

Міністерство освіти і науки України
Херсонський національний технічний університет

**Хомченко А.Н.
Литвиненко О.І.
Астіоненко І.О.**

КОГНІТИВНО-ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ ІЄРАРХІЧНИХ БАЗИСІВ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Монографія

Херсон
2019

УДК 519.65
K57

Рекомендовано Вченою радою
Херсонського національного технічного університету
(протокол № 07 від 22.05.2018 р.)

Рецензенти:

Гнатюшенко Володимир Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Гоменюк Сергій Іванович – доктор технічних наук, професор, декан математичного факультету Запорізького національного університету.

Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О.

Когнітивно-графічний аналіз ієрархічних базисів скінченних елементів. – Херсон: ОЛДІ-плюс, 2019. – 260 с.

K57 **ISBN 978-966-289-272-7**

Монографія присвячена задачі конструювання багатопараметричних інтерполяційних поліномів з кількістю степенів вільності, яка регулюється. Ця задача є яскравим прикладом м'якого математичного моделювання та розв'язується за допомогою методів когнітивної графіки. Серендипові скінченні елементи – це невичерпне джерело першокласного освітнього матеріалу для викладачів, студентів та аспірантів.

Слід відзначити, що це перша україномовна книга на цю тему.

УДК 519.65

© А.Н. Хомченко, О.І. Литвиненко, І.О. Астіоненко, 2019
© ХНТУ, 2019

ISBN 978-966-289-272-7

ВСТУП

Відомий академік Володимир Миколайович Страхов на одній з публічних лекцій сказав, що практично всі прикладні задачі – це задачі теорії наближення функцій [48]. Задачі відновлення функцій виникають при реалізації дискретних методів: скінченних різниць (СР), скінченних елементів (СЕ), контрольних об'ємів (КО). В теперішній час, завдяки розвитку комп'ютерної техніки, метод скінченних елементів (МСЕ) використовують при розв'язанні найрізноманітніших задач математичної фізики. У МСЕ задача інтерполяції розв'язується у локальній області – скінченному елементі, за допомогою яких виконують дискретизацію неперервної конструкції. Від якості представлення поля на одному елементі залежить якість остаточного розрахунку. На початку 40-х років минулого сторіччя, коли Курант сформулював ідею метода скінченних елементів [91], серед інженерів панував метод скінченних різниць (МСР). Курант запропонував поділити прямокутну комірку ортогональної сітки МСР навпіл (на два трикутника), маючи на увазі можливість застосування у трикутнику лінійної інтерполяції функції двох аргументів. Пізніше Тернер узагальнив ідею Куранта на довільно орієнтовані трикутники [105], а процедура тріангуляції стала найбільш природним і звичним способом дискретизації області у двовимірних крайових задачах. Після появи унітарного базису білінійної інтерполяції відродився інтерес до прямокутних (квадратних) комірок. Стало зрозумілим, що при дискретизації двовимірної області довільної конфігурації квадратні комірки зручні всередині області, а трикутні – в приграничній смузі. Інша можливість апроксимувати криволінійну границю області пов'язана із введенням криволінійних координат у чотирикутнику. Перша спроба скористатися білінійними функціями форми для запровадження неортогональних координат була здійснена Тайгом у 1961 році [102]. Він застосував білінійний базис для деформування прямокутника в довільний чотирикутник. У 1964 році білінійні апроксимації з цією ж метою успішно застосовували Галлагер, Раттінгер і Арчер [95]. У 1966 році Айронс узагальнив цю ідею на інші

скінченні елементи [99]. Так з'явилася дуже зручна форма перетворення скінченного елемента – параметричне перетворення, коли залежність між локальними координатами елемента і глобальними координатами записують з використанням інтерполяції того самого типу, що і використана для апроксимації польової функції (ізопараметричне перетворення).

У 1968 році Ергатудіс, Айронс, Зенкевич та Ахмад запропонували сім'ю ізопараметричних елементів з криволінійними границями [93]. Вигадливим підбором поліномів за допомогою заданих граничних вузлів ці автори несподівано відкрили елементи, що апроксимують достатньо загальні границі. Зенкевич запропонував назву «serendipity» family і цей термін відразу став звичним у науково-технічній літературі [24]. Наведені у літературних джерелах базисні функції серендипових скінченних елементів називають стандартними. В теорії наближення функцій багатьох змінних елементи серендипової сім'ї відіграють дуже важливу роль. Ці елементи можна побудувати на основі лагранжевих елементів, якщо вилучити внутрішні вузли інтерполяції. Таке вилучення не впливає на поведінку функції на границі між елементами і при цьому істотно скорочує обсяг обчислень та необхідну для збереження інформації пам'ять комп'ютера. Ці функції добре працюють в задачах ізопараметричного перетворення квадрата в довільний чотирикутник, але інтерполяційні якості стандартних базисів не завжди бездоганні. Усі стандартні базиси серендипових скінченних елементів, крім білінійного, мають недоліки. До них можна віднести наявність від'ємних навантажень у повузловому розподілі рівномірної масової сили, а також кратні нулі у вузлах. Інтерполяційні властивості функцій форми в МСЕ мають надзвичайно важливу роль, тому спроби їх удосконалення почалися ще в 70-х роках минулого століття. Однак в рамках традиційного матричного аналізу звільнитися від названих недоліків не вдається. Процедура систематичного генерування базису, що була запропонована Тейлором у 1972 році, привела до вже відомих стандартних моделей [103]. У кінці 70-х років завдяки роботам Уачспреса з'явився геометричний метод моделювання базисних функцій [106]. Але цей метод не отримав відповідного розвитку на скінченних елементах, а на серендипових елементах взагалі не застосовувався. На початку 80-х років

був запропонований ймовірісно-геометричний метод конструювання базисів скінченних елементів різноманітної конфігурації [66; 71; 74]. Переваги цього метода найбільш виразно проявилися саме на серендипових моделях.

Зенкевич і Морган у своїй монографії [23] запропонували метод підвищення ефективності обчислювальних якостей базисів за допомогою адитивного уточнення – коли функції вищих степенів послідовно отримуються за допомогою додавання відповідних доданків. Такі базисні функції, які отримані за допомогою адитивного уточнення, автори [23] називають *ієрархічними* (від терміну «Ієрархія» – механізм утворення нових класів на основі використання уже існуючих). Таким чином, засновники МСЕ передбачили неоднозначність апроксимації функції багатьох аргументів на серендипових елементах вищих порядків. Саме це стало для нас поштовхом для пошуку методів побудови ієрархічних форм базисних функцій.

Виникла думка представити адитивні уточнення у вигляді додаткових графічних образів при формуванні поверхонь базисних функцій, тобто скористатися методами когнітивної графіки, яка дозволяє образно представити математичні об'єкти і відкриває можливості для створення нових базисів і оптимізації існуючих. Саме це відбувається у новому методі, який ми назвали *когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних базисів СЕ* [25].

Монографія складається з десяти розділів і додатка. Перший розділ знайомить читача зі стандартними методами побудови функцій-«пагоди». У методі скінченних елементів функція-«пагода» – це поверхня, що утворюється поверхнями базисних функцій при об'єднанні чотирьох скінченних елементів з білінійною інтерполяцією навколо спільного вузла [47; 79]. Далі автори пропонують нові методи побудови функцій-«пагоди» і показують існування глибоких зв'язків між теорією інтерполяції, диференціальними рівняннями, теорією ймовірностей, схемами випадкових блукань метода Монте-Карло. У першому розділі введено необхідні поняття, що стосуються вживаної термінології: серендипів скінченний елемент (ССЕ), стандартні моделі, барицентричні координати, перехідні ймовірності, зважене усереднення, метод «добутку» площин тощо.

Другий, четвертий, сьомий і дев'ятий розділи присвячені квадратичним (CCE-8, CCE-20) і кубічним (CCE-12, CCE-32) скінченним елементам на площині і у просторі. На цих елементах розглядаються стандартні методи побудови інтерполяційного полінома (матричний метод і метод Тейлора) [45; 103; 16]. Автори також наводять нові методи конструювання базисів: ймовірісно-геометричний [9; 57; 66; 78; 79; 81; 82], геометричний [20; 52; 56; 83], комбінований алгебро-геометричний [1; 2; 3; 5; 7; 8; 58; 61; 64; 76; 77; 80], когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій [30; 65; 72,]. У другому і сьомому розділах сформульовані властивості, яким повинні задовольняти базисні функції CCE. Багато уваги приділено такій важливій у MCE властивості, як розподіл рівномірної масової сили по вузлах скінченного елемента. Зазначимо, що раніше спочатку будувались базиси CE, а потім обчислювались значення повузлового навантаження. Автори сформулювали і розв'язали обернену задачу: побудувати базисні функції за заздалегідь визначеним розподілом навантаження [1; 2; 3; 5; 7; 8; 53; 58; 61; 64; 76; 77; 80]. Обернені задачі серендипових апроксимацій привели до створення комбінованого (алгебро-геометричного) методу конструювання базисів CCE. Об'єднання двох підходів в один ефективний метод є природним наслідком історичного розвитку алгебри і геометрії. У комбінованому методі отримали подальший розвиток, з одного боку, ідеї Уачспреса, а з іншого боку, традиційна техніка матричного аналізу.

Третій, п'ятий, восьмий і десятий розділи присвячені методам конструювання функцій форми з параметром (p або K). Автори створили і розвинули процедуру конструювання багато-параметричних інтерполяційних поліномів з кількістю степенів вільності, яка регулюється [1; 5]. Поява керуючого параметра дозволила авторам отримати нові багатопараметричні моделі на серендипових скінченних елементах на площині і у просторі (наприклад, на CCE-8 [2; 3; 70; 72], CCE-20 [3; 64] – вперше отримані альтернативні базиси), які не тільки задовольняють основним властивостям базисів MCE, а і реалізують додаткові умови:

- мають меншу кількість кратних нулів у інтерполяційному поліномі;

- реалізують експериментальний спектр навантажень;
- задовольняють інтегральним критеріям гармонічності Привалова і Кюбе;
- задовольняють критерію повноти.

Наявність параметра дозволяє не тільки досліджувати базиси CCE, а також керувати серендиповою поверхнею з метою оптимізації інтерполяційних властивостей і обчислювальних якостей нових моделей.

У монографії альтернативні базиси CCE тестуються на модельних задачах, а питанням їх практичного застосування в методі скінченних елементів автори планують присвятити наступну книгу.

РОЗДІЛ 1

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ФУНКЦІЇ-«ПАГОДИ»

1.1. Функція-«пагода»

Задачі відновлення функцій належать до теорії наближення функцій і виникають у різних прикладних областях: аналіз і візуалізація фізичних полів, теорія оптимізації, комп'ютерна графіка, неперервне управління, метеорологія, топографія, при оцінці продуктивності родовищ нафти і газу, в екологічних дослідженнях тощо. Задача відновлення функції полягає у тому, що для функції, відомої на певній множині точок, треба запропонувати алгоритм наближеного обчислення її на більшій множині. Такі задачі розв'язуються за допомогою методів апроксимації та інтерполяції. Задачі інтерполяції виникають при реалізації дискретних методів: скінченних різниць, скінченних елементів, контрольних об'ємів. У методі скінченних різниць (МСР) апроксимуються похідні шуканих функцій, а у методі скінченних елементів (МСЕ) – сам розв'язок, тобто залежність шуканих функцій від просторових координат і часу. В МСЕ неперервна функція апроксимується кусково-неперервною функцією, яка задана на множині скінченних елементів. Як приклад апроксимації у МСЕ розглянемо функцію двох аргументів, яка дуже часто зустрічається в науковій та практичній діяльності людини. Це функція-«пагода» [47].

«Пагода» – це шивка з чотирьох спеціальним чином вирізаних фрагментів гіперболічного параболоїда (скорочена назва гіперболічного параболоїда – гіпар). У зарубіжній літературі з теорії оболонок гіпар нерідко називають асимгіполоїдом, що підкреслює особливу роль асимптот гіперболи. Ця поверхня має постійне кручення і від'ємну гауссову кривину. Підвищена увага архітекторів, будівельників, кораблебудівників до гіпарів пояснюється тим, що ці оболонки добре опираються втраті стійкості завдяки взаємодії розтягуючих та стискаючих напружень, які виникають відповідно вздовж увігнутих і опуклих парабол. Геометричні переваги гіпарів над опуклими оболонками додатної гаус-

сової кривини обумовлені лінійчатістю поверхні – виключно корисною технологічною і конструктивною властивістю.

Систематичне вивчення та широке застосування гіпарів в якості оболонкових елементів інженерних споруд почалось у 30-ті роки минулого століття [43]. У другій половині XX століття гіпарі привернули увагу численних розробників і користувачів МСЕ [24; 35; 47] у зв'язку з задачею білінійної інтерполяції функції двох аргументів. Найпростіший квадратний елемент з білінійною інтерполяцією (мультиплекс) добре комбінується з симплексами, забезпечуючи неперервне стикування на границі гіпара і площини. Важливо підкреслити, що гіпар є основоположною конструктивною складовою загадкової та маловивченої сім'ї серендипових елементів. Конструювання функції-«пагоди» дозволяє встановити існування глибоких зв'язків між теорією інтерполяції, диференціальними рівняннями, теорією ймовірностей, схемами випадкових блукань метода Монте-Карло.

Функція-«пагода» (за термінологією авторів [47]) є фінітною функцією з носієм у формі квадрата (рис. 1.1.1 а).

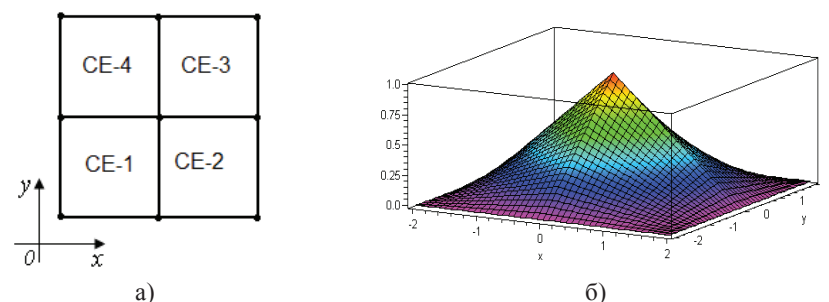


Рис. 1.1.1. Носій і поверхня функції-«пагоди»

По границі основного квадрата рівномірно (включаючи вершини) розташовані 8 вузлів. Центральний вузол спільний для чотирьох СЕ. У цьому вузлі функція дорівнює одиниці, в решті – нулю (інтерполяційна гіпотеза Лагранжа, яка була запропонована у 1795 р.). У напрямках координатних осей функція змінюється лінійно (рис. 1.1.1 б). Звідси назва – білінійна інтерполяція. Всі чотири фрагмента «пагоди»

однакові, тому достатньо побудувати поверхню на одному СЕ. Нижче будуть описані деякі методи побудови базису білінійної інтерполяції.

1.2. Матричний метод побудови білінійної інтерполяції

Розглянемо процедуру побудови базису матричним методом¹ на білінійному скінченному елементі (ССЕ-4) [40; 45; 95]. У *локальній системі координат* $\xi\eta$, де $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$, ССЕ-4 – це квадрат розмірами 2×2 з чотирма вузлами у вершинах (рис. 1.2.1). В англomовній літературі білінійний елемент позначають Q4 (quadrilateral) [86].

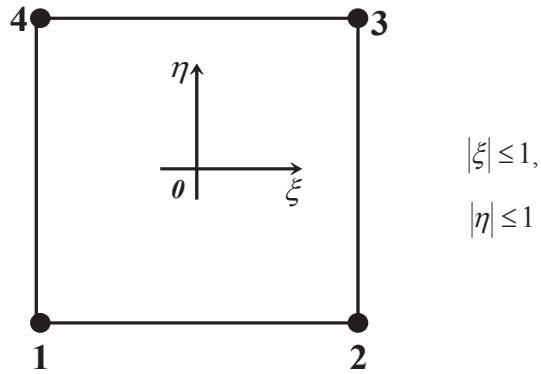


Рис. 1.2.1. Елемент з білінійним базисом

Процедура побудови базису для ССЕ з 4-ма вузлами починається з вибору 4-параметричного полінома з двома аргументами:

$$\phi(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta. \quad (1.2.1)$$

Базисні функції білінійної інтерполяції $N_i(\xi, \eta)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) повинні задовольняти інтерполяційній гіпотезі:

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, 4}, \quad (1.2.2)$$

¹ Матричний метод був розвинений у працях Олександра Теофіла Вандермонда, Огюстена Луї Коші, Жозефа Луї Лагранжа стосовно задач інтерполяції функцій одного аргументу. У МСЕ він вважається основним методом побудови інтерполяційних поліномів для функцій двох і трьох аргументів.

де δ_{ik} – символ Кронекера;

та умові збереження вагового балансу:

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) = 1. \quad (1.2.3)$$

Використання (1.2.2) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь 4×4 відносно параметрів α_j :

$$\alpha_1 + \alpha_2 \xi_k + \alpha_3 \eta_k + \alpha_4 \xi_k \eta_k = \delta_{ik},$$

де i – номер базисної функції, k – номер вузла.

Знайдемо невідомі параметри α_j і запишемо інтерполяційний поліном (1.2.1) у вигляді:

$$\phi = N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 + N_3 \Phi_3 + N_4 \Phi_4 = [N_i] \{\Phi_i\}, \quad (1.2.4)$$

де $[N_i]$ – матриця-рядок базисних функцій СЕ ($i = 1, 2, 3, 4$);

$\{\Phi_i\}$ – вектор граничних значень функції, що інтерполюється.

Отримуємо білінійний базис на ССЕ-4:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1. \quad (1.2.5)$$

1.3. Ймовірісно-геометричний метод на білінійному елементі

На початку 80-х років ХХ століття стало зрозуміло, що роль матричної алгебри в МСЕ перебільшена, з'явилися геометричні підходи [106], а також стохастичні процедури побудови базисів СЕ [66; 71].

Для побудови інтерполяційних поліномів зручно використовувати метод ймовірісно-геометричного моделювання, в основу якого покладено означення геометричної ймовірності [27; 33]. Природним узагальненням і розширенням поняття класичної ймовірності на нескінченну множину точок є *геометрична ймовірність*, що обчислюється як відношення мір (довжин, площ, об'ємів) в одно-, дво- і тривимірних випадках [17; 18]. Наприклад, маємо область G і в ній міститься інша область g . В область G навмання кидається точка і ставиться питання: чому дорівнює ймовірність того, що точка влучить в область g ? Ймовірність влучити в будь-яку частину області G пропорційна мірі

цієї частини (довжині, площі, об'єму) і не залежить від її розташування і форми. Таким чином, за означенням, ймовірність влучити в область g при киданні навмання точки в область G дорівнює:

$$p(g) = \frac{mes(g)}{mes(G)}. \quad (1.3.1)$$

Для того, щоб запропонувати новий ймовірнісно-геометричний метод конструювання базисів СЕ розглянемо інтерполяційний поліном на СЕ-4 у вигляді [39]:

$$\phi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 + N_4\Phi_4 = [N_i]\{\Phi_i\}, \quad (1.3.2)$$

де $[N_i]$ – матриця-рядок базисних функцій СЕ ($i = 1, 2, 3, 4$);

$\{\Phi_i\}$ – матриця-стовпець значень функції, що інтерполюється.

Зауважимо, що формула (1.3.2) має певний ймовірнісний зміст, тому що базисні функції СЕ мають властивості ймовірності:

$$1) \ 0 \leq N_i \leq 1; \quad (1.3.3)$$

$$2) \ \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) = 1. \quad (1.3.4)$$

Формула (1.3.4) відбиває зміст теореми про суму ймовірностей повної групи випадкових подій.

Для функції випадкових величин формула (1.3.2) – це зважене середнє вузлових значень, тобто математичне сподівання. Усереднення – це типовий прийом методу Монте-Карло² [21; 22].

² Нагадаємо, що у стандартному методі Монте-Карло розглядають симетричні випадкові блукання частинки по вузлах сітки (рис. 1.3.1 б). Правила випадкових блукань у квадраті з поглинаючими вузлами у вершинах (саме таке припущення дозволяє змоделювати умови Діріхле) формулюються наступним чином: частинка, що стартує з контрольної точки, виконує один крок на захід з ймовірністю 0,25, або один крок на схід з ймовірністю 0,25, або один крок на північ з ймовірністю 0,25, або один крок на південь з ймовірністю 0,25. Причому кожен такий крок є випадковим і не залежить від положення частинки і попередньої траскторії. Блукання частинки завершуються, коли частинка потрапляє у «поглинаючий» вузол у вершинах квадрату. Щоб створити алгоритм визначення ϕ_i за допомогою комп'ютерних експериментів з блукаючими частинками доведеться здійснити серію експериментів, тобто випустити з випадкової точки старту n частинок (n – довжина серії). Експеримент полягає у спостереженні за переміщеннями частинки і реєстрації факту її «прибуття» у поглинаючий вузол. Після цього випускають наступну частинку і експеримент повторюється. З кожним поглинаючим вузлом асоціюється лічильник, який слідує за загальною кількістю частинок, що фінішували у вузлі.

За допомогою комп'ютерних експериментів можна довести закон великих чисел Якоба Бернуллі: при необмеженому збільшенні кількості дослідів n відносна частота події A збігається за ймовірністю до ймовірності p події A , де подія $A = \{\text{поглинання випадкової частинки у вузлі } i\}$.

У відповідності до задачі про випадкові блукання частинки у межах СЕ закон великих чисел можна записати наступним чином:

$$\frac{n_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N_i, \quad (1.3.5)$$

де n_i – кількість частинок, які закінчили блукання у вузлі i ;

n – загальна кількість частинок, які стартували з випадкової точки;

N_i – значення базисної функції у точці старту M .

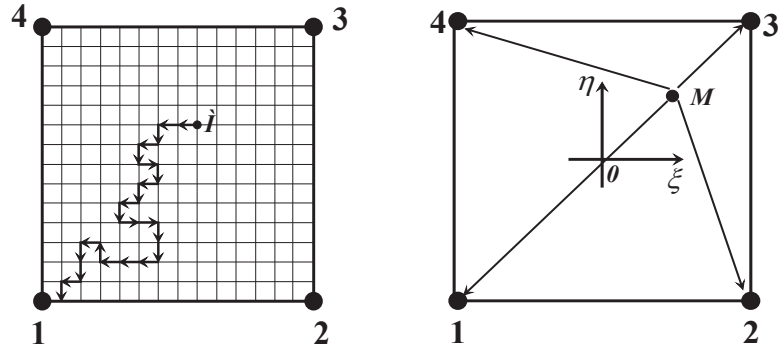
У стандартній схемі блукань (рис. 1.3.1 а) **відносні частоти** $\frac{n_i}{n}$ можна розглядати як **апостеріорні перехідні ймовірності**. Результати комп'ютерних експериментів підтверджують стійкість (1.3.5) [6; 34; 49; 59; 67; 68; 69]. Спрямування по ймовірності $\frac{n_i}{n}$ до N_i дає можливість відмовитись від накладання сітки на область СЕ і запропонувати несітковий алгоритм: однокрокову чотиримаршрутну схему випадкових блукань. Моделюється стрибок частинки з точки старту $M(\xi, \eta)$ безпосередньо у вузол i . Тоді **базисні функції** N_i скінченного елемента можна розглядати як **апріорні перехідні ймовірності** у схемі випадкових блукань.

Сформулюємо правила випадкових блукань частинки з випадковим стартом і поглинаючими вузлами у межах білінійного ССЕ-4 (рис. 1.3.1 б): нехай блукаюча частинка стартує з випадкової точки M , з ймовірністю N_1 переходить у вузол 1, або з ймовірністю N_2 – у вузол 2, або з ймовірністю N_3 – у вузол 3, або з ймовірністю N_4 – у вузол 4. У задачі про випадкові блукання ϕ у формулі (1.3.2) – це середня винагорода за вихід у вузол.

Зважаючи на ймовірнісні властивості базисних функцій та інтерполяційного полінома ССЕ, можна запропонувати декілька варіантів ймовірнісно-геометричного моделювання інтерполяційного полінома на СЕ-4.

I варіант. Розглянемо білінійний СЕ з 4-ма вузлами (рис. 1.3.2). Нехай $M(\xi, \eta)$ – поточна точка всередині СЕ: $|\xi| \leq 1$, $|\eta| \leq 1$. Прямі, що проходять через точку M паралельно координатним прямим, поділяють СЕ на чотири підобласті. Кожному вузлу i ставиться у відповідність

протилежний піделемент. Поставимо завдання: знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання в область СЕ, влучає у підобласть ω_i , де ω_i – прямокутник, протилежний вузлу i .



