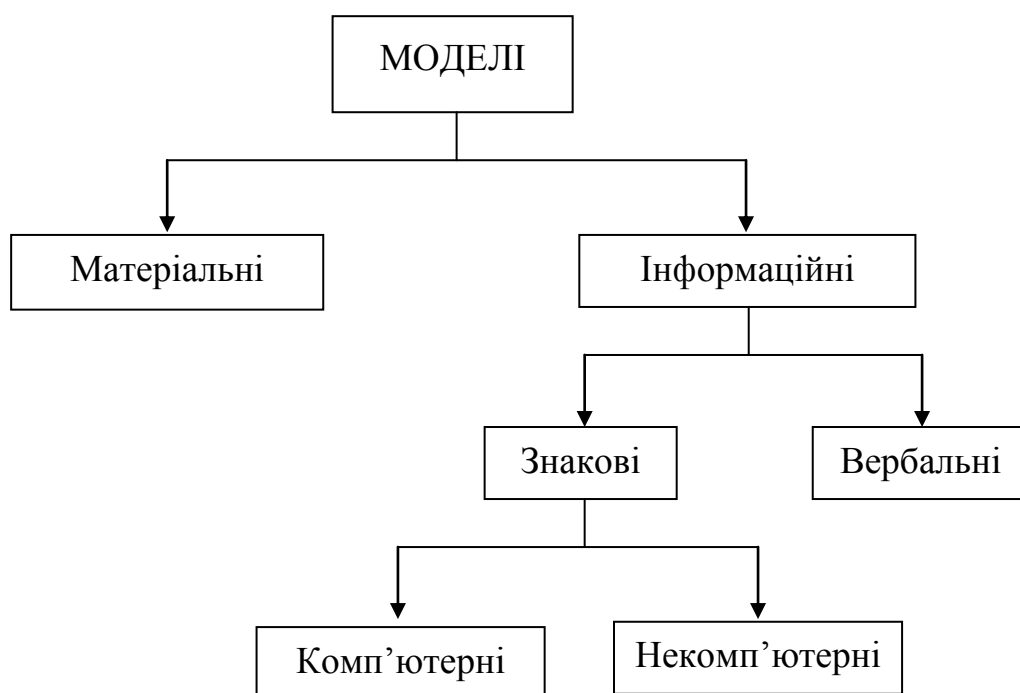


Рисунок 2.8 – Класифікація моделей за формою подання

Розширимо тлумачення деяких розглянутих вище типів моделей.

Вербальні моделі, словесні, текстові моделі – ці моделі використовують послідовності пропозицій на формалізованих діалектах природної мови для опису тієї чи іншої області дійсності (прикладом такого роду моделей є стандарти, протоколи, договори, правила дорожнього руху). Відмінною особливістю таких моделей є їх зручність для розуміння і дії людини, але часто має місце відсутність необхідного рівня формалізму для автоматизованої та автоматичної обробки даних.

Недоліком вербальних моделей є те, що вони часто досить нечіткі. Особливо, якщо система складна, то така модель втрачає наочність, з нею важко працювати. Засоби роботи з вербальними моделями, проведені їх

аналіз і зроблені висновки певною мірою суб'єктивні, залежать від дослідника, глибина дослідження часто обмежена. Вербальні моделі поширені в так званих неточних науках. У більшості точних наук вербальна модель – це початкова, евристична, проміжна модель. Вона використовується для побудови наступних більш повних моделей, форми яких можуть бути самі різноманітні та залежати від природи модельованого об'єкта, мети його вивчення.

Математичні моделі, числові моделі – дуже широкий клас знакових моделей (заснованих на формальних мовах над скінченними алфавітами), що використовують ті чи інші математичні методи. Наприклад, математична модель маятника є системою рівнянь, які описують рух маси, що відбувається під впливом зовнішньої сили та механічних зв'язків, які обмежують рух маси. Іншою математичною моделлю є, наприклад, математичні співвідношення, що дозволяють розрахувати оптимальний (найкращий з економічної точки зору) план роботи будь-якого підприємства. Відмінною особливістю числово-математичних моделей є їх здатність дати точну інформацію про кількісні характеристики процесу, які відбувається в моделі і практично повна нездатність вирішувати якісно-логічні задачі.

Інформаційно-комунікаційні моделі – клас знакових моделей, що описують інформаційні процеси (отримання, передачу, обробку, зберігання і використання інформації) в системах найрізноманітнішої природи. Прикладами таких моделей може служити семирівнева модель взаємодії відкритих систем в комп'ютерних мережах або машина Тьюринга.

Підкреслимо, що межа між вербальними, математичними та інформаційними моделями може бути проведена досить умовно. Так, інформаційні моделі іноді вважають підкласом математичних моделей. Однак, в рамках інформатики як самостійної науки, відокремленої від математики, фізики, лінгвістики та інших наук, виділення інформаційних моделей в окремий клас є доцільним.

Відзначимо, що існують і інші підходи до класифікації абстрактних моделей; загальноприйнята точка зору тут ще не встановилася.

У прикладних науках розрізняють такі види абстрактних моделей:

1. Чисто аналітичні математичні моделі, які не використовують комп'ютерних засобів.
2. Інформаційні моделі, що мають додатки в інформаційних системах.

3. Вербальні мовні моделі.

4. Комп'ютерні моделі, які можуть використовуватися для:

- числового математичного моделювання;
- візуалізації явищ і процесів (як для аналітичних, так і для числових моделей);
- спеціалізованих прикладних технологій, які застосовують комп'ютер (як правило, в режимі реального часу) у поєднанні з вимірювальною апаратурою, датчиками і т. п.

До моделей, які класифікуються за формою подання, відносяться також комп'ютерні та некомп'ютерні моделі. Питання комп'ютерного моделювання розглядаються в наступному розділі посібника.

2.3. Класифікація систем

Моделі можуть бути класифіковані за ієрархічною ознакою систем, що моделюються. Під системою розуміється складний об'єкт, який складається з взаємопов'язаних частин (елементів). Будь-яка система має певне призначення (мету). Крім того, будь-яка система визначається не тільки складом своїх частин, але й порядком і способом об'єднання цих частин в єдине ціле, тобто структурою. Структура – це сукупність зв'язків між елементами системи. Структура систем залежить від поставленої мети її створення.

За складністю інформаційних потоків системи та їх моделі можна розділити на наступні рівні:

Пасивні системи – це системи, які ніяк не впливають на процес моделювання, а процес моделювання ніяк не впливає на цільову систему. Прикладами можуть служити природні явища: планетна система та процес її моделювання, тектонічні процеси та їх моделювання, хімічні реакції та їх моделювання.

Керовані системи – системи, в яких відбуваються реакції на зовнішній керуючий вплив. Прикладами служать: зовнішні пристрої комп'ютера та його апаратна частина, автомобілі та інші транспортні засоби ручного керування, верстати, стадо домашніх тварин, рослини, колонії бактерій.

Керуючі системи – системи, які виконують керування якимось процесом або об'єктами та мають зворотні зв'язки. Прикладами служать автоматичні системи керування, роботи.

Інтелектуальні системи – системи розпізнавання з власною системою прийняття рішень (ініціативної дії), тобто такі системи, як правило, складають "ігрову систему" з іншими подібними системами, самостійно моделюючи ситуацію і відповідаючи на зовнішні впливи відповідно до власної моделі. Прикладами служать: система суспільних відносин людей і тварин, інформаційні системи, які складаються з інтелектуальних засобів, таких, як антивірусні програмні засоби та мережні програми подолання комп'ютерного захисту (комп'ютерні черв'яки та ін.), моделювання театру військових дій і політичних ситуацій.

2.4. Основні принципи моделювання

Основні принципи моделювання полягають у наступному:

Принцип адекватності – модель має враховувати найбільш істотні сторони досліджуваного об'єкта та відображати його властивості з прийнятною точністю. Тільки в цьому випадку результати моделювання можна поширити на об'єкт дослідження.

Принцип простоти й економічності – модель має бути достатньо простою для того, щоб її використання було ефективно і економічно вигідно. Вона не повинна бути більш складною, ніж це потрібно для дослідника.

Принцип інформаційної достатності – при повній відсутності інформації про об'єкт побудувати модель неможливо. За наявності повної інформації моделювання позбавлене сенсу. Існує рівень інформаційної достатності, при досягненні якого може бути побудована модель системи.

Принцип здійсненості – створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети дослідження за кінцевий час.

Принцип множинності та єдності моделей – будь-яка конкретна модель відображає лише деякі сторони реальної системи. Для повного дослідження необхідно побудувати ряд моделей досліджуваного процесу, причому кожна наступна модель повинна уточнювати попередню.

Принцип системності – досліджувана система може бути подана у вигляді сукупності взаємодіючих одна з одною підсистем, які моделюються стандартними математичними методами. При цьому властивості системи не є сумою властивостей її елементів.

Принцип параметризації – деякі підсистеми модельованої системи можуть бути охарактеризовані єдиним параметром: вектором, матрицею, графіком, формулою.

Значна частина цього курсу пов'язана з прикладними математичними моделями, в реалізації яких використовуються комп'ютери. Це викликано тим, що всередині інформатики саме комп'ютерне математичне та комп'ютерне інформаційне моделювання можуть розглядатися як її складові частини. Комп'ютерне математичне моделювання пов'язане з інформатикою технологічно; використання комп'ютерів і відповідних технологій обробки інформації стало невід'ємною і необхідною стороною роботи фізика, інженера, економіста, еколога, проектувальника ЕОМ і т. д. Неформалізовані вербальні моделі не мають явно вираженої прив'язки до інформатики – ні в принциповому, ні в технологічному аспектах.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміють під поняттям "модель"?
 2. За якими ознаками класифікують моделі?
 3. У чому різниця між активними та пасивними моделями?
 4. Чим статичні моделі відрізняються від динамічних?
 5. Які недоліки притаманні вербальним моделям?
 6. Що розуміють під поняттям "моделювання"?
 7. Назвіть ознаки класифікації систем.
 8. Перелічіть основні принципи моделювання.
-

3. ПОНЯТТЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ МОДЕЛІ ТА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

3.1. Комп'ютерна модель

Ефективним способом вивчення явищ навколишньої дійсності є науковий експеримент, метою якого є відтворення досліджуваного об'єкта або явища природи в керованих і контрольованих умовах. Однак часто проведення експерименту неможливе або вимагає занадто великих економічних витрат і може призвести до небажаних наслідків. У цьому випадку досліджуваний об'єкт замінюють комп'ютерною моделлю і вивчають її поведінку при різних зовнішніх впливах.

Повсюдне поширення персональних комп'ютерів, інформаційних технологій, створення потужних суперЕОМ зробило комп'ютерне моделювання одним із результативних методів вивчення фізичних, технічних, біологічних, економічних та інших систем. Сучасний комп'ютер здатний працювати зі звуком, відеозображенням, анімацією, текстом, схемами, таблицями і т. д.

Зараз існує широке коло програм, які дозволяють створювати різні види комп'ютерних знакових моделей: текстові процесори, редактори формул, електронні таблиці, системи управління в базах даних, професійні системи проектування, а також різні середовища програмування.

Комп'ютерні моделі простіше й зручніше досліджувати, вони дозволяють проводити обчислювальні експерименти, реальна постановка яких утруднена або може дати непередбачуваний результат. Логічність і формалізованість комп'ютерних моделей дозволяє виявляти основні чинники, які визначають властивості досліджуваних об'єктів, досліджувати відгук фізичної системи на зміну її параметрів і початкових умов.

Комп'ютерна модель – це комп'ютерна програма, яка працює на окремому комп'ютері, суперкомп'ютері або множині взаємодіючих комп'ютерів (обчислювальних вузлів) та реалізує абстрактну, тобто інформаційну модель деякого об'єкта, процесу, явища чи системи.

Можна дати дещо простіше визначення комп'ютерної моделі. Комп'ютерна модель – це модель, реалізована засобами певного програмного середовища.

Комп'ютерна модель є подання об'єкта, системи чи явища у формі, відмінній від реальної, але наближеній до алгоритмічного опису, який включає набір даних, що характеризують властивості системи, динаміку їх зміни в часі і т. п.

Комп'ютерні моделі є звичайним інструментом числового математичного моделювання і застосовуються в фізиці, астрофізиці, механіці, хімії, біології, соціології, метеорології, інших науках, а також при розв'язанні прикладних задач в різних областях радіоелектроніки, машинобудування, автомобілебудування тощо. Комп'ютерні моделі використовуються для отримання нових знань про модельований об'єкт або для наближеної оцінки поведінки систем, занадто складних для логіко-аналітичного дослідження.

У разі коректної логіки і коректної формалізації на етапі створення комп'ютерних моделей є можливість виявити основні фактори, які визначають кількісні характеристики досліджуваного об'єкта-оригіналу (або цілого класу об'єктів), зокрема, досліджувати відгук змодельованої фізичної системи на зміни її параметрів і початкових умов.

Застосування обчислювальних машин дозволяє аналізувати та застосовувати на практиці багато математичних моделей, які раніше не піддавалися аналітичному дослідженню.

Комп'ютерна модель має задовольняти наступним вимогам:

1. Забезпечувати певну повноту опису об'єкта (процесу, явища), який вивчається, тобто надавати можливість обчислення всіх характеристик об'єкта з необхідною точністю й достовірністю.

2. Модель має бути гнучкою, що дозволить відтворювати і програвати різні ситуації і процеси, змінювати структуру, алгоритми та параметри досліджуваного об'єкта.

3. Тривалість розробки та реалізації, що характеризують витрати часу на створення моделі, мають бути якомога меншими.

4. Структура моделі має бути блочною, що надаватиме можливість додавати, вилучати й замінювати деякі частини (блоки) моделі.

Крім того, інформаційне забезпечення, програмні та технічні засоби повинні дозволяти моделі обмінюватися інформацією з відповідною базою даних та забезпечувати ефективну комп'ютерну реалізацію та зручну роботу користувача.

Треба мати на увазі, що гранична точність моделі визначається точністю її зовнішніх інформаційних потоків (зв'язків). Немає сенсу будувати детальну модель об'єкта, якщо висока невизначеність зовнішніх потоків інформації, або, інакше кажучи, точність моделі повинна бути порівняна з точністю зовнішніх потоків інформації. Це положення в рівній мірі стосується і підсистем, і в застосуванні до них виглядає як вимога взаємної співмірності їх точності.

Реалізована на комп'ютері математична модель називається комп'ютерною математичною моделлю, а проведення цілеспрямованих розрахунків за допомогою комп'ютерної моделі називається обчислювальним експериментом.

Зазвичай, розробка комп'ютерної моделі об'єкта є послідовністю ітерацій: спочатку на основі наявної інформації про систему S будується модель $M1$, проводиться серія обчислювальних експериментів, результати аналізуються. При отриманні нової інформації про об'єкт S враховуються додаткові чинники, розробляється уточнена модель $M2$, поведінка якої також досліджується на ЕОМ. Після цього створюються моделі $M3$, $M4$ і т. д. до тих пір, поки не буде отримана модель, яка з потрібною точністю відповідатиме системі S .

3.2. Види комп'ютерних моделей

Під комп'ютерним моделюванням у самому широкому сенсі розуміють процес створення й дослідження моделей за допомогою комп'ютера. Виділяють такі види моделей:

1. *Фізична модель* – комп'ютер є частиною експериментальної установки або тренажера, який сприймає зовнішні сигнали, здійснює відповідні розрахунки і видає сигнали, які керують різними маніпуляторами. Наприклад, навчальна модель літака, що представляє собою кабінку, встановлену на відповідних маніпуляторах, з'єднаних з комп'ютером, який реагує на дії пілота і змінює нахил кабінки, показання приладів і т. д., імітуючи політ реального літака.

2. *Числова модель* – модель, яка припускає числове розв'язання системи алгебраїчних і диференціальних рівнянь методами обчислювальної математики та проведення обчислювального експерименту при різних параметрах системи, початкових умовах і зовнішніх впливах. Числова мо-

дель використовується для моделювання різних фізичних, технічних, біологічних, соціальних та інших явищ.

3. *Імітаційна модель* – це модель, яка полягає у створенні комп'ютерної програми (або пакета програм), що імітує поведінку складної технічної, економічної чи іншої системи на ЕОМ з необхідною точністю. Вона передбачає формальний опис логіки функціонування досліджуваної системи з плином часу, враховує суттєві взаємодії її компонентів і забезпечує проведення статистичних експериментів.

4. *Статистична модель* – це модель, яка використовується для вивчення стохастичних систем і призначена для багаторазового проведення випробувань з подальшою статистичною обробкою отриманих результатів. Подібні моделі дозволяють досліджувати поведінку різних систем масового обслуговування, багатопроцесорних систем, інформаційно-обчислювальних мереж, різних динамічних систем, на які впливають випадкові чинники. Статистичні моделі застосовуються при вирішенні імовірнісних задач, а також при обробці великих масивів даних (інтерполяція, екстраполяція, регресія, кореляція, розрахунок параметрів розподілу і т. д.).

5. *Інформаційна модель* – це модель, яка полягає у створенні сукупності спеціальним чином організованих даних (знаків, сигналів), що відображають найбільш істотні сторони досліджуваного об'єкта.

6. *Модель знань* – це модель, яка передбачає побудову системи штучного інтелекту, в основі якої лежить база знань деякої предметної області (частини реального світу). До цього виду моделей відносять семантичні мережі, логічні моделі знань, експертні системи, логічні ігри і т. д. Логічні моделі використовуються для представлення знань в експертних системах, для створення систем штучного інтелекту, здійснення логічного висновку, доведення теорем, математичних перетворень, побудови роботів, використання природної мови для спілкування з ЕОМ, створення ефекту віртуальної реальності в комп'ютерних іграх тощо.

Виходячи з цілей моделювання, комп'ютерні моделі підрозділяють на групи:

1) *deskриптивні моделі*, які використовуються для розуміння природи досліджуваного об'єкта, виявлення найбільш істотних факторів, що впливають на його поведінку;

2) *оптимізаційні моделі*, які дозволяють вибрати оптимальний спосіб керування технічною, соціально-економічною чи іншою системою (наприклад, космічною станцією);

3) *прогностичні моделі*, які допомагають прогнозувати стан об'єкта в наступні моменти часу (модель земної атмосфери, яка дозволяє передбачити погоду);

4) *навчальні моделі*, що застосовуються для навчання, тренінгів і тестування учнів, студентів, майбутніх фахівців;

5) *ігрові моделі*, які дозволяють створювати ігрову ситуацію, яка імітує управління армією, державою, підприємством, людиною, літаком і т. д., або грати у шахи, шашки та інші логічні ігри.

3.3. Области застосування комп'ютерних моделей

Успіхи комп'ютерного моделювання тісно пов'язані з розвитком числових методів, що почався з фундаментальних робіт Ісака Ньютона, який ще в 17 столітті запропонував їх використовувати для наближеного рішення алгебраїчних рівнянь.

Зараз комп'ютерне моделювання застосовують для розв'язання широкого кола задач у різних областях людської діяльності:

- у промисловості (комп'ютерне моделювання різних технологічних процесів, моделювання роботів і автоматичних маніпуляторів, моделювання міцнісних, гідравлічних, теплових та інших показників деталей, вузлів і агрегатів тощо);

- в архітектурі та будівництві (дослідження поведінки будівель, конструкцій і деталей під впливом механічних, вітрових та інших видів навантажень, моделювання сценарних варіантів розвитку міст, розв'язання інших подібних задач);

- в енергетиці, в тому числі ядерній (моделювання роботи електричних мереж, електротехнічних пристроїв, рішення задач механіки суцільних середовищ, зокрема, гідродинаміки, розрахунок ядерних реакцій тощо);

- на транспорті (конструювання наземних, повітряних, водних транспортних засобів, дослідження поведінки гідравлічних систем нафто- та водопроводів, моделювання ситуацій, пов'язаних з аваріями на газопроводах та ін.);

- в управлінні бізнесом, економіці та фінансах (стратегічне управління підприємствами, моделювання ринків сировини та збуту готової продук-



Ісак Ньютон

ції, моделювання виробничих процесів, прогнозування цін на фінансових ринках, економічні дослідження розвитку підприємства, галузі, країни);

– в екології та геофізиці (вивчення глобальних явищ на Землі, рішення задач небесної механіки, дослідження екологічних проблем, моделювання поширення забруднюючих речовин в атмосфері, боротьба з шумовим забрудненням, прогнозування погоди, клімату, глобального потепління, наслідків ядерного конфлікту, землетрусів, повені тощо);

– в політиці та військовій справі (моделювання розвитку міждержавних відносин, моделювання поведінки людських мас у різних суспільно-політичних ситуаціях, моделювання театру військових дій);

– в соціології (моделювання загальнодержавних і місцевих виборів, голосування, зміни громадської думки тощо);

– в хімії та біології (розрахунок хімічних реакцій і біологічних процесів, розвиток хімічної та біологічної технології, прогнозування демографічної ситуації в країні та світі, моделювання пандемії та епідемій).

Різні сфери застосування комп'ютерних моделей висувають різні вимоги до надійності одержуваних з їх допомогою результатів. Для моделювання будівель і деталей літаків потрібні високі точність і ступінь достовірності, тоді як моделі еволюції міст і соціально-економічних систем використовуються для отримання наближених або якісних результатів.

3.4. Комп'ютерне моделювання

Комп'ютерне моделювання – це область наукової та інженерної діяльності, яка пов'язана з теорією та практикою обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент в дійсності експериментом не є, оскільки інформація береться не з фізичного експерименту, фізичної реальності, а з модельного уявлення про неї. Поєднуючи обчислювальний експеримент з натурним, дослідник отримує можливість швидше й повніше вивчати навколишній світ і проектувати нові вироби. Це досягається за рахунок того, що більша частина експериментів проводиться з комп'ютерною моделлю, а на завершальному етапі гіпотези, які вселяють довіру, перевіряються на невеликому числі ретельно продуманих і економічно обґрунтованих натурних експериментах.

Обчислювальний експеримент фактично є експериментом над математичною моделлю досліджуваного об'єкта, що проводиться за допомогою

ЕОМ. Часто він значно дешевше і доступніше натурного експерименту, його виконання вимагає меншого часу, він дає більш детальну інформацію про величини, які визначають стан системи.

Комп'ютерне моделювання характеризується тим, що математична модель системи (використовуючи основні співвідношення аналітичного моделювання) подається у вигляді деякого алгоритму та програми, придатної для її реалізації на комп'ютері, що дозволяє проводити з нею обчислювальні експерименти. Залежно від математичного інструментарію (апарату), що використовується в побудові моделі, та способу організації обчислювальних експериментів можна виокремити три взаємопов'язані види моделювання: числове, алгоритмічне (імітаційне) та статистичне.

При числовому моделюванні для побудови комп'ютерної моделі застосовуються методи обчислювальної математики, а обчислювальний експеримент полягає в числовому розв'язанні деяких математичних рівнянь за заданих значень параметрів і початкових умов.

Якщо побудова комп'ютерної моделі базується на абстрагуванні від конкретної природи явищ або досліджуваного об'єкта-оригіналу і складається з двох етапів – спочатку створення якісно-логічної, а потім і кількісно-математичної моделі, то комп'ютерне моделювання полягає в проведенні серії обчислювальних експериментів на комп'ютері, метою яких є аналіз на внутрішню несуперечливість моделі та отримання кількісних даних про процес функціонування моделі.

Комп'ютерне моделювання є одним з ефективних методів вивчення складних систем, які є особливим видом математичних моделей. Воно є сучасною формою математичного моделювання, новим інструментом пізнання та новою технологією проектування.

Сутність комп'ютерного моделювання також полягає у створенні комп'ютерної програми (пакета програм), яка описує поведінку елементів досліджуваного об'єкта в процесі його функціонування, що враховує їх взаємодію між собою і зовнішнім середовищем, та проведенні на ЕОМ серії обчислювальних експериментів. Це робиться з метою вивчення природи і поведінки об'єкта, його оптимізації та структурного розвитку, прогнозування нових явищ.

Комп'ютерне моделювання є засобом пізнання. До середини 19-го століття математичні моделі досліджувалися вченими як і всі абстрактні об'єкти: писалися формули, які спрощувалися для полегшення ручних чис-

лових розрахунків. Обчислювальна техніка надала нові можливості будувати й досліджувати математичні моделі, однак практично відразу ж стало ясно, що механічне перенесення традиційних методів дослідження на комп'ютери неможливо. Так народилася нова дисципліна "комп'ютерне моделювання", яка вивчає новий тип моделей – математичних моделей, реалізованих на комп'ютерах. Це особливий тип моделей, які одночасно можна вважати й абстрактними (записані мовою моделювання) і фізичними. Вони можуть безпосередньо виконуватися на комп'ютерах. Зараз практично всі традиційні математичні моделі представлені у вигляді комп'ютерних моделей.

Комп'ютерне моделювання є засобом проектування. При традиційному проектуванні спочатку створюється "паперовий" прототип виробу: в досить вільній формі формулюються вимоги, описується технічне рішення, створюються креслення, і тільки потім задумане втілюється в діючий прототип. Створений виріб перевіряється на відповідність вимогам, визначаються його характеристики, проводяться випробування на надійність, до нього вносяться зміни, іноді кардинальні, і тоді прототип доводиться створювати заново. Після багаторазових натурних експериментів починається серійне виробництво.

Комп'ютерні моделі, що використовуються в сучасних технологіях проектування, дозволяють переходити до виготовлення прототипу тільки після ретельного тестування моделі, швидко і майже безболісно виправляти знайдені помилки ще на стадії проектування. Комп'ютерні експерименти проводяться за допомогою спеціальних програмних засобів – засобів моделювання. Мови моделювання, що включають і математичний опис досліджуваних об'єктів, служать суворому, однозначному розумінню всіма розробниками характеристик виробу, що проектується. У будь-який момент такий опис моделі можна перетворити у виконуваний код, і в буквальному сенсі побачити на екрані монітора поведінку виробу, що конструюється, оптимізувати параметри, досліджувати властивості.

Зараз практично повсюдно спостерігається перехід від традиційних технологій проектування до нових, в основі яких лежить комп'ютерне моделювання.

Комп'ютерне моделювання є засобом навчання. Зрозуміло, що ніщо не може замінити натурний експеримент, який дає об'єктивні уявлення про навколишній світ. Однак до натурних експериментів можна переходити,

попередньо ознайомившись з результатами комп'ютерного моделювання реального об'єкта. Вивчати комп'ютерні моделі і ставити комп'ютерні експерименти можна і у випадку, коли ставити натурні експерименти не доцільно чи неможливо. Електронні підручники, віртуальні лабораторії, комп'ютерні тренажери вже увійшли в наше життя. Ті чи інші комп'ютерні засоби самостійного вивчення або навчання можна знайти практично у будь-якій галузі.

Слід зазначити, що в історії людства жодне технічне починання не розвивалося так швидко, як обчислювальна техніка за останні півстоліття. Поява ЕОМ наприкінці сорокових – початку п'ятдесятих років минулого століття спочатку не була сприйнята як якісно новий стрибок розвитку науки. Однак зараз уже очевидно, що обчислювальна техніка – провідна складова науково-технічної революції. Якщо в п'ятдесятих роках сферою її застосування були лабораторні наукові дослідження, то зараз вона невід'ємний атрибут у всіх областях техніки.

Електронні обчислювальні машини дозволили використовувати більш складні й універсальні математичні моделі, повніше відображати об'єкт дослідження, а отже, точніше, глибше описувати досліджуваний процес або явище. Зросла масштабність об'єктів математичного моделювання. Стало можливим комплексно оцінювати і властивості мікросвіту, і роботу цілих областей народного господарства з усім різноманіттям техніко-економічних зв'язків, включаючи рішення задач управління і прогнозування. Саме завдяки оперативному управлінню і прогнозуванню, математичне моделювання з використанням ЕОМ стало активним чинником роботи різних технічних пристроїв.

3.5. Програмне забезпечення комп'ютерного моделювання

Перші, створені людиною, ЕОМ працювали з програмами, написаними в машинному коді. Створення програм у машинному коді є складною рутинною роботою. Причому складність цієї роботи різко зростає зі збільшенням об'єму програми і трудомісткості рішення поставленої задачі. Умовно можна вважати, що машинний код прийнятний, якщо розмір програми не перевищує кількох десятків байтів і немає потреби в операціях ручного вводу/виводу даних.

Тому сьогодні практично всі програми створюються за допомогою мов програмування. Теоретично програму можна написати і засобами зви-

чайної людської (природної) мови – це називається програмуванням на метамові (подібний підхід зазвичай використовується на етапі складання алгоритму), але автоматично перевести таку програму в машинний код поки неможливо через високу неоднозначність природної мови.

Мови програмування – це штучні мови. Від природних вони відрізняються обмеженою кількістю "слів", значення яких зрозуміло транслятору, і дуже строгими правилами запису команд. Сукупність подібних вимог утворює синтаксис мови програмування, а сенс кожної команди та інших конструкцій мови – його семантику. Порушення форми запису програми призводить до того, що транслятор не може зрозуміти призначення оператора і видає повідомлення про синтаксичну помилку, а правильно написане, але не відповідне алгоритму використання команд мови приводить до семантичних помилок, які часто називають логічними помилками або помилками часу виконання.

Процес пошуку помилок у програмі називається тестуванням, процес усунення помилок – налагодженням.

Різні типи процесорів мають різні набори команд. Якщо мова програмування орієнтована на конкретний тип процесора і враховує його особливості, то її називають мовою програмування низького рівня. Але поняття "низький рівень" не означає "поганий". Мається на увазі, що оператори мови близькі до машинного коду й орієнтовані на конкретні команди процесора.

Мовою найнижчого рівня є мова *асемблера*, яка просто представляє кожну команду машинного коду, але не у вигляді чисел, а за допомогою символічних умовних позначень, які називаються мнемонікою. Однозначне перетворення однієї машинної інструкції в одну команду асемблера називається транслітерацією. Оскільки набори інструкцій для кожної моделі процесора відрізняються, а конкретній комп'ютерній архітектурі відповідає своя мова асемблера, то написана на ньому програма може бути використана тільки в цьому середовищі.

За допомогою мов низького рівня створюються дуже ефективні і компактні програми, бо розробник отримує доступ до всіх можливостей процесора. З іншого боку, при цьому потрібно дуже добре розуміти будову комп'ютера, утруднюється налагодження великих додатків, а результуюча програма не може бути перенесена на комп'ютер з іншим типом процесора. Подібні мови зазвичай застосовують для написання невеликих системних

додатків, драйверів пристроїв, модулів стиковки з нестандартним обладнанням, коли найважливішими вимогами стають компактність, швидкодія і можливість прямого доступу до апаратних ресурсів. У деяких областях, наприклад, в машинній графіці, мовою асемблера пишуться бібліотеки, які ефективно застосовуються при обробці зображень.

Мови програмування високого рівня значно ближче і зрозуміліше людині, ніж комп'ютеру. Особливості конкретних комп'ютерних архітектур в них не враховуються, тому створювані програми на рівні вихідних текстів легко переносяться на інші платформи, для яких створений транслятор цієї мови. Розробляти програми на мовах високого рівня за допомогою зрозумілих і потужних команд значно простіше, а помилок при створенні програм допускається набагато менше.

Програмне забезпечення в області моделювання розвивалося одночасно з розвитком обчислювальної техніки. Прообразом сучасних середовищ моделювання можна вважати Пакети Прикладних Програм, першим серйозним досягненням в області мов моделювання – мова SIMULA-67, першими пакетами моделювання складних динамічних систем в нашій країні – НЕДІС (розроблений групою під керівництвом академіка В. М. Глушкова) і MAPC.

Поява графічних терміналів призвела до якісних змін у комп'ютерному моделюванні. З'явилися середовища візуального моделювання – програмні засоби з графічними мовами моделювання, планування обчислювального експерименту та візуалізації поведінки моделі.

Зараз для моделювання розроблені універсальні та спеціалізовані математичні пакети, які прийнято називати системами комп'ютерної математики. Під такими системами розуміють програмне забезпечення, яке дозволяє не лише виконувати числові розрахунки на комп'ютері, але й виконувати аналітичні (символьні) перетворення різних математичних і графічних об'єктів. До найвідоміших таких систем відносяться: MathCAD, Mathematica, Matlab, Maple, Statistica, Sage, Maxima.

Всі системи комп'ютерної математики умовно можна поділити на дві великі групи: поширювані на комерційній основі та вільно поширювані.

Розглянемо основні характеристики систем комп'ютерної математики, які застосовуються при моделюванні різних об'єктів, явищ і процесів та поширюються на комерційній основі.

MathCAD – це математичний інструмент для користувачів, які працюють в області техніки або природничих наук. Він орієнтований на підготовку інтерактивних документів з обчисленнями і візуальним супроводом, відрізняється легкістю використання. MathCAD дозволяє відображати математичні тексти в природній математичній нотації, у тому числі при введенні; надає можливість об'єднання в одному MathCAD-документі обчислювальних, програмних, графічних та текстових областей. MathCAD містить сотні операторів і вбудованих функцій для вирішення різних технічних задач; дозволяє виконувати числові та символні обчислення, проводити операції з скалярними величинами, векторами і матрицями, автоматично переводити одні одиниці вимірювання в інші.

Mathematica – це повністю інтегрована система комп'ютерної алгебри. Вона призначена для проведення будь-яких наукових і технічних розрахунків. Mathematica – система, яка розширюється. Крім внутрішніх команд ядра системи, можна застосовувати додаткові команди, які містяться в пакетах, що завантажуються. До цих пакетів відносяться пакети з назвами "Алгебра", "Аналіз", "Дискретна математика", "Геометрія", "Графіка", "Лінійна алгебра", "Теорія чисел", "Числові методи", "Статистика". У складі Mathematica є також набір різноманітних пакетів, які важко класифікувати.

Matlab – це універсальний засіб для виконання математичних розрахунків у багатьох областях науки і техніки. Його корисно застосовувати при виконанні матричного аналізу, розв'язанні задач математичної фізики, статистичних, оптимізаційних, фінансово-економічних задач, при дослідженні та обробці сигналів і зображень, обробці та візуалізації інформації. Matlab сумісний з різними операційними платформами, зокрема, з Microsoft Word і Microsoft Excel. Розрахунки, виконані з використанням програми Matlab, можна оформити в документі Word.

Крім того, разом з Matlab постачається пакет Simulink, призначений для інтерактивного моделювання нелінійних динамічних систем. Simulink має власний набір розширень, які дозволяють з високою точністю проектувати, моделювати, реалізовувати та тестувати системи управління, обробки сигналів тощо. Ця система дозволяє легко здійснювати взаємний обмін даними з базовою частиною середовища для аналізу і синтезу. Побудова комп'ютерних моделей лінійних і нелінійних дискретних об'єктів в системі Simulink базується на наочному графічному інтерфейсі, що дозволяє працювати в візуальному режимі, формуючи модель на основі блок-схеми об'єкта.

Подібний підхід істотно спрощує моделювання в порівнянні з традиційним написанням підпрограм мовами високого рівня.

Моделі, що створюються за допомогою пакету Simulink, є ієрархічними системами, які можуть формуватися в процесі їх розробки як у висхідному за рівнем ієрархії, так і в спадному порядку. При розгляді існуючої Simulink-моделі на вищому рівні, подвійним клацанням миші по будь-якому з вхідних в неї складових блоків можна перейти на більш низький ієрархічний рівень і розглядати блок-схему відповідної підсистеми.

Подібний підхід повністю відповідає ідеології компонентного та структурного моделювання і дозволяє виключно наочно уявляти функціональну структуру модельованої системи, уникнути помилок і підвищити надійність комп'ютерної моделі.

Maple – програмний пакет, призначений для символьних обчислень, хоча має ряд засобів і для числового розв'язання диференціальних рівнянь і знаходження інтегралів. Пакет має розвинені графічні засоби та власну мову програмування, що нагадує Паскаль. Цьому пакету притаманні найкраще символьне ядро, висока точність обчислень. Уведення математичних виразів виконується в природній математичній нотації. Інтерфейс Maple інтуїтивно зрозумілий.

Statistica – програмний пакет для статистичного аналізу, який реалізує функції аналізу, управління, видобутку та візуалізації даних із залученням статистичних методів. У ньому закладені основи теорії планування експерименту. Пакет має широкі графічні можливості, дозволяє виводити інформацію у вигляді різних типів графіків (включаючи наукові, ділові, тривимірні і двомірні графіки в різних системах координат, спеціалізовані статистичні графіки – гістограми, матричні, категоровані графіки та ін.). Усі компоненти графіків налаштовуються.

Scilab – система комп'ютерної математики, яка призначена для виконання інженерних і наукових обчислень. За можливостями пакет Scilab практично не поступається MathCAD, а по інтерфейсу близький до Matlab. У Scilab реалізовані числові методи розв'язання більшості задач обчислювальної математики. Для вирішення нестандартних задач в Scilab є досить потужна об'єктно-орієнтована мова програмування (Sci-мова). Графічні можливості Scilab не поступаються пропрієтарним математичним пакетам. До складу Scilab входить Scicos – система комп'ютерного моделювання, що аналогічна Simulink.

Maxima – математична система символьних і числових обчислень. Програма працює в консольному режимі та у вигляді віконного додатку. При проведенні обчислень Maxima використовує точні дробі, цілі числа і числа з плаваючою точкою довільної точності, що дозволяє проводити обчислення з дуже високою точністю. З її допомогою можна проводити операції з векторами, матрицями і тензорами, вирішувати задачі диференціювання, інтегрування, обчислення меж, розкладання в ряд, виконувати перетворення Лапласа, вирішувати звичайні диференціальні рівняння, задачі обробки експериментальних даних, розв'язувати нелінійні рівняння і системи, будувати двох і тривимірні графіки. В Maxima є вбудована макромова, завдяки чому програма стає практично необмежено розширюваним інструментом для проведення як числових, так і символьних обчислень. А разом з текстовим редактором TexMacS пакет Scilab може бути більш потужним середовищем в операційній системі Linux для проведення розрахунків і оформлення документів, ніж MathCAD в середовищі Windows. На сьогоднішній день Maxima – незамінний інструмент не тільки на комп'ютері дослідника, а й унікальна програма для використання в навчальному процесі.

До вільно поширюваних систем комп'ютерної математики можна віднести програмний продукт Octave – високорівневу мову програмування, сумісну з Matlab. Існує зручне графічне середовище QtOctave для роботи Octave.

Для розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінченних елементів і візуалізації рішення можна скористатися вільно поширюваними пакетами Freefem і Freefem3d, які за своїми можливостями не поступаються модулю рішення рівнянь математичної фізики з пакету Matlab.

Крім того, для вирішення задач обчислювальної математики та проведення аналітичних розрахунків можна застосовувати математичний пакет Sage, який об'єднує багато існуючих вільних пакетів в єдиному середовищі, написаному на Python. Sage підтримує інтерфейси до комерційних систем комп'ютерної математики, таких як Maple, Mathematica і Matlab.

Певною популярністю користується алгоритмічна мова GPSS (англ. General Purpose Simulation System – система моделювання загально-го призначення) – мова моделювання, яка застосовується для імітаційного моделювання різних систем, в основному систем масового обслуговування. На жаль, в програмах, розроблених мовою GPSS досить складно уявити

безпосередньо процеси обробки даних на рівні алгоритмів. Крім того, модель є програмою, а отже, не має графічної інтерпретації, що ускладнює процес розробки моделі і знижує наочність моделі в цілому.

Останніми роками все більшої популярності набувають мережні надбудови над існуючими системами комп'ютерної математики – мережні СКМ, або Web-СКМ), застосування яких надає можливість виконання обчислень у середовищі Web-браузера (за технологіями AJAX та JSP), підготовку високоякісних навчальних ресурсів з математичних дисциплін, мобільний доступ до обчислювальних програм та даних. Представниками класу мережних систем комп'ютерної математики на сьогодні є MathCAD Application Server, MapleNet, Matlab Web Server, webMathematica, wxMaxima та SAGE.

На завершення треба зазначити, що поява пакетів математичних програм породила у багатьох потенційних користувачів надії позбутися, нарешті, від вивчення математики та програмування. Однак пакети прикладних програм – навіть такі потужні як Mathematica або Maple – працюють в режимі інтерпретації і є скоріше інструментом пошукових досліджень, ніж трудомісткого рахунку з перебором варіантів.

Крім того, готові пакети математичних програм, на жаль, не вирішують проблеми ще й тому сенсі, що орієнтовані головним чином на розв'язання окремих математичних задач стандартними методами. Практично ж розрахунки завжди вимагають творчого та комплексного підходу, що реалізується тільки в класичному програмуванні.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміють під комп'ютерною моделлю?
2. Яким вимогам має задовольняти комп'ютерна модель?
3. Що таке комп'ютерна математична модель?
4. Перелічите види комп'ютерних моделей.
5. В яких областях людської діяльності застосовуються комп'ютерні моделі?
6. Який сенс вкладають в поняття "комп'ютерне моделі"?
7. Що розуміють під мовою програмування?
8. Назвіть найпоширеніші універсальні та спеціалізовані математичні пакети.

4. МЕТА ТА ЕТАПИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

4.1. Цілі та основні етапи комп'ютерного моделювання

Ціллю комп'ютерного моделювання є отримання, обробка, представлення й використання інформації про об'єкти (процеси, явища та системи), яка може бути використана для підготовки і прийняття рішень технічного, організаційного, економічного або соціального характеру. При цьому модель виступає як засіб пізнання властивостей і закономірностей поведінки об'єкта. Основним призначенням моделювання в задачах управління є прогноз реакції об'єкта на керуючі впливи.

Розглянемо, як приклад, процес комп'ютерного числового математичного моделювання, який включає числовий експеримент з моделлю (рис. 4.1). На цьому рисунку показано загальну схему процесу комп'ютерного числового математичного моделювання.

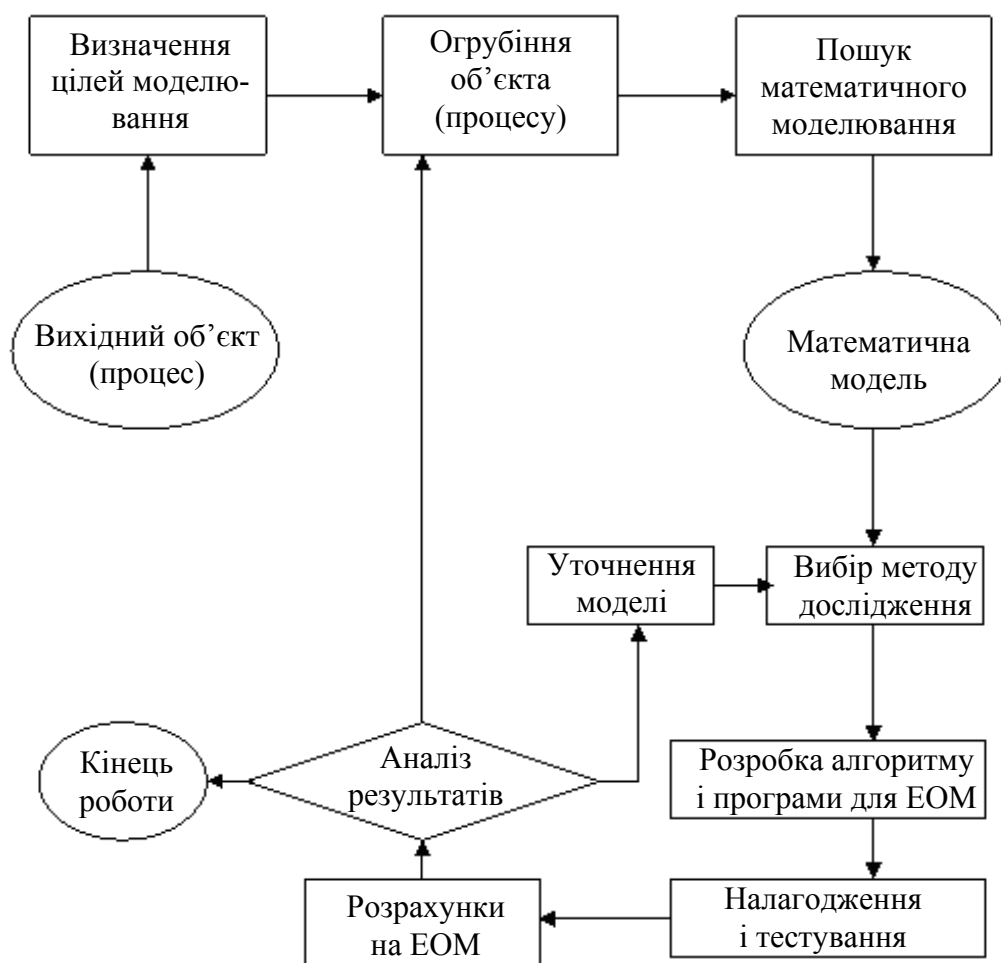


Рисунок 4.1 – Загальна схема комп'ютерного моделювання

До основних етапів комп'ютерного моделювання можна віднести наступні:

Перший етап – визначення цілей моделювання.

1) *Розуміння* – модель потрібна для того, щоб з'ясувати влаштування конкретного об'єкта, визначити його структуру, основні властивості, закони розвитку і взаємодії з навколишнім світом.

Пояснимо це на прикладах. Нехай об'єкт дослідження – взаємодія потоку рідини чи газу з тілом, що є для цього потоку перешкодою. Досвід показує, що сила опору потоку з боку тіла зростає зі зростанням швидкості потоку, але при деякій досить високій швидкості ця сила стрибком зменшується з тим, щоб з подальшим збільшенням швидкості знову зрости. Що ж сталося, зумовивши зменшення сили опору? Математичне моделювання дозволяє отримати чітку відповідь: у момент стрибкоподібного зменшення опору вихори, що утворюються в потоці рідини або газу позаду обтічного тіла, починають відриватися від нього й зноситися потоком.

2) *Управління* – модель потрібна для того, щоб навчитися управляти об'єктом (або процесом) і визначити найкращі способи управління при заданих цілях і критеріях її створення.

Розробка концепції управління об'єктом – інша можлива мета моделювання. Який режим польоту літака вибрати для того, щоб політ був цілком безпечним і економічно найбільш вигідним? Як скласти графік виконання сотень видів робіт на будівництві великого об'єкта, щоб воно закінчилося в максимально стислий термін? Багато таких проблем систематично виникає перед економістами, конструкторами, вченими.

3) *Прогнозування* – модель потрібна для того, щоб прогнозувати прямі і непрямі наслідки реалізації заданих способів і форм впливу на об'єкт.

Нарешті, прогнозування наслідків тих чи інших впливів на об'єкт може бути як відносно простою справою (в нескладних фізичних системах), так і надзвичайно складною – на межі здійсненності – в системах біолого-економічних, соціальних. Якщо відносно легко відповісти на питання про зміну режиму поширення тепла в тонкому стрижні в залежності від змін в складових його сплаву, то незрівнянно важче простежити (передбачити) екологічні та кліматичні наслідки будівництва великої ГЕС або соціальні наслідки змін податкового законодавства. Можливо, і тут методи математичного моделювання надаватимуть в майбутньому більш значну до-

помогу.

Другий етап – визначення вхідних і вихідних параметрів моделі; розділення вхідних параметрів за ступенем важливості впливу їх зміни на вихідні параметри. Такий процес називається ранжируванням, або поділом по рангах.

Найчастіше неможливо, та й не потрібно враховувати всі фактори, які можуть вплинути на значення величин y_j , що нас цікавлять. Від того, наскільки вміло виділено найважливіші фактори, залежить успіх моделювання, швидкість і ефективність досягнення мети. Виділити найбільш значущі фактори і відсіяти менш важливі може лише фахівець в тій предметній області, до якої належить модель.

Запишемо список величин, від яких залежить поведінка об'єкта або хід процесу, а також тих величин, які бажано отримати в результаті моделювання. Позначимо перші з них (вхідні) через $x_1, x_2, \dots, x_n$; другі (вихідні) через $y_1, y_2, \dots, y_n$. Символічно поведінку об'єкта або процесу можна представити у вигляді:

$$y_j = F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

де F_j – ті дії, які слід провести над вхідними параметрами, щоб отримати результати. Хоча запис $F_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нагадує позначення функції, але зараз він використовується в більш широкому сенсі. Лише у найпростіших ситуаціях тут F є функція в звичайному сенсі; найчастіше вона демонструє лише наявність деякого зв'язку між вхідними і вихідними параметрами моделі.

Вхідні параметри x_i можуть бути відомі "точно", тобто піддаватися (принаймні, в принципі) вимірюванню однозначно і з будь-яким ступенем точності – тоді вони є детермінованими величинами. Так, у класичній механіці, наскільки складною не була б модельована система, вхідні параметри детерміновані і, відповідно, детермінованим буде процес еволюції такої системи. Однак у природі і суспільстві набагато частіше зустрічаються процеси іншого роду, коли значення вхідних параметрів відомі лише з певним ступенем імовірності, тобто ці параметри є імовірнісними (стохастичними), і, відповідно, випадковим буде процес еволюції системи.

Третій етап – побудова математичної моделі. На цьому етапі відбувається перехід від абстрактного формулювання моделі до формулювання, що має конкретне математичне представлення. Після цього математична модель набуває вигляду рівнянь, системи рівнянь, системи нерівностей,

диференціальних рівнянь або системи таких рівнянь та ін.

Найчастіше неможливо, та й не потрібно враховувати всі фактори, які можуть вплинути на значення величин y_j , що нас цікавлять. Від того, наскільки вміло виділено найважливіші фактори, залежить успіх моделювання, швидкість і ефективність досягнення мети.

Відкидання менш значущих чинників загрожує об'єкт моделювання і сприяє розумінню його головних властивостей і закономірностей. Уміло ранжирована модель повинна бути адекватна вихідному об'єкту чи процесу щодо цілей моделювання. Визначити, чи адекватна модель можна тільки в процесі експериментів з нею, аналізу результатів первісного моделювання.

Четвертий етап – вибір методу дослідження математичної моделі. Найчастіше на цьому етапі використовуються числові методи, які не дуже складно програмуються. Як правило, для вирішення однієї й тієї ж задачі підходять кілька методів, що розрізняються ефективністю, точністю, стійкістю і т. д. Від правильного вибору методу часто залежить успіх всього процесу моделювання.

П'ятий етап – розробка алгоритму, реалізація якого дозволить розв'язати поставлену задачу, написання програми конкретною мовою програмування, налагодження програми для ЕОМ. Цей процес важко формалізується. З мов програмування багато професіоналів для математичного моделювання застосовують Fortran: як в силу традицій, так і в силу неперевершеної ефективності компіляторів (для розрахункових робіт) і наявності написаних на ньому величезних, ретельно налагоджених й оптимізованих бібліотек стандартних програм математичних методів. Популярними є такі мови програмування, як Pascal, Basic, C, C++. Усе залежить від характеру задачі та схильностей програміста.

Шостий етап – тестування програми. Після розробки алгоритму та складання програми для ЕОМ необхідно з її допомогою розв'язати найпростішу тестову задачу (бажано, із заздалегідь відомою відповіддю) з метою усунення грубих помилок. Це лише початок процедури тестування, яку важко описати формально вичерпним чином. По суті, тестування може тривати довго і закінчитися тоді, коли користувач за своїми професійними ознаками вважатиме програму вірною.

Сьомий етап – виконання обчислювального експерименту, в процесі якого з'ясовується, чи відповідає модель реальному об'єкту (процесу). Модель буде адекватна реальному процесу, якщо деякі характеристики

процесу, отримані на ЕОМ, збігаються з експериментально отриманими характеристиками із заданим ступенем точності. У разі невідповідності моделі реальному процесу повертаються до одного з попередніх етапів.

Отже, дослідник виконує інтерпретацію, тобто пояснення отриманих кількісних результатів та їх змістовне, тобто неформальне зіставлення з реальною поведінкою досліджуваного об'єкта, а також можливе й багаторазове подальше уточнення моделі і т. д.

4.2. Вибір вхідних параметрів

Найбільш складною і відповідальною задачею при побудові математичної моделі є вибір вхідних параметрів та області їх варіювання. Треба також зазначити, що вхідні параметри можуть бути кількісними та якісними. Прикладами кількісних факторів є температура, тиск, концентрація і т. п. Їх рівням відповідає числова шкала. Різні каталізатори, конструкції апаратів, способи лікування, методики викладання є прикладами якісних факторів. Рівням таких факторів не відповідає числова шкала, і їх порядок не грає ролі.

При моделюванні об'єктів, процесів і явищ особливу увагу приділяють вибору сукупності параметрів і зовнішніх впливів. Для кількісних параметрів визначають їх конкретні значення, які будуть використані у вигляді вихідних даних при моделюванні. Вибір даних повинен враховувати наступне:

- значення параметрів можуть бути детермінованими і стохастичними;
- не всі параметри є стаціонарними.

Ряд параметрів є випадковими величинами за своєю природою. Для спрощення моделі частина з них представляється детермінованими середніми значеннями. Це допустимо, якщо величина має невеликий розкид, або, коли мета моделювання досягається при використанні середніх значень. Іноді детерміновані параметри представляються випадковою величиною. Наприклад, при багаторазовому виконанні програми кількість оброблюваних даних може змінюватися. Всю сукупність варіантів даних можна представити випадковою величиною із заданим законом розподілу ймовірностей.

Якщо число вхідних параметрів буде вибрано недостатнім або серед обраних параметрів будуть відсутні ті, які мають істотний вплив, то навряд чи слід вважати, що побудована модель буде достатньо ефективною для ви-

рішення поставленої задачі. Якщо ж число змінних параметрів буде вибрано неприпустимо великим або серед обраних параметрів є неприпустимі їх комбінації, то задача побудови моделі в першому випадку зажадає великих витрат машинного часу на її реалізацію, у другому – вона стає некоректною.

При виборі параметрів слід керуватися наступними рекомендаціями:

1. За варійовані параметри треба вибирати ті, ступінь впливу яких намагаються з'ясувати при побудові математичної моделі. При цьому не слід захоплюватися їх великою кількістю.

2. Не бажано вибирати за змінні параметри ті, які істотно впливають на параметри, що не контролюються розробленою математичною моделлю.

3. Серед обраних параметрів не повинно бути таких параметрів, які домінують в розробленій математичній моделі, оскільки немає сенсу включати в модель параметри, які слабо впливають, бо їх вплив буде знаходитися в області так званих "шумів".

4. Змінні параметри не повинні мати великих значень коефіцієнтів кореляції, оскільки це призводить до поганої обумовленості розробленої моделі.

5. Кількість змінних параметрів необхідно зіставляти з об'ємом наявної попередньої інформацією про досліджуваний об'єкт, процес або явище.

6. Кількість змінних параметрів необхідно узгоджувати з якістю математичної моделі. При використанні в моделі досить грубих припущень число змінних параметрів повинно бути меншим і, навпаки, їх кількість збільшують, якщо модель досить точно описує всі особливості досліджуваного об'єкта.

7. Якщо відомі основні неточності в математичній моделі, то варійовані параметри необхідно вибирати таким чином, щоб хоча б частково компенсувати неточності моделі.

8. Попередній вибір змінних параметрів слід здійснювати з урахуванням їх впливу на досліджуваний об'єкт, іншими словами потрібно здійснити ранжування параметрів, що дозволить виключити параметри, які несуттєво впливають на об'єкт.

9. Найбільш надійним джерелом інформації про доцільний вибір параметрів, що варіюються, є власний досвід, накопичений при вирішенні подібних задач, або досвід, почерпнутий з літературних джерел.

Ці рекомендації полегшують вибір варійованих параметрів, але тим не менше при відсутності достатнього досвіду процес їх вибору треба по-

вторювати кілька разів з різними комбінаціями параметрів, що варіюються. На жаль, на це витрачається багато часу і коштів. Автоматизувати процес вибору змінних параметрів практично не вдається.

Для виявлення невірних обраних варійованих параметрів їх по черзі виключають з розгляду. Найбільш поширені помилки у виборі вказаних параметрів – це великі значення коефіцієнтів їх взаємної кореляції, які не завжди можна встановити апіорно, виходячи з фізичного сенсу задачі.

Якщо два або кілька варійованих параметрів однаково або майже однаково впливають на величину функції відгуку, тобто функції, що вивчається, то важливо не тільки виявити цей факт, але й оцінити ступінь впливу цього явища і, якщо необхідно, здійснити їх виключення з урахуванням фізичного сенсу параметрів.

Таким чином, якщо коефіцієнти парної кореляції варійованих параметрів близькі до одиниці, то один з варійованих параметрів повинен бути виключений з математичної моделі. Рішення про виключення якогось із параметрів слід приймати з урахуванням фізичного сенсу параметра, а також в залежності від величини інших коефіцієнтів кореляції для даного параметра.

4.3. Пошук математичного опису моделі

На певному етапі розробки і дослідження деякого об'єкта (явища чи процесу) отримують його математичний опис – опис функціональних зв'язків, що мають місце в об'єкті, мовою математики. Математичний опис може бути аналітичним (за допомогою рівнянь), графічним (за допомогою графіків, структурних схем і графів) і табличним (за допомогою таблиць).

Для отримання математичного опису об'єкта зазвичай складають опис його окремих елементів. Сукупність усіх рівнянь елементів формує рівняння об'єкта. Цю сукупність рівнянь (а також структурні схеми) називають математичною моделлю. Така назва обумовлена тим, що при математичному описі (складанні рівнянь) фізичних явищ завжди роблять певні припущення та наближення. Математична модель одного й того ж об'єкта в залежності від мети дослідження може бути різною. Більше того, інколи корисно при розв'язанні однієї й тієї ж задачі на різних етапах приймати різну математичну модель: починають дослідження з найпростішої моделі, а потім її ускладнюють, з тим щоб врахувати додаткові чинники і зв'язки,

які на початковому етапі були відкинуті як несуттєві. Це обумовлюється тим, що до математичної моделі подаються суперечливі вимоги: вона повинна, з одного боку, як можна повніше відображати властивості оригіналу, а з іншого боку, бути по можливості простою, щоб не ускладнювати дослідження.

Одним із шляхів спрощення математичного опису є лінеаризація, тобто заміна нелінійних диференціальних рівнянь, які наприклад, описують якийсь реальний об'єкт, лінійними рівняннями. Зрозуміло, що це можливо зробити не на всьому інтервалі варіювання параметрів, а в певній їх області.

Геометрично лінеаризація нелінійної залежності між двома змінними означає заміну реальної кривої, що з'єднує деякі дві точки, відрізком прямої, дотичної до цієї кривої в точці, в якій розраховується стан об'єкта, і паралельне перенесення початку координат в цю точку.

Математичний опис моделі – це творчий процес, який залежить від цілого ряду чинників: від ступеня повноти інформації про досліджуваний об'єкт, його внутрішнього механізму, мети та задач моделювання, обчислювальних ресурсів, ступеню достовірності очікуваних результатів, інтелектуального рівня, математичної підготовки і досвіду дослідника та інших факторів. Математичні моделі об'єктів з високим ступенем повноти інформації доцільно будувати з використанням звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь в частинних похідних. Це дає змогу вивчати поведінку об'єкта із зміною в часі та по просторових (геометричних) координатах. Для моделей об'єктів з невисоким ступенем інформації про них зазвичай використовують регресійні методи.

Відомо, що модель завжди є наближеною і розраховані по ній параметри відрізняються від дійсних параметрів. Так, оптимальні параметри деякого виробу відрізняються від оптимуму, знайденого за моделлю. У деяких випадках при несприятливому характері вивчення функціональної залежності ці відмінності можуть значно перевищувати похибки математичної моделі. При їх зменшенні відмінності завжди зменшуються, тому проблема збільшення точності математичних моделей є однією з найважливіших у комп'ютерному моделюванні.

Відомі два шляхи підвищення точності моделей. Перший з них полягає в більш ретельному дослідженні й математичному описі всіх особливостей досліджуваного об'єкта. Він використовується при уточненні існую-

чих методик розрахунку. Однак, чим більш досконала методика, тим важче дається подальше підвищення точності, причому воно завжди супроводжується значним збільшенням складності математичного опису. Цей шлях, звичайно є більш обґрунтованим і в перспективі більш ефективним, але досягнення швидких і радикальних успіхів на цьому шляху є, в дійсності, малоймовірним.

Другий шлях підвищення точності – це ідентифікація математичної моделі за результатами випробувань, зрозуміло, якщо така можливість існує. Розробка проекту об'єкта в цьому випадку ведеться за наявною (апріорною) математичною моделлю, що має недостатню точність. Результати перших випробувань виготовленого об'єкта або його компонентів використовуються для ідентифікації, тобто для уточнення моделі за результатами випробувань.

При ідентифікації варіюються різні параметри математичної моделі і уточнення її виходить тільки за рахунок зміни їх величини без збільшення складності моделі. Це є значною перевагою другого шляху підвищення точності моделей.

На завершення треба відзначити, що пошук доцільного опису моделі має циклічний характер, який умовно зображено на рис. 4.2.

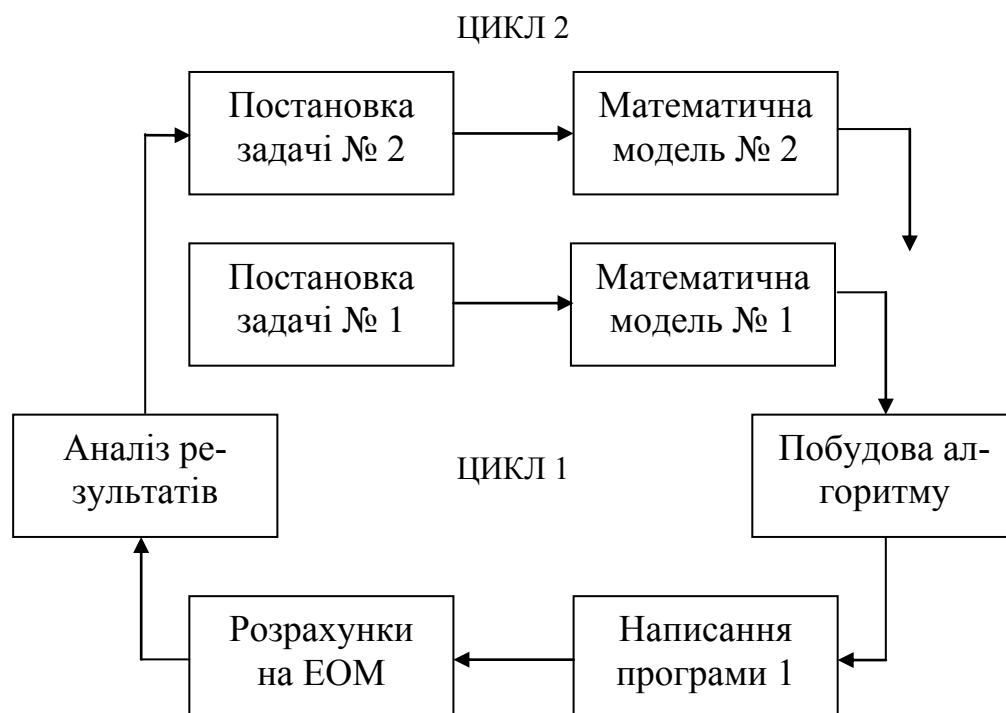


Рисунок 4.2 – Циклічність комп'ютерного моделювання

4.4. Числовий метод дослідження та алгоритм розрахунку

Кожна наука має певну сукупність методів проведення досліджень при вивченні власного предмета, яку можна класифікувати на такі групи:

- методи накопичування фактів, що мають відношення до об'єкта дослідження (спостереження, реєстрація, вимірювання);
- методи описування фактів або властивостей ідеалізованого об'єкта дослідження та факторів, що відбивають ці властивості, а також явищ (процесів), що досліджуються, розвиток яких визначається цими факторами;
- методи аналізу фактів, властивостей, факторів і явищ за різними показниками і критеріями (оцінка, зіставлення, порівняння, класифікація, впровадження, систематизація);
- методи обґрунтування наукових висновків, серед яких мають бути такі методи: побудови (синтезу), доведення, оцінки достовірності;
- методи вибору та обґрунтування наукових рекомендацій, у т. ч. методи побудови (синтезу), оцінки й оптимізації;
- методи інтерпретації та експериментальної перевірки висновків і рекомендацій;
- методи техніко-економічної оцінки рекомендацій.

У процесі вирішення наукової проблеми вчений, як правило, самостійно шукає методи та способи її вирішення.

Кожен з методів має свої сильні й слабкі сторони, жоден з них не може претендувати на роль "найкращого", тому доцільним підходом до проведення дослідження є спирання не на один метод, а на їх сукупність.

Іншими словами, у випадку з вибором методів справа виглядає так само, як і у випадку з вибором доцільних теорій. Тому на кожному кроці перевірки певної гіпотези один з методів може виявитися більш придатним, ніж інші.

При виборі числового методу, перш за все, треба визначити тип системи рівнянь (лінійних, нелінійних, диференціальних зі звичайними або частинними похідними, першого або вищого порядку), яка описує явище, що розглядається. Для диференціальних рівнянь тим самим визначаються і коректні граничні і початкові умови (якщо в них є необхідність), які повинні також узгоджуватися з фізичною та технічною постановкою задачі. У ряді випадків цього не можна досягти – задача виявляється некоректною. Тоді, якщо її не можна звести до коректної, слід застосувати спеціальні методи

рішення, засновані на побудові регулюючих алгоритмів.

Оскільки програма повинна бути придатна для всіх випадків, передбачених цією постановкою задачі, то числовий метод має бути зручним для реалізації на ЕОМ і в той же час достатньо надійним, щоб отримати рішення за будь-якої вихідної інформації, яка задовольняє вимогам постановки задачі.

Під алгоритмом розуміють:

- опис послідовності дій для розв'язання задачі або досягнення поставленої мети;
- правила виконання основних операцій обробки даних;
- опис обчислень за математичними формулами.