а) симетричні випадкові блукання по вузлах сітки на ССЕ-4 б) однокрокова 4-х маршрутна схема блукань на ССЕ-4

Рис. 1.3.1. Схеми випадкових блукань на ССЕ-4

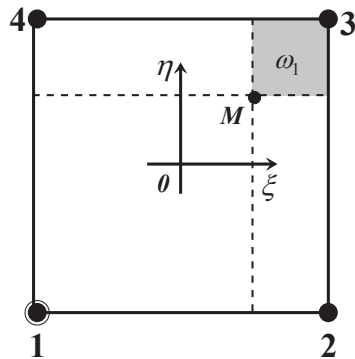


Рис. 1.3.2. До ймовірісно-геометричної побудови базису білінійного елемента ССЕ-4

Базисна функція будується як ймовірність влучання навмання кинуті точки у відповідний піделемент. Площа заштрихованого прямокутника ω_i дорівнює $(1 - \xi)(1 - \eta)$, а площа всього СЕ дорівнює 4 (рис. 1.3.2). За означенням геометричної ймовірності (1.3.1) для вузла 1 отримаємо:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta). \quad (1.3.6)$$

Взагалі,

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1. \quad (1.3.7)$$

Відзначимо, що формули (1.3.7) співпадають з формулами (1.2.5). Легко переконатися, що ці функції задовольняють основним властивостям базисних функцій (1.2.2) та (1.2.3).

II варіант. Формулу (1.3.2) можна отримати іншим способом, якщо на білінійному СЕ скористатися барицентричними координатами симплексу.

Нагадаємо, що у 1827 році німецьким геометром і астрономом Августом Фердинандом Мебіусом була запропонована нова барицентрична система координат [41]. Ця система координат вважається заданою, якщо заданий **базисний трикутник** (у двовимірному випадку). **Барицентричні координати** (ξ_1, ξ_2, ξ_3) будь-якої точки M площини визначаються як частки одиничної маси, які слід помістити у відповідні вершини базисного трикутника, щоб M стала центром мас трикутника. Барицентричну координату симплексу можна обчислювати як відношення площ трикутників (рис. 1.3.3 а), так і як відношення висот відповідних трикутників (рис. 1.3.3 б).

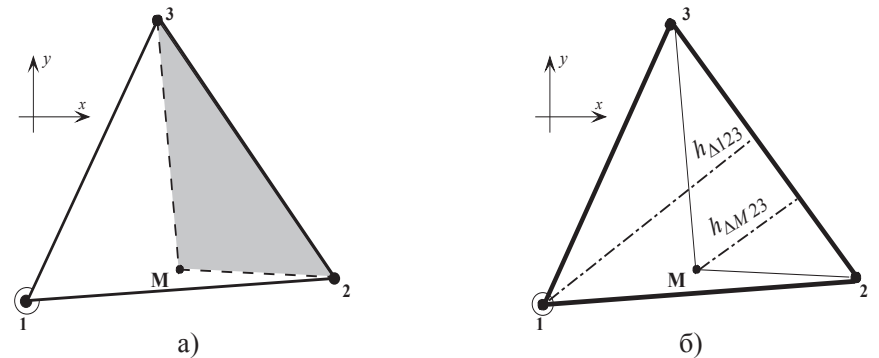


Рис. 1.3.3. Визначення барицентричних координат у скінченному елементі лінійної інтерполяції

Наприклад, перша координата задається формулою:

$$\xi_1(x, y) = \frac{S_{\Delta M23}}{S_{\Delta 123}} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = N_1, \quad (1.3.8 \text{ а})$$

де $S_{\Delta 123}$ – площа трикутника 1-2-3; $S_{\Delta M23}$ – площа трикутника M -2-3; $M(x, y)$ – поточна точка.

Другий варіант формули:

$$\xi_1(x, y) = \frac{h_{\Delta M23}}{h_{\Delta 123}} = N_1, \quad (1.3.8 \text{ б})$$

де $M(x, y)$ – поточна точка, $h_{\Delta M23}$ – висота трикутника M -2-3, $h_{\Delta 123}$ – висота трикутника 1-2-3.

З формул (1.3.8 а, б) стає зрозумілим, що барицентрична координата симплексу і базисна функція трикутного СЕ з трьома вузлами – це поняття тотожні (див. додаток).

Покажемо, як барицентричні координати симплексу можна використовувати на чотирикутних СЕ. Для цього на білінійному скінченному елементі візьмемо композицію двох трикутників з вершиною у спільному вузлі 1: перший трикутник – $\Delta 123$, другий трикутник – $\Delta 134$ (рис. 1.3.4).

На кожному з трикутників будемо базис лінійної інтерполяції за формулою (1.3.8) і, скориставшись теоремою добутку ймовірностей незалежних подій, отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta). \quad (1.3.9)$$

Перший і другий варіант ймовірнісно-геометричного методу можна розглядати як узагальнення барицентричної задачі Мебіуса: як треба розподілити одиничну масу по вершинах квадрата, щоб довільна точка M стала його центром мас. Базисні функції ССЕ дають відповідь на це питання для кожної довільної точки M .

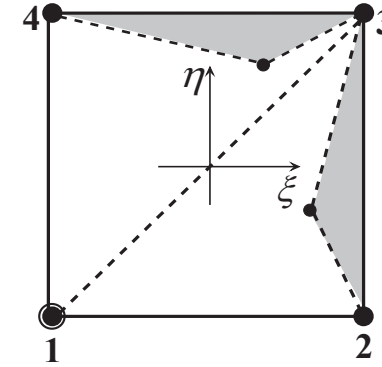


Рис. 1.3.4. До побудови функції N_1 ССЕ-4

III варіант. У цьому випадку можна для побудови базисної функції використовувати наступну формулу [55]:

$$PL = \frac{\Phi_{level} - \Phi_{min}}{\Phi_{max} - \Phi_{min}} = N_i(\xi, \eta), \quad (1.3.10)$$

де PL – це відношення довжини випадкового відрізка $[\Phi_{min}; \Phi_{level}]$ до загальної довжини відрізка $[\Phi_{min}; \Phi_{max}]$ (рис. 1.3.5 б);

Φ_{level} – поточний рівень поверхні базисної функції;

Φ_{max} – максимальний рівень; Φ_{min} – мінімальний рівень.

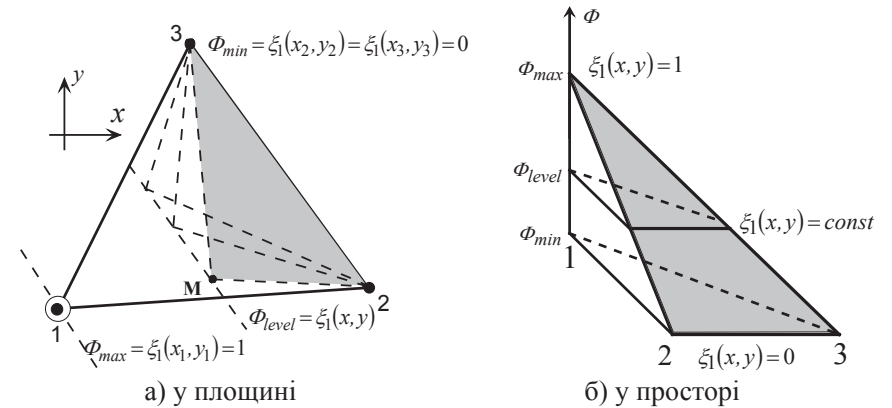


Рис. 1.3.5. Скінченний елемент лінійної інтерполяції

Покажемо, як формула (1.3.10) працює на базисному трикутнику $\Delta 123$ при конструюванні функції форми для вузла 1 (рис. 1.3.5 а, б). Сторона 2-3 має рівняння $\Phi_{\min} = \xi_1(x, y) = 0$ – лінія нульового рівня. Лінія максимального рівня $\Phi_{\max} = \xi_1(x_1, y_1) = 1$ – відповідає вузлу 1. Як відомо, барицентрична координата рівномірно зростає від 0 до 1, тому спостерігаємо рівномірний підйом лінії поточного рівня $\Phi_{level} = \xi_1(x, y) = \text{const}$ (рис. 1.3.5 а, б). Тобто, на трикутнику базисна функція у поточній точці $M(x, y)$ задає відносний підйом лінії поточного рівня. Для того, щоб скористатися (1.3.10) достатньо підставити у формулу рівняння лінії поточного рівня та її максимальне і мінімальне значення.

Розглянемо побудову базисної функції для вузла 1 за допомогою формули (1.3.10) на СС-4 (рис. 1.3.4). Розбиваємо скінченний елемент на два трикутника $\Delta 123$, $\Delta 134$. Для трикутника $\Delta 123$ формула працює наступним чином:

якщо $\Phi_{level} = 1 - \xi$, $\Phi_{\max} = 2$, $\Phi_{\min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1 - \xi) - 0}{2 - 0} = \frac{1 - \xi}{2} = N_1^{(1)}. \quad (1.3.11)$$

Для трикутника $\Delta 134$ за формулою (1.3.10) маємо:

якщо $\Phi_{level} = 1 - \eta$, $\Phi_{\max} = 2$, $\Phi_{\min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1 - \eta) - 0}{2 - 0} = \frac{1 - \eta}{2} = N_1^{(2)}(\xi, \eta). \quad (1.3.12)$$

Базисну функцію для вузла 1 отримуємо як добуток:

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \frac{1 - \xi}{2} \cdot \frac{1 - \eta}{2} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta). \quad (1.3.13)$$

Аналогічна ситуація для квадрата показана на рис. 1.3.6. Ймовірність попадання випадкової точки у прямокутник з протилежними вершинами М-3 дорівнює $\frac{1}{4}(1 - x)(1 - y)$. Або у локальній системі координат $\xi O\eta$:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta). \quad (1.3.14)$$

Білінійний поліном у порівнянні з лінійним має ще один доданок $\xi\eta$. Цей доданок вносить певні зміни у поведінку функції N_1 .

Тепер, при спрямуванні поточної точки $M(\xi, \eta)$ до вузла 1, рівномірне зростання N_1 відбувається тільки у координатних напрямках. У довільному напрямку зростання нерівномірне, тому що N_1 – це фрагмент поверхні другого порядку, а саме – гіперболічного параболоїда (гіпара) (рис. 1.4.4).

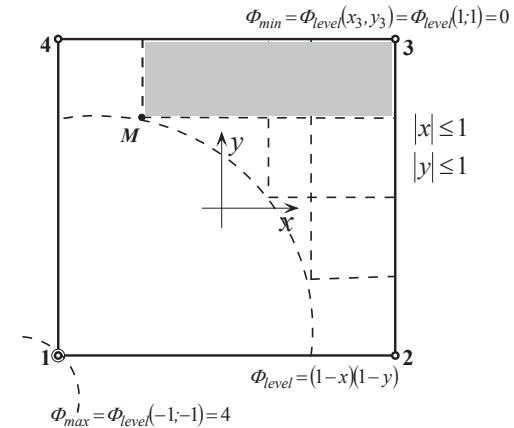


Рис. 1.3.6. Скінченний елемент білінійної інтерполяції

Висновок: незалежно від геометрії поверхні базисна функція у поточній точці M задає відносний підйом поточного рівня.

1.4. Геометричний метод конструювання базисних функцій білінійного елемента

Можна запропонувати кілька варіантів *прямого геометричного моделювання* базисів на СЕ-4.

I варіант. Звернемо увагу на той факт, що базисні функції (1.2.5) конструюються з рівнянь ліній, які проходять через вузли СЕ [20; 56]. Наприклад, щоб побудувати N_1 у білінійному СЕ (рис. 1.4.1), треба розглянути рівняння сторін 2-3 та 3-4 відповідно: $1 - \xi = 0$ і $1 - \eta = 0$. Для того, щоб функція N_1 дорівнювала нулю у вузлах 2, 3, 4, перемножимо ліві частини цих рівнянь. Пронормуємо функцію з коефіцієн-

том $\frac{1}{4}$ для того, щоб вона дорівнювала одиниці у вузлі 1. Отримуємо базисну функцію для вузла 1 (формула (1.3.6)).

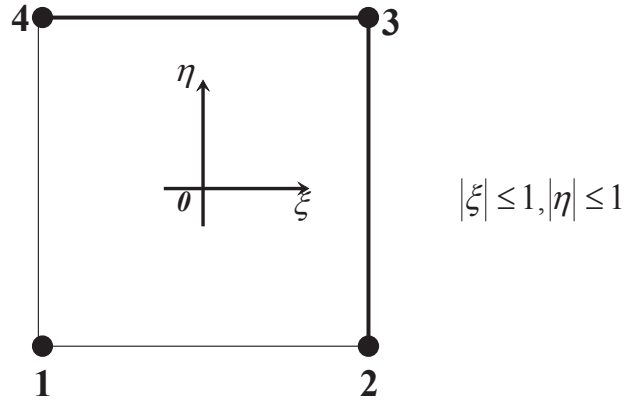


Рис. 1.4.1. Елемент з білінійним базисом

II варіант. Ідеї методу «добутку площин» («product of planes») вперше були запропоновані на початку 70-х років минулого століття Юджином Уачспрессом [106]. Покажемо, як геометричний метод Уачспреса працює на білінійному СЕ.

Базисна функція для вузла 1 задається як добуток:

1) площини, що проходить через вузли 2,3 і точку $(-1;-1;1)$ (рис. 1.4.2):

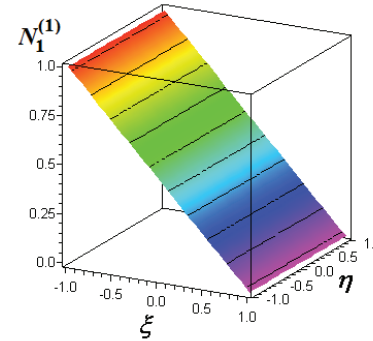
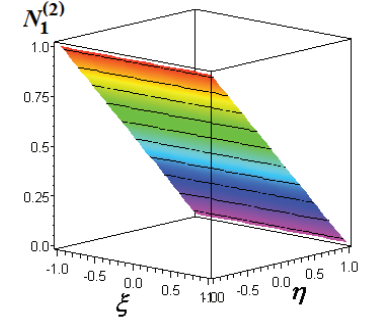
$$N_1^{(1)}(\xi) = \frac{1-\xi}{2};$$

2) площини, що проходить через вузли 3,4 і точку $(-1;-1;1)$ (рис. 1.4.3):

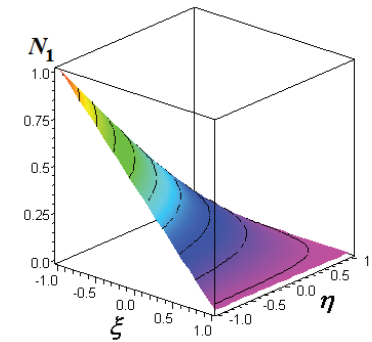
$$N_1^{(2)}(\eta) = \frac{1-\eta}{2}.$$

Тоді базисна функція N_1 :

$$N_1(\xi, \eta) = N_1^{(1)}(\xi) \cdot N_1^{(2)}(\eta) = \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta). \quad (1.4.1)$$

Рис. 1.4.2. Площина $N_1^{(1)}(\xi)$ Рис. 1.4.3. Площина $N_1^{(2)}(\eta)$

Графік базисної функції $N_1(\xi, \eta)$ має вигляд (рис. 1.4.4):

Рис. 1.4.4. Візуалізація базисної функції $N_1(\xi, \eta)$

Зауваження. На рисунках в цьому і наступних розділах розміри поверхонь вздовж ξ і η фіксовані в межах носія $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$. А вздовж вісі аплікату масштаб обирається таким чином, щоб фрагмент поверхні був зображений повністю.

1.5. Побудова базисних функцій білінійного елемента методами інтегрування

Інтегрування щільності рівномірного розподілу. Використання геометричної ймовірності *a priori* передбачає рівномірний розподіл

випадкової точки в межах СЕ. Щільність розподілу в цьому випадку дорівнює 0,25. Зауважимо, що тільки одна функція базису, а саме $N_3(\xi, \eta)$, бездоганно узгоджена зі стандартним означенням інтегральної функції розподілу. Щоб знайти цю функцію, достатньо двічі проінтегрувати наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2 N_3}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4}. \quad (1.5.1)$$

Зрозуміло, що послідовність інтегрування значення не має, головне дотримуватись умов інтерполяційної гіпотези, які впливають на вибір «констант» інтегрування. Наприклад,

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\eta + C_1 = \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}, \quad (1.5.2)$$

$$\begin{aligned} N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{4}\xi + C_2 = \\ &= \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta). \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Решту функцій базису легко отримати за допомогою перестановки ξ та η .

Інтегрування рівняння Лапласа з дискретними умовами Діріхле. Тут ми покажемо, що функція-«пагода» може бути отримана методом відокремлення змінних (метод Фур'є) як розв'язок двовимірного рівняння Лапласа для квадрата з дискретним набором граничних значень у вершинах (4-точкова гранична задача) [55].

Сформулюємо наступну граничну задачу: всередині квадрата (рис. 1.2.1) знайти функцію $N_i(\xi, \eta)$, що задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1.5.4)$$

і граничним умовам $N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}$, де i – номер функції, k – номер вузла.

Наявність двох вузлів на кожній стороні квадрата реалізує лінійну зміну $N_i(\xi, \eta)$ від 0 до 1 вздовж двох сторін, які містять вузол i . Саме тому $N_i(\xi, \eta)$ називають білінійною функцією. Нехай

$$N_i(\xi, \eta) = N_i(\xi) \cdot N_i(\eta). \quad (1.5.5)$$

Формула (1.5.5) є ключовою в методі відокремлення змінних. Вона дозволяє звести рівняння Лапласа до звичайних диференціальних рівнянь

$$N_i''(\xi) = 0, \quad N_i''(\eta) = 0. \quad (1.5.6)$$

Ці рівняння легко розв'язуються повторним інтегруванням:

$$N_i(\xi) = A_i\xi + B_i, \quad N_i(\eta) = C_i\eta + D_i. \quad (1.5.7)$$

Константи A_i, B_i, C_i, D_i конкретизуються за допомогою умов на кінцях інтервалів $[-1; 1]$:

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_i\xi), \quad \xi_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (1.5.8)$$

$$N_i(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta_i\eta), \quad \eta_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1.5.9)$$

Повертаючись до формули (1.5.5), отримаємо

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1.5.10)$$

Таким чином, функція-«пагода» утворюється як добуток двох функцій-«кришок» одного аргументу (за термінологією авторів [35]). На окремому СЕ ми маємо справу з «напівкришками».

У задачах теорії потенціалу велике значення мають гармонічні функції. Існує два означення гармонічної функції – диференціальне та інтегральне. Нагадаємо, що **диференціальний критерій** формулюється наступним чином: функція $U(x, y)$, яка має неперервні частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ в області G і яка задовольняє рівнянню Лапласа у середині області G :

$$\frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0, \quad (1.5.11)$$

є гармонічною функцією в області G [21]. Диференціальний критерій сформулював у 1782 р. П'єр Сімон Лаплас.

Інтегральне означення гармонічної функції запропонував у 1906 році німецький математик Пауль Кьобе. Він довів теорему, що неперервна в області G функція U , яка набуває в кожній точці P області значення, яке дорівнює середньому інтегральному значень на будь-якому колі з центром в точці P , що цілком належить G , є гармонічною в G . У 1925 році Іваном Івановичем Приваловим була доведена більш загальна теорема про гармонічну функцію двох і трьох змінних [36; 42].

Теорема Привалова дає можливість виділити область гармонічності функції. Якщо в область G вкласти іншу область, то функція залишиться гармонічною в новій області довільної геометрії і це дозволяє розглянути варіанти інтегрального критерію гармонічності функції на некругових областях [42].

Інтегральний критерій Привалова для дискретного елемента порівнює середнє інтегральне (по площі) значення базисної функції $N_i(\xi, \eta)$ з її значенням у центрі елемента:

$$N_i(0;0) = \frac{1}{S} \iint_D N_i(\xi, \eta) dS, \quad (1.5.12)$$

де S – площа дискретного елемента,

$N_i(0,0)$ – значення базисної функції у барицентрі елемента [6].

Інтегральний критерій Кьобе для дискретного елемента порівнює середнє інтегральне (по периметру) значення базисної функції $N_i(\xi, \eta)$ з її значенням у центрі елемента:

$$N_i(0;0) = \frac{1}{L} \oint N_i(\xi, \eta) dl, \quad (1.5.13)$$

де L – периметр дискретного елемента,

$N_i(0,0)$ – значення базисної функції у барицентрі елемента [6; 60].

Зауважимо, що «пагода» є гармонічною функцією не тільки за Лапласом. Вона задовольняє інтегральним критеріям гармонічності Кьобе та Привалова. Для ССЕ-4 значення базисної функції у барицентрі співпадає зі значеннями інтегралів у формулах (1.5.12), (1.5.13) і дорівнює $\frac{1}{4}$.

Інтегрування повних диференціалів. Запишемо базисну функцію в загальному вигляді:

$$N_i(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta. \quad (1.5.14)$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \alpha_2 + \alpha_4 \eta; \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \alpha_3 + \alpha_4 \xi; \quad \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta \partial \xi} = \alpha_4. \quad (1.5.15)$$

Як бачимо, для поверхні $N_i(\xi, \eta)$ виконується умова Ейлера (ознака повного диференціала). Це означає, що $N_i(\xi, \eta)$ можна отримати інтегруванням рівняння в повних диференціалах [55; 79]:

$$N_i(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\partial N_i(\xi_0, \eta)}{\partial \eta} d\eta. \quad (1.5.16)$$

Задача зводиться до відновлення поверхні $N_i(\xi, \eta)$ по горизонтальній дотичній площині (в критичній точці 1-го роду).

На прикладі $N_i(\xi, \eta)$ ми покажемо, яким чином реалізується цей спосіб. З умови геометричної ізотропії випливає, що $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Тому частинні похідні можна записати так:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \alpha + \beta \eta; \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \alpha + \beta \xi. \quad (1.5.17)$$

Використовуючи геометричний зміст цих похідних, а також характер N_1 на кромках $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, легко визначити $\alpha = -\frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$. Критичною точкою для N_1 є вузол 3 (рис. 1.2.1), тому

$$N_1(\xi, \eta) = \int_{\xi_3}^{\xi} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\xi + \int_{\eta_3}^{\eta} \frac{\partial N_1(\xi_3, \eta)}{\partial \eta} d\eta = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta). \quad (1.5.18)$$

Функція-«пагода» є дуже цікавим об'єктом для порівняння різних підходів до моделювання СЕ. Елемент з білінійною інтерполяцією відкриває каталог маловивчених СЕ серендипової сім'ї. Не всі з вищезазначених методів отримали подальший розвиток на елементах вищих порядків, де більш ефективні комбіновані підходи, які поєднують кращі властивості геометричних, алгебраїчних і ймовірнісних моделей.

РОЗДІЛ 2
БІКВАДРАТИЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ
СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ

2.1. Скінченні елементи серендипової сім’ї вищих порядків

Основною задачею теорії наближення функцій є задача апроксимації, яка, як правило, дає наближений розв’язок. У наближених методах важливими є питання збіжності, стійкості обчислювальної схеми, а також точності отриманого розв’язку. Під збіжністю чисельних методів розуміють поступове наближення послідовних розв’язків до точного, яке відбувається завдяки уточненню параметрів дискретної моделі (розміри елементів, порядок апроксимуючих функцій і т.ін.).