Перед початком розробки алгоритму необхідно чітко усвідомити задачу, з'ясувати, що потрібно отримати як результат, які вихідні дані необхідні та які є в наявності, які існують обмеження на ці дані. Далі потрібно записати, які дії необхідно зробити для отримання з вихідних даних необхідного результату.

На практиці найбільш поширеним є такі форми подання алгоритмів:

- словесна (записи природною мовою);
- графічна (зображення з графічних символів);
- псевдокод (напівформалізований опис алгоритмів умовною алгоритмічною мовою, який включає в себе як елементи мови програмування, так і фрази природної мови, загальноприйняті математичні позначення та ін.);
- програмна (тексти мовою програмування).

Словесний спосіб запису алгоритмів – це опис послідовних етапів обробки даних. Алгоритм задається у довільному викладі природною мовою.

Словесний спосіб не набув поширення з наступних причин:

- такі описи строго не формалізуються;
- страждають багатослівністю записів;
- допускають неоднозначність тлумачення окремих записів.

Графічний спосіб подання алгоритмів є більш компактним і наочним порівняно зі словесним.

При графічному поданні алгоритм зображується у вигляді послідовності пов'язаних між собою функціональних блоків, кожен з яких відповідає виконанню однієї або кількох дій. Таке графічне подання називається схемою алгоритму або блок-схемою. У блок-схемі кожному типу дій (введення вихідних даних, обчислення значень виразів, перевірка умов, керу-

вання повторенням дій, закінчення обробки і т. п.) відповідає геометрична фігура, яка має певний вигляд блочного символу. Блокові символи з'єднуються лініями переходів, які визначають черговість виконання дій.

Псевдокод є системою позначень і правил, призначених для однакового запису алгоритмів. Він займає проміжне місце між природною і формальною мовами. З одного боку, він близький до звичайної природної мови, тому алгоритми можуть на ньому записуватися і читатися як звичайний текст. З іншого боку, в псевдокоді використовуються деякі формальні конструкції і математична символіка, що наближає запис алгоритму до загальноприйнятого математичного запису.

У псевдокоді не прийняті строгі синтаксичні правила для запису команд, властиві формальним мовам, що полегшує запис алгоритму на стадії його проектування і дає можливість використовувати більш широкий набір команд, розрахований на абстрактного виконавця. Однак у псевдокоді завжди є деякі конструкції, властиві формальним мовам, що полегшує перехід від запису на псевдокоді до запису алгоритму формальною мовою. Зокрема, в псевдокоді, так само, як і в формальних мовах, є службові слова, зміст яких визначено раз і назавжди. Єдиного або формального визначення псевдокоду не існує, тому можливі різні псевдокоди, що відрізняються набором службових слів і основних (базових) конструкцій.

При розробці алгоритму (а також його обґрунтуванні та, якщо це необхідно, модифікації) необхідно з самого початку дотримуватися певної дисципліни, яка на кожному кроці розробки має дозволяти чітко виділяти необхідні підцілі та простежувати взаємозв'язок між ними. Подібний метод має назву "метод покрокової розробки алгоритму".

Суть цього методу полягає в тому, що алгоритм розробляється "по кроках" (як правило, "зверху вниз"), починаючи з його специфікації, отриманої в результаті аналізу задачі. На кожному кроці приймається невелика кількість рішень, що призводять до поступової деталізації (уточнення) керуючої й інформаційної структури алгоритму. Таким чином, виходить послідовність все більш детальних специфікацій алгоритму, що наближаються до остаточної версії програми.

Цей метод дозволяє розбити алгоритм на частини (модулі), кожна з яких вирішує самостійну (як правило, невелику) підзадачу. Це дає можливість зосередити зусилля на вирішенні підзадачі, реалізованої у вигляді окремої процедури або функції. Зв'язки з управління між модулями здійс-

нюються за допомогою відповідних звернень до них (викликів), а передача інформації від одного модуля до іншого проводиться через параметри та глобальні змінні.

Поряд з використанням методу покрокової розробки необхідно також мати на увазі наступні чинники, які можуть істотно вплинути на алгоритм, що розробляється:

1. Засоби, що надаються тією мовою, якою алгоритм буде запрограмований. При використанні різних мов є можливість розробляти істотно різні алгоритми.

2. Структура даних, на які орієнтований алгоритм. Цей фактор робить винятково великий вплив на ефективність алгоритму, що розробляється.

3. Наближеність подання дійсних чисел у пам'яті ЕОМ. Це вимагає того, щоб при розробці алгоритму усюди, де проводиться порівняння дійсних чисел, використовувався деякий рівень точності, що задається програмістом.

Наведемо кілька головних визначень щодо властивостей обчислювальних методів та алгоритмів, це стійкість, збіжність і коректність.

Стійкість алгоритму – здатність виконувати необхідні обчислення й отримувати кінцевий результат із заданою точністю при зміні параметрів алгоритму і вхідних даних в області, яка називається областю стійкості.

Збіжність – це властивість алгоритму, що розробляється, шляхом зміни його параметрів виконувати необхідні обчислення зі скільки завгодно малою похибкою для заданого класу вхідних даних (тобто при збільшенні кількості ітерацій для алгоритмів, що збігаються, похибка буде прагнути до нуля).

Причому підвищення точності досягається зміною внутрішніх параметрів алгоритму (наприклад, максимально допустимою різницею між попереднім та наступним наближенням).

Коректність обчислювального методу – це властивість безперечно-го існування розв'язку задачі та забезпечення стійкості обчислювального алгоритму, що реалізує цей метод. Тобто дискретна задача повинна мати однозначний розв'язок і бути стійкою до похибок вихідних даних і похибок обчислень.

Придатність алгоритму до реалізації визначається об'ємом пам'яті і швидкістю комп'ютера. Обчислювальний алгоритм має ставити розумні вимоги до ресурсів комп'ютера.

Суворий математичний доказ правильності роботи алгоритму зазви-

чай є дуже складною задачею, головним чином через те, що важко довести правильність роботи циклів і рекурсивних процедур. Разом з тим демонстрація правильної роботи алгоритмів на деякому наборі тестів ще не означає, що він завжди буде працювати правильно.

Слід пам'ятати, що різних комбінацій вхідних даних буває, як правило, нескінченно (або "практично" нескінченно) багато. Тому необхідно супроводжувати алгоритм деяким міркуванням, яке, навіть не будучи суворим доказом, в досить повній мірі переконує в правильності алгоритму. Звичайно, воно не повинно бути міркуванням в такому, наприклад, стилі: "алгоритм перебирає всі варіанти, тому він правильний". Адже тоді цілком слушним виникає питання, а як переконатися, що алгоритм дійсно перебирає всі варіанти.

Мабуть, найкращим реальним підходом до обґрунтування алгоритму є його правильність "з побудови", коли використовується метод покрокової розробки. Щоб отримати правильний алгоритм, необхідно стежити за правильністю деталізації його кроків в ході такої побудови. При цьому слід, звичайно, розуміти, що якщо на етапі аналізу задачі був обраний невірний підхід до її вирішення, то навіть сама акуратна подальша деталізація вихідної специфікації вже не дозволить отримати правильний алгоритм.

Використовуючи метод покрокової розробки, не слід забувати про такий потужний засіб доказового програмування, як анутовання програми твердженнями, розміщеними в коментаріях. Анотації описують властивості обчислень у відповідних точках програми. Вони допомагають уникнути помилок при кроках деталізації та в обґрунтуванні їх правильності. Крім того, анована програма може виступати як доказ своєї правильності.

4.5. Програмна реалізація математичної моделі

Для комп'ютерного моделювання важлива наявність певного програмного забезпечення, яке може бути як досить універсальним (наприклад, звичайні текстові та графічні процесори), так і вельми спеціалізованим, призначеним лише для певного виду моделювання.

Зокрема, комп'ютерна реалізація моделей може бути здійснена:

- за допомогою табличного процесора (як правило, MS Excel);
- шляхом створення програм традиційними мовами програмування (Fortran, Pascal, Basic, Cі та ін.), а також на їх сучасних версіях (Delphi, Visual Basic for Application тощо);
- за допомогою спеціальних пакетів прикладних програм для вирі-

шення математичних задач (Matlab, MathCAD, Maple і т. п.).

Зазвичай в комп'ютерному моделюванні різні види моделювання доповнюють один одного. Так, якщо математична формула дуже складна і не дає явного уявлення про описувані нею процеси, то на допомогу приходять графічні та імітаційні моделі. Комп'ютерна візуалізація може бути набагато дешевше реального створення натуральних моделей.

З появою потужних комп'ютерів поширилося графічне моделювання на основі інженерних систем для створення креслень, схем, графіків.

Але треба чітко розуміти, що комп'ютер є хорошим інструментом для створення і дослідження моделей, але він їх не придумує. Абстрактний аналіз навколишнього світу з метою відтворення його в моделі виконує людина.

Слід зазначити, що рішення задач методом математичного моделювання не завжди після створення моделі необхідно орієнтувати на застосування ЕОМ. Дуже важливі якісні аналітичні методи, які набувають зараз нове звучання в математиці як методи, що не суперечать "машинним", а доповнюють їх. Вони продовжують зберігати важливу самостійну цінність. Всякому рішенню модельної задачі з використанням ЕОМ повинен передувати серйозний математичний аналіз можливих шляхів її вирішення, включаючи якісні аналітичні методи та апріорні оцінки.

На етапі програмної реалізації математичної моделі незалежно від вибору мови програмування важливим є вибір придатного числового методу для розв'язання рівнянь, що описують об'єкт, який досліджується. Некоректний вибір числового методу може стати джерелом багатьох проблем, починаючи від неефективності розрахунків і закінчуючи одержанням некоректних результатів.

Справа в тому, що одній і тій же математичній моделі можна поставити у відповідність багато дискретних моделей та обчислювальних алгоритмів (числових методів). Тому при виборі числового методу необхідно враховувати дві групи вимог:

- 1) дискретна модель повинна бути адекватна до математичної моделі;
- 2) числовий метод має бути коректним і придатним для реалізації на комп'ютері.

Для забезпечення першої вимоги дискретна модель повинна мати властивості збіжності числового методу, виконання дискретних аналогів збереження і якісно правильного поводження розв'язку. Збіжність число-

вого методу означає, що при зменшенні кроку інтегрування точність числового інтегрування зростає. Крім того, різні математичні моделі є вираженням фізичних законів збереження, тому для дискретної моделі закони збереження також повинні виконуватися. Якісно правильне поводження розв'язку означає, що при переході до дискретного аналогу моделі не втрачаються важливі деталі поводження реальної системи.

4.6. Оцінка адекватності та ідентифікація моделі

Необхідною умовою для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт моделювання є вимога адекватності моделі об'єкту.

Адекватність – це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження.

Адекватність моделі визначається з багатьох причин: через ідеалізації зовнішніх умов і режимів функціонування; виключення тих чи інших параметрів; зневаги деякими випадковими чинниками; відсутність точних відомостей про зовнішні дії, певні нюанси структури системи, прийняті апроксимації, інтерполяції. Припущення й гіпотези також ведуть до зменшення відповідності між моделлю та об'єктом. Це призводить до того, що результати моделювання будуть істотно відрізнятися від реальних.

Оцінка адекватності моделі – це проведення спеціальних числових експериментів, результати яких є апіорно відомими. Для перевірки правильності моделі можуть застосовуватися вже відомі експериментальні залежності, існуючі оцінки розв'язку, аналітичні розрахунки у граничних випадках. Для моделі маятника, наприклад, корисним буде простежити за поводженням графіків коливань – це і буде грубою перевіркою правдоподібності руху, що моделюється.

Ще одним тестом може бути перевірка закону збереження енергії. Так, у випадку маятника, що коливається без тертя, повна енергія повинна зберігатися. Однак слід зауважити, що збереження будь-яких відомих інваріантів або закономірностей тільки збільшує ступінь довіри до моделі, але ще не свідчить про відсутність помилок. Отримані дані числового експерименту краще порівняти з експериментальними. У результаті проведення комп'ютерних експериментів виявляються помилки та неточності моделі. Наприклад, якщо амплітуда коливань маятника за відсутності зовнішньої сили починає збільшуватися, то швидше за все існує помилка у

рівняннях руху, наприклад, неправильно вибрані знаки у відповідних коефіцієнтах. Або, наприклад, не врахований певний суттєвий фактор. Тому необхідно виправити рівняння і повторити експерименти з самого початку.

Отже, якщо за результатами перевірки адекватності виявляється неприпустима неузгодженість моделі та об'єкта, виникає необхідність у коригуванні моделі. Треба крок за кроком перевірити коректність розробки моделі на всіх етапах: При цьому перевіряються:

- ступінь спрощеності моделі;
- похибка застосованих числових методів;
- правильність програмної реалізації алгоритмів;
- коректність математичного опису явищ та характеристик об'єкта;
- обґрунтованість вибору методу розв'язку моделі.

Відмінність значень виходу моделі та об'єкта може бути обумовлена наступними причинами:

- умовами проведення експерименту та правильністю вимірювання і фіксування його результатів;
- похибками вимірювальних пристроїв.

При дискретизації неперервної задачі обов'язково виникає похибка дискретизації. Ця похибка є однією з головних складових в похибці обчислювального методу.

Іншою складовою методичної похибки є похибка округлення, яка виникає завдяки скінченній довжині розрядної сітки комп'ютера, що призводить до наближеного представлення дійсних чисел. Величина цієї похибки визначається не тільки довжиною розрядної комп'ютерної сітки, а також чутливістю конкретного алгоритму до похибок округлення.

Похибки розділяють на локальні та глобальні. Локальні похибки виникають на кожному конкретному кроці обчислювального алгоритму, а глобальні включають всі похибки, що виникли як на цьому кроці обчислень, так і на попередніх (ці похибки називають похибками наслідування чи похибками поширення).

Адекватність моделі, як правило, визначається на підставі статистичних оцінок розбіжностей значень вихідних змінних моделі та об'єкта при однакових значеннях вхідних змінних, розрахованих за результатами серії експериментів на об'єкті моделювання.

Завершується етап перевірки адекватності та коригування моделі ви-

значенням і фіксацією області придатності моделі. Під областю придатності розуміється певна кількість умов, при дотриманні яких точність результатів моделювання знаходиться в допустимих межах.

Після успішної перевірки адекватності модель може бути застосована в задачах прогнозу та дослідження об'єкта.

Під ідентифікацією моделі розуміють вибір змінних моделі, а також параметрів її рівнянь з подальшою їх оцінкою на основі статистичних даних, отриманих в результаті спостереження або експерименту.

Узагальнена процедура ідентифікації складається з наступних пунктів:

1. Класифікація об'єкта.
2. Вибір для певного класу об'єкта модель, структуру і параметри якої можна змінювати в процесі ідентифікації.
3. Вибір критерію (оцінки) якості ідентифікації, що характеризує у вигляді функціоналу доступних для спостереження змінних відмінність моделі та об'єкта.
4. Вибір алгоритму ідентифікації (механізму налаштування моделі), що забезпечує збіжність процесу ідентифікації та мінімум критерію якості ідентифікації.

Методи ідентифікації розрізняють на активні та пасивні.

У разі активної ідентифікації об'єкт досліджується за умови виведення його з режиму нормальної експлуатації. Подібну ідентифікацію використовують при розробці нових технологій стосовно до діючих промислових об'єктів, у вивченні нових явищ, в первісній підготовці математичної моделі.

При пасивній ідентифікації об'єкт досліджується в умовах його нормальної експлуатації. Цей метод ідентифікації використовують для уточнення математичної моделі, для стеження за змінами в об'єкті.

4.7. Програмування, налагодження алгоритму і програми

Пристаючи до програмування, перш за все, необхідно визначитися, якою алгоритмічною мовою слід скористатися для реалізації цього етапу комп'ютерного моделювання. Вибір алгоритмічної мови програмування визначається значною кількістю факторів таких, як наявна обчислювальна техніка і встановлене на ній математичне забезпечення; вид задачі, яку планується вирішувати; знання та вміння програмувати якоюсь алгорит-

мічною мовою та ін.

Відомо, що мови програмування бувають високого і низького рівнів. Мови високого рівня є більш близькими до природної людської мови в порівнянні з мовами програмування низького рівня. Створення тексту програми мовою програмування виконується людиною вручну, а переклад тексту програми в машинні коди – трансляція – виконується спеціальними програмами – трансляторами.

Програмування мовами високого рівня, очевидно, простіше, ніж мовами низького рівня. Воно не вимагає глибоких знань устрою комп'ютера і тому цілком доступно людям, які не є фахівцями в обчислювальній техніці. Однак, програми, написані мовами низького рівня, як правило, відрізняються більш високою швидкістю роботи, меншим обсягом і більш повним використанням ресурсів обчислювальної техніки. До мов високого рівня відносяться: Фортран, Паскаль, Сі, Алгол, АДА, Сі++, Delphi, Java та інші.

Мова Сі вважається найбільш ефективною серед мов програмування високого рівня. З одного боку вона не набагато складніше Паскалю або Фортрану, але з іншого має можливості, притаманні мовам програмування низького рівня. Тому Сі іноді називають мовою програмування середнього рівня і використовують як при написанні прикладних програм, так і при розробці системних. Подальшим розвитком мови Сі стали мови Сі++ і Java.

До мов низького рівня належать Асемблер і Автокод. Асемблер, як мова низького рівня, фактично складається з набору команд даної машини, записаних у вигляді скорочень англійською мовою. Автокод – варіант асемблера, розроблений на основі російської мови.

Визначившись з мовою програмування приступають до розробки програми. Перш ніж розробити програму, що реалізовує числовий алгоритм, необхідно скласти блок-схему програми: менш детальну, якщо автор числового алгоритму буде сам складати програму, більш детальну в разі передачі алгоритму для програмування іншій особі – програмісту. Детальна блок-схема сприяє швидкому, спільному з програмістом налагодженню алгоритму і програми.

Початкове налагодження програми зводиться до перевірки її відповідності алгоритму і блок-схемі. Це формальне налагодження.

Наступна фаза налагодження – усунення помилок, що заважають завершити трансляцію програми. Помилки, виявлені транслятором, висвічу-

ються в вихідному вікні. Подібну фазу налагодження часто називають перевіркою синтаксису програми. Знайдені транслятором помилки переважно переглядати і усувати послідовно, оскільки деякі з них можуть виявитися "наведеними", тобто бути формальним наслідком раніше допущених помилок, і не вимагають окремих виправлень.

Після усунення синтаксичних помилок, виявлених транслятором, проводиться семантичне (сміслові) налагодження. Приводом до її початку служать:

- аварійне завершення роботи програми – з повідомленням типу "Програма виконала неприпустиму операцію і буде закрита":

- відмінність результатів рахунків від очікуваних.

Найбільш гнучким, але трудомістким методом семантичного налагодження є включення в текст програми видачі проміжних результатів і повідомлень про знаходження ділянок програми. У різних алгоритмічних мовах є відповідні засоби для здійснення семантичного налагодження.

Складним є також методичне налагодження, тобто перевірка ефективності числового методу і алгоритму та їх доведення. Для цього готуються відповідні тестові приклади. Бажано мати прості точні рішення, що дозволяють виконувати зіставлення з машинним розрахунком. Поступово ці приклади все більше і більше ускладнюються.

Зіставлення з точними рішеннями дозволяють також оцінити практичну точність числового рішення і встановити, перевірити збіжність методу. Практичний розрахунок виявляє характер стійкості обчислювального процесу і дозволяє вибрати оптимальні ітераційні параметри.

Налагодження завершується проведенням серійних розрахунків. В процесі експлуатації програми можуть виявитися недоліки, які в міру необхідності усуваються.

Слід підкреслити, що не можна цілком покладатися на обчислювальні експерименти. В першу чергу потрібно при розробці алгоритму використовувати, якщо не всі досягнуті знання з теорії та практики вирішення поставленої задачі, то щонайменше, основи теорії числових методів їх вирішення.

Звернемо ще увагу на обсяг і форму вихідної інформації, яка виходить в результаті розрахунків за програмою. Буває, що користуючись можливостями ЕОМ намагаються видавати величезний обсяг інформації, але замовник, отримавши її, не має фізичної можливості її використовувати. В інших ви-

падках обсяг вихідної інформації недостатній або має такий вигляд, що необхідні великі зусилля для отримання (вже вручну) додаткової інформації.

Тому потрібно заздалегідь ретельно продумати питання про оптимальний обсяг і форму подання вихідної інформації. Видача зайвої інформації, "про запас", призводить до непродуктивних витрат машинного часу, зносу периферійних пристроїв і невиправданої витраті інших засобів. Недостатня або незручна для використання інформація призводить до надмірної витрати часу замовником.

Відносно інформації, що вводиться слід також продумати як для замовника, так і для програмної реалізації форму і обсяг цієї інформації. При великому її обсязі замовник може "утонути" в потоці інформації, з якої він не зможе витягти необхідні йому знання.

При тестуванні програми важливо так планувати загальну кількість тестів з розробленою програмою, щоб невеликим їх числом охопити всю область дослідження.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Перелічіть основні етапи комп'ютерного моделювання.
2. Назвіть популярні мови програмування.
3. Яких рекомендацій треба дотримуватись при виборі вхідних параметрів математичної моделі?
4. На які групи можна поділити методи проведення досліджень?
5. Що розуміють під терміном "алгоритм"?
6. Перелічіть способи подання алгоритмів.
7. Що таке покрокова розробка алгоритму?
8. Які вимоги треба враховувати при виборі числового методу?
9. Що розуміють під ідентифікацією моделі?

5. ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА АЛГОРИТМІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНИХ МОДЕЛЕЙ

5.1. Формалізація комп'ютерних моделей

Будь-яке моделювання починається з формалізації, основним призначенням якої є перехід від змістовного опису об'єкта до його математичної моделі.

Формалізація – це метод вивчення різних об'єктів, при якому основні закономірності явищ і процесів відображаються в знаковій формі, за допомогою формул або спеціальних знаків, символів чи штучних формалізованих мов, що дозволяє відволіктися від вивчення реальних об'єктів, від змісту теоретичних положень, що їх описують, і оперувати замість цього деякою сукупністю символів (знаків).

Під формалізацією також розуміють метод відображення змістовного знання у формалізованій мові.

Формалізоване відображення реальних явищ і процесів забезпечує узагальненість підходу до вирішення різних класів задач і на основі формування знакових моделей дозволяє знаходити найбільш ефективні рішення, справедливі для всіх задач подібного класу.

Формалізація є необхідною умовою побудови штучних (формалізованих) мов. Одержані за її допомогою результати мають певне наукове значення. У той же час метод формалізації надає можливість звільнитися від інтуїтивних уявлень, малопридатних для науки через їх невизначеність і неоднозначність.

Отже, формалізація передбачає наявність:

- а) алфавіту, тобто певного набору знаків;
- б) правил, за якими з вихідних знаків цього алфавіту можуть бути отримані "слова" та "формули";
- в) правил, за якими від одних слів, формул даної конструкції можна переходити до інших слів і формул (що прийнято називати правилами виведення).

У результаті створюється формальна знакова система у вигляді певної штучної мови.

Штучні мови, що використовуються у формалізації, порівняно з природною мовою більш самостійні і незалежні від матеріального носія знака.

Операції з природними мовними знаками є змістовними, а операції зі знаками штучної мови мають формальний характер.

Побудова штучної мови базується на використанні аксіоматичного методу, завдяки якому вдається одержати всі твердження теорії з невеликої кількості положень (аксіом), які приймаються без доведення.

Формалізація має певні переваги перед іншими методами наукового пізнання:

- забезпечує повноту огляду певної галузі проблем, узагальненість підходу до їх розв'язання;
- її символіка надає стислості та чіткості запису інформації про об'єкт дослідження, що відкриває певні можливості для оперування нею;
- дає можливість шляхом приписування окремим символам і системам певних властивостей уникнути багатозначності термінів;
- дає змогу формувати знакові моделі об'єктів і замінювати вивчення реальних речей та процесів вивченням їх формалізованих моделей.

Важливою особливістю формалізації є можливість проведення в її рамках дослідження якого-небудь об'єкта чисто формальним шляхом (оперування знаками) без безпосереднього звернення до цього об'єкта.

Зазвичай формалізація пов'язана з використанням певного математичного апарата. Вона широко застосовується під час математичного моделювання досліджуваних явищ і процесів

Отже, яскравим прикладом формалізації є математичний опис різних об'єктів і процесів. При цьому математична символіка, що використовується, не тільки допомагає закріпити вже наявні знання про досліджувані об'єкти, явища, але й виступає свого роду інструментом у процесі подальшого їх пізнання.

Використання формалізації як методу теоретичного пізнання пов'язане не тільки з розвитком математики. В хімії, наприклад, відповідна хімічна символіка разом з правилами оперування нею виявилася одним з варіантів формалізованої штучної мови.

Можливість представити ті чи інші теоретичні положення науки у вигляді формалізованої знакової системи має велике значення для пізнання. Але при цьому треба пам'ятати, що формалізація тієї чи іншої теорії можлива тільки при врахуванні її змістовної сторони. Тільки в цьому випадку можуть бути правильно застосовані ті чи інші формалізми. Голе математичне рівняння ще не уявляє фізичної теорії, щоб отримати фізичну

теорію необхідно надати математичним символам конкретний емпіричний зміст.

Мова сучасної науки істотно відрізняється від природної людської мови. Вона містить багато спеціальних термінів, виразів, в ній широко використовуються засоби формалізації, серед яких центральне місце належить математичній формалізації. Виходячи з потреб науки, створюються різні штучні мови, призначені для вирішення тих чи інших задач.

Отже, формалізація забезпечує спільність підходів до вирішення різних задач, дозволяє формувати відомі моделі предметів і явищ, встановлювати закономірності між фактами, що вивчаються.

Символіка штучної мови (хімія, математика, економіка) дозволяє чітко і стисло фіксувати певні значення, не допускаючи різного тлумачення, що неможливо при користуванні звичайною мовою.

Метод формалізації застосовується на всіх етапах наукового дослідження, поєднуючи його з іншими методами. При цьому особливого значення використання формалізації набуває на етапах розробки теоретичних основ і передумов дослідження, а також узагальненні результатів теоретичного й експериментального дослідження.

Змістовний опис є вихідним матеріалом для подальших етапів формалізації. Для моделювання процесу функціонування системи на ЕОМ необхідно перетворити математичну модель процесу у відповідний моделюючий алгоритм і комп'ютерну програму.

Отже, метод формалізації дає можливість звільнитися від інтуїтивних уявлень, малопридатних для науки через їх невизначеність і неоднозначність. Він є необхідною умовою побудови штучних (формалізованих) мов.

5.2. Штучні формалізовані мови

Відомо, що всі мови поділяються на природні (розмовні) та штучні (формалізовані). Природні (розмовні) мови виникли історично, у процесі практичної та теоретичної діяльності людей. У природній мові розрізняють алфавіт і граматику.

Штучні (формалізовані) мови – це особливі системи знаків і символів, які створюються людьми з певною метою: для скорочення запису текстів, здійснення математичних і логічних операцій зі знаками, уникнення багатозначності (полісемії) природної мови. Знаки виявилися вельми зруч-

ні для їх використання в спілкуванні, в пізнавальній діяльності, в науці. Використання формалізованих мов дозволяє отримувати інформацію в компактній формі і, найголовніше, ефективно заощаджувати час. Знаки в силу їх матеріального характеру зручні для машинної обробки, для розвитку технічних систем зв'язку. Один з головних напрямків розвитку сучасної людини пов'язаний з його знаково-символічною діяльністю.

На відміну від природної мови у штучній формалізованій мові застосовуються логічні і математичні знаки; усякого роду багатозначності та нісенітниць по можливості виключаються, застосовуються формули.

Відомий фахівець в області математичної логіки А. Черч підкреслював, що штучна формалізована мова потрібна для відстеження логічної форми.

До штучних або формалізованих мов належать різноманітні системи знаків-сигналів (наприклад, знаки дорожнього руху), кодових систем (наприклад, азбука Морзе), мова формул або наукова мова, яка створюється в різних науках вченими (формули у математиці, логіці, фізиці, хімії та ін.), мова програмування (Алгол, Фортран, Паскаль та інші). Основна особливість штучних мов – їх допоміжна роль у відношенні до природних мов, вузькофункціональний характер використання, більша умовність виразу.

До штучних формалізованих мов також відноситься машинна (комп'ютерна) мова, яка дозволяє записувати різноманітні програми та іншу необхідну інформацію, яку можна зберігати в великих обсягах. Це дозволяє людині збільшувати обсяг пам'яті та підсилювати свої обчислювальні можливості.

Формалізованим штучним мовам не притаманні гнучкість і багатство мови природної. Зате в них відсутня багатозначність термінів (полісемія), яка властива природним мовам. Вони характеризуються точно побудованим синтаксисом (встановлюються правила зв'язку між знаками безвідносно до їх змісту) і однозначною семантикою (семантичні правила формалізованої мови цілком однозначно визначають співвіднесеність знакової системи з певною предметною областю). Таким чином, формалізованим мовам притаманна властивість моносемічності.

Але, на жаль, створення якоїсь єдиної формалізованої мови науки не можливе.

Штучні мови, які використовуються у формалізації, порівняно з природною мовою більш самостійні й незалежні від матеріального носія знака.

Операції з природними мовними знаками є змістовними, а операції зі знаками штучної мови мають формальний характер.

Нажаль формалізовані стандарти на комп'ютерну термінологію в Україні ще не створені, проте вже є спроби формалізації термінології у інших галузях знань.

5.3. Аксиоматичний метод

Аксиоматичний метод – це спосіб побудови наукової теорії, за яким в основу беруться деякі вихідні положення, які називаються аксіомами, а решта положень теорії, які називаються теоремами, доводяться на основі цих аксіом шляхом чисто логічних міркувань.

Якщо аксіоматична теорія будується на основі деякої формалізованої мови для запису її міркувань, а поняття доведення (а з ним і поняття теореми) отримує точне математичне визначення, то аксіоматична теорія, що розвивається подобним чином, називається *формальною*. Якщо ж передбачаються ні формальна мова для запису тверджень аксіоматичної теорії (зокрема, її аксіом і теорем), ні точне математичне визначення поняття доведення, то аксіоматичну теорію, що розвивається подібним чином, називають *неформальною*.

Спосіб побудови теорій у вигляді формальних аксіоматичних теорій є формальним аксіоматичним методом, на відміну від якого неформальний аксіоматичний метод базується на теоріях у вигляді неформальних аксіоматичних теорій.

Наукова значимість аксіоматичного методу була обґрунтована ще Аристотелем, який першим розділив всю множину істинних висловлювань на основні ("принципи") і на ті, що вимагають доказу ("доказувані"). У своєму розвитку аксіоматичний метод пройшов три етапи.

На першому етапі аксіоматичний метод був змістовним, аксіоми приймалися на підставі їх очевидності. Прикладом такої дедуктивної побудови теорії служать "Начала" Евкліда.

На другому етапі Д. Гілберт вніс формальний критерій застосування аксіоматичного методу – вимогу несуперечності, незалежності і повноти системи аксіом.

На третьому етапі аксіоматичний метод стає формалізованим. Відповідно, змінилося і поняття "аксіома". Якщо на першому етапі розвитку аксіоматичного методу вона розумілася не тільки як відправний пункт дока-

зів, але і як істинний стан, який не потребує в силу своєї очевидності в доказі, то в даний час аксіома обґрунтовується як необхідний елемент теорії, коли підтвердження аксіоми розглядається одночасно як підтвердження її аксіоматичних підстав, як вихідного пункту побудови. Крім основних тверджень і таких, що вводяться, в аксіоматичному методі почав виділятися також рівень спеціальних правил виведення. Таким чином, нарівні з аксіомами і теоремами як множиною всіх істинних тверджень даної теорії формулюються аксіоми і теореми для правил виведення – метааксіоми і мета-теореми.

В історії науки можна знайти ряд прикладів переходу на аксіоматичний спосіб викладу теорії. Більш того, послідовне застосування цього методу до логіки доведення теорем в геометрії дозволило переосмислити цю стародавню науку, відкривши світ "неевклідових геометрій" (А. І. Лобачевський, Я. Боян, К. Гаус, Г. Ф. Б. Ріман та інші). Цей метод виявився зручним і продуктивним, оскільки дозволяв вибудовувати наукову теорію буквально як монокристал (так, зокрема, зараз викладається теоретична механіка і класична термодинаміка).

Трохи пізніше, вже в 30-х роках ХХ століття академік А. М. Колмогоров дав аксіоматичне обґрунтування теорії ймовірностей.

З сучасних розумінь аксіоматичний метод зводиться до наступного:

- а) вибирається множина прийнятих без доказів аксіом;
- б) поняття, що входять до них, явно не визначаються в рамках даної теорії;
- в) фіксуються правила визначення та правила вирішення цієї теорії, що дозволяють логічно виводити одні припущення з інших;
- г) всі інші теореми виводяться з "а" на основі "в".

Таким методом в даний час побудовані різні розділи математики (геометрія, теорія ймовірностей, алгебра і ін.), фізики (механіка, термодинаміка); робляться спроби аксіоматизації хімії та біології.

5.4. Алгоритмізація моделі та її комп'ютерна реалізація

Другим етапом моделювання, після формалізації, є етап алгоритмізації моделі та її комп'ютерна реалізація.

Алгоритмізація – це процес побудови алгоритму розв'язання задачі, результатом якого є виділення етапів процесу обробки даних, формальний запис змісту цих етапів і визначення порядку їх виконання.

Алгоритм – це точне розпорядження, яке визначає обчислювальний процес, що веде від варійованих початкових даних до шуканого результату.

Термін "алгоритм" утворився в результаті перекладу на європейські мови імені арабського математика Аль-Хорезмі, який описав правила (алгоритми) виконання основних арифметичних операцій в десятковій системі числення.

Властивості алгоритму:

1) детермінованість – точність вказівок, що виключає їх довільне тлумачення;

2) дискретність – можливість розчленовування обчислювального процесу на окремі елементарні операції, можливість виконання яких не викликає сумнівів;

3) результативність – припинення процесу через певне число кроків з видачею шуканих результатів або повідомлення про неможливість продовження обчислювального процесу;

4) масовість – придатність алгоритму для вирішення всіх задач заданого класу.

Алгоритмічна мова – це набір символів і правил утворення і тлумачення конструкцій цих символів для запису алгоритмів.

Алгоритмізація є етапом, спрямованим на реалізацію ідей і математичних схем у вигляді комп'ютерної моделі об'єкта, явища або процесу функціонування систем.

Процес функціонування системи об'єкта, що досліджується, можна розглядати як послідовну зміну його станів в n -вимірному просторі. Задачею моделювання є побудова функцій z , на основі яких можна провести обчислення бажаних характеристик функціонування об'єкта дослідження. Для цього необхідно мати співвідношення, що зв'язують функції z зі змінними, параметрами і часом, а також початкові умовами в момент часу $t = t_0$.

Існують два типи станів об'єкта, що моделюється:

1) особливі, властиві процесу функціонування об'єкта тільки в деякі моменти часу;

2) неособливі, в яких процес функціонування об'єкта знаходиться весь інший час. У цьому випадку функція стану $z_i(t)$ може змінюватися стрибкоподібно, а між особливими – плавно.

Розглянемо функціонування деякої детермінованої системи SD , в якій відсутні випадкові чинники. Вектор станів такої системи: z . Тоді стан процесу в момент часу $t_0 + j\Delta t$ може бути однозначно визначений із спів-

відношень математичної моделі за відомими початковими умовами. Це дозволяє будувати моделюючий алгоритм процесу функціонування системи.

Для цього перетворимо співвідношення моделі Z до такого виду, щоб зробити зручним обчислення за наявними значеннями. Організуємо лічильник системного часу, який в початковий момент часу показує час t_0 . У загальному випадку і початкові умови z_0 можуть бути випадковими, що задаються відповідним розподілом ймовірностей. При цьому структура моделюючого алгоритму для стохастичних систем в основному залишається попередньою.

Тільки замість стану z тепер необхідно обчислити розподіл ймовірностей для можливих станів. Нехай лічильник системного часу показує час t_0 . Відповідно до заданого розподілу ймовірностей вибирається z . Далі, виходячи з розподілу, отримують стан z_i і т. д., поки не буде побудована одна з можливих реалізацій випадкового багатовимірного процесу.

Розглянутий принцип побудови моделюючих алгоритмів називається $t\Delta$ принципом. Це найбільш універсальний принцип, але з точки зору витрат машинного часу він іноді виявляється неекономічним.

Особливі стани характерні ще й тією обставиною, що функції станів $z(t)$ в ці моменти часу змінюються стрибком, а між особливими станами зміна координат $z(t)$ відбувається плавно і безперервно або не відбувається зовсім. Таким чином, стежачи при моделюванні системи тільки за її особливими станами в ті моменти часу, коли ці стани мають місце, можна отримати інформацію, необхідну для побудови функцій $z(t)$. Очевидно, для описаного типу систем можуть бути побудовані моделюючі алгоритми за "принципом особливих станів". Позначимо стрибкоподібну (релейну) зміну стану z як $z\delta$, а "принцип особливих станів" – як $z\delta$ принцип.

Принцип $z\delta$ відрізняється від принципу $t\Delta$ тим, що крок за часом в цьому випадку не постійний, є випадковою величиною і обчислюється відповідно до інформації про попередній особливий стан.

Принцип $z\delta$ дає можливість для ряду систем істотно зменшити витрати машинного часу на реалізацію моделюючих алгоритмів.

5.5. **Форми подання моделюючих алгоритмів**

Зручною формою подання логічної структури моделей функціонування об'єктів і комп'ютерних програм є схема. На різних етапах моделювання виконуються такі схеми моделюючих алгоритмів і програм:

- *узагальнена* (укрупнена) схема моделюючого алгоритму задає загальний порядок дій при моделюванні об'єкта без будь-яких уточнюючих деталей;

- *детальна* схема моделюючого алгоритму містить уточнення, відсутні в узагальненій схемі.

- *логічна* схема моделюючого алгоритму є логічною структурою моделі функціонування об'єкта.

Схема програми відображає порядок програмної реалізації моделюючого алгоритму з використанням конкретного математичного забезпечення. Схема програми є інтерпретацію логічної схеми моделюючого алгоритму, який розробник програми створює на базі конкретної алгоритмічної мови.

Етапи алгоритмізації моделі та її комп'ютерної реалізації:

1. Побудова логічної схеми моделі.
2. Отримання математичних співвідношень.
3. Перевірка достовірності моделі об'єкта.
4. Вибір інструментальних засобів для моделювання.
5. Складання плану виконання робіт з програмування.
6. Специфікація та побудова схеми програми.
7. Верифікація і перевірка достовірності схеми програми.
8. Проведення програмування моделі.
9. Перевірка достовірності програми.
10. Складання технічної документації по етапу алгоритмізації.

На наступному етапі комп'ютер використовується для проведення робочих розрахунків по готовій програмі. Результати цих розрахунків дозволяють проаналізувати і зробити висновки за характеристиками процесу функціонування досліджуваного об'єкта.

Послідовність дій на цьому етапі:

1. Планування комп'ютерного експерименту з моделлю об'єкта.
2. Визначення вимог до обчислювальних засобів.

3. Проведення робочих розрахунків.
4. Аналіз результатів моделювання системи.
5. Уявлення результатів моделювання.
6. Інтерпретація результатів моделювання.
7. Підведення підсумків моделювання та розробка рекомендацій.
8. Складання технічної документації.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміють під формалізацією комп'ютерних моделей?
 2. Вкажіть переваги формалізації перед іншими методами наукового пізнання.
 3. Що таке штучна мова?
 4. Що розуміють під аксіоматичним методом?
 5. У чому різниця між формальною і неформальною аксіоматичною теорією?
 6. Що розуміють під алгоритмізацією?
 7. Назвіть форми подання моделюючих алгоритмів.
 8. Перелічіть етапи алгоритмізації моделі та її комп'ютерної реалізації.
-

6. ЧИСЛОВЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

6.1. Основні поняття математичного моделювання

Сучасну науку неможливо уявити без широкого застосування математичного моделювання, суть якого полягає в заміні вихідного об'єкта його образом – математичною моделлю – і подальшому вивченні моделі за допомогою реалізованих на комп'ютерах обчислювально-логічних алгоритмів. Такий підхід поєднує в собі переваги як теорії, так і експерименту, оскільки робота проводиться не з самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю, що дає можливість відносно швидко і без істотних витрат досліджувати його властивості і поведінку в різних ситуаціях.

Моделювання можна розглядати як заміщення досліджуваного об'єкта (оригіналу) його умовним образом, описом або іншим об'єктом, що має назву моделлю і забезпечує близьку до оригіналу поведінку в рамках деяких припущень і прийнятних похибок. Моделювання зазвичай виконується з метою пізнання властивостей оригіналу шляхом дослідження його моделі, а не самого об'єкта. Зрозуміло, моделювання виправдано в тому випадку, коли воно простіше створення самого оригіналу або коли оригінал з якихось причин краще взагалі не створювати.

Під моделлю розуміється фізичний або абстрактний об'єкт, властивості якого у певному сенсі схожі з властивостями досліджуваного об'єкта. При цьому вимоги до моделі визначаються розв'язуваною задачею і наявними засобами. Існує ряд загальних вимог до моделей:

1. Адекватність – достатньо точне відображення властивостей об'єкта.
2. Стійкість – забезпечення стабільності результатів моделювання і результатів дослідження моделі після внесення до неї змін.
3. Повнота – надання досліднику всієї необхідної інформації про об'єкт.
4. Гнучкість – можливість відтворення різних ситуацій у всьому діапазоні зміни умов і параметрів.
5. Трудомісткість розробки повинна бути прийнятною для наявного часу і програмних засобів.

У загальному випадку під адекватністю розуміють ступінь відповідності моделі тому реальному явищу чи об'єкту, для опису якого вона буду-

ється. Разом з тим, створювана модель орієнтована, як правило, на дослідження певної підмножини властивостей цього об'єкта. Тому можна вважати, що адекватність моделі визначається ступенем її відповідності не стільки реальному об'єкту, скільки цілям дослідження.

Стійкість моделі – це її здатність зберігати адекватність при дослідженні моделі на всьому можливому діапазоні варіювання параметрів, а також при внесенні певних змін в конфігурацію вихідного об'єкта.

Очевидно, що стійкість є позитивною властивістю моделі. Однак якщо зміна вхідних впливів або параметрів моделі (в деякому заданому діапазоні) не відбивається на значеннях вихідних параметрів, то користь від такої моделі невелика. У зв'язку з цим виникає задача оцінювання чутливості моделі до зміни параметрів робочого навантаження і внутрішніх параметрів самої системи. Таку оцінку проводять по кожному параметру моделі окремо.

Будь-який досліджуваний об'єкт нескінченно складний. Він пов'язаний з іншими об'єктами чи явищами, які, можливо, не представляють інтересу для задачі, що розглядається. Математична модель повинна охоплювати найважливіші для даної задачі сторони об'єкта чи явища.

Математичне моделювання прийнято розглядати як засіб дослідження процесів або явищ за допомогою їх математичних моделей.

Таким чином, моделювання передбачає два основних етапи:

1. Розробку моделі.
2. Дослідження моделі та одержання висновків.

При цьому на кожному з етапів вирішуються різні задачі і використовуються методи і засоби, що відрізняються по суті.

Математичне формулювання задачі зазвичай представляється у вигляді геометричних образів, функцій, систем рівнянь і т. п. Опис об'єкта (явища) може бути представлений за допомогою безперервної або дискретної, детермінованої або стохастичної залежності, або із застосуванням інших математичних форм.

Математичне моделювання суспільних, економічних, біологічних і фізичних явищ, об'єктів, систем і різних пристроїв є одним з найважливіших засобів пізнання природи та інженерного проектування найрізноманітніших систем і пристроїв. Відомі приклади ефективного використання моделювання у створенні ядерних технологій, авіаційних і аерокосмічних систем, у прогнозі атмосферних та океанічних явищ, погоди і т. д.

Однак для таких серйозних сфер моделювання нерідко потрібні суперкомп'ютери і роки роботи великих колективів вчених з підготовки даних для моделювання та його налагодження. Тим не менше, і в цьому випадку математичне моделювання складних систем і пристроїв не тільки економить кошти на проведення досліджень і випробувань, але й може усунути екологічні катастрофи – наприклад, дозволяє відмовитися від випробувань ядерної та термоядерної зброї на користь його математичного моделювання або випробувань аерокосмічних систем перед їх реальними польотами.

Тим часом математичне моделювання на рівні вирішення більш простих задач, наприклад, з області механіки, електротехніки, електроніки, радіотехніки та багатьох інших галузей науки і техніки зараз стало доступним виконувати на сучасних персональних комп'ютерах. А при використанні узагальнених моделей стає можливим моделювання достатньо складних систем, наприклад, телекомунікаційних систем і мереж.

Підкреслимо ще раз, що розвиток науки і техніки тісно пов'язаний з використанням ЕОМ. Це дозволило перейти від найпростіших розрахунків до нової стадії роботи – детальному математичному моделюванню (обчислювальному експерименту), що істотно скорочує потребу в натурних експериментах, а в ряді випадків може їх замінити. Воно дозволяє докладно і глибоко вивчати об'єкти в достатній повноті, недоступній чисто теоретичним підходам. В основі обчислювального експерименту лежить рішення рівнянь математичної моделі аналітичними або числовими методами.

6.2. Аналітичне моделювання

Для аналітичного моделювання характерно, що процеси функціонування об'єкта чи системи записуються у вигляді деяких функціональних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь тощо). Аналітична модель може бути досліджена такими методами:

- 1) аналітичним, коли прагнуть отримати в загальному вигляді явні залежності для характеристик об'єктів і систем;
- 2) числовим, коли не вдається знайти рішення рівнянь у загальному вигляді та їх вирішують для конкретних початкових даних;
- 3) якісним, коли при відсутності рішення знаходять деякі його властивості.

Аналітичні моделі вдається отримати тільки для порівняно простих об'єктів чи явищ. Для складних об'єктів і явищ часто виникають великі математичні проблеми. Для застосування аналітичного методу йдуть на суттєве спрощення початкової моделі. Однак дослідження на спрощеній моделі допомагає отримати лише орієнтовні результати. Аналітичні моделі математично вірно відображають зв'язок між вхідними та вихідними змінними і параметрами. Але їх структура не відображає внутрішню структуру об'єкта.

При аналітичному моделюванні його результати представляються у вигляді аналітичних виразів. Наприклад, підключивши ланцюг, що складається з конденсатора C та резистора R , до джерела постійної напруги E (C , R і E – компоненти цієї системи), можна скласти аналітичний вираз для залежності напруги $u(t)$ на конденсаторі C від часу t :

$$RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = E.$$

Це лінійне диференціальне рівняння і є аналітичною моделлю даного простого лінійного ланцюга. Його аналітичне рішення при початковій умові $u(0) = 0$, яка відповідає розрядженому конденсатору C в момент початку моделювання, дозволяє знайти шукану залежність у вигляді формули:

$$u(t) = E(1 - e^{-t/RC}).$$

Однак навіть у цьому простому прикладі потрібні певні зусилля для вирішення диференціального рівняння або треба скористатися системою комп'ютерної математики з символьними обчисленнями – системою комп'ютерної алгебри.

Для даного цілком тривіального випадку рішення задачі моделювання лінійного RC -ланцюга дає аналітичний вираз достатньо загального вигляду – його можна застосовувати для опису роботи ланцюга при будь-яких номіналах компонентів C , R і E . Можна описати експоненціальний заряд конденсатора C в залежності від резистора R та джерела постійного струму E .

Безумовно, знаходження аналітичних рішень при застосуванні аналітичного моделювання є винятково цінним для виявлення загальних теоретичних закономірностей (у нашому прикладі простих лінійних ланцюгів).

Однак його складність різко зростає в міру ускладнення впливів на модель і збільшення порядку і числа рівнянь стану, що описують модельований об'єкт.

Так, можна отримати більш-менш доступні для огляду результати при моделюванні об'єктів другого або третього порядку, але вже при більшому порядку аналітичні вирази стають надмірно громіздкими, складними і важко осмислюються. Навіть простий електронний підсилювач найчастіше містить десятки компонентів. Тим не менш, багато сучасних систем комп'ютерної математики, наприклад, системи символьної математики Maple, Mathematica або середовище Matlab, здатні значною мірою автоматизувати вирішення складних задач аналітичного моделювання.

6.3. Моделювання числовими методами

У багатьох інженерних областях інтерес до числового математичного моделювання істотно зріс. Це пояснюється, по-перше, інтенсивним розвитком швидкодіючої обчислювальної техніки і наявністю обширного математичного забезпечення, по-друге, бажанням проєктантів скоротити терміни розробки проєктів. Потужні можливості обчислювальної техніки мали суттєвий вплив на розвиток самих числових методів.

Розвиток нових технологій і широке впровадження математичних методів в інженерні дослідження, зростання потужностей обчислювальної техніки, підвищення її якості привели до широкого використання ЕОМ у багатьох галузях науки і техніки. Успішне вирішення більшості науково-технічних задач значною мірою залежить від уміння оперативно застосовувати ЕОМ.

Для вирішення багатьох науково-технічних задач розроблений задовільний математичний апарат. І все ж використання ЕОМ не знімає всіх проблем, які виникають в ході підготовки і вирішення цих задач. Так чи інакше процес вирішення проходить ряд стадій або етапів, кожен з яких має свої труднощі і робить свій вплив на достовірність остаточного результату.

Рішення практичної задачі починається з опису вихідних даних і цілей задачі мовою строго певних математичних понять. Точне формулювання умов і цілей рішення – це математична постановка задачі. Виділяючи найбільш істотні властивості реального об'єкта, дослідник описує їх за

допомогою математичних співвідношень. Цей етап рішення, як відомо, називається побудовою математичної моделі.

Після цього здійснюється пошук методу розв'язання задачі в рамках математичної моделі і будується алгоритм. Нагадаємо, що пошук і розробка алгоритму рішення називають алгоритмізацією. Тут використовуються будь-які форми подання алгоритмів: словесні описи, математичні формули і блок-схеми. У багатьох випадках слідом за побудовою алгоритму виконують так званий контрольний прорахунок – грубу прикидку очікуваних результатів, які використовуються потім для аналізу отриманого рішення.

На наступному етапі алгоритм вирішення задачі записується мовою, зрозумілою ЕОМ. Це етап програмування. У найпростіших випадках може виявитися, що на цьому етапі зовсім і не складається нова програма для ЕОМ, а справа зводиться, наприклад, до використання наявного математичного забезпечення ЕОМ. Далі йде етап виконання програми на ЕОМ і отримання результатів рішення. Час, необхідний на проходження цього етапу, залежить від обсягу обчислень і швидкодії ЕОМ.

Завершальний етап рішення задачі – аналіз та інтерпретація результатів. На цьому етапі відбувається осмислення результатів, зіставлення їх з результатами контрольного прорахунку, а також з даними, отриманими експериментальним шляхом (якщо такі є). При цьому одні результати можуть виявитися прийнятними, а інші – такі, що суперечать змісту реальної задачі; такі результати відкидають. Вищим критерієм придатності отриманих результатів в кінцевому рахунку є практика.

Таким чином, процес вирішення задачі з використанням ЕОМ у досить загальному випадку включає в собі наступні етапи:

- 1) постановка задачі та побудова математичної моделі;
- 2) розробка алгоритму (алгоритмізація);
- 3) запис алгоритму мовою програмування;
- 4) виконання програми на ЕОМ;
- 5) аналіз отриманих результатів.

Найбільш складним і відповідальним етапом вирішення конкретної задачі є побудова математичної моделі. Якщо вибрана математична модель занадто грубо відображає взаємозв'язки досліджуваного об'єкта чи явища, то, які б витончені методи рішення слідом за цим не застосовувалися, отримані результати не відповідатимуть умовам реальної задачі і виявляться марними.

Математична модель може мати вигляд рівняння, системи рівнянь або бути вираженою у формі інших, як завгодно складних, математичних структур або співвідношень самої різної природи. Математичні моделі, зокрема, можуть бути безперервними або дискретними, залежно від того, якими величинами – безперервними або дискретними – вони описані.

Своєрідні труднощі викликає також етап розробки алгоритму, суть якого – пошук методу розв'язання задачі. Справа в тому, що вже навіть для досить простих моделей іноді не вдається отримати результат рішення в аналітичній формі. Нехай, наприклад, задача звелася до вирішення рівняння з однією змінною:

$$2x - \cos 3x = 0.$$

При всій тривіальності цієї задачі визначити корені рівнянь шляхом аналітичних перетворень не вдається. Графічний метод бажаної точності не дає. У таких випадках доводиться використовувати числові методи, які дозволяють отримувати результати шляхом обчислень. З цієї причини найбільш природний шлях реалізації числових методів – використання ЕОМ.

В умовах використання ЕОМ числові методи виступають як потужний математичний засіб вирішення практичних задач. При цьому важливо мати на увазі, що фактор використання ЕОМ не спрощує, а в деякому сенсі навіть ускладнює вирішення питань оцінки точності одержуваних результатів (з причини різкого зростання кількості виконуваних операцій). Суть виникаючих тут проблем помічена у відомому принципі Пітера "ЕОМ багаторазово збільшує некомпетентність обчислювача". З цього дотепного зауваження випливає, що, використовуючи для вирішення задачі ЕОМ, обчислювач не так повинен покладатися на могутність обчислювальної техніки, скільки пам'ятати про необхідність розуміння того, що в кінцевому підсумку він отримає на виході.

На загальну похибку рішення задачі, як це вже зазначалося, впливає цілий ряд факторів. Відзначимо основні з них, користуючись розглядом загального ходу рішення задачі – від побудови математичної моделі до виконання.

Нехай R – точне значення результату деякої задачі. Через невідповідність побудованої математичної моделі реальній ситуації, а також з причини неточності початкових даних замість R буде отриманий результат, який позначимо R_1 . Новоутворена таким чином похибка $\varepsilon_1 = R - R_1$ вже не буде

усунена в ході подальших обчислень (так звана неусувна похибка).

Приступивши до розв'язання задачі в рамках математичної моделі, обирають наближений (наприклад, числовий) метод і, ще не приступаючи до обчислень, допускають нову похибку, що приводить до отримання результату R_2 (замість R_1). Похибку $\varepsilon_2 = R_2 - R_1$ називають похибкою методу.

І, нарешті, неминучість округлення призводить до результату R_3 , що відрізняється від R_2 на величину обчислювальної похибки $\varepsilon_3 = R_3 - R_2$.

Повна похибка ε , очевидно, виходить як сума всіх похибок:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Якщо замість похибок ε_1 , ε_2 і ε_3 вдається отримати лише їх абсолютні верхні оцінки Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , то доводиться задовольнятися оціночним поданням загальної похибки:

$$\varepsilon \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

При вирішенні конкретних задач ті чи інші види похибок можуть або бути відсутніми зовсім, або впливати на остаточний результат незначно. Проте для вичерпного уявлення про точність остаточного результату в кожному випадку необхідний повний аналіз похибок усіх видів. Це повною мірою відноситься і до неусувної похибки – похибки математичної моделі. Маючи недосконалу математичну модель, обчислювач все-таки повинен будь-яким способом скласти уявлення про величину неусувної похибки. Зрозуміло, що в умовах занадто грубої моделі не мало б сенсу наводити уточнений аналіз обчислювальних помилок. Звідси випливає, що оцінка величини неусувної похибки може послужити зручним приводом для пониження вимог до точності наступних обчислень.

Метод скінченних різниць найбільш важливий з числових методів розв'язання прикладних задач зважаючи на його універсальне застосування до широких класів диференціальних рівнянь: лінійних і нелінійних, звичайних і з частинними похідними, з безперервними і розривними коефіцієнтами, з початковими і граничними умовами.

Суть методу скінченних різниць полягає в наступному: функції безперервних аргументів замінюють в межах області, що розглядається, функціями, визначеними в скінченному числі точок сітки. Потім похідні замінюють скінченними різницями. Таким шляхом диференціальні рівняння замінюють алгебраїчними залежностями у формі скінченних різниць. Різні способи, які використовують для вираження похідних і інтегралів за допо-

могою дискретних функцій, називаються різницевиими схемами.

Розрахункова сітка – це сукупність скінченного числа точок, розподілених на тій же області, що і функції безперервних аргументів, які називаються сітковими функціями.

У математичному аналізі відомо таке визначення похідної неперервної функції $f(x, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x}.$$

У скінченних різницях, однак, інтервал Δx ніколи не буває нескінченно малою величиною, він є фізичною характеристикою певної скінченної величини.

Замкнута математична модель – це система рівнянь, що зв'язують різні параметри процесу, яка доповнена *граничними* і *початковими* умовами. Граничні умови – модель взаємодії зовнішніх (по відношенню до досліджуваної області) процесів і процесів всередині області. Початкові умови – модель початкового стану досліджуваного процесу.

6.4. Розрахунок поля температур в однорідній штабі за явною схемою

За приклад моделі, в основі якої лежить рівняння математичної фізики, розглянемо модель поширення тепла в однорідній штабі.

Процес теплопровідності виникає, якщо тіло є неоднорідно нагрітим. Найпростіша для вивчення теплопровідності система – лінійна однорідна штаба. У простій моделі бічні поверхні штаби вважаються теплоізованими, тобто через них немає обміну теплом між штабою і навколишнім середовищем.

Отже, визначимо розподіл температури $u(x, t)$ в металевій штабі для будь-якого значення часу $t > 0$ за умови, що фізичні властивості матеріалу штаби є величинами сталими.

У виразі $u(x, t)$ під u розуміється температура, під x – позовжня координата, а під t – час.

Розподіл температури в металевій штабі може бути описаним наступним диференціальним рівнянням з початковими та граничними умовами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{для } 0 < x < 1, \quad 0 < t < t_{\max} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) & 0 \leq x \leq 1; \\ u(0,t) &= g_0(t) & 0 < t < t_{\max}; \\ u(1,t) &= g_1(t) & 0 < t < t_{\max}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

де A – стала величина, яка залежить від теплопровідних властивостей матеріалу, з якого виготовлено штабу, а також від деяких інших чинників.

Початкова умова задає розподіл температури в штабі в початковий момент часу (його вважають рівним нулю). Граничні умови (у нашому випадку їх має бути дві) у цьому простішому варіанті вказують на те, яка температура підтримується на кінцях штаби.

Зазначимо, що супроводження рівняння теплопровідності початковими і граничними умовами, робить постановку задачі фізично однозначною. Нагадаємо, що якщо для диференціального рівняння задані початкові умови (умови в початковий момент часу), то така задача називається задачею Коші, якщо ж задані граничні умови (на границях досліджуваної області), то така задача називається крайовою задачею, якщо задані і початкові, і граничні умови, то маємо змішану крайову задачу.

Поставлену задачу краще розв'язувати в безрозмірних одиницях. На рис. 6.1 показано металеву штабу одиничної довжини.

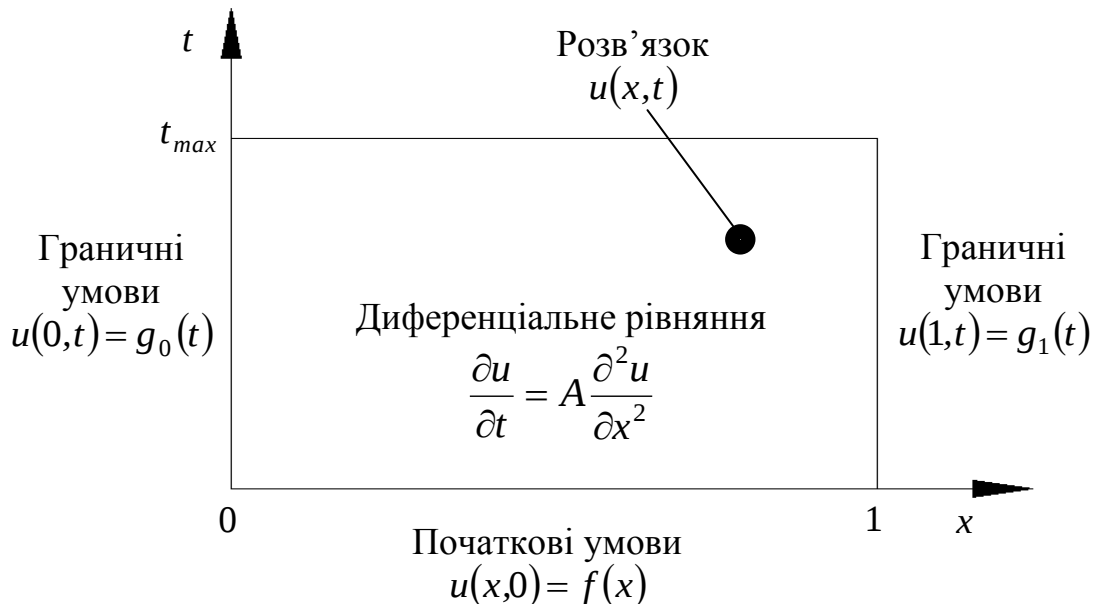


Рисунок 6.1 – Штаба одиничної довжини

Для числового розв'язання поставленої задачі апроксимуємо диференціальне рівняння (6.1) разом з початковими і граничними умовами (6.2) скінченними різницями.

Моделювання процесу теплопровідності пов'язано з дискретизацією як зміни температури за часом, так і вздовж штаби.

Для цього побудуємо сітку в області, обмеженій $0 \leq x \leq 1$ і $0 \leq t \leq t_{\max}$ (рис. 6.2), з кроком $\Delta x = 1/M$ і $\Delta t = t_{\max}/N$, де M і N – деякі цілі числа. Під функцією $v_{i,j}$ розуміють апроксимацію рівняння (6.1) скінченними різницями.

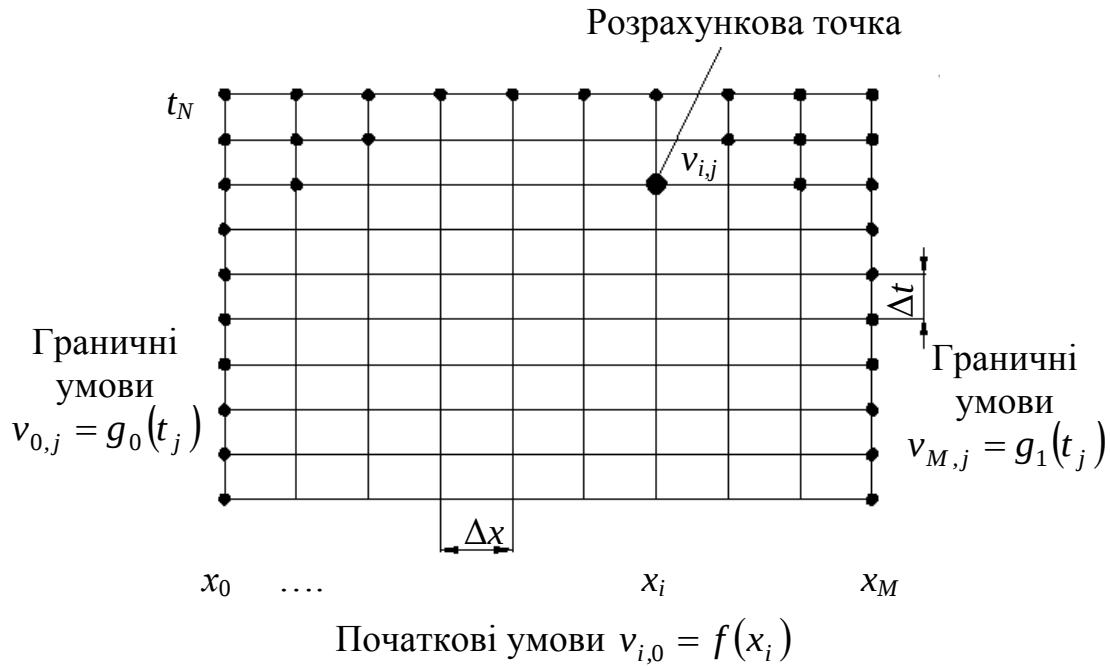


Рисунок 6.2 – Розрахункова сітка

Для будь-якого вузла сітки (i, j) , для якого лічильник i не дорівнює 0 та M , а лічильник j не дорівнює 0, похідні диференціального рівняння (6.1) можна замінити скінченними різницями наступним чином:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta \tau};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{\Delta x^2}.$$

Тоді рівняння (6.1) наближено замінюється виразом:

$$\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t} = A \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{\Delta x^2}.$$

Звідки отримують

$$v_{i,j+1} - v_{i,j} = \frac{A\Delta t}{\Delta x^2} (v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}). \quad (6.3)$$

Нас буде цікавити температура в точці $(i, j + 1)$, тому розв'яжемо рівняння (6.3) відносно температури в точці $(i, j + 1)$

$$v_{i,j+1} = \lambda v_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)v_{i,j} + \lambda v_{i+1,j}, \quad (6.4)$$

де

$$\lambda = \frac{A\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Таким чином, із диференціального рівняння (6.1) отримано зв'язок між температурою наступного $(j + 1)$ і поточного шарів (j) .

На рис. 6.3 хрестиками і маленькими колами позначені ті вузли сітки, які задіяні при визначенні похідних у рівнянні (6.4).

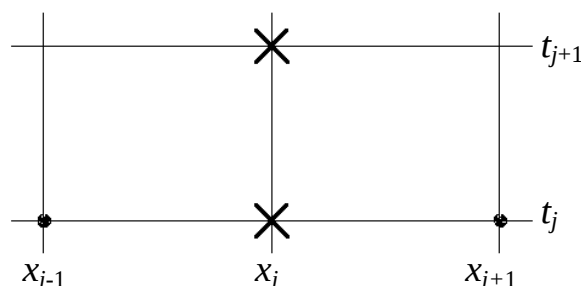


Рисунок 6.3 – Розрахункові точки за явною схемою

Якщо для будь-якого рівня часу t_j відомі значення температури $v_{i,j}$, то з рівняння (6.4) можна безпосередньо визначити значення температури при t_{j+1} , тобто в шарі $(j + 1)$. Подібна схема розрахунку має назву *явної*.