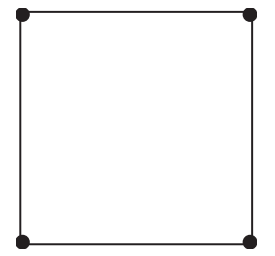
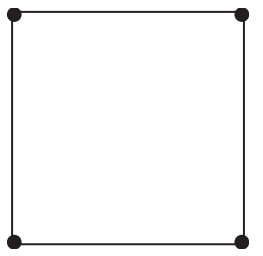
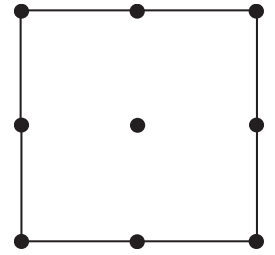
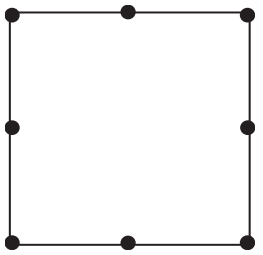
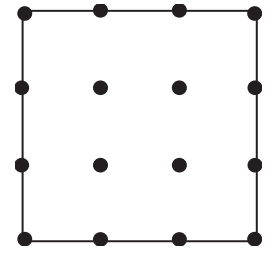
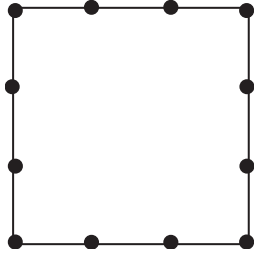
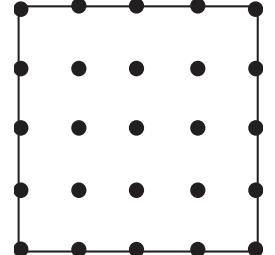
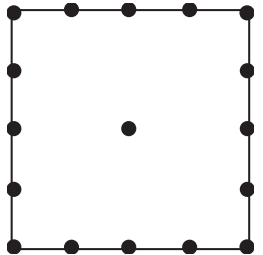
Для досягнення збіжності у МСЕ, який належить до наближених методів дискретного аналізу, існує два підходи. Перший: подрібнення сітки з використанням симплексів³ [45]. Однак помилки апроксимації не обов’язково зменшуються із зменшенням розмірів елементів, тому цей метод може погіршувати збіжність до точного розв’язку або навіть приводити до розбіжності. Другий підхід: використання елементів вищих порядків – комплексів та мультиплексів⁴. В цьому випадку розміри елементів залишають без змін, а покращують представлення полів у елементі за допомогою зростаючої кількості вузлів [16; 45; 89].

Для апроксимації функцій двох аргументів в МСЕ використовуються лагранжеві і серендипові скінченні елементи, які наведені у табл. 2.1.1.

³ Симплекс-елементам відповідають інтерполяційні поліноми, які мають константу і лінійні доданки. Кількість коефіцієнтів інтерполяційного полінома на одиницю більше за розмір координатного простору. Градієнти інтерполяційного полінома постійні. Приклади симплекс-елементів: відрізок з двома вузлами; трикутник з трьома вузлами; тетраедр з чотирма вузлами.

⁴ Комплекс і мультиплекс – це скінченні елементи вищого порядку, кількість вузлів у яких перевищує розмірність задачі більше ніж на одиницю. У мультиплексів границі паралельні координатним осям (для неперервності при переході від одного елемента до іншого) і градієнти інтерполяційного полінома не постійні, а змінюються вздовж координатних напрямків. Приклади: квадратичні і кубічні СЕ на площині і у просторі.

Таблиця 2.1.1

Скінченні елементи		
Лагранжеві елементи	Порядок елемента	Серендипові елементи
	лінійний	
	квадратичний	
	кубічний	
	четвертого порядку	

Інтерполяція за Лагранжем будується перемноженням двох одновимірних поліномів Лагранжа відповідного степеня. Перемноження призводить до того, що в лагранжевих елементах з'являються вузли всередині скінченного елемента. Внутрішні вузли збільшують об'єм обчислень та не використовуються при ансамблюванні скінченних елементів.

Внутрішні вузли відсутні у *серендипових скінченних елементах (ССЕ)*. Ці елементи вперше були отримані у 1968 р. Ергатудисом, Айронсом і Зенкевичем [93]. Їх назва походить від англійського слова «*serendipity*», яке має значення – «дар несподіваних і цінних відкриттів, знахідок». Це слово ввів у англійську мову в 1754 р. англійський письменник Гораций Уолпол, який у своєму приватному листі переказав перську казку «Три принци зі Серендипа»⁵ [51]. Саме такою цінною знахідкою для фахівців МСЕ і виявилися запропоновані Ергатудисом, Айронсом і Зенкевичем елементи, які отримали назву «серендипові».

Первісна мета створення ССЕ – можливість перетворення довільного чотирикутника в квадрат і зменшення обсягу обчислень за рахунок вилучення «зайвих» внутрішніх вузлів [23].

Перші моделі серендипових СЕ мали рівну кількість вузлів по напрямкам ξ і η . Пізніше [103] було розроблено алгоритм для побудови серендипових елементів з нерегулярним розташуванням вузлів у двох напрямках.

У таблиці 2.1.1 наведено елементи серендипової сім'ї з регулярним розташуванням вузлів.

Зауваження. Довгий час вважалося [108], що серендиповому СЕ четвертого порядку для побудови базису потрібен внутрішній вузол. Тільки Немчінов Ю.І. у своїй монографії [38] показує елементи четвертого і п'ятого порядку без внутрішніх вузлів.

За визнанням Зенкевича [24], перші базиси серендипової сім'ї були отримані шляхом підбору. Ці ж базиси можна отримати за допомогою матричних методів. Вони називаються *стандартними*.

Стандартні базиси ССЕ вищих порядків мають наступні властивості [24]:

⁵ Serendip – стародавня назва острова Цейлон.

Властивість 1. Базисні функції ССЕ задовольняють *інтерполяційній гіпотезі типу Лагранжа*:

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad (2.1.1)$$

де δ_{ik} – символ Кронекера; n – кількість вузлів.

Властивість 2. Системи базисних функцій задовольняють *умові збереження вагового балансу* [16; 23; 45]:

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.1.2)$$

Властивість 3. Базисна функція серендипового СЕ вздовж границь елемента є повним поліномом і, як наслідок, має місце неперервність базисної функції на границі між елементами (зберігається C^0 – *гладкість апроксимації*) [23; 88].

Властивість 4. Базисні функції повинні бути *геометрично ізотропними* [39]: представлення залежної змінної на елементі не повинно залежати від системи координат, що використовується, тобто повинно бути геометрично ізотропним для ортогональних перетворень системи координат. Поліноми повні, а також доповнені симетричними парами, дають геометрично інваріантне представлення, і є геометрично ізотропними.

Властивість 5. Функції форми повинні задовольняти критерію *повноти* або *критерію сталості похідних* [24]. Для збіжності МСЕ необхідно, щоб у кожній точці елемента, шляхом підбору відповідних вузлових значень ϕ , можна було отримати будь-яке довільне стале значення перших похідних (для функціоналів, до яких входять похідні першого порядку).

Множина функцій форми називається *повною*, якщо ці функції можуть точно апроксимувати будь-яку лінійну функцію:

$$\phi = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta, \quad (*)$$

де α_i – довільні константи.

Відношення (*) завжди буде задовольнятися, якщо [24]

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1; \quad \sum_{i=1}^n N_i \xi_i = \xi; \quad \sum_{i=1}^n N_i \eta_i = \eta.$$

Властивість 6. Кількість доданків інтерполяційного поліному дорівнює кількості вузлів n на СЕ [85; 89].

До недоліків стандартних базисів віднесемо наступні властивості:

Властивість 7. Наявність від'ємних значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили, що є неприродним з фізичної точки зору [24].

Властивість 8. Надлишкова кількість кратних нулів⁶ у вузлах на границі ССЕ, що призводить до надмірної жорсткості моделі⁷ [47].

Для ССЕ *вузлова доля рівномірної масової сили* визначається подвійним інтегралом по області ω скінченного елемента від відповідної базисної функції, зваженої з поверхневою щільністю γ :

$$p_i = \iint_{\omega} \gamma N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \gamma = \frac{1}{4}. \quad (2.1.3)$$

У задачах теплопровідності за допомогою інтегралів типу (2.1.3) обчислюють долі тепла у СЕ, що генерується внутрішнім джерелом. У схемах блукань з випадковим стартом формула (2.1.3) дає математичне сподівання перехідних ймовірностей усіх броунівських траєкторій, що закінчуються у вузлі i .

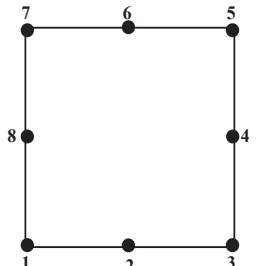
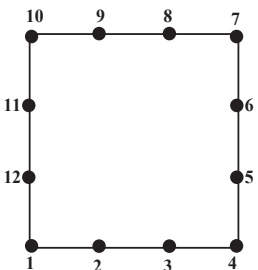
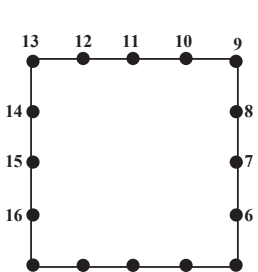
Із сім'ї серендипових скінченних елементів тільки білінійний елемент ССЕ-4 має повузловий розподіл, який відповідає «здоровому глузду» [24] (у всіх вузлах по 0,25). У спектрах ССЕ вищих порядків виникає протиприродний «негативізм» (табл. 2.1.2).

Зауваження. Повузловий розподіл рівномірної масової сили назовемо *спектром навантажень* серендипового скінченного елемента. Спектр, обчислений за допомогою формули (2.1.3), будемо вважати *теоретичним спектром навантажень*.

⁶ Кратні нулі виникають у точках перетину ліній нульового рівня. Точки перетину ліній рівня не обов'язково співпадають з вузлами.

⁷ Надмірна жорсткість моделі проявляється у тому, що у вузлах з кратними нулями в нуль обертається не тільки сама функція, а і її похідні по нормалі до границі (тобто частинні похідні). Це обмеження формування зайве (воно не мотивоване), тому що не передбачене інтерполяційною гіпотезою Лагранжа (подібна умова зустрічається в ермітовій інтерполяції). У теорії серендипових апроксимацій жорсткими моделями є проміжні базисні функції. З фізичної точки зору – це підвищена здатність поверхні (оболонки) чинити опір прогину. А з математичної точки зору жорсткість – це безальтернативність, існування єдиного розв'язку. У стандартному базисі СЕ жорстко регламентується поведінка базисної функції не тільки на границі (що є необхідним), але і всередині СЕ (що априорі не є необхідним і веде до фізичної неадекватності).

Таблиця 2.1.2

Розподіл рівномірної масової сили p_i			
Елемент	Номер вузла	p_i	
	1	$-\frac{1}{12}$	
	2	$\frac{4}{12}$	
	1	$-\frac{2}{16}$	
	2	$\frac{3}{16}$	
	1	$-\frac{13}{540}$	
	2	$\frac{56}{540}$	
	3	$\frac{36}{540}$	

Як видно з формули (2.1.3), теоретичний спектр вузлових навантажень – це результат інтегрального усереднення базису. Базис поліноміальний, інтегрування точне, тому можливим джерелом аномалій є геометричні особливості функцій форми серендипових елементів. У наступних параграфах покажемо методи конструювання базисів, які

дозволяють отримувати нові моделі ССЕ з кращими характеристиками за допомогою керування серендиповою поверхнею⁸.

2.2. Матричний метод побудови біквадратичної інтерполяції. Процедура Тейлора

Відкриває сім'ю серендипових СЕ вищих порядків біквадратичний елемент (рис. 2.2.1). У англійській літературі цей елемент позначають Q8 (quadrilateral) [86].

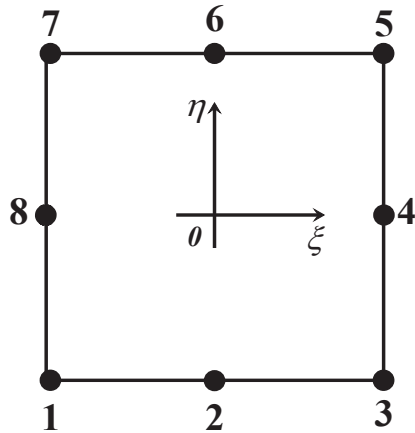


Рис. 2.2.1. ССЕ-8 ($|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$)

У локальній системі координат $\xi\eta$ ССЕ з біквадратичною інтерполяцією – це квадрат з 8-ма регулярно розташованими вузлами і система базисних функцій, яка відповідає цим вузлам. Інтерполяційний поліном для ССЕ-8 має 8 параметрів:

$$\phi(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^2\eta + \alpha_8\xi\eta^2, \quad (2.2.1)$$

де $\alpha_i (i = \overline{1, 8})$ – невідомі коефіцієнти, які знаходять методом оберненої матриці.

⁸ Серендиповою поверхнею будемо називати поверхню $N = N_i(\xi, \eta)$, яка проходить через точку $(\xi_i, \eta_i, 1)$ та всі інші вузли на границі.

Виконавши відповідні перетворення, отримують функції форми у наступному вигляді [44; 45; 87]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta - 1), \quad (2.2.2)$$

$$i = 1, 3, 5, 7; \xi_i, \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta), \quad i = 2, 6; \eta_i = \pm 1. \quad (2.2.3)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi), \quad i = 4, 8; \xi_i = \pm 1. \quad (2.2.4)$$

Стандартний базис (2.2.2)-(2.2.4) серендипової біквадратичної інтерполяції *a priori* відповідає властивостям 1-8 (параграф 2.1).

Матрична алгебра сприяла розвитку методу скінченних елементів. Моделі ССЕ можна побудувати методом оберненої матриці, тому що визначник (типу Вандермонда) матриці СЛАР не дорівнює нулю. Ця обставина, з одного боку, оптимістична (базис є), але, з іншого боку, теорема єдиності не стимулює пошук альтернативних базисів СЕ. Головний недолік матричних методів полягає у тому, що вони іноді не результативні (наприклад, якщо матриця системи рівнянь сингулярна).

На початку 70-х років минулого сторіччя Р. Тейлор (Taylor R.L.) у статті [103] запропонував інший метод побудови стандартних базисів серендипових елементів. Р. Галлагер процедуру Тейлора вважає (на нашу думку, небезпідставно) дуже елегантною [16]. **Процедура Тейлора** має два етапи:

1. Побудова «проміжної» базисної функції за допомогою множення полінома Лагранжа відповідного степеня по одному з напрямів на лінійний поліном Лагранжа по іншому напрямку.

2. Побудова «кутової» базисної функції за допомогою лінійної комбінації білінійної базисної функції $\overline{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$ та «проміжних» функцій.

Ключові ідеї процедури Тейлора проілюструємо на прикладі [16] побудови базису ССЕ-8 (рис. 2.2.1). Спочатку, помноживши відповідний поліном Лагранжа другого степеня $l_2(\xi)$:

$$l_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad (2.2.5)$$

на лінійний поліном Лагранжа $l_1(\eta)$:

$$l_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta), \quad (2.2.6)$$

отримуємо базисну функцію для проміжного вузла 2:

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta). \quad (2.2.7)$$

Аналогічно будуємо базисну функцію для вузла 8:

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi). \quad (2.2.8)$$

Це дозволяє отримати «проміжні» функції, що відповідають інтерполяційній гіпотезі Лагранжа. Для «кутової» функції, наприклад, для N_1 , скористаємося лінійною комбінацією відомої функції білінійної інтерполяції

$$\overline{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (2.2.9)$$

і «проміжних» функцій (2.2.7) і (2.2.8). Таким чином,

$$N_1(\xi, \eta) = \overline{N}_1(\xi, \eta) - \frac{1}{2}(N_2 + N_8). \quad (2.2.10)$$

Вибір вагових коефіцієнтів у формулі (2.2.10) обумовлюється інтерполяційною гіпотезою Лагранжа (2.1.1) (рис. 2.2.2).

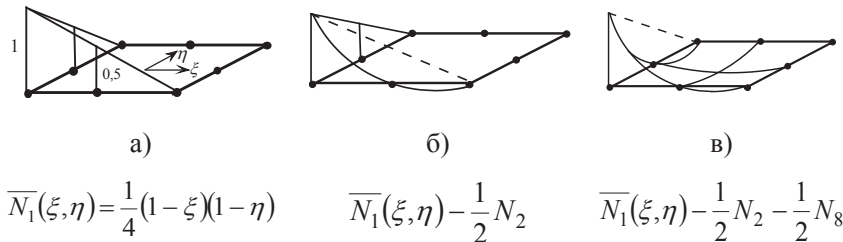


Рис. 2.2.2. Побудова базисної функції N_1 на ССЕ-8 за допомогою методу Тейлора

Після нескладних перетворень у формулі (2.2.10) отримуємо функцію стандартного базису ССЕ-8:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta). \quad (2.2.11)$$

Таким способом можливо генерувати базисні функції для елементів серендипової сім'ї на площині і у просторі [23]. Але далі автори [23] зауважують, що «...целесообразно отметить, что число многочленных компонент, которые могут быть получены с помощью использования только граничных узлов, недостаточно, чтобы дать полное многочленное представление для интерполяционного полинома при $p \geq 4$... Следовательно, для элементов высших степеней необходимо опять ввести внутренние узлы...». Далі покажемо, яким чином можна обійтись без внутрішніх вузлів при побудові стандартних і багатопараметричних моделей на ССЕ.

2.3. Ймовірісно-геометричний метод на біквадратичному елементі

Ймовірісно-геометричний метод⁹ моделювання базису СЕ, який розглянутий у розділі 1 для білінійного елемента, придатний і для побудови серендипових базисів більш високого порядку, як на площині, так і у просторі. У загальному випадку апроксимуючий поліном має вигляд:

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i \Phi_i, \quad (2.3.1)$$

$$\text{причому } \sum_{i=1}^n N_i = 1, \quad (2.3.2)$$

де N_i – базисна функція, що відповідає вузлу i на СЕ ($i = \overline{1, n}$),

Φ_i – вузлове значення шуканої функції у вузлі i ,

n – кількість вузлів на СЕ.

⁹ Нагадаємо, що барицентричний зміст серендипового базису полягає у розподілі маси по вузлах ССЕ таким чином, щоб центром тяжіння елемента служила навмання вибрана точка [11]. З іншого боку, ймовірнісна точка зору на функції форми дозволяє сформулювати схеми випадкових блукань на СЕ, встановити зв'язок між процедурою відновлення функції на дискретному елементі і методом Монте-Карло. У рамках схеми випадкових блукань базисні функції СЕ – це відповідь на питання: які ймовірності треба надати переходам блукаючої частинки з даної точки в граничні вузли, щоб середня винагорода за вихід у вузол співпала зі значенням інтерполянта СЕ у даній точці. В обох випадках ми маємо справу з фундаментальною властивістю математичного сподівання.

Особливістю використання ймовірісно-геометричного методу на ССЕ вищих порядків є той факт, що *апріорні перехідні ймовірності* N_i у схемі однокрокових випадкових блукань на елементі (рис. 2.3.1) можуть бути від'ємними. Більше як 25 років тому Гнеденко Б.В. звернув увагу на появу значної кількості публікацій, в яких використовували поняття «від'ємна ймовірність» [17; 18]. Поступово від'ємні ймовірності¹⁰ [30], від'ємні маси [11], від'ємні числа Фібоначчі [19] стали звичним інструментом наукових досліджень.

Ці питання викликають дискусії фахівців, які є прихильниками механічних аналогій. Щоб наповнити змістом від'ємний повузловий розподіл рівномірної масової сили на ССЕ-8, ми пропонуємо ввести однокрові схеми випадкових блукань зі штрафними маршрутами.

Введемо поняття штрафного маршруту: *штрафним маршрутом* будемо вважати такий маршрут з випадкової точки старту, який асоціюється з від'ємною перехідною ймовірністю у вузол i . Наприклад, якщо частинка стартує з центра квадрата $(0,0)$ то перехідна ймовірність у «кутовий» вузол квадрата на ССЕ-8 від'ємна. Те ж саме стосується будь-якої точки всередині п'ятикутника 2-3-5-7-8 (рис. 2.3.1). Якщо частинка стартує з будь-якої точки всередині трикутника $\Delta 128$, то будь-який маршрут у вузол 1 є призовим. Базисні функції СЕ можна трактувати як *перехідні ймовірності* блукаючої частинки, що стартувала з випадкового старту. Саме такі схеми з штрафними маршрутами можна використовувати при моделюванні базису ССЕ вищого порядку.

Покажемо, як за допомогою ймовірісно-геометричного методу можна побудувати стандартний базис на біквадратичному СЕ.

I варіант. При побудові базисної функції N_1 будемо використовувати означення геометричної ймовірності, тому на ССЕ-8 розглянемо

¹⁰ Наприклад, про існування від'ємних ймовірностей і щільностей ймовірностей пише Габор Секей у [46]: «Хотя в теории Колмогорова вероятность всегда неотрицательна, некоторые теоремы в теории вероятностей можно обобщить на случай, когда отрицательные числа выступают как вероятности. Например, К. Хохберг доказал [98], что в теоремах, полученных в результате такого обобщения центральной предельной теоремы, возникают действительные (положительные и отрицательные) «плотности вероятности», которые можно вывести из фундаментальных решений следующего обобщенного дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{n+1} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}, \quad n = 2, 3, \dots;$$

(при $n = 1$ имеем обычное дифференциальное уравнение теплопроводности)».

композицію квадрата 1-3-5-7 і $\Delta 128$ зі спільним вузлом 1 (рис. 2.3.2 а). Ймовірність влучення навмання вкинутої точки в протилежну вузлу 1 область квадрата 1-3-5-7, у відповідності з означенням геометричної ймовірності (1.3.1), дорівнює $\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$. Ймовірність влучення навмання вкинутої точки у заштриховану область $\Delta 128$ дорівнює $(-\xi - \eta - 1)$ (формула 1.3.1).

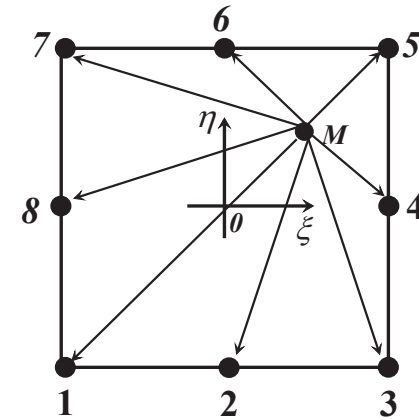


Рис. 2.3.1. Однокрокова 8-маршрутна схема блукань на ССЕ-8

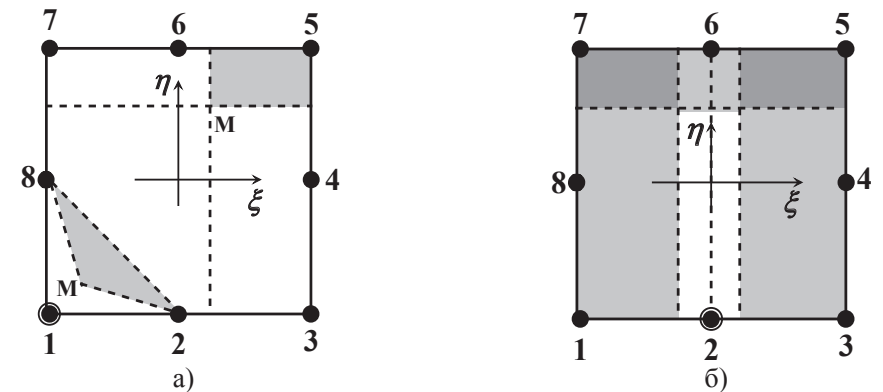


Рис. 2.3.2. Ймовірісно-геометричний метод побудови стандартного базису біквадратичного елемента

Використовуючи теорему добутку ймовірностей незалежних подій, отримаємо:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1). \quad (2.3.1)$$

При побудові базисної функції N_2 використаємо композицію з прямокутників: 2-3-5-6 і 2-6-7-1 (рис. 2.3.2 б). Знайдемо ймовірність влучення точки у вертикальні заштриховані області. Ця ймовірність дорівнює $(1-\xi^2)$. Знайдемо ймовірність влучення точки в горизонтальну заштриховану область: $\frac{1}{2}(1-\eta)$. Використовуючи теорему добутку ймовірностей, отримуємо шукану базисну функцію:

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta). \quad (2.3.2)$$

II варіант (кусково-планарна апроксимація). Ріхард Курант запропонував кусково-планарну¹¹ апроксимацію у статті [91], що була опублікована у 1943 р. Ця апроксимація поклала початок розвитку методу скінченних елементів. Подальше узагальнення основної ідеї Куранта стало рішучим кроком у техніці МСЕ. Побудова простих елементів корисна саме по собі, але ще більш важливо те, що на цих елементах можливо переконливо проілюструвати існування глибинних зв'язків між поліноміальною інтерполяцією на СЕ і геометричною ймовірністю. Трикутник Куранта і доведення, що кусково-планарна модель має ймовірнісну природу, розглянуто у додатку. Скористаємося кусково-лінійними функціями¹² на ССЕ-8 і доведемо, що «функції-напівкришки» є «будівельним матеріалом» для конструювання базисних функцій вищих порядків на квадратних скінченних елементах.

У функціях Куранта легко побачити барицентричні (трикутні) координати, тому для побудови базисної функції N_1 розбиваємо СЕ на три трикутника: $\Delta 135$, $\Delta 157$ і $\Delta 128$ (рис. 2.3.3). На кожному з трикутників будуюмо базис лінійної інтерполяції за формулою (1.3.10):

¹¹ Слово *plain* означає площину, тому тут мається на увазі апроксимація з кусків площин, звідки і назва – «кусково-планарна».

¹² Кусково-лінійні функції ще називають «кришками» («напівкришками»). Історія їх виникнення має глибоке коріння. Наприклад, правило важеля Архімеда має пряме відношення до функцій-«напівкришок».

$$N_1^{(1)} = \frac{1-\xi}{2}; \quad N_1^{(2)} = \frac{1-\eta}{2}; \quad N_1^{(3)} = -1-\xi-\eta. \quad (2.3.3)$$

Добуток цих ймовірностей дає базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} \cdot N_1^{(3)} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta). \quad (2.3.4)$$

Для побудови базисної функції для вузла 2 розбиваємо біквадратичний елемент на три трикутники: 1) $\Delta 235$, 2) $\Delta 271$ та 3) $\Delta 257$ і на кожному з них шукаємо відповідну барицентричну координату $N_2^{(1)}$, $N_2^{(2)}$, $N_2^{(3)}$ (рис. 2.3.4):

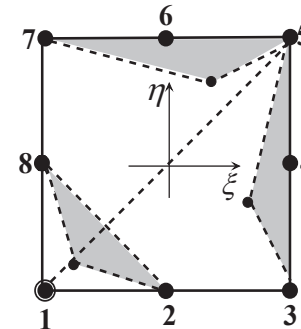


Рис. 2.3.3. До побудови N_1 стандартного базису ССЕ-8

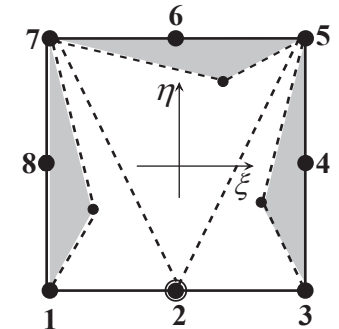


Рис. 2.3.4. До побудови N_2 стандартного базису ССЕ-8

$$N_2^{(1)} = 1-\xi; \quad N_2^{(2)} = 1+\xi; \quad N_2^{(3)} = \frac{1-\eta}{2}. \quad (2.3.5)$$

За теоремою добутку ймовірностей отримуємо:

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} \cdot N_2^{(3)} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta). \quad (2.3.6)$$

III варіант. Для побудови базисних функцій розбиваємо скінченний елемент на підобласті, в кожній з яких використаємо формулу (1.3.10), яка була отримана у розділі 1. Покажемо, як ця формула працює на ССЕ-8. Наприклад, для трикутника $\Delta 135$ формула (1.3.10) працює наступним чином (рис. 2.3.3):

якщо $\Phi_{level} = 1 - \xi$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1-\xi)-0}{2-0} = \frac{1-\xi}{2} = N_1^{(1)}(\xi, \eta). \quad (2.3.7)$$

Аналогічно, для трикутника $\Delta 157$ за формулою (1.3.10) отримуємо (рис. 2.3.3):

$$PL = \frac{(1-\eta)-0}{2-0} = \frac{1-\eta}{2} = N_1^{(2)}(\xi, \eta). \quad (2.3.8)$$

На трикутнику $\Delta 128$ (рис. 2.3.3):

$$PL = \frac{(-1-\xi-\eta)-0}{1-0} = \frac{-1-\xi-\eta}{1} = N_1^{(3)}(\xi, \eta). \quad (2.3.9)$$

Базисну функцію для вузла 1 отримуємо як добуток:

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} \cdot N_1^{(3)} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta). \quad (2.3.10)$$

Базисну функцію для вузла 2 отримуємо аналогічним методом. На трикутнику $\Delta 235$ (рис. 2.3.4):

$$PL = \frac{(1-\xi)-0}{1-0} = \frac{1-\xi}{1} = N_2^{(1)}(\xi, \eta). \quad (2.3.11)$$

На трикутнику $\Delta 271$ (рис. 2.3.4):

$$PL = \frac{(1+\xi)-0}{1-0} = \frac{1+\xi}{1} = N_2^{(2)}(\xi, \eta). \quad (2.3.12)$$

На трикутнику $\Delta 257$ (рис. 2.3.4):

$$PL = \frac{(1-\eta)-0}{2-0} = \frac{1-\eta}{2} = N_2^{(3)}(\xi, \eta). \quad (2.3.13)$$

За теоремою добутку ймовірностей базисна функція записується наступним чином:

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} \cdot N_2^{(3)} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta). \quad (2.3.14)$$

2.4. Геометричний метод конструювання базисних функцій біквадратичного елемента

Покажемо, як за допомогою геометричного підходу [37; 101] можна побудувати стандартний базис на ССЕ-8.

Спочатку моделі будувались при використанні аналізу ліній нульового рівня, тому і назви були пов'язані з планіметриєю (I варіант). Пізніше виникло питання: які поверхні утворили конкретні лінії нульового рівня? Як наслідок, виник стереометричний підхід (II варіант).

Стандартна модель

I варіант (планіметричний). Для побудови N_1 у біквадратичному СЕ (рис. 2.4.1) треба розглянути рівняння сторін 3-5, 5-7 та прямої 2-8, відповідно: $1 - \xi = 0$, $1 - \eta = 0$ і $-1 - \xi - \eta = 0$. Для того, щоб функція N_1 дорівнювала нулю у всіх вузлах, крім першого, перемножимо ліві частини цих рівнянь, отримаємо ненормовану функцію. Після нормування функції отримуємо:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1). \quad (2.4.1)$$

Для N_2 розглянемо композицію рівнянь прямих 1-7, 3-5 та 5-7 (рис. 2.4.2), відповідно: $1 - \xi = 0$, $1 - \eta = 0$ і $1 + \xi = 0$. Для того, щоб функція N_2 дорівнювала нулю у всіх вузлах, крім другого, перемножимо ліві частини цих рівнянь, отримаємо ненормовану функцію. Після нормування функції маємо:

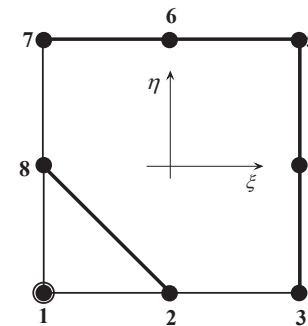


Рис. 2.4.1. До побудови стандартної функції N_1

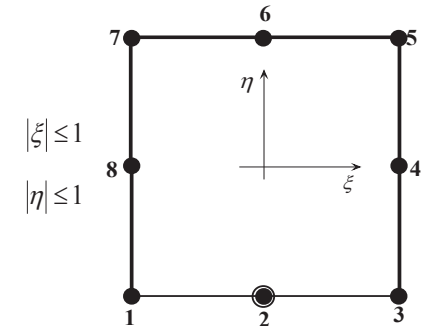


Рис. 2.4.2. До побудови стандартної функції N_2

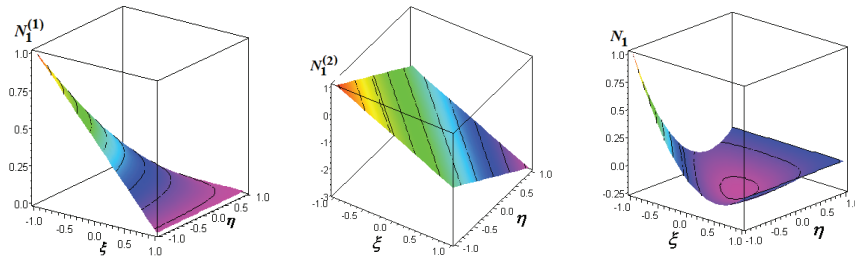
$$N_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta). \quad (2.4.2)$$

Як бачимо, отримані функції співпадають з функціями стандартного базису ССЕ-8.

II варіант (стереометричний). Ідеї цього *методу «добутку площин»* («*product of planes*») вперше були запропоновані в 70-х роках минулого століття Уачспрессом на трикутних елементах із шістьма вузлами [106] та розвинені у 80-ті роки японськими вченими Інституту Досліджень Атомної Енергетики (JAERI) [100].

На ССЕ-8 стандартний базис теж можна отримати геометрично за допомогою модифікації методу Уачспреса, який назвемо *методом «добутку поверхонь»* [92; 106]. У ньому, на відміну від «*product of planes*», можна використовувати не тільки рівняння площин, а і рівняння поверхонь другого порядку. Наприклад, якщо при побудові базисної функції N_1 на ССЕ-8 використати в якості множників рівняння *гіперболічного параболоїда* $N_1^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$ (рис. 2.4.3 а) і *площини* $N_1^{(2)} = 1 - \xi - \eta$ (рис. 2.4.3 б), то отримаємо базисну функцію (2.4.1) для вузла 1 (рис. 2.4.3 в):

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta). \quad (2.4.3)$$



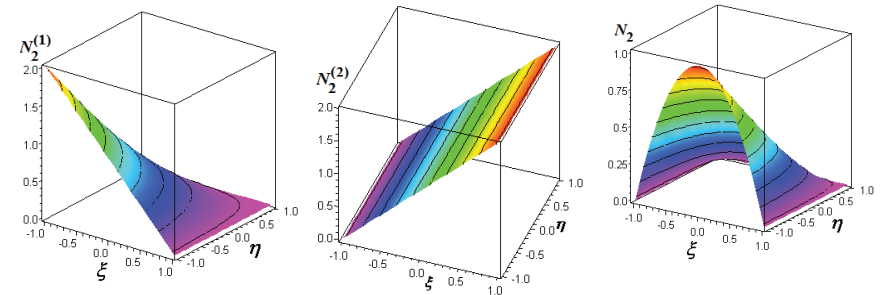
а) графік гіпара $N_1^{(1)}$ б) графік площини $N_1^{(2)}$ в) графік функції N_1

Рис. 2.4.3. Візуалізація побудови функції N_1 стандартного базису на ССЕ-8

Якщо візьмемо рівняння гіпара $N_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta)$ (рис. 2.4.4 а) і площини $N_2^{(2)} = 1 + \xi$ (рис. 2.4.4 б), то отримаємо базисну функцію, що відповідає вузлу 2 для стандартного базису (рис. 2.4.4 в):

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta). \quad (2.4.3)$$

Зауважимо, що замість гіпарів на рис. 2.4.3 а і 2.4.4 а можна використовувати дві площини.



а) графік гіпара $N_2^{(1)}$ б) графік площини $N_2^{(2)}$ в) графік функції N_2

Рис. 2.4.4. Візуалізація побудови функції N_2 стандартного базису на ССЕ-8

Показані вище процедури дозволяють отримати на 8-вузловому ССЕ стандартний базис, який, як відомо, має недоліки (неприродний розподіл повузлового навантаження рівномірної масової сили (табл. 2.1.2)). Покажемо нові методи, які дозволяють отримувати базиси, що мають кращі інтерполяційні та обчислювальні характеристики.

2.5. Обернена задача серендипової інтерполяції. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису ССЕ-8

Практично ніхто з фахівців з методу скінченних елементів (МСЕ), за винятком О. Зенкевича, не звертає увагу на від'ємні значення у повузлових розподілах рівномірної масової сили [16; 38; 45]. Та й сам

О. Зенкевич пропонує змиритися з цим фактом, тому що переваг у ССЕ більше, ніж недоліків. У рамках традиційного матричного аналізу уникнути цих аномалій і отримати додатні спектри неможливо. Але ця ситуація не влаштовує прихильників механічних аналогій.

З аналізу таблиці 2.1.2 стає зрозумілим, що необхідно дослідити можливість побудови базисів ССЕ, які матимуть природні спектри. Починаючи з 80-х років минулого століття відбувалися спроби позбутися «негативізму» у повузловому розподілі рівномірної масової сили серендипових моделей вищих порядків (табл. 2.1.2) [26; 71; 74]. Вперше альтернативні базиси були побудовані у 1982 р. ймовірісно-геометричним і геометричним методами на елементах третього і четвертого порядків на площині та у просторі. Але недоліком цих підходів є те, що спектр повузлового розподілу *a priori* невідомий. Розподіл рівномірної масової сили з'ясовується після побудови альтернативної моделі. Тому спектри моделей, обчислені за формулою (2.1.3), мають як додатні, так і від'ємні значення.

Актуальною є задача побудови моделей з *a priori* фізично обґрунтованими спектрами: відсутність від'ємних значень та їх зменшення з віддаленням від центру елемента. Ця задача є оберненою, і, крім самостійного значення, також є важливою при конструюванні кубатур типу Ньютона-Котеса.

Сформулюємо **обернену задачу¹³ серендипової інтерполяції**: побудувати базисні функції з *a priori* визначеним повузловим розподілом рівномірної масової сили [2; 3; 7].

Найбільш природний спектр вузлових навантажень, на наш погляд, можна отримати при проведенні **комп'ютерного експерименту**: на скінченний елемент наносимо рівномірну ортогональну сітку з кроком $h = 0,05$, по якій випадковим чином блукають частинки, що стартували з барицентра СЕ. Частинки поглинаються розташованими на границі СЕ вузлами, після чого обчислюємо відносну частоту попадання частинок у відповідний вузол. З цих апостеріорних перехідних ймовірностей і формується **експериментальний спектр** повузлового розподілу C_i . Довжина однієї серії експерименту – 100000 частинок, кількість серій – 10 на кожному з елементів серендипової сім'ї. Як приклад, на рис. 2.5.1

¹³ Прямою задачею у даній роботі будемо вважати побудову базисних функцій з *a posteriori* обчисленим повузловим розподілом рівномірної масової сили.

показана організація симетричних випадкових блукань на біквадратичному СЕ.

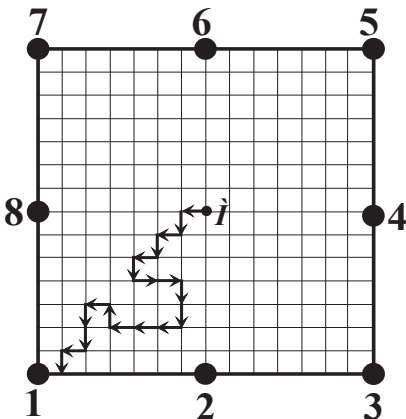


Рис. 2.5.1. Симетричні випадкові блукання по вузлах сітки на ССЕ-8

У табл. 2.1.3 наведені результати комп'ютерного експерименту і записаний експериментальний спектр (значення C_i) на кожному з елементів серендипової сім'ї.

Таблиця 2.1.3

Номер вузла	Експериментальний розподіл рівномірної масової сили C_i		
	Скінченні елементи		
	ССЕ-8	ССЕ-12	ССЕ-16
1	0,087	0,040	0,022
2	0,163	0,105	0,065
3	-	-	0,098

Для побудови базису ССЕ, який реалізує експериментальні значення у повузловому навантаженні, була висунута **гіпотеза про рівність теоретичного p_i та експериментального C_i значень в повузловому розподілі рівномірної масової сили**. Функції такого базису повинні задовольняти умові:

$$p_i = \iint_{\omega} \gamma N_i(\xi, \eta) d\xi d\eta = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5.1)$$

де $\gamma = \frac{1}{4}$ – поверхнева щільність.

Чи можливо побудувати базис, що задовольняє умові (2.5.1)? Відповідь на це питання з'являється при поєднанні геометричного методу побудови базисних функцій з алгебраїчним методом знаходження базисних функцій – розв'язком системи рівнянь. Отримати базис ССЕ зі задалегідь визначеним спектром, тобто розв'язати обернену задачу серендипових апроксимацій [3], можна за допомогою **комбінованого алгебро-геометричного методу**¹⁴.

Реалізація цього методу відбувається в два етапи:

1) серендипові поліноми мають дійсні коефіцієнти, тому з геометричних міркувань базисна функція *a priori* записується як добуток лінійних і нелінійних множників з невідомими коефіцієнтами;

2) у відповідності до гіпотези Лагранжа (2.1.1) і гіпотези про рівність теоретичного і експериментального значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили (2.5.1) будується система рівнянь, яку вдається звести до системи алгебраїчних рівнянь, що розв'язується за допомогою матричних методів.

Розглянемо реалізацію алгебро-геометричного методу на прикладі кутової функції $N_1(\xi, \eta)$ ССЕ-8, яка записується в наступному вигляді:

$$N_1(\xi, \eta) = K_1(1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi + B\eta + C\xi\eta + 1). \quad (2.5.2)$$

Перші два лінійні множники асоціюються зі сторонами квадрата (рис. 2.2.1), які протилежні вузлу 1. Вибір полінома в останніх дужках обумовлений граничними умовами – апроксимуючий поліном на границі елемента, у відповідності до властивості 1, повинен мати другий степінь (3 вузла на стороні елемента). Керуючись тими ж міркуваннями, базисну функцію для «проміжного» вузла (наприклад, N_2) запишемо у вигляді:

$$N_2(\xi, \eta) = K_2(1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(D\eta + 1). \quad (2.5.3)$$

¹⁴ Ідея цього методу була вперше запропонована у 1995 р. при побудові альтернативних базисів на бікубічному елементі серендипової сім'ї (див. параграф 4.4).

Перші три дужки асоціюються зі сторонами квадрата 3-5, 7-1 та 5-7 (рис. 2.2.1), які протилежні вузлу 2. Додатковий множник в останніх дужках необхідний для того, щоб в інтерполяційному поліномі з'явився додатковий параметр $\alpha_9 \xi^2 \eta^2$, без якого неможливе створення альтернативного базису.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B, C, D, K_1, K_2 використовуємо апарат алгебри і запишемо систему рівнянь, яка утворена за допомогою інтерполяційної гіпотези Лагранжа (2.1.1) та гіпотези про рівність теоретичного та експериментального значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили (2.5.1):

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 8; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_1 d\xi d\eta &= C_1 = 0,087; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_2 d\xi d\eta &= C_2 = 0,163, \end{aligned} \right\} \quad (2.5.4)$$

де k – номер вузла, C_1 і C_2 – **значення вузлових навантажень** (табл. 2.1.3).

Система (2.5.4) має єдиний розв'язок, який дозволяє записати наступні базисні функції:

$$N_i = \frac{1}{4000} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1533 \xi_i \xi \eta_i \eta - 533 \xi_i \xi - 533 \eta_i \eta + 533), \quad i = 1, 3, 5, 7; \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (2.5.5)$$

$$N_i = \frac{1}{4000} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (467 + 1533 \eta_i \eta), \quad i = 2, 6; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (2.5.6)$$

$$N_i = \frac{1}{4000} (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) (467 + 1533 \xi_i \xi), \quad i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1. \quad (2.5.7)$$

Перевірка підтверджує, що отримані функції форми задовольняють властивостям 1-5 (параграф 2.1). Таким чином, за допомогою комбінова-

ного алгебро-геометричного методу *вперше* отримано альтернативний базис для ССЕ-8. Цей базис має додатний спектр повузлового розподілу рівномірної масової сили, що співпадає з результатами комп'ютерного експерименту (параграф 2.1). В подальшому будемо називати його *модифікованим базисом ССЕ-8, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень*.

Інтерполяційний поліном нового базису ССЕ-8 має на один доданок більше, ніж поліном стандартного базису (рис. 2.5.2), і на один доданок більше, ніж кількість вузлів.

$ \begin{array}{c} 1 \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 1 \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \\ \xi^2\eta^2 \end{array} $
а) Стандартний базис (8 параметрів)	б) Модифікований базис (9 параметрів)

Рис. 2.5.2. Трикутники Паскаля для ССЕ-8

У даній роботі *багатопараметричною апроксимацією* будемо називати таку, в якій інтерполяційний поліном має параметрів більше, ніж кількість вузлів на елементі. За допомогою таких «позавузлових» параметрів на ССЕ-8 позбулися недоліків, які притаманні стандартній моделі – протиприродного розподілу рівномірної масової сили по вузлах.

Зауваження. Якщо кількість вузлів для опису геометрії СЕ співпадає з кількістю вузлів для опису переміщень, то засновники МСЕ називають такі СЕ ізопараметричними. Коли кількість вузлів для опису геометрії СЕ більше кількості вузлів для опису переміщень, то СЕ називають суперпараметричними, навпаки – субпараметричними.

РОЗДІЛ 3 БІКВАДРАТИЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ. БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ

3.1. Узагальнення комбінованого алгебро-геометричного методу побудови базисних функцій ССЕ-8 (обернена задача з параметром)

Комбінований алгебро-геометричний метод [2; 3] можна узагальнити наступним чином: функції $N_1(\xi, \eta)$ та $N_2(\xi, \eta)$ залишити у вигляді (2.5.2) та (2.5.3) відповідно, а систему (2.5.4) записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned}
 N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\
 N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 8; \\
 N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\
 \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_1 d\xi d\eta &= p, \\
 \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_2 d\xi d\eta &= p_2,
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

де p – значення рівномірної масової сили у вузлі 1;
 p_2 – значення рівномірної масової сили у вузлі 2.

Зважаючи на те, що $4p + 4p_2 = 1$, отримуємо залежність $p_2 = \frac{1}{4} - p$.

Тоді систему (3.1.1) можна записати з одним параметром p наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 8; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_1 d\xi d\eta &= p, \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_2 d\xi d\eta &= \frac{1}{4} - p, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.2)$$

Система (3.1.2) будується аналогічно системі (2.5.4), єдиною відмінністю є параметр у правій частині двох останніх рівнянь, завдяки якому ми отримуємо можливість записати $N_i(\xi, \eta)$ у вигляді функцій зі змінним параметром p .

Розв'язавши систему (3.1.2), отримуємо наступні формули [2]:

$$N_1 = \frac{1}{16}(1-\xi)(1-\eta)((36p-1)(1+\xi+\eta)+(36p+3)\xi\eta); \quad (3.1.3)$$

$$N_2 = \frac{1}{16}(1-\xi^2)(1-\eta)((5-36p)-(36p+3)\eta). \quad (3.1.4)$$

Базисні функції з параметром для ССЕ-8 записуються наступним чином:

$$N_i = \frac{1}{16}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)((36p-1)(1-\xi_i\xi-\eta_i\eta)+(36p+3)\xi_i\xi\eta_i), \\ i = 1, 3, 5, 7; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1. \quad (3.1.5)$$

$$N_i = \frac{1}{16}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)((5-36p)+(36p+3)\eta_i\eta), \\ i = 2, 6; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (3.1.6)$$

$$N_i = \frac{1}{16}(1-\eta^2)(1+\xi_i\xi)((5-36p)+(36p+3)\xi_i\xi), \\ i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1. \quad (3.1.7)$$

Отримані функції відповідають властивостям базису ССЕ (див. параграф 2.1).

Зауважимо, що при $p = -\frac{1}{12}$ (кутове навантаження рівномірної масової сили у стандартному базисі) формули (3.1.5)-(3.1.7) збігаються з (2.2.2)-(2.2.4).

Сформулюємо додаткові умови на значення спектральних характеристик: всі вузлові значення розподілу рівномірної масової сили додатні, а серединні – більше кутових. Цим умовам відповідає наступна система нерівностей:

$$\left. \begin{aligned} p &> 0, \\ p_2 = \frac{1}{4} - p &> 0, \\ p_2 &> p. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

Розв'язок системи (3.1.8) показує, що найбільш природним з фізичної точки зору є діапазон $p \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$.

3.2. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій біквадратичного скінченного елемента

У методі скінченних елементів широко використовується процедура конденсації [16; 37]. Термін «*конденсація*» походить від латинського слова «condensatio» – згущення, скупчення, ущільнення. У методі скінченних елементів «*конденсація*» означає зниження розміру системи рівнянь за допомогою виключення деяких степенів вільності. Р. Галлагер у [16] зауважує: «Внутренние степени свободы естественным образом вводятся при построении функций формы для элементов высокого порядка... Желательно выписывать уравнения элемента, отвечающие узлам, расположенным лишь в вершинах и на сторонах элемента. С внутренними степенями свободы трудно оперировать...». Деякі автори [16] замість терміна «*конденсація*» використовують термін «*редукція*», тобто зниження порядку (англ. *reduction of order*) – техніка, яка використовується при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь.

У [16] наведено два методи виключення «внутрішніх» або «дутих» мод. «Дуті» моди – це моди, які мають відмінні від нуля амплітуди всередині елемента і амплітуди, що дорівнюють нулю на його сторонах. Перший метод у [16] побудовано у відповідності до процедури конденсації стосовно матриці жорсткості елемента. Другий метод – це безпосередня модифікація функцій форми таким чином, щоб виключити степені вільності, пов'язані з внутрішніми вузлами. Автор [16] наводить приклад виключення внутрішнього вузла прямокутного елемента з біквадратним полем переміщень: «Перемещение во внутренней точке можно задать в виде среднего значения от перемещений на серединах сторон. Можно также включить при усреднении и узлы в вершинах прямоугольника с помощью взвешенного учета соответствующих степеней свободы. Таким образом, можно выписать набор различных выражений в терминах заданной сокращенной системы степеней свободы».