Слід відмітити, що сукупність вузлів у фіксований момент часу називається шаром.

Але виникають питання. Де взяти значення температури в нульовому шарі, тобто при $t = 0$? Зазначимо, що для визначення температури в нульовому шарі застосовуються початкові умови, які записуються у вигляді:

$$v_{i,0} = f(x_i). \quad (6.5)$$

Подібні ж питання постають для граничних точок, що мають значення лічильника i , які дорівнюють 0 і M . Виходячи з граничних умов, можна зробити висновки, що

$$\begin{aligned} v_{0,j+1} &= g_0(t_{j+1}); \\ v_{M,j+1} &= g_1(t_{j+1}). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Застосувавши початкові умови у вигляді (6.5) і граничні умови у вигляді (6.6), можна за рівнянням (6.4) розрахувати значення температури у шарі ($j = 1$) і продовжити розрахунки до шару з номером N , тобто поступово збільшуючи час прогріву штаби.

Розглянемо процес зміни температури у штабі з паралельними сторонами ($0 \leq x \leq L$) за умови, що відомий коефіцієнт α її теплопровідності та в початковий момент часу ($t = 0$) температура θ_0 рівномірно розподілена вздовж штаби. Дві взаємно протилежні сторони знаходяться при постійній температурі θ_1 . Необхідно знайти розподіл температури залежно від часу та координати розташування пробної точки.

Рівняння теплопровідності матиме наступний вигляд:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (6.7)$$

Уведемо для розгляду безрозмірні величини

$$T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}; \quad \tau = \frac{\alpha t}{L^2}; \quad X = \frac{x}{L}.$$

Тоді рівняння (6.7) може бути переписаним і поданим у наступному вигляді:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = A \frac{\partial^2 T}{\partial X^2},$$

яке будемо розв'язувати за наявності таких умов:

$$\tau = 0: \quad T = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq X \leq 1;$$

$$\tau > 0: \quad T = 1 \quad \text{при} \quad X = 0 \quad \text{і} \quad X = 1.$$

За цих обставин початкові і граничні умови приймуть доволі просту форму:

$$\begin{aligned} f(X) &= 0; \\ g_0(\tau) &= g_1(\tau) = 1. \end{aligned}$$

Слід зазначити, що модифікацією функціональних залежностей $f(X)$, $g_0(\tau)$, $g_1(\tau)$ для початкових і граничних умов можна розрахувати відповідне поле температур.

Результати розрахунків поля температур у безрозмірному вигляді показані на рис. 6.4. На цьому рисунку маленькі кола відповідають розрахунковим точкам. Криві побудовані в інтервалі безрозмірного часу від 0,05 до 0,35 з кроком 0,05. Із наведених даних випливає, що зі збільшенням часу температура зростає, наближаючись до одиниці.

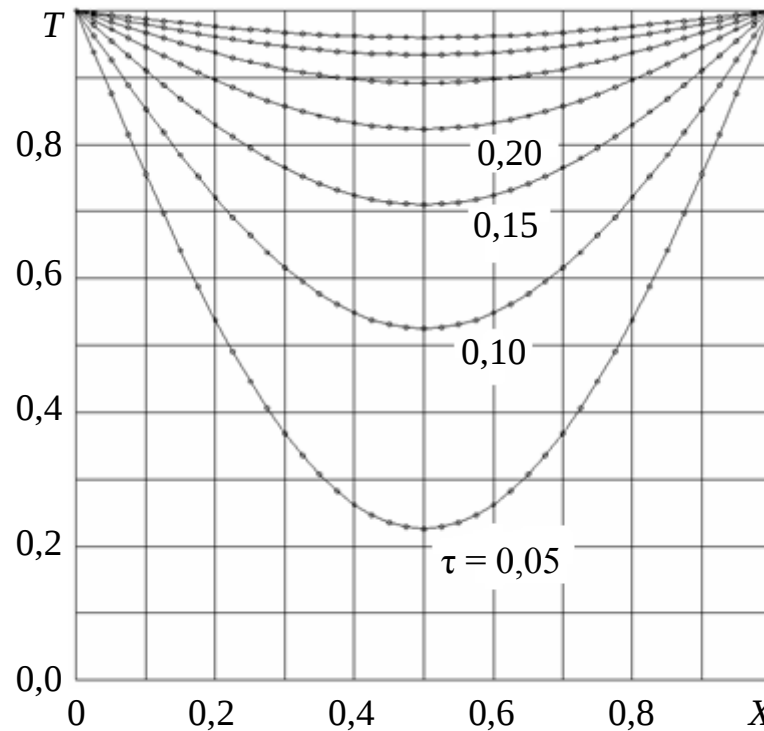


Рисунок 6.4 – Результати розрахунку безрозмірної температури за явною схемою

хунковим точкам. Криві побудовані в інтервалі безрозмірного часу від 0,05 до 0,35 з кроком 0,05. Із наведених даних випливає, що зі збільшенням часу температура зростає, наближаючись до одиниці.

6.5. Розрахунок поля температур в однорідній штабі за неявною схемою

У вище розглянутому прикладі застосування явного методу розв'язання диференціального рівняння (6.1) апроксимовані температури $v_{i,j}$ у вузлах сітки залежали тільки від $v_{i-1,j-1}$, $v_{i,j-1}$ і $v_{i+1,j-1}$. З розгляду рис. 6.5 випливає, що за цим підходом визначення температури v можливе тільки в зоні, позначеній літерою A . Саме вузли цієї зони задіяні при визначенні розподілу температури в штабі. У той же час відомо, що для визначення поля температур, обумовленого диференціальним рівнянням (6.1) та початковими і граничними умовами (6.2), необхідно проводити розрахунки як в зоні A , так і в зоні B .

Явна різницева схема зручна в застосуванні але стійка лише при виконанні умови

$$\frac{A\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Цю обставину треба враховувати при виборі кроку за часом і довжиною штаби.

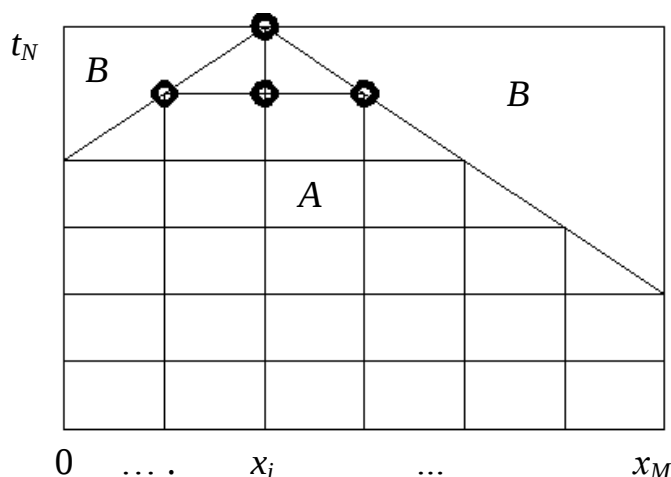


Рисунок 6.5 – Обмеження явної схеми розрахунку

Розв'яжемо рівняння (6.1) з початковими і граничними умовами (6.2) за дещо іншою схемою апроксимаційного подання похідних, яку називають неявною схемою. Запишемо скінченні різниці похідних у наступному вигляді:

$$\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t} = A \frac{v_{i-1,j+1} - 2v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1}}{\Delta x^2}. \quad (6.8)$$

На відміну від попереднього прикладу, коли друга похідна визначалася в j -му шарі з часом t_j , зараз вона знаходиться із значеннями апроксимованої температури в шарі $j+1$, якому відповідає час t_{j+1} . Це призводить до іншої схеми розташування чотирьох вузлових точок (рис. 6.6), задіяних в обчислювальному процесі.

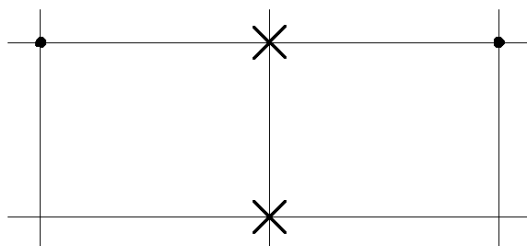


Рисунок 6.6 – Розрахункові точки за неявною схемою

Розв'яжемо рівняння (6.8) відносно $v_{i,j}$, яке запишемо в правій частині розв'язку. Будемо мати вираз:

$$-\lambda v_{i-1,j+1} + (1 + 2\lambda)v_{i,j+1} - v_{i+1,j+1} = v_{i,j}. \quad (6.9)$$

Коефіцієнт λ має той же сенс, що й у формулі 6.4.

Отже, на відміну від вище розглянутої явної схеми кожне різницеве рівняння другої схеми містить на кожному новому шарі три невідомі значення, які неможливо визначити відразу ж, як це має місце в явній схемі. При цьому друга різницева схема складається з лінійних триточкових рівнянь, тобто кожне рівняння містить невідому функцію в трьох точках нового шару.

Граничні та початкові умови залишаються тими ж самими, що й у вище розглянутому прикладі:

$$\begin{aligned} v_{0,j+1} &= g_0(t_{j+1}), \\ v_{M,j+1} &= g_1(t_{j+1}), \\ v_{i,0} &= f(x_i). \end{aligned}$$

Рівняння (6.9) можуть бути записані для кожної вузлової точки з діапазону $1 \leq i \leq M - 1$ для будь-якого моменту часу, що призведе до системи з $M - 1$ рівнянь з $M - 1$ невідомими $v_{i,j+1}$.

Розглянемо розв'язання наступної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} (1 + 2\lambda)v_{1,j+1} - \lambda v_{2,j+1} = v_{1,j} + \lambda g_0(t_{j+1}); \\ -\lambda v_{i-1,j+1} + (1 + 2\lambda)v_{i,j+1} - \lambda v_{i+1,j+1} = v_{i,j} & \text{для } 2 \leq i \leq M - 2; \\ -\lambda v_{M-2,j+1} + (1 + 2\lambda)v_{M-1,j+1} = v_{M-1,j} + \lambda g_1(t_{j+1}). \end{cases} \quad (6.10)$$

Цю систему рівнянь зручніше записати в такому вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_1 v_1 + c_1 v_2 & = d_1; \\ a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3 & = d_2; \\ a_3 v_2 + b_3 v_3 + c_3 v_4 & = d_3; \\ \dots\dots\dots & \dots \\ a_i v_{i-1} + b_i v_i + c_i v_{i+1} & = d_i; \\ \dots\dots\dots & \dots \\ a_{N-1} v_{N-2} + b_{N-1} v_{N-1} + c_{N-1} v_N & = d_{N-1}; \\ a_N v_{N-1} + b_N v_N & = d_N. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

У системах (6.10) і (6.11) для скорочення запису індекси $(j + 1)$ при всіх температурах v пропущені. Праві частини рівнянь (6.10), які є відомими величинами, для спрощення запису позначені як $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_N$, де $N = M - 1$.

Система рівнянь (6.11) має назву тридіагональної матриці, оскільки заповненими є тільки три діагональні елементи кожного рядка. Цю систему можна розв'язати відомим методом Гауса, але при цьому мають бути заповнені всі нульові члени, тому матриця буде мати значний розмір і буде виконано багато зайвих обчислювальних операцій, що є недоцільним.

Краще для розв'язання тридіагональної матриці застосовувати так званий метод прогонки в наступній формі:

$$v_i = \gamma_i - \frac{c_i}{\beta_i} v_{i+1}. \quad (6.12)$$

Коефіцієнти β_i і γ_i будуть розглянуті трошки нижче.

Підстановка виразу (6.12) до системи (6.11) призведе до наступного запису:

$$a_i \left(\gamma_{i-1} - \frac{c_{i-1}}{\beta_{i-1}} v_i \right) + b_i v_i + c_i v_{i+1} = d_i,$$

з якого можна визначити v_i :

$$v_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\beta_{i-1}}} - \frac{c_i v_{i+1}}{b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\beta_{i-1}}}.$$

Це дає можливість застосувати наступну рекурсивну схему:

$$\beta_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\beta_{i-1}};$$

$$\gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{\beta_i}.$$

З першого рівняння системи (6.11) маємо

$$v_1 = \frac{d_1}{b_1} - \frac{c_1}{b_1} v_2,$$

де $\beta_1 = b_1$.

Коефіцієнт γ_1 дорівнює $\gamma_1 = d_1/\beta_1$.

Із останнього рівняння системи (6.11) можна отримати

$$v_N = \frac{d_N - a_N v_{N-1}}{b_N} = \frac{d_N - a_N \left(\gamma_{N-1} - \frac{c_{N-1}}{\beta_{N-1}} \right)}{b_N}.$$

Звідки

$$v_N = \frac{d_N - a_N \gamma_{N-1}}{b_N - \frac{a_N c_{N-1}}{\beta_{N-1}}} = \gamma_N.$$

Таким чином, алгоритм розв'язання тридіагональної матриці у стислому вигляді запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} v_N &= \gamma_N; \\ v_i &= \gamma_i - \frac{c_i v_{i+1}}{\beta_i} \quad i = N-1, N-2, \dots, 1, \end{aligned}$$

в якому

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1; \quad \gamma_1 = \frac{d_1}{\beta_1}; \\ \beta_i &= b_i - \frac{a_i c_i}{\beta_{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots, N; \\ \gamma_i &= \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{\beta_i} \quad i = 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

Таким чином, у разі неявної схеми, щоб розрахувати значення функції температур в кожен наступний момент часу, тобто, щоб перейти на наступний шар за часом, необхідно кожного разу вирішувати методом прогонки лінійну систему.

Результати розрахунків за неявною схемою в графічному вигляді наведені на рис. 6.7. Їм відповідають криві без додаткових позначень. На цьому ж рисунку для порівняння показані результати розрахунків поля температур в однорідній штабі, отримані із застосуванням явної схеми. Це криві з нанесеними на них точками, вони повністю відповідають графічним даним, наведеним на рис. 6.4.

Як впливає з розгляду рис. 6.7, результати розрахунків проведені за явною і неявною схемами дуже близькі, що і очікувалося.

Зрозуміло, що коло задач, для розв'язання яких застосовується числове математичне моделювання, не обмежується розрахунками температурних полів. Існує безліч задач, рішення яких можна отримати ретельно підібраними числовими методами.

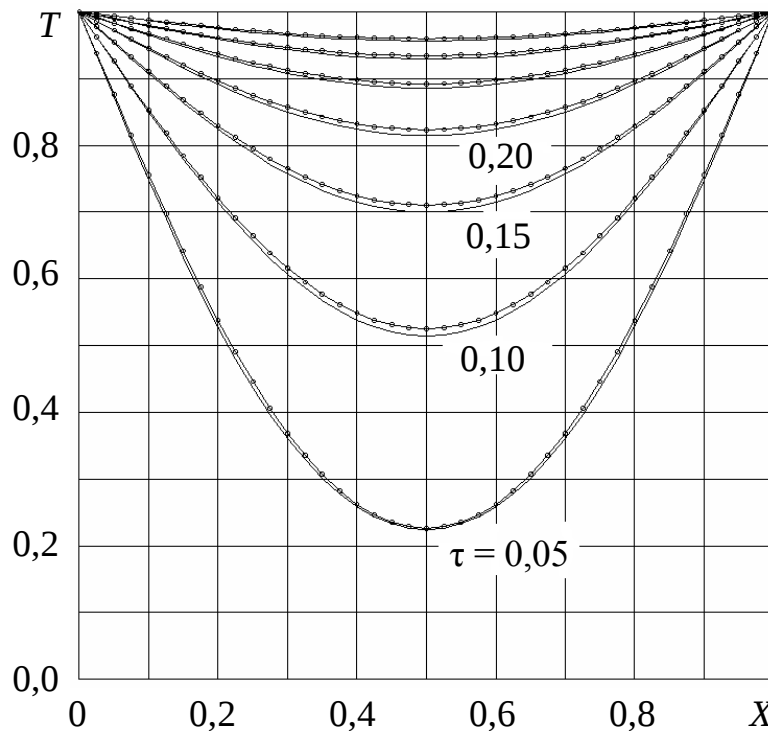


Рисунок 6.7 – Результати розрахунку безрозмірної температури за неявною схемою

На завершення треба відзначити, що сучасні числові методи і потужні ЕОМ надали можливість розв'язувати такі задачі з числового математичного моделювання, про які раніше можна було тільки мріяти. Але застосовувати числові методи не так просто. Треба пам'ятати, що ЕОМ уміють виконувати тільки арифметичні дії та логічні операції. Тому окрім розробки математичної моделі необхідна ще розробка відповідного алгоритму, який зводить всі розрахунки до послідовності арифметичних і логічних дій. Вибирати числову математичну модель та алгоритм треба з урахуванням швидкодії комп'ютера та об'єму його пам'яті: занадто складна модель може виявитися комп'ютеру не під силу, а дуже проста – не відповідатиме фізичній точності об'єкта, що вивчається засобами числового математичного моделювання.

Безпосередньо алгоритм і програма для ЕОМ мають бути ретельно перевірені. Але перевірка програми справа нелегка, про що свідчить популярне твердження: "В будь-якій як завгодно малій програмі є щонайменше одна помилка". Про це треба обов'язково пам'ятати, розв'язуючи задачі числового математичного моделювання.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Назвіть загальні вимоги математичних моделей.
 2. Чим характеризується аналітичне моделювання?
 3. Чим пояснюється інтерес до числового математичного моделювання?
 4. Назвіть етапи числового математичного моделювання.
 5. Які похибки притаманні числовим розрахункам?
 6. У чому суть методу скінченних різниць?
 7. Яка із розрахункових схем – явна чи неявна – легше реалізуються на комп'ютері?
 8. Якій із розрахункових схем притаманний більш високий ступінь стійкості?
 9. З якою метою застосовуються граничні та початкові умови?
-

7. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

7.1. Поняття імітаційного моделювання

У світі інформаційних технологій імітаційне моделювання переживає бурхливий розвиток. Інтерес до цього виду моделювання поживавився у зв'язку з істотним технологічним розвитком систем моделювання, які базуються на новітніх інформаційних технологіях, включаючи розвинені графічні оболонки для цілей конструювання моделей та інтерпретації вихідних результатів моделювання, мультимедійні засоби та відео, анімацію в реальному часі, об'єктно-орієнтоване програмування, Internet-рішення та ін.

Імітаційне моделювання (від англ. Simulation) – це процес конструювання моделі реальної системи і постановки експериментів на основі цієї моделі з метою покращення функціонування системи.

Імітаційне моделювання реалізується за допомогою набору математичних інструментальних засобів, спеціальних комп'ютерних програм і технологій програмування.

Під *імітацією* з використанням ЕОМ розуміють числовий метод проведення на комп'ютерах експериментів з математичними моделями, які описують поведінку складної системи протягом тривалого періоду часу.

Імітаційною моделлю називається спеціальний програмний комплекс, який дозволяє імітувати діяльність деякого складного об'єкта. Імітаційну модель потрібно створювати. Для цього необхідне спеціальне програмне забезпечення – система моделювання (simulation system). Специфіка такої системи визначається технологією роботи, набором мовних засобів, сервісних програм і прийомів моделювання.

У вузькому значенні *імітаційна модель* – логіко-математичний опис об'єкта, який може бути використаний для експериментування на комп'ютері в цілях проектування, аналізу та оцінки функціонування об'єкта.

Умовно імітаційну модель можна представити у вигляді програмно (або апаратно) реалізованих функціональних блоків.

При імітаційному моделюванні модель, що реалізує алгоритм, відтворює процес функціонування системи в часі. Імітуються елементарні явища, що становлять процес, із збереженням їх логічної структури і послідовності протікання в часі.

Імітаційній моделі притаманна найголовніша властивість моделей взагалі – вона може бути об'єктом експерименту.

Принципова відмінність імітаційного експерименту від натурного полягає в тому, що в процесі імітації експеримент проводиться з моделлю реальної системи, представленої у вигляді комп'ютерної програми, а не з самою системою.

Всі імітаційні моделі є моделями типу "чорного ящика". Тому для отримання потрібної інформації або результатів необхідно задатися вхідними величинами і здійснити "прогін" імітаційних моделей на ЕОМ, а не "вирішувати" їх. Імітаційні моделі не здатні формувати своє власне рішення у тому вигляді, в якому це має місце в аналітичних моделях, а можуть лише служити засобом для аналізу поведінки системи в умовах, які визначаються експериментом. Імітаційне моделювання скоріше ставиться не до теорії, а до методології вирішення проблем. І тому імітаційне моделювання слід вважати одним з методів вирішення складних задач.

Отже, імітаційне моделювання полягає у створенні комп'ютерної програми (або пакета програм), що імітує поведінку складної технічної, економічної чи іншої системи на ЕОМ з необхідною точністю. Воно передбачає формальний опис логіки функціонування досліджуваної системи з плином часу, яке враховує суттєві взаємодії її компонентів і забезпечує проведення відповідних експериментів.

Об'єктно-орієнтовані комп'ютерні симуляції використовуються для дослідження поведінки технічних, економічних, біологічних, соціальних та інших систем, для створення комп'ютерних ігор, так званого "віртуального світу", навчальних програм та анімацій. Наприклад, модель технологічного процесу, деякої галузі виробництва тощо.

Метод імітаційного моделювання став швидко розвиватися з появою цифрових обчислювальних машин з великою продуктивністю і пам'яттю.

На завершення цього питання треба зазначити, що однією з основних цілей імітаційного моделювання є визначення показників ефективності різних операцій. Ці показники можуть виступати у вигляді оцінок характеристик випадкових величин або процесів, або ймовірностей результату операцій. У першому випадку – це час, витрата ресурсів, чисельності протидіючих сторін, відстані і т. п. У другому випадку показник ефективності виступає як ймовірність, наприклад, досягнення мети операції в заданий термін, справного стану техніки і т. д.

При проведенні імітаційного моделювання можна виділити наступні етапи процесу імітації.

1. Вибір інформативних (інтеграційних) характеристик об'єкта, способів їх здобуття і аналізу; встановлення меж обмежень та ефективності системи, що підлягає вивченню.

2. Побудова моделі впливу зовнішнього середовища на систему у вигляді сукупності імітаційних моделей зовнішніх чинників.

3. Розробка моделі системи на основі окремих імітаційних моделей (модулів) підсистем, об'єднаних своїми взаємодіями в єдине ціле, тобто перехід від реальної системи до деякої логічної системи (абстрагування).

4. Підготовка даних – відбір даних необхідних для побудови моделі та подання їх у відповідній формі.

5. Трансляція моделі – опис моделі мовою, прийнятною для використання на ЕОМ.

6. Вибір способу дослідження імітаційної моделі відповідно до методів планування імітаційних експериментів.

7. Оцінка адекватності – підвищена до прийнятного рівня ступінь упевненості, з якою можна судити щодо коригування висновків про реальну систему.

8. Стратегічне планування – планування експерименту.

9. Тактичне планування – визначення способу проведення кожної серії випробувань, представлених планом експерименту.

10. Експериментування – процес здійснення імітації з метою одержання бажаних даних і аналізу чутливості.

11. Інтерпретація – побудова висновків за даними, отриманими шляхом імітації.

12. Реалізація – практичне використання моделі.

13. Документування – реєстрація ходу здійснення проекту та його результатів.

7.2. Переваги та недоліки імітаційного моделювання

До імітаційного моделювання вдаються зазвичай в тих випадках, коли:

- не існує закінченої постановки задачі на дослідження та йде процес пізнання об'єкта моделювання;
- не можна вирішити задачу аналітичним способом, за допомогою фізичного експерименту;

- немає аналітичних методів розв'язання сформульованої задачі;
- аналітичні методи існують, але вони не задовольняють вимогам точності і достовірності;
- аналітичні методи існують, але їх обчислювальні процедури складні навіть для потужних комп'ютерів;
- реалізація відомих процедур стикається з недостатньою математичною підготовкою дослідника;
- досліднику потрібно знати не тільки оцінки шуканих характеристик, але й динаміку всього випадкового процесу;
- натурний експеримент дуже дорогий;
- натурний експеримент може порушити хід виробничого процесу або порядок роботи підприємства;
- складовою частиною системи є люди (люди будуть відчувати, що за ними спостерігають, внаслідок чого можуть змінити свою поведінку);
- виявляється складним підтримання одних і тих же робочих умов при кожному повторному експерименті або на протязі всього часу проведення серії експериментів;
- при експериментуванні з реальними системами може виявитися неможливим дослідження багатьох альтернативних варіантів;
- необхідно досліджувати поведінку системи при введенні до неї нових елементів;
- досліджувана система є елементом більш складної системи, інші елементи якої мають реальне втілення.

До переваг методу імітаційного моделювання можуть бути віднесені:

- проведення експерименту над моделлю системи, для якої натурний експеримент неможливо здійснити з етичних міркувань або у випадках, коли експеримент пов'язаний з небезпекою для життя, або має значну вартість, або внаслідок того, що експеримент не можна провести з минулим;
- вирішення задач, аналітичні методи для яких непридатні, наприклад, в разі безперервнодискретних чинників, випадкових дій, нелінійних характеристик елементів системи тощо;
- є можливість аналізу загальносистемних ситуацій і ухвалення рішення за допомогою ЕОМ, у тому числі для таких складних систем, вибір критерію порівняння стратегій поведінки яких на рівні проектування не можна здійснити;

- скорочення термінів і пошук проектних рішень, які є оптимальними за деякими критеріями оцінки ефективності;
- проведення аналізу варіантів структури великих систем, різних алгоритмів управління, вивчення впливу змін параметрів системи на її характеристики і так далі.

До переваг імітаційного моделювання можна також віднести:

- відносну простоту алгоритму;
- малу зв'язність алгоритму;
- стійкість до випадкових збоїв комп'ютера.

Завдяки своїй простоті ідея імітаційного моделювання інтуїтивно приваблива для дослідників, для керівників. І хоча вчені і фахівці з високою математичною підготовкою імітаційний підхід представляють грубим силовим прийомом або останнім засобом, в той же час цей метод є найпоширенішим інструментом в руках вченого та фахівця, які займаються проблемами управління і дослідження операцій.

Основною перевагою імітаційних моделей в порівнянні з аналітичними є можливість вирішення більш складних задач. Імітаційні моделі дозволяють легко враховувати наявність дискретних або безперервних елементів, нелінійні характеристики, випадкові впливи та ін. Тому цей метод широко застосовується на етапі проектування складних систем. Основним засобом реалізації імітаційного моделювання служить ЕОМ, що дозволяє здійснювати цифрове моделювання систем і сигналів.

Інформація, наведена на рис. 7.1, свідчить про те, що графік залежності імітаційної моделі має експоненціальний характер, а графік залежності аналітичної моделі демонструє той факт, що із зростанням складності об'єкта складність моделі зростає дуже швидко. У точці перетину кривих обидві моделі (аналітична та імітаційна) мають однакову складність.

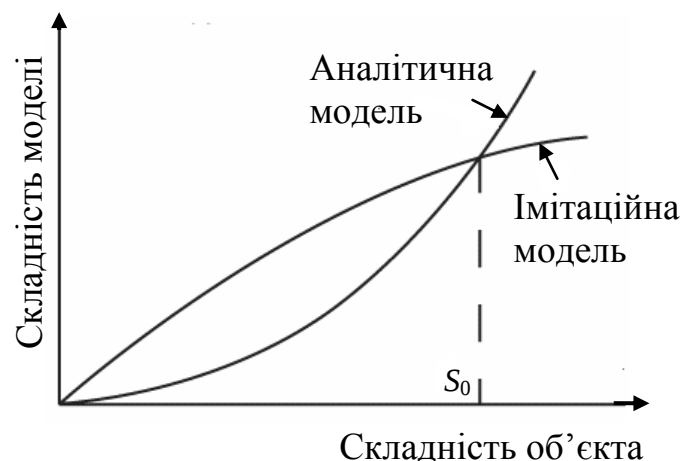


Рисунок 7.1 – Порівняння аналітичної та імітаційної моделей

Якщо складність аналітичної моделі з ускладненням модельованого об'єкта зростає з прискоренням, як показано на рис. 7.1, то складність імітаційної моделі, починаючи з деякого рівня S_0 зростає несуттєво.

При певних позитивних якостях імітаційного моделювання треба зазначити і недоліки з якими зіштовхується його користувач.

1. Розробка ефективної імітаційної моделі часто обходиться дорого і вимагає багато часу. Крім того, для розробки моделі потрібні висококваліфіковані фахівці.

2. Отримана імітаційна модель може виявитися неадекватною, тобто вона може не відображати реальний хід процесу або подій.

3. Імітаційна модель, якщо говорити щодо її коректності, в принципі не точна і немає способів виміряти ступінь її точності. Хоча частково ступінь точності може бути отримана в результаті аналізу чутливості моделі до зміни певних параметрів.

4. Рішення або результат імітаційного моделювання є числовим, окремим, справедливим тільки для конкретних значень вихідних даних. Щоб отримати функціональні залежності між параметрами досліджуваного процесу (системи) потрібно буде виконати дуже велику кількість варіантів рішень. Аналітична ж модель дає, як правило, функціональні залежності. Якщо складність задачі, необхідна точність рішення, можливості математики і здібності дослідника дозволяють побудувати математичну аналітичну модель, то слід використовувати її.

Крім того, розробка імітаційної моделі, як правило, вимагає значних витрат часу і сил; будь-яка імітаційна модель складної системи значно менш "об'єктивна", ніж аналітична модель; результати імітаційного моделювання, як і при будь-якому числовому методі, завжди носять окремий характер.

Наведені міркування показують, що не дивлячись на широке застосування імітаційного моделювання для розв'язання складних задач, цей метод не є панацеєю для вирішення всіх проблем, наприклад, управління. Імітаційне моделювання може принести користь, якщо дослідник наділений інтуїцією та винахідливістю.

Розрізняють три основні класи помилок, притаманні імітаційному моделюванню:

Помилки формалізації. Як правило виникають, коли модель недостатньо докладно визначена.

Помилки рішення. Некоректний або занадто спрощений метод побудови моделі.

Помилки задання параметрів системи.

Види перевірок, які здійснюються при виконанні імітаційного моделювання:

- перевірка моделей елементів;
- перевірка моделей зовнішніх впливів;
- перевірка концептуальної моделі;
- перевірка формалізованої та математичної моделей;
- перевірка способів вимірювання та обчислення вихідних характеристик;
- перевірка програмної моделі.

На рис. 7.2 показана структурна схема імітаційної моделі. Блок імітації зовнішніх дій (БІЗВ) формує реалізації випадкових або детермінованих процесів, що імітують вплив зовнішнього середовища на об'єкт. Блок обробки результатів (БОР) призначений для отримання інформативних харак-

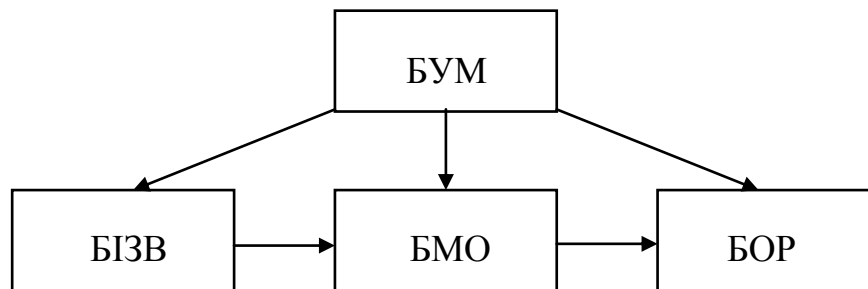


Рисунок 7.2 – Структурна схема імітаційної моделі

теристик досліджуваного об'єкта. Необхідна для цього інформація надходить з блоку математичних моделей об'єкта (БМО). Блок управління моделями (БУМ) реалізує спосіб дослідження імітаційної моделі, основне його призначення – автоматизація процесу проведення імітаційного експерименту.

7.3. Моделюючі алгоритми та принципи їх побудови

Для моделювання процесу на ЕОМ необхідно перетворити математичну модель в спеціальний моделюючий алгоритм. Існують різні способи представлення моделюючого алгоритму.

Історично першим з таких способів був запис алгоритмів за допомогою операторних схем. Потім з'явилися мови програмування, пакети прикладних програм і спеціальні мови моделювання.

Серед найважливіших операторів моделюючих алгоритмів можна виділити наступні:

1. Обчислювальні оператори. Це в основному арифметичні оператори. В операторних схемах моделюючих алгоритмів обчислювальний оператор може описувати будь-яку як завгодно складну та громіздку групу операцій.

2. Оператори формування реалізацій випадкових чисел, величин, подій і процесів.

Для імітації дії різних випадкових факторів, які супроводжують досліджуваний процес, при моделюванні виникає необхідність формувати реалізації випадкових подій, випадкових величин і випадкових функцій.

Для реалізації всіх цих перерахованих випадкових груп необхідно мати випадкові числа. Оператори формування реалізацій випадкових процесів вирішують задачі перетворення випадкових чисел стандартного виду в реалізації випадкових процесів із заданими властивостями.

3. Оператори формування не випадкових величин. Вони потрібні при моделюванні детермінованих математичних моделей для реалізації різних констант і не випадкових функцій часу.

У більшості імітаційних моделей імітується поведінка системи на деякому відрізку часу. Тому при створенні моделі та виборі мови програмування важливим завданням є визначення механізму системного часу. Це необхідно для коригування тимчасової координати стану системи і для забезпечення узгодженості різних блоків і подій в системі.

Модель функціонує в штучному часі і необхідно забезпечити появу подій в певному порядку з належними тимчасовими інтервалами між ними.

1. *Принципи фіксованого і змінного кроку.* Існують два основні методи завдання часу: за допомогою фіксованих і змінних інтервалів часу. Їх іноді ще називають метод фіксованого кроку $t\Delta$ і кроку до наступної події. За методом фіксованого тимчасового кроку відлік системного часу ведеться через заздалегідь певні часові інтервали. При використанні методу змінного кроку стан модельованої системи оновлюється з появою наступної події.

У безперервних моделях використовуються механізми фіксованих збільшень тимчасових інтервалів. У більшості моделей з дискретним зміною подій використовується метод відліку часу до наступної події.

2. *Принцип особливих станів.* Бувають випадки, коли співвідношення математичних моделей систем вдається перетворити таким чином, що мож-

на визначити подальший особливий стан системи за попереднім особливим станом або кількома попередніми станами. Для таких випадків моделюючий алгоритм може бути побудований за так званим принципом "особливих станів". Він відрізняється від принципу $t\Delta$ тільки тим, що включає в себе процедуру визначення моменту часу, відповідному наступному особливому стану за відомими характеристиками даного або попереднього стану.

3. *Принцип послідовної проводки заявок.* У системах масового обслуговування при моделюванні процесів обробки заявок іноді зручно будувати моделюючі алгоритми за принципом відтворення історії окремих заявок в порядку надходження їх у систему. Алгоритм звертається до відомостей про інші заявки лише в тому випадку, коли це необхідно для вирішення питання про подальший порядок обслуговування даної заявки. Такі алгоритми є достатньо економними, однак вони вимагають конструювання складної логічної структури. При моделюванні систем масового обслуговування та дискретних виробничих процесів, як правило, використовують саме цей принцип, який часто називають "принципом послідовної проводки заявок". Подібний принцип, іноді в поєднанні з принципом $t\Delta$, лежить в основі майже всіх мов моделювання.

7.4. Методи імітаційного моделювання

Основними методами імітаційного моделювання є:

- аналітичний метод,
- метод статистичного моделювання;
- комбінований метод (аналітико-статистичний метод).

Аналітичний метод в більшості випадків використовується для імітації процесів для малих і простих систем, коли відсутній чинник випадковості. Наприклад, коли процес їх функціонування описаний диференціальними або інтегродиференціальними рівняннями. Метод називається так умовно, оскільки об'єднує можливості імітації процесу, модель якого отримана у вигляді аналітично замкнутого рішення, або рішення, отриманого методами обчислювальної математики.

Метод *статистичного* моделювання (метод Монте–Карло) спочатку розвивався як метод статистичних випробувань. Це – числовий метод, який полягає в здобутті оцінок імовірнісних характеристик, що впливає з аналітичних задач (наприклад, з вирішенням і обчисленням визначеного інтеграла). Надалі цей метод став застосовуватися для імітації процесів, що ві-

дбуваються в системах, усередині яких є джерело випадковості або які здатні до випадкових дій. Метод отримав назву методу статистичного моделювання.

Комбінований метод (аналітико-статистичний метод) дозволяє об'єднати переваги аналітичного і статистичного методів моделювання. Він застосовується в разі розробки моделі, що складається з різних модулів, які представляють набір статистичних та аналітичних моделей, і взаємодіють як єдине ціле.

Метою імітаційного моделювання на ЕОМ може бути відтворення різних сигналів, математичні моделі яких описуються випадковими процесами. Слід мати на увазі, що відтворення на ЕОМ процесів з безперервним часом неможливе, зважаючи на дискретну природу ЕОМ. Задача моделювання випадкових процесів надалі розуміється як задача відшукування алгоритму, що дозволяє формувати на ЕОМ реалізації таких процесів.

У загальному випадку проведення імітаційного експерименту можна розбити на наступні етапи.

1. Встановлення взаємозв'язку між вихідними і вхідними показниками у вигляді математичного рівняння або нерівності.
2. Визначення законів розподілу значень для ключових параметрів моделі.
3. Проведення комп'ютерної імітації значень ключових параметрів моделі.
4. Розрахунок основних характеристик розподілів вихідних і вихідних показників.
5. Проведення аналізу отриманих результатів і прийняття рішення. Результати імітаційного експерименту доповнюють статистичним аналізом, а також використовуватися для побудови прогнозних моделей і сценаріїв.

7.5. Моделювання коливального контуру

Розглянемо для прикладу моделювання коливального контуру, до складу якого входять конденсатор C , котушка індуктивності L і резистор R (рис. 7.3). До цього контуру подається напруга V_0 . В момент часу $t = 0$ коливальний контур замикають за допомогою перемикача. У контурі починається коливальний процес, обумовлений наявністю конденсатора C і котушки індуктивності L . Коливальний процес був би нескінченно довгим, якщо б у контурі не було резистора R .

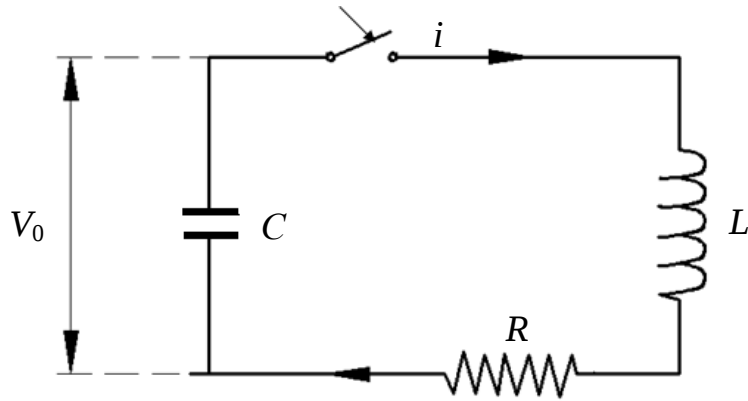


Рисунок 7.3 – Коливальний контур

Коливальний процес описується наступним диференціальним рівнянням:

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V = 0. \quad (7.1)$$

До цього рівняння додаються початкові умови

$$V(0) = V_0; \quad \frac{dV}{dt}(0) = 0. \quad (7.2)$$

Уведемо позначення:

$$\bar{\alpha}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}; \quad \alpha = \sqrt{|\bar{\alpha}^2|}.$$

Рівняння (7.1) з умовами (7.2) може бути розв'язано аналітично.

Для $\bar{\alpha}^2 > 0$ (затухаючий коливальний процес)

$$V = \frac{V_0 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \cos\left[\alpha t - \arctan\left(\frac{R}{2\alpha L}\right)\right]}{\alpha \sqrt{CL}}.$$

Для $\bar{\alpha}^2 = 0$ (критично затухаючий випадок)

$$V = V_0 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \left(1 + \frac{Rt}{2L}\right).$$

Для $\bar{\alpha}^2 < 0$ (понад затухаючий випадок)

$$V = V_0 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{4\alpha L}\right) \exp(\alpha t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{R}{4\alpha L}\right) \exp(-\alpha t) \right].$$

Ці вирази можуть бути застосовані для перевірки точності розв'язання рівняння (7.1) з умовами (7.2) числовим методом.

Для рішення поставленої задачі числовим методом застосуємо алгоритм Рунге–Кутта четвертого порядку з однокроковим інтегруванням. За

цим методом диференціальне рівняння другого порядку зі звичайними похідними записується як система диференціальних рівнянь першого порядку зі звичайними похідними. Наприклад,

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ &\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}\tag{7.3}$$

Нехай $y_{ji} = y_j(x_i)$ $j=1, 2, \dots, n$ є розв'язанням j -го рівняння системи (7.3) при значенні аргументу x_i . Початкові умови в 0-му шарі y_{j0} для $j = 1, 2, \dots, n$ мають бути відомими. Тоді початкові умови для i -го кроку виявляться апроксимацією початкових умов, тобто $y_j(x_i)$, $j=1, 2, \dots, n$. Вони будуть результатом застосування методу Рунге-Кутта на $(i-1)$ -му інтервалі. Для системи з n рівнянь однокрокове інтегрування для i -го інтервалу може бути описаним наступним алгоритмом:

$$\begin{aligned}y_{j,i+1} &= y_{ji} + h\Phi_j = y_{ji} + h(k_{j1} + 2k_{j2} + 2k_{j3} + k_{j4})/6; \\ k_{j1} &= f(x_i, y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}); \\ y_{ji}^* &= y_{ji} + hk_{j1}/2; \\ k_{j2} &= f(x_i + 0,5h, y_{1i}^*, y_{2i}^*, \dots, y_{ni}^*); \\ \bar{y}_{ji} &= y_{ji} + hk_{j2}/2; \\ k_{j3} &= f(x_i + 0,5h, \bar{y}_{1i}, \bar{y}_{2i}, \dots, \bar{y}_{ni}); \\ \bar{y}_{ji}^* &= y_{ji} + hk_{j3}; \\ k_{j4} &= f(x_i + h, \bar{y}_{1i}^*, \bar{y}_{2i}^*, \dots, \bar{y}_{ni}^*).\end{aligned}\tag{7.4}$$

Ці співвідношення застосовуються для кожного пункту алгоритму для всіх n рівнянь.

Вводимо до розгляду чотири масиви розмірністю n , позначимо їх як $Y, \bar{Y}, F$ і Φ . Перед застосуванням методу Рунге-Кутта треба ініціалізувати наступні змінні:

$x \leftarrow x_i$ – величина незалежної змінної;

$h \leftarrow h$ – крок інтегрування, $x_{i+1} - x_i$;

n – кількість диференціальних рівнянь першого порядку;

$Y_j \leftarrow y_{ji}$, $j=1, 2, \dots, n$ – значення розв'язків для n рівнянь при x_i .

Рівняння (7.4) розв'язуються за п'ять проходів. Ці п'ять проходів можуть бути виконані п'ятиразовим зверненням до відповідної підпрограми.

Головна програма, що застосовується для тестування методу Рунге-Кутта, призначена для розв'язання диференціального рівняння другого порядку зі звичайними похідними.

Так, заряд q конденсатора пов'язаний з його ємністю C і напругою V на ньому наступним виразом

$$q = CV.$$

Струм i в конденсаторі є похідною від заряду конденсатора за часом і визначається залежністю:

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dV}{dt}. \quad (7.5)$$

Напруга на резисторі і котушці індуктивності розраховується за виразом:

$$V = L \frac{di}{dt} + Ri. \quad (7.6)$$

З виразів (7.5) і (7.6) випливає, що напруга на конденсаторі в залежності від часу визначається виразом, який пов'язує напругу V її першу і другу похідні за часом з ємністю конденсатора C , індуктивністю котушки L , опором резистора R :

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{dV}{dt} - \frac{1}{LC} V. \quad (7.7)$$

Це рівняння має розв'язуватися з початковими умовами (7.2).

Продиференціювавши три записаних вище аналітичних розв'язання і підставивши їх до рівняння (7.7), можна побачити, що вони задовольняють цьому диференціальному рівнянню другого порядку.

Диференціальне рівняння другого порядку можна переписати у вигляді системи з двох диференціальних рівнянь першого порядку. Зокрема,

$$Y_1 = V; \quad Y_2 = \frac{dV}{dt}; \quad x = t.$$

Тоді

$$F_1 = \frac{dY_1}{dx} = \frac{dV}{dt} = Y_2;$$

$$F_2 = \frac{dY_2}{dx} = \frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{R}{L} \frac{dV}{dt} - \frac{1}{LC} V = -\frac{R}{L} Y_2 - \frac{1}{LC} Y_1.$$

Початкові умови запишуться у вигляді

$$Y_{1,0} = V_0;$$

$$Y_{2,0} = 0.$$

На рис. 7.4 у графічному вигляді наведено результати розрахунку коливального контуру, в якому амплітуда коливань зменшується у зв'язку з наявністю в контурі резистора.

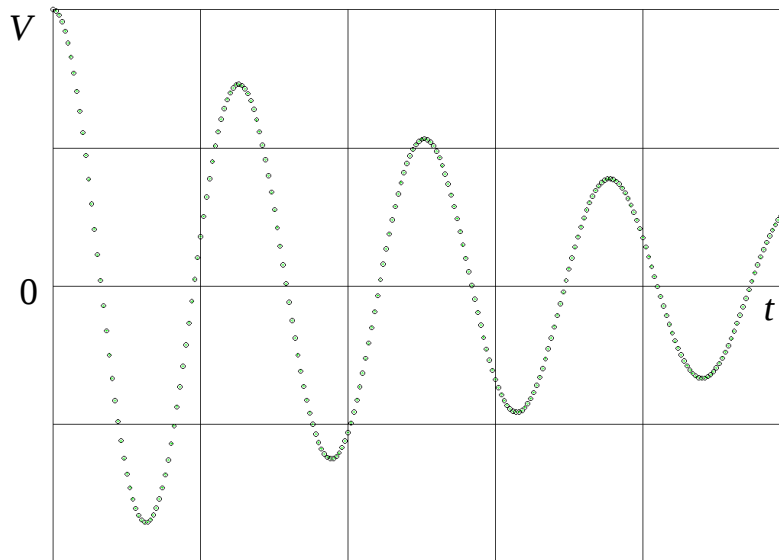


Рисунок 7.4 – Числове інтегрування функції детермінованим методом

7.6. Алгоритмічні мови моделювання

Програмна реалізація імітаційної моделі може бути створена за допомогою:

- Алгоритмічних мов загального призначення.
- Спеціалізованих мов моделювання.
- Пакетів прикладних програм для моделювання.
- Засобів автоматизації програмування імітаційних моделей.
- Діалогових і візуальних систем моделювання.
- Інтелектуальних систем моделювання.

Алгоритмічні мови програмування загального призначення (Паскаль, Сі, Фортран тощо) надають практично необмежені можливості програмісту в сенсі гнучкості розробки, налагодження та використання моделі. Однак, модель у вигляді програми, написаної алгоритмічною мовою програмування часто незрозуміла досліднику. Адже зовсім не обов'язково, щоб фахівець в конкретній предметній області знав тонкощі програмування

якоюсь мовою. Тому були створені спеціалізовані мови моделювання, які суттєво спрощують побудову моделей та обробку результатів моделювання, наприклад, Сімпас, Симула, Арена, сімейство мов GPSS та інші.

Спеціалізована мова відрізняється від універсальної своїми специфічними властивостями. До цих властивостей або вимог можна віднести:

- можливість генерувати випадкові величини і процеси;
- можливість "просувати" час або на одну одиницю $t\Delta$ або до наступної події;
- здатність накопичувати вихідні дані;
- здатність проводити статистичний аналіз накопичуваних даних;
- здатність розподіляти вихідні дані за наперед заданими форматами;
- здатність виконувати ідентифікацію конкретних подій.

Деякі з мов імітаційного моделювання є описовими мовами. Вони близькі до природної мови, тому імітаційні моделі, написані такою мовою, легше сприймаються керівниками і фахівцями, які не мають безпосереднього відношення до програмування.

Спеціальні мови цифрового імітаційного моделювання поділяються на дві групи, що відповідають двом видам імітації: дискретних і безперервних процесів.

Для моделювання безперервних процесів використовуються мови:

- Динамо – для апроксимації неперервних процесів використовують диференціальні рівняння першого порядку;
- CSMP, Midas та інші, які крім блочної побудови, застосовуваної в мові Динамо, ще мають потужність і зручність алгебраїчної та логічної алгоритмізації.

Мови для моделювання дискретних процесів можна розбити на чотири категорії:

1. Мови, орієнтовані на дії (CSL, форс IV та ін);
2. Мови, орієнтовані на події (Сімскріпт, Сімків та ін);
3. Мови, орієнтовані на процеси (Симула, SOL);
4. Мови, орієнтовані на потоки повідомлень (GPSS, BOSS).

У першій групі дії представлені у модельному часі як миттєві. У цих мовах немає регламентації дій. Замість цього виконавчі програми переглядають набір всіх умов, від яких залежить поява якої-небудь події. І тільки тоді, коли виконуються всі контрольовані умови відбувається зміна стану і зсув часу в цій частині програми.

Деякі задачі зручніше програмувати мовою орієнтованою на події. При цьому подія регламентована. Регламентація забезпечує настання події саме в той момент часу, коли динамічний стан показує, що склалися умови для його появи.

Мови, орієнтовані на процеси, об'єднують переваги перших двох мов, тобто стислість мов, орієнтованих на дії та ефективність мов, орієнтованих на події. Написана цією мовою програма працює як кілька незалежних програм: одна за допомогою перегляду дій, інша за допомогою регламентування подій.

Що стосується четвертої групи мов, то вони насправді є мовами процесів і відрізняються тільки схемною побудовою.

Мову GPSS зазвичай виділяють в окрему групу. Вона є інтерпретуючою мовною системою, яку застосовують для опису просторового руху об'єктів.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміють під імітаційним моделюванням?
 2. Назвіть етапи процесу імітації.
 3. Перелічіть переваги і недоліки імітаційного моделювання.
 4. Вкажіть три класи помилок, притаманних імітаційному моделюванню.
 5. Проаналізуйте структурну схему імітаційної моделі.
 6. Перелічіть найважливіші оператори моделюючих алгоритмів.
 7. Назвіть основні методи імітаційного моделювання.
 8. Якими мовами виконується програмна реалізація імітаційної моделі?
-

8. СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

8.1. Поняття випадкового процесу та випадкової події

Стохастичне моделювання – це моделювання випадкових процесів і випадкових подій, яке реалізується із застосуванням теорії ймовірностей. Воно передбачає, що існує можливість вибору розподілу ймовірностей, яка дозволила б описати характер невизначеності, що міститься в моделі.

Стохастичне моделювання здійснюється також методами математичної статистики, які надають можливість досліджувати опосередковані причинно-наслідкові зв'язки показників процесу з його факторами.

Суть стохастичного моделювання – багаторазове повторення модельних експериментів з метою отримання статистики про властивості системи, отримання даних про властивості випадкових подій і величин.

Мета стохастичного моделювання – отримання для параметрів об'єктів оцінки математичного сподівання, дисперсії та закону розподілу випадкової величини.

Стохастичне моделювання є доповненням і поглибленням детермінованого факторного аналізу, в якому стохастичні моделі використовуються з трьох основних причин:

1. Необхідно вивчити вплив факторів, за якими не можна побудувати жорстко детерміновану факторну модель.
2. Потрібно вивчити вплив факторів, що не піддаються об'єднанню в одній жорстко детермінованій моделі.
3. Треба вивчити вплив складних факторів, що не можуть бути виражені одним кількісним показником (наприклад, рівень науково-технічного прогресу).

На відміну від жорстко детермінованого стохастичний підхід для реалізації вимагає низку передумов:

- а) наявність сукупності;
- б) достатній обсяг спостережень;
- в) випадковість і незалежність спостережень;
- г) однорідність;

- д) наявність розподілу ознак, близького до нормального;
- е) наявність спеціального математичного апарату.

У теорії ймовірностей основним поняттям є поняття випадкової події. *Випадковою подією* називається подія, яка при здійсненні деяких умов може відбутися або не відбутися. Можна також визначити випадкову подію як подію, що достовірно непередбачувана. Так, попадання в певний об'єкт або промах при стрільбі по цьому об'єкті з гармати є випадковою подією.

При вивченні випадкових подій вважають, що умови випробувань (стохастичного експерименту) залишаються незмінними. Але на практиці зафіксувати всі умови експерименту практично неможливо, оскільки випробування відбувається як у просторі, так і в часі, при неперервних діях сторонніх факторів. Таким чином, породжується ціла множина випадкових величин, взагалі кажучи різних, пов'язаних між собою параметрично.

Одним із основних понять в теорії ймовірностей є *поняття події*. Під *подією* розуміють будь-який факт, який може відбутися в результаті досліду або випробування. Під *дослідом*, або *випробуванням*, розуміється здійснення певного комплексу умов. Приклади події: влучення в ціль при пострілі з гармати (дослід – здійснення пострілу; подія – влучення в ціль).

Випадкова подія, яка ніколи не реалізується в результаті випадкового експерименту, називається *неможливою*. Випадкова подія, яка завжди реалізується в результаті випадкового експерименту, називається *достовірною*.

Випадкові події називаються *несумісними* в даному випробуванні, якщо ніякі дві з них не можуть з'явитися разом.

В імовірнісних моделях зміна станів модельованої системи визначається випадковими величинами.

Випадкова величина – це величина, яка приймає в результаті досліду одне значення з множини результатів, причому появу того чи іншого значення цієї величини до її вимірювання неможливо точно передбачити.

Випадкові величини можуть приймати дискретні, неперервні та дискретно-неперервні значення. Відповідно випадкові величини розділяють на дискретні, неперервні та дискретно-неперервні (змішані).

Випадковий процес (імовірнісний процес, випадкова функція, стохастичний процес) в теорії ймовірностей – це сукупність випадкових величин, індексованих деяким параметром, найчастіше граючим роль часу або координати. Взагалі, під процесом розуміється кожне явище, яке розвива-

ється в часі. Результат випадкового процесу заздалегідь передбачити неможливо.

Наступні означення стохастичного (випадкового) процесу є еквівалентними.

Означення 1. Стохастичний процес – це процес, реалізація якого залежить від випадку і для якого визначена ймовірність того чи іншого його перебігу.

Означення 2. Випадковим (стохастичним) процесом називається множина випадкових величин, залежних від одного чи кількох змінних параметрів.

Якщо випадковий процес може змінити свій стан тільки в суворопевний момент часу, то він називається процесом з дискретним часом.

Якщо ж зміна стану можлива в довільний момент часу, то це випадковий процес з безперервним часом.

Якщо в будь-який момент часу випадковий процес є дискретною випадковою величиною (її значення можна перерахувати і виділити два сусідніх значення), то це процес з дискретним станом.

Якщо ж у будь-який момент часу стан може змінюватися безперервно, плавно і не можна виділити два сусідніх стани, то це випадковий процес з безперервним станом.

Отже, в залежності від структури множини факторів системи та структури множини їх значень, випадкові процеси поділяють на наступні основні класи:

- процеси з дискретними факторами і дискретним часом;
- процеси з дискретними факторами і неперервним часом;
- процеси з неперервними факторами і дискретним часом;
- процеси з неперервними факторами і неперервним часом.

Приклади випадкових процесів: динаміка зміни курсу валют і акцій, виручка або прибуток організації з плином часу, обсяги продажів товару тощо.

Нагадаємо, що ймовірністю події A називають відношення числа m сприятливих цій події результатів до загального числа n всіх рівно можливих несумісних елементарних наслідків, що утворюють повну групу

$$P(A) = m/n.$$

Властивість 1. Імовірність достовірної події дорівнює одиниці.

Властивість 2. Імовірність неможливої події дорівнює нулю.

Властивість 3. Імовірність випадкової події є позитивним числом, розташованим між нулем і одиницею.

Отже, ймовірність будь-якої події задовольняє подвійній нерівності

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Розглянемо деяку систему S , в якій в даний момент часу t_0 протікає випадковий процес. Цей процес називається Марківським, якщо для будь-якого моменту часу $t > t_0$, поведінка системи в майбутньому залежить тільки від того, в якому стані система перебувала в даний момент часу при $t = t_0$, і ніяк не залежить від того, як, коли і в яких станах вона перебувала в минулому при $t < t_0$. Іншими словами, "минуле" Марківського процесу ніяк не впливає на "майбутнє" (тільки через "справжнє").

8.2. Обчислення площі методом Монте-Карло

Одним з поширених наближених методів вирішення задач обчислювальної математики є випадковий метод, названий методом Монте-Карло. Суть методу полягає в тому, що для розв'язання якої-небудь математичної задачі, пов'язаної з обчисленням числа I , будується деяка випадкова величина ξ , така, що математичне очікування цієї випадкової величини $E(\xi)$ є значенням шуканого рішення. Провівши серію обчислювальних експериментів з випадковою величиною ξ , можна знайти наближене рішення як середнє значення результатів експерименту.

За допомогою цього методу можна знайти площу будь-якої фігури G , що має складний контур, який важко описати аналітично або неможливо проінтегрувати. Потрібно вписати цю фігуру у фігуру відомої площі, скажімо в прямокутник зі сторонами a і b та кидати точки на цю фігуру. Імовірність влучення точки в G буде дорівнювати відношенню площ.

Визначимо площу детермінованим методом. Для цього необхідно взяти інтеграл деякої функції. Скористаємося неформальним геометричним описом інтеграла і будемо розуміти його як площу під графіком цієї функції.

Для визначення цієї площі можна скористатися одним із звичайних числових методів інтегрування: розбити відрізок на ділянки, підрахувати площу під графіком функції на кожному з них і знайти суму цих площ. Припустимо, що для функції, представленої на рис. 8.1, достатньо розбити на 25 відрізків і, отже, обчислити 25 значень функції. Уявімо тепер, що маємо

справу з n -мірною функцією. Тоді кількість відрізків становитиме 25^n і потрібно буде виконати стільки ж обчислень значень функції. При розмірності функції більше 10 завдання стає надмірно складним.

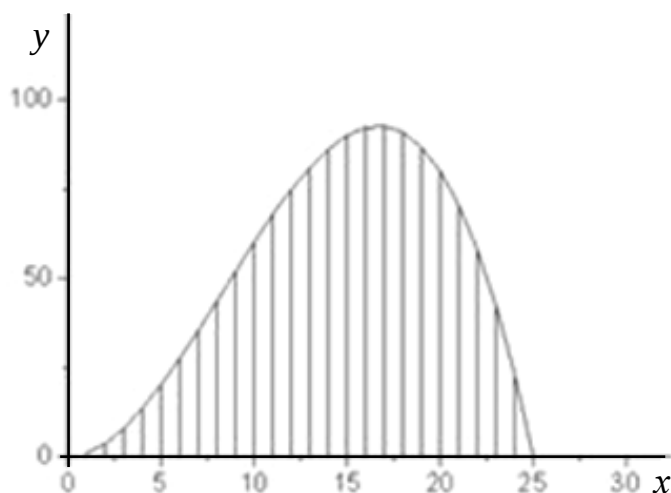


Рисунок 8.1 – Числове інтегрування функції

Оскільки простори великої розмірності зустрічаються в деяких практичних застосуваннях, де є системи з багатьма ступенями свободи, необхідно мати метод рішення, обчислювальна складність якого б не настільки сильно залежала від розмірності. Саме така властивість притаманна методу Монте-Карло.

Для визначення площі під графіком функції можна застосувати наступний стохастичний алгоритм:

- 1) обмежуємо функцію прямокутником (n -мірним паралелепіпедом у разі багатьох вимірів), площу якого S_{par} можна легко обчислити (рис. 8.2);
- 2) "накидаємо" в цей прямокутник (паралелепіпед) деяку кількість точок (N штук), координати яких вибиратимемо випадковим чином;
- 3) визначаємо кількість точок (K штук), які потраплять під графік функції;
- 4) розраховуємо площу фігури S , обмеженої графіком функції (рис. 8.2), яка є наближеним значенням шуканого інтегралу:

$$S = S_{par} \frac{K}{N}.$$

Для малої кількості вимірів інтегрованої функції ефективність інтегрування методом Монте-Карло значно нижче, ніж ефективність детермінованих методів. В деяких випадках, коли функція задана неявно, але необхідно визначити область, задану у вигляді складних нерівностей, стохастичний метод може виявитися більш доцільним.

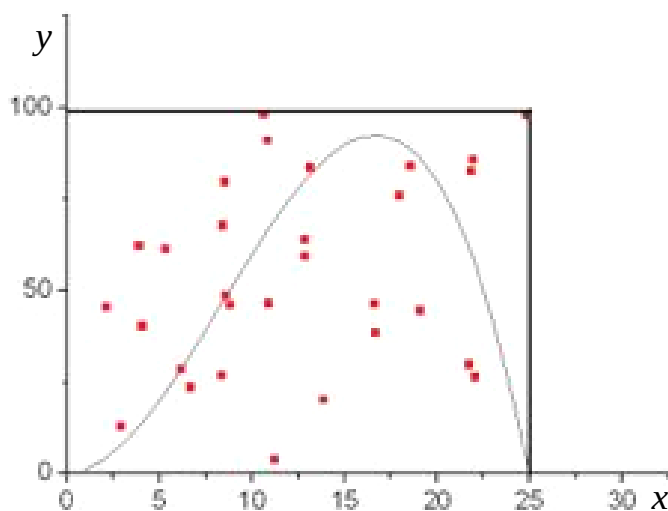


Рисунок 8.2 – Числове інтегрування функції методом Монте-Карло

8.3. Задача Бюффона

Випадкові величини використовувалися для вирішення різних прикладних задач досить давно. Прикладом може служити спосіб визначення числа π , який був запропонований французьким математиком Бюффоном ще в 1733 році. Це класична задача теорії геометричних ймовірностей, вона по праву вважається вихідним пунктом розвитку цієї теорії.

Поява геометричних ймовірностей стала визначною подією в науці. Вона сприяла формуванню нової мови, стилю й виду теорії ймовірностей. Завдяки геометричним ймовірностям виникла і бурхливо розвивається інтегральна геометрія. Класичні результати Бюффона лежать в основі сучасного і вельми універсального методу статистичного моделювання. Останніми роками геометричні ймовірності успішно застосовуються в скінченно-елементному аналізі.

Задача Бюффона цікава тим, що пов'язана з числом π , її можна використовувати для наближеного обчислення числа π дещо незвичним способом.

Припустимо, є підлога з паралельних смуг деревини однакової ширини, на яку кидають голки. Виникає питання, яка ймовірність того, що голка перетинатиме лінію між смугами або належатиме якійсь смузі? Передбачається, що довжина голки не перевищує ширину смуги (рис. 8.3).

Математично поставлена задача формулюється наступним чином: визначити ймовірність того, що голка перетне межу смуг за умови, що довжина голки l , в ширину смуги t .

Нехай x відстань від центра голки до найближчої межі, а α – гострий кут між голкою і межею між смугами.

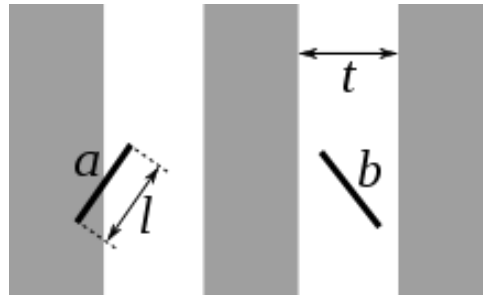


Рисунок 8.3 – Варіанти розташування голки на підлозі:

a – голка перетинає лінію між смугами;

b – голка цілком знаходиться на смузі

Функція густини ймовірності для x , що знаходиться між 0 і $t/2$, має вигляд:

$$\begin{cases} 2/t : 0 \leq x \leq t/2; \\ 0 : \text{інакше} \end{cases}$$

Подібний вигляд має ця функція для кута θ :

$$\begin{cases} 2/\pi : 0 \leq \theta \leq \pi/2; \\ 0 : \text{інакше} \end{cases}$$

Оскільки дві випадкових величини x і θ є незалежними, то спільна функція густини ймовірності матиме вигляд:

$$\begin{cases} 4/t\pi : 0 \leq x \leq t/2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2; \\ 0 : \text{інакше} \end{cases}$$

Голка перетинає межу між смугами, якщо

$$x \leq \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Інтегрування спільної функції густини ймовірності визначає ймовірність того, що голка перетне лінію:

$$P = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^{(l/2)\sin\theta} \frac{4}{t\pi} dx d\alpha = \frac{2l}{t\pi}.$$

Уявімо, що голка кинута на підлогу n разів, де n – має достатньо велике значення, і при цьому вона m разів перетнула межу між смугами. Як-

що побудована модель адекватно описує експеримент, то при великих n частота числа перетинів має бути близькою до ймовірності, тобто має виконуватись співвідношення:

$$\frac{m}{n} = \frac{2l}{t\pi}.$$

Звідки випливає, що:

$$\pi = \frac{2l}{t} \cdot \frac{n}{m}.$$

Таким чином, завдяки застосуванню випадкового методу можна визначити ірраціональне число π . Бюффоном його було розраховано з точністю до 200 знаків після коми.

Треба зазначити, що точність отриманого рішення суттєво залежить від кількості проведених експериментів.

Задачу Бюффона можна легко змодельовати на комп'ютері.

Відомо, що $P = N_1 / N$, де N – кількість кидань, N_1 – кількість перетинів голки з межами смуг.

Як визначити, перетнула голка межу між смугами чи ні? Положення голки можна однозначно визначити заданням координати центра голки y_0 з області $[-1/2, 1/2]$ і кута α , що задаються випадковим чином.

Тоді координати кінців голки визначаються за наступними формулами:

$$y_1 = y_0 + \frac{l}{2} \sin \alpha;$$

$$y_2 = 2y_0 - y_1.$$

Умова перетину голки межі смуг має вигляд:

$$y_1 \cdot y_2 < 0.$$

При комп'ютерній реалізації задачі Бюффона особливу увагу треба звертати на якість роботи генератора випадкових чисел.