Розглянемо процедуру виключення внутрішнього вузла в лагранжевому елементі другого порядку, тобто реалізацію процедури конденсації на лагранжевому СЕ з 9-ма вузлами. Нагадаємо: лагранжевий СЕ має внутрішній вузол, який лежить у центрі квадрата (рис. 3.2.1), на відміну від серендипового СЕ, в якому цей вузол відсутній (рис. 3.2.2). Для побудови системи базисних функцій на лагранжевому СЕ використовують перемноження двох одновимірних поліномів.

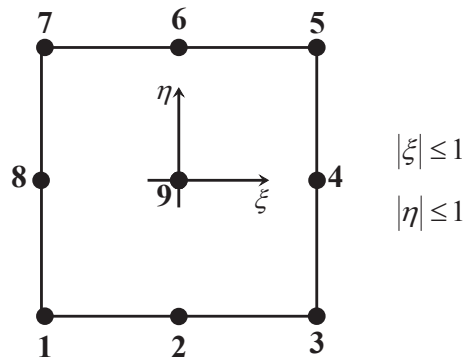


Рис. 3.2.1. Лагранжевий СЕ-9

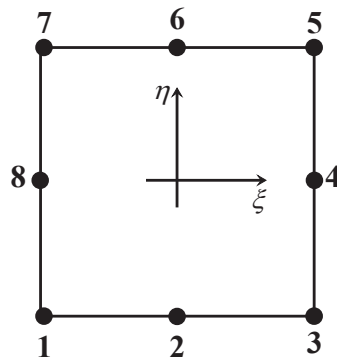


Рис. 3.2.2. Серендиповий СЕ-8

Базисні функції лагранжевого СЕ для вузлів 1, 2, 9 записані у формулах:

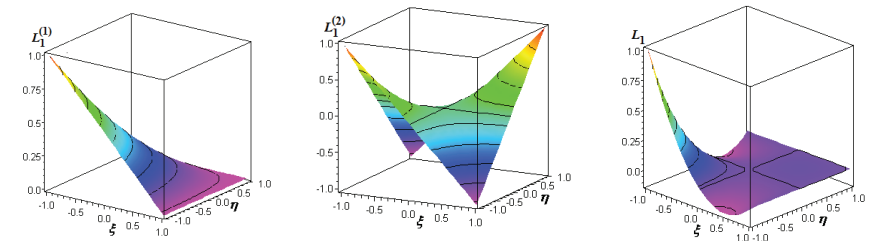
$$L_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta, \quad (3.2.1)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi)(-\eta), \quad (3.2.2)$$

$$L_9 = (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi)(1+\eta). \quad (3.2.3)$$

Як видно з формул, кожна базисна функція будується як «добуток» двох гіперболічних параболоїдів (ГП).

Наприклад, якщо при побудові базисної функції L_1 використати в якості множників рівняння двох гіперболічних параболоїдів $L_1^{(1)} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ (рис. 3.2.3 а) і $L_1^{(2)} = \xi\eta$ (рис. 3.2.3 б), то отримаємо базисну функцію (3.2.1) (рис. 3.2.3 в).

а) графік $L_1^{(1)}$ б) графік $L_1^{(2)}$ в) графік L_1 Рис. 3.2.3. Візуалізація побудови функції L_1 лагранжевого елемента

При побудові базисної функції L_2 використаємо в якості множників рівняння гіперболічних параболоїдів $L_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)$ (рис. 3.2.4 а) і $L_2^{(2)} = (1+\xi)(-\eta)$ (рис. 3.2.4 б). Отримаємо базисну функцію (3.2.2) (рис. 3.2.4 в).

Аналогічно, використані для побудови L_9 (формула 3.2.3) гіпари $L_9^{(1)} = (1-\xi)(1-\eta)$ і $L_9^{(2)} = (1+\xi)(1+\eta)$ показані відповідно на рис. 3.2.5 а і 3.2.5 б. Графік функції L_9 показано на рис. 3.2.5 в.

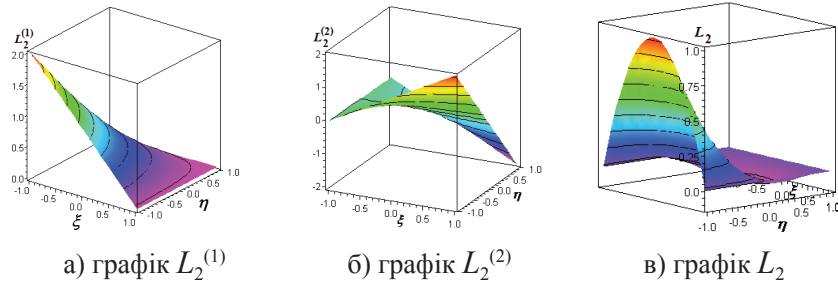


Рис. 3.2.4. Візуалізація побудови функції L_2 лагранжевого елемента

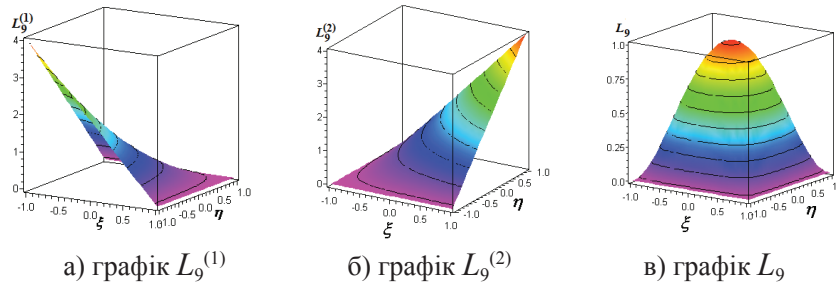


Рис. 3.2.5. Візуалізація побудови функції L_9 лагранжевого елемента

Ці поверхні (рис. 3.2.3-3.2.5) будуть грати ключову роль при побудові серендипових базисних функцій.

У біквадратичного СЕ «дута» мода одна – це базисна функція для вузла 9. Позбутися внутрішнього вузла і «зайвої» (з точки зору побудови глобальної матриці жорсткості у методі скінченних елементів) функції можна за допомогою наступних формул:

$$N_1 = L_1 - \frac{1}{4} L_9, \quad (3.2.4)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(\xi\eta - (1 + \xi)(1 + \eta)), \quad (3.2.5)$$

$$N_2 = L_2 + \frac{1}{2} L_9, \quad (3.2.6)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi)(1 - \eta)((1 + \xi)(- \eta) + (1 + \xi)(1 + \eta)). \quad (3.2.7)$$

Спостереження показали [37], що кожен «кутову» функцію треба зменшити на четверту частину «дутої» моди, а кожен «проміжну» функцію збільшити на половину «внутрішньої» моди. Ключовою операцією переходу від лагранжева елемента до серендипова є додавання гіперболічного параболоїда.

Після нескладних перетворень у формулах (3.2.5) і (3.2.7) отримуємо стандартний базис для ССЕ-8, який описано у відомих монографіях [24; 45; 107; 108]. Базисні функції для першого і другого вузлів записані у формулах:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(- \xi - \eta - 1), \quad (3.2.8)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi). \quad (3.2.9)$$

У результаті когнітивно-графічного аналізу цих поверхонь з'явилась ідея додати ще один гіпар до площини у третій дужках формули (3.2.8).

На прикладі «кутової» функції для вузла 7 ССЕ-8 запропонуємо наступну ієрархічну процедуру моделювання (рис. 3.2.6):

1) Будуємо поверхню $N_7^{(1+2)} = N_7^{(1)} + N_7^{(2)}$, яка є сумою двох поверхонь (рис. 3.2.6 в): площини $N_7^{(1)} = 1 - \xi + \eta$ (рис.3.2.6 а) і гіпара $N_7^{(2)} = (1 + \xi)(1 - \eta)$ (рис. 3.2.6 б).

2) Базисну функцію N_7 (рис.3.2.6 г) отримуємо як добуток гіпара $N_7^{(3)} = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$ (рис. 3.2.6 д) і поверхні $N_7^{(1+2)}$, що зображена на рис.3.2.6 в.

Базисна функція для вузла 7 у цій моделі має вигляд:

$$N_7(\xi, \eta) = N_7^{(3)} \cdot N_7^{(1+2)} = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta + (1 + \xi)(1 - \eta)). \quad (3.2.10)$$

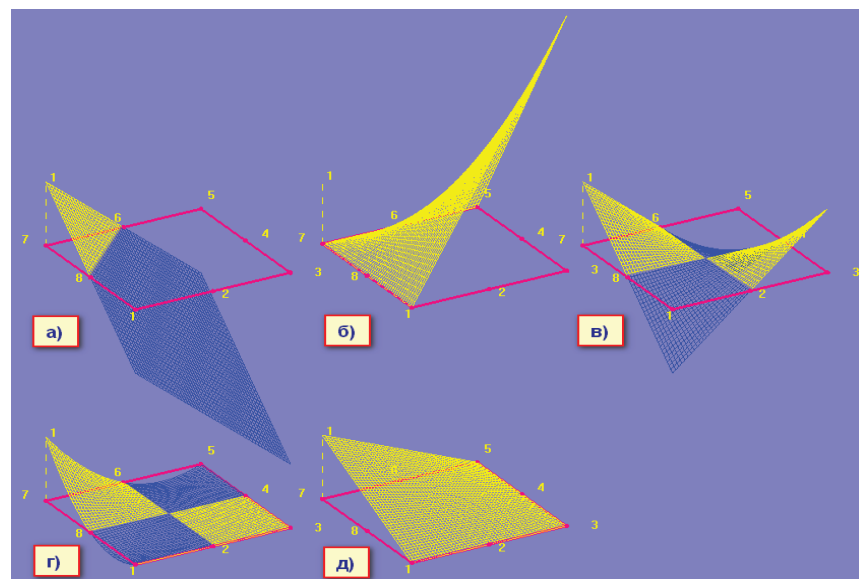


Рис. 3.2.6. Візуалізація компонентів побудови альтернативного базису CSE-8

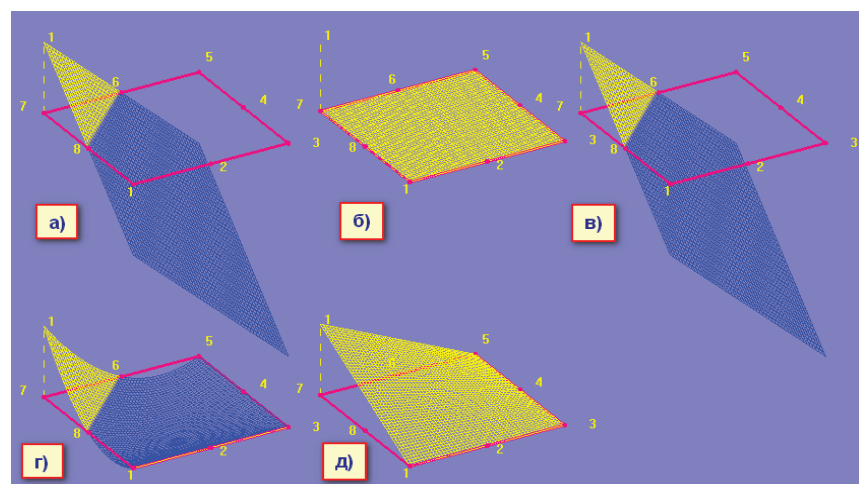


Рис. 3.2.7. Візуалізація компонентів побудови стандартного базису CSE-8

Когнітивно-графічний метод побудови серендитової поверхні використовує елементи ієрархічної побудови базисів СЕ, про які писали Зенкевич і Морган у своїй монографії [23]: «Повышение точности приближения может быть достигнуто последовательным повышением степени базисных функций (при фиксированной сетке конечных элементов)... В этом плане обсуждаются так называемые иерархические формы, когда функции высших степеней последовательно получаются с помощью добавления соответствующих слагаемых. Такие формулировки, как правило, оказываются наиболее эффективными в вычислительном отношении». Базисні функції, які отримані за допомогою адитивного уточнення, автори [23] називають *ієрархічними*. Таким чином, засновники МСЕ передбачили неоднозначність апроксимації функції двох аргументів на серендитових елементах вищих порядків. Саме це стало для нас поштовхом для пошуку методів побудови ієрархічних форм базисних функцій.

Звертаємо увагу на цитату з монографії Зенкевича і Моргана, які пишуть про «иерархические формы, когда функции высших степеней последовательно получаются с помощью добавления соответствующих слагаемых». Саме це відбувається у новому методі, який ми назвали *когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних базисів СЕ* [25].

Формули для отримання нескінченної множини базисів у цьому методі можуть бути записані наступним чином:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta + K(1+\xi)(1+\eta)), \quad (3.2.11)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)\left((1+\xi) - \frac{1}{2}K(1+\xi)(1+\eta)\right), \quad (3.2.12)$$

де N_1 , N_2 – модифіковані базисні функції серендитового елемента CSE-8.

Функції стандартного базису можна отримати як наслідок з формул (3.2.11)-(3.2.12). На рис. 3.2.7 можна спостерігати процедуру отримання поверхні *стандартної «кутової» функції*

біквдратичного елемента при $K = 0$. При побудові функції форми для вузла 7 (рис. 3.2.7 г) в якості множників використано площину $N_7^{(1)} = 1 - \xi + \eta$ (рис. 3.2.7 а) та гіперболічний параболоїд (гіпар) $N_7^{(2)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$ (рис. 3.2.7 д). Додаткова поверхня (рис. 3.2.7 б) у стандартного базису відсутня ($K = 0$).

Аналогічно можна побудувати будь-яку «проміжну» функцію форми ССЕ-8 для вузлів 2, 4, 6, 8.

З монографій фахівців МСЕ [16; 23; 24; 37; 38; 107] складається враження, що для елементів серендипової сім'ї число параметрів інтерполяційного полінома і число степенів вільності завжди співпадають. Нагадаємо, що інтерполяційний поліном стандартного базису має кількість параметрів, яка відповідає кількості вузлів ССЕ. Відповідна схема Паскаля для біквдратичного елемента показана на рис. 3.2.8 а. Наші результати свідчать, що ця умова не є обов'язковою. Використання при конструюванні функції форми додаткової поверхні (рис. 3.2.6 б) приводить до появи «прихованого» параметра $\xi^2\eta^2$. На відміну від стандартної моделі, цей базис має 9 мономів у інтерполяційному поліномі (рис. 3.2.8 б). Саме наявність «прихованих» параметрів у інтерполяційному поліномі дозволяє будувати ієрархічні форми базисних функцій.



а) Стандартний базис
(8 параметрів, $K = 0$)

б) Модифікований базис
(9 параметрів, $K \neq 0$)

Рис. 3.2.8. Схема Паскаля для ССЕ-8

Запишемо узагальнені формули когнітивно-графічного метода для ССЕ-8:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(-1 + \xi_i\xi + \eta_i\eta + K(1 - \xi_i\xi)(1 - \eta_i\eta)),$$

$$i = 1, 3, 5, 7; \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (3.2.13)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta_i\eta)\left((1 + \xi) - \frac{1}{2}K(1 + \xi)(1 - \eta_i\eta)\right),$$

$$i = 2, 6; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (3.2.14)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 + \xi_i\xi)\left((1 + \eta) - \frac{1}{2}K(1 + \eta)(1 - \xi_i\xi)\right),$$

$$i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1. \quad (3.2.15)$$

Важливе значення для визначення специфічних особливостей моделі мають інтегральні характеристики, наприклад, **повузловий розподіл рівномірної масової сили** p_i , що обчислюється за формулою (2.1.3).

У новому **когнітивно-графічному методі** базисна функція містить параметр K , тоді p_i – це функція, що залежить від K . Якщо обчислити подвійний інтеграл (2.1.3) від функцій (3.2.11) і (3.2.12), то отримаємо наступні залежності:

$$p_1(K) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{9}K. \quad (3.2.16)$$

$$p_2(K) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}K. \quad (3.2.17)$$

На рис. 3.2.9 показані графіки функцій $p_1(K)$ і $p_2(K)$. Для практичних розрахунків краще використовувати базиси для $K \in (0,750; 1,875)$, тому що при $K > 0,750$ зникає негативізм, а при $K > 1,875$ – виникає фізично протиприродний розподіл.

У таблиці 3.2.1 наведені значення повузлового розподілу рівномірної масової сили для базисів, які відомі з [3; 24; 45; 70].

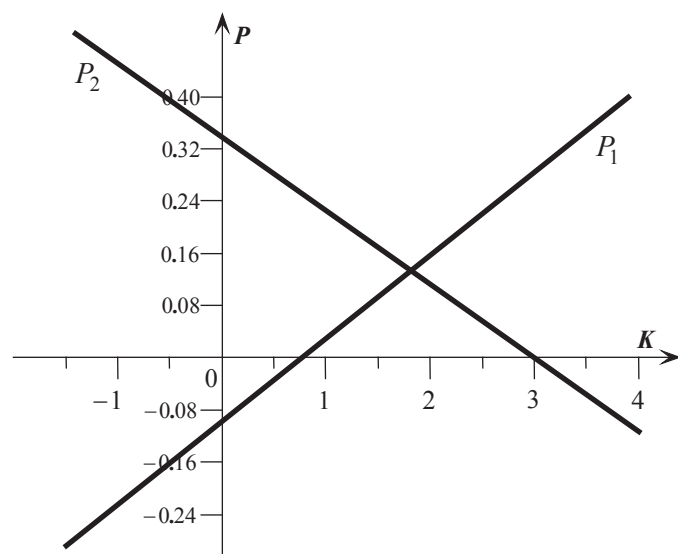


Рис. 3.2.9. Залежність повузлового розподілу масової сили p_i від K

Таблиця 3.2.1

Повузловий розподіл рівномірної масової сили

№	Базиси	K	p_1	p_2
1	Стандартний (I модель)	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
2	Модифікований з прямими, що перетинаються (II модель)	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{9}$
3	Модифікований з експериментальним спектром (III модель)	$\frac{1533}{1000}$	$\frac{87}{1000}$	$\frac{163}{1000}$

Отримані результати доводять, що, на відміну від лагранжевої інтерполяції, де інтерполяційний поліном єдиний, задача серендитової інтерполяції розв'язується неоднозначно. Завдяки новим методам (**когнітивно-графічному методу побудови ієрархічних форм базисів СЕ** та **комбінованому алгебро-геометричному методу**) на біквадратичному скінченному елементі вперше отримано безліч базисів з 8 степенями вільності і 9 параметрами в інтерполяційному поліномі, незважаючи на те, що при побудові базисних функцій не використовувались внутрішні вузли.

3.3. Дослідження та візуалізація ліній нульового рівня базисних функцій біквадратичного скінченного елемента

У комбінованому алгебро-геометричному методі отримані наступні функції форми:

$$N_1 = \frac{1}{16}(1-\xi)(1-\eta)((36p-1)(1+\xi+\eta)+(36p+3)\xi\eta); \quad (3.3.1)$$

$$N_2 = \frac{1}{16}(1-\xi^2)(1-\eta)((5-36p)-(36p+3)\eta), \quad (3.3.2)$$

а в **когнітивно-графічному методі побудови ієрархічних базисів СЕ** маємо:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta+K(1+\xi)(1+\eta)), \quad (3.3.3)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)\left((1+\xi)-\frac{1}{2}K(1+\xi)(1+\eta)\right). \quad (3.3.4)$$

Зауважимо, що від формул алгебро-геометричного методу (3.3.1)-(3.3.2) можна перейти до формул когнітивно-графічного методу побудови ієрархічних базисів СЕ (3.3.3)-(3.3.4) за допомогою формули:

$$p = p_1(K) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{9}K. \quad (3.3.5)$$

Стає зрозумілим, що це одні і ті ж самі функції, тому можна проаналізувати, наприклад, базисні функції, отримані когнітивно-графічним методом.

Проаналізуємо лінії рівня, які залишає базисна функція N_1 у площині $\xi O\eta$. Перша і друга дужки асоціюються з протилежними першому вузлу сторонами квадрата: 3-5 та 5-7 (рис. 3.3.1-3.3.6). Для того, щоб проаналізувати останній множник формули (3.3.1), запишемо його у вигляді:

$$f_1 = K\xi\eta + (K-1)\xi + (K-1)\eta + (K-1) = 0. \quad (3.3.6)$$

Стандартний аналіз кривої $f_1 = f(\xi, \eta, k)$ виконується за допомогою дискримінантів Δ і δ [84]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{K}{2} & \frac{1}{2}(K-1) \\ \frac{K}{2} & 0 & \frac{1}{2}(K-1) \\ \frac{1}{2}(K-1) & \frac{1}{2}(K-1) & K-1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.3.7)$$

або $-\frac{1}{4}K(K-1) = 0$, звідки $K = 0, 1$;

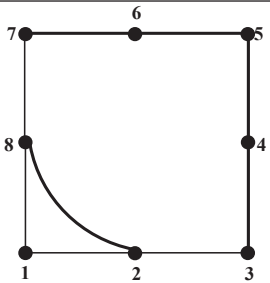
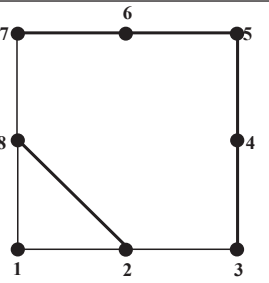
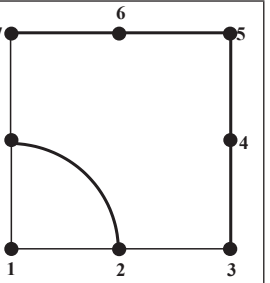
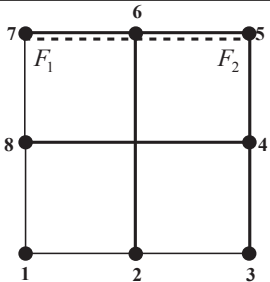
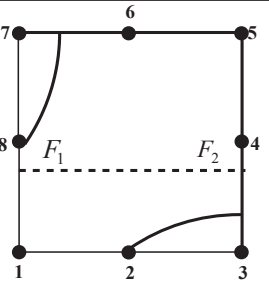
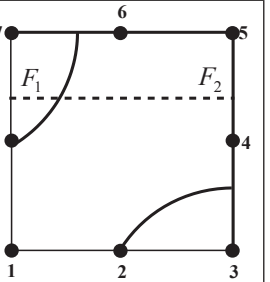
$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{K}{2} \\ \frac{K}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } -\frac{1}{4}K^2 = 0, \text{ звідки } K = 0. \quad (3.3.8)$$

Зображення ліній нульового рівня зведені в табл. 3.3.1. При $K \in (-2;0) \cup (0;1) \cup (1;2)$ крива f_1 є гіперболою (рис. 3.3.1, 3.3.3, 3.3.5, 3.3.6). При $K = 0$ – це дві прямі, що співпадають (на рис. 3.3.2 пряма 2-8). При $K = 1$ – крива f_1 розпадається на дві прямі 2-6 і 4-8, що перетинаються (рис. 3.3.4).

Для аналізу ліній рівня, які залишає базисна функція N_2 у площині $\xi O\eta$, запишемо функцію у вигляді:

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\left(\frac{1}{2}(2-K-K\eta)\right). \quad (3.3.9)$$

Таблиця 3.3.1

Лінії нульового рівня (біквадратичний елемент)		
 Рис. 3.3.1. Модифіковані базиси з гіперболами при $K \in (-2;0)$ або при $p \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\right)$	 Рис. 3.3.2. Стандартний базис з прямою при $K = 0$ або при $p = -\frac{1}{12}$	 Рис. 3.3.3. Модифіковані базиси з гіперболами при $K \in (0;1)$ або при $p \in \left(-\frac{1}{12}; \frac{1}{36}\right)$
 Рис. 3.3.4. Модифікований базис з двома прямими, що перетинаються при $K = 0$ або при $p = \frac{1}{36}$	 Рис. 3.3.5. Модифіковані базиси з гіперболами при $K \in (1;2)$ або при $p \in \left(\frac{1}{36}; \frac{1}{2}\right)$	 Рис. 3.3.6. Базис, що реалізує експеримен- тальний спектр вузлових навантажень при $K = \frac{1533}{1000}$ або при $p = \frac{87}{1000}$

Перша і друга дужки асоціюються з протилежними другому вузлу сторонами квадрата: 3-5, 5-7 та 7-1 (рис. 3.3.1-3.3.6). Проаналізуємо останній множник:

$$f_2 = \left(\frac{1}{2} (2 - K - K\eta) \right). \quad (3.3.10)$$

Це горизонтальна пряма $F_1 - F_2$, яка при $K \in (-2; 0) \cup (0; 1)$ знаходиться за межами квадрата (рис. 3.3.1, 3.3.3). При $K = 0$ пряма $F_1 - F_2$ зникає на нескінченності (рис. 3.3.2). При $K = 1$ співпадає зі стороною 5-7 квадрата, а при $K \in (1; 2)$ – знаходиться всередині квадрата і показана на рис. 3.3.4–3.3.6 пунктирною лінією.

3.4. Узагальнення ймовірнісно-геометричного методу побудови базисних функцій біквадратичного елемента

Використовуючи функції з параметром K , узагальнимо процедуру побудови базису на ССЕ-8 за допомогою ймовірнісно-геометричного підходу. При побудові базисної функції N_1 розбиваємо СЕ на квадрат 1-3-5-7 і трикутник $\Delta 128$ (рис. 3.4.1). Зауважимо: у загальному випадку $\Delta 128$ – криволінійний.

Процедура побудови базисної функції ССЕ-8 на квадраті 1-3-5-7 показана у розділі 1.3. Відмінності виникають на трикутнику $\Delta 128$, тому що він має криволінійну гіпотенузу. Тоді, якщо $\Phi_{\max} = 1$, $\Phi_{\min} = 0$, $\Phi_{\text{level}} = K\xi\eta + (K-1)\xi + (K-1)\eta + (K-1)$, то

$$PL = \frac{K\xi\eta + (K-1)\xi + (K-1)\eta + (K-1) - 0}{1 - 0} = N_1^{(3)}(\xi, \eta). \quad (3.4.1)$$

Добуток ймовірностей дає базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} \cdot \frac{K\xi\eta + (K-1)\xi + (K-1)\eta + (K-1)}{1}. \quad (3.4.2)$$

Після перетворень маємо для вузла 1:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) (K\xi\eta + (K-1)\xi + (K-1)\eta + K-1). \quad (3.4.3)$$

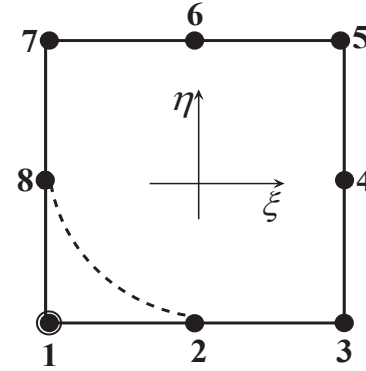


Рис. 3.4.1. До побудови N_1
(K – довільне)

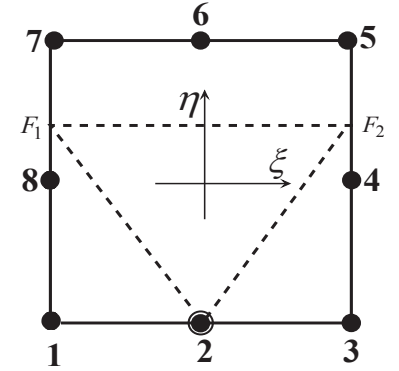


Рис. 3.4.2. До побудови N_2
(K – довільне)

Для побудови базисної функції для вузла 2 розбиваємо біквадратичний елемент на чотири трикутники: $\Delta 235$, $\Delta 257$, $\Delta 271$ та ΔF_1F_2 і на кожному шукаємо барицентричну координату $N_2^{(1)}$, $N_2^{(2)}$, $N_2^{(3)}$, $N_2^{(4)}$ (рис. 3.4.2):

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} \cdot N_2^{(3)} \cdot N_2^{(4)} = \frac{1-\xi}{1} \cdot \frac{1-\eta}{2} \cdot \frac{1+\xi}{1} \cdot \frac{2-K-K\eta}{2}. \quad (3.4.4)$$

Остаточно для вузла 2:

$$N_2 = \frac{1}{4} (1-\xi^2)(1-\eta)(2-K-K\eta). \quad (3.4.5)$$

3.5. Узагальнення геометричного методу конструювання базисних функцій біквадратичного елемента

Узагальнення геометричного методу відбувається за допомогою формул (3.2.11) і (3.2.12) когнітивно-графічного методу, які запишемо у вигляді:

$$N_1^{(s)} = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) (K\xi\eta + (K-1)\xi + (K-1)\eta + (K-1)), \quad (3.5.1)$$

$$N_2^{(s)} = \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi) \left(\frac{2-K-K\eta}{2} \right). \quad (3.5.2)$$

У цьому випадку при побудові функції N_1 формулу (3.5.1) можна трактувати як добуток рівнянь площини $N_1^{(1)}$ і гіперболічного параболоїду $N_1^{(2)}$ з параметром K , що завжди проходить через вузли 2-8 і точку $(-1; -1; 1)$:

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \cdot \frac{K\xi\eta + (K-1)\xi + (K-1)\eta + (K-1)}{1} \quad (3.5.3)$$

Поверхня $N_1^{(2)}$ – це гіпар при всіх K (рис. 3.5.1, 3.5.3-3.5.6), крім $K = 0$. При цьому значенні гіперболічний параболоїд вироджується у дві площини, що співпадають (рис. 3.5.2).

Для базисної функції в якості множників у формулі (3.5.2) візьмемо рівняння чотирьох площин, одна з яких теж містить параметр K :

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} \cdot N_2^{(3)} \cdot N_2^{(4)} = \frac{1-\xi}{1} \cdot \frac{1-\eta}{2} \cdot \frac{1+\xi}{1} \cdot \frac{2-K-K\eta}{2} \quad (3.5.4)$$

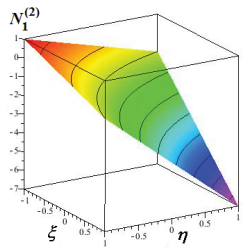


Рис. 3.5.1.
Фрагмент поверхні
 $N_1^{(2)}$ при
 $K \in (-2; 0)$
або при
 $p \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\right)$

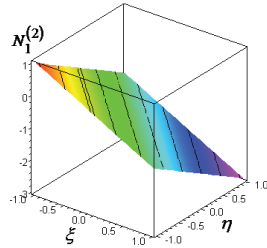


Рис. 3.5.2.
Фрагмент поверхні
 $N_1^{(2)}$ при $K = 0$
або при $p = -\frac{1}{12}$

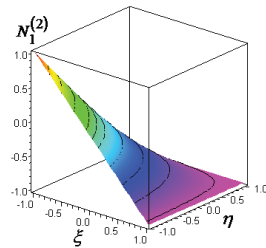


Рис. 3.5.3.
Фрагмент поверхні
 $N_1^{(2)}$ при $K \in (0; 1)$
або при
 $p \in \left(-\frac{1}{12}; \frac{1}{36}\right)$

Зауважимо, що при геометричному підході значно спрощується процедура конструювання базисних функцій на ССЕ, не потрібно складати і розв'язувати систему алгебраїчних рівнянь, яка має місце при традиційному матричному методі і можна отримати безліч розв'язків на ССЕ-8.

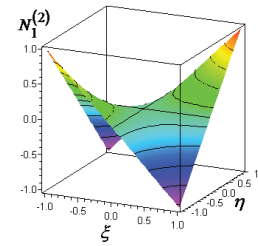


Рис. 3.5.4.
Фрагмент поверхні
 $N_1^{(2)}$ при
 $K = 1$
або при $p = \frac{1}{36}$

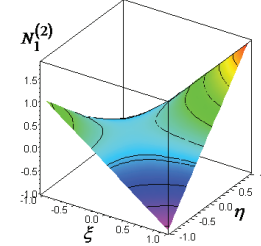


Рис. 3.5.5.
Фрагмент поверхні
 $N_1^{(2)}$ при $K \in (1; 2)$
або при
 $p \in \left(\frac{1}{36}; \frac{1}{2}\right)$

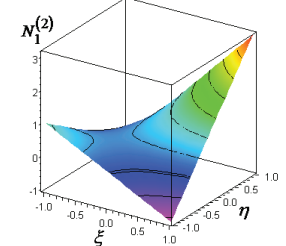


Рис. 3.5.6.
Фрагмент поверхні
 $N_1^{(2)}$ при $K = \frac{1533}{1000}$
або при $p = \frac{87}{1000}$

Зауваження. Використовуючи формули (3.2.16) – (3.2.17), замість значень K можна обчислити значення параметру p , тому аналогічні поверхні (рис. 3.5.1-3.5.6) отримуємо для N_i при реалізації комбінованого алгебро-геометричного методу (параграф 3.1).

3.6. Модифікація методу Тейлора на ССЕ-8

Модифікація процедури Тейлора [10; 103] полягає у використанні у якості «проміжних» функцій, в яких змінні не відокремлюються. Можна отримати «кутову» базисну функцію, що відрізняється від стандартної (2.2.2), якщо при побудові проміжних базисних функцій (2.2.3)-(2.2.4) відмовитись від лагранжових поліномів і використовувати базисні функції серендитової інтерполяції, які отримали за допомогою когнітивно-графічного методу:

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta) \left((1+\xi) - \frac{1}{2} K (1+\xi)(1+\eta) \right), \quad (3.6.1)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi) \left((1+\eta) - \frac{1}{2} K (1+\eta)(1+\xi) \right). \quad (3.6.2)$$

Для «кутової» функції, наприклад, $N_i(x, y)$, скористаємося лінійною комбінацією функції білінійної інтерполяції $N_i(x, y)$ і «проміжних» функцій

(формули (3.6.1)-(3.6.2)). Вибір вагових коефіцієнтів лінійної комбінації обумовлюється інтерполяційною гіпотезою Лагранжа (рис. 2.2.2) :

$$N_1(\xi, \eta) = \overline{N}_1(\xi, \eta) - \frac{1}{2}(N_2 + N_8). \quad (3.6.3)$$

Отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta+K(1+\xi)(1+\eta)). \quad (3.6.4)$$

Ця функція має дев'ять параметрів, і тільки у випадку $K = 0$ – вісім (стандартний базис).

3.7. Візуалізація базисних функцій SSE-8

Задача візуалізації базисних функцій є важливою, тому що побудовані наочні зображення дозволяють вивчати властивості нових моделей, виявляти відмінності та аномалії.

I модель: модель з прямою або модель з площиною.

В когнітивно-графічному методі конструювання ієрархічних базисів при $K = 0$ [72] отримуємо **стандартний базис**. Ця модель має ще дві назви, які пов'язані з методами побудови: **модель з прямою** (планіметрична назва) або **модель з площиною** (стереометрична назва) (рис. 3.7.1).

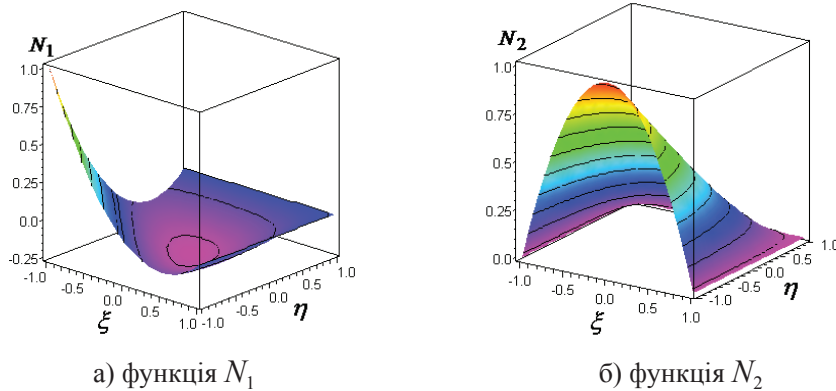


Рис. 3.7.1. Графіки функцій стандартного базису SSE-8 (модель з прямою або модель з площиною)

II модель: модель з прямими, що перетинаються або модель з площинами, що перетинаються.

Якщо у формули (3.2.13)-(3.2.15) підставити коефіцієнт $K \neq 0$, то отримаємо базиси, які будемо називати модифікованими базисами. Наприклад, при $K = 0$ отримаємо нову модель, назви якої (в залежності від метода побудови): модель з прямими що перетинаються (планіметрична) або модель з площинами, що перетинаються (стереометрична) (рис. 3.7.2) [70; 72]:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\xi_i\eta_i\xi\eta, \quad i = 1, 3, 5, 7, \quad \xi_i = \pm 1, \quad \eta_i = \pm 1. \quad (3.7.1)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)^2, \quad i = 2, 6, \quad \eta_i = \pm 1. \quad (3.7.2)$$

Для вузлів 4 і 8 базисні функції отримуємо перестановкою координат в (3.7.2). Графіки функцій показані на рис. 3.7.2:

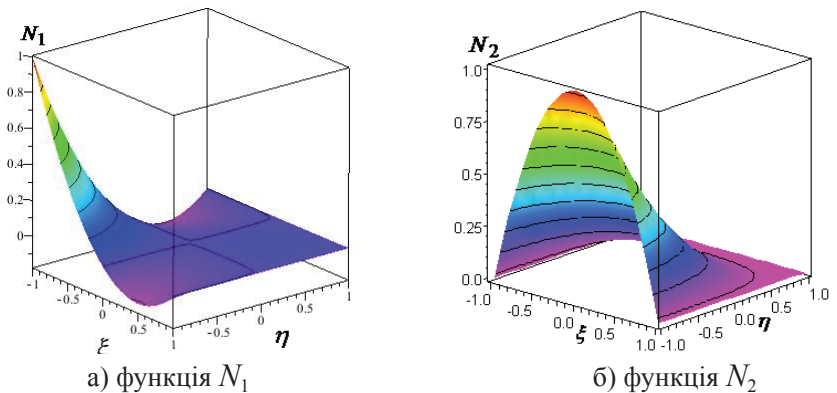


Рис. 3.7.2. Графіки функцій SSE-8 модифікованого базису (модель з прямими, що перетинаються або модель з площинами, що перетинаються)

III модель: модель з гіперболою або модель з гіперболічним параболоїдом.

При $K = \frac{1533}{1000}$ (див. табл. 3.2.1) отримуємо **модифікований базис**, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень

(модель з гіперболою або модель з гіперболічним параболоїдом) [3; 72]
(рис. 3.7.3):

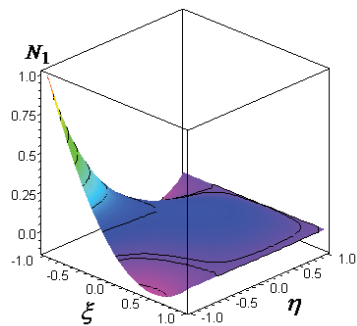
$$N_i = \frac{1}{4000} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1533 \xi_i \xi \eta_i \eta - 533 \xi_i \xi - 533 \eta_i \eta + 533),$$

$$i = 1, 3, 5, 7, \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1. \quad (3.7.3)$$

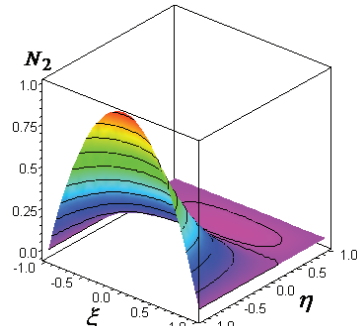
$$N_i = \frac{1}{4000} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (467 + 1533 \eta_i \eta),$$

$$i = 2, 6, \eta_i = \pm 1. \quad (3.7.4)$$

Для вузлів 4 і 8 функції форми отримуємо за допомогою перестановки координат в (3.7.4).



а) функція N_1



б) функція N_2

Рис. 3.7.3. Графіки функцій ССЕ-8 модифікованого базису, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень (модель з гіперболою або модель з гіперболічним параболоїдом)

Як видно з рисунків (3.7.1)-(3.7.3), на границях всі альтернативні функції форми біквадратичної інтерполяції співпадають, а всередині елемента суттєво відрізняються. Ці відмінності яскраво ілюструє рис. 3.7.4, на якому показано переріз площиною поверхонь, які утворили функції трьох моделей біквадратичного елемента.

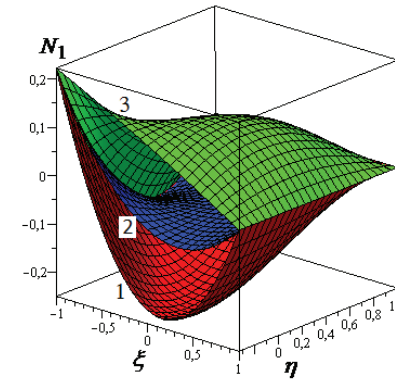


Рис. 3.7.4. Поверхні N_1 ієрархічних функцій ССЕ-8.

Переріз площиною $\eta = -1/3$.

- 1 – поверхня стандартного базису (I модель);
- 2 – поверхня модифікованого базису при $K = 1$ (II модель);
- 3 – поверхня базису, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень (III модель).

3.8. Міжелементна неперервність моделей біквадратичного елемента

Об'єднання елементів у єдиний ансамбль – одна з найважливіших процедур побудови кусочно-поліноміального поля у МСЕ. Зрозуміло, що при об'єднанні елементів повинна виконуватись міжелементна неперервність. За класифікацією, яка введена Феліппа [31; 38], інтерполяційні функції, що забезпечують неперервність поля самих змінних, відносяться до елементів C^0 -сумісного типу.

Скінченні елементи, які розглядаються у даній роботі, належать до C^0 -типу, тому що на границях елементів серендипової сім'ї гарантована неперервність похідних до нульового порядку [51]. При розв'язанні більшої частини задач механіки рідини та газу, а також теорії теплопередачі неперервність типу C^0 є достатньою [51]. Базисна функція серендипового СЕ вздовж границь елемента є повним поліномом, і тому має місце неперервність базисної функції при переході через границю між

елементами. При цьому кажуть, що на границях між елементами зберігається C^0 -гладкість апроксимації.

Існування множини систем базисних функцій на одному елементі дозволяє об'єднувати різні моделі біквадратичного елемента в залежності від змін характеристик фізичного поля. Всі запропоновані в даній роботі альтернативні моделі зберігають міжелементну неперервність.

Комп'ютерна візуалізація об'єднання в ансамбль чотирьох різних функцій (відповідно при $K = 0; \frac{1533}{1000}; \frac{75}{100}; 1$ – починаючи з лівого нижнього квадрата проти годинникової стрілки), що відповідають вузлам у вершинах квадрату, наочно в цьому переконує (рис. 3.8.1).

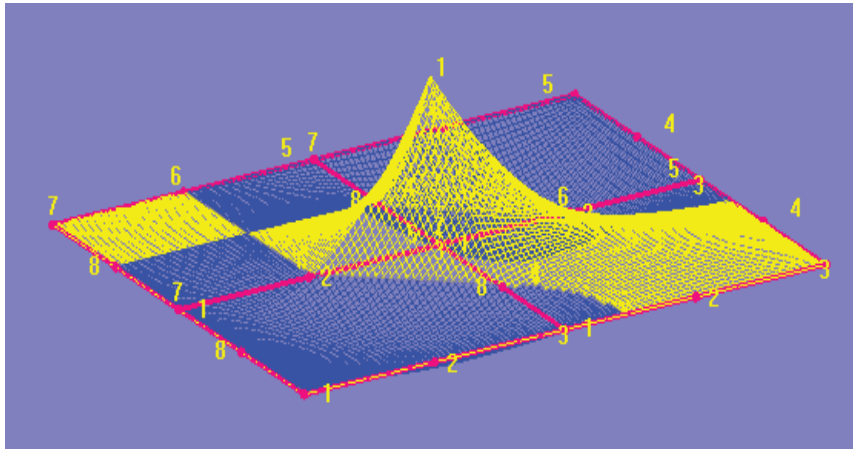


Рис. 3.8.1. Об'єднання в ансамбль чотирьох моделей CSE-8

3.9. Побудова базисних функцій CSE-8, які задовольняють критеріям гармонічності

Виникає питання: чи можливо серед нескінченної множини базисів біквадратичного елемента знайти базис, функції якого задовольняють критерію гармонічності?

Перевірка за критерієм Лапласа (формула (1.6.8)) показує, що на CSE-8 неможливо побудувати поліноміальні базисні функції, які б задо-

вольняли диференціальному критерію та інтерполяційній гіпотезі Лагранжа одночасно.

Покажемо, як можна побудувати базиси на CSE-8, які будуть задовольняти інтегральним критеріям гармонічності.

На CSE-8 базисні функції будемо шукати у вигляді:

$$N_1 = K_1 (1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi\eta + B\xi + C\eta + 1). \quad (3.9.1)$$

$$N_2 = K_2 (1 - \xi^2)(1 - \eta)(D\eta + 1). \quad (3.9.2)$$

У системі (3.1.2) використаємо *інтегральний критерій Привалова* для дискретного елемента [6; 15; 42; 60] (формула (1.6.9)). Систему рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо наступним чином

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 8; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\ \frac{1}{4} \iint_{\omega} N_1 d\xi d\eta &= N_1(0, 0) = K_1; \\ \frac{1}{4} \iint_{\omega} N_2 d\xi d\eta &= N_2(0, 0) = K_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.9.3)$$

Система має єдиний розв'язок, тобто існують функції, які задовольняють критерію Привалова:

$$N_1 = \frac{1}{20} (1 - \xi)(1 - \eta)(6\xi\eta + \xi + \eta + 1). \quad (3.9.4)$$

$$N_2 = \frac{1}{10} (1 - \xi^2)(1 - \eta)(2 - 3\eta). \quad (3.9.5)$$

Повузлові навантаження рівномірної масової сили (обчислені за формулою (2.1.3)) для кутових функцій цього базису дорівнюють $\frac{1}{20}$, для проміжних – $\frac{1}{5}$.

Для того, щоб побудувати базисні функції на ССЕ-8, які будуть задовольняти іншому інтегральному критерію, в системі (3.9.3) замість критерію Привалова використаємо **критерій Кьобе** [6; 15; 42; 60] (1.6.10). Систему рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо наступним чином

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 8; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\ \frac{1}{8} \oint N_1 dl &= N_1(0, 0) = K_1; \\ \frac{1}{8} \oint N_2 dl &= N_2(0, 0) = K_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.9.6)$$

Система має розв'язок:

$$N_1 = \frac{1}{12}(1-\xi)(1-\eta)(4\xi\eta + \xi + \eta + 1). \quad (3.9.7)$$

$$N_2 = \frac{1}{6}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-2\eta). \quad (3.9.8)$$

Повузлові навантаження рівномірної масової сили (обчислені за формулою (2.1.3)) для кутових функцій цього базису дорівнюють $\frac{7}{108}$, для проміжних – $\frac{20}{108}$.

Зауваження 1. Система (3.1.2) має таку властивість: при її складанні, разом з гіпотезою типу Лагранжа, можна використовувати додаткові критерії.

Зауваження 2. Перевагою нових методів є той факт, що, змінюючи значення параметра, отримуємо безліч базисів на ССЕ-8 і маємо можливість обирати серед них базис, який найкращим чином буде відповідати умовам задачі, що розв'язується.

РОЗДІЛ 4 БІКУБІЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ

4.1. Матричний метод побудови бікубічної інтерполяції. Процедура Тейлора

Дуже цікавим об'єктом для дослідження виявився бікубічний скінченний елемент серендипової сім'ї (ССЕ-12), який теж належить до елементів вищих порядків (рис. 4.1.1). ССЕ-12 у англійських публікаціях позначають [86] *Q12* (quadrilateral).

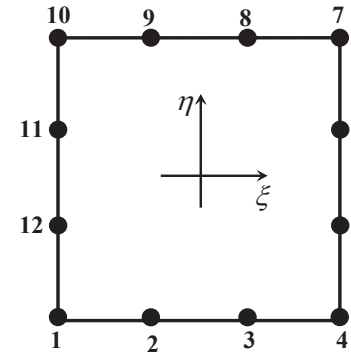


Рис. 4.1.1. ССЕ-12
($|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$)

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & \xi & \eta \\ \xi^2 & & \xi\eta & \eta^2 \\ \xi^3 & & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 \\ \xi^3\eta & \dots & \xi\eta^3 & \end{array}$$

Рис. 4.1.2 Трикутник Паскаля
для стандартного базису ССЕ-12

ССЕ з бікубічною інтерполяцією – це квадрат з 12-ма регулярно розташованими вузлами і система базисних функцій, яка відповідає цим вузлам. Інтерполяційний поліном для ССЕ-12 має 12 параметрів (рис. 4.1.2):

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \\ & + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

де α_i ($i = \overline{1, 12}$) коефіцієнти, які знаходять матричними методами.