8.4. Моделювання рівномірно розподіленої випадкової величини

Особливе значення в статистичному моделюванні має безперервна рівномірно розподілена випадкова величина. Значимість цієї випадкової величини пояснюється тим, що, по-перше, вона сама по собі необхідна для

моделювання випадкових процесів і величин і, по-друге, випадкові величини з іншими законами розподілу формуються на їх основі.

Визначення. Неперервна випадкова величина γ має рівномірний розподіл на інтервалі $[a, b]$, якщо густина її ймовірності визначається так, як це показано на рис. 8.4.

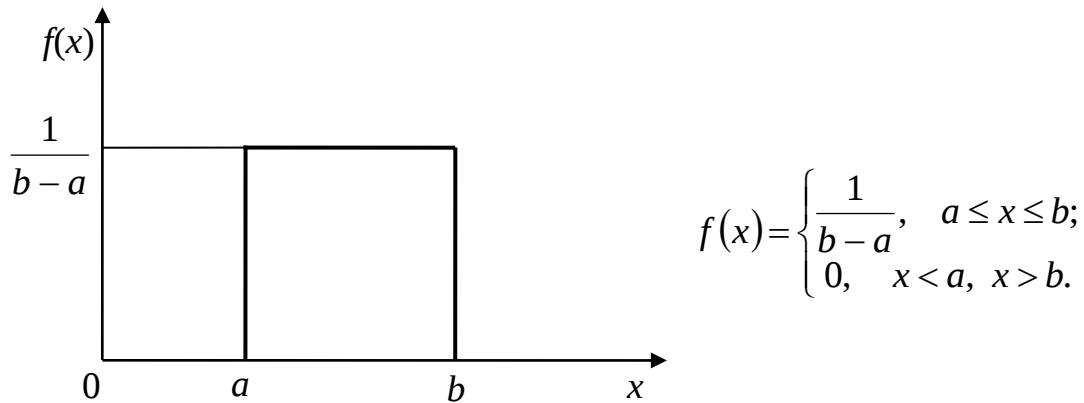


Рисунок 8.4 – Густина ймовірності рівномірного розподілу

Значення характеристик рівномірного закону розподілу:

- математичне очікування $M(\gamma) = (a + b)/2$;
- дисперсія $D(\gamma) = (b - a)^2 / 12$.

При моделюванні часто використовуються випадкові числа з інтервалу $[0, 1]$. Неперервна випадкова величина γ рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 1]$, якщо:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

У цьому випадку

$$M(\gamma) = \frac{1}{2}; \quad D(\gamma) = \frac{1}{12}.$$

Випадкове число x_i із інтервалу $[0, 1]$ легко перетворюється у випадкове число x'_i для інтервалу $[a, b]$:

$$x'_i = (b - a)x_i + a.$$

Треба зазначити, що неперервного, "теоретичного" розподілу випадкової величини отримати на комп'ютерах неможливо. Якщо ці числа рівноймовірні, то такий розподіл випадкових чисел називають *квазірівномірним*.

Неперервні випадкові величини існують тільки в теорії. На практиці всі вони дискретні, а крок дискретності дорівнює найменшій одиниці виміру.

Для формування послідовності випадкових чисел в комп'ютері може

використовуватися один з трьох основних способів:

- апаратний (фізичний);
- табличний (файловий);
- алгоритмічний (програмний).

Апаратний спосіб. При цьому способі випадкові числа формуються спеціальним пристроєм. Джерелом випадкових чисел найчастіше є шуми в електронних приладах. Тимчасові інтервали між шумовими сплесками, що перевищують підібраний рівень обмеження, фіксуються як випадкові числа з розподілу $\gamma \sim \text{Ran}[0,1]$.

Переваги такого способу:

- кількість випадкових чисел необмежено;
- не вимагає витрат оперативної пам'яті;
- вимагає малі обчислювальні ресурси комп'ютера.

Однак, такий датчик (генератор) випадкових чисел має суттєві недоліки, які в даний час виключили його з інженерної практики:

- труднощі налаштування;
- необхідність періодичної перевірки формованої послідовності на відповідність закону розподілу;
- забезпечення стабільності умов роботи пристрою – електропостачання, вологості, температури, старіння приладів і елементів;
- за необхідності неможливо повторити експеримент при одній і тій же послідовності випадкових чисел.

Табличний спосіб. Випадкові числа у вигляді таблиці (файлу) поміщаються в оперативну або зовнішню пам'ять комп'ютера. Ці числа формуються заздалегідь або беруться з відповідного довідника. Перевагами такого способу є:

- числа вимагають одноразову перевірку при формуванні чи недовіру джерелу;
- можна повторювати обчислювальний експеримент при одній і тій же послідовності випадкових чисел.

Недоліки ж дуже істотні:

- кількість випадкових чисел обмежена;
- файл займає місце в оперативній пам'яті комп'ютера;
- при розміщенні в зовнішній пам'яті звернення за випадковими числами збільшує час моделювання.

Алгоритмічний спосіб. При цьому способі випадкові числа форму-

ються за допомогою спеціальних алгоритмів (формул) і програм, що їх реалізують, при кожному зверненні моделюючого алгоритму за випадковим числом. Переваги методу:

- зараз існує достатньо алгоритмів, що генерують випадкові числа, перевірених практикою і, отже, які не потребують особливих перевірок;
- можна багаторазово відтворювати одну й ту ж послідовність;
- в пам'яті комп'ютера зберігається тільки програма датчика (генератора), що займає, як правило, малий обсяг;
- алгоритмічний датчик може бути реалізований і апаратно, за рахунок чого істотно скорочується час формування випадкового числа і в цілому час моделювання.

Недоліки:

- на формування випадкового числа при програмній реалізації датчика потрібні витрати машинного часу;
- будь-який алгоритмічний датчик може згенерувати обмежену кількість неповторюваних чисел.

Зараз фактично всюди застосовуються алгоритмічні датчики випадкових чисел. Створення високопродуктивних комп'ютерів істотно знижує роль першого недоліку (витрати машинного часу). Другий недолік усувається використанням в одній моделі кількох датчиків випадкових чисел.

Алгоритмічні датчики не забезпечують отримання теоретично "чистої" випадковості чисел, оскільки їх формування йде за формулами. Внаслідок цього, рано чи пізно послідовність випадкових чисел стане повторюватися або виродиться. Останнє означає, що, починаючи з деякого числа, всі наступні числа будуть дорівнювати нулю.

Тому алгоритмічні датчики називають датчиками псевдовипадкових чисел. Сучасні датчики видають числа, псевдовипадковість яких практично невідчутна.

Якість алгоритмічного датчика оцінюється тим, наскільки повно він задовольняє наступним вимогам:

- закон розподілу чисел, що формуються, повинен бути рівномірним (квазірівномірним);
- числа мають бути статистично незалежними;
- числа не повинні повторюватися;
- формування чисел повинно займати мінімальний машинний час і

мінімальний обсяг пам'яті.

Розуміючи, що алгоритмічний датчик випадкових чисел видає детерміновану, псевдовипадкову послідовність квазірівномірно розподілених випадкових чисел, його дуже часто називають датчиком випадкових рівномірно розподілених чисел.

8.5. Моделювання випадкової величини з довільним законом розподілу

В основі моделювання випадкових величин з довільними законами розподілу ймовірностей лежить, як правило, метод зворотної функції.

У цьому методі використовується наступна теорема.

Теорема. Якщо випадкова величина Y має густину розподілу ймовірностей $f(y)$, то розподіл випадкової величини

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(y) dy$$

рівномірний на інтервалі $[0, 1]$, тобто

$$F(y) = \gamma \sim \text{Rav}[0,1].$$

За визначенням $F(y)$ є функцією розподілу випадкової величини Y .

Теорема може бути проілюстрована графіками, що представлені на рис. 8.5.

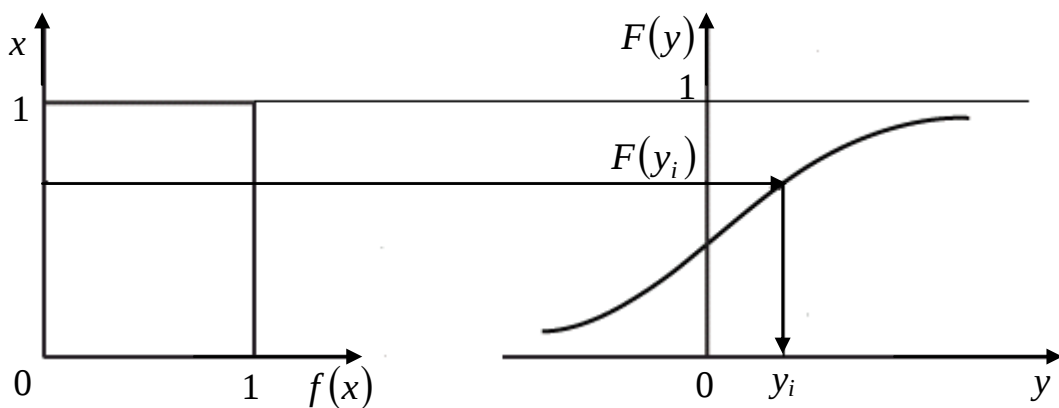


Рисунок 8.5 – Ілюстрація до методу зворотної функції

Позначимо: x_i i -є число з $\gamma \sim \text{Rav}[0,1]$, y_i i -є випадкове число з довільного розподілу. Тоді можна записати

$$x_i = \int_{-\infty}^{y_i} f(y) dy.$$

Потрібно знайти невідоме y_i , що знаходиться в верхній межі інтегру-

вання. Відносно y_i вираз набуде вигляду:

$$y_i = F^{-1}(x_i).$$

Звідси й назва методу – "метод зворотної функції".

Розглянемо для прикладу отримання формули для моделювання випадкових чисел, розподілених за експоненціальним законом, з параметром λ (математичним очікуванням $1/\lambda$).

Щільність $f(y)$ і $F(y)$ цього розподілу мають вигляд, показаний на рис. 8.6. Виконавши перетворення будемо мати:

$$\xi = \int_{-\infty}^{y_i} f(y) dy = \int_{-\infty}^0 f(y) dy + \int_0^{y_i} f(x) dy = \int_0^{y_i} f(y) dy = 1 - e^{-\lambda y_i};$$

$$x_i \in \text{Rav}[0,1]; e^{-\lambda y_i} = 1 - x_i; -\lambda y_i = \ln(1 - x_i); y_i = -\frac{1}{\lambda}(1 - x_i).$$

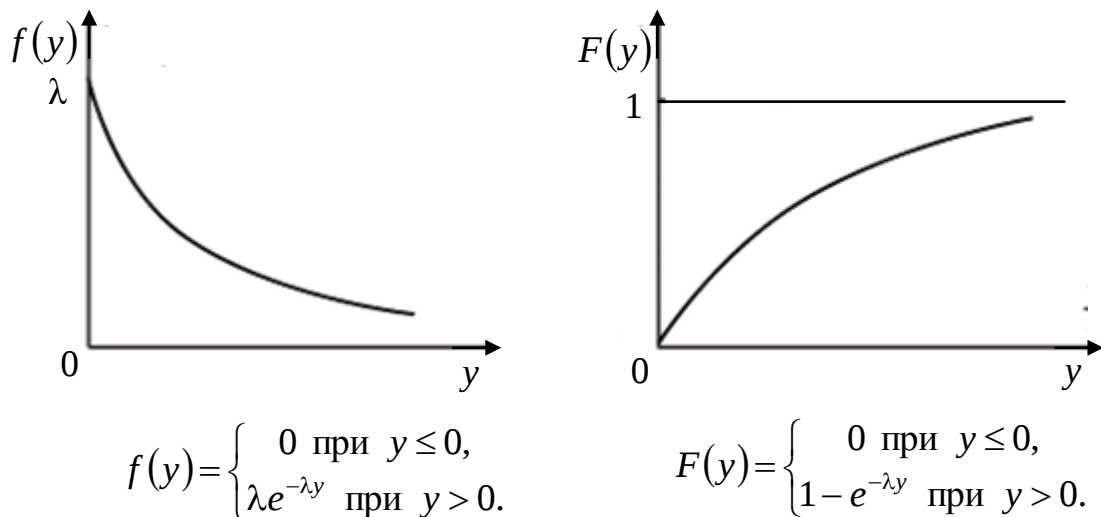


Рисунок 8.6 – Щільність і функція експоненціального розподілу

Оскільки випадкова величина $(1 - x_i)$ має рівномірний розподіл в інтервалі $[0, 1]$, як і x_i , то справедливо:

$$y_i = \frac{1}{\lambda} \ln x_i.$$

Прикладів подібного аналітичного перетворення випадкового числа $x_i \in \text{Rav}[0,1]$ в випадкове число з довільного розподілу небагато, оскільки для багатьох законів розподілу, що зустрічаються на практиці моделювання, інтеграли, які при цьому треба знаходити, відносяться до тих, що не беруться, а числові методи рішення збільшують витрати машинного часу.

Тому в сучасних системах моделювання застосовується наближений метод зворотної функції, заснований на кусково-лінійній апроксимації

функції розподілу модельованої випадкової величини.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміється під стохастичним моделюванням?
 2. Назвіть три причини застосування стохастичного моделювання.
 3. Що називається випадковою подією?
 4. Вкажіть властивості імовірнісної події.
 5. Перелічіть пункти стохастичного алгоритму визначення площі під графіком функції.
 6. З чим пов'язана задача Бюффона?
 7. Що розуміється під рівномірним розподілом випадкової величини?
 8. Вкажіть способи формування послідовності випадкових чисел в комп'ютері.
-

9. ФРАКТАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

9.1. Історична довідка

Найгеніальніші відкриття в науці здатні кардинально змінити людське життя. Винайдена вакцина врятувала мільйони людей, створення зброї, навпаки, життя людини віднімає. Зовсім недавно (у масштабі людської еволюції) вдалося "приборкати" електрику – і тепер не можна собі уявити життя без усіх зручних пристроїв, які використовують електроенергію. Але є й такі відкриття, яким мало хто надає значення, хоча вони теж сильно впливають на наше життя. Одним з таких "непомітних" відкриттів є фрактали.

У кожній людині закладена природна допитливість, прагнення пізнати навколишній світ. Аналізуючи процеси, що відбуваються навколо неї, людина намагається знайти логічність того, що мало місце, і вивести деяку закономірність. Вона шукає закономірність там, де її не повинно бути. Проте навіть в хаосі можна знайти зв'язок між подіями. І цей зв'язок – фрактал.

Якщо зіставити гілку дерева з цілим деревом, то можна зробити висновок, що гілки самоподібні. Завдяки цьому спостереженню впливає висновок, що в природі існує принцип рекурсивної самоподібності. Дуже часто органічні і неорганічні форми в природі формуються аналогічно. Але випадкові форми цих об'єктів можуть бути описані фракталами.

Саме слово "фрактал" з'явилося завдяки геніальному вченому Бенуа Мандельброту (Benoît B. Mandelbrot). Він сам придумав цей термін у сімдесятих роках минулого століття, запозичивши слово *fractus* з латині, де воно буквально означає "ламаний" або "подрібнений". Сьогодні під словом "фрактал" найчастіше розуміють графічне зображення структури, яка в більшому масштабі подібна сама собі.

Народження фрактальної геометрії прийнято пов'язувати з виходом в 1977 році книги Мандельброта "The Fractal Geometry of Nature".



Бенуа Мандельброт

Математична база теорії фракталів була закладена за багато років до народження Бенуа Мандельброта, однак розвинулася вона змогла лише з

появою обчислювальних пристроїв. На початку своєї наукової діяльності Бенуа працював у дослідному центрі компанії IBM, співробітники якого трудилися над передачею даних на відстань. У ході досліджень вчені зіткнулися з проблемою великих втрат, що виникають через так звані "шумові" перешкоди. Перед Бенуа стояло складне і дуже важливе завдання – зрозуміти, як передбачити виникнення шумових перешкод в електронних схемах, коли статистичний метод виявляється неефективним.

Переглядаючи результати вимірювань шуму, Мандельброт звернув увагу на одну дивовижну закономірність – графіки шумів у різному масштабі мали однаковий вигляд. Ідентична картина спостерігалася незалежно від того, чи був це графік шумів за один день, тиждень або годину. Можна було змінювати масштаб графіка, але картина щораз повторювалася.

За життя Бенуа Мандельброт неодноразово говорив, що він не займається формулами, а просто грає з картинками. Мандельброт будь-яку алгебраїчну задачу перекладав в область геометрії, де, за його словами, правильна відповідь завжди очевидна. Не дивно, що саме людина з такою багатою просторовою уявою стала батьком фрактальної геометрії. Адже усвідомлення суті фракталів приходить саме тоді, коли починаєш вивчати рисунки і вдумуватися в зміст дивних візерунків-завихрень.

Фрактальний рисунок не має ідентичних елементів, але є подібним в будь-якому масштабі. Побудувати таке зображення з високим ступенем деталізації вручну було просто неможливо, оскільки це вимагало величезної кількості обчислень. Так, французький математик П'єр Жозе Луї Фату описав цю множину більш ніж за сімдесят років до відкриття Бенуа Мандельброта. Про принципи самоподібності згадувалося ще в працях Лейбніця і Георга Кантора. Один з перших рисунків фрактала був графічною інтерпретацією множини Мандельброта, що було зроблено завдяки дослідженням Гастона Моріса Жюліа.

Цей французький математик задався питанням, як виглядатиме множина, якщо побудувати її на основі простої формули, проітерованої циклом зворотного зв'язку. Якщо пояснити "на пальцях", це означає, що для конкретного числа знаходять за формулою нове значення, після чого підставляють його знову у формулу і отримують ще одне значення. Результат – велика послідовність чисел.

Щоб отримати повне уявлення про таку множину, треба виконати величезну кількість обчислень – сотні, тисячі, мільйони. Вручну це зроби-

ти було просто нереально. Але коли в розпорядженні математиків з'явилися потужні обчислювальні пристрої, вони змогли по-новому подивитись на формули і вирази, які давно викликали інтерес. Мандельброт був першим, хто використав комп'ютер для прорахунку класичного фрактала. Обробивши послідовність, що складається з великої кількості значень, Бенуа переніс результати на графік. Ось що він отримав (рис. 9.1).

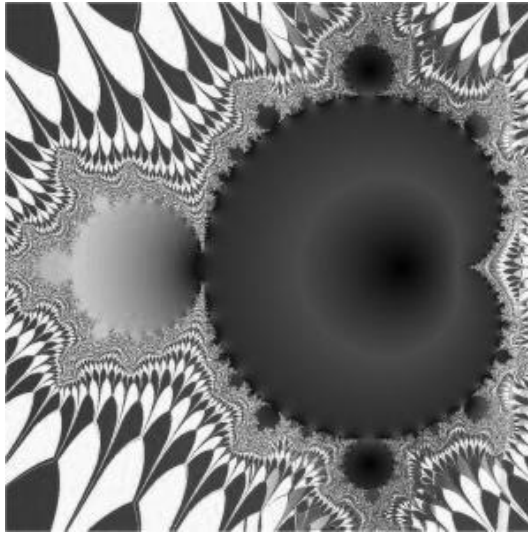


Рисунок 9.1 – Фрактал Мандельброта

Пізніше це зображення було розфарбоване (наприклад, одним із способів фарбування кольором – по числу ітерацій) і стало одним з найпопулярніших зображень, які тільки були створені людиною.

Теорія фракталів швидко знайшла практичне застосування. Оскільки вона тісно пов'язана з візуалізацією самоподібних образів, не дивно, що першими, хто взяв на озброєння алгоритми і принципи побудови незвичайних форм, були художники.

Майбутній співзасновник легендарної студії Pixar Лорен Карпентер в 1967 році почав працювати в компанії Boeing Computer Services, яка була одним із підрозділів відомої корпорації, що займається розробкою нових літаків. Лорен створював презентації з прототипами літаючих моделей. В його обов'язки входило розроблення зображень нових моделей літаків, що проектувалися. Він мав виконувати картинки нових моделей, показуючи майбутні літаки з різних сторін. Майбутній засновник Pixar Animation Studios вирішив використовувати гори, як фон зображення. В кінці семидесятих років минулого століття комп'ютери не могли впоратися з настільки складними обчисленнями – графічних редакторів не було, не кажучи вже про додатки для тривимірної графіки.

У 1978 році Лорен ознайомився з книгою Мандельброта "Фрактали: форма, випадковість і розмірність". У цій книзі його увагу привернуло те, що Бенуа приводив масу прикладів фрактальних форм у реальному житті і доводив, що їх можна описати математичним виразом.

Така аналогія була обрана математиком не випадково. Справа в тому, що як тільки він оприлюднив свої дослідження, йому довелося зіткнутися з цілим шквалом критики. Головне, в чому дорікали його колеги, – марність розроблюваної теорії. Були також ті, хто взагалі вважав, що фрактальні візерунки – просто побічний результат роботи "диявольських машин", які в кінці семидесятих років багатьом здавалися чимось занадто складним і невивченим, щоб цілком їм довіряти. Мандельброт намагався знайти очевидне застосування теорії фракталів, але, за великим рахунком, йому і не потрібно було це робити. Послідовники Мандельброта в наступні роки довели величезну користь від подібного "математичного курйозу", і Карпентер був одним з перших, хто випробував метод фракталів на практиці.

Прочитавши книжку, майбутній аніматор вивчив принципи фрактальної геометрії і став шукати спосіб реалізувати її в комп'ютерній графіці. Всього за три дні роботи Лорен візуалізував реалістичне зображення гірської системи на своєму комп'ютері. Він за допомогою формул намалював цілком впізнаваний гірський пейзаж. Принцип, який використовував Лорен для досягнення мети, був дуже простий. Він полягав у тому, щоб розділяти більш велику геометричну фігуру на дрібні елементи, а ті, у свою чергу, ділити на аналогічні фігури меншого розміру.

Використовуючи більш великі трикутники, Карпентер дробив їх на чотири дрібних і потім повторював цю процедуру знову і знову, поки у нього не виходив реалістичний гірський ландшафт. Він зміг створити цілу планету, використовуючи той же самий принцип фрактального моделювання. Йому вдалося стати першим художником, який застосував в комп'ютерній графіці фрактальний алгоритм для побудови зображень. Зараз всі популярні програмні додатки для створення тривимірних ландшафтів використовують аналогічний принцип генерування природних об'єктів.

Останнім півстоліттям життя стрімко змінювалося. Більшість людей сприймає досягнення сучасних технологій як належне. Взяти, наприклад, стільникові телефони. Перші телефони мали висувні антени, що збільшувало розміри пристрою, вони часто ламалися. Зараз таких антен на телефонах немає і це завдяки фракталам.

Фрактальні малюнки заворожують своїми візерунками. Вони нагадують зображення космічних об'єктів – туманностей, скупчення галактик і так далі. Тому цілком закономірно, що, коли Мандельброт озвучив свою теорію фракталів, його дослідження викликали підвищений інтерес у тих, хто займався вивченням астрономії. Один з таких любителів по імені Натан Коен після відвідування лекції Мандельброта загорівся ідеєю практичного застосування отриманих знань. Щоправда, зробив він це інтуїтивно, і не останню роль у його відкритті зіграв випадок. Будучи радіоаматором, Натан прагнув створити антену, що має як можна більш високу чутливість.

Єдиний спосіб поліпшити параметри антени, який був відомий на той час, полягав у збільшенні її геометричних розмірів. Натан експериментував з різними формами антен, намагаючись отримати максимальний результат при мінімальних розмірах. Зайнявшись ідеєю фрактальних форм, Коен зробив з дроту один з найвідоміших фракталів – "сніжинку Коха". Шведський математик Хельге фон Кох придумав цю криву ще в 1904 році. Вона виходить шляхом ділення відрізка на три частини і заміщення середнього сегмента рівностороннім трикутником без сторони, що збігається з цим сегментом. Існують також інші різновиди "кривий Коха", але приблизна форма кривої залишається схожою.

Коли Натан підключив антену до радіоприймального пристрою, він був дуже здивований – чутливість різко збільшилася. Після серії експериментів майбутній професор Бостонського університету зрозумів, що антена, зроблена за фрактальним малюнком, має високий ККД і покриває набагато ширший частотний діапазон у порівнянні з класичними рішеннями. Крім того, форма антени у вигляді кривої фрактала дозволяє істотно зменшити геометричні розміри. Натан Коен навіть вивів теорему, яка доводить, що для створення ширококутової антени достатньо надати їй форму самоподібної фрактальної кривої.

Коен запатентував своє відкриття і заснував фірму з розробки і проектування фрактальних антен Fractal Antenna Systems, справедливо вважаючи, що в майбутньому завдяки його відкриттю стільникові телефони зможуть позбутися громіздких антен, стануть більш компактними, матимуть меншу вагу.

У принципі, так і сталося. Правда, і донині Натан веде судову тяжбу з великими корпораціями, які незаконно використовують його відкриття для виробництва компактних пристроїв зв'язку. Деякі відомі виробники

мобільних пристроїв, як, наприклад, Motorola, вже прийшли до мирної угоди з винахідником фрактальної антени.

На прикладі задачі визначення берегової лінії Англії Мандельброт запропонував використовувати новий підхід до вимірювань. Оскільки берегова лінія близька до фрактальної кривої, значить, до неї можна застосувати спеціальний параметр – так звану фрактальну розмірність.

Що таке звичайна розмірність – зрозуміло кожному. Якщо розмірність дорівнює одиниці, то отримуємо пряму, якщо двом – плоску фігуру, трьом – об'єм. Однак таке розуміння розмірності в математиці не спрацює з фрактальними кривими, де цей параметр має дробове значення. Фрактальну розмірність в математиці можна умовно розглядати як "нерівність". Чим вище нерівність кривої, тим більше її фрактальна розмірність. Крива, що за Мандельбротом має фрактальну розмірність вище її топологічної розмірності, має апроксимовану протяжність, яка не залежить від кількості вимірювань.

Зараз учені знаходять все більше і більше областей для застосування теорії фракталів. За допомогою фракталів можна аналізувати коливання котирувань на біржі, досліджувати всілякі природні процеси, як, наприклад, коливання чисельності видів, або моделювати динаміку потоків. Фрактальні алгоритми можуть бути використані для стиснення даних, наприклад для компресії зображень.

Багато графічних редакторів мають вбудовані засоби для створення фрактальних візерунків. Однак ці інструменти зазвичай є другорядними і не дозволяють виконати тонке налаштування генерованого фрактального візерунка. У тих випадках, коли необхідно побудувати математично точний фрактал, на допомогу прийде багатоплатформовий редактор ХаoS. Ця програма дає можливість не тільки будувати самоподібні зображення, але й виконувати з ним різні маніпуляції. Наприклад, в режимі реального часу можна зробити "прогулянку" по фракталу, змінивши його масштаб. Анімований рух уздовж фрактала можна зберегти у вигляді файлу XAF і потім відтворити в самій програмі.

Фрактали знаходять все більше застосування в науці. Вони описують реальний світ навіть краще, ніж традиційна фізика або математика. Броунівський рух – це, наприклад, випадковий і хаотичний рух частинок пилу. Цей тип руху, можливо, є аспектом фрактальної геометрії, що має найбільше практичне використання. Випадковий броунівський рух має частотну

характеристику, яка може бути використана для передбачення явищ, що включають великі кількості даних і статистики.

Найбільш корисним використанням фракталів в комп'ютерній техніці є фрактальне стиснення даних. При цьому картинки стискаються набагато краще, ніж це робиться звичайними методами – до 600 : 1. Інша перевага фрактального стиснення в тому, що при збільшенні не спостерігається ефекту пікселізації, що різко погіршує картинку. Більше того, фрактально стисла картинка після збільшення часто виглядає навіть краще, ніж до нього. Фахівцям у галузі комп'ютерної техніки відомо також, що фрактали нескінченної складності та краси можуть бути згенеровані простими формулами. Індустрія кіно для створення реалістичних елементів ландшафту (хмари, скелі і тіні) широко використовує технологію фрактальної графіки.

Отже, у всьому, що нас оточує, ми часто бачимо хаос, але насправді це не випадковість, а ідеальна форма, розглядати яку нам допомагають фрактали. Природа – найкращий архітектор, ідеальний будівельник та інженер. Вона влаштована дуже логічно, і якщо десь існують закономірності, це означає, що їх потрібно шукати в іншому масштабі. Люди все краще і краще це розуміють, намагаючись в чомусь наслідувати природним формам. Інженери проектують акустичні системи у вигляді раковини, створюють антени з геометрією сніжинок і так далі.

9.2. Поняття "фрактал"

Нам вже відомо, що піонером в області пізнання фракталів був франко-американський математик, професор Бенуа Б. Мандельброт. У середині 1960-х ним розроблена фрактальна геометрія, метою якої був аналіз ламаних, зморшкуватих і нечітких форм. Множина Мандельброта – це перша асоціація, яка виникає у людини, коли він чує слово "фрактал".

Визначення фрактала, дане Мандельбротом, звучить так: "фракталами називається структура, що складається з частин, які в якомусь сенсі подібні цілому". Тобто, однією з основних властивостей фракталів є самоподібність. У самому простому випадку невелика частина фрактала містить інформацію про весь фрактал.

Мета вивчення фракталів – передбачити закономірності, які, на перший погляд, можуть здаватися непередбачуваними і абсолютно хаотичними.

Фрактали – геометричні об'єкти з дробовою розмірністю. Наприклад, розмірність лінії – 1, площі – 2, об'єму – 3. У фрактала ж значення розмір-

ності може бути між 1 і 2 або між 2 і 3. Наприклад, фрактальна розмірність берегової лінії Англії становить 1,25, зім'ятої паперової кульки – приблизно 2,5. У математиці існує спеціальна складна формула для обчислення розмірності фракталів.

Роль фракталів в машинній графіці сьогодні важко переоцінити. Вони приходять на допомогу, наприклад, коли потрібно, за допомогою кількох коефіцієнтів, задати лінії і поверхні дуже складної форми. З точки зору машинної графіки, фрактальна геометрія незамінна при генерації штучних хмар, гір, поверхні моря. Фактично знайдений спосіб легкого представлення складних неевклідових об'єктів, образи яких досить схожі на природні.

9.3. Класифікація фракталів

Для того, щоб представити все різноманіття фракталів, зручно вдаватися до їх загальноприйнятої класифікації.

Геометричні фрактали. Фрактали цього класу самі наочні. У двовимірному випадку їх отримують за допомогою деякої ламаної (або поверхні в тривимірному випадку), яку називають генератором. За один крок алгоритму кожен з відрізків, що складає ламану, замінюється на ламану-генератор, у відповідному масштабі. У результаті нескінченного повторення цієї процедури, виходить геометричний фрактал.

Існують два основних способи побудови геометричних фракталів:

- перший спосіб – використання *L*-систем (від імені Linder-mayer);
- другий спосіб – застосування систем ітерованих функцій (IFS).

Найбільш простий спосіб побудови фракталів – це побудова їх за допомогою *L* систем. Цей метод був розроблений біологом Ліндермауером.

L-система – це граматика деякої мови (досить простої), яка описує ініціатор і перетворення, що виконується над ним, за допомогою засобів, аналогічних засобам мови Лого (аксіоматичний опис найпростіших геометричних фігур і допустимих перетворень на площині та в просторі).

У цьому методі малювання фракталів здійснюється за допомогою простої, але досить ефективної технології комп'ютерної графіки – "черепащачої графіки".

Система ітерованих функцій (СІФ) – це сукупність стискаючих афінних перетворень. Як відомо, афінні перетворення включають в себе переміщення, масштабування, симетрію, поворот і зсув. Вони реалізуються із застосуванням матриць.

Другий спосіб – СІФ – був розроблений і втілений в життя американським математиком М. Барнслі.

Цей спосіб складніше і гнучкіше ніж спосіб L -систем. На відміну від способу L -систем даний спосіб описує фрактали не графічно, а математично, у вигляді формул.

СІФ дозволяє будувати більш складні фрактали, ніж спосіб L -систем. У ньому можна будувати такі знамениті фрактали як: Множина Жюліа, фрактал Мандельброта та інші. У СІФ для роботи з фракталами використовуються комплексні числа і комплексна площина.

Розглянемо один з таких фрактальних об'єктів – тріадну криву Коха. Побудова кривої в режимі L -системи починається з відрізка одиничної довжини (рис. 9.2) – це 0-е покоління кривої Коха. Далі кожна ланка (в нульовому поколінні один відрізок) замінюється на утворюючий елемент, позначений на рис. 9.2 через $n = 1$. У результаті такої заміни виходить наступне покоління кривої Коха. У 1-му поколінні – це крива з чотирьох прямолінійних ланок, кожна завдовжки по $1/3$. Для отримання 3-го покоління виконуються ті ж самі дії – кожна ланка замінюється на зменшений утворюючий елемент. Отже, для отримання кожного наступного покоління всі ланки попереднього покоління необхідно замінити зменшеним утворюючим елементом. Крива n -го покоління при будь-якому кінцевому n називається предфракталом. На рис. 9.2 представлені п'ять поколінь кривої. При n , яке прагне до нескінченності, крива Коха стає фрактальним об'єктом.

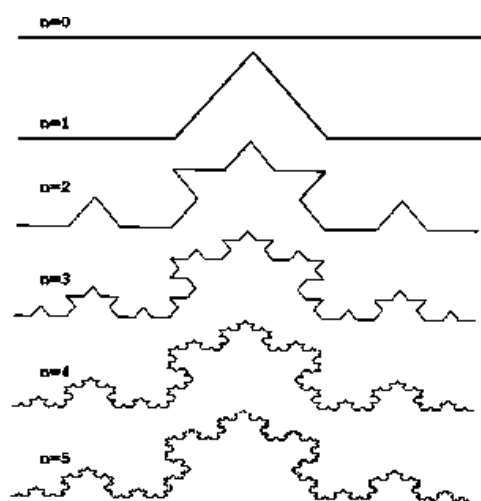


Рисунок 9.2 – Побудова тріадної кривої Коха

Для отримання іншого фрактального об'єкта потрібно змінити правила побудови. Нехай утворюючим елементом будуть два рівних відрізка,

з'єднаних під прямим кутом. У нульовому поколінні замінимо одиничний відрізок на цей утворюючий елемент так, щоб кут був звернуто. Можна сказати, що при такій заміні відбувається зміщення середини ланки. При побудові наступних поколінь застосовується правило: найперша зліва ланка замінюється на утворюючий елемент так, щоб середина ланки зміщувалася вліво від напрямку руху, а при заміні наступних ланок, напрямки зсуву середин відрізків повинні чергуватися. На рис. 9.3 представлені кілька перших поколінь і 11-е покоління кривої, побудованої за вищеописаним принципом. Гранична фрактальна крива (при n , що прагне до нескінченності) називається драконом Хартера-Хейтуея.

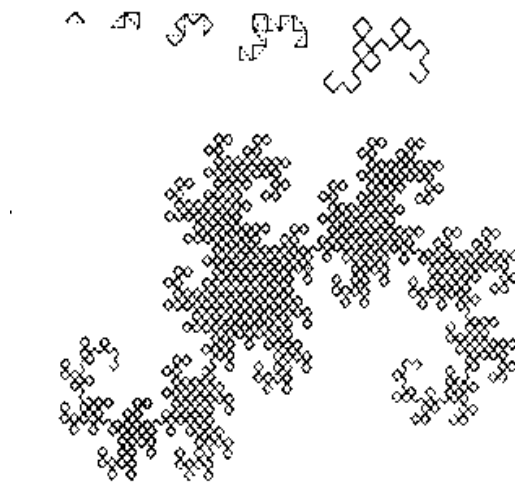


Рисунок 9.3 – "Дракон" Хартера-Хейтуея

На рис. 9.4 в якості простого прикладу наведено фрактал "п'ятикутник Дар'єра", який виглядає, як зв'язка п'ятикутників. Фактично він утворений при використанні п'ятикутника як ініціатора і рівнобедрених

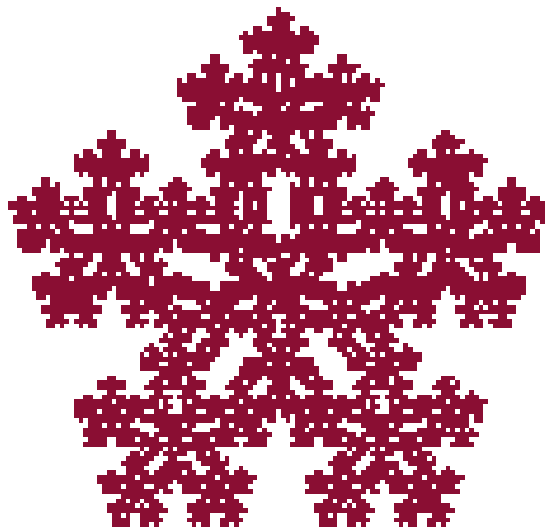


Рисунок 9.4 – П'ятикутник Дар'єра

трикутників, відношення більшої сторони до меншої в яких точно дорівнює так званої золотій пропорції (1.618033989 або $1 / (2\cos 72^\circ)$) як генератора. Ці трикутники вирізаються з середини кожного п'ятикутника, в результаті чого виходить фігура, схожа на 5 маленьких п'ятикутників, приклеєних до одного великого.

У машинній графіці використання геометричних фракталів необхідне при отриманні зображень дерев, кущів, берегової лінії. Двовірні геометричні фрактали використовуються для створення об'ємних текстур (малюнка на поверхні об'єкта).

Алгебраїчні фрактали. Це найбільша група фракталів. Отримують їх за допомогою нелінійних процесів в n -вимірних просторах. Найбільш вивчені двовірні процеси. Інтерпретуючи нелінійний ітераційний процес, як дискретну динамічну систему, можна користуватися термінологією теорії цих систем: фазовий портрет, усталений процес, атрактор і т. д.

Відомо, що нелінійні динамічні системи мають кілька стійких станів. Той стан, в якому опинилася динамічна система після деякого числа ітерацій, залежить від її початкового стану. Тому кожний стійкий стан (або як кажуть – атрактор) має деяку область початкових станів, з яких система обов'язково потрапить в аналізовані кінцеві стани. Отже, фазовий простір системи розбивається на області тяжіння атракторів. Якщо фазовим є двовірний простір, то забарвлюючи області тяжіння різними кольорами, можна отримати кольоровий фазовий портрет цієї системи (ітераційного процесу). Міняючи алгоритм вибору кольору, можна отримати складні фрактальні картини з химерними кольоровими візерунками. Несподіванкою для математиків була отримана можливість за допомогою примітивних алгоритмів породжувати дуже складні нетривіальні структури.

В якості прикладу розглянемо множину Мандельброта (рис. 9.5 і 9.6). Алгоритм його побудови доволі простий і заснований на простому ітеративному виразі:

$$Z[i+1] = Z[i] \times Z[i] + C,$$

де $Z[i]$ і C – комплексні змінні.

Ітерації виконуються для кожної стартової точки C квадратної або прямокутної області – підмножині комплексної площини. Ітераційний процес продовжується до тих пір, поки $Z[i]$ не вийде за межі кола радіуса 2, центр якого лежить в точці $(0,0)$, (це означає, що атрактор динамічної

системи знаходиться в нескінченності), або після досить великого числа ітерацій (наприклад 200 – 500) $Z[i]$ зійдеться до якої-небудь точки кола. Залежно від кількості ітерацій, в перебігу яких $Z[i]$ залишалася всередині кола, можна встановити колір точки C (якщо $Z[i]$ залишається всередині кола протягом досить великої кількості ітерацій, ітераційний процес припиняється і ця точка растра забарвлюється в чорний колір).

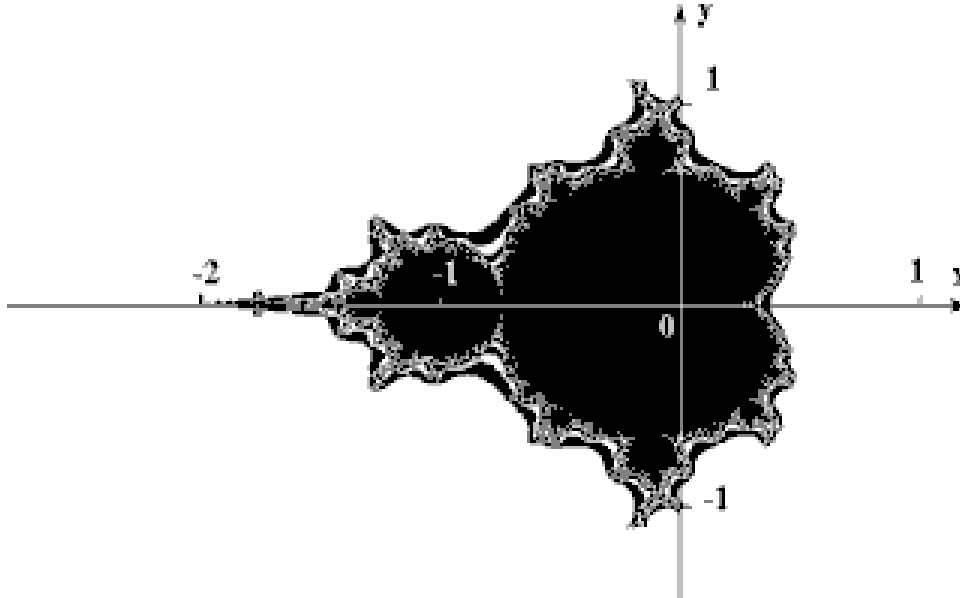


Рисунок 9.5 – Множина Мандельброта



Рисунок 9.6 – Збільшена ділянка границі множини Мандельброта

Вищеописаний алгоритм дає наближення до так званої множини Мандельброта. Множині Мандельброта належать точки, які протягом нескінченного числа ітерацій не переміщуються у нескінченність (точки мають чорний колір). Точки, що належать границі множини (саме там виникають складні структури) переміщуються у нескінченність за скінченне число ітерацій, а точки, що лежать за межами множини, переміщуються у нескінченність через кілька ітерацій (білий фон).

Стохастичні фрактали. Ще одним відомим класом фракталів є стохастичні фрактали, які виходять у тому випадку, якщо в ітераційному процесі випадковим чином міняти будь-які його параметри. При цьому виходять об'єкти дуже схожі на природні – несиметричні дерева, порізані берегові лінії і т. д. Двовимірні стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфу місцевості і поверхні моря.

Існують й інші класифікації фракталів, наприклад поділ фракталів на детерміновані (алгебраїчні і геометричні) і недетерміновані (стохастичні).

9.4. Системи ітерованих функцій

Метод "Систем Ітерованих Функцій" (Iterated Functions System – IFS) з'явився в середині 80-х років як простий засіб отримання фрактальних структур. IFS є системою функцій з деякого фіксованого класу функцій, що відображають одну багатовимірну множину на іншу. Найбільш проста IFS складається з афінних перетворень площини:

$$\begin{aligned}X' &= A \times X + B \times Y + C; \\Y' &= D \times X + E \times Y + F.\end{aligned}$$

У 1988 році відомі американські фахівці з теорії динамічних систем Барнслі і Слоан запропонували певні ідеї, засновані на міркуваннях теорії динамічних систем, для стискання та зберігання графічної інформації. Вони назвали свій метод методом фрактального стиснення інформації. Походження назви пов'язане з тим, що геометричні образи, які виникають у цьому методі, зазвичай мають фрактальну природу в сенсі Мандельброта.

На підставі цих ідей Барнслі і Слоан створили алгоритм, який, за їх твердженням, дозволить стискати інформацію в 500 – 1000 разів. Стисло суть методу можна описати таким чином. Зображення кодується кількома простими перетвореннями (у нашому випадку афінними), тобто коефіцієнтами цих перетворень (у нашому випадку A, B, C, D, E, F).

Наприклад, закодувавши якесь зображення двома афінними перетвореннями, можна однозначно визначити його за допомогою 12-ти коефіцієнтів. Якщо тепер задатися деякою початковою точкою (наприклад, $X = 0, Y = 0$) і запустити ітераційний процес, то після першої ітерації отримаємо дві точки, після другої – чотири, після третьої – вісім тощо.

Через кілька десятків ітерацій сукупність отриманих точок буде описувати закодоване зображення. Але проблема полягає в тому, що дуже важко знайти коефіцієнти IFS, яка б кодувала довільне зображення.

Для побудови IFS застосовують крім афінних й інші класи простих геометричних перетворень, які задаються невеликим числом параметрів.

Наприклад, проєктивне:

$$X' = (A_1X + B_1Y + C_1) / (D_1X + E_1Y + F_1);$$

$$Y' = (A_2X + B_2Y + C_2) / (D_2X + E_2Y + F_2)$$

або квадратичне:

$$X' = A_1X^2 + B_1XY + C_1Y^2 + D_1X + E_1Y + F_1;$$

$$Y' = A_2X^2 + B_2XY + C_2Y^2 + D_2X + E_2Y + F_2$$

перетворення на площині.

Як приклад використання IFS для побудови фрактальних структур, розглянемо "дракон" Хартера-Хейтуея (див. рис. 9.3). Виділимо в цій структурі подібні частини і, для кожної з них обчислимо коефіцієнти афінного перетворення. В афінний колаж буде включено стільки афінних перетворень, скільки існує частин, подібних цілому зображенню.

Побудуємо IFS для "дракона" Хартера-Хейтуея. Для цього розташуємо перше покоління цього фрактала на сітці координат дисплея 640×350 (рис. 9.7). Позначимо точки ламаної A, B, C . За правилами побудови у цьо-

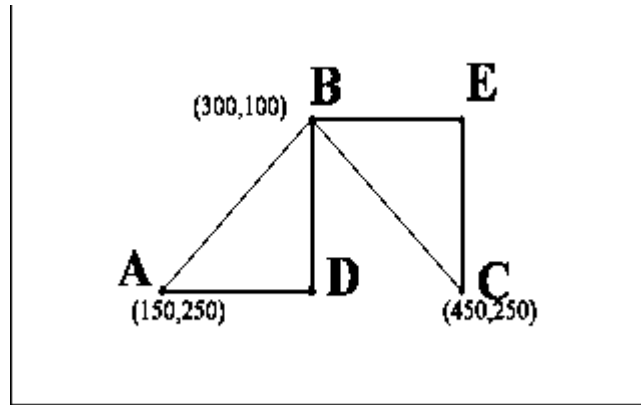


Рисунок 9.7 – Заготівка для побудови IFS "дракона" Хартера-Хейтуея

го фрактала дві частини, подібні цілому – на рис. 9.7 це ламані ADB і BEC . Знаючи координати кінців цих відрізків, можна обчислити коефіцієнти двох афінних перетворень, що переводять ламану ABC в ADB і BEC :

$$X' = -0,5X - 0,5Y + 490;$$

$$Y' = 0,5X - 0,5Y + 120;$$

$$X' = 0,5X - 0,5Y + 340;$$

$$Y' = 0,5X + 0,5Y - 110.$$

Задавшись початковою стартовою точкою (наприклад, $X = 0$, $Y = 0$) і ітераційно діючи на неї цією IFS, після десятої ітерації на екрані отримаємо фрактальну структуру, зображену на рис. 9.10, яка представляє собою "дракон" Хартера-Хейтуея. Його кодом (стисненим описом) є набір коефіцієнтів двох афінних перетворень.

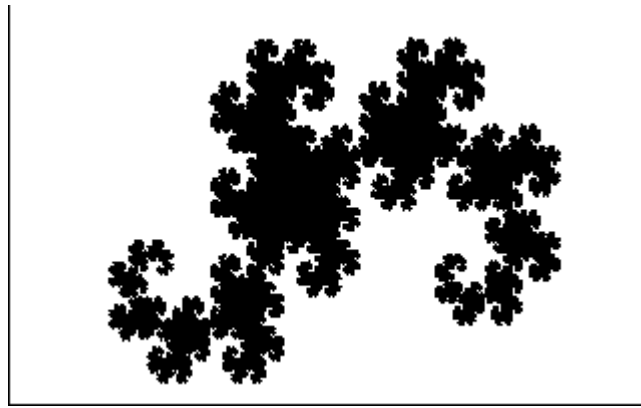


Рисунок 9.10 – "Дракон" Хартера-Хейтуея, побудований за допомогою IFS у прямокутнику 640×350

Використання IFS для стиснення звичайних зображень (наприклад фотографій) засновано на виявленні локальної самоподібності, на відміну від фракталів, де спостерігається глобальна самоподібність. За алгоритмом Барнслі відбувається виділення в зображенні пар областей, менша з яких подібна більшій, і збереження кількох коефіцієнтів, що кодують перетворення, яке переводить більшу область в меншу. Потрібно, щоб множина "менших" областей покривала все зображення. При цьому у файл, що кодує зображення, будуть записані не тільки коефіцієнти, що характеризують знайдені перетворення, але й місце розташування та лінійні розміри "великих" областей, які разом з коефіцієнтами будуть описувати локальну самоподібність кодованого зображення. Відновлювальний алгоритм, в цьому випадку, повинен застосовувати кожне перетворення не до всієї множини точок, одержаних на попередньому кроці алгоритму, а до деякої її підмножини, приналежній області, що відповідає вживаному перетворенню.

9.5. Алгоритм побудови IFS-фракталів

Матричні перетворення дво- і тривимірних об'єктів дозволяють переносити, масштабувати, відображати, зрушувати, проектувати і обертати окремі ділянки зображення, які згодом служать компоновальними блоками деякої картини. Матричний запис перерахованих афінних перетворень де-

якої точки з використанням однорідних координат в загальному вигляді може бути представлений наступним співвідношенням:

$$\begin{bmatrix} x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}, \quad (9.1)$$

де $\begin{bmatrix} x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}$ – матриця результату на n -у кроці ітераційного процесу;

$\begin{bmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$ – матриця результату $n - 1$ кроку ітерацій;

$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$ – матриця деяких видових перетворень.

Матричне рівняння (9.1) разом із заданими ймовірностями утворюють IFS-набір для побудови фрактального зображення.

При відомих параметрах цього набору алгоритм побудови фрактального зображення представляється наступним чином:

1. Задаються матриці початкових значень координат деякого об'єкта $[x]$, $[y]$, наприклад, $[x] = 0$, $[y] = 0$.

2. Виконується задане матричне перетворення, вихідні величини якого служать в якості вхідних для наступного кроку перетворень. Одночасно ці проміжні результати виводяться на екран монітора.

3. Видові перетворення в кожній ітерації вибираються випадковим чином відповідно до заданих можливостей.

4. Ітераційний процес може складатися з багатьох тисяч операцій.

Якщо для побудови фрактала використовується система ітерованих функцій, отримують зображення, деталіровка якого обмежена тільки можливостями пристрою відображення, на відміну від побудови, заснованого на L -системі, де точність залежить від заданого порядку передфракталу. Щоб отримати високе розділення з використанням L -систем, необхідно застосовувати великий порядок передфракталу. Але оскільки побудова заснована на рекурсивному алгоритмі, відповідно виходить велика глибина рекурсії і, як наслідок, уповільнення побудови.

Чудовою властивістю алгоритмів, заснованих на теорії систем ітерованих функцій, є те, що їх результат (атрактор) абсолютно не залежить від вибору початкової множини E_0 або початкової точки x_0 .

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Хто є засновником фрактальної геометрії?
 2. Яку теорему довів Натан Коен?
 3. Що розуміється під терміном "фрактал"?
 4. Вкажіть класифікацію фракталів.
 5. Назвіть способи побудови геометричних фракталів.
 6. Як будується крива Коха?
 7. Яка група фракталів є найбільшою?
 8. Який приклад побудови стохастичних фракталів?
 9. Що таке система ітерованих функцій?
-

10. МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ КАТАСТРОФ. МОДЕЛЮВАННЯ ХАОТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

10.1. Структурна стійкість і нестійкість функцій

Один із аспектів задач на екстремум, який довгий час залишався поза увагою математиків, тісно пов'язаний з сучасним поняттям структурної стійкості функцій. Розглянемо для прикладу функції:

$$y = x^2, \quad y = x^3 \quad \text{і} \quad y = x^4.$$

Усі вони мають нульову першу похідну на початку координат (у таких випадках кажуть, що $x = 0$ є особливою точкою).

Під особливою (сингулярною) точкою розуміють точку, в якій функція є невизначеною або має нерегулярну поведінку (наприклад, точка, в якій функція має розрив або не диференціюється).

У розглядуваному прикладі перша і третя функції мають в особливій точці мінімальне значення, а друга – точку перегину. В традиційних межах задач на екстремум це розходження вважається найбільш важливим.

Розглянемо це питання з дещо іншої точки зору. Введемо до розглядуваних функцій слабкі збурювання:

$$y = x^2 - \varepsilon x; \tag{10.1}$$

$$y = x^3 - \varepsilon x; \tag{10.2}$$

$$y = x^4 - \varepsilon x^2, \tag{10.3}$$

де параметр ε може бути яким завгодно малим. У результаті такого збурювання у випадку (10.1) ніяких принципових змін не відбувається: зберігається єдина особлива точка, яка лише зміщена на малу величину $x_0 = \varepsilon/2$, причому значення функції в цій точці (єдиний мінімум) змінюється на величину $y_0 = -\varepsilon^2/4$. У другому і третьому випадках ситуація зовсім інша. Друга функція, для якої початок координат був точкою перегину, набуває дві екстремальні точки, одна з яких відповідає максимуму, а друга – мінімуму. Ці точки мають координати x_1 і x_2 , які визначаються виразом:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\varepsilon/3}.$$

Функція $y = x^4$, яка мала єдиний мінімум на початку координат, у результаті малого збурення має вже три особі точки. При цьому початок ко-

ординат стає точкою максимуму, а в двох нових особливих точках, скільки завгодно близьких до точки $x = 0$, функція приймає мінімальні значення.

На рис. 10.1 наведені графіки розглядуваних функцій. Переривчаста лінія відповідає функціям до введення фактора збурювання, суцільна лінія – функціям після введення до них фактора збурювання.

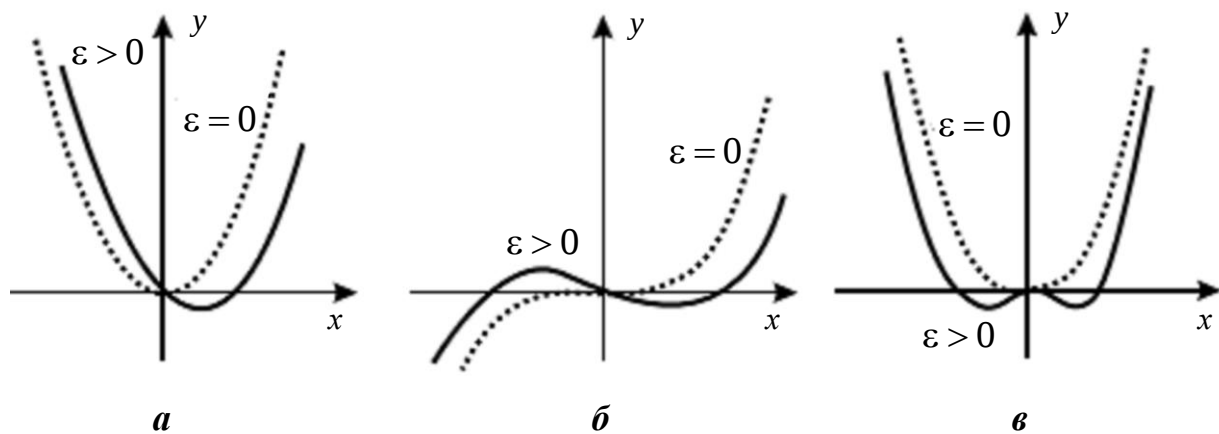


Рисунок 10.1 – Графіки функцій

Побудова математичної моделі будь-якого фізичного процесу або деякої системи пов'язана з нехтуванням членами малої величини. У першому прикладі (див. рис. 10.1, *а*) це цілком виправдано: врахування малого відхилення функції від квадратичної параболи призводить не до якісних, а до малих кількісних змін. У другому і третьому прикладах поведінка функцій при врахуванні малих поправочних членів якісно інша. Функції $y = x^3$ і $y = x^4$ (див. рис. 10.1, *б* і *в*), незважаючи на те, що друга з них має екстремум, а перша немає, об'єднує загальна властивість, яку прийнято називати *структурною нестійкістю*. Цей термін відображає той факт, що при малій зміні структури функції її поведінка біля особливої точки різко змінюється. Навпаки, функція $y = x^2$ є *структурно стійкою*.

Додамо, що стійкість – це здатність функції зберігати свій вигляд за наявності слабкого збурювання. У механіці стійкість характеризується відповіддю на мале збурення системи, що перебуває в механічній рівновазі.

Властивість структурної стійкості (нестійкості) функції не була включена до арсеналу математичних понять аж до 30-х років XX століття, коли вона вперше була сформульована А. А. Андроном (1901 – 1952).

10.2. Біфуркації стаціонарних станів

Здавалося б, у зв'язку з викладеним вище, функції, структурно нестійкі в особливих точках, непридатні для опису реальності. Але, як правило,

функції, що виникають у фізичних додатках, містять деякі параметри, значення яких можуть змінюватися в певному діапазоні (подібно параметру ε в розглянутих прикладах). У таких випадках мають справу з сім'єю функцій, залежних від параметра. Може статися, що при зміні цього параметра з неминучістю досягається значення (у нашому прикладі $\varepsilon = 0$), яке відповідає структурно нестійкій особливій точці, яка тим самим набуває цілком реального сенсу. Більше того, саме ця точка, будучи однією з реалізацій сім'ї особливих точок, є найбільш важливою, оскільки з нею пов'язані якісні зміни в поведінці системи (подібні описаним вище).

Аналіз сім'ї функцій, які мають місце при розв'язанні задач, пов'язаних з пошуком мінімуму або максимуму, також не був предметом загальноматематичних роздумів ні в XVIII, ні в першій половині XIX століття. Тільки великий французький математик А. Пуанкаре побачив у такому аналізі загальноматематичну проблему. У зв'язку з його формулюванням цієї проблеми виникло поняття "біфуркація", яке пізніше стало одним з ключових в теорії катастроф. Термін "біфуркація" буквально означає "роздвоєння", але зазвичай застосовується в більш широкому сенсі для позначення всіляких якісних перебудов різних об'єктів при зміні параметрів, від яких вони залежать.

У прикладі з сім'єю функцій $y = x^4 - \varepsilon x^2$ значення параметра $\varepsilon = 0$ відповідає також точці біфуркації, оскільки при переході ε від від'ємних значень до додатних єдиний стійкий стаціонарний стан $x = 0$, стаючи нестійким, доповнюється парою стійких станів. У прикладі з сім'єю функцій $y = x^3 - \varepsilon x$ при від'ємних ε стаціонарні стани взагалі відсутні, а в точці $\varepsilon = 0$ відбувається народження пари таких станів, один з яких є стійким, а другий нестійким. В обох випадках значення $\varepsilon = 0$ відповідають точкам біфуркації, хоча і різних типів.

Дослідження функцій супроводжується виникненням певних питань, які можна розділити на дві групи:

1) питання, які належать до поведінки функцій при фіксованих значеннях параметрів;

2) питання, що стосуються змін, які відбуваються з функціями при зміні значень параметрів.

Повільна зміна параметра може призвести до того, що при досягненні деякого критичного значення функція набуває якісних змін, які, як вказувалося вище, називаються біфуркаціями.

Отже, питання другого типу передбачають визначення біфуркаційних значень параметрів та побудову функції при її переході через критичні значення. Розв'язанням питань цього типу займається теорія біфуркації, задачами якої є:

- 1) опис всіх можливих біфуркацій досліджуваних функцій;
- 2) розбиття множини біфуркаційних значень параметрів на області з різними типами явищ;
- 3) побудова для кожної області відповідної графічної залежності.

Розглянемо виникнення і сутність біфуркації. Нехай маємо функціональну залежність, що задана рівнянням:

$$y = r + x^2.$$

Прирівняємо праву частину рівняння до нуля і проаналізуємо, які значення може приймати параметр r , тобто з'ясуємо, як він впливає на функціональну залежність. Будемо мати рівняння:

$$x^2 = -r. \quad (10.4)$$

При $r < 0$ рівняння (10.4) має додатну праву частину і, отже, два рішення: $x_1 = -\sqrt{-r}$ та $x_2 = +\sqrt{-r}$.

На рис. 10.2 графічно відображено цей випадок розв'язання рівняння (10.4). Перша точка $x_1 = -\sqrt{-r}$ стійка, оскільки з рис. 10.2 видно, що функція змінює свій знак з "+" на "-". Друга точка $x_2 = +\sqrt{-r}$ – нестійка, оскільки з рис. 10.2 випливає, що функція змінює свій знак з "-" на "+".

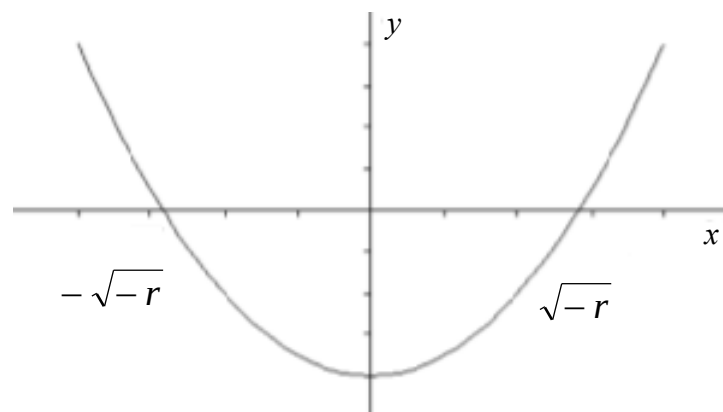


Рисунок 10.2 – Графік функції $x^2 = -r$

При $r = 0$ рівняння (10.4) має один корінь $x = 0$. У цій точці $y = 0$, тому аналітично визначити тип стійкості неможливо. Графік для цього випадку показано на рис. 10.3. З його розгляду випливає, що функція y при переході через особливу точну не змінює знак, тобто ця точка є нестійкою.

При $r > 0$ точок рівноваги немає (рис. 10.4). Напівстійка точка рівноваги зникає, як тільки r стає додатним. Оскільки характеристики точок рівноваги змінюються, то кажуть, що функція має біфуркацію. У цьому випадку значення параметра r змінюються від від'ємних через нуль до додатних, а характеристики особливих точок змінюються так, як показано на рис. 10.2 – 10.4. Отже, при $r = 0$ відбувається біфуркація.

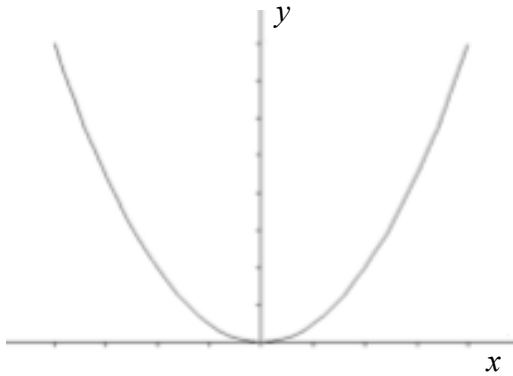


Рисунок 10.3 – Графік функції з одним коренем

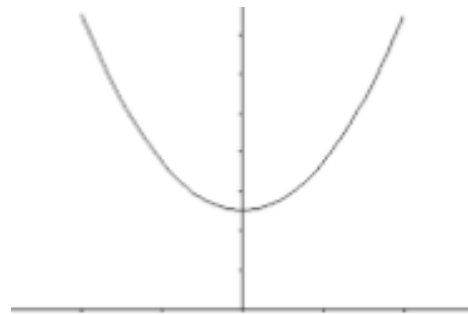


Рисунок 10.4 – Графік функції з напівстійкою точкою

Точка біфуркації – це такий стан, за якого навіть незначне збурення може призвести до глобальних змін. Криві або поверхні, що зображують множину рівноваг в просторі станів і параметрів, називаються *біфуркаційними кривими* або *біфуркаційними поверхнями*.

10.3. Теорія катастроф

Катастрофами називають стрибкоподібні зміни, які виникають у вигляді раптової відповіді системи на плавну зміну зовнішніх умов. На цей час розроблена і швидко розвивається математична теорія, яка вивчає подібні процеси. Її називають математичною *теорією катастроф*. Теорія катастроф визначає область існування різних структур, межі їх стійкості.

Теорія катастроф – це розділ математики, який включає в себе теорію біфуркацій диференціальних рівнянь (динамічних систем) і теорію особливостей гладких відображень. Це також частина якісної теорії складних нелінійних систем. Її основою є теорія особливостей гладких (диференційованих) відображень. Теорія катастроф сформувалася на стику топології і математичного аналізу, вона є узагальненням задач на екстремум у математичному аналізі. Аналіз якісної поведінки системи при зміні параметрів, що на неї впливають, дозволяє описувати стан системи, далекий від рівноваги, а також передбачати різку зміну цих станів.

У певній мірі теорія катастроф – це програма прогнозування нестійкості різних систем. Таку назву вона отримала тому, що втрата стійкості може бути катастрофічна, навіть якщо не призводить до загибелі або руйнування системи, а лише обумовлює перехід до іншої траєкторії розвитку.

Випадковий вплив у момент перелому (у точці біфуркації) може підштовхнути систему на новий шлях розвитку; після ж вибору одного з можливих шляхів, траєкторії розвитку, діє однозначний детермінізм – розвиток системи є передбачуваним до наступної точки біфуркації. Так випадковість і необхідність доповнюють одна одну.

Терміни "катастрофа" і "теорія катастроф" були введені Рене Томом і Крістофером Зіманом наприкінці 1960-х – початку 1970-х років ("катастрофа" в даному контексті означає різку якісну зміну об'єкта при плавній кількісній зміні параметрів, від яких він залежить). Однією з головних задач теорії катастроф є отримання так званої нормальної форми досліджуваного об'єкта (диференціального рівняння або відображення) в околиці "точки катастрофи" і побудована на цій основі класифікації об'єктів.