Функції стандартного базису для ССЕ-12 [24; 38; 44; 45; 93]:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10), \quad i = 1, 4, 7, 10; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1, \quad (4.1.2)$$

$$N_i = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + 9\xi_i \xi), \quad i = 2, 3, 8, 9; \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad \eta_i = \pm 1, \quad (4.1.3)$$

$$N_i = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + 9\eta_i \eta), \quad i = 5, 6, 11, 12; \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm \frac{1}{3}. \quad (4.1.4)$$

Стандартний базис серендипової бікубічної інтерполяції на СЕ-12 відповідає властивостям 1-8 (розділ 2).

Цей базис можна отримати не тільки за допомогою метода оберненої матриці. На бікубічному елементі для побудови базисних функцій ефективно працює традиційна **процедура Тейлора** [16; 23; 103], яка описана у параграфі 2.2. Спочатку побудуємо базисні функції для проміжних вузлів 2 і 12. Використавши поліном Лагранжа третього степеня $l_3(\xi)$:

$$l_3(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi) \quad (4.1.5)$$

і, помноживши його на лінійний поліном Лагранжа $l_1(\eta)$

$$l_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta), \quad (4.1.6)$$

отримуємо базисну функцію для проміжного вузла 2:

$$N_2 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 - \eta). \quad (4.1.7)$$

Аналогічно будуємо базисні функції для вузлів 3, 11, 12:

$$N_3 = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 - \eta). \quad (4.1.8)$$

$$N_{11} = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 + 3\eta)(1 - \xi). \quad (4.1.9)$$

$$N_{12} = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 - 3\eta)(1 - \xi). \quad (4.1.10)$$

Для «кутової» функції, наприклад, для N_1 , скористаємося лінійною комбінацією відомої функції білінійної інтерполяції

$$\overline{N}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (4.1.11)$$

і «проміжних» функцій (4.1.7) – (4.1.10). Вибір вагових коефіцієнтів і лінійної комбінації у формулі (4.1.12) обумовлюється інтерполяційною гіпотезою Лагранжа (2.1.1) (рис. 4.1.3).

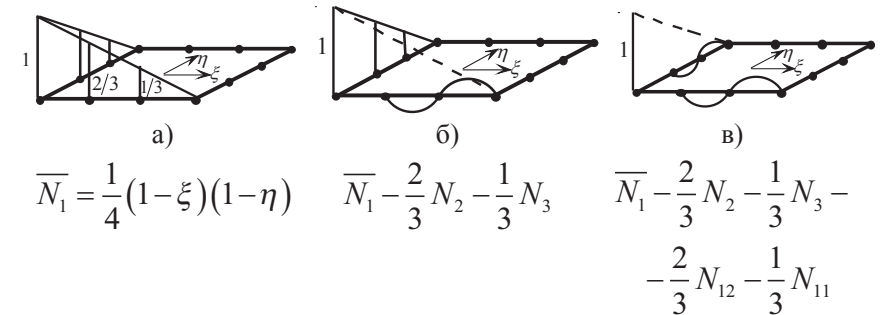


Рис. 4.1.3. Побудова базисної функції N_1 на ССЕ-12 за допомогою методу Тейлора

Таким чином,

$$N_1(\xi, \eta) = \overline{N}_1(\xi, \eta) - \frac{2}{3}(N_2 + N_{12}) - \frac{1}{3}(N_3 + N_{11}). \quad (4.1.12)$$

Після перетворень у формулі (4.1.12) отримуємо функцію стандартного базису ССЕ-12:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10). \quad (4.1.13)$$

Зауваження. Інтерполянт (4.1.1) має 12 параметрів, які асоціюються з наступними елементами трикутника Паскаля: $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3, \xi^3\eta, \xi\eta^3$ (рис. 4.1.2). Система функцій (4.1.2)–(4.1.4) – це, на жаль, єдиний базис бікубічної інтерполяції, відомий авторам монографій і підручників

з МСЕ. Склалася ситуація, коли користувачі не мають можливості вибору оптимального базису ССЕ. В останні роки доведено існування «прихованих» параметрів в моделях ССЕ вищих порядків [52]. Наприклад, ієрархія бікубічних базисів може налічувати від 12 до 16 параметрів [1].

4.2. Геометричний метод конструювання базисних функцій бікубічного елемента

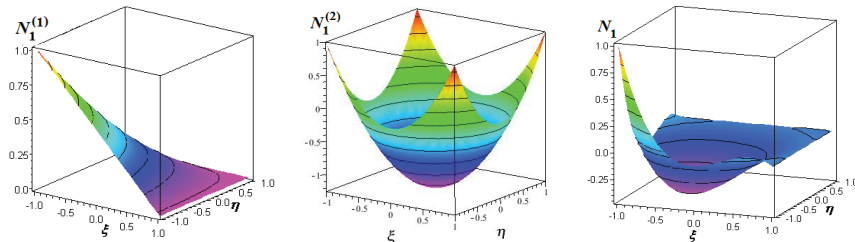
Базисні функції скінченного елемента можна інтерпретувати геометрично з точки зору поверхонь або ліній рівня, які утворюють остаточну поверхню для певної функції [31; 101].

Для кращого сприйняття процесу моделювання у цьому розділі ми не будемо розділяти геометричний метод на два, а після стереометричного підходу до моделювання поверхні базисної функції зразу будемо наводити планіметричний.

Стандартна модель. Стереометричний аналіз формули базисної функції для вузла 1 дозволяє встановити, що функція N_1 задається за допомогою двох множників:

1) гіперболічного параболоїда (ГП), що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.1 а):

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),$$



а) фрагмент поверхні гіперболічного параболоїда $N_1^{(1)}$ б) фрагмент поверхні параболоїда обертання $N_1^{(2)}$ в) графік базисної функції N_1

Рис. 4.2.1. До стереометричного підходу побудови функції N_1 ССЕ-12 (І модель)

2) **параболоїда обертання**, що проходить через всі проміжні вузли і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.1 б):

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10).$$

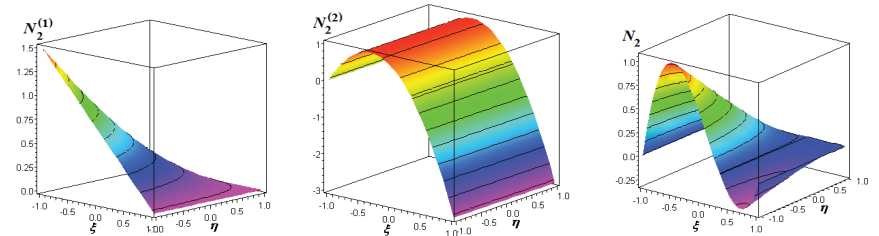
Базисна функція N_1 будується як «добуток» поверхонь $N_1^{(1)}$ і $N_1^{(2)}$ (рис. 4.2.1 в):

$$N_1(\xi, \eta) = N_1^{(1)}(\xi, \eta) \cdot N_1^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10). \quad (4.2.1)$$

Базисна функція для вузла 2 – це добуток:

1) гіперболічного параболоїда (ГП), що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-\frac{1}{3}; -1; 1)$ (рис. 4.2.2 а):

$$N_2^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{3}{8}(1-\xi)(1-\eta).$$



а) фрагмент поверхні гіперболічного параболоїда $N_2^{(1)}$ б) фрагмент поверхні параболічного циліндра $N_2^{(2)}$ в) графік базисної функції N_2

Рис. 4.2.2. До стереометричного підходу побудови функції N_2 ССЕ-12 (І модель)

2) параболічного циліндра, який проходить через прями 3-8, 1-10 і точку $(-\frac{1}{3}; -1; 1)$ (рис. 4.2.2 б):

$$N_2^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(1+\xi)(1-3\xi).$$

Базисна функція N_2 (рис. 4.2.2 в):

$$N_2(\xi, \eta) = N_2^{(1)}(\xi, \eta) \cdot N_2^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - 3\xi). \quad (4.2.2)$$

При **планіметричному аналізі** функції форми стандартного базису можна інтерпретувати геометрично за допомогою ліній рівня на площині $\xi O \eta$. На рис. 4.2.3 показано лінії нульового рівня, які залишають поверхні, показані на рис. 4.2.1 та 4.2.2.

Наприклад, при побудові функції N_1 (рис. 4.2.3 а) використовуємо композицію прямих 4-7, 7-10 (це слід, який лишає на площині $\xi O \eta$ гіперболічний параболоїд $N_1^{(1)}$) і кола, що проходить через вузли 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12 (це слід, який лишає на площині $\xi O \eta$ параболоїд обертання $N_1^{(2)}$). У результаті отримуємо ненормовану функцію:

$$N_1(\xi, \eta) = K_1(1 - \xi)(1 - \eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10).$$

Після нормування (використовуючи умову $N_1(-1, -1) = 1$ отримуємо стандартну функцію (формула 4.2.1) для вузла 1.

Аналогічно, при побудові ненормованої функції для вузла 2 (рис. 4.2.3 б) у якості ліній нульового рівня задіяні чотири прями: 4-7, 7-10 (це слід, який лишає гіперболічний параболоїд $N_2^{(1)}$) і прями 1-10, 3-8 (це слід, що лишає на площині $\xi O \eta$ параболічний циліндр $N_2^{(2)}$). Після нормування отримуємо функцію N_2 стандартного базису (формула 4.2.2).

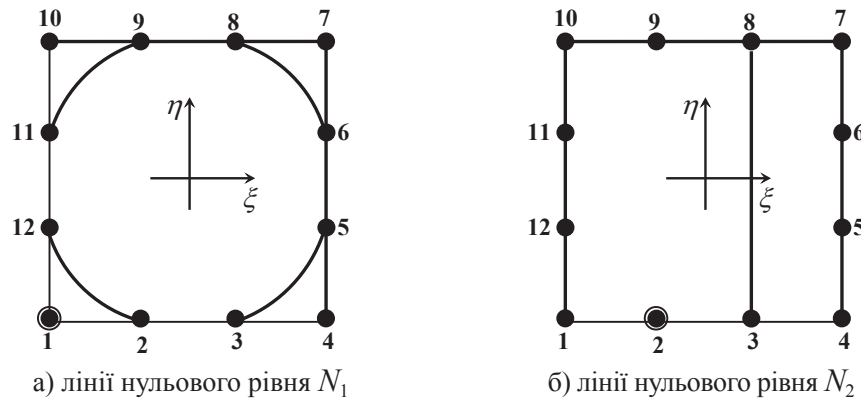


Рис. 4.2.3. До планіметричного підходу побудови базисних функцій ССЕ-12 (І модель)

Приклади графіків «кутової» та «проміжної» функцій стандартної моделі наведені в кінці розділу (рис. 4.2.17 а, 4.2.17 б).

Таким чином, наявність двох підходів до аналізу кутових функцій дозволяє використовувати як стереометричну, так і планіметричну термінологію для назв моделей ССЕ-12. Необхідність такої ідентифікації обумовлена великою кількістю моделей.

Наприклад, **стандартна модель** у стереометричному варіанті має назву «**модель з параболоїдом обертання**», а в планіметричному варіанті – «**модель з колом**».

Зауваження. При стереометричному підході гіперболічний параболоїд $N_1^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$ (або при планіметричному варіанті методу дві прями: $1 - \xi = 0$, $1 - \eta = 0$) завжди присутні у всіх моделях, тому назви моделей з ними не пов'язані.

Каталог модифікованих моделей на ССЕ-12

З 1982 по 1995 роки на ССЕ-12 було побудовано альтернативні моделі¹⁵ [20; 31; 66; 71; 73; 74].

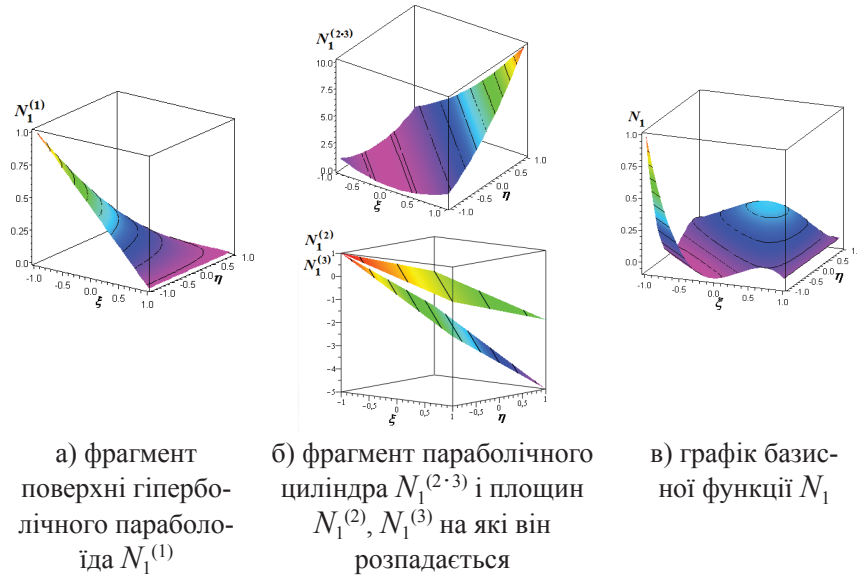
І. Модель з параболічним циліндром, який розпадається на дві площини (або **модель з двома паралельними прямими**)

У наступній моделі (отримана у 1982 р.) при стереометричному підході функція для вузла 1 в II моделі задається за допомогою:

1) гіперболічного параболоїда (ГП), що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.4 а):

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta),$$

¹⁵ Стандартний базис ССЕ-12 був запропонований у 1968 р. [93]. А через 14 років були отримані альтернативні базиси на ССЕ-12. Поява нових базисів пов'язана з розв'язанням модельної задачі про локалізацію по вузлах навантаження, що викликане силою тяжіння. Розподіл вузлових навантажень визначається шляхом інтегрального усереднення базисних функцій, так само, як при обчисленні вагових коефіцієнтів квадратурних (кубатурних) формул. Саме ця проста задача вперше виявила недоліки стандартного базису ССЕ-12 [24]. Вперше про це написав О. Зенкевич – один із засновників методу скінченних елементів. У своїй монографії [24] Зенкевич пояснює популярність МСЕ його простою фізичною інтерпретацією, але у главі 9 зізнається, що, чим вище порядок елемента, тим складніша фізична інтерпретація. Як приклад, він наводить саме ССЕ вищих порядків, хоча від'ємні розподіли є і на елементах іншої конфігурації. Деякий час вважалося, що ці недоліки неможливо подолати, поки не з'явилися альтернативні моделі серендипових елементів вищих порядків (1982 р.), побудовані за допомогою ймовірно-геометричного моделювання.

Рис. 4.2.4. До стереометричного підходу побудови функції N_1 ССЕ-12 (I модель)

2) *площини*, що проходить через 2, 12 і точку $(-1;-1;1)$ (рис. 4.2.4 б):

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(3\xi + 3\eta + 4),$$

3) *площини*, що проходить через 3, 11 і точку $(-1;-1;1)$ (рис. 4.2.4 б):

$$N_1^{(3)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(3\xi + 3\eta + 2).$$

Базисна функція N_1 будується як добуток функцій $N_1^{(1)}$, $N_1^{(2)}$ і $N_1^{(3)}$ (рис. 4.2.4 в):

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi + 3\eta + 2)(3\xi + 3\eta + 4). \quad (4.2.3)$$

Базисна функція для проміжного вузла 2 задається за допомогою:

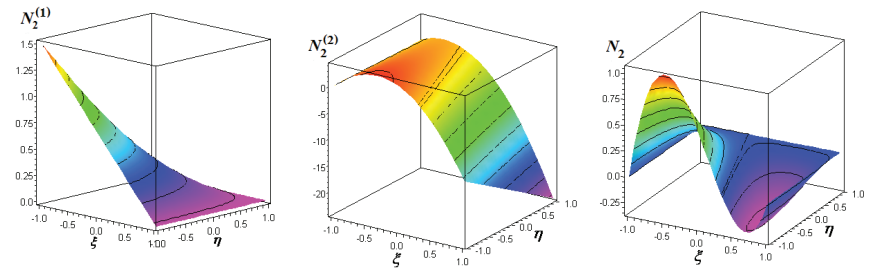
1) гіперболічного параболоїда (ГП), що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $\left(-\frac{1}{3}; -1; 1\right)$ (рис. 4.2.5 а):

$$N_2^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{3}{8}(1-\xi)(1-\eta).$$

2) похилого параболічного циліндра, який проходить через прямі 3-9, 1-10 і точку $\left(-\frac{1}{3}; -1; 1\right)$ (рис. 4.2.5 б):

Базисна функція N_2 (рис. 4.2.5 в):

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(-3\xi - \eta). \quad (4.2.4)$$

Рис. 4.2.5. До стереометричного підходу побудови функції N_2 ССЕ-12 (I модель)

При *планіметричному підході* у другій моделі при побудові N_1 використаємо композицію чотирьох прямих, протилежні вузлу 1 (рис. 4.2.6 а). *Дві паралельні прямі* 2-12, 3-11 (це слід, який лишає параболічний циліндр $N_1^{(2,3)}$) та прямі 4-7 і 7-10 (це слід що лишає на площині нульового рівня гіперболічний параболоїд $N_2^{(1)}$).

Взагалі, для вузлів у вершинах:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(3\xi_i \xi + 3\eta_i \eta - 2)(3\xi_i \xi + 3\eta_i \eta - 4),$$

$$i = 1, 4, 7, 10; \xi_i; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.5)$$

Для другої моделі при побудові функції для вузла 2 (рис. 4.2.6 б) у якості ліній нульового рівня використані чотири прямі:

- прямі 4-7, 7-10 (це слід, який лишає гіперболічний параболоїд $N_2^{(1)}$),
- прямі 1-10 і 3-9 (це слід, що лишає на площині $\xi O\eta$ похилий параболічний циліндр $N_2^{(2)}$).

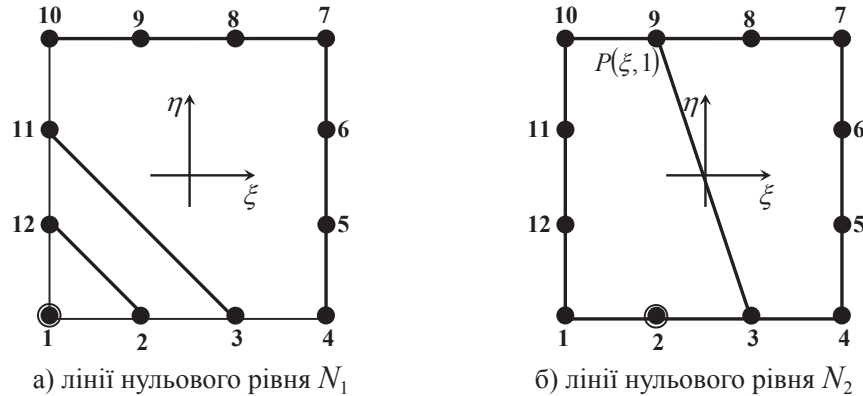


Рис. 4.2.6. До планіметричного підходу побудови базисних функцій ССЕ-12 (І модель)

Після нормування отримуємо проміжну функцію N_2 альтернативного базису (формула 4.2.4). Взагалі, для проміжних вузлів маємо:

$$N_i = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(9\xi_i\xi + \eta_i\eta),$$

$$i = 2, 3, 8, 9; \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.6)$$

Відповідні функції для вузлів 5, 6, 11, 12 можна отримати з формули (4.2.4) за допомогою перестановки координат ξ і η .

Приклади графіків для другої моделі наведені в кінці розділу (рис. 4.2.18 а, 4.2.18 б).

Зауваження 1. При планіметричному підході у всіх альтернативних моделей при побудові функції для вузла 2 (рис. 4.2.6 б) у якості ліній нульового рівня завжди використовують 4 прямі. Дві прямі 4-7, 7-10 – це слід, який лишає гіперболічний параболоїд $N_2^{(1)}$, а ще дві 1-10 і 3-9 – це слід, що лишає на площині $\xi O\eta$ похилий параболічний циліндр $N_2^{(2)}$.

Зауваження 2. Цікавою виявилась пряма 3-9 (рис. 4.2.6 б). У кожному альтернативному базисі вона змінює положення, але завжди

проходить через вузол 3 і точку $P(\xi, 1)$ на прямій 7-10 (метод знаходження абсциси точки $P(\xi, 1)$ наведено у параграфі 4.3). Враховуючи те, що у всіх альтернативних моделях функція N_2 утворюється ідентично, далі будемо наводити геометричну інтерпретацію тільки для «кутової» функції, що пов'язана з вузлом 1.

II. Модель з еліптичним параболоїдом (або модель з еліпсом)

У цій моделі (отримана у 1982 р. [71; 73; 74]) при стереометричному підході базисна функція для вузла 1 задається за допомогою:

1) гіперболічного параболоїда (ГП), що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.7 а):

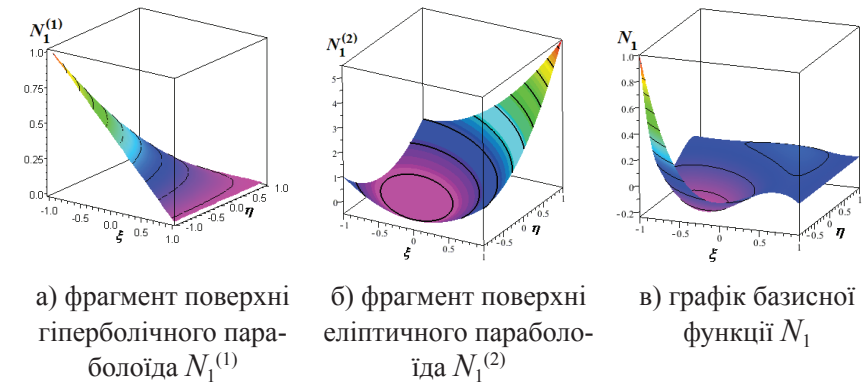
$$N_1^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta),$$

2) еліптичного параболоїда, що проходить через вузли 2, 3, 11, 12 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.7 б):

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 + 9\xi\eta + 9\xi + 9\eta - 1).$$

Базисна функція N_1 будується як добуток функцій $N_1^{(1)}$ і $N_1^{(2)}$ (рис. 4.2.7 в):

$$N_1 = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 + 9\xi\eta + 9\xi + 9\eta - 1). \quad (4.2.7)$$



а) фрагмент поверхні гіперболічного параболоїда $N_1^{(1)}$ б) фрагмент поверхні еліптичного параболоїда $N_1^{(2)}$ в) графік базисної функції N_1

Рис. 4.2.7. До стереометричного підходу побудови функції N_1 ССЕ-12 (І модель)

При **планіметричному підході** у даній моделі, при побудові N_1 використаємо композицію **еліпса**, що проходить через вузли 2,3,11,12 та двох прямих 4-7 і 7-10, що протилежні вузлу 1 (рис. 4.2.8 а). Еліпс 2-3-11-12 – це слід, який лишає еліптичний параболоїд $N_1^{(2)}$, а прямі 4-7 і 7-10 – це слід що лишає на площині нульового рівня гіперболічний параболоїд $N_1^{(1)}$.

Взагалі, для вузлів у вершинах квадрата:

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (9\xi^2 + 9\eta^2 + 9\xi_i \eta_i \xi \eta - 9\xi_i \xi - 9\eta_i \eta - 1),$$

$$i = 1, 4, 7, 10; \xi_i; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.8)$$

Для проміжних вузлів ($i = 2, 3, 8, 9$) маємо:

$$N_i = \frac{9}{64} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (18\xi_i \xi + \eta_i \eta + 1), \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.9)$$

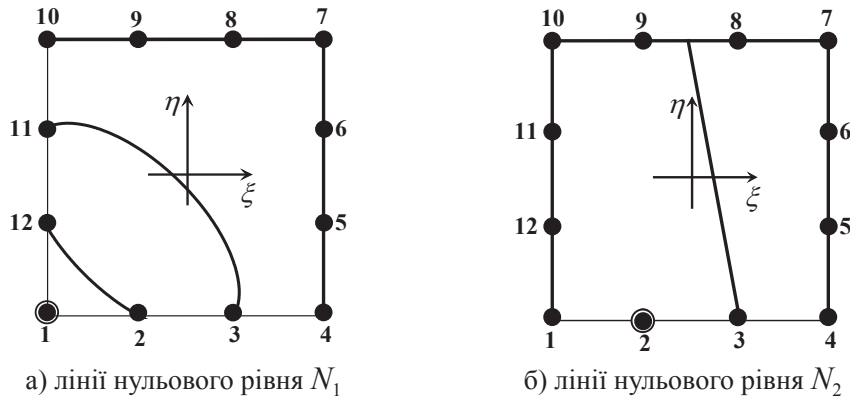


Рис. 4.2.8. До планіметричного підходу побудови базисних функцій ССЕ-12 (II модель)

Візуалізація «кутової» та «проміжної» базисних функцій цієї моделі представлена в кінці розділу на (рис. 4.2.19 а, 4.2.19 б).