Теорія катастроф знайшла численні застосування в різних областях прикладної математики, фізики, а також в економіці.

Перші фундаментальні результати, пов'язані з теорією катастроф, належать А. Пуанкаре (метод нормальних форм в теорії диференціальних рівнянь) і А. А. Андронову (біфуркації динамічних систем). Наприкінці 1960-х років розвитком цього напрямку зайнявся відомий французький математик Рене Том. Проте популярність ідеї Тома набули завдяки кільком публікаціям К. Зімана в 1970-х роках, який активно пропагував теорію катастроф, порівнюючи її значення з винаходом математичного аналізу і кажучи про "революцію в математиці". Подальший розвиток теорії катастроф відбувся 70-х – 90-х роках минулого століття.

10.4. Сім елементарних катастроф по Тому

Теорія катастроф аналізує критичні точки (репетиції) потенційної функції, тобто точки, де не тільки перша похідна функції дорівнює нулю, а й дорівнюють нулю похідні вищого порядку. Динаміка розвитку таких точок може бути вивчена розкладанням потенційної функції в ряди Тейлора за допомогою малих змін вихідних параметрів. Якщо точки росту складаються не просто в випадковий шаблон, а формують структуровану область стабільності, то ці точки існують як організуючі центри для особливих ге-

ометричних структур з низьким рівнем катастрофічності, з високим рівнем катастрофічності в оточуючих їх областях фазового простору. Якщо потенційна функція залежить від трьох або меншої кількості активних змінних, і п'яти – менш активних параметрів, то в цьому випадку існує всього сім узагальнених структур – описаних геометричній біфуркацій, яким можна приписати стандартні форми розкладань в ряди Тейлора та в які можна розкласти репетиції за допомогою гладкої трансформації. Сьогодні ці сім фундаментальних типів катастроф, що відомі під іменами, які їм дав Рене Том: складка, збірка, ластівчин хвіст, метелик, гіперболічна омбіліка, еліптична та параболічна омбіліки.

Омбіліка – це точка округлення (кругова точка), тип точок поверхні в диференціальній геометрії; тип особливостей функцій (катастроф) в теорії катастроф.

Елементарна теорія катастроф зводить величезне різноманіття ситуацій до невеликого числа стандартних схем, які можна детально дослідити.

Катастрофа типу "складка". Катастрофа типу "складка" визначається потенційною функцією наступного вигляду:

$$y = x^3 + \varepsilon x.$$

Вище була розглянута аналогічна функція вигляду (10.2), яка відрізняється від записаної поруч знаком при факторі збурення. Принципово це справи не міняє, головним є те, щоб багаточлен був третього степеня.

При $\varepsilon < 0$ потенційна функція має два екстремуми (рис. 10.5) – один стабільний (стійка рівновага) і один нестабільний (нестійка рівновага). Якщо параметр ε повільно змінюється, система може знаходитися в точці стабільного мінімуму. Але при $\varepsilon = 0$, стабільні і нестабільні екстремуми зустрічаються і анігілюють. Це – точка біфуркації. При $\varepsilon > 0$ не існує стабільного рішення.

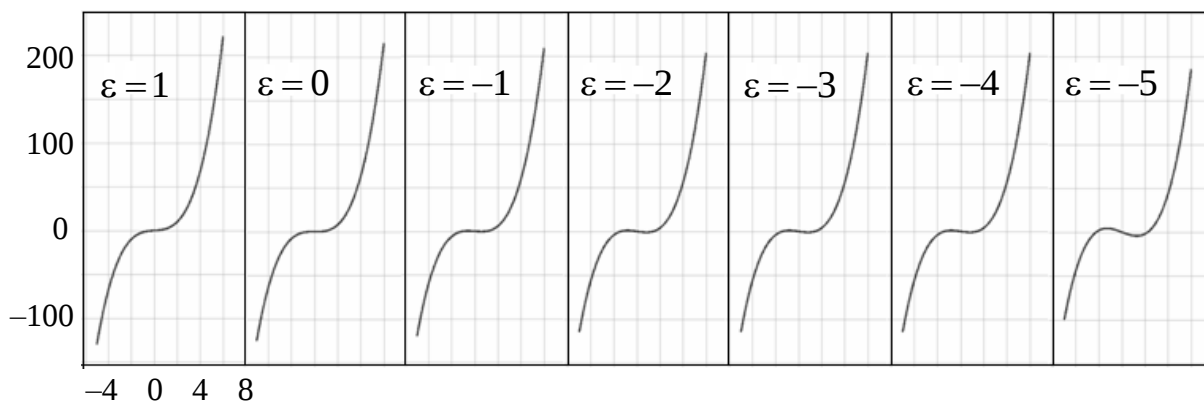


Рисунок 10.5 – Вплив параметра ε на графік кривої

Якщо фізична система проходить через точку біфуркації типу "згортка", коли параметр ϵ досягає нульового значення, стабільність рішення при $\epsilon < 0$ раптово втрачається, і система може здійснити раптовий перехід в новий, дуже відмінний від попереднього стан.

Катастрофа типу "складка" умовно зображена на рис. 10.6. Вона ілюструє властивість модальності, представлену двома гілками складчастого різноманіття, і властивість розривності,

представлену різкими стрибками з однієї гілки на іншу, в особливостях S_1 і S_2 . Гістерезис ілюструється тим, що траєкторія системи при зменшенні параметра після перетину особливості відрізняється від траєкторії, по якій рухається система при збільшенні параметра. Слід, мабуть, зазначити, що конкретна форма розглядуваної функції не важлива, головне, щоб зберігалася особливість типу "складка". У катастрофі типу "складка" система спочатку знаходиться в точці A на нижній гілці кривої. Зі зростанням змінної величина функції теж зростає, так що система переходить через точку B і досягає точки C , яка є точкою особливості S_1 , і система здійснює "катастрофічний" стрибок на верхню гілку кривої в точку C' . Подальше зростання змінної веде систему далі за точку D . Якщо ж змінна починає зменшуватися, то система продовжує слідувати уздовж верхньої гілки кривої через точку E до точки F . У цій точці з'являється друга особливість S_2 , і система здійснює "катастрофічне" повернення на нижню гілку в точку F' , після чого подальше зменшення змінної веде систему або до точки A , або до точки B до тих пір, поки вона знов не перетне особливість S_1 .

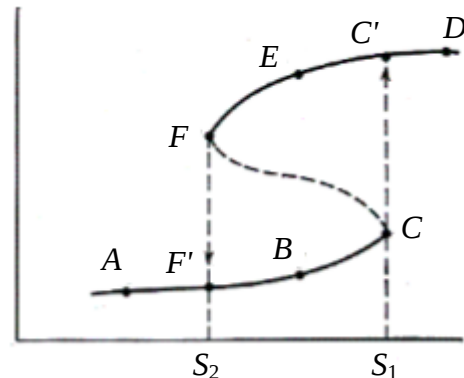


Рисунок 10.6 – Схема катастрофи типу "складка"

Приклад поверхні катастрофи типу "складка" показано на рис. 10.7.

Приклад поверхні катастрофи типу "складка" показано на рис. 10.7.

Катастрофа типу "збірка". Розглянемо рівняння кривої, яке подане у наступному вигляді:

$$V = x^4 + a x^2 + b x.$$

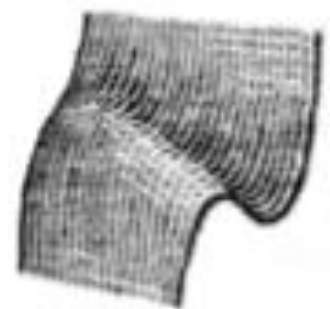


Рисунок 10.7 – Ділянка поверхні зі складкою

Діаграма катастрофи "збірка" з точкою повернення, на якій показані криві 1 і 2, наведена на рис. 10.8. Криві побудовані за умови, що параметр b змінюється безперервно, а параметр a має дискретні значення (на рисунку показані три криві для трьох значень параметра a). Поза межами збірки (крива 3) кожній точці (a, b) в просторі параметрів відповідає одне екстремальне значення V .

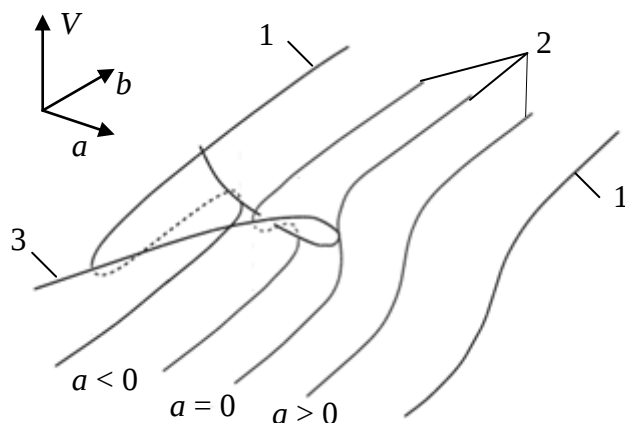
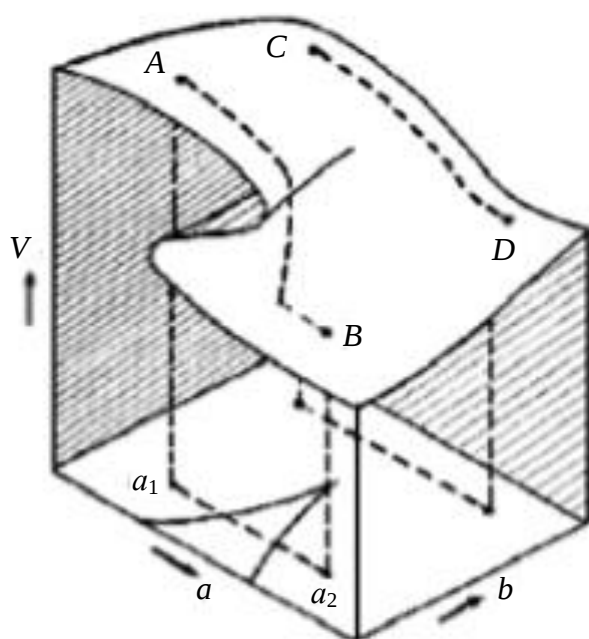


Рисунок 10.8 – Діаграма катастрофи типу "збірка"

У середині точок повернення існують два різних значення x , які дають локальні мінімуми функції $V(x)$ для кожної пари (a, b) . При цьому вказані значення розділені локальним максимумом.

У тривимірному вигляді збірка зображена на рис. 10.9. Тут знову передбачається, що система описується змінною V , яка залежить від двох змінних a і b . Завдяки наявності складки на поверхні, що зображає цю залежність, поведінка системи варіює



у відповідності зі значеннями a і b . Наприклад, при зміні a від точки a_1 і a_2 система рухається з точки A , поки не зустрінеться з особливістю і не скоїть "катастрофічний" стрибок на нижню частину поверхні, уздовж якої буде продовжувати рухатися до точки B . З іншого боку, при русі системи від C к D та ж сама зміна значень a не зустрічається з особливістю. Бачимо, що зустріч з особливістю, залежить від значень a і b .

Рисунок 10.9 – Катастрофа "збірка"

Катастрофа типу "ластівчин хвіст". У системах з однією змінною, але з трьома параметрами можлива ще складніша катастрофа, яка отримала назву "ластівчиного хвоста". Потенціал для неї записується в формі:

$$V = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx.$$

Керуючий простір у даному типі катастроф є тривимірним. Каскад біфуркацій складається з трьох поверхонь біфуркацій типу "згортки", що зустрічаються на двох кривих біфуркацій з точками повернення, які в кінцевому підсумку зустрічаються в одній точці, що представляє собою біфуркацію типу "ластівчин хвіст" (рис. 10.10).

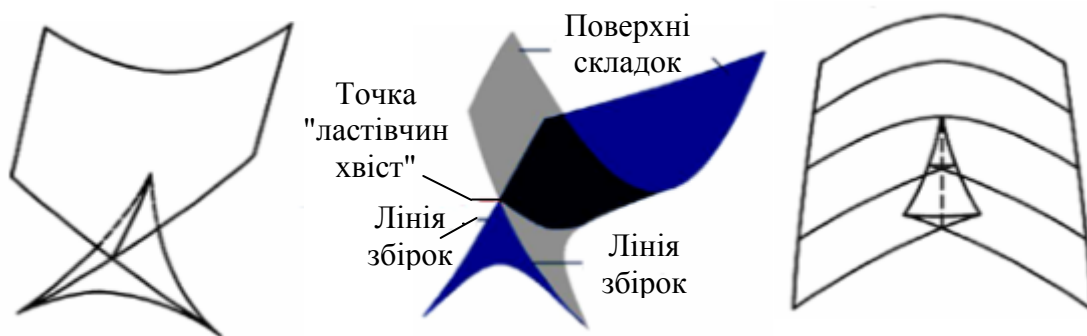


Рисунок 10.10 – Катастрофа типу "ластівчин хвіст"

Злиття чотирьох особливих точок призводить до катастрофи типу "ластівчин хвіст". Керуючий простір є тривимірним: керуючі параметри a , b і c . Критичні точки визначаються через прирівняні до нуля похідної:

$$5x^4 + 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

1. Двічі вироджені: $10x^3 + 3ax + b = 0$.
2. Тричі вироджені: $10x^2 + a = 0$.
3. Чотири рази вироджені: $x = 0$.

Функція $V(x; 0,0,0)$ має чотири рази виражену точку $x = 0$.

По мірі проходження значень параметрів по поверхнях областей біфуркацій типу "згортка" пропадають один мінімум і один максимум потенційної функції. В області біфуркацій з точкою повернення два мінімуми і один максимум заміщуються одним мінімумом; за ними біфуркації типу "згортка" зникають. У точці "ластівчиного хвоста" два мінімуми і два максимуми зустрічаються в одному значенні змінної x . Дві поверхні біфуркацій типу "згортка" і дві лінії біфуркацій з точками повернення зустрічаються при $a < 0$, а тому зникають в самій точці "ластівчиного хвоста", замінюючись однією поверхнею біфуркацій типу "згортка".

Плоска проекція катастрофи типу "ластівчиного хвоста" показана на рис. 10.11.

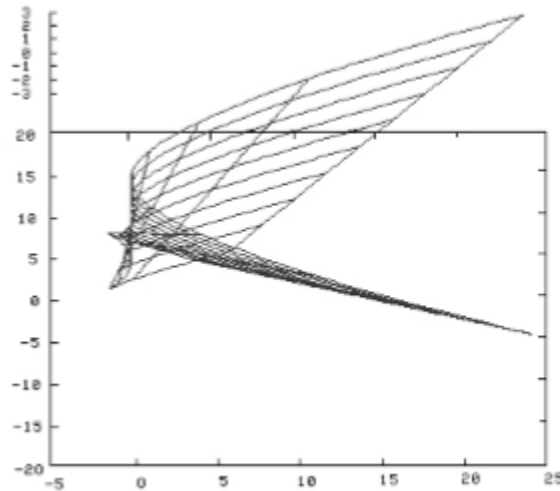


Рисунок 10.11 – Проекція катастрофи "ластівчин хвіст"

Катастрофа типу "метелик". Катастрофа типу "метелик" задається сім'єю функцій, що залежать від чотирьох параметрів a, b, c, d :

$$V = x^6 + a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x.$$

Залежно від значень цих параметрів потенційна функція може мати три, два чи один локальний мінімум, причому всі мінімуми розділені областями з біфуркаціями типу "згортка". У точці з поетичною назвою "метелик" зустрічаються три різні простори (тривимірні площини) біфуркацій типу "згортка", дві поверхні біфуркацій з точками повернення і крива біфуркацій типу "ластівчин хвіст". Усі ці біфуркації пропадають в одній точці і перетворюються на просту структуру з точкою повернення тоді, коли значення параметра a стає додатним.

Приклад катастрофи типу "метелик" показано на рис. 10.12.

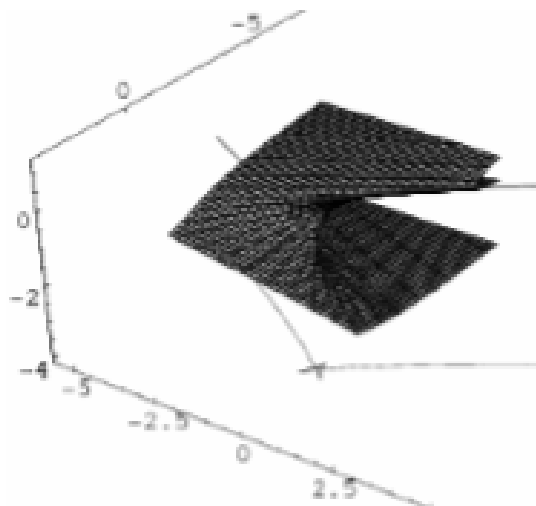


Рисунок 10.12 – Катастрофа типу "метелик"

Омбілічні катастрофи є прикладами катастроф другого порядку, оскільки мають дві активні змінні. Вони, наприклад, можуть спостерігатися в оптиці при відображенні світла від тривимірних поверхонь. Самі по собі такі катастрофи тісно пов'язані з геометрією майже сферичних поверхонь. Рене Том запропонував розглядати гіперболічну омбілічну катастрофу як руйнування хвилі, а еліптичну омбілічну катастрофу – як процес створення структур, схожих на волосняний покрив.

Омбіліка (омбілічна точка) – локально сферична точка на тривимірній поверхні. Це тип особливостей функцій (катастроф) в теорії катастроф. У таких точках обидві головних кривини рівні, і кожен вектор дотичної є основним напрямком. Омбілічні точки зазвичай з'являються у вигляді ізольованих точок в еліптичних областях поверхні, тобто таких, де гаусова кривина додатна. Сфера є єдиною поверхнею, на якій кожна точка є омбілікою.

Гіперболічна омбіліка. Гіперболічна омбіліка описується рівнянням:

$$V = x^3 + y^3 + a x y + b x + c y.$$

Приклад візуалізації цієї катастрофи показано на рис. 10.13.

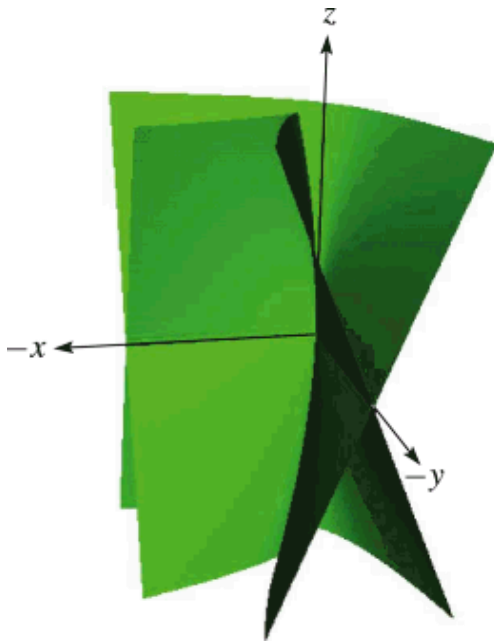


Рисунок 10.13 – Гіперболічна омбіліка

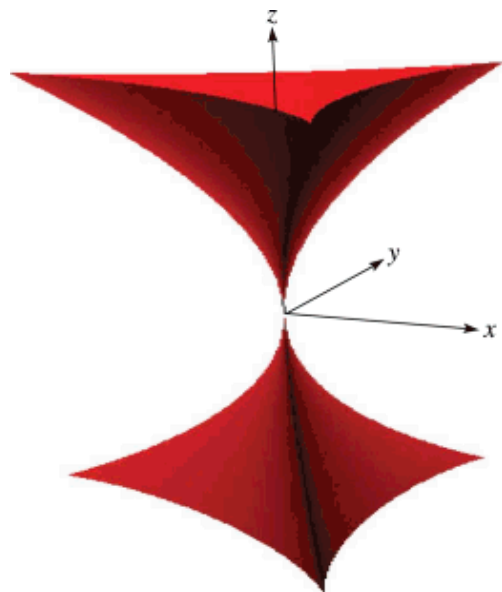


Рисунок 10.14 – Еліптична омбіліка

Еліптична омбіліка. Еліптична омбіліка подається рівнянням:

$$V = x^3 - 3x y^2 + a (x^2 + y^2) + b x + c y.$$

Приклад візуалізації еліптичної омбіліки наведено на рис. 10.14.

Параболічна омбіліка. Параболічна омбіліка описується рівнянням:

$$V = yx^2 + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy.$$

Параболічну омбіліку показано на рис. 10.15.

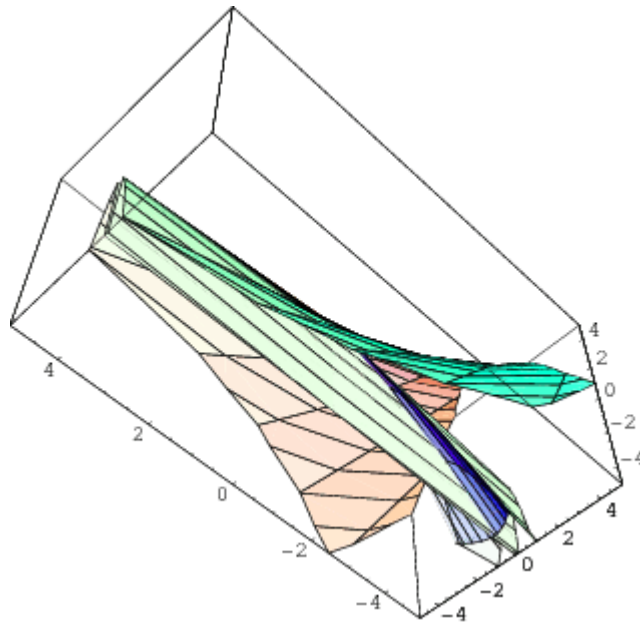


Рисунок 10.15 – Параболічна омбіліка

10.5. Запис і класифікація катастроф по Арнольду

В. І. Арнольд запропонував класифікацію катастроф, що використовує глибокі зв'язки з теорією груп Лі. Групою Лі називається група G зі структурою гладкого різноманіття, спільною з груповими операціями. За Арнольдом:

- A_0 – несингулярна точка: $V = x$;
- A_1 – локальний екстремум: стійкий мінімум або нестійкий максимум $V = \pm x^2 + ax$;
- A_2 – складка;
- A_3 – збірка;
- A_4 – ластівчин хвіст;
- A_5 – метелик;
- A_k – нескінченна послідовність форм від однієї змінної $V = x^{k+1} + \dots$;
- D_4^+ – гаманець $\rightarrow$ гіперболічна омбіліка;
- D_4^- – піраміда $\rightarrow$ еліптична омбіліка;
- D_5 – параболічна омбіліка;
- D_k – нескінченна послідовність інших омбілік;

- E_6 – символічна омбіліка $V = x^3 + y^4 + a x y^2 + b x y + c x + d y$;
- E_7 ;
- E_8 .

У теорії сингулярності є об'єкти, які відповідають більшості інших простих груп Лі.

10.6. Застосування теорії катастроф

Створення та розвиток цієї частини математичного аналізу був пов'язаний з широкими можливостями наочного аналізу деяких складних явищ, особливо тих, які зустрічаються при описі самих різних природних явищ (веселка, каустика, стійкість складних систем, коливання й руйнування в будівельній механіці, поведінка в етології, і навіть, бунти в в'язницях). Теорія катастроф є універсальним методом дослідження стрибкоподібних переходів, розривів, раптових якісних змін. Вона визначає область існування різних структур, межі їх стійкості. Для вивчення ж динаміки систем необхідно знати, яким саме чином нові розв'язки рівнянь "відгалужуються" від відомого розв'язку. Відповідь на такі питання дає теорія біфуркацій, тобто виникнення нових розв'язків при критичному значенні певного параметра. Момент переходу (катастрофічний стрибок) залежить від властивостей системи і рівня флуктуацій (коливань)

Катастрофа типу "складки" з'являється в моделях, що описують релаксаційні коливання, використовуються при описі автохвильових процесів і дисипативних структур, в моделях навантажених арок, моделях релаксації.

Інша сфера прикладного застосування катастрофи з точкою повернення полягає в моделюванні поведінки електрона при переміщенні з одного енергетичного рівня на інший, що часто спостерігається в хімічних і біологічних системах. Це вказує на те, що біфуркації розглянутого типу та геометрія точок повернення є найбільш важливою практичною частиною теорії катастроф. Це – шаблони, які проявляються знову і знову у фізиці, інженерії та математичному моделюванні.

Ще один приклад явищ, що вивчаються теорією "катастроф", – перехід коливального процесу з однієї потенційної ями в іншу потенційну яму: так в шторм корабель відчуває хитавицю щодо одного стійко вертикального положення. Плавне збільшення амплітудних значень крену при хитавиці може призвести до раптового перекидання корабля догори днищем протя-

гом інтервалу часу менш півперіоду хитавиці (секунди) в процесі посилення шторму, обмерзання і т. п. Але й корабель, що перекинувся, може не відразу піти на дно, оскільки може ще тривалий час залишатися на плаву дотори днищем, відчуваючи хитавицю відносно свого іншого, також стійкого вертикального положення.

Теорія катастроф застосовується в природознавстві (наприклад, при вивченні явища надпровідності); астрофізиці (при вивченні проблем астрофізики зірок і планет; один з них це гравітаційний колапс масивної холодної зірки); психології (при вивченні творчої особистості – вченого із застосуванням трьох параметрів: "техніка", "захопленість", "досягнення", між якими існує певна залежність, що описує поверхню в тривимірному просторі).

В літературі можна знайти багато публікацій, в яких теорія катастроф застосовується при дослідженні биття серця, моделюванні діяльності мозку та психічних розладів, впливу алкоголю на водіїв транспортних засобів, поведінки біржових гравців, в оптиці, ембріології, лінгвістиці, економіці, гідродинаміці, геології та теорії елементарних частинок.

Явища стійкості представляють величезну зацікавленість науковців та інженерів із різних галузей науки й техніки. Наприклад, втрата стійкості тонкостінних конструкцій під впливом ваги та вітрового навантаження, раптова руйнація кристалічної решітки, фазові переходи в термодинамічних системах, виникнення турбулентності в потоках рідини і газів, управління становищем космічного корабля.

Великогабаритні технічні конструкції можуть бути описані за допомогою потенційної функції, мінімальне значення якої визначає стійкий стан конструкції. Зі збільшенням навантаження на конструкцію (міст, будівлю і т. д.) потенційна функція змінюється. Значне навантаження може призвести до втрати стійкості конструкції (тобто до її руйнування) внаслідок порушення стійкого стану, яке є для даної системи розрахунковим. Рівновага, стійкість і втрата стійкості – це основні питання, що розглядаються теорією катастроф. Методи теорії катастроф виявляються ефективними при вивченні складових систем, для яких можливі різні форми руйнування. Результати дослідження технічних конструкцій дуже важливі для їх зведення, експлуатації та руйнування.

Зазначимо, що перелік сфер застосування теорії катастроф є достатньо широким.

10.7. Моделювання хаотичних процесів

До хаосу системи можуть переходити різними шляхами. Серед останніх виділяють біфуркації, які вивчає теорія біфуркацій.

Біфуркація є процесом якісного переходу від стану рівноваги до хаосу через послідовну дуже малу зміну (наприклад, подвоєння Фейгенбаума при біфуркації подвоєння) періодичних точок.

Взагалі М. Фейгенбаум установив універсальні закономірності переходу до динамічного хаосу при подвоєнні періоду, які були експериментально підтверджені для широкого класу механічних, гідродинамічних, хімічних та інших систем. Результатом досліджень Фейгенбаума стало так зване "Дерево Фейгенбаума".



Митчел Фейгенбаум

Поряд з послідовностями подвоєнь періоду (каскадами Фейгенбаума) є інші шляхи переходу до хаосу, коли, наприклад, тривалі періоди упорядкованого руху чергуються зі спалахами безладу.

Необхідно відзначити, що відбувається якісна зміна властивостей системи, так званий катастрофічний стрибок. Момент стрибка (роздвоєння при біфуркації подвоєння) відбувається в точці біфуркації.

Хаос може виникнути через біфуркацію, що показав Мітчел Фейгенбаум. При створенні власної теорії про фрактали Фейгенбаум, в основному, аналізував логістичне рівняння:

$$X_{n+1} = CX_n - C(X_n)^2, \quad (10.5)$$

де C – зовнішній параметр.

На рис. 10.16 наведено приклад переходу до хаосу через біфуркації, який виконано із застосуванням рівняння (10.5).

Звідси висновок, що при деяких обмеженнях у всіх подібних рівняннях відбувається перехід від рівноважного стану до хаосу.

Біологічний приклад записаного вище рівняння має вигляд:

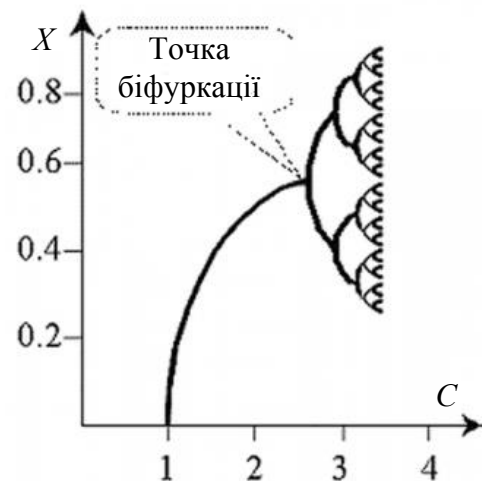


Рисунок 10.16 – Перехід до хаосу

$$X_{n+1} = (C + 1)X_n - C(X_n)^2,$$

де C – параметр, який визначає швидкість росту популяції.

Нехай ізолювано живе популяція особів з нормованою чисельністю X_n . Через рік з'являється потомство чисельністю X_{n+1} . Зростання популяції описується першим членом правої частини рівняння $(C + 1)X_n$, де коефіцієнт C є визначальним параметром. Загибель тварин (за рахунок перенаселеності, нестачі їжі тощо) визначається другим, нелінійним членом $C(X_n)^2$. Залежність чисельності популяції від параметра C наведена на рис. 10.17. Ці результати прийнято називати деревом Фейгенбаума.

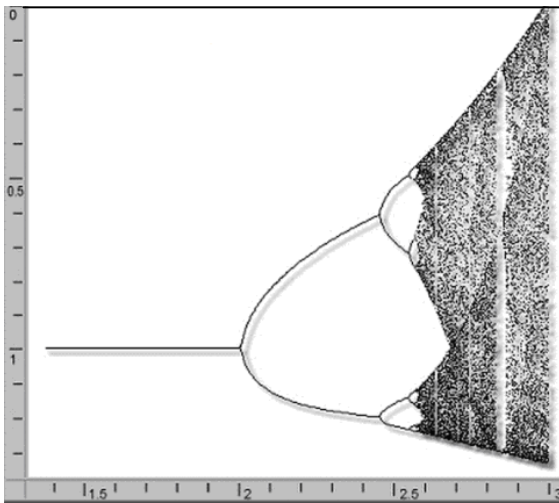


Рисунок 10.17 – Дерево Фейгенбаума

За результатами розрахунків можна зробити наступні висновки:

1. При $C < 1$ популяція із зростанням n вимирає.

2. В області $1 < C < 3$ чисельність популяції наближається до сталого значення $X_0 = 1 - 1/C$, що є областю стаціонарних, фіксованих рішень. При значенні $C = 3$ точка біфуркації стає відштовхуючою фіксованою точкою. З цього моменту функція вже ніколи не сходиться до однієї точки. До цього точка була фіксованою, що притягувала.

3. У діапазоні $3 < C < 3,57$ починають з'являтися біфуркації і розгалуження кожної кривої на дві. Тут функція (чисельність популяції) коливається між двома значеннями, що лежать на цих областях. Спочатку популяція різко зростає, на наступний рік виникає перенаселеність і через рік чисельність знову зменшується.

4. При $C > 3,57$ відбувається перекривання областей різних рішень (вони як би зафарбовуються), поведінка системи стає хаотичною.

Звідси висновок – заключним станом фізичних систем, що еволюціонують, є стан динамічного хаосу.

На рис. 10.18 наведені результати візуалізації каскадів Фейгенбаума для логістичного рівняння $X_{n+1} = CX_n(1 - X_n)$, які отримані при різній кількості ітерацій n .

У побудові графіка логістичного рівняння є деяка тонкість. Якщо кожне нове обчислення X_n приносить новий результат, який в лінійну функ-

цію не вкладається і залишається тільки точкою на загальному графіку, то це і є *ітерація* – отримання обчисленням кожного нового значення послідовності X_n .

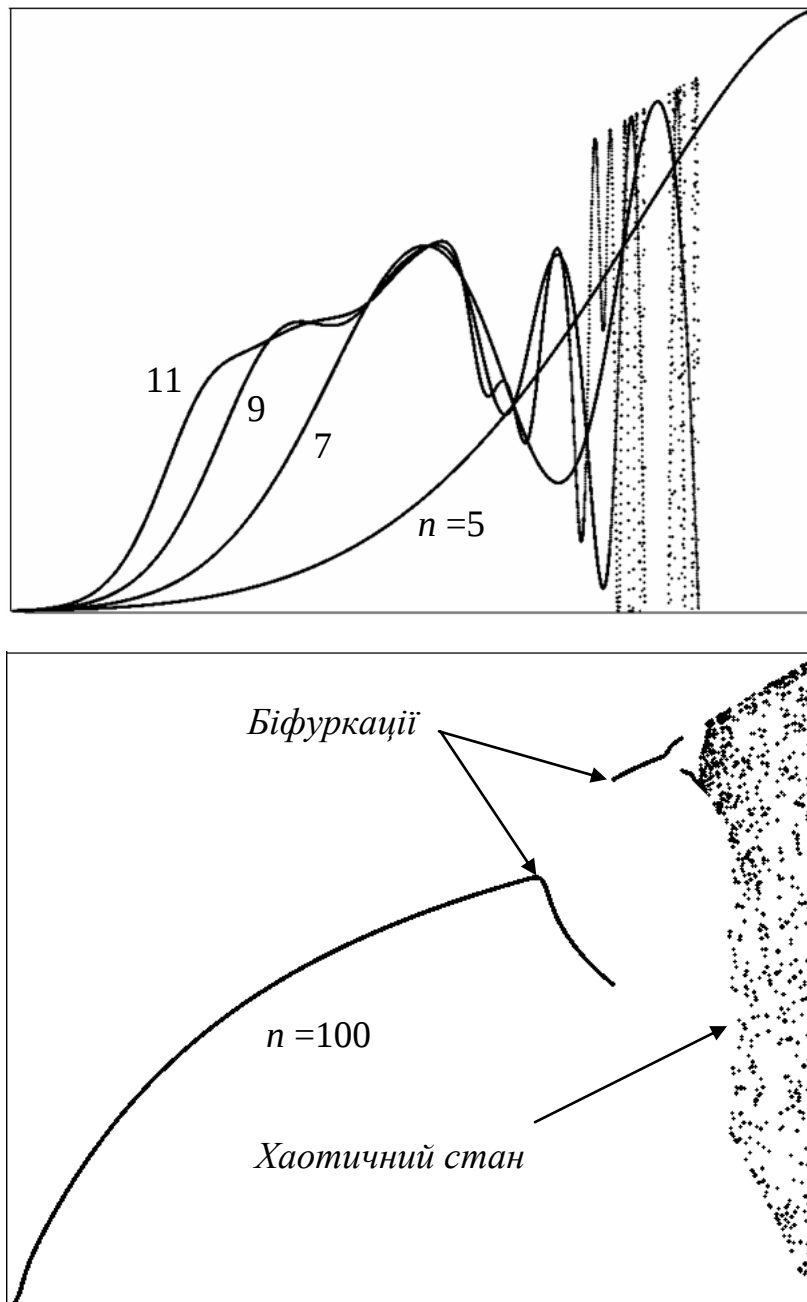


Рисунок 10.18 – Візуалізація каскадів Фейгенбаума

На нижньому зображенні ясно видно біфуркації та перехід процесу в хаотичний стан.

Динамічні змінні X_n приймають значення, які сильно залежать від початкових умов. При проведених на комп'ютері розрахунках навіть для дуже близьких початкових значень S підсумкові значення можуть різко відрізнятися. Більше того, розрахунки стають некоректними, оскільки почи-

нають залежати від випадкових процесів у самому комп'ютері (скачки напруги тощо).

Таким чином, стан системи в момент біфуркації є вкрай нестійким і нескінченно малий вплив може призвести до вибору подальшого шляху руху, а це є головною ознакою хаотичної системи (істотна залежність від початкових умов).

Зазначимо, що існування теорії хаосу часто не корелює з класичною наукою. Звичайно наукові ідеї перевіряються на підставі прогнозів і їх звірки з реальними результатами. Однак, як відомо, хаос непередбачуваний. Коли маєш справу з хаотичною системою, то можна прогнозувати тільки модель її поведінки. Тому за допомогою хаосу важко побудувати точний прогноз і, відповідно, перевірити його. Однак це не повинно говорити про невірність теорії. На даний момент ще не існує математично точного апарату застосування теорії хаосу для дослідження різних явищ, тому поспішати із застосуванням знань про хаос не можна. Разом з тим, це дійсно найперспективніший сучасний напрям математики з погляду прикладних досліджень у різних галузях науки.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміють під стійкістю і нестійкістю функцій?
2. Що таке біфуркація?
3. Хто ввів в науку терміни "катастрофа" і "теорія катастроф"?
4. Назвіть сім катастроф по Тому?
5. Що таке омбіліка?
6. Де застосовується теорія катастроф?
7. Які універсальні закономірності встановив Фейгенбаум?
8. Що таке дерево Фейгенбаума?

11. ТЕОРЕТИКО-ІГРОВЕ КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

11.1. Теорія ігор

Теорія ігор уперше була системно викладена Джоном фон Нейманом і Оскаром Моргенштерном та оприлюднена лише 1944 року в класичній монографії "Теорія ігор і економічної поведінки", хоча окремі результати були опубліковані ще в 20-х роках минулого століття. Нейман і Моргенштерн написали оригінальну книгу, яка містила переважно економічні при-



Джон фон Нейман



Оскар Моргенштерн

клади, оскільки економічні задачі простіше за інші описати за допомогою чисел. Під час другої світової війни і одразу після неї теорією ігор серйозно зацікавились військові, які одразу побачили в ній математичний апарат для дослідження стратегічних проблем і підготовки рішень. Потім головна увага знову була звернута до економічних проблем. Нині сфера застосування теорії ігор значно розширилась. Починаючи з 1970-х років її взяли на озброєння біологи для дослідження поведінки тварин і теорії еволюції. Важливе значення вона має для штучного інтелекту і кібернетики, особливо з проявом інтересу до інтелектуальних агентів. У соціальних науках апарат теорії ігор застосовується в психології для аналізу торгових угод та переговорів, а також для вивчення принципів формування коаліцій тощо.

Оптимальні рішення і стратегії в математичному моделюванні пропонувалися ще в XVIII ст. Задачі виробництва і ціноутворення в умовах олігополії, які стали пізніше хрестоматійними прикладами теорії ігор, розглядалися в XIX ст. На початку XX ст. була висунута ідея математичної теорії конфлікту інтересів.

Американський математик Джон Неш в 1949 році захистив дисертацію з теорії ігор, а через 45 років отримав Нобелівську премію з економіки. У своїх працях Дж. Неш розробив принципи "управлінської динаміки". Перші концепції теорії ігор аналізували антагоністичні ігри, в яких були ті, хто програв і виграв за рахунок тих, хто програв. Неш розробив методи аналізу, в яких всі учасники або виграють, або терплять поразку. Ці ситуації



Джон Неш

одержали назву "рівноваги Неша", або "некооперативної рівноваги", які базувалися на застосуванні оптимальної стратегії, що призводила до створення стійкої рівноваги. Гравцям вигідно зберігати цю рівновагу, оскільки будь-яка зміна могла погіршити їх становище. Ці роботи Дж. Неша зробили серйозний внесок у розвиток теорії ігор, були поштовхом для перегляду математичних інструментів економічного моделювання. Дж. Неш показав, що

класичний підхід до конкуренції Адама Сміта – англійського економіста, який стверджував, що кожен має бути сам за себе, насправді не був оптимальним. Оптимальними є такі стратегії, коли кожен намагається зробити краще для себе, роблячи краще для інших.

Хоча теорія ігор спочатку і розглядала економічні моделі, аж до 1950-х років вона залишалася формальною теорією в рамках математики. Але вже з 1950-х рр. починаються спроби застосувати методи теорії ігор не тільки в економіці, але й в біології, кібернетиці, техніці, антропології. Під час Другої світової війни і відразу після неї теорією ігор серйозно зацікавилися військові, які побачили в ній потужний апарат для дослідження стратегічних рішень.

У 1960–1970 рр. інтерес до теорії ігор згасає, незважаючи на значні математичні результати, отримані на той час. З середини 1980-х рр. починається активне практичне використання теорії ігор, особливо в економіці та менеджменті. За останні 20 – 30 років значення теорії ігор та інтерес до неї значно зростають, деякі напрямки сучасної економічної теорії неможливо викласти без застосування теорії ігор.

Значним внеском у застосування теорії ігор стала робота Томаса Шеллінга "Стратегія конфлікту" – нобелівського лауреата з економіки за 2005-й рік. Т. Шеллінг розглядав різні "стратегії" поведінки учасників

конфлікту. Ці стратегії збігаються з тактиками управління конфліктами й принципами аналізу конфліктів в конфліктології (це психологічна дисципліна) і в управлінні конфліктами в організації (теорія менеджменту). У психології та інших науках використовують слово "гра" в інших сенсах, ніж у математиці. Деякі психологи і математики скептично ставляться до використання цього терміна в інших сенсах, сформованих раніше. Існують інші точки зору щодо поняття гри, які відрізняються від інтерпретації гри в теорії конфліктів і математичної теорії ігор.



Томас Шеллінг

Математична теорія ігор зараз бурхливо розвивається, розглядаються динамічні гри. Однак, математичний апарат теорії ігор є гранично витратним і насправді суб'єктивним. Математики застосовують його для виправданих завдань: політика, економіка монополій, розподіл ринкової влади і т. п., часто приховуючи зовсім нематематичні механізми прийняття рішень, які реально використовуються. Ряд відомих вчених стали Нобелівськими лауреатами з економіки за внесок у розвиток теорії ігор, яка описує соціально-економічні процеси. Дж. Неш, завдяки своїм дослідженням в теорії ігор, став одним з провідних фахівців в області ведення "холодної війни", що підтверджувало масштабність завдань, якими займається теорія ігор.

Отже, теорія ігор – це логіко-математичний метод вивчення оптимальних стратегій в іграх.

Зміст теорії ігор полягає в установленні принципів оптимальної поведінки в умовах невизначеності, доведенні існування рішень, які задовольняють ці принципи, надання алгоритмів знаходження рішень.

Гра – це процес, в якому беруть участь дві і більше сторін, які ведуть боротьбу за реалізацію своїх інтересів. Кожна зі сторін має свою мету і використовує деяку стратегію, яка може вести до виграшу або програшу – залежно від поведінки інших гравців. Теорія ігор допомагає вибрати кращі стратегії з урахуванням уявлень про інших учасників, їх ресурсах та їх можливих вчинках.

Теорія ігор – це також розділ прикладної математики, а саме її гілки – дослідження операцій.

Під грою розуміють спрощену формалізовану модель реальної конфліктної ситуації. Математично формалізація означає, що обумовлені певні

правила дії сторін у процесі гри: варіанти дії сторін; результат гри; обсяг інформації кожної сторони про поведінку всіх інших сторін. Одну з граючих сторін при дослідженні операцій може представляти колектив, який переслідує деяку загальну мету. Проте різні члени колективу можуть бути по-різному інформовані щодо проведення гри. Виграш або програш сторін оцінюється чисельно, інші випадки в теорії ігор не розглядаються, хоча не всякий виграш в дійсності можна оцінювати кількісно.

В теорії ігор гравцем прийнято називати суб'єкт, який приймає рішення, а цільову функцію – платіжною функцією. Іноді під гравцем розуміють природу як об'єктивну реальність (або навколишнє природне середовище), що формує умови, в яких необхідно приймати рішення.

Одними із аспектів гри є стратегії та ходи. Стратегія є сукупністю правил, які визначають вибір варіанта дій при кожному особистому ході гравця залежно від ситуації, що складається в процесі гри.

Кожен гравець вибирає таку стратегію поведінки, щоб максимізувати свій виграш або мінімізувати програш. При цьому він не знає, яких стратегій будуть дотримуватися інші гравці. Отже, кожен гравець приймає свої рішення за невизначеності, а результат обраної ним стратегії залежить від поведінки всіх учасників гри.

Стратегія гравця називається оптимальною, якщо вона забезпечує йому при багатократному повторенні гри максимально можливий середній виграш або мінімально можливий середній програш незалежно від поведінки супротивника. Хід – це вибір однієї з передбачуваних правилами гри стратегій та її здійснення.

Інтереси сторін представляються функціями виграшу (платежу) для кожного з гравців.

У теорії ігор припускається, що функції виграшу та множина стратегій, доступних кожному з гравців, загальновідомі, тобто кожен з гравців знає свою функцію виграшу та набір своїх стратегій, а також функції виграшу та стратегії всіх інших гравців. Відповідно до даної інформації гравці формують свою поведінку.

Теоретико-ігрове моделювання відноситься до самого верхнього ієрархічного рівню моделювання, на якому розглядається активна взаємодія моделей, а значить і досліджуваних об'єктів, що порушує якісь плани (прогнози) сторін за рахунок конкурентного (паралельного) взаємомодельювання і керуючого упередження дій супротивної сторони.

11.2. Подання і застосування теорії ігор

Ігри є певними логіко-математичними об'єктами. Гра утворюється гравцями, набором стратегій для кожного гравця, правилами отримання вигравів, або платежів, наявністю гравців для кожної комбінації стратегій. Більшість кооперативних ігор описуються характеристичною функцією, в той час як для інших видів частіше використовують нормальну або екстенсивну форму.

Характерними ознаками гри як математичної моделі є:

- наявність кількох учасників;
- невизначеність поведінки учасників, пов'язаної з наявністю у кожного з них кількох варіантів дій;
- відмінність (незбіг) інтересів учасників;
- взаємопов'язаність поведінки учасників, оскільки результат, одержуваний кожним із них, залежить від поведінки всіх учасників;
- наявність правил поведінки, відомих всім учасникам.

Теорія ігор, як один з підходів в прикладній математиці, застосовується для вивчення поведінки людини і тварин у різних ситуаціях. Спочатку теорія ігор розвивалася в рамках економічної науки, що дозволило зрозуміти і пояснити поведінку економічних агентів у різних ситуаціях. Пізніше область застосування теорії ігор була розширена на інші соціальні науки; зараз теорія ігор використовується для пояснення поведінки людей в політології, соціології та психології. Теоретико-ігровий аналіз був вперше використаний для опису поведінки тварин Рональдом Фішером в 30-х роках XX століття (хоча навіть Чарльз Дарвін використовував ідеї теорії ігор без формального обґрунтування).

У роботі Рональда Фішера не застосовувався термін "теорія ігор". Але ця робота по суті виконана в руслі теоретико-ігрового аналізу. Розробки, зроблені в економіці, були застосовані Джоном Майнардом Смітом у книзі "Еволюція і теорія ігор". Теорія ігор використовується не тільки для передбачення і пояснення поведінки; були зроблені спроби використовувати теорію ігор для розробки теорій етичної або еталонної поведінки. Економісти і філософи застосовували теорію ігор для кращого розуміння гідної поведінки. Взагалі кажучи, перші теоретико-ігрові аргументи, що пояснюють правильну поведінку, висловлювалися ще Платоном.

Теоретико-ігрові методи прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності мають широке застосування в медицині, в економічному і соціальному плануванні і прогнозуванні, в ряді питань науки та техніки.

11.3. Опис і моделювання ігор

Спочатку теорія ігор використовувалася для опису та моделювання поведінки людських популяцій. Деякі дослідники вважали, що за допомогою визначення рівноваги у відповідних іграх вони можуть передбачити поведінку людських популяцій в ситуації реальної конфронтації. Такий підхід до теорії ігор останнім часом піддається критиці з кількох причин. По-перше, припущення, що використовуються при моделюванні, найчастіше порушуються в реальному житті. Дослідники можуть припускати, що гравці вибирають поведінки, максимізуючи їх сумарну вигоду (модель економічної людини), однак на практиці людська поведінка часто не відповідає цій передумові. Існує багато пояснень цього феномена – нерациональність, моделювання обговорень, і навіть, різні мотиви гравців (включаючи альтруїзм). Автори теоретико-ігрових моделей заперечують це, кажучи, що їх припущення аналогічні подібним припущенням у фізиці. Тому, навіть, якщо їх припущення не завжди виконуються, теорія ігор може використовуватися як розумна ідеальна модель, за аналогією з такими ж моделями у фізиці. Однак, на теорію ігор обрушився новий вал критики, коли в результаті експериментів було виявлено, що люди не слідують рівноважним стратегіям на практиці.

Наприклад, в іграх "Сороконіжка", "Диктатор" учасники часто не використовують профіль стратегій, що становить рівновагу за Нешем. Тривають суперечки про значення подібних експериментів. Відповідно до іншої точки зору, рівновага за Нешем не є пророкуванням очікуваної поведінки, але лише пояснює, чому популяції, що вже знаходяться в рівновазі за Нешем, залишаються в цьому стані. Однак питання про те, як ці популяції приходять до рівноваги Неша, залишається відкритим. Деякі дослідники в пошуках відповіді на це питання переключилися на вивчення еволюційної теорії ігор. Моделі еволюційної теорії ігор припускають обмежену раціональність або нерациональність гравців. Незважаючи на назву, еволюційна теорія ігор займається не тільки і не стільки питаннями природного відбору біологічних видів. Цей розділ теорії ігор вивчає моделі біологічної та культурної еволюції, а також моделі процесу навчання.

Багато дослідників розглядають теорію ігор не як інструмент передбачення поведінки, а як інструмент аналізу ситуацій з метою виявлення найкращої поведінки для раціонального гравця. Оскільки рівновага Неша

включає стратегії, що є найкращим відгуком на поведінку іншого гравця, використання концепції рівноваги Неша для вибору поведінки виглядає цілком обґрунтованим. Однак, і таке використання теоретико-ігрових моделей зазнало критики. По-перше, у деяких випадках гравцю вигідно вибрати стратегію, що не призводить до рівноваги, якщо він очікує, що інші гравці також не слідували рівноважним стратегіям. По-друге, знаменита гра "Дилема ув'язненого" дозволяє привести ще один контрприклад. В цій грі слідування особистим інтересам призводить до того, що обидва гравці виявляються в гіршій ситуації в порівнянні з тією, в якій вони пожертвували б особистими інтересами.

Гра називається кооперативною, або коаліційною, якщо гравці можуть об'єднуватися в групи, взявши на себе певні зобов'язання перед іншими гравцями і координуючи свої дії. Цим вона відрізняється від некооперативних ігор, в яких кожен зобов'язаний грати за себе. Розважальні ігри рідко є кооперативними, однак такі механізми нерідкі в повсякденному житті.

11.4. Класифікація ігор

У теорії ігор не існує загально прийнятої класифікації видів ігор. Однак за певними ознаками деякі види ігор можна виділити в наступні групи:

1. *Кількість гравців.* Якщо у грі беруть участь дві сторони, то її називають грою двох осіб. Якщо число сторін більше двох, її відносять до гри n гравців. Найбільший інтерес викликають ігри двох осіб. Вони і математично більш глибоко опрацьовані, і в практичних додатках мають найбільш велику бібліографію.

2. *Кількість стратегій.* За цим критерієм ігри поділяються на скінченні та нескінченні. У скінченній грі кожен з гравців має скінченну кількість можливих стратегій. Але якщо хоча б один з гравців має нескінченну кількість можливих стратегій, гра є нескінченною.

Задача, яка зазвичай ставиться в цьому випадку, полягає не в пошуку оптимального рішення, а в пошуку хоча б виграної стратегії. Використовуючи аксіому вибору, можна довести, що іноді навіть для ігор з повною інформацією і двома варіантами закінчення – "виграв" або "програв" – жоден з гравців не має такої стратегії. Існування виграних стратегій для деяких особливим чином сконструйованих ігор має важливу роль у дескриптивній теорії множин.

3. *Взаємовідносини сторін.* Згідно з цим критерієм ігри поділяються на *кооперативні, коаліційні, безкоаліційні та гібридні*. Якщо гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції, то така гра відноситься до безкоаліційних; якщо гравці можуть вступати в угоди, створювати коаліції, то така гра є коаліційною. Кооперативна гра – це гра, в якій гравцями заздалегідь визначені коаліції та прийняті взаємозобов'язуючі угоди про свої стратегії.

Часто припускають, що кооперативні ігри відрізняються саме можливістю спілкування гравців один з одним. У загальному випадку це невірно. Існують ігри, де комунікація дозволена, але гравці переслідують особисті цілі, і навпаки.

Гібридні ігри включають в себе елементи кооперативних і некооперативних ігор. Наприклад, гравці можуть утворювати групи, але гра буде вестися в некооперативному стилі. Це означає, що кожен гравець буде переслідувати інтереси своєї групи, разом з тим намагаючись досягти особистої вигоди.

4. *Характер виграшів.* Цей критерій дозволяє класифікувати ігри з *нульовою або з ненульовою сумою*. Гра з нульовою сумою передбачає, що гравці не можуть збільшити або зменшити наявні ресурси, або фонд гри, тобто виконується умова: "сума виграшів всіх гравців дорівнює сумі їх програвшів при будь-якому ході". Ігри двох гравців з нульовою сумою відносять до класу антагоністичних. Природно, виграш одного гравця при цьому дорівнює програвшу іншого. У наведеній поруч таблиці числа означають платежі гравцям – їх сума в кожній комірці дорівнює нулю.

Гра з нульовою сумою

	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>A</i>	-1, 1	3, -3
<i>B</i>	0, 0	-2, 2

Прикладами таких ігор може служити покер, де один виграє всі ставки інших; реверси, де захоплюються фішки противника; або банальне злодійство.

Можливі ігри з *постійною різницею*, в яких гравці виграють і програють одночасно, що спричиняє альтернативу сумісних дій.

В іграх з *ненульовою сумою* виграш якогось гравця не обов'язково означає програвшу іншого, і навпаки. Результат такої гри може бути менше

або більше нуля. Такі ігри можуть бути перетворені до нульової суми – це робиться введенням *фіктивного гравця*, який "привласнює собі" надлишок або поповнює нестачу коштів.

Прикладами ігор з нульовою сумою є багато економічних задач, в яких спільний капітал усіх гравців перерозподіляється між гравцями, але не змінюється. До ігор з ненульовою сумою також можна віднести велику кількість економічних задач. Наприклад, у результаті торгових взаємовідносин країн, що беруть участь у грі, всі учасники можуть опинитися у виграші. Гра, в якій потрібно вносити певний внесок за право участі в ній, є грою з *ненульовою сумою*.

Грою з відмінною від нуля сумою є торгівля, де кожен учасник отримує вигоду. Широко відомим прикладом, де вона зменшується, є війна.

5. *Вид функції виграшів*. За цим критерієм ігри поділяються на матричні, біматричні, безперервні, опуклі т. д.

Матрична гра – це скінченна гра двох гравців з нульовою сумою, в якій задається виграш гравця *A* у вигляді матриці (рядок матриці відповідає номеру застосованої стратегії гравця *B*, стовпчик – номеру застосованої стратегії гравця *B*; на перетині рядка *i* стовпчика матриці знаходиться виграш гравця *A*, відповідний застосованим стратегіям).

Для матричних ігор доведено, що будь-яка з них має рішення і воно може бути легко знайдено шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування.

Біматрична гра – це скінченна гра двох гравців з ненульовою сумою, в якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (у кожній матриці рядок відповідає стратегії гравця *A*, стовпчик – стратегії гравця *B*, на перетині рядка *i* стовпчика в першій матриці знаходиться виграш гравця *A*, у другій матриці – виграш гравця *B*). Для біматричних ігор також розроблена теорія оптимальної поведінки гравців, однак вирішувати такі ігри складніше, ніж звичайні матричні.

Безперервною вважається гра, в якій функція виграшів кожного гравця є безперервною в залежності від стратегій. Доведено, що ігри цього класу мають рішення, однак не розроблено практично прийнятних методів їх знаходження.

Гра називається *опуклою*, якщо функція виграшів є опуклою. Для таких ігор розроблені прийнятні методи рішення, які призводять до знаходження чистої оптимальної стратегії (певного числа) для одного гравця і ймовірнос-

тей застосування чистих оптимальних стратегій іншого гравця. Таке завдання вирішується порівняно легко.

6. *Кількість ходів*. Згідно з цим критерієм ігри можна виділити: на *однокрокові* – це ігри, що закінчуються після одного ходу кожного гравця (так, в матричній грі після одного ходу кожного з гравців відбувається розподіл виграшів); *багатокрокові* ігри, які поділяються на позиційні, стохастичні, диференціальні та інші.

У реальному світі ігри, як правило, тривають скінченну кількість ходів. Математика не так обмежена у цьому плані, і зокрема, в теорії множин розглядаються ігри, здатні тривати нескінченно довго. Причому переможець та його виграш не визначені до закінчення всіх ходів.

7. *Інформованість сторін*. Цим критерієм розрізняють:

Ігри з повною інформацією – у такій грі учасники знають всі ходи, зроблені до поточного моменту, так само як і можливі стратегії супротивників, що дозволяє їм в деякій мірі передбачити подальший розвиток гри. Гра з повною інформацією завжди має рішення. Рішенням буде сідлова точка при чистих стратегіях.

Ігри з неповною інформацією – гравцю відомі не всі стратегії попередніх ходів інших гравців. Повна інформація не доступна в паралельних іграх, оскільки в них невідомі поточні ходи супротивників. Більшість досліджуваних в математиці ігор – ігри з неповною інформацією.

Примітка. Часто поняття *повної інформації* плутають зі схожим поняттям *досконалої інформації*, для якого достатньо лише знати всі доступні противникам стратегії, знати всі їх ходи необов'язково.

8. *Ступінь неповноти інформації*. За цим критерієм ігри поділяються на *статистичні* (в умовах часткової невизначеності) і *стратегічні* (в умовах повної невизначеності). Ігри з природними факторами часто відносять до статистичних ігор. У статистичній грі є можливість отримання інформації на основі статистичного експерименту, при якому обчислюється або оцінюється розподіл ймовірностей станів (стратегій) природи. З теорією статистичних ігор тісно пов'язана теорія прийняття економічних рішень.

9. *Симетричність гри*. Гра буде симетричною тоді, коли відповідні стратегії у гравців будуть рівними, тобто мати однакові платежі. Інакше кажучи, якщо гравці можуть помінятися місцями і при цьому їх виграші за одні й ті ж ходи не зміняться, то гра буде симетричною. Багато досліджу-

ваних ігор для двох гравців – це ігри симетричні. У прикладі, розглянутому в вище наведеній таблиці, гра на перший погляд може здатися симетричною через схожість стратегій, але це не так – адже виграш другого гравця при профілях стратегій (A, A) і (B, B) буде більше, ніж у першого.

10. *Паралельність і послідовність ігор.* У паралельних іграх гравці ходять одночасно, або, принаймні, вони не обізнані про вибір інших гравців доти, поки всі не зроблять свій хід. У послідовних, або динамічних, іграх учасники можуть робити ходи в заздалегідь встановленому або випадковому порядку, але при цьому вони отримують деяку інформацію про попередні дії інших гравців. Ця інформація може бути навіть не зовсім повною, наприклад, гравець може дізнатися, що його супротивник з десяти своїх стратегій точно не вибрав п'яту, нічого не дізнавшись про інших.

11. *Дискретні та неперервні ігри.* Більшість досліджуваних ігор є дискретними: в них скінченне число гравців, ходів, подій, результатів тощо. Однак ці складові можуть бути розширені на множину дійсних чисел. Ігри, що включають такі елементи, часто називаються диференціальними. Вони пов'язані з якоюсь речовою шкалою (зазвичай – шкалою часу), хоча події, що в них відбуваються, можуть бути дискретними по природі. Диференціальні ігри також розглядаються в теорії оптимізації, вони знаходять своє застосування в техніці і технологіях, фізиці.

12. *Метаігри.* Це ігри, результатом яких є набір правил для іншої гри, яку називають цільовою або грою-об'єктом. Мета метаігр – збільшити корисність набору правил, що розробляються. Теорія метаігр пов'язана з теорією оптимальних механізмів.

11.5. Теорія ігор і конфліктні ситуації

Теорія ігор також застосовується для оцінки правил поведінки учасників конфліктної ситуації. При цьому передбачається взаємодія двох або кількох учасників (гравців) для досягнення кожним своєї мети. Рівень досягнення мети гравцем – кінцевий результат його участі в грі – залежить як від випадковостей, так і від кмітливості й майстерності гравців, де кожен хоче отримати якнайбільшу вигоду. Результат гри частково контролюють і учасники.

Конфліктні ситуації, в яких застосовується теорія ігор, існують у класичних іграх (шахи, покер та ін.) і в економіці, біології, геології, політиці, військовій справі та ін.

Правила прийняття рішень за умов невизначеності, конфліктності і зумовленого ними ризику базуються на різних концепціях. Найвідомішою, достатньо дослідженою й широко застосовуваною в теорії і на практиці, є концепція теорії гри і статистичних рішень.

Теорія гри – це розділ сучасної математики, в якому також вивчаються математичні моделі прийняття рішень за умов невизначеності, конфліктності, тобто в ситуаціях, коли інтереси сторін (гравців) або протилежні (у випадку антагоністичних ігор), або не збігаються, хоча й не є протилежними (у випадку ігор з непротилежними інтересами).

Для дослідження статистичних моделей за умов невизначеності, конфліктності та породженого ними ризику використовують схему гри з економічним середовищем, складовими якої є:

1. *Перший гравець* – суб'єкт управління, вибір стратегії поведінки якого базується на множині $S = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ взаємовиключаючих рішень (чистих стратегій), одне з яких йому необхідно прийняти;
2. *Другий гравець* – економічне середовище, яке може перебувати в одному з n взаємовиключаючих станів, що утворюють множину сценаріїв $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, один з яких обов'язково настане;
3. *Відсутність* апріорної інформації про те, в якому зі своїх станів перебуватиме економічне середовище (яке рішення прийме другий гравець);
4. *Точне знання* функціоналу оцінювання $F = (f_{kj} : k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$, елемент якого f_{kj} є кількісною оцінкою ефективності результату.

Ця схема моделювання процесу прийняття раціонального рішення припускає таку інтерпретацію: другий гравець парної гри замінюється випадковим вибором або неусвідомлено приймаючим свої рішення економічним середовищем, а сама ситуація прийняття рішення характеризується функціоналом оцінювання F , який називають також *матрицею гри*, або *платіжною матрицею*.

Формально ситуація прийняття рішення згідно з теоретико-ігровою концепцією описується трійкою множин: $\{S, \Theta, F\}$.

Цікавою з практичного погляду є змішана ігрова модель, коли множина стратегій суб'єкта керування S є неперервною. У такому разі ситуація прийняття рішень характеризується сукупністю функцій: Θ є дискретною і може набувати скінченної кількості варіантів, а множина станів економічного середовища знаходиться наступним чином

$$F = (f(s_k; \theta) = f_k(\theta) : \theta \in \Theta; s_k \in S, k = 1, \dots, m) = (f_1(\theta); \dots, f_m(\theta)).$$

Доречно виокремити *творчу* і *формальну складові* щодо побудови теоретико-ігрової моделі. Основні етапи творчої складової такі:

- формування множин рішень першого і другого гравців, тобто перелік чистих стратегій і станів економічного середовища;
- визначення та формалізація основних показників ефективності й корисності, побудова платіжної матриці F ;
- визначення (ідентифікація) наявної інформаційної ситуації, яка характеризує поведінку економічного середовища;
- вибір критерію прийняття рішення з множини критеріїв, що є характерними для ідентифікованої інформаційної ситуації;
- прийняття згідно з обраним критерієм рішення серед чистих або змішаних стратегій, якщо використання останніх є можливим.

Окрім творчої складової, процес прийняття рішення за умов невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику вимагає досконалого володіння формальною складовою. Суть останньої полягає у застосуванні математичного апарату та виконанні розрахунків показників ефективності, на основі яких будується функціонал оцінювання F , а також розрахунків щодо пошуку оптимальної (раціональної) стратегії або множини оптимальних (раціональних) стратегій згідно з обраним критерієм оптимальності.

11.6. Математичний апарат теорії ігор

Як математична дисципліна, теорія ігор зародилась одночасно з теорією ймовірностей в 17 столітті, але протягом майже 300 років практично не розвивалась. Першою істотною роботою з теорії ігор слід вважати статтю Дж. фон Неймана "До теорії стратегічних ігор" (1928), а з виходом в світ монографії американських математиків Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна "Теорія ігор і економічна поведінка" (1944), теорія ігор сформувалась як самостійна математична дисципліна.

На відміну від інших галузей математики, які мають переважно фізичне, або фізико-технологічне походження, теорія ігор із самого початку свого розвитку була направлена на розв'язання задач, які виникають в економіці (а саме в конкурентній економіці).

Теорія ігор широко використовує різноманітні математичні методи й результати теорії ймовірностей, класичного аналізу, функціонального ана-

лізу (особливо важливими є теореми про нерухомі точки), комбінаторної топології, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь та інші. Специфіка теорії ігор сприяє розробці різноманітних математичних напрямів (наприклад, теорія опуклих множин, лінійне програмування і так далі).

Важливим в теорії ігор є питання про формалізацію поняття оптимальності, яке є досить складним. Єдине уявлення про оптимальність в теорії ігор відсутнє, тому доводиться розглядати кілька принципів оптимальності. Область можливості застосування кожного із принципів оптимальності, які використовуються в теорії ігор, обмежується порівняно вузькими класами ігор, або ж стосується обмежених аспектів їх розгляду.

В основі кожного із цих принципів лежать інтуїтивні уявлення про оптимум, як про щось "стійке" або "справедливе". Формалізація цих уявлень дає вимоги, які висуваються до оптимуму і які мають характер аксіом.

Серед цих вимог можуть опинитись такі, які суперечать одна одній (наприклад, можна показати конфлікти, в яких сторони вимушені задовольнитись малими виграшами, оскільки великих виграшів можна досягти лише в умовах невизначених ситуацій); тому в теорії ігор не може бути сформульований єдиний принцип оптимальності.

Ситуації (або множини ситуацій), які задовольняють в деякій грі ті або інші вимоги оптимальності, називаються *розв'язками* цієї гри. Оскільки уявлення про оптимальність не є однозначними, можна говорити про розв'язки ігор в різних сенсах. Створення визначень розв'язків ігор, доведення їх існування і розробка шляхів їх фактичного пошуку – три основні питання сучасної теорії ігор. Близькими до них є питання про одиничність розв'язків ігор, про існування в тих чи інших класах ігор розв'язків, які мають деякі наперед визначені властивості.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Хто вперше системно виклав теорію ігор?
2. Що розуміється під теорією ігор?
3. Де застосовується теорія ігор?
4. Назвіть ознаки класифікації ігор.
5. Що розуміється під грою з нульовою сумою?
6. Чому теорія ігор може застосовуватися в конфліктних ситуаціях?
7. Який математичний апарат застосовується в теорії ігор?

12. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

12.1. Поняття системи масового обслуговування

Теорія масового обслуговування є важливим розділом системного аналізу та дослідження операцій. Вона багата на різноманітні додатки: від задач, пов'язаних з експлуатацією телефонних мереж, до наукової організації виробництва. Ця теорія використовується там, де є виклики і клієнти, сигнали і вироби масового виробництва, а також там, де вироби обслуговуються, обробляються, передаються.

Ідеї і методи теорії масового обслуговування (ТМО) отримують все більше поширення. Багато задач техніки, економіки, військової справи, природознавства можуть бути поставлені і вирішені в термінах ТМО.

Своїм виникненням ТМО зобов'язана, в першу чергу, прикладним питанням телефонії, в яких через велику кількість незалежних або слабо залежних джерел (абонентів телефонних станцій) потоки заявок (викликів) мають чітко виражений випадковий характер. Випадкові коливання (флуктуації) близько деякого середнього є в даному випадку не результатом якогось відхилення від норми, а закономірністю, властивою всьому процесу. З іншого боку, стабільність роботи телефонних станцій, можливість отримання хороших статистичних даних створили передумови для виявлення основних характеристик, властивих даному процесу обслуговування.

Вперше на це звернув увагу і провів дослідження датчанин А.К. Ерланг. Основні його роботи в цій області відносяться до 1908 – 1921 років. З цього часу, інтерес до проблем, висунутих Ерлангом, надзвичайно зріс. У 1927 – 1928 роках з'являються роботи Моліна і Фрая, пізніше в 1930 – 1932 роках – цікаві роботи Поллачека, А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина.

Потрібно додати, що перші задачі ТМО були доволі простими і допускали отримання остаточних аналітичних залежностей. Розвиток ТМО йшов як по лінії розширення сфери застосування цієї теорії, так і по лінії ускладнення поставлених перед нею задач. Виявилося, що задачі типу телефонних, виникають у найрізноманітніших напрямках досліджень: в природознавстві, в техніці, на транспорті, у військовій справі, в організації виробництва і т. д.

У багатьох областях практичної діяльності людина часто стикається з необхідністю перебування в стані очікування. Подібні ситуації виникають в чергах у квиткових касах, у великих аеропортах, при очікуванні обслуговуючим персоналом літаків дозволу на зліт або посадку, на телефонних станціях в очікуванні звільнення лінії абонента, в ремонтних цехах в очікуванні ремонту верстатів й устаткування, на складах постачальницько-збутових організацій в очікуванні розвантаження або навантаження транспортних засобів. У всіх перерахованих випадках маємо справу з масовістю та обслуговуванням. Вивченням таких ситуацій займається ТМО.

ТМО – область прикладної математики, яка займається аналізом процесів у системах виробництва, обслуговування, управління, коли однорідні події повторюються багато разів, наприклад, на підприємствах побутового обслуговування; в системах прийому, переробки та передачі інформації; автоматичних лініях виробництва та ін.

Предметом ТМО є встановлення залежностей між характером потоку заявок, числом каналів обслуговування, продуктивністю окремого каналу та ефективним обслуговуванням з метою знаходження найкращих шляхів управління цими процесами.

Задачі ТМО носять оптимізаційний характер і в кінцевому підсумку включають економічний аспект за визначенням такого варіанту системи, при якому буде забезпечено мінімум сумарних витрат від очікування обслуговування, втрат часу і ресурсів на обслуговування і простоїв каналів обслуговування.

При вирішенні задач оптимізації управління виробництвом, інформаційними мережами, транспортними системами часто виникає ряд однотипних задач:

- оцінка пропускної здатності каналів зв'язку, системи автомобільних і залізних доріг і т. п;
- оцінка ефективності роботи підприємства, комп'ютерної мережі;
- визначення кількості каналів зв'язку і транспортних шляхів сполучення та ін.

Всі ці задачі однотипні в тому сенсі, що в них присутній масовий попит на обслуговування. У задоволенні цього попиту бере участь певна сукупність елементів, що утворює систему масового обслуговування (СМО). Структура СМО наведена на рис. 12.1.

Структура СМО включає такі елементи:

- джерело вимог;
- вхідний потік вимог (заявок) на обслуговування;
- прилади (канали) обслуговування (обслуговуючі пристрої);
- черга заявок, які очікують обслуговування;
- вихідний потік обслужених заявок;
- потік не обслужених заявок;
- черга вільних каналів (для багатоканальних СМО).

Моделі СМО притаманні такі поняття, як:

- характеристики якості системи;
- механізм (дисципліна) обслуговування.

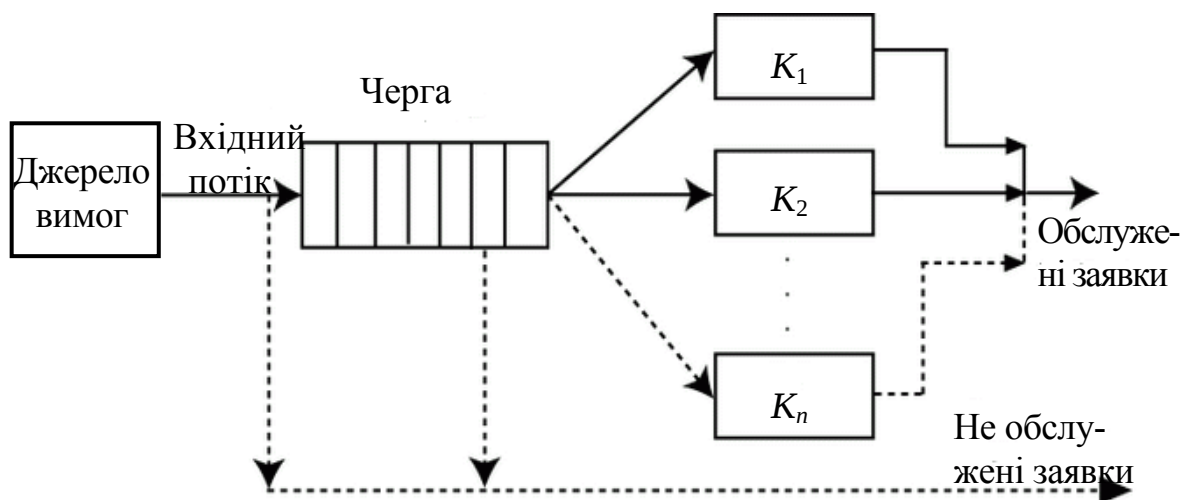


Рисунок 12.1 – Схема СМО

У теорії СМО об'єкт, що обслуговується, називають *вимогою*. У загальному випадку під вимогою зазвичай розуміють запит на задоволення деякої потреби, наприклад, розмова з абонентом, посадка літака, покупка квитка, отримання матеріалів на складі.

Засоби, що обслуговують вимоги, називаються обслуговуючими пристроями або каналами обслуговування. Наприклад, до них відносяться канали телефонного зв'язку, посадочні смуги, майстри-ремонтники, квиткові касири, вантажно-розвантажувальні точки на базах і складах.

Під СМО розуміють сукупність однотипних обслуговуючих пристроїв. Такими системами можуть бути телефонні станції, аеродроми, квиткові каси, ремонтні майстерні, склади та бази постачальницько-збутових організацій і т. д.

12.2. Характеристики основних елементів структури масового обслуговування

До основних елементів структури масового обслуговування відносять, в першу чергу, *клієнта* (замовника на обслуговування) і *сервіс* (обслуговуючий пристрій, прилад, засіб обслуговування тощо).

Клієнти надходять до системи обслуговування з *джерела клієнтів* (джерела вимог). Іншими словами, джерело вимог – це генератор клієнтів. Основною характеристикою джерела вимог є його потужність, яка може бути скінченна або нескінченна. Джерело скінченної потужності обмежує кількість клієнтів, що надходять на обслуговування (наприклад, у комп'ютерному класі, що має N комп'ютерів, сумарна кількість потенційних замовлень на їх ремонт не перевищує N). Джерело нескінченної потужності завжди має клієнтів вдосталь (наприклад, дзвінки, що надходять до телефонної мережі).

Будемо завжди припускати, що джерело, яке генерує вимоги, невичерпне. Наприклад, хоча абонентів деякого телефонного вузла скінченне число, припускаємо, що вони утворюють нескінченне джерело.

Вхідний потік вимог визначає послідовність моментів надходження вимог на обслуговування і зазначає кількість таких вимог у кожному черговому надходженні. Тобто це сукупність заявок на обслуговування, які надходять із джерела. Саму вимогу можна розглядати як запит на задоволення певної потреби. Прикладів вхідних потоків можна привести багато. Це – потік інформації, що надходить на обробку в ЕОМ; потік заявок на АТС; потік клієнтів, що приходять в ательє, і хворих в поліклініку, потік суден, що прибувають в порт і т. д.

Для опису вхідного потоку потрібно задати закон розподілу ймовірностей, що керує послідовністю моментів надходження вимог на обслуговування і зазначити кількість таких вимог у кожному черговому надходженні. Наприклад, вимоги у бібліотеці чи у службі таксі можуть надходити в середньому кожні 4 хвилини. При цьому в умовах бібліотеки щоразу надходить одинична вимога (клієнти приходять у бібліотеку по одному), а в умовах служби таксі можуть надходити як одиничні, так і групові вимоги (пасажери можуть їздити по одному або з компанією).

Характеристикою потоку вимог є λ , під якою розуміють *інтенсивність надходження замовлень в систему*, тобто середню кількість замовлень, що надходять в систему за одиницю часу.

Потік вимог є регулярним, якщо замовлення надходять до системи одне за одним через рівні проміжки часу. Наприклад, потік вимог на конвеєр при розливі молока (з постійною швидкістю руху) є регулярним. Потік вимог називається стаціонарним, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від часу. Зокрема, інтенсивність стаціонарного потоку є величина стала $\lambda(t) = \lambda$. Наприклад, потік автомашин на світлофорі не є стаціонарним протягом доби, однак його можна вважати стаціонарним у години пік.

Потік вимог називається потоком без наслідків, якщо для будь-яких двох інтервалів часу, які не перетинаються, кількість замовлень, що надходять до системи в ці інтервали, не залежить від кількості замовлень, що надійшли в інші проміжки часу. Наприклад, потік пасажирів метро практично не має наслідків.

Потік замовлень називається ординарним, якщо події надходять по одному, а не групами. Наприклад, потік поїздів у метро є ординарним, а потік вагонів – не ординарним.

Потік замовлень називається найпростішим (або стаціонарним пуасонівським), якщо він одночасно стаціонарний, ординарний і не має наслідків.

Черга – ряд замовлень, що очікують на обслуговування. Розрізняють дві її характеристики – довжину (ємність) і дисципліну черги.

Довжина черги може бути скінченна і нескінченна. Так, наприклад, у комп'ютерному класі, що має N комп'ютерів, сумарна кількість потенційних замовлень на їх ремонт не перевищує N , отже, черга не може бути більша за $N - 1$.

Дисципліна черги визначає принцип, відповідно до якого обслуговуються замовлення в системі. Частіше усього використовуються дисципліни черги, обумовлені наступними правилами:

- першим прийшов – перший обслуговуєшся;
- прийшов останнім – обслуговуєшся першим;
- випадковий добір замовлень;
- добір замовлень за критерієм пріоритетності;
- обмеження часу очікування моменту настання обслуговування (має місце черга з обмеженим часом очікування обслуговування, що асоціюється з поняттям "припустима довжина черги").

Механізм обслуговування визначається тривалістю процедур обслуговування (t) і кількістю вимог (μ), що обслужені за одиницю часу.

Механізм обслуговування може складатися з кількох приладів (каналів обслуговування). При цьому ці прилади можуть бути розташовані паралельно (наприклад, працює кілька кас у супермаркеті), або послідовно (наприклад, послідовна обробка деталей у цеху на токарному та фрезерному верстатах).

Тип часу обслуговування може бути як детермінованим, так і випадковим. Так, наприклад, обслуговування клієнтів на підприємстві харчування вважається завершеним, коли клієнт (або група клієнтів) залишають відповідний заклад. Тривалість часу обслуговування (t) залежить від запитів клієнта (або групи клієнтів) і є випадковою величиною. Обробка однотипних деталей, наприклад, на токарному верстаті деякого цеху, характеризується детермінованим часом обслуговування.

Вихідний потік вимог характеризується інтенсивністю μ , під якою розуміють *інтенсивність обслуговування*, тобто число вимог, що обслужені за одиницю часу, протягом якого прилад зайнятий обслуговуванням. Існує залежність між часом обслуговування та інтенсивністю обслуговування, яка виражається формулою $t = 1/\mu$.

До вихідного потоку можуть входити і вимоги, які покинули систему, не пройшовши обслуговування.

Обслуговуюча система – це множина технічних засобів або виробничого персоналу (різного роду установки, прилади, пристрої, тунелі, злітно-посадкові смуги, лінії зв'язку, продавці, бригади робітників або службовців, касири і т. д.), які виконують функції обслуговування. Все перераховане вище об'єднується однією назвою "канал обслуговування" (обслуговуючий прилад). Склад системи визначається кількістю каналів (приладів, ліній).

12.3. Задачі теорії масового обслуговування

Основними задачами теорії СМО є:

- вивчення режиму функціонування обслуговуючої системи;
- дослідження явищ, які виникають в процесі обслуговування;
- встановлення залежності між характером потоку заявок на вході СМО, продуктивністю одного каналу, числом каналів і ефективністю обслуговування.

У класичній теорії СМО також виділяють наступні характеристики:

- 1) максимальна довжина черги;

- 2) необхідна швидкість обслуговування;
- 3) кількість приборів обслуговування, які працюють паралельно.

Однією з характеристик обслуговуючої системи є час перебування вимоги в черзі. Очевидно, що цей час можна скоротити за рахунок збільшення кількості обслуговуючих пристроїв. Однак кожний додатковий пристрій вимагає певних матеріальних витрат, при цьому збільшується час бездіяльності обслуговуючого устрою через відсутність вимог на обслуговування, що також є негативним явищем.

Отже, в теорії СМО виникають задачі оптимізації: яким чином досягти певного рівня обслуговування (максимального скорочення черги або втрат вимог) при мінімальних витратах, пов'язаних з простоем обслуговуючих пристроїв.

При дослідженні СМО можуть розв'язуватися:

- 1) задачі аналізу СМО – визначення характеристик якості обслуговування залежно від параметрів і властивостей вхідного потоку вимог, параметрів і структури системи обслуговування та дисципліни обслуговування;
- 2) задачі параметричного синтезу – визначення параметрів системи обслуговування при заданій структурі залежно від параметрів і властивостей потоку вимог, дисципліни та якості обслуговування;
- 3) задачі синтезу структури системи з оптимізацією її параметрів таким чином, щоб при заданих потоках, дисципліні та якості обслуговування вартість СМО була мінімальною або були мінімальними втрати замовлень при заданих потоках, дисципліні та вартості системи.

За критерій ефективності можуть бути взяті різні функції та величини, наприклад:

- середній час простою системи;
- середній час очікування в черзі;
- закон розподілу тривалості очікування вимоги в черзі;
- середній відсоток заявок, які отримали відмову і т. д.

Вибір критерію залежить від виду системи. Наприклад, для систем з відмовами головною характеристикою є абсолютна пропускна спроможність СМО; менш важливі критерії – число зайнятих каналів, середній відносний час простою одного каналу та системи в цілому.

Для систем без втрат (з необмеженим очікуванням) найважливішим є середній час простою в черзі, середнє число вимог в черзі, середній час пе-

ребування вимог у системі, коефіцієнт простою та коефіцієнт завантаження обслуговуючої системи.

12.4. Класифікація систем масового обслуговування

СМО класифікуються за різноманітними ознаками.

Класифікація СМО за складом:

- одноканальні (з одним обслуговуючим пристроєм);
- багатоканальні (з кількома паралельними обслуговуючими пристроями).

Багатоканальні СМО можуть складатися з однотипних або неоднотипних приладів. Обслуговуючими приладами можуть бути:

- лінії зв'язку;
- майстри ремонтних майстерень, продавці, касири;
- маршрутизатори в комп'ютерних мережах;
- транспортні засоби;
- платіжні термінали;
- сервери та ін.

Канали можуть бути абсолютно надійними, тобто не виходити з ладу. Вірніше, так може бути прийнято при дослідженні. Канали можуть мати кінцеву надійність. В цьому випадку модель СМО значно складніше.

За складом обслуговуючих пристроїв багатоканальні СМО поділяють на:

- однофазні (якщо після проходження одного обслуговуючого пристрою замовлення вважається обслугованим);
- багатofазні (замовлення повинно послідовно пройти через кілька обслуговуючих пристроїв).

Класифікація за часом перебування вимоги в системі до початку обслуговування:

- з відмовами (якщо замовлення, що надійшло до системи, не може бути обслуговане, воно покидає систему. Наприклад, телефонуючи до приятеля, Ви почули, що його номер зайнятий, Вам відмовлено в обслуговуванні – Ви чуєте короткі гудки – і для подальшої розмови Вам необхідно ще раз набрати номер, тобто ще раз подати замовлення на обслуговування). У системах з відмовами є потік необслужених заявок;
- з очікуванням (замовлення, що надійшло до системи в момент, коли всі канали зайняті, становиться в чергу та очікує на обслуговування).

СМО з очікуванням характеризуються наявністю черг.

Очікування може бути обмеженим і необмеженим. Обмежуватись очікування може часом очікування або довжиною черги.

Інколи зустрічаються СМО змішаного типу – це такі СМО, в яких заявки мають обмежений час перебування в черзі незалежно від її ємності.

Крім зазначених вище ознак, застосовують також наступні ознаки для класифікації СМО.

1. *За характером надходження заявок.* Якщо інтенсивність вхідного потоку (кількість заявок в одиницю часу) постійна або є заданою функцією від часу, потік називають регулярним. Якщо параметри потоку незалежні від конкретного моменту часу, потік називають стаціонарним.

2. *За кількістю заявок, що поступають одночасно.* Потік з ймовірністю одночасної появи двох і більше заявок рівною нулю називається ординарним.

3. *За зв'язком між заявками.* Якщо ймовірність появи чергової заявки не залежить від кількості попередніх заявок, маємо справу з потоком без післядії.

4. *За однорідністю заявок* виділяють однорідні і неоднорідні потоки.

5. *За обмеженістю потоку* заявок розрізняють замкнуті та розімкнуті системи (система з обмеженою клієнтурою називається замкнутою). Так універсальний магазин є розімкнутою системою, тоді як оптовий магазин з постійними клієнтами – замкнутою системою.

6. *За часом обслуговування* виділяють системи з детермінованим і випадковим часом.

12.5. Характеристики систем масового обслуговування

Введемо позначення:

i – кількість клієнтів в системі обслуговування (в черзі і на обслуговуванні);

λ_i – інтенсивність надходження в систему клієнтів за умови, що в системі вже знаходиться i клієнтів;

μ_i – інтенсивність вихідного потоку обслужених клієнтів за умови, що в системі знаходиться i клієнтів;

P_i – ймовірність того, що в системі знаходиться i клієнтів;

ρ – зведена інтенсивність завантаження каналу (або інтенсивність за-

вантаження каналу). Вона виражає середню кількість замовлень, що надходять за час обслуговування одного замовлення та обчислюється за формулою $\rho = \lambda/\mu$.

Для аналізу випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою, так званим графом станів. Для подальшого розрахунку характеристик ефективності роботи СМО обслуговування необхідно визначити, окрім можливих станів системи, також ймовірності настання цих станів (P_i), які називають граничними ймовірностями системи.

Розглянемо наступні СМО.

– *Одноканальні СМО з відмовами*. Нехай маємо один канал, на який надходить потік замовлень з інтенсивністю λ . Вихідний потік має інтенсивність μ . Граф станів цієї СМО наведений на рис. 12.2.

Ця система може приймати два стани:

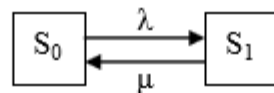


Рисунок 12.2 – Граф станів одноканальної СМО з відмовами

S_0 – канал вільний;

S_1 – канал зайнятий (йде обслуговування замовлення).

Граничні ймовірності системи:

P_0 – ймовірність стану S_0

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

P_1 – ймовірність стану S_1

$$P_1 = 1 - P_0.$$

– *Одноканальні СМО з очікуванням і обмеженням на довжину черги*.

Граф стану цієї системи наведений на рис. 12.3.

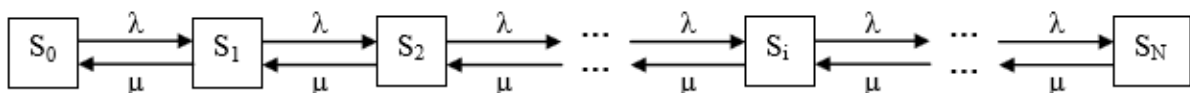


Рисунок 12.3 – Граф стану одноканальної СМО з обмеженням очікуванням

Стани СМО мають таку інтерпретацію:

S_0 – канал вільний;

S_1 – канал зайнятий (черги немає);

S_2 – канал зайнятий (одне замовлення знаходиться в черзі);

S_i – канал зайнятий ($i - 1$ замовлень знаходяться в черзі);

S_N – канал зайнятий ($N - 1$ замовлень знаходяться в черзі).

Граничні ймовірності системи:

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \neq 1; \\ \frac{1}{N+1}, & \rho = 1. \end{cases}$$

$$P_i = \begin{cases} P_0 \rho^i, & \rho \neq 1; \\ \frac{1}{N+1}, & \rho = 1; \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

– Одноканальні СМО з необмеженим очікуванням. На рис. 12.4 зображений граф станів цієї системи.

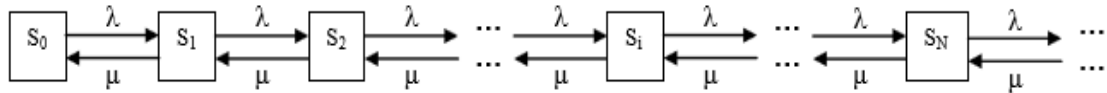


Рисунок 12.4 – Граф станів одноканальної СМО з необмеженим очікуванням

Стани СМО мають таку інтерпретацію:

S_0 – канал вільний;

S_1 – канал зайнятий (черги немає);

S_2 – канал зайнятий (одне замовлення знаходиться в черзі);

S_i – канал зайнятий ($i - 1$ замовлень знаходяться в черзі);

S_N – канал зайнятий ($N - 1$ замовлень знаходяться в черзі).

Граничні ймовірності системи:

$$P_0 = 1 - \rho;$$

$$P_i = P_0 \rho^i.$$

– Багатоканальні СМО з відмовами. Нехай маємо N каналів для обслуговування (рис. 12.5), потік замовлень на обслуговування має інтенсивність λ , а інтенсивність обслуговування дорівнює μ .

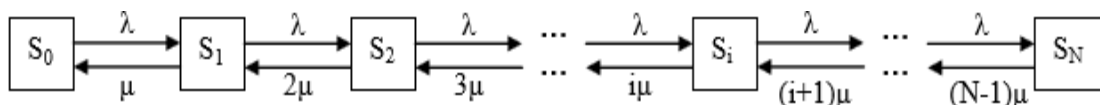


Рисунок 12.5 – Граф станів багатоканальної СМО з відмовами

Ця СМО має такі стани:

S_0 – всі канали вільні;

S_1 – один канал зайнятий, інші $N - 1$ канали вільні;
 S_2 – два канали зайняті, інші $N - 2$ канали вільні;
 S_i – i каналів зайняті, інші $N - i$ канали вільні;
 S_N – всі канали зайняті, замовлення отримує відмову в обслуговуванні.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^N \frac{\rho^i}{i!}},$$

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Формули для обчислення граничних ймовірностей системи називаються формулами Ерланга на честь засновника ТМО.

12.6. Дисципліна очікування та пріоритети

Дисципліна очікування – це спосіб визначення того, яка вимога у черзі має обслуговуватися наступною. Рішення можуть ґрунтуватися на одній із наведених нижче характеристик чи їх сукупності:

- 1) міра, обумовлена відносним часом надходження аналізованої вимоги у черзі;
- 2) міра необхідного чи отриманого часу обслуговування;
- 3) функція, визначальна приналежність вимоги до тієї чи іншої групи.

На практиці часто зустрічається задача призначення пріоритетів в залежності від часу надходження заявки. Наприклад, для того, щоб ніякі вимоги не затримувалися в системі дуже довго, незважаючи на загальне навантаження, організують дисципліну обслуговування, за якої чим довше заявка знаходиться в системі, тим її пріоритет стає вище.

Існують системи з абсолютними пріоритетами, де поява заявки вищого рівня перериває обслуговування поточної заявки, яка повернеться в чергу і потім знову надійде на обслуговування з місця переривання (або з початку). Тут середній час очікування заявки з пріоритетом k .

Виключно складно встановити розумні пріоритети в разі багатофазних систем, де заявка проходить обслуговування в кількох послідовних підсистемах. Тут відносно прості висновки вдається зробити лише для випадку двох підсистем, і для отримання висновків для більш складних систем доводиться вдаватися до моделювання.

12.7. Моделювання систем масового обслуговування та метод Монте-Карло

Основне припущення, при якому найчастіше аналізуються СМО, полягає в тому, що всі потоки подій, які переводять їх зі стану в стан, є найпростішими. При порушенні цієї вимоги загальних аналітичних методів для таких систем не існує. Є лише окремі результати, які дозволяють виразити в аналітичному вигляді характеристики СМО через параметри задачі.

У випадках, коли для аналізу роботи СМО аналітичні методи не можуть застосовуватися (або ж потрібно перевірити їх точність), використовують універсальний метод статистичного моделювання, або, як його називають, метод Монте-Карло.

Ідея методу Монте-Карло полягає в тому, що замість аналітичного опису СМО проводиться "розіграш" випадкового процесу, який проходить в СМО, за допомогою спеціально організованої процедури. В результаті такого "розіграшу" виходить кожен раз нова, відмінна від інших реалізація випадкового процесу. Цю множину реалізацій можна використовувати як якийсь штучно отриманий статистичний матеріал, який обробляється звичайними методами математичної статистики. Після такої обробки можуть бути отримані наближено будь-які характеристики обслуговування.

Наприклад, необхідно проаналізувати черги, що виникають в магазині, для вирішення питання про розширення магазину. Час підходу покупців і час їх обслуговування носять випадковий характер, і їх розподіли можуть бути встановлені за наявною інформацією. В результаті взаємодії цих випадкових процесів створюється черга.

Згідно з методом Монте-Карло перебирають (за допомогою ЕОМ) всі можливі стани системи з різною кількістю покупців на годину, часом їх обслуговування і т. п., зберігаючи ті ж характеристики розподілу. В результаті багаторазового штучного відтворення роботи магазину розраховують характеристики обслуговування, ніби то вони були отримані при спостереженні над реальним потоком покупців.

При моделюванні випадкових явищ методом Монте-Карло користуються випадковістю як апаратом дослідження. Зауважимо, що для складних систем обслуговування з немарківським випадковим процесом метод статистичного моделювання, як правило, виявляється простіше аналітичного.

Суть математичного моделювання системи полягає в наступному. Час функціонування системи розділяється на досить велику кількість підінтервалів (одиниць часу, протягом яких не може виникнути більше однієї заявки або завершитися виконання більш однієї заявки). Для кожного такого підінтервалу послідовно моделюється факт появи нової заявки (так / ні), перевіряється наявність вільного каналу (чи закінчено обслуговування якоїсь заявки) і завантаження його заявкою з черги, перевіряється наявність місць в черзі з подальшим виведенням (прийняти в чергу / відмовити в обслуговуванні) і т. д. При цьому фіксується число відмов, час очікування заявок в черзі та в системі взагалі, число заявок в черзі в кожен момент, інші параметри, які дозволяють знайти ймовірність відмови, розподіл часу очікування і середній час, ймовірність простою каналів і т. п. Для надійності висновків таке разове моделювання повторюється досить багато раз.

Очевидно, що ні про яке ручне моделювання не може бути мови (обсяг роботи при цьому дуже великий для нормального індивіда). Тут доводиться використовувати комп'ютер з вбудованим або програмним датчиком псевдовипадкових чисел з рівномірним законом розподілу в інтервалі від 0 до 1. Псевдовипадкові числа виходять за якимось алгоритмом, але в сукупності підпорядковуються всім законам перевірки на випадковість.

Таким шляхом можна моделювати інтервали часу між заявками вхідного потоку, тривалість обслуговування заявки, ймовірність виходу каналу з ладу і т. п.

Як вище зазначалося, описаний підхід до пошуку характеристик складної системи називають методом статистичних випробувань – методом Монте-Карло. Цей метод зазвичай використовують там, де інші методи терплять фіаско (моделювання складних систем, обчислення інтегралів кратності 10 і вище, пошук екстремумів функцій з дуже великим числом змінних і ін.).

12.8. Числове моделювання систем масового обслуговування

Для того щоб проводити математичні дослідження процесу масового обслуговування, необхідно повістю визначити систему обслуговування. Зазвичай це означає:

- задання вхідного потоку. Це може бути як середня інтенсивність надходження вимог, так і статистична модель їх надходження (тобто закон розподілу моментів надходження вимог у систему);

– задання механізму обслуговування. Це означає вказівку того, коли обслуговування допустимо, скільки вимог може обслуговуватися одночасно і як довго триває обслуговування. Останню властивість зазвичай характеризують статистичним розподілом тривалості обслуговування (закон розподілу часу обслуговування);

– задання дисципліни обслуговування. Це означає вказівку способу, за яким відбувається відбір однієї вимоги з черги (якщо вона є) на обслуговування. У найпростішому варіанті дисципліна обслуговування полягає в обслуговуванні вимог в порядку їх надходження (справедливий принцип), проте існує і багато інших можливостей.

Задання системи передбачає також наявність опису взаємодії між окремими її частинами.

Коли система досить повно визначена, з'являється підстава для побудови математичної моделі. Якщо математична модель більш-менш адекватно відображає реальну систему, то вона дозволяє отримати основні характеристики функціонування системи. Зрозуміло, модель значно спрощує практичну ситуацію, але це не применшує математичних методів ТМО.

Випадковий характер потоку заявок і часів обслуговування призводить до того, що в якісь періоди часу на вході СМО накопичується надмірно велика кількість заявок (вони або стають в чергу, або залишають СМО без обслуговування); в інші ж періоди СМО працюватиме з недовантаженням або взагалі буде простоювати.

Математичний аналіз роботи СМО дуже полегшується, якщо процес цієї роботи – марківський. Для цього досить, щоб всі потоки подій, що переводять систему зі стану в стан (потоки заявок, потоки "обслуговувань"), були простими. Якщо ця властивість порушується, то математичний опис процесу стає набагато складніше і довести його до явних, аналітичних формул вдається лише в рідкісних випадках. Однак все ж апарат найпростішої, марківської ТМО може стати в нагоді для наближеного опису роботи СМО навіть у тих випадках, коли потоки подій – не прості. У багатьох випадках для прийняття розумного рішення по організації роботи СМО зовсім і не потрібно точне знання всіх її характеристик – часто досить і наближеного, орієнтовного. Причому, чим складніше СМО, чим більше в ній каналів обслуговування, тим точніше виявляються ці наближені формули.

Найпростіший стаціонарний потік – пуассонівський потік з повною відсутністю післядії. У нього випадкові інтервали між заявками мають експоненціальний розподіл:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

де λ – інтенсивність потоку.

Назва потоку – пуассонівський – походить від того, що для цього потоку імовірність $P_k(\Delta t)$ появи k заявок за інтервал Δt визначається законом Пуассона:

$$P_k(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}.$$

Саме такий потік припускають проектувальники при розробці СМО. Викликано це трьома причинами.

По-перше, потік цього типу в ТМО аналогічний нормальним законам розподілу в теорії ймовірностей в тому сенсі, що до найпростішого потоку призводить граничний перехід для потоку, що є сумою потоків з довільними характеристиками при нескінченному збільшенні доданків і зменшенні їх інтенсивності. Тобто сума довільних незалежних (без переваги) потоків з інтенсивністю є найпростішим потоком з інтенсивністю

$$\lambda = \sum_i \lambda_i.$$

По-друге, якщо обслуговуючі канали (прилади) розраховані на найпростіший потік заявок, то обслуговування інших типів потоків (з тією ж інтенсивністю) буде забезпечено з не меншою ефективністю.

По-третє, саме такий потік визначає марківський процес в системі і, отже, простоту математичного аналізу системи. При інших потоках аналіз функціонування СМО складний.

12.9. Поняття системи масового обслуговування банку

Для ефективної роботи банку необхідні, по-перше, постійне вивчення та прогнозування стану ринку банківських послуг і, по-друге, всебічне планування банківської діяльності та оперативне управління фінансовими ресурсами банку.

Банківські установи надають клієнтам багато послуг, вступають в складні взаємовідносини між собою та іншими суб'єктами господарського життя, виконують різноманітні функції. Для виживання в умовах конкуренції, що загострюється, банки повинні шукати шляхи вдосконалення базових технологій, впроваджувати нові банківські інструменти, підтримувати роботу своєї автоматизованої інформаційної системи управління та обробки даних, яка б відповідала міжнародним вимогам і стандартам. Моделю-

вання банківських операцій є одним з важливих етапів аналізу та оцінки діяльності банку, а також розробки проекту автоматизованої банківської системи.

Відмітна риса українського фінансового ринку – його суб'єктивізм, крайня залежність від позаекономічних чинників і, як наслідок, висока ступінь невизначеності, яка ускладнює прийняття обґрунтованих фінансових рішень. Застосування традиційних засобів підтримки управлінських рішень і прогнозування в цих умовах ускладнене, і тим цінніше можливість використання методу моделювання, підвищений інтерес до якого проявляється сьогодні в розвинених країнах. Цей метод сприймається сьогодні як потужний і перспективний інструмент конструювання і подальшого дослідження складних бізнес-процесів і систем, в яких велике число змінних, трудомісткий, а часто і неможливий математичний аналіз залежностей, високий рівень невизначеності імітованих ситуацій.

Поширенню подібних моделей сприяв також комерційний успіх ряду аналітичних програмних продуктів, що успішно використовуються в банках, промислових і торгових фірмах, державних установах, страхових компаніях і т. д. Практика застосування моделей СМО відкрила нові можливості по концептуальному аналізу проблем управління бізнесом, скорочення термінів розробки перспективних пілотних проектів, організації ефективного супроводу складних корпоративних додатків.

Сьогодні підходи і методи моделювання є надзвичайно плідними у вітчизняних умовах перманентної економічної нестабільності і ризику. Перш за все, це стосується перспективних, які динамічно розвиваються і знаходяться в стадії становлення активних секторів вітчизняного бізнесу, таких, як банківська і страхова діяльність, ринок інформаційних технологій, торгово-посередницький бізнес, а також ринок цінних паперів.

СМО представляють собою системи спеціального виду, що реалізують багаторазове виконання однотипних завдань. Подібні системи відіграють важливу роль у багатьох галузях економіки, фінансів, виробництва та побуту. Як приклади СМО в фінансово-економічній сфері можна навести банки різних типів (комерційні, інвестиційні, іпотечні, інноваційні, ощадні), страхові організації, державні акціонерні товариства, компанії, фірми, асоціації, кооперативи, податкові інспекції, аудиторські служби, різні системи зв'язку (в тому числі телефонні станції), вантажно-розвантажувальні комплекси (порти, товарні станції), автозаправні станції,

різні підприємства та організації сфери обслуговування (магазини, довідкові бюро, перукарні, квиткові каси, пункти з обміну валюти, ремонтні майстерні, лікарні). Такі системи, як комп'ютерні мережі, системи збору, зберігання і обробки інформації, транспортні системи, автоматизовані виробничі ділянки, потокові лінії, різні військові системи, зокрема системи протиповітряної або протиракетної оборони, також можуть розглядатися як своєрідні СМО.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміється під СМО?
 2. Які задачі виникають при вирішенні задач оптимізації управління виробництвом, інформаційними мережами тощо?
 3. Які елементи входять до структури СМО?
 4. Що таке джерело вимог?
 5. Якою може бути довжина черги замовлень?
 6. Перелічіть задачі ТМО.
 7. Назвіть критерії ефективності СМО.
 8. Назвіть ознаки класифікації СМО.
 9. Що таке дисципліна очікування?
-

13. МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

13.1. Фізика і моделювання

Більшість фізичних процесів описується звичайними диференціальними рівняннями (ДУ) першого і другого порядку, причому в загальному випадку ці рівняння не мають аналітичного рішення, що виражається через елементарні функції (наприклад, рух тіла під дією змінної сили). Такі рівняння вирішують числовим методом, який є наближеним, але за певних умов дає добрий збіг з точним рішенням.

Реальні фізичні процеси взаємопов'язані і їх описують ДУ з частинними похідними, які розв'язуються переважно числовими методами. Одним з методів аналізу явищ у фізиці є математичне моделювання, коли замість реального процесу розглядається деякий спрощений, ідеалізований процес – модель явища. При цьому частина зв'язків, що мають місце між різними його характеристиками і зовнішніми параметрами, навмисно ігнорується (наприклад, вивчення температурного процесу без урахування дисипації тепла в середовище, впливу електромагнітних хвиль тощо). Математична модель процесу – це рівняння, що зв'язують його відомі і шукані параметри.

Часто в фізиці основні рівняння виражають загальні закони збереження маси, імпульсу та енергії. Ці рівняння універсальні і можуть бути використані для опису різних фізичних і технологічних процесів. Моделювання – це спрощення досліджуваного процесу, яке зводиться до конкретизації та аналізу загальних рівнянь та їх замикання. Замкнена математична модель – це система рівнянь, що зв'язують різні параметри процесу, яка доповнена граничними і початковими умовами. Граничні умови – модель взаємодії зовнішніх (по відношенню до досліджуваної області) процесів і процесів всередині області. Початкові умови – модель початкового стану досліджуваного процесу.

Математичні моделі реального фізичного процесу, навіть спрощені, можуть виявитися вельми складними для застосування аналітичних методів. У цьому випадку для відшукування рішення задач використовуються числові методи. Так, рух у суцільному середовищі замінюється дискретним, а вихідні рівняння – системою алгебраїчних співвідношень (наприклад, різ-

ницевою схемою). Для рішення системи рівнянь необхідні свої методи, які орієнтовані на застосування обчислювальної техніки. Ці методи дуже різноманітні (прямі, ітераційні). Виникає і проблема вибору найбільш раціонального способу розв'язання, економічного за часом розрахунків, обсягом пам'яті ЕОМ, та забезпечує збіжність і стійкість обчислювального процесу. Спочатку виконується розробка алгоритмічної моделі, придатної для реалізації на ЕОМ, потім складається програма, вона налагоджується і тестується, одержуються результати числового рішення, перевіряється їх достовірність, тобто виконується апробація числової моделі на експериментах і (або) відомих аналітичних рішеннях, і, нарешті, аналізуються результати розрахунків, які використовуються для прогнозу або оптимізації процесів. Разом усі ці етапи називають числовим математичним моделюванням.

Фізичні процеси поділяються на:

- нестационарні процеси, в яких зміна за часом деякої характеристики процесу є визначаючою, а її похідна по часу t не дорівнює нулю;
- стаціонарні – це процеси, в яких характеристики процесу не залежать від часу. Наприклад, рівняння стаціонарної теплопровідності не містить похідних від часу;
- квазістаціонарні процеси – це процеси в яких можна нехтувати зміною деяких характеристик в часі.

13.2. Детерміновані моделі

Фізика – це наука, в якій математичне моделювання є дуже важливим методом дослідження. Історично так склалося, що моделювання починалося саме з побудови моделей фізичних процесів.

Поряд з традиційним розподілом фізики на експериментальну та теоретичну, зараз виділяється третій фундаментальний розділ – обчислювальна фізика. При максимальному проникненні в фізику математичних методів відбувається фактичне зрощування цих наук (є така відома дисципліна – рівняння математичної фізики). Реальні можливості вирішення математичних задач традиційними аналітичними методами дуже обмежені.

По-перше, дійсні фізичні процеси тільки в першому, дуже грубому наближенні можна описати простими лінійними рівняннями, реально ж, як правило, доводиться мати справу з нелінійними рівняннями та з диференціальними рівняннями із звичайними або частинними похідними.

По-друге, при моделюванні фізичних процесів необхідно враховувати спільний рух або вплив один на одного багатьох факторів, що призводить до необхідності вирішення систем рівнянь високого порядку.

Такі задачі ефективніше вирішуються не аналітичними, а числовими методами, тобто використовується апарат не чистої математики, скажімо алгебри, а апарат обчислювальної математики, який бурхливо розвивається, що пояснюється постійно зростаючими можливостями ЕОМ як в плані швидкодії, так і об'єму оперативної пам'яті, доступної для дослідника.

При побудові моделей використовуються два принципи: дедукції (від загального до конкретного) та індукції (від окремого до загального). Залежно від способу побудови розрізняють дедуктивні або детерміновані, або індуктивні (недетерміновані) моделі. Побудова детермінованих моделей заснована на використанні фундаментальних законів – саме такі моделі будуються при моделюванні фізичних процесів, якщо ж фундаментальні закони, що керують модельованим явищем невідомі, як це часто буває при моделюванні в біології, соціології, економіці – то використовуються гіпотези.

Розглянемо дві детерміновані моделі, моделі двох простих фізичних явищ.

У розв'язанні цих фізичних задач фундаментальну роль відіграє другий закон Ньютона. Згідно з цим законом прискорення, з яким рухається тіло, прямо пропорційно діючій на нього силі (якщо сил кілька – то рівнодіючій, тобто векторній сумі сил) і обернено пропорційно його масі: $\vec{a} = \vec{F}/m$.

Щоб досліджувати ситуації, коли сила або маса не є величинами сталими, необхідно записати цей закон в більш загальній математичній формі.

Припустимо, що сила або маса (або і те, і інше) непостійні та певним чином залежать від часу, швидкості руху або переміщення: $\vec{F}(t, v, s)$ і $m(t, v, s)$. Достатньо наявності хоча б однієї із зазначених залежностей, щоб прискорення було величиною змінною. В цьому випадку наведена вище формула визначає його значення в той момент часу, якому відповідають сила і маса. Реальний інтерес представляє залежність переміщення $\vec{s}(t)$ і $\vec{v}(t)$ швидкості за часом. Оскільки прискорення є збільшенням швидкості, а швидкість – приріст переміщення, то

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}}{dt},$$

а безпосередньо другий закон Ньютона приймає вигляд

$$\frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t, \vec{v}, \vec{s})}{m(t, \vec{v}, \vec{s})}$$

або інакше

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}(t), \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(t, \vec{v}, \vec{s})}{m(t, \vec{v}, \vec{s})}.$$

Виконавши дискретизацію за часом, можна отримати наступне:

$$\vec{v}(t_1) \approx \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t_0) \cdot \Delta t = \vec{v}(t_0) + \frac{\vec{F}_0}{m_0} \cdot \Delta t,$$

$$\vec{s}(t_1) \approx \vec{s}(t_0) + \vec{v}(t_0) \cdot \Delta t.$$

Індекс "0" означає величини в початковий момент часу.

13.3. Моделювання вільного падіння тіла

Математична модель вільного падіння тіла – рівняння другого закону Ньютона з урахуванням двох сил, що діють на тіло – сили тяжіння і сили опору середовища. Рух тіла є одновимірним. Проекціюючи силу, швидкість і переміщення на вісь, направлену вертикально вниз, отримуємо систему звичайних ДУ:

$$\begin{cases} dh/dt = v; \\ dv/dt = (mg - k_1 v - k_2 v^2)/m. \end{cases}$$

Вхідні параметри моделі:

- початкова висота тіла;
- початкова швидкість тіла;
- величини, що визначають коефіцієнти опору середовища k_1 і k_2 .

Розв'язати цю систему ДУ можна одним із відомих числових методів, у тому числі методом Рунне-Кута, застосованого вище для розрахунку нестационарного поля температур в металевій штабі. У зв'язку із простою задачі для знаходження бажаних величин застосуємо метод Ейлера.

Приймемо, що тіло масою m падає з висоти h з початковою швидкістю V_0 .

На тіло діє сила тяжіння $F = mg$, спрямована вниз і сила опору середовища $F_c = k_1 v + k_2 v^2$. Падіння тіла підпорядковується дії другого закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{F}_c$$

в одновимірній системі координат з віссю x , спрямованій вниз, і з початком в точці початкового падіння тіла.

Сила опору середовища $F_c = k_1 v + k_2 v^2$ залежить від швидкості тіла і його перерізу, k_1 – коефіцієнт Стокса, який залежить від в'язкості середовища, більша величина; k_2 – коефіцієнт лобового опору, залежить від площі перерізу тіла, маленька величина.

Якщо швидкість не дуже велика, домінує лінійна складова, квадратичною складовою можна нехтувати, при більш високих швидкостях навпаки, різко зростає квадратична складова, а лінійною можна нехтувати.

Під моделюванням руху тіла розуміється, що в кожен момент часу t_i треба знати положення тіла в просторі або пройдений їм шлях $x = x(t)$, його швидкість $v = v(t)$ і прискорення $a = a(t)$, які є функціями часу.

У початковий момент часу приймають $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a_0 = g$. При побудові розрахункової моделі припускають, що протягом малого проміжку часу $\Delta t = \tau$ рух рівноприскорений, тоді можна використовувати відомі закони прямолінійного рівноприскореного руху:

$$x = x_0 + v_0 \tau + a \tau^2 / 2;$$

$$v = v_0 + a \tau;$$

$$a = \text{const.}$$

При $t_1 = t_0 + \tau$ будемо мати

$$x_1 = x_0 + v_0 \tau + a_0 \tau^2 / 2;$$

$$v_1 = v_0 + a_0 \tau;$$

$$a_1 = (mg - k_1 v_1 - k_2 v_1^2) / 2.$$

Далі застосовують ітераційний процес. Для i -го моменту часу можна записати:

$$t_i = t_0 + i \tau;$$

$$x_i = x_{i-1} + v_{i-1} \tau + a_{i-1} \tau^2 / 2;$$

$$v_i = v_{i-1} + a_{i-1} \tau;$$

$$a_i = (mg - k_1 v_i - k_2 v_i^2) / 2.$$

Процес розрахунків завершується, коли x_i зрівняється з h , де h – висота, з якої падає тіло.

Залишилося за заданими вихідними даними і розглянутим алгоритмом виконати відповідні розрахунки.

13.4. Модель руху тіла, кинутого під кутом до горизонту

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, описується ДУ, які виходять з другого закону Ньютона проєкціюванням швидкості і переміщення на горизонтальну і вертикальну вісі координат:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k_1 + k_2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{m}v_x, \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{k_1 + k_2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{m}v_y, \\ dx/dt = v_x, \\ dy/dt = v_y. \end{cases}$$

Вхідні параметри моделі:

- m – маса тіла;
- v – величина початкової швидкості;
- α – кут початкового нахилу вектора швидкості до горизонту;
- величини, що визначають коефіцієнти опору середовища k_1 і k_2 .

Тіло кидають з висоти h під кутом α до горизонту.

Модель руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, будується аналогічно моделі, розглянутій вище, тільки вектори швидкості і прискорення розкладаються по двох осях і враховуються складові векторів швидкості v і прискорення a по осях x і y . Сила опору буде направлена протилежно руху, сила тяжіння – вниз.

$$\text{Вісь } x: ma_x = -k_1v_x - k_2v_x^2;$$

$$\text{Вісь } y: ma_y = -(mg - k_1v_y - k_2v_y^2)$$

Початкові умови в цій моделі: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $a_{0x} = 0$, $a_{0y} = -g$.

Розрахункові формули мають вигляд:

$$x = x + v_x \tau + a_x \tau^2 / 2;$$

$$y = y + v_y \tau + a_y \tau^2 / 2;$$

$$v_x = v_x + a_x \tau;$$

$$v_y = v_y + a_y \tau;$$

$$a_x = -(k_1v_x - k_2v_x^2)/m;$$

$$a_y = (mg - k_1v_y - k_2v_y^2)/m.$$

Умова закінчення процесу $y = 0$, тобто тіло, кинуте під кутом α , має досягти земної поверхні.

Як і у вище розглянутому прикладі, формується алгоритм розрахунку для кожного i -го моменту часу. За цим алгоритмом можна розв'язувати різні прикладні задачі.

13.5. Рівняння математичної фізики

Для більш складних фізичних явищ, таких як процеси коливання, хвильові процеси, процеси теплопровідності, газодинаміки не завжди вдається побудувати математичні моделі простого типу. Ці процеси описуються ДУ другого порядку, рівняннями в частинних похідних, які називаються рівняннями математичної фізики.

Відомо, що ДУ – це рівняння, до яких входять шукана функція зі своїми n похідними

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Найвищий порядок похідної, що входить до рівняння, визначає порядок ДУ. Якщо шукана функція є функцією однієї змінної, то ДУ називається рівнянням зі звичайними похідними, якщо шукана функція є функцією кількох змінних, то ДУ називається рівнянням в частинних похідних.

У разі двох незалежних змінних x і y рівняння математичної фізики, які, як правило, є рівняннями першого і другого порядків, лінійними щодо похідних, які до них входять, можна записати у вигляді

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (13.1)$$

де A, B, C, D, E, F, G – функції тільки від незалежних змінних x і y . Залежною змінною є u , індекси при u означають частинні похідні, наприклад

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Записане ДУ має супроводжувати деяка додаткова інформація, яка дозволяє отримати визначене рішення. Але ця інформація, оскільки існують дві незалежні змінні, має задаватися вздовж якоїсь кривої, розташованої в площині xy . Ця інформація, краще сказати умови, має бути накладена на функцію u , на її похідну або на функцію і на її похідну сумісно. В деяких випадках крива, вздовж якої задається умова, може бути замкнутою, в інших випадках незамкнутою; це залежить від типу рівняння.

Часто в наведеному вище рівнянні за одну із незалежних змінних приймають час t .

Розрізняють типи рівнянь в залежності від співвідношення між коефіцієнтами.

1) При $A = B = C = F = 0, D \neq 0, E \neq 0$ отримуємо рівняння першого порядку. Для прикладу замість змінної y візьмемо час t і отримаємо рівняння вигляду

$$u_t + Pu_x = G,$$

яке називається рівнянням переносу. Такі рівняння описують процеси перенесення частинок в різних середовищах, поширення збурень і т. д. Шукана функція $u = u(t, x)$ залежить від часу і від просторової змінної, коефіцієнт P характеризує швидкість перенесення.

2) Якщо хоча б один з коефіцієнтів A, B, C буде відмінний від нуля, то рівняння матиме другий порядок. Ці рівняння підрозділяються на три типи:

1. Рівняння називається *еліптичним*, якщо $B^2 - 4AC < 0$.
2. Рівняння називається *параболічним*, якщо $B^2 - 4AC = 0$.
3. Рівняння називається *гіперболічним*, якщо $B^2 - 4AC > 0$.

А) *Гіперболічне рівняння*

$$u_{tt} = A^2 u_{xx},$$

називається хвильовим, воно описує різні види коливань. Якщо до рівняння входить одна просторова змінна, то воно описує поздовжні коливання стержня, а також поперечні коливання струни. В цьому випадку $A^2 = T/\rho$, де T – це натяг струни, а ρ – її густина.

Двовимірне хвильове рівняння використовується для опису коливань тонкої пластини (мембрани)

$$u_{tt} = A^2 (u_{xx} + u_{yy}).$$

Тривимірне хвильове рівняння

$$u_{tt} = A^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

описує поширення хвиль в просторі (наприклад звукові хвилі в різних середовищах, пружні хвилі в суцільному середовищі тощо).

Б) *Параболічне рівняння*

$$u_t = Au_{xx}$$

називається рівнянням теплопровідності і дифузії. За допомогою нього описуються різні процеси, пов'язані з передачею чогось: передачею тепла, передачею імпульсу, передачею енергії.

В) *Еліптичне рівняння:*

рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;$$

рівняння Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = G(x, y).$$

До рівнянь подібного типу призводять стаціонарні, які не залежать від часу, фізичні задачі (дослідження потенційних течій рідини, визначення форми навантаженої мембрани і т. д.). Зазначимо, що рівняння Лапласа є окремим випадком рівняння Пуассона.

Для цих рівнянь в залежності від граничних умов розглядають задачу Діріхле, коли на границі, що обмежує розрахункову область, задані значення функцій, задачу Неймана, коли на цій границі, відомі похідні, і так звану змішану задачу, коли на границі задані значення і функцій, і похідних.

На завершення треба відзначити, що рівняння (13.1) може належати до кількох типів в залежності від значень коефіцієнтів. Так, рівняння

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

є еліптичним при $y > 0$, параболічним при $y = 0$ і гіперболічним при $y < 0$. Оскільки на практиці часто зустрічаються рівняння з постійними коефіцієнтами, то далі розглянемо саме рівняння такого типу.

13.6. Практичний приклад – розподіл температури в трубі квадратного перерізу

Розглянемо трубу квадратного перерізу, в якій є поздовжня порожнина також квадратного перерізу (рис. 13.1). По цій трубі тече гаряча рідина. Труба навпіл занурена в льодову ванну, так що температура нижньої

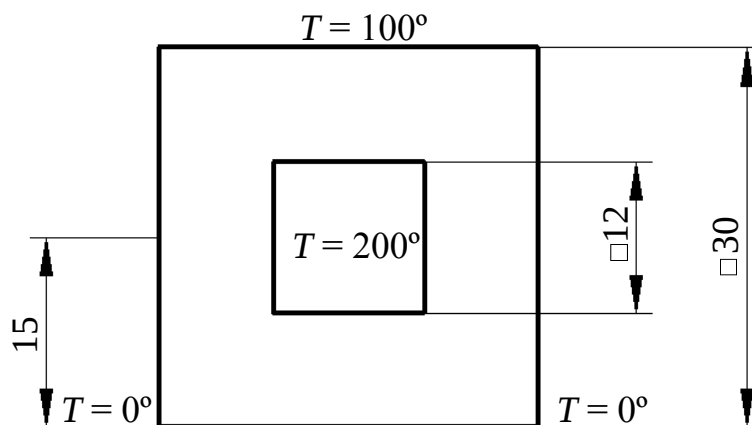


Рисунок 13.1 – Переріз каналу

половини поверхні труби дорівнює 0° C . Верхня площина труби знаходиться при сталій температурі 100° C . Передбачається, що температура поверхні труби лінійно змінюється від 0° C до 100° C на ділянці між льодовою ванною та верхньою площиною труби. Рідина всередині має темпера-

туру 200° С. Зовнішній розмір труби дорівнює 30 мм, внутрішній розмір дорівнює 12 мм.

Розподіл температури в тілі труби задовольняє рівнянню в частинних похідних

$$u_{xx} + u_{yy} = au_t,$$

де стала a враховує теплоємність, теплопровідність і густину матеріалу труби. В цій задачі приймається, що рідина тече протягом достатньо довгого часу для того, щоб всі перехідні процеси встигли закінчитися, тобто тепловий режим набув стаціонарного стану. За цих обставин $u_t = 0$ і рівняння розподілу температури набуває наступного вигляду

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Цьому рівнянню задовольняє розподіл температури всередині труби, а розподіл температур на границях труби задано граничними умовами. Таким чином, задача визначення розподілу в трубі є задачею Діріхле для рівняння Лапласа.

Нагадаємо, що розглядається двовимірною задачею, тобто не враховується зниження температури рідини вздовж осі труби. Інакше кажучи, розподіл температури розраховується тільки для одного якогось перерізу труби.

Зробимо по зовнішньому розміру труби в напрямках x і y розбиття на 60 інтервалів. Отже, крок по цих напрямках дорівнюватиме 0,5 мм. Тоді граничні умови запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= 0; & i &= 0,1, \dots, 60; \\ u_{0,j} = u_{60,j} &= \begin{cases} 0; & j = 0,1, \dots, 30, \\ \frac{100}{30}(j - 30); & j = 31,32, \dots, 60; \end{cases} \\ u_{i,60} &= 100; & i &= 1,2, \dots, 60; \\ u_{i,42} = u_{i,18} &= 200; & i &= 18,19, \dots, 41,42; \\ u_{42,j} = u_{18,j} &= 200; & j &= 18,19, \dots, 41,42. \end{aligned}$$

Різницеве рівняння має вигляд:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1})$$

при

$$i = 1, 2, \dots, 59; \quad j = 1, 2, \dots, 17,$$

і

$$i = 1, 2, \dots, 17; 43, \dots, 59; \quad j = 18, 19, \dots, 42,$$

і

$$i = 1, 2, \dots, 59; \quad j = 43, 44, \dots, 59.$$

Розв'яжемо ці рівняння прискореним методом Лібмана і знайдемо температуру в усіх внутрішніх точках труби.

Формула прискореного методу Лібмана має вигляд:

$$u_{i,j} = u_{i,j} + \omega \left[\frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}) - u_{i,j} \right] = \\ = \frac{\omega}{4} (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}) + (1 - \omega) u_{i,j},$$

де ω – прискорювальний множник.

Результати розрахунків наведені на рис. 13.2. Цей рисунок у зв'язку із значним обсягом інформації умовно поділений на три окремих зображення. Графіки, показані зліва відображають характер розподілу відносної температури в зоні поперечного перерізу труби, розташованому від нижньої його горизонтальної границі до також нижньої границі порожнини. Як свідчать ці графіки, по мірі наближення до порожнини температура поступово зростає і досягає рівня, що відповідає температурі рідини в порожнині. На це вказує горизонтальна ділянка графіка.

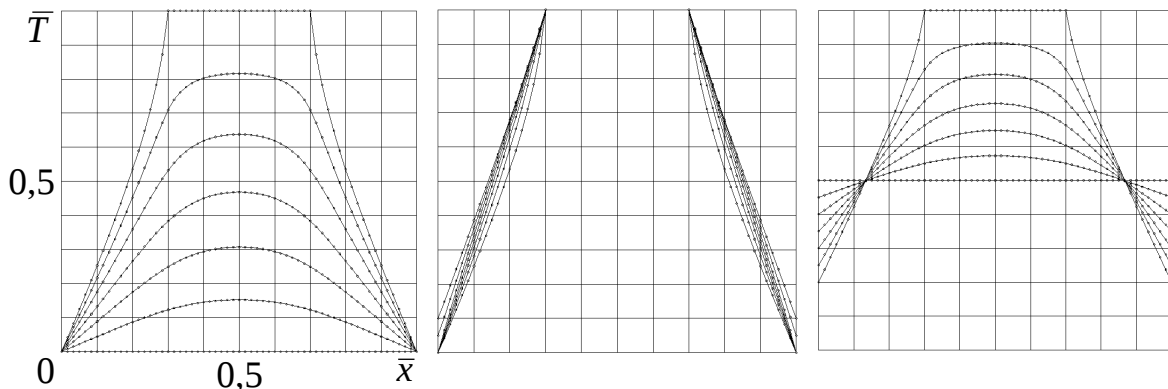


Рисунок 13.2 – Графіки розподілу відносної температури в каналі

Середній рисунок демонструє розподіл температури в зоні розташування порожнини. Усі графіки свідчать про стрімке зростання температури від зовнішніх вертикальних границь труби до внутрішніх вертикальних границь порожнини, що повністю відповідає поставленим при формулюванні задачі граничним умовам. І, нарешті, графіки на правому рисунку показують розподіл температури в зоні труби, розташованій над порожниною. Тут ситуація дещо протилежна тому, яку демонструє ліве зображення рис. 13.2. У чому протилежність? По мірі зростання висоти, в якій розраховується температура її рівень поступово знижується і на верхній горизонтальній границі труби графік вироджується в пряму, на якій згідно з граничними умовами температура є сталою.

Зазначимо, що відносні значення температури та горизонтальної координати отримані діленням температури на 200°C , а горизонтальної координати – на довжину зовнішньої сторони квадрату труби.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Назвіть види фізичних процесів.
 2. Що розуміється під детермінованим фізичним процесом?
 3. Сформулюйте другий закон Ньютона.
 4. Які сили діють на тіло, що вільно падає?
 5. Що розуміють під рівняннями математичної фізики?
 6. Назвіть типи ДУ другого порядку.
 7. У чому різниця між задачами Діріхле і Неймана?
 8. З якою метою застосовують граничні умови?
-

14. ОСНОВИ АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

14.1. Поняття проектування та його стадії

Проектування – це процес моделювання інженерної конструкції або технологічного процесу, який дозволяє провести якусь технічну ідею до її інженерної моделі. Результатом цього процесу є проект, який представляє собою, як правило, графічну частину (креслення, схеми) і пояснювальну записку (опис призначення виробу, функції, технічні характеристики і т. д.). Залежно від характеру цільового об'єкта проектування може бути або чисто дескриптивним моделюванням (в разі конструкції), або дескриптивно-алгоритмічним (якщо об'єктом проектування є процес).

Алгоритм проектування – сукупність вказівок, необхідних для виконання проектування. Алгоритм проектування може бути загальним (для певного класу об'єктів) і спеціальним (для одного об'єкта). Під виконанням проектування розуміється результат проектування.

Результатом проектування є проектне рішення (сукупність проектних рішень), яке задовольняє заданим вимогам, необхідним для створення об'єкта проектування. До заданих вимог включають вимоги до форми представлення проектного рішення – проміжного або кінцевого опису об'єкта проектування, необхідного і достатнього для розгляду та визначення подальшого продовження або завершення проектування.

Мета процесу проектування полягає, перш за все, в тому, щоб на основі вихідної інформації, одержуваної в процесі проектування, розробити технічну документацію для виготовлення об'єкта проектування. Проектування включає в себе розробку технічного завдання (ТЗ), що відображає потреби в проектуванні, та реалізацію ТЗ у вигляді проектної документації.

Проектування, по суті, є процесом управління зі зворотним зв'язком. ТЗ формує вимоги, які порівнюються з результатами проектування, і якщо вони не збігаються, цикл проектування повторюється знову до тих пір, поки відхилення від заданих технічних вимог не виявиться в допустимих межах.

Згідно з прийнятою практикою виділяють наступні стадії проектування:

1. *Передпроектне дослідження*. На цій стадії виконується аналіз потреб зовнішнього середовища в новому виробі, ведеться пошук можливого аналога, тобто може бути зроблений висновок про необхідність модернізації існуючого виробу. Результатом є документ, в якому відображається інформація про наявність і характеристики виробу. Передпроектне дослідження виконує замовник.

2. *Технічне завдання*. ТЗ містить основні характеристики виробу: габарити, вагу, енергоспоживання тощо. На цій стадії проводиться уточнення структури, функцій, режимів роботи майбутнього виробу, описуються вимоги до дизайну, економічних показників. У процесі роботи над ТЗ виконавець може зробити певні уточнення. Ці уточнення можуть бути виконані спільно замовником і виконавцем до повного узгодження та досягнення ясності поставлених задач проектування. Взагалі ТЗ також повинен розробляти замовник на основі власних вихідних вимог.

3. *Ескізний проект (ЕП)*. Виконується на основі ТЗ. На цій стадії моделюються окремі принципові вузли майбутнього виробу, відпрацьовуються математичні моделі його поведінки. Аналізується і доводиться реальна можливість створення майбутнього виробу. Проводяться різноманітні випробування, часто будуються фізичні моделі. Результатом стадії ЕП є уточнення техніко-економічних характеристик майбутнього виробу, принципового складу вузлів, деталізовані та опрацьовані найважливіші складові частини, перевірені схеми, креслення, можливо зроблені макети. В окремих випадках процес виконання ЕП може бути закінченим, перерваним за безперспективністю (негативний результат) або продовженим.

4. *Технічний проект (ТП)*. Тут опрацьовуються повністю всі компоненти виробу: дизайн корпусу, розробляються всі частини проекту. ТП містить результати повної параметричної оптимізації, всі креслення, схеми вузлів, повний опис функціонування виробу, опис режимів роботи. Результат, як правило, дослідний зразок виробу. Приймається рішення замовником про можливість передачі в серійне виробництво. При позитивному рішенні замовника починається розробка робочого проекту.

5. *Робочий проект (РП)* – повний комплекс документів для промислового випуску (масовий випуск виробу).

Стадії розробки програм і програмної документації для обчислювальних машин, комплексів і систем незалежно від їх призначення та області застосування встановлює ГОСТ 19.102-77.

За цим стандартом ТЗ передбачає три етапи.

Перший етап – обґрунтування необхідності розробки програми. На цьому етапі виконуються наступні роботи:

- постановка задачі;
- збір вихідних матеріалів;
- вибір і обґрунтування критеріїв ефективності та якості розроблюваної програми;
- обґрунтування необхідності проведення науково-дослідних робіт.

Другий етап – науково-дослідницькі роботи. Перелік робіт:

- визначення структури вхідних та вихідних даних;
- попередній вибір методів вирішення задач;
- обґрунтування доцільності застосування раніше розроблених програм;
- визначення вимог до технічних засобів;
- обґрунтування принципової можливості рішення поставленої задачі;
- визначення вимог до програми;
- виконання техніко-економічного обґрунтування розробки програми.

Третій етап – розробка і затвердження технічного завдання. Перелік робіт цього етапу:

- визначення структури вхідних і вихідних даних;
- попередній вибір методів вирішення задач;
- обґрунтування доцільності застосування раніше розроблених програм;
- визначення вимог до технічних засобів;
- обґрунтування принципової можливості вирішення поставленої задачі;
- визначення вимог до програми;
- розробка техніко-економічного обґрунтування розробки програми;
- визначення стадій, етапів і термінів розробки програми і документації на неї;
- вибір мови програмування;
- визначення необхідності проведення науково-дослідних робіт на наступних стадіях;
- узгодження і затвердження технічного завдання.

Ескізний проект. На цій стадії виконуються наступні роботи:

- попередня розробка структури вхідних та вихідних даних;

- уточнення методів рішення задачі;
- розробка загального опису алгоритму розв'язання задачі;
- розробка техніко-економічного обґрунтування;
- розробка пояснювальної записки.

Технічний проект. На цій стадії передбачені наступні роботи:

- уточнення структури вхідних та вихідних даних;
- розробка алгоритму розв'язання задачі;
- визначення форми представлення вхідних і вихідних даних;
- визначення семантики і синтаксису мови;
- розробка структури програми;
- остаточне визначення конфігурації технічних засобів;
- розробка плану заходів з розробки та впровадження програм.

Примітка. Ескізний і технічний проекти завершуються узгодженням і затвердженням.

Робочий проект. На цій стадії передбачені наступні стадії: розробка програми, розробка програмної документації та випробування програми з наступним переліком робіт:

- програмування та налагодження програми;
- виготовлення програми-оригіналу;
- розробка програмних документів згідно з ГОСТ 19.101-77;
- розробка, узгодження і затвердження порядку та методики випробувань;
- проведення попередніх, державних, міждержавних, міжвідомчих, приймально-здавальних та інших видів випробувань;
- коригування програми і програмної документації за результатами випробувань.

Впровадження. Це останній етап розробки програмної продукції, який передбачає:

- підготовку і передачу програми та програмної документації для супроводу і (або) виготовлення;
- оформлення та затвердження акту про передачу програми на супровід і (або) виготовлення;
- передачу програми в фонд алгоритмів і програм.

Дозволяється виключати другу стадію розробки, а в техніко-економічно обґрунтованих випадках – другу і третю стадії. Необхідність проведення цих стадій вказується в ТЗ.

Можна об'єднувати, виключати етапи робіт і (або) їх зміст, а також вводити інші етапи робіт за погодженням із замовником.

14.2. Система автоматизованого проектування

Система автоматизованого проектування (САПР) – автоматизована система, яка реалізує інформаційну технологію виконання функцій проектування, є організаційно-технічною системою, призначеною для автоматизації процесу проектування, що складається з персоналу та комплексу технічних, програмних та інших засобів автоматизації його діяльності. Також для позначення подібних систем широко використовується аббревіатура САПР (система автоматизації проектних робіт). Така розшифровка найбільш точно відповідає аббревіатурі. Для перекладу САПР на англійську мову часто використовується аббревіатура CAD (англ. Computer-aided design), що має на увазі використання комп'ютерних технологій в проектуванні. Однак в ГОСТ 15971-90 це словосполучення наводиться як стандартизований англomовний еквівалент терміна "автоматизоване проектування". Поняття CAD не є повним еквівалентом САПР, як організаційно-технічної системи. Термін САПР на англійську мову може також перекладатися як CAD system, automated design system, CAE system.

Згідно з ГОСТ 23501.101-87 "Системы автоматизированного проектирования. Основные положения" під САПР розуміється організаційно-технічна система, що входить в структуру проектної організації і здійснює проектування за допомогою комплексу засобів автоматизованого проектування (КСАП).

Спочатку термін "автоматизація проектування" застосовувався у всіх тих випадках, коли ЕОМ використовували для розрахунків, пов'язаних з проектуванням. Але зараз цей термін набув більш специфічний зміст, що відноситься до інтерактивних систем, в яких проектувальник і ЕОМ при рішенні задач проектування взаємодіють один з одним. За допомогою автоматизації результати проектування об'єктів, в яких використовувалися нові ідеї та технічні засоби, можуть швидко передаватися проектувальнику в зручній для нього формі. Завдяки цьому за короткий проміжок часу можна глибоко проникнути в суть проблем, пов'язаних з проектуванням. Автоматизація проектування також дозволяє створювати необхідну документацію і перевіряти отримані результати. Таким чином, сьогодні мова йде про

створення, так званих, інтелектуальних людино-машинних систем, в рамках яких можливе виконання всього циклу проектних робіт, починаючи від наукових досліджень і закінчуючи виготовленням конструкторської та технологічної документації, а в ряді випадків – макетів або дослідних зразків.

Розрізняють такі системи проектування: неавтоматизоване проектування і автоматизоване проектування.

Процес проектування, здійснюваний людиною вручну (без використання ЕОМ), називають неавтоматизованим проектуванням.

Проектування, при якому всі проектні рішення або їх частину отримують шляхом взаємодії людини з ЕОМ, називають автоматизованим проектуванням.

Необхідно розрізнити поняття автоматичного і автоматизованого проектування. САПР не відносяться до системи автоматичного проектування. Поняття "автоматичний" передбачає самостійну роботу системи без участі людини. В САПР частину функцій виконує людина, а автоматичними є тільки окремі проектні операції та процедури. Слово "автоматизований", в порівнянні зі словом "автоматичний", підкреслює участь людини в процесі. Автоматичне проектування можливо лише в окремих випадках для порівняно нескладних об'єктів.

У ряді зарубіжних джерел встановлюється певна підпорядкованість понять CAD, CAE, CAM. Термін CAE (computer-aided engineering) визначається як найбільш загальне поняття, яке включає будь-яке використання комп'ютерних технологій в інженерній діяльності, включаючи CAD і CAM (computer-aided manufacturing). Для позначень всього спектра різних технологій автоматизації за допомогою комп'ютера, в тому числі коштів САПР, використовується термін CAx (англ. Computer-aided technologies).

14.3. Цілі, задачі та принципи створення САПР

В рамках життєвого циклу промислових виробів САПР вирішує задачі автоматизації робіт на стадіях проектування та підготовки виробництва. Основна мета створення САПР – підвищення ефективності праці інженерів, включаючи:

- скорочення трудомісткості проектування і планування;
- скорочення термінів проектування;

- скорочення собівартості проектування і виготовлення, зменшення витрат на експлуатацію;
- підвищення якості і техніко-економічного рівня результатів проектування;
- скорочення витрат на натурне моделювання та випробування.

Досягнення цих цілей створення САПР реалізується шляхом розв'язання задач:

- автоматизації оформлення документації (текстової і графічної);
- інформаційної підтримки та автоматизації процесу прийняття рішень;
- використання технологій паралельного проектування;
- уніфікації проектних рішень і процесів проектування;
- повторного використання проектних рішень, даних і напрацювань;
- стратегічного проектування;
- заміни натурних випробувань і макетування математичним моделюванням;
- підвищення якості управління проектуванням;
- застосування методів варіантного проектування та оптимізації.

При створенні САПР та їх складових частин керуються такими основними принципами:

- системної єдності – забезпечення цілісності системи і системної зв'язності проектування окремих елементів і всього об'єкта проектування в цілому (ієрархічність проектування);
- сумісності – забезпечення спільного функціонування складових частин САПР і зберігання відкритості системи в цілому;
- типізації – це орієнтація на переважне створення і використання типових і уніфікованих елементів САПР. Типізації підлягають елементи, що мають перспективу багаторазового застосування. Типові та уніфіковані елементи періодично проходять експертизу на відповідність сучасним вимогам САПР і модифікуються в міру необхідності;
- розвитку – забезпечення поповнення, вдосконалення та оновлення складових частин САПР, а також взаємодія і розширення взаємозв'язку з автоматизованими системами різного рівня і функціонального призначення.

Створення САПР з урахуванням принципу типізації повинне передбачати:

- розробку базового варіанту КСАП і (або) його компонентів;

– створення модифікації КСАП і (або) його компонентів на основі базового варіанту.

Роботи з розвитку САПР, модернізації складових частин САПР виконують за технічним завданням.

14.4. Структура САПР

Складовими структурними частинами САПР, жорстко пов'язаними з організаційною структурою проектної організації, є підсистеми, в яких за допомогою спеціалізованих комплексів засобів вирішується функціонально закінчена послідовність задач САПР. Кожна підсистема – це виділена за певними ознаками частина САПР, що забезпечує виконання деяких функціонально-закінчених послідовностей проектних завдань з отриманням відповідних проектних рішень і проектних документів.

За призначенням підсистеми поділяють на *проектувальні* та *обслуговуючі*.

Проектувальні підсистеми мають об'єктну орієнтацію і реалізують певний етап (стадію) проектування або групу безпосередньо пов'язаних проектних завдань. Залежно від ставлення до об'єкта проектування вони діляться на:

- об'єктні, які виконують проектні процедури та операції, безпосередньо пов'язані з конкретним типом об'єктів проектування;
- інваріантні, які виконують уніфіковані проектні процедури та операції, що мають сенс для багатьох типів об'єктів проектування.

Приклади проектувальних підсистем:

- підсистема ескізного проектування;
- підсистема проектування корпусних деталей;
- підсистема проектування технологічних процесів механічної обробки.

Прикладами проектувальних підсистем також можуть служити підсистеми геометричного тривимірного моделювання механічних об'єктів, схемотехнічного аналізу, трасування з'єднань в друкованих платах тощо.

Обслуговуючі підсистеми – об'єктно-незалежні підсистеми, що реалізують функції, загальні для підсистем або САПР в цілому: забезпечують функціонування проектувальних підсистем, оформлення, передачу і виведення даних, супровід програмного забезпечення і т. п. Їх сукупність називають

вають системним середовищем (або оболонкою) САПР. Обслуговуючі підсистеми мають загальносистемне застосування.

Типовими обслуговуючими підсистемами є:

- автоматизований банк даних;
- підсистема документування;
- підсистеми управління проектними даними;
- навчальні підсистеми для освоєння користувачами технологій, реалізованих в САПР
- підсистеми графічного введення-виведення;
- система управління базами даних (СУБД).

Кожна підсистема, у свою чергу, складається з компонентів, які забезпечують функціонування підсистеми. Компонент виконує певну функцію в підсистемі, він є найменшим (неподільним) самостійно розробленим або покупним елементом САПР (програма, файл, модель транзистора, графічний дисплей, інструкція і т. п.).

Системна єдність САПР забезпечується наявністю комплексу взаємопов'язаних моделей, що визначають об'єкт проектування в цілому, а також комплексом системних інтерфейсів, що забезпечують зазначений взаємозв'язок.

Системна єдність всередині проектувальних підсистем забезпечується наявністю єдиної інформаційної моделі тієї частини об'єкта, проектне рішення по якій повинно бути отримано в даній підсистемі.

Формування та використання моделей об'єкта проектування в прикладних задачах здійснюється КСАП системи або підсистеми.

Структурними частинами КСАП у процесі його функціонування є програмно-методичні (ПМК) і програмно-технічні (ПТК) комплекси (далі – комплекси засобів), а також компоненти організаційного забезпечення.

Комплекси засобів можуть об'єднувати свої обчислювальні й інформаційні ресурси, утворюючи локальні обчислювальні мережі підсистем або систем у цілому.

Структурними частинами комплексів засобів є компоненти наступних видів забезпечення: програмного, інформаційного, методичного, математичного, лінгвістичного і технічного.

Програмне забезпечення (ПЗ). Підрозділяється на загальносистемне і прикладне:

- Прикладне ПЗ реалізує математичне забезпечення для безпосеред-

нього виконання проектних процедур. Включає пакети прикладних програм, призначені для обслуговування певних етапів проектування або рішення груп однотипних задач всередині різних етапів (модуль проектування трубопроводів, пакет схемотехнічного моделювання, геометричний вирішувач САПР).

- Загальносистемне ПЗ призначено для управління компонентами технічного забезпечення та забезпечення функціонування прикладних програм. Прикладом компонента загальносистемного ПЗ є операційна система.

Інформаційне забезпечення (ІЗ) – сукупність відомостей, необхідних для виконання проектування. Складається з опису стандартних проектних процедур, типових проектних рішень, комплектуючих виробів та їх моделей, правил і норм проектування. Основна частина ІЗ САПР – бази даних.

Методичне забезпечення – опис технології функціонування САПР, методів вибору і застосування користувачами технологічних прийомів для одержання конкретних результатів. Включає в себе теорію процесів, які відбуваються в об'єктах, що проектуються, методи аналізу, синтезу систем та їх складових частин, різні методики проектування. Іноді до методичного забезпечення відносять також математичне та лінгвістичне забезпечення.

Математичне забезпечення (МЗ) – це математичні методи, моделі та алгоритми, які використовуються для вирішення задач автоматизованого проектування. За призначенням і способам реалізації ділять на дві частини:

- математичні методи і побудовані на них математичні моделі;
- формалізований опис технології автоматизованого проектування.

Лінгвістичне забезпечення (ЛЗ) – сукупність мов, що використовуються в САПР для представлення інформації про об'єкти, що проектуються, процеси і засоби проектування, а також для здійснення діалогу проєктувальник – ЕОМ і обміну даними між технічними засобами САПР. Включає терміни, визначення, правила формалізації природної мови, методи стиснення і розгортання.

Технічне забезпечення (ТЗ) – сукупність пов'язаних і взаємодіючих технічних засобів (ЕОМ, периферійні пристрої, мережеве обладнання, лінії зв'язку, вимірювальні засоби).

Організаційне забезпечення – сукупність документів, які визначають склад проектної організації, зв'язок між підрозділами, організаційну структуру об'єкта і системи автоматизації, діяльність в умовах функціонування системи, форму представлення результатів проектування. До організацій-

ного забезпечення входять штатні розписи, посадові інструкції, правила експлуатації, накази, положення і т. п.

В САПР виділяють також ергономічне і правове забезпечення.

Ергономічне забезпечення об'єднує взаємопов'язані вимоги, спрямовані на узгодження психологічних, психофізіологічних, антропометричних характеристик і можливостей людини з технічними характеристиками засобів автоматизації і параметрами робочого середовища на робочому місці.

Правове забезпечення складається з правових норм, що регламентують правовідносини при функціонуванні САПР, і юридичний статус результатів її функціонування.

14.5. Класифікація САПР

Усі САПР можна умовно розділити на три категорії (рис. 14.1):

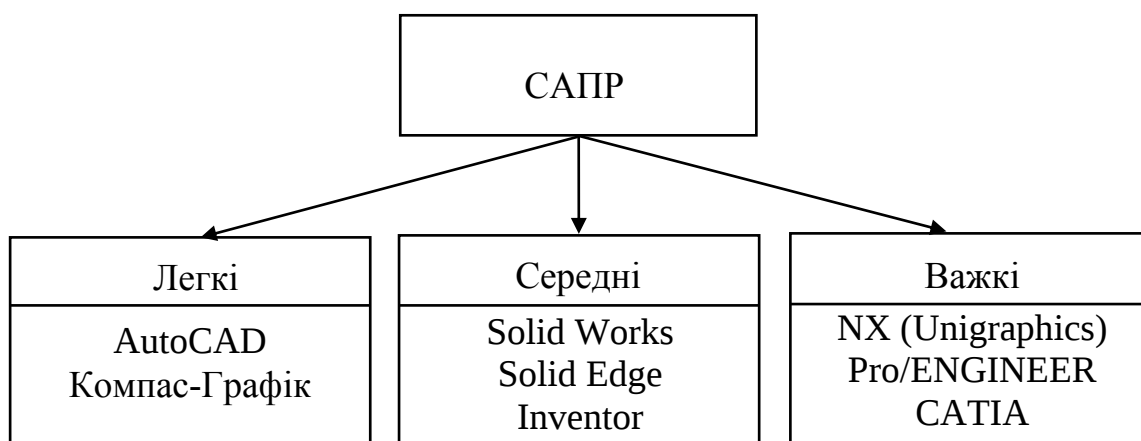


Рисунок 14.1 – Класифікація САПР

1. Легкі САПР застосовують, в основному, замість кульмана. Можна сказати, що 2D креслення на комп'ютері легше, ніж за кульманом, адже програми налаштовані спеціальним чином так, щоб креслити було максимально легко та комфортно. Тут не потрібно стежити за якістю графіки, все креслить комп'ютер. Можна без проблем виконувати креслення будь-якої складності і розмірів.

AutoCAD – програмний продукт, розроблений Autodesk більше 30 років тому, довгий час відповідав найвищим вимогам проектувальників. Але на сьогоднішній день, маючи багатий інструментарій і можливості адаптації до вимог користувача, він вже не задовольняє потребам більшості проектувальників. Цей пакет може застосовуватися лише при розробці дуже малих і досить простих проектів, автоматизуючи тільки рутинну ро-

боту кульмана і не більше того. Сучасному проектувальнику потрібно набагато більше, ніж просто швидке і гарне виконання креслень.

КОМПАС – система автоматизованого проектування, розроблена російською компанією АСКОН з можливостями оформлення проектної та конструкторської документації відповідно до стандартів серії ЄСКД і СПДС. Існує в двох версіях: КОМПАС-Графік і КОМПАС-3D, відповідно призначених для плоского креслення і тривимірного проектування.

2. Середні САПР використовуються для 3D моделювання і побудови креслень по 3D моделям. Природно, побачивши 3D модель двигуна людина зрозуміє набагато більше, ніж за кресленням також як і те, що деталь виконана верстатом з ЧПК по 3D моделі буде точніше, ніж за 2D кресленням.

SolidWorks – продукт компанії Solid-Works Corporation, система автоматизованого проектування, інженерного аналізу та підготовки виробництва виробів будь-якої складності і призначення. Вона є інструментальним середовищем, призначеним для автоматизації проектування складних виробів в машинобудуванні та в інших галузях промисловості.

3. Важкі САПР – це навіть не програми, а цілі комплекси програм для великого підприємства. В одному виконується 3D модель деталі (CAD-програма), у другому – розрахунки на міцність (CAE-програма), в третьому – проектується інструмент для її виготовлення, в четвертому – розробляється керуюча програма для верстатів з ЧПК (CAM-програма). Ну і вартість у них відповідна кількості функцій.

Pro / ENGINEER – є САПР верхнього рівня та охоплює всі сфери проектування, технологічної підготовки виробництва і виготовлення виробу. Широкий діапазон можливостей апарату тривимірного моделювання, висока якість одержуваного результату і стійкість його до подальших змін зробили Pro / ENGINEER одним з лідерів CAD / CAM / CAE систем, а наявність прямого доступу в систему підтримки життєвого циклу виробу Windchill PDMLink переводить Pro / ENGINEER в розряд PLM -систем.

Система CATIA (Computer Aided Three-dimensional Interactive Application) – одна з найпоширеніших САПР високого рівня. Це комплексна система автоматизованого проектування (CAD), технологічної підготовки виробництва (CAM) та інженерного аналізу (CAE), що включає в себе передовий інструментарій 3D моделювання, підсистеми програмної імітації складних технологічних процесів, розвинені засоби аналізу та єдину базу даних текстової та графічної інформації. Система дозволяє ефективно

вирішувати всі задачі технічної підготовки виробництва – від зовнішнього (концептуального) проектування до випуску креслень і специфікацій.

Треба відзначити ще такі цікаві програмні продукти як T-FLEX і ANSYS.

T-FLEX CAD – САПР (3D і 2D) для машинобудування. Розробник – компанія Топ-Системи. Перша в світі САПР з геометричною параметризацією.

ANSYS – універсальна програмна система скінченно-елементного (МСЕ) аналізу, існує та розвивається на протязі останніх 30 років, є досить популярною у фахівців в області комп'ютерного інжинірингу та рішення лінійних і нелінійних, стаціонарних і нестаціонарних просторових задач механіки деформованого твердого тіла і механіки конструкцій. Моделювання та аналіз в деяких областях промисловості дозволяє уникнути дорогих і тривалих циклів розробки типу "проектування – виготовлення – випробування".

Треба зазначити, що для багатьох компаній по співвідношенню ціна / якість найбільш оптимальною виглядає категорія середніх САПР, куди входить і програма Компас 3D.

ГОСТ 23501.108-85 встановлює наступні ознаки класифікації САПР:

- тип / різновид і складність об'єкта проектування;
- рівень і комплексність автоматизації проектування;
- характер і кількість документів, що випускаються;
- кількість рівнів в структурі технічного забезпечення.

14.6. Класифікація САПР з використанням англійських термінів

В області класифікації САПР використовується ряд усталених англійських термінів, що застосовуються для класифікації програмних додатків і засобів автоматизації САПР за галузевим і цільовим призначенням.

За галузевим призначенням

MCAD (англ. Mechanical computer-aided design) – автоматизоване проектування механічних пристроїв. Це машинобудівні САПР, застосовуються в автомобілебудуванні, суднобудуванні, авіакосмічній промисловості, виробництві товарів народного споживання, включають в себе розробку деталей і зборок (механізмів) з використанням параметричного проекту-

вання на основі конструктивних елементів, технологій поверхневого і об'ємного моделювання (SolidWorks, Autodesk Inventor, КОМПАС, CATIA);

EDA (англ. Electronic design automation) або ECAD (англ. Electronic computer-aided design) – САПР електронних пристроїв, радіоелектронних засобів, інтегральних схем, друкованих плат і т. п. (Altium Designer, OrCAD);

AEC CAD (англ. Architecture, engineering and construction computer-aided design) або CAAD (англ. Computer-aided architectural design) – САПР в області архітектури і будівництва. Використовуються для проектування будівель, промислових об'єктів, доріг, мостів та ін. (Autodesk Architectural Desktop, AutoCAD Revit Architecture Suite, Piranesi, ArchiCAD).

За цільовим призначенням

За цільовим призначенням розрізняють САПР або підсистеми САПР, які забезпечують різні аспекти проектування.

CAD (англ. Computer-aided design / drafting) – засоби автоматизованого проектування, в контексті зазначеної класифікації термін позначає засоби САПР, призначені для автоматизації двовимірного і / або тривимірного геометричного проектування, створення конструкторської та / або технологічної документації, і САПР загального призначення.

CADD (англ. Computer-aided design and drafting) – проектування і створення креслень.

CAGD (англ. Computer-aided geometric design) – геометричне моделювання.

CAE (англ. Computer-aided engineering) – засоби автоматизації інженерних розрахунків, аналізу та симуляції фізичних процесів, здійснюють динамічне моделювання, перевірку та оптимізацію виробів.

CAA (англ. Computer-aided analysis) – підклас засобів CAE, використовуваних для комп'ютерного аналізу.

CAM (англ. Computer-aided manufacturing) – засоби технологічної підготовки виробництва виробів, забезпечують автоматизацію програмування і управління обладнання з ЧПК або ГАВС (Гнучких автоматизованих виробничих систем). Російськомовним аналогом терміна є АСТПП – автоматизована система технологічної підготовки виробництва.

CAPP (англ. Computer-aided process planning) – засоби автоматизації планування технологічних процесів застосовуються на стику систем CAD і

CAM.

Багато САПР поєднують в собі рішення задач, які відносяться до різних аспектів проектування CAD / CAM, CAD / CAE, CAD / CAE / CAM. Такі системи називають комплексними або інтегрованими.

За допомогою CAD-засобів створюється геометрична модель виробу, яка використовується в якості вхідних даних в системах CAM, і на основі якої в системах CAE формується необхідна для інженерного аналізу модель досліджуваного процесу.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміється під проектуванням?
2. Перелічіть стадії проектування.
3. Які етапи передбачаються на стадії розробки технічного завдання?
4. Чим автоматизоване проектування відрізняється від автоматичного проектування?
5. З якою метою створюються САПР?
6. Назвіть основні принципи створення САПР?
7. Назвіть складові програмного забезпечення САПР.
8. Назвіть категорії САПР.
9. Наведіть приклади англomовних термінів, які застосовуються в САПР.



15. НАУКОВА ОРГАНІЗАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

15.1. Поняття експерименту, спостереження, досліду

Термін "експеримент" походить від латинського слова *experimentum*, яке перекладається як "проба", "дослід". *Експеримент* – це метод вивчення об'єкта, за яким активно й цілеспрямовано впливають на нього створенням штучних умов, необхідних для виявлення відповідної властивості.

Спостереженням називається систематичне, цілеспрямоване сприйняття об'єкта. Для наукового спостереження застосовують потужну вимірювальну техніку, що дає високу точність сприйняття і фіксації результатів. Але спостереження не припускають активної взаємодії з об'єктами.

Переваги експерименту порівняно зі спостереженням такі:

- у процесі експерименту можна вивчати явище "у чистому вигляді", звільнившись від побічних факторів, які затіняють основний процес;
- повторюваність експерименту: можна проводити досліди стільки разів, скільки це необхідно.

Дослід – це дослідження, при якому об'єкти поміщаються у штучно створене середовище, а вчений входить з досліджуванним предметом в активну взаємодію і при цьому має можливість реєструвати результати цих взаємодій. Дослід – окрема елементарна частина експерименту.

Спостереження і дослід у науці – це два основні методи пізнання законів природи. Дослід в науці часто називають експериментом. Отже, поняття "експеримент" можна визначити, як проведення в певних умовах серії дослідів для спостереження за станом об'єкта дослідження, стежити за його змінами і відтворювати їх кожний раз під час повторення дослідів.

У математичній статистиці та теорії ймовірностей, які є теоретичною базою теорії планування експерименту, застосовуються поняття *випробування* і *подія*.

Випробування – це здійснення якогось комплексу умов, які можна відтворити яке завгодно велике число разів в одних і тих же умовах.

Подія є результатом випробувань. Деякі події відбуваються неминуче в результаті кожного випробування і тому вони називаються *достовірними*. Інші події зовсім не можуть статися і тому їх називають *неможливими*.

Зазвичай під подією розуміється те, що має місце, відбувається, настає в довільній точці простору-часу. Наприклад, в інформатиці і програмуванні подія – це повідомлення програмного забезпечення (або його частини), яке вказує на те, що сталося при роботі програмного забезпечення.

15.2. Сутність і мета планування експерименту

Експеримент займає чільне місце серед методів отримання інформації про взаємозв'язки явищ у природі і техніці. Він є відправною точкою і критерієм більшості наших знань. Експериментальні пошуки ведуться в таких галузях, де теоретично не можна зробити будь-яких передбачень.

Широке застосування експериментальних методів привело до створення теорії експерименту. Ця теорія покликана дати експериментатору відповіді на наступні питання:

- 1) як треба організувати експеримент, щоб найкращим чином вирішити поставлену задачу (в сенсі витрат часу і коштів, точності результатів);
- 2) як слід обробляти результати експерименту, щоб отримати максимальний обсяг інформації про досліджуваний об'єкт або явище;
- 3) які обґрунтовані висновки можна зробити про досліджуваний об'єкт за результатами експерименту.

Теорія планування експерименту – це наука про способи розробки і застосування економічних планів проведення експерименту, які дозволяють отримувати найбільший обсяг інформації про об'єкт дослідження, способи проведення експерименту та обробки експериментальних даних.

Використання теорії планування експерименту забезпечує:

- 1) мінімізацію, тобто скорочення необхідної кількості дослідів;
- 2) одночасне варіювання всіх факторів;
- 3) вибір чіткої стратегії, що дозволяє приймати обґрунтоване рішення після кожної серії дослідів;
- 4) мінімізацію помилок експерименту за рахунок використання спеціальних перевірок.

Задачі, для вирішення яких використовується теорія експерименту, різноманітні. Це пошук оптимальних умов, побудова інтерполяційних формул, вибір істотних чинників, оцінка та уточнення констант теоретичних моделей, вибір найбільш прийнятних гіпотез про механізм явищ і т. д.

Основою теорії експерименту є математична статистика, яка застосовується для аналізу експерименту в тих випадках, коли його результати мо-

жуть розглядатися як випадкові величини або випадкові процеси. Це обумовлюється деякою невизначеністю результатів експерименту. Серед багатьох причин такої невизначеності можна назвати випадковий характер досліджуваних процесів, вплив неконтрольованих факторів, неконтрольовані зміни умов експерименту і помилки спостережень. Сюди також відносяться вимірювальні помилки, причини яких криються в недосконалому вимірювальних приладів.

Під впливом математичної статистики змінилися методи аналізу, оцінки й представлення результатів спостережень. Математична статистика вплинула безпосередньо і на стратегію експерименту. Стало можливим говорити про виникнення математичної теорії експерименту або, точніше, про теорію експериментальних досліджень, що базується на математичній статистиці. З'явився новий розділ математичної статистики: планування експерименту.

15.3. Математична модель

Для ефективного аналізу механізму явищ, знаходження оптимальних умов їх функціонування треба виявити взаємозв'язок факторів процесу і представити їх у кількісній формі – у вигляді математичної моделі.

Математична модель є сукупністю співвідношень (формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів і т. п.), які визначають характеристики станів об'єкта в залежності від його параметрів, умов і часу.

Розрізняють фізичні (аналітичні або теоретичні) і статистичні (емпіричні) моделі. *Аналітичні моделі*, як правило, представляють у вигляді складних систем рівнянь (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних або диференціально-інтегральних), які дозволяють дуже точно описувати процеси, що протікають в об'єкті.

Статистичні моделі отримують у результаті обробки експериментальної інформації, зібраної на досліджуваному об'єкті. Подібні моделі мають відносно просту структуру і часто подаються у вигляді поліномів (рівнянь регресії). Область їх застосування обмежується зоною розташування робочих точок, в яких проводяться експерименти.

Реальні процеси, якщо їх розглядати у всіх деталях, дуже складні, а супроводжуючі їх явища надзвичайно різноманітні. Тому при побудові математичної моделі процесу або об'єкта зазвичай обмежуються схематичним (спрощеним) поданням досліджуваного об'єкта у вигляді деякої "чор-

ної скриньки", на вхід якої надходять фактори, що на неї впливають, а на виході отримують значення параметрів, які характеризують стан об'єкта (рис. 15.1). На такий об'єкт впливають чотири групи чинників.

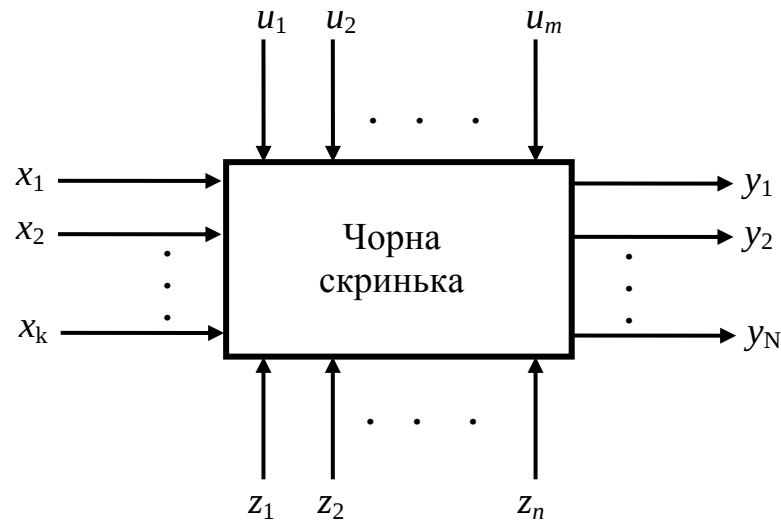


Рисунок 15.1 – Приклад чорної скриньки

1. Група $X (x_1, x_2, \dots, x_k)$, до якої входять контрольовані чинники, які допускають цілеспрямовану зміну в ході дослідження. Змінні групи X називають вхідними факторами або незалежними змінними параметрами.

2. Група $U (u_1, u_2, \dots, u_m)$, що включає в себе контрольовані чинники, які на відміну від факторів першої групи не допускають цілеспрямованої зміни в ході дослідження (наприклад, тиск, температура і вологість навколишнього середовища, в яких проводиться експеримент).

3. Група $Y (y_1, y_2, \dots, y_N)$, що включає в себе змінні, які часто називають вихідними. До їх числа відносяться величини, що характеризують ефективність процесу чи об'єкта, техніко-економічні параметри, технологічні властивості, а також характеристики готових виробів. Змінні цієї групи виступають в якості цільових величин при оптимізації процесів.

4. Група $Z (z_1, z_2, \dots, z_n)$, утворена контрольованими і неконтрольованими факторами. Вони характеризують діючі на об'єкт збурення, які не можна виміряти кількісно (старіння і знос деталей об'єкта дослідження). Повільна зміна неконтрольованих факторів в часі, призводить до дрейфу характеристик об'єкта.

Очевидно, математичною моделлю об'єкта, зображеного на рис. 15.1 може служити сукупність співвідношень виду:

$$Y = f(x_i, u_j, z_l)$$

де x_i – сукупність значень вхідних контрольованих і керованих параметрів

($i = 1, \dots, k$); u_j – сукупність значень контрольованих, але некерованих параметрів ($j = 1, \dots, m$); z_l – сукупність неконтрольованих і некерованих параметрів ($l = 1, \dots, n$).

При побудові моделі такі співвідношення отримати практично неможливо. Доводиться вводити обмеження, наприклад, вважати, що кожен з параметрів може змінюватися в межах, обумовлених нижнім (x_{in}, u_{jn}, z_{ln}) і верхнім (x_{is}, u_{js}, z_{ls}) рівнями.

Під плануванням експерименту розуміється процедура вибору числа дослідів та умов їх проведення, необхідних для вирішення поставленої задачі з необхідною точністю. Всі фактори, що визначають процес, змінюються одночасно за спеціальними правилами, а результати експерименту представляються у вигляді математичної моделі.

Взагалі задача кожного дослідника полягає в тому, щоб при фіксованих параметрах $u_i = \text{const}$ і $z_l = \text{const}$ вибрати такі значення $x_i = \text{var}$, при яких вихідний параметр об'єкта y досягав оптимальної величини. Іншими словами, необхідно оптимізувати функцію

$$y = f_{opt}(x_i = \text{var}; u_i = \text{const}; z_l = \text{const})$$

при $x_{in} \leq x_i \leq x_{is}$; ($i = 1, \dots, k$).

Статистичною моделлю об'єкта служить функція відгуку, яка зв'язує параметр оптимізації y , що характеризує результати експерименту, зі змінними параметрами, якими варіюють при проведенні дослідів.

Незалежні змінні x_i прийнято називати факторами, вони здатні змінити стан об'єкта дослідження. Фактори бувають змінними, сталими і некерованими. *Змінним фактором* ($x_i, i = 1, k$) називають контрольовану (вимірювану) змінну величину, що набуває на певний проміжок часу сталого значення. *Сталим* називають фактор, який не змінює свого значення протягом усього експерименту, для цього вживаються заходи для того, щоб ці фактори практично залишались незмінними.

На об'єкт дослідження впливає низка факторів, які важко або взагалі неможливо врахувати. Такі фактори називають *некерованими*, або *збуреннями*. Дію цих факторів на об'єкт дослідження ще називають *рівнем шуму*.

Простір з координатами $x_1, x_2, \dots, x_k$ називають факторним простором, а геометричне зображення функції відгуку в факторному просторі – поверхнею відгуку.

При побудові математичної моделі виділяють наступні етапи:

1. *Постановка задачі.* На цьому етапі визначають мету, з'ясовують вихідну ситуацію, оцінюють допустимі витрати часу та коштів.

2. *Збір і аналіз апріорної інформації.* Користуючись різними джерелами та експериментальними даними подібних об'єктів, збирають і оцінюють всю інформацію, що стосується вирішення таких же або схожих задач.

3. *Вибір вхідних і вихідних змінних, області експериментування.* Основна вимога до факторів – керованість. Під керованістю розуміється встановлення потрібного значення фактора (рівня) та підтримання його протягом усього досліджу.

4. *Вибір математичної моделі, за допомогою якої будуть подаватися експериментальні дані.* Вибір моделі залежить від попередніх знань експериментатора про об'єкт, цілей дослідження та математичного апарату. Якщо вид функції невідомий, то корисним виявляється її подання розкладанням в степеневий ряд вигляду:

$$\eta = \beta_0 + \sum \beta_i x_i + \sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum \beta_{ii} x_i^2 + \dots$$

Користуючись результатами експерименту, отримують лише оцінки параметрів цієї моделі:

$$\hat{y} = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j + \sum b_{ii} x_i^2 + \dots,$$

де $\hat{y}$ – значення відгуку, передбаченого цим рівнянням.

5. *Вибір критерію оптимальності та плану експерименту.* Існує багато критеріїв оптимальності планів, які можна поділити на дві групи. До першої групи відносяться критерії, пов'язані з похибками оцінок коефіцієнтів, а до другої – з похибкою оцінки поверхні відгуку.

Плануванню експериментів передують етапи неформалізованих рішень про вибір області експериментування (області факторного простору, вивчення якої становить інтерес для експериментатора) та визначеності центру експерименту, інтервалів варіювання факторів.

При виборі плану приймають до уваги, що найважливішою характеристикою плану є число дослідів.

Приклад матриці планування експерименту для двох факторів, які варіюються на двох рівнях, наведено в табл. 15.1. Подібний план має назву повного факторного експерименту (ПФЕ) і позначається як 2^2 . Для двох рівнів варіювання k факторів це буде план 2^k , а для n рівнів – типу n^k .

Таблиця 15.1. Матриця планування експерименту 2^2

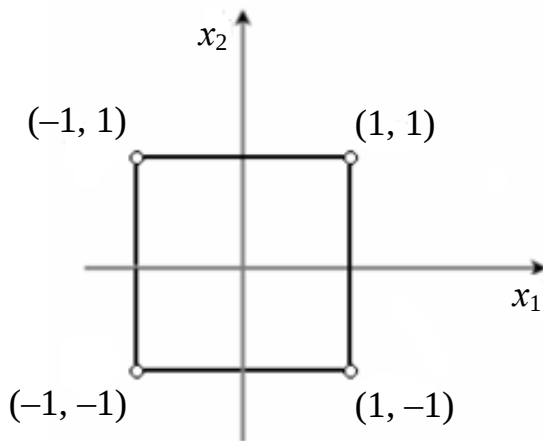
Досліди	x_0	Планування		Величина функції відгуку y
		x_1	x_2	
1	+ 1	+ 1	+ 1	y_1
2	+ 1	– 1	+ 1	y_2
3	+ 1	+ 1	– 1	y_3
4	+ 1	– 1	– 1	y_4

У другому стовпчику таблиці наведені значення фіктивної змінної x_0 , яка застосовується при обчисленні вільного члена полінома. У першому рядку таблиці спланований перший дослід, коли факторам x_1 і x_2 надають максимальні значення; у другому рядку – коли фактору x_1 надають мінімальне значення, а фактору x_2 – максимальне і т. д.

Користуючись планом табл. 15.1, після проведення експерименту розраховують коефіцієнти лінійного рівняння регресії:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Геометрична інтерпретація плану проведення експерименту, наведеного в табл. 15.1, показана на рис. 15.2. План експерименту 2^2 визначає координати вершин квадрату. Геометричною інтерпретацією плану 2^3 буде куб, а при $k > 3$ – гіперкуб.


Рисунок 15.2 – Геометрична інтерпретація плану 2^2

Для двох рівнів це буде ПФЕ типу 2^k , а для n рівнів – типу n^k . Умови експерименту пишуть в табличній формі – матриці планування, де рядки відповідають різним дослідом, а стовпці – значенням факторів.

Застосування планування експерименту робить поведінку експериментатора цілеспрямованою та організованою, яка істотно сприяє підвищенню продуктивності праці і надійності отриманих результатів.

6. *Визначення методу аналізу даних.* При обробці експериментальних даних використовуються методи, засновані на теорії статистичного оцінювання невідомих параметрів, що використовуються при описі моделі експерименту, та теорії перевірки статистичних гіпотез.

7. *Проведення експерименту.* У ході експерименту треба уважно стежити за тим, щоб все проходило у відповідності з прийнятим планом.

8. *Перевірка статистичних передумов для отриманих експериментальних даних.* Після побудови математичної моделі проводять статистичний аналіз, при якому перевіряється значимість коефіцієнтів регресії та адекватність моделі.

9. *Обробка результатів.* Процедура обробки експериментальних даних достатньо формалізована і необхідно тільки її правильно використовувати. При цьому підбираються емпіричні формули, оцінюється їх точність.

10. *Аналіз, рекомендації.* По завершенні аналізу даних роблять висновки щодо отриманих результатів, інтерпретують висновки, оцінюють їх практичне значення, дають рекомендації про використання результатів.

15.4. Вимоги до відгуків і факторів

При виборі відгуку, або залежної змінної, треба бути впевненим в тому, що відгук, який належить вимірювати, дійсно містить інформацію про досліджувану проблему.

Відгук має відповідати таким основним вимогам:

1. Бути кількісною величиною, доступною безпосередньому або непрямому вимірюванню з необхідною точністю.
2. Мати простий фізичний зміст.
3. Бути однозначним, тобто певному набору факторів має відповідати одне з точністю до похибок дослідження значення відгуку.
4. Бути досить універсальним, тобто найбільш повно характеризувати об'єкт, його функціональне призначення, технічні вимоги.

Фактори поділяються на кількісні і якісні.

Кількісні – фактори, які є фізичними величинами і можуть бути виміряні. *Якісні* – фактори, які не можуть бути виражені кількісно (різні речовини, різні технологічні способи, апарати, виконавці, кваліфікація оператора, деталі різних партій або заводів-виробників).

Треба ретельно вибирати фактори, які будуть досліджуватися в експерименті, враховувати всі фактори, які суттєво впливають на відгук. Якщо не буде врахований який-небудь істотний фактор x_i , то зміна цього чинника у процесі виробництва або експлуатації об'єкта може сильно спотворити регресійну залежність, і отримана модель не буде відповідати об'єкту. Крім того, при підтримці неврахованого фактора на деякому фік-

сованому рівні може бути отримано хибне уявлення про оптимум, оскільки немає гарантії, що фіксований рівень цього фактора є оптимальним.

Включення в експеримент факторів, які слабо впливають на відгук, веде до зайвих витрат, ускладнює обробку й утрудняє інтерпретацію результатів експерименту.

При проведенні експерименту фактори повинні відповідати наступним вимогам.

1. При зміні будь-якого фактора інші не змінюють своїх значень, тобто фактори є функціонально і статистично незалежними.

2. У процесі експерименту кожен фактор приймає два або більше дискретних значень, встановлюваних експериментатором.

3. Кількісні фактори при обробці результатів експерименту приймаються не випадковими, точно відомими величинами.

4. Фактори повинні мати властивість сумісності у всій області експерименту.

Необхідно також вибрати значення, або рівні, факторів, які будуть використані в експерименті. Ці рівні можуть бути задані або обрані випадковим чином з множини всіх можливих рівнів фактора. Збільшенню інтервалу варіювання перешкоджає вимога адекватності моделі. При великих інтервалах варіювання реальна поверхня відгуку може сильно відрізнятись від експериментально отриманої апроксимуючої поверхні.

Під областю визначення факторів розуміється сукупність всіх значень, які в принципі може приймати даний фактор. Зрозуміло, що сукупність значень фактора, яка використовується в експерименті, є підмножиною з множини значень, що утворюють область визначення.

У межах області допустимих значень факторів виділяють початкову область планування експерименту та визначають основний (нульовий) рівень як вихідної точки побудови плану, так і інтервалів варіювання. Зазвичай інтервали є симетричними відносно центрального значення.

15.5. Повні факторні плани експерименту

Вище вказувалося, що метою планування експерименту, як правило, є отримання математичної моделі досліджуваного об'єкта або процесу. Якщо на об'єкт діє багато факторів, механізм яких невідомий, то зазвичай використовують поліноміальні математичні моделі (алгебраїчні поліноми), які називаються *рівняннями регресії*.

Так, для двох факторів x_1 і x_2 :

поліном 0-го степеня: $y = b_0$;

поліном 1-го степеня: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ – лінійна модель;

поліном 2-го степеня: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$ – повна квадратична модель.

Більшість експериментальних задач у техніці формують як задачі екстремальні: визначення оптимальних умов процесу, оптимального складу композиції і т. д. Завдяки оптимальному розташуванню точок у факторному просторі та лінійному перетворенню координат долають недоліки регресійного аналізу, зокрема кореляцію між коефіцієнтами регресії.

При плануванні за схемою ПФЕ реалізуються всі можливі комбінації факторів на всіх обраних для дослідження рівнях. ПФЕ дозволяє отримувати кількісні оцінки основних ефектів та ефектів взаємодії. При цьому ефекти, що цікавлять у більшому ступені, визначаються з меншою помилкою, ніж при традиційних методах дослідження.

Для кожного фактора вибираються два рівня – верхній і нижній, на яких фактор варіюється. Половина різниці між верхнім і нижнім рівнями називається *інтервалом варіювання*. Інтервал варіювання повинен бути більше похибки вимірювання рівня фактора (обмеження знизу), а верхній і нижній рівні фактора не повинні виходити за область його визначення (обмеження зверху).

Точка з координатами $(u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0k})$ є центром плану, або основним рівнем; Δu_i – інтервал варіювання по осі u_i . Від системи координат $u_1, u_2, \dots, u_k$ переходять до нової безрозмірної системи координат $x_1, x_2, \dots, x_k$ за допомогою наступного лінійного перетворення:

$$x_i = \frac{u_i - u_{0i}}{\Delta u_i}; \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

де

$$u_{0i} = \frac{u_i^{\max} + u_i^{\min}}{2}, \quad \Delta u_i = \frac{u_i^{\max} - u_i^{\min}}{2}.$$

Повний факторний експеримент дозволяє отримати математичну модель досліджуваного об'єкта у вигляді рівняння регресії.

Так, наприклад, при $k = 2$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2,$$

при $k = 3$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

План ПФЕ експерименту зображують у вигляді таблиці, стовпці якої відображають рівні факторів, а рядки – номери дослідів. Ці таблиці називають матрицями планування експерименту.

Приклад матриці планування ПФЕ типу 2^3 наведений в табл. 15.2.

Таблиця 15.2. Матриця ПФЕ типу 2^3

N	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_4
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_5
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_6
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_7
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_8

У стовпцях x_1, x_2, x_3 задають планування – по ним безпосередньо визначаються умови дослідів, а решта стовпці $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$ служать тільки для розрахунку.

Завдяки переходу до безрозмірних факторів і ортогональності матриці планування, розрахунок оцінок коефіцієнтів регресії в повному факторному експерименті перетворюється в просту арифметичну процедуру

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_0 \bar{y}_j; \quad b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i \bar{y}_j;$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i x_j \bar{y}_j; \quad b_{ijk} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i x_j x_k \bar{y}_j.$$

Повні факторні плани мають низку важливих для планування експерименту властивостей, основними з яких є наступні:

– симетричність щодо центру експерименту – алгебраїчна сума елементів вектор-стовпцю кожного фактора (окрім нульового) дорівнює нулю

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

де i – номер фактора; N – число дослідів;

– умова нормування – сума квадратів елементів кожного стовпчика дорівнює числу дослідів, або

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N; \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

– ортогональність – сума почленних добутків будь-яких двох вектор-стовпців дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{u=1}^N a_{iu} x_{iu} = 0; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, k;$$

– рототабельність – точність передбачення значення функції відгуку однакова на рівних відстанях від центру експерименту, точки експерименту лежать на поверхні сфери, центром якої є точка основного рівня.

Повні факторні плани дозволяють виявити вплив на функцію відгуку у не тільки кожного фактора окремо, але й спільний вплив їх комбінацій, тобто досліджувати так званий ефект взаємодії.

Для оцінки точності експерименту для кожної i -ї точки факторного простору проводять m дослідів і отримують значення $y_i^1, y_i^2, \dots, y_i^m$ досліджуваного параметра, для яких знаходять середню величину

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}^i, \quad u = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Дисперсія вимірюваної величини по m паралельним дослідом визначається за формулою:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m [(y_{iu} - \bar{y}_i)^2], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad u = 1, 2, \dots, m.$$

За оцінку для дисперсії відтвореності беруть середню дисперсію

$$S_{\text{вдт}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2.$$

Дисперсія у, отриманого за вибіркою обсягу m , в m разів менше дисперсії одиничного вимірювання:

$$S_y^2 = \frac{1}{m} S_{\text{вдт}}^2.$$

Дисперсію коефіцієнтів $S_{b_i}^2$ визначають для m паралельних дослідів наступним чином:

$$S_{b_i}^2 = \frac{1}{mN} S_{\text{вдтв}}^2.$$

15.6. Розрахунок оцінок коефіцієнтів регресійного рівняння

Гіпотезу однорідності (рівності) дисперсій перевіряють за допомогою критерію Кохрена, який визначають за формулою:

$$G_p = \max S_{yi}^2 / \sum_{i=1}^N S_{yi}^2,$$

а його критичне значення $G_{кр}$ знаходять з таблиці розподілу Кохрена за кількістю ступенів свободи чисельника $f = m - 1$, знаменника $f = N$ і рівнем значущості q . Якщо $G_p < G_{кр}$, гіпотеза про однорідність дисперсій приймається, в іншому випадку – відкидається.

Гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнтів регресії перевіряється за критерієм Стюдента t_i , який визначається як частка від ділення модуля коефіцієнта b_i на оцінку його середнього відхилення S_{b_i} :

$$t_i = |b_i| / S_{b_i}.$$

Значення t_i порівнюють з табличним $t_{1-q}(f)$ для обраного рівня значущості і числа ступенів свободи f . Якщо $t_i < t_{1-q}(f)$, то приймають гіпотезу рівності нулю генерального коефіцієнта регресії $\beta_i = 0$, а відповідний вибірковий коефіцієнт b_i , як незначний, відсівають з рівняння регресії.

Для перевірки гіпотези про адекватність математичної моделі необхідно порівняти дві дисперсії:

а) дисперсію неадекватності, що залежить від різниці між значеннями y_{ip} , розрахованими по математичній моделі, і експериментальними результатами y_{it} :

$$S_a^2 = \frac{1}{(N - L)} \sum_{j=1}^N (y_{jp} - \bar{y}_j)^2,$$

де L – число значимих коефіцієнтів досліджуваного рівняння регресії без врахування b_0 ;

б) дисперсію неоднорідності, що характеризує похибки спостережень:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{yi}^2.$$

Адекватність математичної моделі перевіряється за F -критерієм Фішера, який визначають як частку від ділення оцінки дисперсії неадекватності на оцінку дисперсії одиничного спостереження

$$F_p = S_a^2 / S_y^2.$$

причому $S_a^2 > S_y^2$.

Критичне значення $F_{кр}$ знаходять з таблиці розподілу Фішера по числу ступенів свободи чисельника $f = m (N - L)$, знаменника $f = N (m - 1)$ і рівня значущості q . Якщо $F_p > F_{кр}$ гіпотеза про адекватність відхиляється.

15.7. Дробові факторні плани експерименту

З ростом кількості факторів n число дослідів N ПФЕ різко зростає за показовою функцією $N = 2^n$. Число коефіцієнтів лінійної моделі зростає як $1 + n$, а неповної квадратичної – як $1 + (n + n^2) / 2$. Тому, починаючи з $n = 2$, настає надмірність числа експериментів, що створює передумови для зменшення кількості дослідів. З цією метою використовують тільки частину матриці факторного експерименту, яка називається *дробовою реплікою* і забезпечує мінімальну різницю між числом оцінюваних параметрів і числом дослідів.

Дробовим факторним експериментом (ДФЕ) називається система дослідів, що представляє собою частину ПФЕ, яка дозволяє скоротити обсяг експериментальних даних.

Для побудови матриці планування ДФЕ з наявних n факторів відбирають $(n - p)$ основних чинників, для яких будують матрицю планування ПФЕ. Цю матрицю доповнюють потім p стовпцями, що відповідають факторам, які залишилися. Рівні додаткових факторів визначають як поелементний добуток рівнів не менше двох і не більше $(n - p)$ основних чинників. Кажуть, що ДФЕ – це експеримент типу 2^{n-p} . Обраний для додаткового фактора добуток називається *генератором плану* (оскільки визначає для додаткового фактора правило чергування рівнів варіювання в матриці планування). Очевидно, що ДФЕ типу 2^{n-p} матиме p генераторів.

Наприклад, для ДФЕ типу 2^{3-1} число дослідів дорівнює чотирьом у порівнянні з 16 дослідями в разі ПФЕ (табл. 15.3).

Таблиця 15.3. Матриця планування ДФЕ типу 2^{3-1}

№	x_1	x_2	x_1x_2
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1

При трьох основних факторах ДФЕ містить 8 дослідів, а генераторами для дрібних планів можуть служити добутки x_1x_2 , x_1x_3 , x_2x_3 , $x_1x_2x_3$. При введенні одного додаткового фактора (ДФЕ типу 2^{4-1}) може використовуватися будь-який з чотирьох можливих генераторів:

$$x_4 = x_1x_2; \quad x_4 = x_1x_3; \quad x_4 = x_2x_3; \quad x_4 = x_1x_2x_3.$$

Для знаходження математичного опису процесу використовуються певні частини ПФЕ: 1/2, 1/4, 1/8 і т. д. Ця система дослідів називається дро-

бовими репліками, а сам метод ДФЕ – методом дробових реплік. Можливі дробові репліки від ПФЕ типу 2^4 наведені в табл. 15.4.

Таблиця 15.4. Матриця планування ПФЕ 2^4

№	Фактори				y	Дробові репліки		
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	-1	-1	-1	-1	y_1	1/8	1/4	1/2
2	+1	-1	-1	-1	y_2			
3	-1	+1	-1	-1	y_3	1/8		
4	+1	+1	-1	-1	y_4			
5	-1	-1	+1	-1	y_5	1/8	1/4	
6	+1	-1	+1	-1	y_6			
7	-1	+1	+1	-1	y_7	1/8		
8	+1	+1	+1	-1	y_8			
9	-1	-1	-1	+1	y_9	1/8	1/4	1/2
10	+1	-1	-1	+1	y_{10}			
11	-1	+1	-1	+1	y_{11}	1/8		
12	+1	+1	-1	+1	y_{12}			
13	-1	-1	+1	+1	y_{13}	1/8	1/4	
14	+1	-1	+1	+1	y_{14}			
15	-1	+1	+1	+1	y_{15}	1/8		
16	+1	+1	+1	+1	y_{16}			

Сформуємо матрицю ДФЕ для трьох факторів (табл. 15.5)

Таблиця 15.5. Матриця планування ДФЕ типу 2^{3-1}

№	x_0	x_1	x_2	$x_3=x_1x_2$
1	+1	-	-	+
2	+1	+	-	-
3	+1	-	+	-
4	+1	+	+	+

За цим планом можна визначити коефіцієнти регресії b_0, b_1, b_2, b_3 . Однак коефіцієнти регресії b_1, b_2, b_3 будуть змішані з парними взаємодіями.

При ДФЕ стандартизація масштабів факторів, порядок постановки дослідів, перевірка відтворюваності дослідів, розрахунок оцінок коефіцієнтів регресійного рівняння і перевірка їх статистичної значущості, перевірка адекватності отриманої математичної моделі і перехід до фізичних змінних проводяться так само, як і при ПФЕ.

15.8. Плани другого порядку

Розглянуті вище плани проведення експерименту, зокрема, плани, що дозволяють будувати лінійну модель, застосовуються для того, щоб визначити напрям руху до так званої зони з оптимальними параметрами. Тобто зони, в якій знаходиться максимум функції відгуку. Схему переміщення до зони з оптимальними параметрами умовно показано на рис. 15.3.

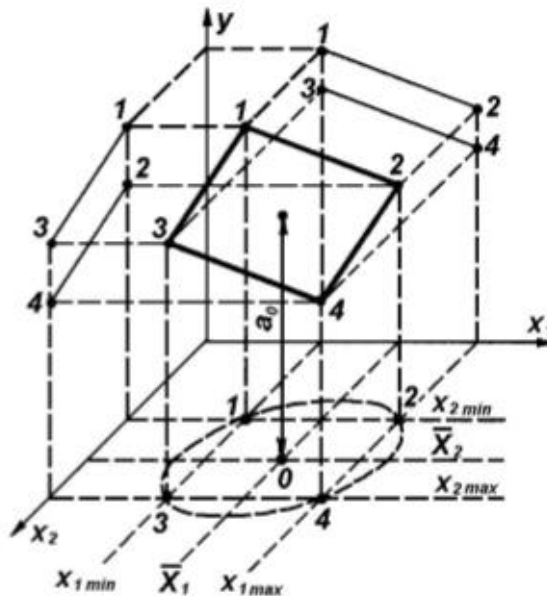


Рисунок 15.3. Схема переміщення до зони з оптимальними параметрами

Для детального вивчення області оптимуму і ділянок поверхні відгуку зі значною кривиною лінійна модель стає неадекватною. У таких випадках для математичного опису застосовують поліном другого або, навіть, третього порядку. Але цього можна досягти завдяки використанню планів, відповідно, другого і третього порядків.

Плани 2-го порядку дозволяють отримати математичний опис у вигляді повної квадратичної моделі, що містить крім основних ефектів b_i всі парні взаємодії b_{ij} і квадратичні ефекти b_{ii} .

Зараз найбільш широко для опису області, що близька до екстремуму, застосовують поліноми другого порядку. Це пов'язано з тим, що,

по-перше, існують добре розроблені плани другого порядку;

по-друге, поверхні другого порядку легко піддаються систематизації і, отже, визначенню екстремальної точки;

по-третє, збільшення порядку апроксимуючого полінома приводить до значного збільшення кількості дослідів.

Зазвичай експеримент, реалізований для визначення оптимальних умов процесу, можна адекватно описати поліномом другого порядку, що має вигляд:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2.$$

Перший доданок у правій частині рівняння враховує головні лінійні ефекти, другий – ефекти взаємодії, третій – квадратичні ефекти.

Повний чи дробовий факторний експеримент не дозволяють визначити коефіцієнти квадратичного поліному за наступними причинами:

- 1) два рівні варіювання факторів не дозволяють виявити нелінійний характер перерізу поверхні відгуку;
- 2) при $k \leq 3$ кількість дослідів менше числа невідомих коефіцієнтів;
- 3) стовбці x тотожні стовбцю x_0 , тому такий план не є симетричним і ортогональним.

Для одержання квадратичних моделей фактори варіювати на трьох рівнях. План ПФЕ для двох параметрів при трьох рівнях їх варіювання наведено в табл. 15.6.

Таблиця 15.6. Повний факторний експеримент типу 3^2

Номер дослідів	x_1	x_2	y
1	0	0	y_1
2	+1	0	y_2
3	-1	0	y_3
4	0	+1	y_4
5	+1	+1	y_5
6	-1	+1	y_6
7	0	-1	y_7
8	+1	-1	y_8
9	-1	-1	y_9

Як випливає з розгляду цієї таблиці, для проведення експерименту 3^2 необхідно провести дев'ять дослідів.

Нагадаємо, що план ПФЕ при двох рівнях варіювання передбачає проведення чотирьох дослідів. Тобто кількість дослідів для планів 3^2 більше ніж вдвічі перевищує кількість дослідів планів 2^2 .

Повний факторний експеримент 3^k вимагає занадто великої кількості дослідів, що перевищує кількість обумовлених коефіцієнтів уже для $k > 2$ (табл. 15.7).

Таблиця 15.7. Кількість дослідів у ПФЕ 3^k і кількість коефіцієнтів l у рівнянні регресії другого порядку

Кількість факторів	2	3	4	5	6
Кількість дослідів	9	27	81	243	729
Кількість коефіцієнтів	6	10	15	21	28

15.9. Рототабельний центральний композиційний план

Рівняння множинної регресії другого порядку можна отримати за допомогою рототабельного центрального композиційного планування (РЦКП). Ці плани, як і ортогональні, є композиційними. Вони дозволяють зберегти інформацію, отриману за допомогою ПФЕ чи ДФЕ, яку потім доповнюють дослідом в "зоряних точках" та в центрі плану.

Принцип побудови РЦКП на прикладі двохфакторного експерименту показано на рис. 15.4. Точки 1, 2, 3, 4 утворюють ПФЕ 2^2 , точки 5, 6, 7, 8 – зоряні точки з координатами $(\pm\alpha, 0)$ і $(0, \pm\alpha)$, координати n дослідів у центрі плану нульові – $(0,0)$.

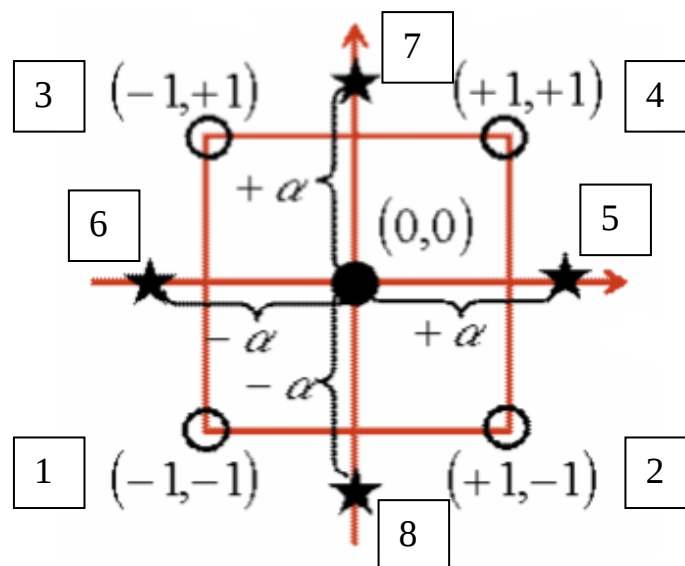


Рисунок 15.4 – Композиційний план другого порядку

Отже, до лінійного рівняння регресії необхідно:

1) додати $2k$ зоряних точок, розташованих на координатних осях факторного простору. Координати зоряних точок:

$$(\pm\alpha, 0, \dots, 0), (0, \pm\alpha, 0, \dots, 0) \dots (0, 0, \dots, 0, \pm\alpha),$$

де α – відстань від центра плану до зоряної точки – зоряне плече;

2) збільшити кількість експериментів у центрі плану N_0 .

Метод РЦКП дозволяє отримати більш точний математичний опис, що досягається завдяки збільшенню числа дослідів у центрі плану та спеціальному вибору величини "зоряного плеча" α .

Загальна кількість N точок РЦКП визначається кількістю дослідів в ядрі плану, в "зоряних точках" та в центрі плану. Вибір величини зоряного плеча α й кількості дослідів у центрі плану пов'язаний з критерієм оптимальності плану.

Характеристики РЦКП наведені в табл. 15.8. Ядром цих планів є ПФЕ або ДФЕ.

Таблиця 15.8. Характеристики РЦКП

Число факторів	Число дослідів в ядрі плану	Величина "зоряного плеча"	Число дослідів у "зоряних точках"	Число дослідів у центрі плану	Загальне число дослідів
2	2^2 (ПФЕ)	1,414	4	5	13
3	2^3 (ПФЕ)	1,682	6	6	20
4	2^4 (ПФЕ)	2,000	8	7	31
5	2^5 (ПФЕ)	2,378	10	10	52
5	2^{5-1} (ДФЕ)	2,000	10	6	32
6	2^6 (ПФЕ)	2,828	12	15	91
6	2^{6-1} (ДФЕ)	2,378	12	9	53
7	2^7 (ПФЕ)	3,333	14	21	163
7	2^{7-1} (ДФЕ)	2,828	14	14	92

Слід зазначити, що немає необхідності проводити N_0 разів досліди в центрі плану. Досить провести цей досвід один раз і записати результат в усі N_0 рядків. Рядки скорочувати не можна, оскільки порушується властивість ортогональності, і коефіцієнти полінома будуть визначені невірно.

15.10. Складання матриці РЦКП

Матриця планування експерименту будується так, як і при ортогональному плані. Відмінність складається тільки в тому, що число дослідів у центрі плану вибирається за умови, що інформація про значення вихідної змінної залишалась незмінною (або практично незмінною) для точок сфери одиничного радіуса, тобто щоб інформаційний профіль мало відрізнявся всередині цієї сфери. Матриця РЦКП для двох факторів наведена в табл. 15.9.

Таблиця 15.9. Матриця РЦКП для двох факторів

Система дослідів	Номер дослідів	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y_i
ПФЕ	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
	2	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_2
	3	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_3
	4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_4
Досліди в "зоряних точках"	5	+1	+1,41	0	0	2	0	y_5
	6	+1	-1,41	0	0	2	0	y_6
	7	+1	0	+1,41	0	0	2	y_7
	8	+1	0	-1,41	0	0	2	y_8
Досліди в центрі плану	9	+1	0	0	0	0	0	y_9
	10	+1	0	0	0	0	0	y_{10}
	11	+1	0	0	0	0	0	y_{11}
	12	+1	0	0	0	0	0	y_{12}
	13	+1	0	0	0	0	0	y_{13}

Матриці, що наведена в табл. 15.9, властивість ортогональності не притаманна.

15.11. Трирівневі плани Бокса-Бенкіна

Розглянуті вище центральні композиційні плани проведення експерименту базувалися на лінійних планах повного або дробового факторного експерименту, до яких додавалася деяка кількість так званих "зоряних" точок. Такі плани називалися центральними, оскільки всі дослідів розташовувалися симетрично центра плану – основного рівня. Вони дозволяли на підставі дослідів отримувати оцінки параметрів рівняння регресії другого порядку наступного вигляду:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2,$$

де $\hat{y}$ – значення відгуку, передбаченого цим рівнянням.

Перший доданок у правій частині рівняння враховує головні лінійні ефекти, другий – ефекти взаємодії, третій – квадратичні ефекти.

До недоліків РЦКП треба віднести той факт, що "зоряні" точки можуть розташовуватися дуже далеко від центральної точки і можуть привести до того факту, що об'єкт, який досліджується в "зоряних" точках може бути неконструктивними, а процес у цих точках неможливим. Ймовірність подібної ситуації суттєво збільшується із зростанням кількості факторів. Так при семи факторах "зоряне" плече становитиме 3,333.

Відомі американські вчені Бокс і Бенкін запропонували варіювати незалежні фактори на трьох рівнях -1 ; 0 ; $+1$.

Числові значення змінних для цих рівнів приймаються виходячи з умов допустимих границь їх зміни. Значення змінних на рівнях -1 і $+1$ є обласними обмеженнями.

Матриця планування експерименту за Боксом-Бенкіним для трьох факторів має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Позначення ± 1 вказує на те, що необхідно скласти всі можливі сполучення значень факторів на верхніх і нижніх рівнях. За цих обставин для реалізації трьох верхніх рядків матриці необхідно провести 12 дослідів. Для нижнього рядка матриці, який відповідає нульовому рівню значень параметрів, за Боксом-Бенкіним необхідно провести три досліді. Таким чином, для дослідження впливу трьох параметрів на поверхню відгуку необхідно провести 15 дослідів, тобто $N = 15$. Для порівняння зазначимо, що для реалізації ПФЕ 33 необхідно провести 27 дослідів.

Плани Бокса і Бенкіна не є композиційними. Для числа факторів від трьох до семи ці плани мають високий ступінь ортогональності, а саме: тільки вільний член b_0 і коефіцієнти b_{ii} при квадратичних членах корельовані між собою. При чотирьох і семи факторах зазначені плани є рототабельними, а при іншому числі факторів ці плани є майже рототабельними.

Боксом і Бенкіним для числа факторів від трьох до семи розглянуто цінний в практичному відношенні клас некомпозиційних планів другого порядку. Ці плани є певними вибірками рядків з ПФЕ типу 3^k . У зазначених планах кожна змінна варіюється всього на трьох рівнях: $+1$, 0 , -1 , в той час як центральні композиційні рототабельні плани другого порядку передбачають використання кожного фактора на п'яти рівнях.

Використання некомпозиційних планів, що передбачають всього три рівня варіювання факторів, спрощує і здешевлює проведення експерименту. Ці плани характеризуються наявністю в рядках матриці планування великого числа нулів, в результаті чого істотно спрощується обчислення коефіцієнтів моделі.

Крім цього, некомпозиційні плани для 3, 4, 6 і 7 факторів вимагають постановки меншого числа дослідів в порівнянні з відповідними РЦКП другого порядку. Кількість дослідів, передбачених некомпозиційними планами і РЦКП другого порядку, можна побачити в табл. 15.10.

Таблиця 15.10. Кількість дослідів

Число факторів	3	4	5	6	7
Некомпозиційний план (вибірка з плану типу 3^k)	15	27	46	54	62
Центральний композиційний рототабельний план другого порядку	20	31	32	58	92

Як випливає з розгляду цієї таблиці для трьох факторів необхідно провести 15 дослідів. Центральний композиційний план вимагає проведення 20 дослідів, а ПФЕ – 27 дослідів.

Розгорнута матриця плану для трьох факторів наведена в табл. 15.11.

Таблиця 15.11. Матриця плану другого порядку для трьох факторів

Номер дослідів	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y
1	+1	+1	+1	0	+1	0	0	+1	+1	0	y_1
2	+1	+1	-1	0	-1	0	0	+1	+1	0	y_2
3	+1	-1	+1	0	-1	0	0	+1	+1	0	y_3
4	+1	-1	-1	0	+1	0	0	+1	+1	0	y_4
5	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_5
6	+1	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	y_6
7	+1	+1	0	-1	0	-1	0	+1	0	+1	y_7
8	+1	-1	0	+1	0	-1	0	+1	0	+1	y_8
9	+1	-1	0	-1	0	+1	0	+1	0	+1	y_9
10	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{10}
11	+1	0	+1	+1	0	0	+1	0	+1	+1	y_{11}
12	+1	0	+1	-1	0	0	-1	0	+1	+1	y_{12}
13	+1	0	-1	+1	0	0	-1	0	+1	+1	y_{13}
14	+1	0	-1	-1	0	0	+1	0	+1	+1	y_{14}
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{15}

Боксом і Бенкіним для визначення коефіцієнтів рівняння регресії отримані формули, які для трьох, чотирьох, п'яти і семи факторів мають вигляд:

$$b_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u}; \quad b_i = A \sum_{j=1}^N x_{ij} y_j; \quad b_{il} = D \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{lj} y_j;$$

$$b_{ii} = B \sum_{j=1}^N x_{ij} y_j + C \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 y_j - \frac{1}{pn_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u},$$

де n_0 – число експериментів в центрі плану; u – номер паралельного експерименту в центрі плану; y_{0u} – значення функції відгуку в u -ому експерименті; N – число експериментів в матриці планування; j – номер експерименту в матриці планування; i, l – номери факторів; $x_{ij} x_{lj}$ – кодовані значення i -го і l -го факторів в j -му експерименті; y_j – значення функції відгуку в j -му експерименті; k – число факторів; A, B, C, D, p – константи, які залежать від числа факторів.

Значення констант A, B, C, D, p и n_0 для 3, 4, 5 и 7 факторів наведені в табл. 15.12.

Таблиця 15.12. Значення констант для розрахунку коефіцієнтів регресії

Число факторів	A	B	C	D	p	n_0
3	1/8	1/4	-1/16	1/4	2	3
4	1/12	1/8	-1/48	1/4	2	3
5	1/16	1/12	-1/96	1/4	2	6
7	1/24	1/16	-1/144	1/8	3	6

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Чим експеримент відрізняється від спостереження?
2. Що розуміється під теорією планування експерименту?
3. Які групи факторів розглядаються в теорії планування експерименту?
4. Що таке рівняння регресії?
5. Яким вимогам мають відповідати відгуки і фактори?
6. Що розуміють під повним факторним експериментом?
7. З якою метою застосовують дробові факторні експерименти?
8. Що розуміють під зоряними точками?
9. Вкажіть переваги планів Бокса-Бенкіна.

16. ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

16. 1. Мета і задачі геометричного моделювання

Геометричне моделювання – розділ математичного моделювання, який дозволяє вирішувати різноманітні задачі в двовимірному, тривимірному і, в загальному випадку, в багатовимірному просторі. Це також сукупність операцій і процедур, що включають формування геометричної моделі об'єкта та її перетворення з метою отримання бажаного зображення об'єкта і визначення його геометричних властивостей. Воно також передбачає побудову математичної моделі, яка описує геометричні властивості предметів оточуючого світу, та базується на аналітичній і диференціальній геометрії, обчислювальній математиці, варіаційному численні, топології та розробляє власні математичні методи моделювання.

Геометрична модель включає в себе системи рівнянь і алгоритми їх реалізації. Математичною основою побудови моделі є рівняння, що описують форму і рух об'єктів. Все різноманіття геометричних об'єктів є комбінацією різних примітивів – найпростіших фігур, які в свою чергу складаються з графічних елементів – точок, ліній і поверхонь.

Геометричним моделям притаманна властивість, яка дає змогу в межах інших дисциплін розробляти на їх основі комп'ютерні моделі графічного, розрахункового, технологічного, економічного характеру з кінцевим результатом комп'ютерного виготовлення проектної документації, включаючи програму керування системи з ЧПК.

Геометричні моделі нерідко мають ієрархічну структуру, що виникає в процесі побудови "знизу" – "вгору". Складові компоненти використовуються для формування об'єктів більш високого рівня, які, в свою чергу, можуть використовуватися для формування об'єктів ще більш високого рівня. Розрізняються геометричні моделі двовимірні та тривимірні.

Метою геометричного моделювання є опис предметів і явищ, яким притаманні геометричні властивості, тому найбільш природним для них є графічне подання.

Геометричне моделювання з успіхом використовується в управлінні та інших областях людської діяльності. Можна виділити дві основні області застосування геометричного моделювання: проектування і наукові дос-

лідження. Воно може використовуватися при аналізі числових даних. У таких випадках вихідним числовим даним ставиться у відповідність деяка геометрична інтерпретація, яка потім аналізується, а результати аналізу тлумачаться в поняттях вихідних даних.

Структурно, в першому наближенні, геометричне моделювання можна представити схемою, показаною на рис. 16.1.

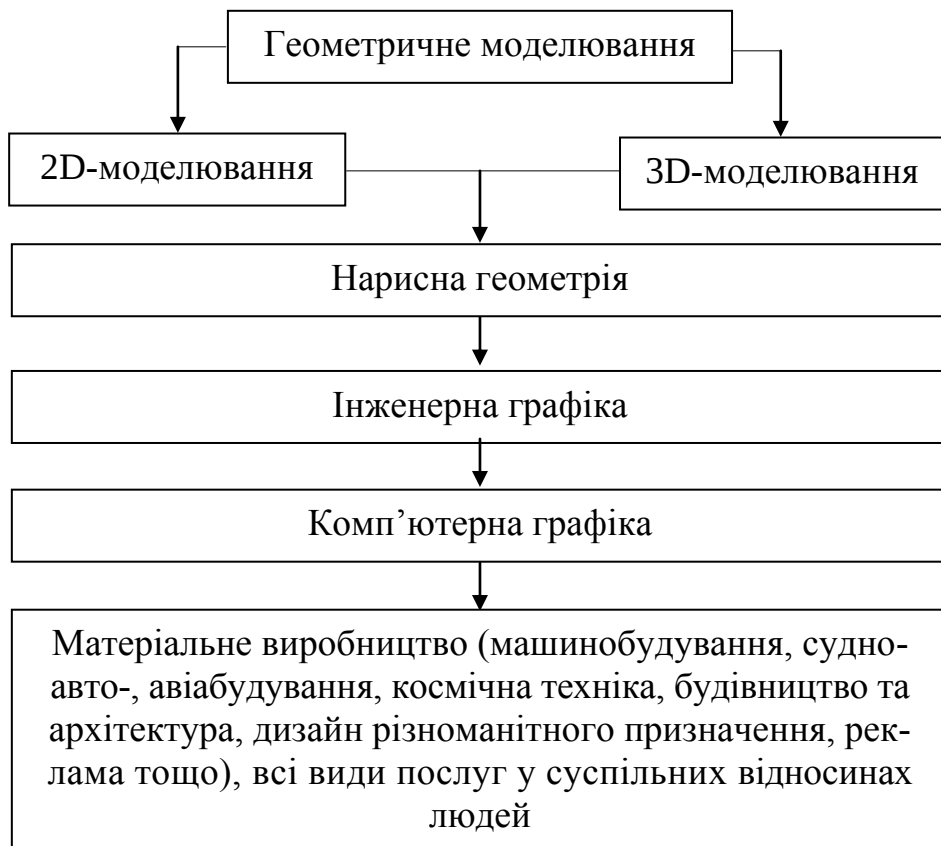


Рисунок 16.1 – Структура геометричного моделювання

Нарисна геометрія є розділом геометрії, в якому вивчають способи подання просторових фігур або оригіналів за допомогою їх зображень (графічних моделей) на площині чи на поверхні.

Інженерна графіка – це загальнотехнічна дисципліна, яка розвиває просторове уявлення та логічне мислення, дає знання, необхідні для виконання, оформлення та читання креслень як під час навчання в вищому навчальному закладі при вивченні наступних загальноінженерних і спеціальних технічних дисциплін, так і в подальшій діяльності.

Комп'ютерна графіка – це сукупність технічних, програмних, мовних засобів і методів зв'язку користувача з ЕОМ на рівні зорових образів під час розв'язання різних задач.

Задачами геометричного моделювання є:

- створення геометричних моделей різноманітних об'єктів;
- розміщення моделей графічних об'єктів в різних проекційно-зображувальних системах;
- організація рухів графічних об'єктів (анімація);
- візуалізація зображень графічних об'єктів.

До задач геометричного моделювання відносяться також перетворення об'єктів, аналіз їх видимості на екрані монітора, а також рішення позиційних і метричних задач на зображуваних об'єктах.

У двовимірному геометричному моделюванні дуже поширені задачі на інтерполяцію, апроксимацію і згладжування. Зазначені види побудов виникають тоді, коли задана послідовність точок, які необхідно з'єднати плавною кривою.

Геометричний образ, який замінює з певним ступенем точності вихідні геометричні дані, називається апроксимуючим, а процес його знаходження – апроксимацією. Якщо модельований обвід проходить через вузлові (задані) точки дискретного представлення геометричного обводу, то він називається інтерполуювальним, а процес його побудови – інтерполяцією.

Аналогічні задачі розв'язуються й у тривимірному геометричному моделюванні, тут також має місце інтерполяція та апроксимація поверхонь, заданих дискретно у вигляді регулярного або нерегулярного набору точок чи ліній. При цьому застосовується каркасно-параметричний метод представлення поверхні, що дозволяє за необхідності перезадавати каркас ліній на поверхні, згущувати цей каркас і т. д.

Нерідкими задачами геометричного моделювання є дискретизація поверхонь, тобто розбивка їх на відсіки (ділянки) однакового або різного виду. Це необхідно, наприклад, при розрахунку і виготовленні корпусів суден і літаків, лопаток турбін, компресорів, оболонок перекриттів споруд тощо.

Важливим розділом тривимірного геометричного моделювання є формування на комп'ютері зображення об'єкта, що може здійснюватися в різних проекційно-зображувальних системах: перспективі, аксонометрії або в ортогональних проекціях. Для цієї мети в комп'ютерній графіці широко використовуються матриці.

Етапи геометричного моделювання:

- постановка геометричної задачі, що відповідає вихідній прикладній задачі або її частини;

- розробка геометричного алгоритму вирішення поставленої задачі;
- реалізація алгоритму за допомогою інструментальних засобів;
- аналіз і інтерпретація отриманих результатів.

Методи геометричного моделювання:

- аналітичний;
- графічний;
- графічний, з використанням засобів комп'ютерної графіки;
- графоаналітичні методи.

При проектуванні кривих ліній і поверхонь часто застосовуються різні геометричні умови, наприклад, проходження через певні точки та з заданими в них кутами нахилу дотичних, забезпечення торкання з прямими або кривими лініями і т. д. Часто до модельованих кривих і поверхонь висуваються вимоги до характеру розподілу кривини і скруту (для просторових кривих). Типовим прикладом двовимірної геометричної моделі є обвід, наприклад, профілю лопатки турбіни, який представляє собою криву, складену з обраних певним чином ділянок кількох кривих (алгебраїчних, степневих, спеціальних функцій, сплайнових тощо). Аналітично криві задаються в явній, неявній або параметричній формі. Часто при моделюванні кривих та поверхонь використовується так звана природна параметризація, коли їх кривина розглядається в залежності від довжини дуги кривої.

Геометричне моделювання почало свій розвиток з систем комп'ютерного креслення. Пізніше з'явилися системи каркасного та поверхневого моделювання. Комп'ютерні системи параметричного твердотілого моделювання кардинально змінили технологію роботи конструктора. Вони дозволили фіксувати конструкторську думку не у вигляді плоского креслення, а у вигляді тривимірної моделі.

Геометричне моделювання дозволяє скоротити час і матеріальні витрати на виробництво спроектованих об'єктів і підвищити їх якість. Воно автоматизує працю дизайнерів, конструкторів, архітекторів, технологів, дозволяє їм відійти від рутинної роботи та зосередитися на творчих аспектах своєї праці. На основі методів геометричного моделювання відбувається перетворення графічних моделей в аналітичні для вирішення міцнісних, оптимізаційних та інших задач систем автоматизованого проектування.

Крім того, геометричне моделювання може бути застосоване у будь-яких сферах життєдіяльності людини – навчанні, науці, виробництві та послугах.

На завершення треба відзначити, що однією з основних перешкод, яка заважає успішному вивченню геометричного моделювання, є недостатній розвиток просторової уяви у студентів. Ця інтелектуальна властивість є необхідною не лише в процесі вивчення графічних дисциплін, але й у пізнанні людиною навколишнього середовища, оволодінні нею різними професіями.

16.2. Моделювання кривих ліній

Криві лінії займають особливе положення в науці та техніці. За їх допомогою розв'язують різноманітні наукові та інженерні задачі. Криві знайшли широке застосування в геометричному моделюванні різних технічних об'єктів. Криві лінії – це обриси багатьох споруд, деталей машин і механізмів, траєкторії рухомих об'єктів. За кривими лініями виконують обводи суден, літаків, автомобілів, лопаток турбін і компресорів тощо.

За допомогою кривих ліній можна наочно простежити хід того чи іншого процесу, відобразити результати експериментальних досліджень або теоретичних розрахунків. Вони надають можливість краще зрозуміти геометричні властивості тієї чи іншої залежності, дослідити закономірності, для яких ще не знайдено аналітичного виразу, розв'язати певну наукову або інженерну задачу.

Криві лінії можуть бути плоскими і просторовими.

Плоска крива лінія – це деяка сукупність точок площини, координати яких є функціями двох змінних. Просторова крива ліній – це деяка сукупність точок простору, координати яких є функціями трьох змінних. Плоска крива переходить в стан просторових, якщо хоча б одна її точка не належить площині розташування плоскої кривої.

Відомо, що майже кожна крива лінія має кілька визначень, тому існують різні способи їх утворення. Внаслідок цього при розгляді кривої лінії часто виходять з її наочного зображення, яке надає можливість розв'язувати різні задачі, застосовуючи метод проекцій. Криву лінію можна розглядати як:

- а) апроксимуючу будь-якої множини точок, отриманих за дискретним законом;
- б) геометричне місце послідовних положень точки, яка неперервно рухається у площині чи просторі, це кінематичний спосіб задання кривої;
- в) результат перетину поверхні з площиною (для плоскої кривої);
- г) результат перетину поверхонь (для просторової кривої).

В літературі можна знайти різні способи аналітичного визначення плоских кривих. При цьому існують способи, які однозначно визначають криву. Сюди відносяться алгебраїчні та різноманітні трансцендентні криві, тобто це криві, які мають певну аналітичну залежність, що пов'язує координати будь-якої точки кривої в явному або неявному вигляді. Сюди відносяться також і параметричні криві.

Нехай у просторі задана деяка декартова прямокутна система координат з базисними векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Опишемо просторову лінію векторною функцією

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 r_i(t) \mathbf{e}_i$$

скалярного аргументу t , що змінюється в межах $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$. Компоненти $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ радіус-вектора $\mathbf{r}(t)$ є однозначними неперервними функціями параметра t . Таке подання лінії називається *параметричним*. Область зміни параметра кривої є відрізком $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ в одновимірному просторі. Криві можуть бути замкнутими і розімкнутими.

Плоску криву можна описувати векторною функцією

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}_1 + y(t)\mathbf{i}_2, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}.$$

Вектори $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ є базисними векторами деякої декартової системи координат двовимірного простору.

У загальному випадку лінію можна подати у вигляді системи двох рівнянь, яким задовольняють координати радіус-вектора точок лінії. Кожне з цих рівнянь можна вважати рівнянням поверхні, тоді система цих рівнянь буде подавати собою лінію перетину поверхонь. Якщо лінія є плоскою, то одним з рівнянь може бути рівняння площини, а другим – рівняння, що зв'язує двовимірні координати радіус-вектора точок лінії в цій площині. Якщо рівняння площини випустити, то отримаємо плоску лінію, яка описується одним рівнянням. Таке подання лінії називається *неявним*. Опис лінії рівнянням відносно її координат на відміну від параметричного опису не завжди є однозначним. Він також не є інваріантним відносно перетворення координат, тобто при переході до іншої системи координат змінюється рівняння, що описує лінію. Неявний спосіб опису ліній застосовується в теоретичних дослідженнях. При моделюванні кривих ліній більш ефективно подавати криві лінії параметричним способом.

Для побудови математичної моделі кривої лінії треба знати залежність її радіус-вектора $\mathbf{r}(t)$ від параметра та область зміни параметра t .

Кожній кривій лінії відповідає свій набір даних і свій алгоритм розрахунку за ним радіус-вектора, а також своя область визначення параметра кривої. За умови, що відома функціональна залежність радіус-вектора від параметра кривої, геометрична інформація такої кривої визначається повністю. Спілкування з математичною моделлю кривої відбувається наступним чином. Звертаються до функціональних залежностей кривої з деяким значенням параметра і в якості відгуку отримують геометричну інформацію при криву в точці, що відповідає заданому значенню параметра. Різні функції кривої видають різну інформацію. Для одних функцій значення параметра має належати області його визначення, для других – може виходити за область визначення, дозволяє отримувати геометричну інформацію для продовження кривої.

Розглянемо лінії, координати радіус-векторів яких подаються із застосуванням аналітичних функцій деякого параметра t . Простішими з цих ліній є конічні перерізи (коло, еліпс, парабола, гіпербола), спіралі тощо.

Пряма лінія. Однією з найпростіших ліній є *пряма лінія*. Вона може бути описана точкою $\mathbf{p}$ і вектором $\mathbf{a}$. Радіус-вектор прямої визначається залежністю

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{a}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Довжина вектора $\mathbf{a}$ може бути довільною але відмінною від нуля. Ділянкою прямої є відрізок. Його можна подати через початкову $\mathbf{p}_1$ і кінцеву $\mathbf{p}_2$ точки:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Плоскі криві. Опису плоских кривих можна придати наступний вигляд

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + x(t)\mathbf{i}_x + y(t)\mathbf{i}_y,$$

де $\mathbf{p}$ – деяка точка прив'язки характерної точки кривої; $\mathbf{i}_x$ і $\mathbf{i}_y$ – не колінеарні вектори; $x(t)$ і $y(t)$ – скалярні функції.

Коло. Коло можна описати, задавши його радіус r , положення центра $\mathbf{p}$ та два взаємно ортогональних вектори одиничної довжини $\mathbf{i}_x$ і $\mathbf{i}_y$, які визначають положення площини розташування кола

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + r \cos t \mathbf{i}_x + r \sin t \mathbf{i}_y, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Коло є плоскою кривою, яка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від центра $\mathbf{p}$. Її неявний опис за допомогою координатних функцій $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$ на площині має вигляд

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Еліпс. Еліпс у викладеній концепції може бути описаним радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + a \cos t \mathbf{i}_x + b \sin t \mathbf{i}_y, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

де a і b – півосі еліпса. Скалярні функції $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$ еліпса пов'язані рівнянням

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1.$$

Гіпербола. Гіпербола може бути описана радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} + a \cosh t \mathbf{i}_x + b \sinh t \mathbf{i}_y, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}.$$

Треба відзначити, що цей радіус-вектор описує тільки одну гілку гіперболи. Друга гілка гіперболи може бути описана радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p} - a \cosh t \mathbf{i}_x + b \sinh t \mathbf{i}_y, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}.$$

Скалярні функції $x(t) = a \cosh t$, $y(t) = b \sinh t$ гіперболи пов'язані рівнянням

$$(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1.$$

Парабола. Парабола може бути описана радіус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} p t^2 \mathbf{i}_x + p t \mathbf{i}_y, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}.$$

Скалярні функції $x(t) = \frac{1}{2} p t^2$, $y(t) = p t$ параболи пов'язані рівнянням

$$2px - y^2 = 0.$$

Криві другого порядку. Еліпс, параболу і гіперболу називають конічними перерізами, оскільки вони можуть бути отримані в результаті перерізу конічної поверхні з площиною за умови, що площина не проходить через вершину конуса. Конічні криві є кривими другого порядку. У загальному випадку рівняння кривої другого порядку має наступний вигляд

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де A , B , C , D , E , F – коефіцієнти, які визначають тип кривої, її положення та орієнтацію на площині (хоча б один із коефіцієнтів має відрізнятися від нуля).

В залежності від значень коефіцієнтів кривої другого порядку можна отримати всі вище розглянуті криві, які впливають з перерізу конуса площиною.

16.3. Складені криві. Сплайни

У різних галузях техніки широко використовуються криві, що складаються з дуг різних кривих, у тому числі кривих другого порядку. Криві,

складені з дуг різних кривих, сполучених між собою певним чином, називають *обводами*. Точки стику називають *вузлами обводу*. Гладкість обводу визначають гладкістю в його вузлах.

Складені плоскі обводи в точках стику окремих сегментів кривих можуть мати різні вимоги щодо їх гладкості. Гладкість першого порядку забезпечується загальною дотичною в точці стику; гладкість другого порядку – загальною дотичною та однаковими радіусами кривини спряжуваних кривих; при гладкості третього порядку до двох вищевказаних вимог додається вимога однакової швидкості зміни кривини спряжуваних кривих. Залежно від вимог, що висуваються до кривих, в інженерній практиці використовують обводи різного порядку гладкості.

У багатьох практичних задачах аналітичний вираз лінії не відомий, але до кривої ставлять вимоги, щоб вона проходила через задані точки, мала визначений порядок гладкості.

Досить великий клас ліній можна побудувати за сукупністю точок. Такі лінії називають *точково-заданими*. Це можуть бути різні сплайни. Задача ставиться наступним чином: є сукупність точок у просторі, треба побудувати лінію інтерполяційну або апроксимаційну, в залежності від умов, які ставляться до результуючої кривої.

При побудові кривої, яка має проходити через задані точки, можна застосувати інтерполяційний поліном Лагранжа чи Ньютона. Формули Лагранжа і Ньютона дають один і той же поліном за різних способів його розрахунку. В обох випадках шукається векторний багаточлен степені n вигляду

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \dots + \mathbf{a}_n t^n,$$

який при заданих значеннях параметра t_i приймають задані значення $\mathbf{p}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Для визначення векторів $\mathbf{a}_i$ будують систему лінійних рівнянь, визначник якої відмінний від нуля, якщо серед точок немає таких, що збігаються одна з одною.

Сплайн Лагранжа. Інтерполяційна формула Лагранжа є розв'язком задачі побудови кривої за заданими точками має вигляд

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)}, \quad t_0 \leq t \leq t_n.$$

До позитивних рис цих багаточленів слід віднести відносну простоту опису кривої, зручність розрахунку коефіцієнтів багаточлену. Але у багаточленів Лагранжа є суттєвий недолік – зміна положення однієї точки примушує перераховувати всі коефіцієнти багаточлена, що призводить до малої швидкості інтерполювання в реальному часі.

Сплайн Ньютона. Інтерполяційний багаточлен Ньютона, який проходить через задані точки, будується в формі

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1(t - t_0) + \mathbf{a}_2(t - t_0)(t - t_1) + \dots + \mathbf{a}_n(t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_{n-1}).$$

Вектори $\mathbf{a}_i$ визначають за умови проходження векторної функції $\mathbf{r}(t)$ через точки $\mathbf{p}_i$ при значеннях параметра t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Формули Ньютона мають високий рівень ефективності, коли вузлові точки розташовані рівновіддалено одна від одної.

Сплайнова крива Catmull – Rom. Цей сплайн будується за заданим масивом точок $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ і відноситься до кривих, що визначаються параметричними рівняннями третього степеня. Він має неперервну першу похідну та розривну другу. Йому притаманний локальний характер – значення сплайна залежать тільки від значень функції в чотирьох сусідніх точках (двох зліва та двох справа).

Крива Catmull – Rom, що проходить через вершини $\mathbf{P}_i$ і $\mathbf{P}_{i+1}$ деякої сукупності точок, описується поліномами третього степеня:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 t^3 + \mathbf{a}_1 t^2 + \mathbf{a}_2 t + \mathbf{a}_3,$$

де t – параметр, який варіюється у межах від 0 до 1, в точці $\mathbf{P}_i$ він дорівнює нулю, а в точці $\mathbf{P}_{i+1}$ – одиниці.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів застосовуються координати точок $\mathbf{P}_i$ і $\mathbf{P}_{i+1}$, а також значення похідних в цих точках. Фактично це є базовим підходом при побудові різних сплайнових кривих. Особливістю побудови кривої Catmull – Rom є своєрідний підхід до визначення похідних. Так, в точці $\mathbf{P}_i$ похідна визначається, спираючись на значення координат точок $\mathbf{P}_{i-1}$ і $\mathbf{P}_{i+1}$, а також із застосуванням деякого коефіцієнта m , названого авторами цієї сплайнової кривої коефіцієнтами напруження.

Рівняння сплайнової кривої Catmull – Rom у векторній формі має вигляд:

$$\mathbf{r}(t) = c_0(t)\mathbf{P}_{i-1} + c_1(t)\mathbf{P}_i + c_2(t)\mathbf{P}_{i+1} + c_3(t)\mathbf{P}_{i+2},$$

де $c_0(t) = -mt(1-t)^2$; $c_1(t) = (2-m)t^3 + (m-3)t^2 + 1$;

$$c_2(t) = (m-2)t^3 + (3-2m)t^2 + mt; \quad c_3(t) = -mt^2(1-t).$$

З розгляду цього виразу випливає, що при варіюванні параметра t у межах від 0 до 1 сплайнова крива Catmull – Rom буде побудована між точками $\mathbf{P}_i$ і $\mathbf{P}_{i+1}$ та точно пройде саме через ці вершини. Ця крива є геометрично неперервною, але набір базових функцій однозначно визначає її форму.

При побудові складеної сплайнової кривої кожний її сегмент розраховується на ділянці між парою внутрішніх точок чергової четвірки з набору базових точок. Тому для побудови цієї інтерполяційної кривої, що починається в першій базовій точці та закінчується в останній базовій точці, треба доповнити набір копіями першої та останньої точок. Копія початкової точки при цьому додається в початок набору, а копія останньої точки – в кінець набору.

На завершення розгляду цієї сплайнової кривої треба додати, що найчастіше параметр напруження t приймається рівним 0,5.

Бета-сплайн. Побудова бета-сплайнових кривих базується на їх властивостях геометричної неперервності. За заданими базовими точками $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ бета-сплайнова крива описується рівнянням:

$$\mathbf{r}(t) = b_0(t)\mathbf{P}_{i-1} + b_1(t)\mathbf{P}_i + b_2(t)\mathbf{P}_{i+1} + b_3(t)\mathbf{P}_{i+2},$$

де t – параметр, який варіюється у межах від 0 до 1.

Функціональні коефіцієнти $b_i(t)$ бета-сплайнової кривої визначаються за наступними виразами:

$$b_0(t) = \frac{2\beta_1^3}{\delta}(1-t)^3;$$

$$b_1(t) = \frac{1}{\delta} \left(2\beta_1^3 t(3-3t+t^2) + 2\beta_1^2(2-3t+t^3) + 2\beta_1 t^2(2-3t+t^3) + \beta_2(1-3t^2+2t^3) \right);$$

$$b_2(t) = \frac{1}{\delta} \left(2\beta_1^2 t^2(3-t) + 2\beta_1 t(3-t^2) + 2\beta_2 t^2(3-2t) + 2(1-t^3) \right);$$

$$b_3(t) = \frac{2t^3}{\delta},$$

де $\beta_1 > 0; \beta_2 \geq 0; \delta = 2\beta_1(\beta_1^2 + 2\beta_1 + 4) + \beta_2 + 2$.

Числові параметри β_1 і β_2 прийнято називати параметрами форми бета-сплайнової кривої (параметр скосу і параметр напруження, відповідно). Функціональні вагові коефіцієнти $b_i(t)$ суттєво впливають на поведінку бета-сплайнової кривої. Вони не залежать від вершин $\mathbf{P}_i$ ламаної та є універсальними. Їх сума дорівнює одиниці та вони завжди є додатними.

Бета-сплайнова крива, як правило, не проходить через жодну з базових точок і розташовується у межах зони, породженою ламаною. Її крайні ділянки є дотичними до векторів $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ і $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$.

Для побудови бета-сплайнової кривої, що починається в першій базовій точці (точці P_0) і закінчується в останній точці (точці P_3), необхідно застосовувати складену бета-сплайнову криву, яка отримується з елементарної бета-сплайнової кривої доповненням до масиву її базових точок P_0, P_1, P_2 і P_3 двох перших точок P_0 та двох останніх точок P_1 .

Складена бета-сплайнова крива є афінно-інваріантною, одночасно вона є проєктивно-неінваріантною. Параметри β_1 і β_2 дозволяють змінювати форму бета-сплайнової кривої, правда відразу всю цілком.

Крива Безьє. Крива Безьє обумовлюється певною сукупністю точок $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, при послідовному з'єднанні яких отримують ламану лінію. Цю ламану прийнято називати характеристичною ламаною. Математично крива Безьє, яка є параметричною кривою, визначається наступним чином:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_{n,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

де $B_{n,i}(t)$ – базисні функції Бернштейна; n – степінь полінома; i – порядковий номер окремої вершини.

Функції Бернштейна мають вигляд:

$$B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1},$$

де $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. При цьому вважається, що $0! \equiv 1$.

Крива Безьє торкається векторів $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ і $\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_n$ і повністю розташовується у межах зони, обмеженої характеристичною ламаною. Показник степеня кривої Безьє визначається кількістю вершин ламаної, зменшеної на одиницю.

Для кривих Безьє третього степеня можна записати вираз для її розрахунку, який має вигляд:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i \beta_i(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

де

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (1-t)^3; & \beta_1 &= 3t(1-t)^2; \\ \beta_2 &= 3t^2(1-t); & \beta_3 &= t^3. \end{aligned}$$

Метод Безьє дозволяє будувати складені криві. Але для досягнення геометричної неперервності необхідно, щоб кожні три точки в місці стику сегментів знаходились на одній прямій.

B-сплайн. У випадку *B-сплайнів* зв'язок між вершинами $P_0, P_1, \dots, P_n$ ламаної і кривою виконується наступним чином:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}_i N_{i,k}(t),$$

де $n + 1$ – кількість вершин характеристичної ламаної; $N_{i,k}$ – нормалізовані базисні функції; k – порядок *B-сплайна* ($2 \leq k \leq n + 1$).

При цьому розуміється, що параметр t варіюється у межах від t_{min} до t_{max} .

Нормалізована базисна функція визначається таким чином:

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}$$

та

$$N_{i,k} = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}.$$

У цих виразах під x_i розуміються вершини так званого вузлового вектора.

На прикладі триланкової ламаної, що визначається чотирма вузловими точками P_0, P_1, P_2, P_3 , можна відмітити такі властивості *B-сплайнів*: при $k = 2$ *B-сплайн* проходить по триланковій ламаній, при $k = 3$ *B-сплайн* крива торкається цієї триланкової ламаної, бо вона є параболою другого степеня. І, нарешті, при $k = 4$ *B-сплайн* крива повністю знаходиться в зоні, обмеженій триланковою кривою, бо вона є кубічною параболою.

Відносно кубічного подання *B-сплайна* можна записати простіші вирази для знаходження координат модельованої кривої. Для заданого набору точок P_0, P_1, P_2, P_3 елементарна кубічна *B-сплайнова* крива визначається за допомогою параметричного рівняння наступного вигляду:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i \beta_i(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

де

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{(1-t)^3}{6}; & \beta_1 &= \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6}; \\ \beta_2 &= \frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6}; & \beta_3 &= \frac{t^3}{6}. \end{aligned}$$

Але, якщо скористатися цими залежностями, то буде побудована тільки ділянка B -сплайн кривої. Для того, щоб побудувати всю криву, треба, як і випадку бета-сплайнів, доповнити масив точок додатковими вершинами характеристичної ламаної (першою та останньою).

Крива Бола. Для чотирьох базових точок P_0, P_1, P_2, P_3 кубічна крива Бола визначається наступним чином:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i \beta_i(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

де

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (1-t)^2; & \beta_1 &= 2t(1-t)^2; \\ \beta_2 &= 2t^2(1-t); & \beta_3 &= t^2. \end{aligned}$$

Незважаючи на те, що базисні функції Бола відрізняються від базисних функцій Бернштейна, які застосовуються в методі Безьє, вони наслідують їх властивості. Так, при $t = 0$ крива Бола збігається з точкою P_0 триланкової ламаної, а при $t = 1$ вона закінчується в точці P_3 – крайній точці триланкової ламаної. Похідні в кінцевих точках кривої Бола мають значення, які обумовлюються векторами P_0P_1 , і P_2P_3 .

Порівнюючи базисні функції кривих Бола з базисними функціями кривих Безьє третього степеня, можна відмітити, що показники степенів при функціях β_0 і β_3 для кривих Бола зменшені на одиницю. Числові коефіцієнти при функціях β_1 і β_2 також менші на одиницю. Це призводить до того, що криві Бола у меншому ступені наближаються до вектору P_1P_2 .

На рис. 16.2 для порівняння наведені криві, побудовані із застосуванням триланкової ламаної. Цифрами на рисунку позначені наступні криві: 1 – сплайнова крива Catmull – Rom з $m = 0,5$; 2 – B -сплайн з $k = 3$; 3 – бета-сплайн з $\beta_1 = 1$ і $\beta_2 = 0$; 4 – крива Безьє; 5 – крива Бола.

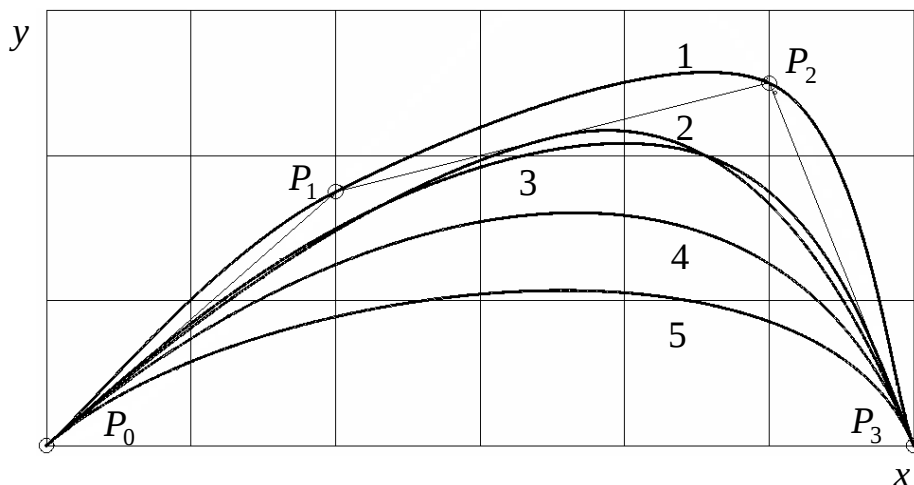


Рисунок 16.2 – Порівняння сплайнових кривих

З розгляду цього рисунка випливає, що всі розглянуті криві проходять через крайні точки триланкової ламаної. Всі вони в них є дотичними до векторів $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, і $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$. Сплайнова крива Catmull – Rom є кривою інтерполяційною, вона проходить через усі вершини триланкової ламаної. Достатньо приємні результати можна отримати при моделюванні обводів із застосуванням бета-сплайнів. Завдяки вдалому вибору коефіцієнтів β_1 і β_2 є можливість побудувати бажану криву.

Найбільш гнучкими є B -сплайни, вони надають можливість змоделювати потрібний обвід, хоча певні проблеми виникають з визначенням порядку кривої. Перевагою цих сплайнів є те, що вони локально впливають на модельовану криву.

Криві Безьє отримали широке поширення в комп'ютерній графіці, вони є кривими апроксимаційними. Деяким їх недоліком є те, що зміна положення навіть однієї вершини ламаної призводить до перебудови всієї кривої, що обмежує їх локальні можливості. Подібні висновки можна зробити щодо кривих Бола. Їм притаманні як переваги, так і недоліки кривих Безьє. Але зниження показників степенів і значень коефіцієнтів призводить до того, що криві Бола мають меншу кривину ніж відповідні криві Безьє.

16.4. Моделювання поверхонь

Поверхня є одним із основних понять геометрії. Світ поверхонь різноманітний і безмежний. Він простягається від елементарної площини, до складних, химерних форм криволінійних поверхонь. Без перебільшення можна стверджувати, що за розмаїттям форм і властивостей, за своїм значенням при формуванні різних геометричних фігур, за тією роллю, яку вони відіграють в науці, техніці, архітектурі, образотворчому мистецтві, поверхні не мають собі рівних серед інших геометричних образів.

Поверхню можна визначити як слід лінії або іншої поверхні, що рухається. На будь-якій поверхні Ξ можна, у загальному випадку, провести дві сім'ї ліній l і m (рис. 16.3), які задовольнятимуть наступній умові: ніякі дві лінії однієї сім'ї не перетинаються між собою і, навпаки, кожна лінія однієї сім'ї перетинає всі лінії іншої

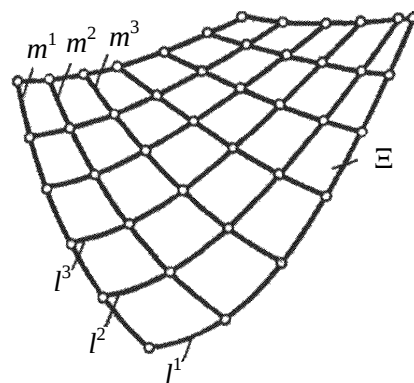


Рисунок 16.3 – Ділянка поверхні

сім'ї. У цьому випадку поверхня Ξ може бути утворена рухом лінії l , яка називається твірною, по нерухомих лініях t другої сім'ї, які називаються напрямними. Неважко зробити висновок, що можна поміняти місцями твірні та напрямні й при цьому буде утворена та ж сама поверхня.

Поверхня, що утворюється за наявності деякого закону переміщення твірної, називається *закономірною*. Якщо закон переміщення твірної невідомий, то поверхня називається *незакономірною*.

Розглянемо в просторі деяку глобальну декартову прямокутну систему координат з базисними векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Будемо подавати поверхню векторною функцією

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=1}^3 r_i(u, v) \mathbf{e}_i, \quad u, v \in \Omega$$

двох скалярних аргументів u і v . Вважатимемо, що $r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)$ радіус-вектори точки поверхні $\mathbf{r}(u, v)$ є однозначними неперервними функціями параметрів u і v . Такий опис поверхні називається параметричним.

Область зміни параметрів поверхні Ω в загальному випадку є довільною зв'язаною двовимірною областю в площині uv . В окремому випадку вона може мати прямокутну форму.

Деякі поверхні можна описати за допомогою рівняння $F(r_1, r_2, r_3) = 0$, якому задовольняють компоненти радіус-вектора її точок. Такий опис поверхні називають неявним. У звичайній точці рівняння поверхні можна переписати у вигляді, розв'язаному відносно однієї з координат, наприклад $r_3 = f_3(r_1, r_2)$. Але неявний опис поверхні на відміну від параметричного не завжди однозначний, що призводить до певних труднощів. Тому для моделювання поверхонь будемо застосовувати їх параметричне подання.

Математична модель поверхні включає в себе функціональну залежність радіус-вектора $\mathbf{r}(u, v)$ від параметрів і двовимірну область Ω зміни параметрів u і v . Отже, треба мати також і математичну модель області визначення своїх параметрів.

Аналitичні поверхні. Координати радіус-вектора деяких поверхонь можуть бути подані аналітичними функціями двох параметрів. Такі поверхні називаються аналітичними.

Опис аналітичних поверхонь зручно виконувати у вигляді

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p} + x(u, v) \mathbf{i}_x + y(u, v) \mathbf{i}_y + z(u, v) \mathbf{i}_z,$$

де $\mathbf{p}$ – деяка точка прив'язки характерної точки поверхні; $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$ і $\mathbf{i}_z$ – взаємно ортогональні вектори одиничної довжини.

Точка $\mathbf{p}$ і вектори $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ і $\mathbf{i}_z$ представляють собою місцеву декартову систему координат, а функції $x(u, v)$, $y(u, v)$ і $z(u, v)$ розглядають як координати радіус-вектора в місцевій системі координат.

Сфера. Сферичну поверхню або сферу можна описати, задавши її радіус r , положення центра $\mathbf{p}$ і три взаємно ортогональні вектори одиничної довжини $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ і $\mathbf{i}_z$, що визначають положення та орієнтацію декартової системи координат. Радіус-вектор сфери визначається залежністю

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p} + r \cos v \cos u \mathbf{i}_x + r \cos v \sin u \mathbf{i}_y + r \sin v \mathbf{i}_z,$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq v \leq \pi/2.$$

Функції $x(u, v) = r \cos v \cos u$, $y(u, v) = r \cos v \sin u$, $z(u, v) = r \sin v$ сфери пов'язані рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Еліпсоїд. Поверхня еліпсоїда може бути описана формулою

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p} + a \cos v \cos u \mathbf{i}_x + b \cos v \sin u \mathbf{i}_y + c \sin v \mathbf{i}_z,$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq v \leq \pi/2,$$

де a , b , c – півосі еліпсоїда.

Функції $x(u, v) = a \cos v \cos u$,
 $y(u, v) = b \cos v \sin u$, $z(u, v) = c \sin v$
 еліпсоїда пов'язані рівнянням

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Приклад поверхні еліпсоїда наведено на рис. 16.4. Перетини цієї поверхні площинами, ортогональними векторам $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ і $\mathbf{i}_z$, є еліпсами.

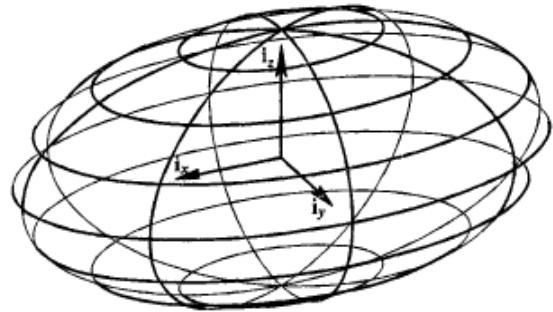


Рисунок 16.4 – Еліпсоїд

Однопорожнинний гіперболоїд. Радіус-вектор однопорожнинного гіперболоїда

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p} + a \cosh v \cos u \mathbf{i}_x + b \cosh v \sin u \mathbf{i}_y + c \sinh v \mathbf{i}_z,$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max},$$

де a , b , c – півосі гіперболоїда.

Функції $x(u, v) = a \cosh v \cos u$, $y(u, v) = b \cosh v \sin u$, $z(u, v) = c \sinh v$ гіперболоїда пов'язані рівнянням

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Перетини цієї поверхні площинами, ортогональними векторам $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ і $\mathbf{i}_z$, є еліпсами. Приклад поверхні однопорожнинного гіперболоїда показано на рис.16.5.

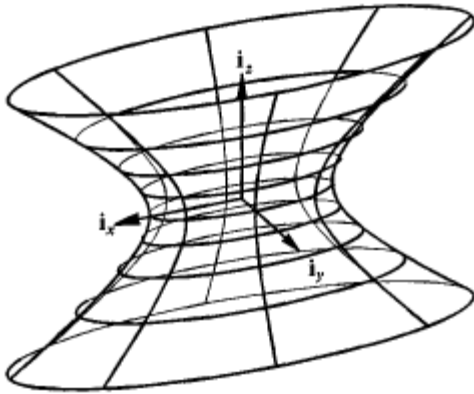


Рисунок 16.5 – Однопорожнинний гіперболоїд

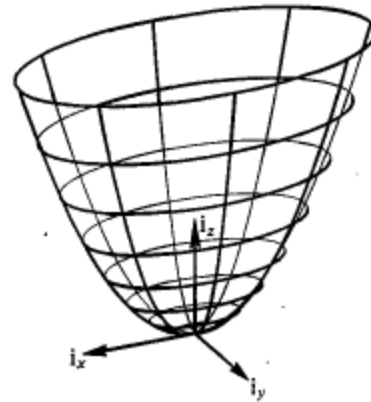


Рисунок 16.6 – Еліптичний параболоїд

Еліптичний параболоїд. Еліптичний параболоїд описується наступною векторною функцією

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p} + av \cos u \mathbf{i}_x + bv \sin u \mathbf{i}_y + v^2 \mathbf{i}_z,$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq v_{\max},$$

де a, b – півосі еліпса, отримані як координатні лінії $v = \text{const}$ поверхні.

Функції $x(u, v) = av \cos u$, $y(u, v) = bv \sin u$, $z(u, v) = v^2$ еліптичного параболоїда пов'язані рівнянням

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z.$$

Перетини параболоїда площинами, що проходять через вісь $\mathbf{i}_z$, є параболоми, а перетини параболоїда площинами, ортогональними вектору $\mathbf{i}_z$, є еліпсами. Еліптичний параболоїд показано на рис. 16.6.

Кінематичні поверхні. Ці поверхні можна отримати шляхом руху деякої кривої за заданою траєкторією. Область зміни параметрів цих поверхонь є прямокутником. Крива, рухом якої утворюється поверхня, називається твірною, а траєкторія руху деякої її точки називається напрямною. У загальному випадку напрямною може бути довільна крива. Серед можливих напрямних найчастіше застосовують відрізок прямої лінії та дугу кола.

Поверхня видавлювання. Поверхня видавлювання, отримана рухом кривої $\mathbf{c}(t)$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$, вздовж вектора $\mathbf{d}$, описується радіус-вектором

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\mathbf{d}, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Протяжність поверхні видавлювання визначається довжиною вектора $\mathbf{d}$. Приклад поверхні видавлювання показано на рис. 16.7.



Рисунок 16.7 – Поверхня видавлювання

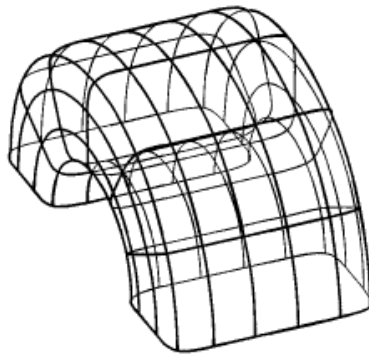


Рисунок 16.8 – Поверхня обертання

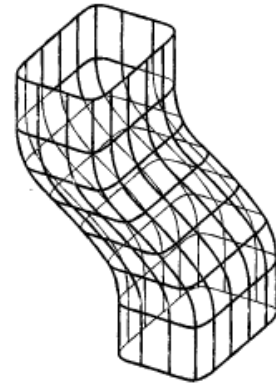


Рисунок 16.9 – Поверхня зсуву

Поверхня обертання. Поверхня, отримана обертанням кривої $\mathbf{c}(t)$, $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$, на кут α навколо осі, заданої одиничним вектором $\mathbf{i}$ та точкою $\mathbf{p}$, описується радіус-вектором

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) = & \mathbf{p} + ((\mathbf{c}(u) - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{c}(u) - \mathbf{p} - ((\mathbf{c}(u) - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i})\mathbf{i})\cos v + \\ & + \mathbf{i} \times (\mathbf{c}(u) - \mathbf{p})\sin v = \mathbf{p} + \mathbf{r}_3(u) + \mathbf{r}_1(u)\cos v + \mathbf{r}_2(u)\sin v, \\ & t_{\min} \leq u \leq t_{\max}, \quad 0 \leq v \leq \alpha, \end{aligned}$$

де $\mathbf{r}_3(u) = ((\mathbf{c}(u) - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i})\mathbf{i}$ – складова вектора $\mathbf{c}(u) - \mathbf{p}$, паралельна осі обертання; $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{c}(u) - \mathbf{p} - \mathbf{r}_3(u)$ – складова вектора $\mathbf{c}(u) - \mathbf{p}$, перпендикулярна до осі обертання; $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} \times (\mathbf{c}(u) - \mathbf{p})$ – вектор, перпендикулярний до перших двох векторів, довжина якого дорівнює довжині вектора $\mathbf{r}_1(u)$.

Приклад поверхні обертання наведено на рис. 16.8.

Поверхня зсуву. Радіус-вектор поверхні зсуву визначається формулою

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) = & \mathbf{g}(v) + (\mathbf{c}(u) - \mathbf{g}(v_{\min})) - \mathbf{h}, \\ & t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}, \end{aligned}$$

де $\mathbf{h}$ – вектор прив'язки твірної до напрямної. Вектор $\mathbf{h}$ зсуває криву $\mathbf{c}(u)$ на деяку величину з її початкового положення відносно напрямної і зберігає цей зсув під час руху.

Якщо $\mathbf{h} = 0$, то зберігається вихідне положення твірної відносно початкової точки напрямної. Радіус-вектор поверхні зсуву будується як сума двох векторів: вектора точки на напрямній $\mathbf{g}(v)$ і вектора положення точки твірної відносно початкової точки напрямної із зсувом $(\mathbf{c}(u) - \mathbf{g}(v_{\min})) - \mathbf{h}$. Приклад поверхні зсуву показано на рис. 16.9.

Лінійчата поверхня. Лінійчата поверхня є геометричним місцем відрізків прямих, що з'єднують відповідні точки двох заданих ліній. Її можна отримати шляхом руху прямої лінії по двох напрямних, при цьому кожній точці однієї кривої має відповідати визначена точка другої кривої.

Нехай задані дві напрямні криві лінії $\mathbf{a}(t)$ і $\mathbf{d}(w)$, де параметри t і w змінюються в межах $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ і $w_{\min} \leq w \leq w_{\max}$. Радіус-вектор лінійчатої поверхні визначається формулою

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= (1-v)\mathbf{a}(t) + v\mathbf{d}(w), \\ t &= t_{\min}(1-u) + t_{\max}u, \quad w = w_{\min}(1-u) + w_{\max}u, \\ 0 &\leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1.\end{aligned}$$

Якщо криві $\mathbf{a}(t)$ і $\mathbf{d}(w)$ збігаються, то радіус-вектор може бути описаним функцією

$$\mathbf{r}(u, v) = (1-v)\mathbf{a}(u) + v\mathbf{d}(u), \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

На рис. 16.10 наведено приклад лінійчатої поверхні.

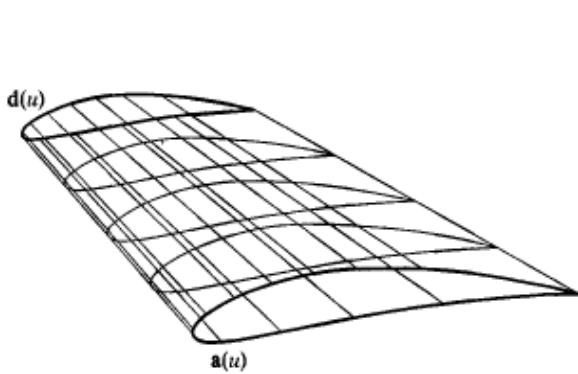


Рисунок 16.10 – Лінійчата поверхня

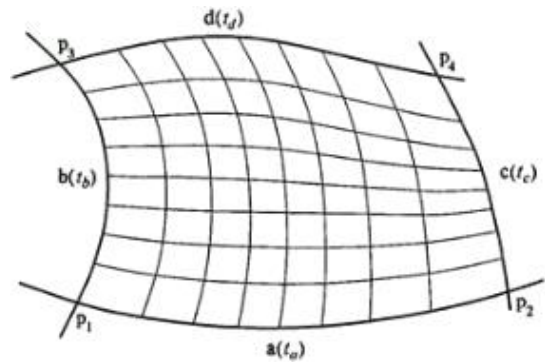


Рисунок 16.11 – Поверхня Кунса

Поверхні Кунса. Поверхня Кунса будується по чотирьом рівноправним кривим. Розглянемо чотири криві $\mathbf{a}(t_a)$, $\mathbf{d}(t_d)$, $\mathbf{b}(t_b)$, $\mathbf{c}(t_c)$, які попарно перетинаються в точках $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ (рис. 16.11).

Побудуємо поверхню на ділянці, обмеженій цими кривими. Припустимо, що точкам $\mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_2$ на кривій $\mathbf{a}(t_a)$ відповідають параметри $t_{a \min}$ і $t_{a \max}$, точкам $\mathbf{p}_1$ і $\mathbf{p}_3$ на кривій $\mathbf{b}(t_b)$ – параметри $t_{b \min}$ і $t_{b \max}$, точкам $\mathbf{p}_3$ і $\mathbf{p}_4$ на кривій $\mathbf{d}(t_d)$ – параметри $t_{d \min}$ і $t_{d \max}$, точкам $\mathbf{p}_2$ і $\mathbf{p}_4$ на кривій $\mathbf{c}(t_c)$ – параметри $t_{c \min}$ і $t_{c \max}$. Поверхню, побудовану по цим чотирьом кривим, можна описати радіус-вектором

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u, v) &= (1-v)(\mathbf{a}(t_a) - (1-u)\mathbf{p}_1) + (1-u)(\mathbf{b}(t_b) - v\mathbf{p}_3) + v(\mathbf{d}(t_d) - u\mathbf{p}_4) + \\ &+ u(\mathbf{c}(t_c) - (1-v)\mathbf{p}_2) = (1-v)\mathbf{a}(t_a) + (1-u)\mathbf{b}(t_b) + u\mathbf{c}(t_c) + v\mathbf{d}(t_d) - \\ &- (1-u)(1-v)\mathbf{p}_1 - u(1-v)\mathbf{p}_2 - (1-u)v\mathbf{p}_3 - uv\mathbf{p}_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_a &= t_{a \min} (1-u) + t_{a \max} u, & t_b &= t_{b \min} (1-v) + t_{b \max} v, \\
t_c &= t_{c \min} (1-v) + t_{c \max} v, & t_d &= t_{d \min} (1-u) + t_{d \max} u, \\
0 &\leq u \leq 1, & 0 &\leq v \leq 1.
\end{aligned}$$

Легко перевірити, що вектор $\mathbf{r}(u, 0)$ описує ділянку кривої $\mathbf{a}(t_a)$, вектор $\mathbf{r}(u, 1)$ – ділянку кривої $\mathbf{d}(t_d)$, вектор $\mathbf{r}(0, v)$ – ділянку кривої $\mathbf{b}(t_b)$, вектор $\mathbf{r}(1, v)$ – ділянку кривої $\mathbf{c}(t_c)$. При цьому зовсім не обов'язково, щоб $t_{j \min}$ було менше $t_{j \max}$, $j = a, b, c, d$.

Поверхні Безьє. Розглянуті вище криві Безьє характерні тим, що їх радіус-вектор, представлений у вигляді суми радіус-векторів точок у просторі, помножених на деякі коефіцієнти, які є скалярними функціями параметра кривої. Скалярні функції є функціями Бернштейна. Подібним же чином будуються поверхні Безьє, радіус-вектор яких подається у вигляді суми точок у просторі, помножених на коефіцієнти, які є функціями Бернштейна параметрів поверхні.

Розглянемо побудову поверхні більш детально. Нехай маємо сукупність точок $\mathbf{p}_{ij}$, утворюючих сітку, тобто точки умовно розташовані у вигляді $n + 1$ рядків по $m + 1$ точок у кожному рядку. Індеси точки $\mathbf{p}_{ij}$ означають, що точка розташована в j -му рядку з номером точки i в рядку. Нумерувати рядки будемо від 0 до n , а точки в них – від 0 до m .

Поверхня Безьє, яка побудована на сукупності точок $\mathbf{p}_{ij}$, визначатиметься радіус-вектором

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_j^m(u) B_i^n(v) \mathbf{p}_{ij}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

де $B_j^m(u)$, $B_i^n(v)$ – базисні функції Бернштейна:

$$B_i^n(v) = \frac{n!}{(n-i)!i!} v^i (1-v)^{n-i}; \quad B_j^m(u) = \frac{m!}{(m-j)!j!} u^j (1-u)^{m-j}.$$

Поверхня Безьє та її характеристичний багатогранник показані на рис. 16.12.

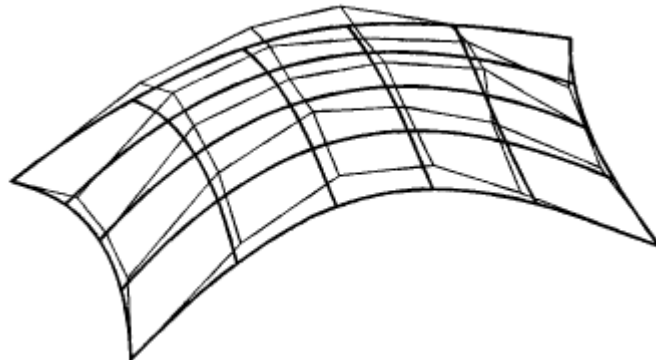


Рисунок 16.12 – Поверхня Безьє

Відзначимо, що подібно поверхням Безьє можна будувати *B*-сплайнові поверхні.

У спеціальній літературі можна знайти багато інших способів моделювання поверхонь, у тому числі із визначеними законами розподілу їх кривини вздовж головних їх напрямів. На жаль обмежений обсяг посібника не дозволяє цього зробити.

На завершення треба зазначити, що в геометричному моделюванні виникли потреби в нових знаннях, необхідних для створення моделей, які відповідають вимогам сучасних інноваційних високотехнологічних виробництв. Так, зокрема, тривимірне геометричне моделювання, без якого не обходиться жодне технічне рішення, наприклад, архітектурне або промислове проектування, – це нова область знань, яка об'єднала нарисну геометрію, інженерну та комп'ютерну графіку і яка бурхливо розвивається.

Запитання і завдання для самоперевірки

1. Що розуміють під геометричним моделюванням?
 2. Назвіть складові схеми геометричного моделювання.
 3. Перелічіть задачі геометричного моделювання.
 4. Обґрунтуйте важливість дослідження кривих ліній.
 5. Назвіть конічні перерізи.
 6. Що розуміється під кривими другого порядку?
 7. Які вимоги подаються до складених кривих в точках стику їх ділянок?
 8. Яка різниця між інтерполувальними та апроксимувальними сплайнами?
 9. Обґрунтуйте важливість геометричного моделювання поверхонь.
-

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Арнольд, В. И.** Теория катастроф [Текст] / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1990. – 128 с.
2. **Борисенко, В. Д.** Організація наукових досліджень в Україні: навчальний посібник [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко. – Миколаїв : ФОП Швець В.М., 2016. – 258 с.
3. Виртуальная лаборатория математического моделирования [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.mathmod.narod.ru/>
4. **Голованов, Н. Н.** Геометрическое моделирование [Текст] / Н. Н. Голованів. – М. : Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
5. **Калиткин, М. И.** Численные методы [Текст] / И. М. Калиткин. – М. : Наука, 2005. – 412 с.
6. **Князь, І. О.** Комп'ютерне моделювання динамічних систем. Розділ "Основи комп'ютерного моделювання" : навчальний посібник [Текст] / І. О. Князь. – Суми : Сумський державний університет, 2011. – 102 с.
7. **Кобелев, Н. Б.** Имитационное моделирование: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Н. Б. Кобелев, В. А. Половников, В. В. Девятков. – М. : КУРС: НИЦ Инфра-М, 2013. – 368 с.
8. **Колесов, Ю. Б.** Моделирование систем. Динамические и гибридные системы: Учебное пособие [Текст] / Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 224 с.
9. **Королёв, А. Л.** Компьютерное моделирование. Лабораторный практикум [Электронный ресурс] / А. Л. Королёв. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 296 с. Режим доступа: <http://www.znanium.com/>
10. **Лукьянец, С. В.** Электронный учебно-методический комплекс дисциплины "Моделирование в проектировании промышленных систем" / С. В. Лукьянец, А. С. Климчик. – Минск : БГУИР, 2007.– 279 с.
11. **Майер, Р. В.** Компьютерное моделирование: Учебно-методическое пособие [Текст] / Р. В. Майер. – Глазов : ГПТИ, 2015. – 617 с.
12. **Мандельброт, Б.** Фрактальная геометрия природы [Текст] / Б. Мандельброт. – М. : Институт компьютерных технологий, 2002. – 656 с.

13. **Марков, А. А.** Моделирование информационно-вычислительных процессов [Текст] / А. А. Марков. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 360 с.
 14. **Морозов, А. Д.** Введение в теорию фракталов [Текст] / А. Д. Морозов. – М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
 15. **Подлесний, С.В.** Історія інженерної діяльності: Навчальний посібник [Текст] / С. В. Подлесний, Ю. О. Єрфорт, В. М. Іскрицький. – Краматорськ : ДДМА, 2004. – 128 с.
 16. **Рукавишников, В.А.** Геометрическое моделирование как методологическая основа подготовки инженера [Текст] / В. А. Рукавишников. – Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 2003. – 184 с.
 17. **Рябенский, В. С.** Введение в вычислительную математику [Текст] / В. С. Рябенский. – М.:Наука, 1994. – 288 с.
 18. **Самарский А. А.** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры [Текст] / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Физматлит, 2002. – 320 с.
 19. **Ситник, В. Ф.** Імітаційне моделювання: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц [Текст] / В. Ф. Ситник, Н. С. Орленко. – К. : КНЕУ, 1999. – 208 с.
 20. **Советов, Б. Я.** Моделирование систем. Учебник для вузов [Текст] / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 2001. – 342 с.
 21. **Советов, Б. Я.** Моделирование систем. Практикум [Текст] / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев.. – М.: Высш. шк., 1999. – 224 с.
 22. **Тарасевич, Ю. Ю.** Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс [Текст] / Ю. Ю. Тарасевич. – М. : Эдиториал УРСС, 2002. – 144 с.
 23. **Цисарь, И. Ф.** Компьютерное моделирование экономики [Текст] / И. Ф. Цисарь, В. Г. Нейман. – М. : Диалог-МИФИ, 2002. – 304 с.
-

Начальне видання

БОРИСЕНКО Валерій Дмитрович

УСТЕНКО Сергій Анатолійович

УСТЕНКО Ірина Валеріївна

ОСНОВИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ІНЖЕНЕРНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Навчальний посібник

Надруковано з оригінал-макету,
підготовленого авторами посібника

Підписано до друку __.__.2016 р. Формат 60×94/16. Папір офсетний.

Друк цифровий. Ум. друк. арк. 17,5. Тираж 100.

Зам. № від __.__. 2016 р.

Надруковано ФОП Швець В. М.

тел. (0512) 50-04-48

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 5078 від 01.04.2016 р.