III. Модель з гіперболічним параболоїдом і площиною, що накриває його (або модель з гіперболою і прямою)

У наступній моделі (отримана у 1995 р. [20]) при **стереометричному підході** базисна функція для вузла 1 задається з поверхонь:

1) **гіперболічного параболоїда (ГП)**, що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.9 а):

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta),$$

2) **гіперболічного параболоїда**, що проходить через вузли 2, 12 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.9 б):

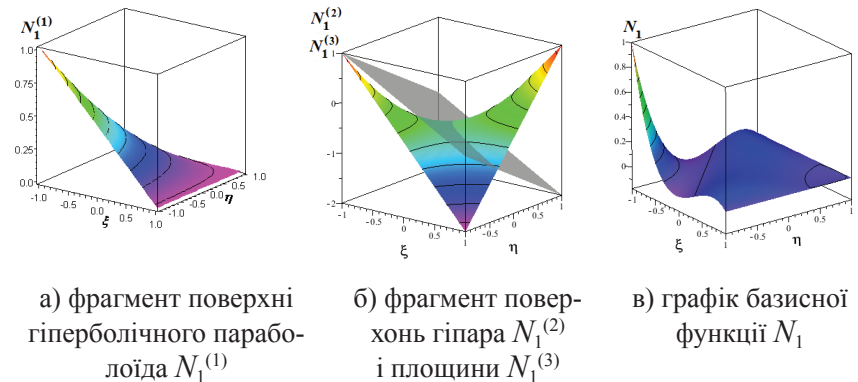
$$N_1^{(2)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} (1 - 3\xi\eta),$$

3) **площини**, що проходить через 3, 11 і точку $(-1; -1; 1)$ та **накриває гіперболічний параболоїд** (рис. 4.2.9 в):

$$N_1^{(3)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} (2 + 3\xi + 3\eta).$$

Базисна функція N_1 будується як «добуток» поверхонь $N_1^{(1)}$ і $N_1^{(2)}$ (рис. 4.2.9 в):

$$N_1 = \frac{1}{32} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - 3\xi\eta) (2 + 3\xi + 3\eta). \quad (4.2.10)$$



а) фрагмент поверхні гіперболічного параболоїда $N_1^{(1)}$ б) фрагмент поверхонь гіпара $N_1^{(2)}$ і площини $N_1^{(3)}$ в) графік базисної функції N_1

Рис. 4.2.9. До стереометричного підходу побудови функції N_1 ССЕ-12 (III модель)

При **планіметричному підході** (рис. 4.2.10 а) у цій моделі при побудові N_1 використаємо композицію **гіперболи**, яка проходить через 2-12; 6-8 (це слід що лишає на площині нульового рівня гіперболічний

параболоїд $N_1^{(2)}$ та **прямої** 3-11 (це слід що лишає на $\xi O \eta$ площина $N_1^{(3)}$). Прямі – сторони квадрата 4-7 і 7-10, як завжди, теж присутні (це слід, який лишає на площині $\xi O \eta$ гіперболічний параболоїд $N_1^{(1)}$).

Для вузлів у вершинах:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 - 3\xi_i \xi \eta_i \eta)(2 - 3\xi_i \xi - 3\eta_i \eta),$$

$$i = 1, 4, 7, 10; \xi_i; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.11)$$

Для «проміжних» вузлів ($i = 2, 3, 8, 9$) маємо (рис. 4.2.10 б):

$$N_i = \frac{3}{32}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(27\xi_i \xi + 2\eta_i \eta + 1), \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.12)$$

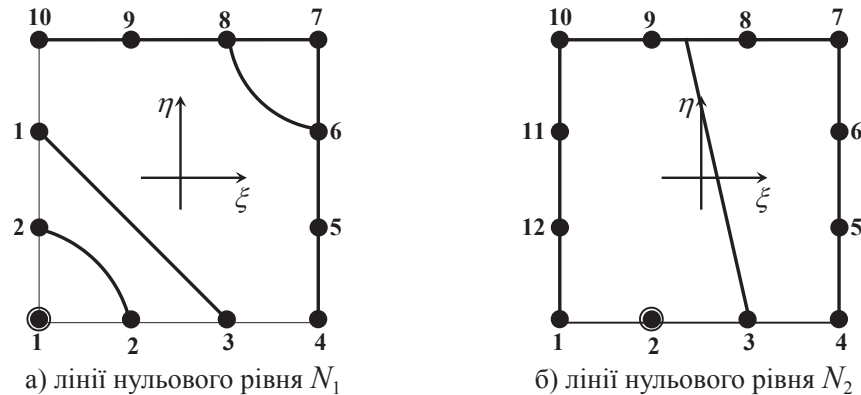


Рис. 4.2.10. До планіметричного підходу побудови базисних функцій ССЕ-12 (III модель)

Приклади графіків базисних функцій наведено в кінці розділу (рис. 4.2.20 а, 4.2.20 б).

IV. Модель з площиною і гіперболічним параболоїдом, що накриває її (або модель з прямою і гіперболою)

У даній моделі (отримана у 1995 р. [20]) при **стереометричному підході** базисна функція для вузла 1 задається з поверхонь:

1) гіперболічного параболоїда (ГП), що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.11 а):

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta);$$

2) **площини**, що проходить через 2, 12 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.11 б):

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(3\xi + 3\eta + 4).$$

3) **гіперболічного параболоїда**, що проходить через вузли 3, 11 і точку $(-1; -1; 1)$ і **накриває площину** $N_1^{(2)}$ (рис. 4.2.11 б):

$$N_1^{(3)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{20}(-9\xi\eta + 6\xi + 6\eta + 1).$$

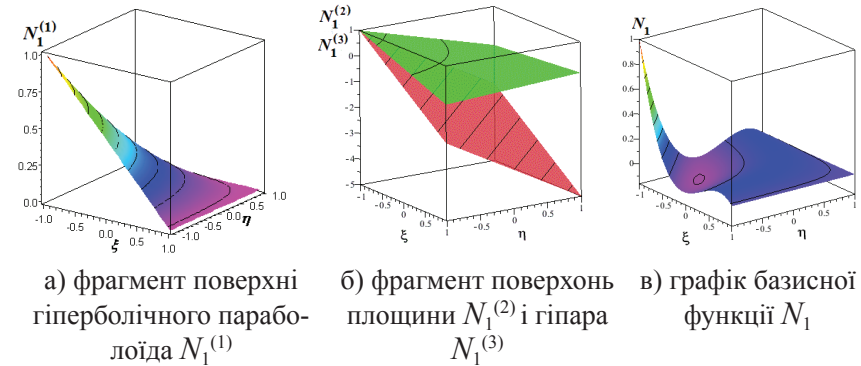


Рис. 4.2.11. До стереометричного підходу побудови функції N_1 ССЕ-12 (IV модель)

Базисна функція N_1 будується як добуток функцій $N_1^{(1)}$ і $N_1^{(2)}$ (рис. 4.2.11 в):

$$N_1 = \frac{1}{160}(1 - \xi)(1 - \eta)(3\xi + 3\eta + 4)(-9\xi\eta + 6\xi + 6\eta + 1). \quad (4.2.13)$$

При **планіметричному підході** (рис. 4.2.12 а) у цій моделі при побудові N_1 використаємо **пряму** 2-12 (це слід що лишає на $\xi O \eta$ площина $N_1^{(2)}$) та **гіперболу**, що проходить через вузли 3-11 (слід що лишає на площині нульового рівня гіперболічний параболоїд $N_1^{(3)}$), а також **прямі**, що співпадають зі сторонами квадрата 4-7, 7-10 (це слід, який лишає на площині $\xi O \eta$ гіперболічний параболоїд $N_1^{(1)}$).

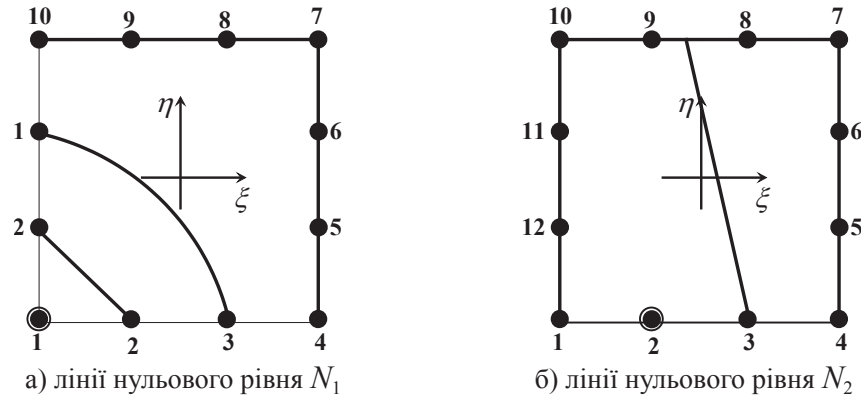


Рис. 4.2.12. До планіметричного підходу побудови базисних функцій ССЕ-12 (IV модель)

Для вузлів у вершинах:

$$N_i = \frac{1}{160} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 - 6(\xi_i \xi + \eta_i \eta) - 9\xi_i \xi \eta_i \eta)(4 - 3\xi_i \xi - 3\eta_i \eta),$$

$$i = 1, 4, 7, 10, \xi_i; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.14)$$

Для проміжних вузлів ($i = 2, 3, 8, 9$) маємо (рис. 4.2.9 б):

$$N_i = \frac{9}{160} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(2 - 45\xi_i \xi - 3\eta_i \eta), \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.15)$$

Приклади графіків базисних функцій наведено в кінці розділу (рис. 4.2.21 а, 4.2.21 б).

V. Модель з гіпаром, який розпадається на дві площини (або модель з двома прямими, що перетинаються)

У даній моделі (отримана у 1995 р. [20]) при *стереометричному підході* базисна функція для вузла 1 задається з поверхонь:

1) гіперболічного параболоїда (ГП), що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.13 а):

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta),$$

2) *площини*, що проходить через 2, 11 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.13 б):

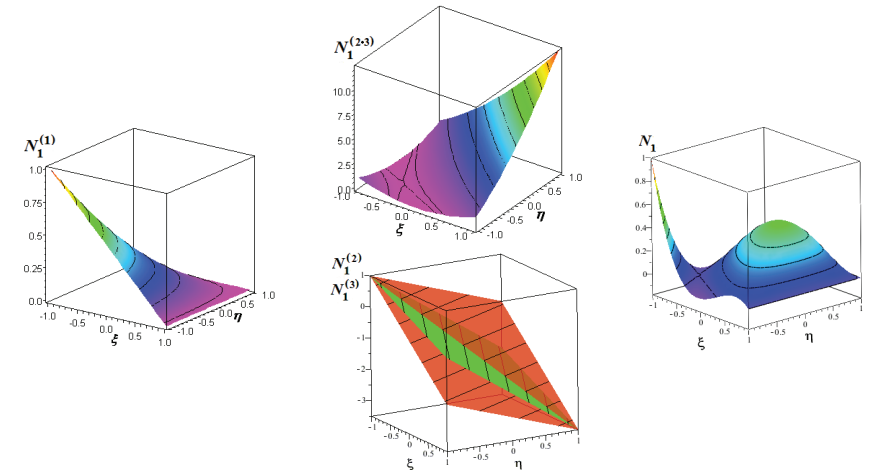
$$N_1^{(2)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} (5 + 3\xi + 6\eta).$$

3) *площини*, що проходить через 3, 12 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.13 б):

$$N_1^{(3)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} (5 + 6\xi + 3\eta).$$

Базисна функція N_1 будується як добуток функцій $N_1^{(1)}$, $N_1^{(2)}$ і $N_1^{(3)}$ (рис. 4.2.13 в):

$$N_1 = \frac{1}{64} (1 - \xi)(1 - \eta)(5 + 3\xi + 6\eta)(5 + 6\xi + 3\eta). \quad (4.2.16)$$



а) фрагмент поверхні гіперболічного параболоїда $N_1^{(1)}$ б) фрагмент гіпара $N_1^{(2,3)}$ і площин $N_1^{(2)}, N_1^{(3)}$, на які він розпадається в) графік базисної функції N_1

Рис. 4.2.13. До стереометричного підходу побудови функції N_1 ССЕ-12 (V модель)

У цій моделі при *планіметричному підході* (рис. 4.2.14 а) для функції N_1 використаємо композицію *двох прямих* 2-11, 3-12, *що перетинаються* (слід що лишають на $\xi O \eta$ площини $N_1^{(2)}$ та $N_1^{(3)}$) і, як завжди, *прямі* 4-7 і 7-10 (це слід, який лишає на площині $\xi O \eta$ гіперболічний параболоїд $N_1^{(1)}$).

Для кутових вузлів:

$$N_i = \frac{1}{64} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \times \\ \times (5 - 3\xi_i \xi - 6\eta_i \eta) (5 - 6\xi_i \xi - 3\eta_i \eta) ; \\ i = 1, 4, 7, 10, \xi_i; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.17)$$

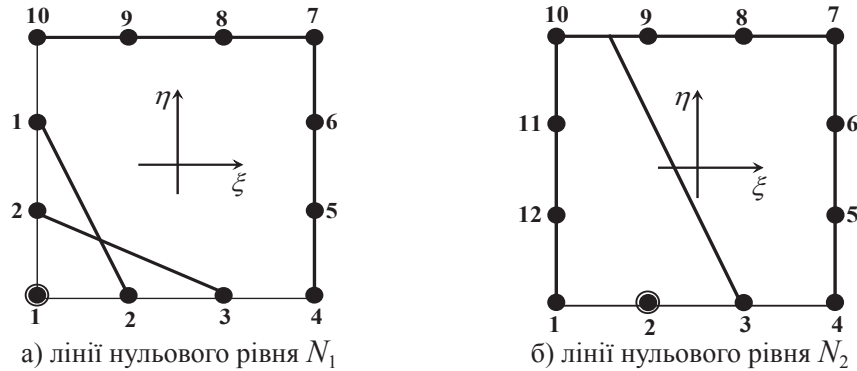


Рис. 4.2.14. До планіметричного підходу побудови базисних функцій CSE-12 (V модель)

Для проміжних вузлів ($i = 2, 3, 8, 9$) маємо (рис. 4.2.11 б):

$$N_i = \frac{9}{128} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (36\xi_i \xi + 5\eta_i \eta - 1), \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.18)$$

Приклади графіків функцій форми цієї моделі наведено в кінці розділу (рис. 4.2.22 а, 4.2.22 б).

VI. Модель з похилим параболічним циліндром (або модель з параболою)

В останній моделі (отримана у 1995 р. [20]) при *стереометричному підході* базисна функція для вузла 1 задається з поверхонь:

1) гіперболічного параболоїда (ГП), що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.15 а):

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta),$$

2) похилого параболічного циліндра, що проходить через вузли 2, 3, 11, 12 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.15 б):

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} (9\xi^2 + 9\eta^2 - 18\xi\eta - 18\xi - 18\eta - 28).$$

Базисна функція N_1 будується як добуток функцій $N_1^{(1)}$ і $N_1^{(2)}$ (рис. 4.2.15 в):

$$N_1 = \frac{1}{32} (1 - \xi) (1 - \eta) (9\xi^2 + 9\eta^2 - 18\xi\eta - 18\xi - 18\eta - 28). \quad (4.2.19)$$

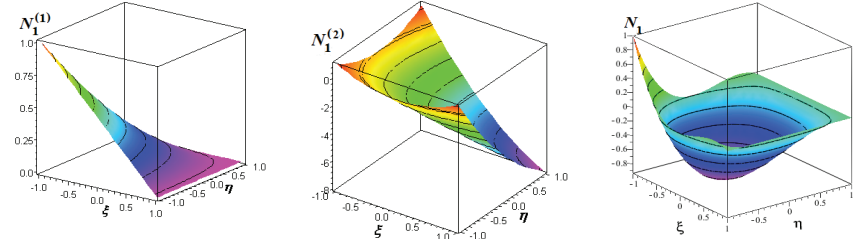


Рис. 4.2.15. До стереометричного підходу побудови функції N_1 CSE-12 (VI модель)

У цій моделі при *планіметричному підході* (рис. 4.2.16 а) для функції N_1 використаємо *параболу*, що проходить через вузли 2, 3, 11, 12 (це слід, який лишає похилий параболічний циліндр $N_1^{(2)}$) та прямі 4-7 і 7-10 (це слід, який лишає на площині $\xi O \eta$ гіперболічний параболоїд $N_1^{(1)}$).

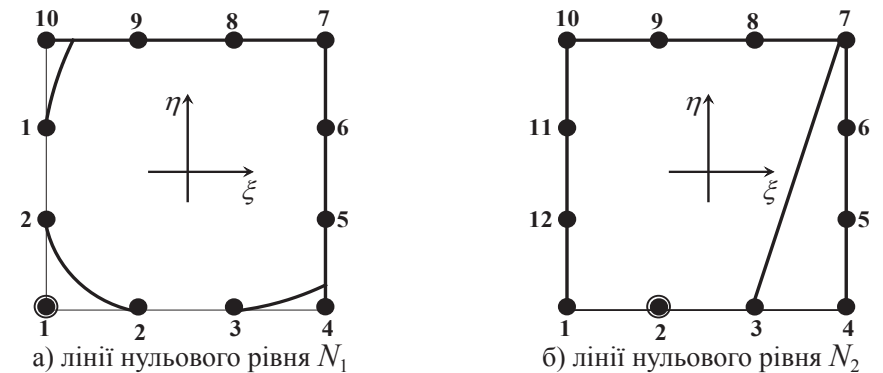


Рис. 4.2.16. До планіметричного підходу побудови базисних функцій CSE-12 (VI модель)

Для вузлів у вершинах:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 18\xi_i \eta_i \xi \eta + 18\xi_i \xi + 18\eta_i \eta - 28);$$

$$i = 1, 4, 7, 10, \quad \xi_i; \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.20)$$

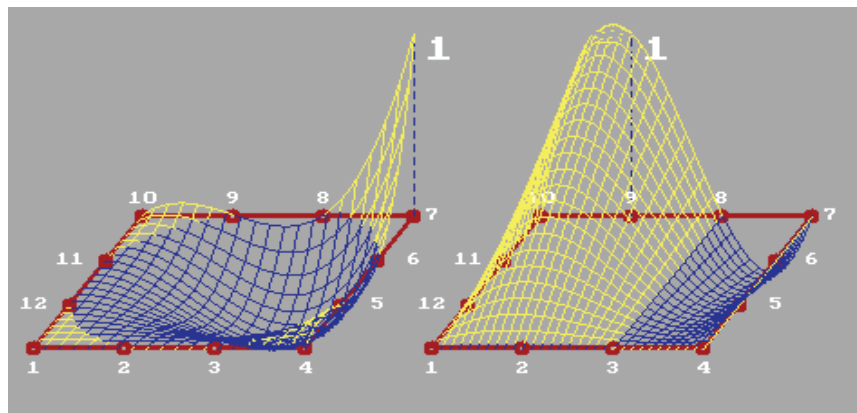
Для проміжних вузлів ($i = 2, 3, 8, 9$) (рис. 4.2.13 б):

$$N_i = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(9\xi_i \xi - \eta_i \eta + 2), \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (4.2.21)$$

Приклади графіків функцій форми цієї моделі наведено в кінці розділу (рис. 4.2.23 а, 4.2.23 б).

Зауважимо, що альтернативні моделі мають тринадцятий параметр $\alpha_{13} \xi^2 \eta^2$, який відсутній у стандартному базисі (4.1.1)-(4.1.2), а у IV і V моделях з гіперболами (4.2.11)-(4.2.12) та (4.2.14)-(4.2.15) – п'ятнадцять параметрів (в інтерполяційному поліномі присутні доданки $\alpha_{14} \xi^3 \eta^2$, і $\alpha_{15} \xi^2 \eta^3$). Побудова багатопараметричної інтерполяції без використання внутрішніх вузлів – це найкраща ілюстрація переваг геометричного моделювання [20; 26; 31].

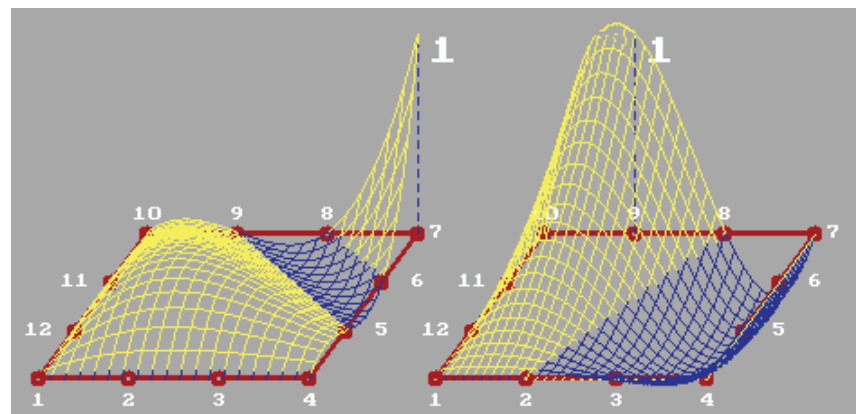
Візуалізація і ансамблювання базисних функцій



а) графік функції N_7

б) графік функції N_9

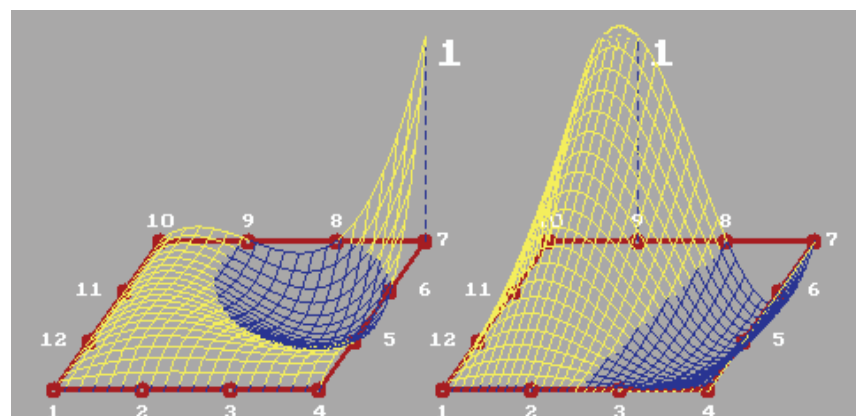
Рис. 4.2.17. Графіки функцій стандартного базису
(модель з параболоїдом обертання або модель з колом)



а) графік функції N_7

б) графік функції N_9

Рис. 4.2.18. Графіки функцій модифікованого базису
(модель з параболічним циліндром, який розпадається на дві площини або модель з двома паралельними прямими)



а) графік функції N_7

б) графік функції N_9

Рис. 4.2.19. Графіки функцій модифікованого базису
(модель з еліптичним параболоїдом або модель з еліпсом)

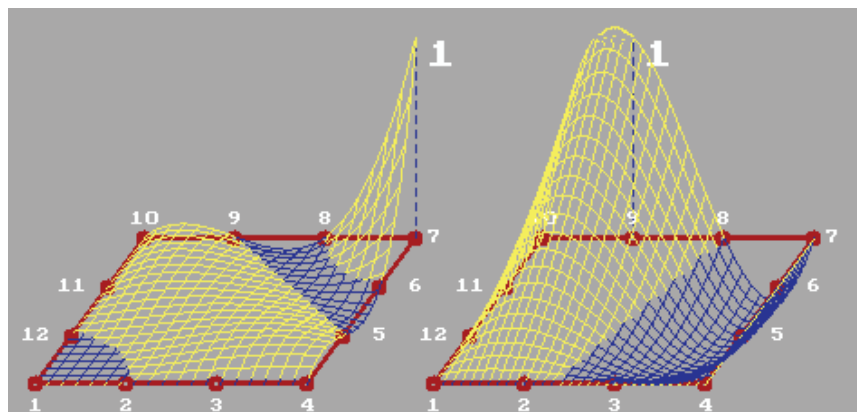
а) графік функції N_7 б) графік функції N_9

Рис. 4.2.20. Графіки функцій модифікованого базису
(модель з гіперболічним параболоїдом і площиною,
що накриває його або модель з гіперболою і прямою)

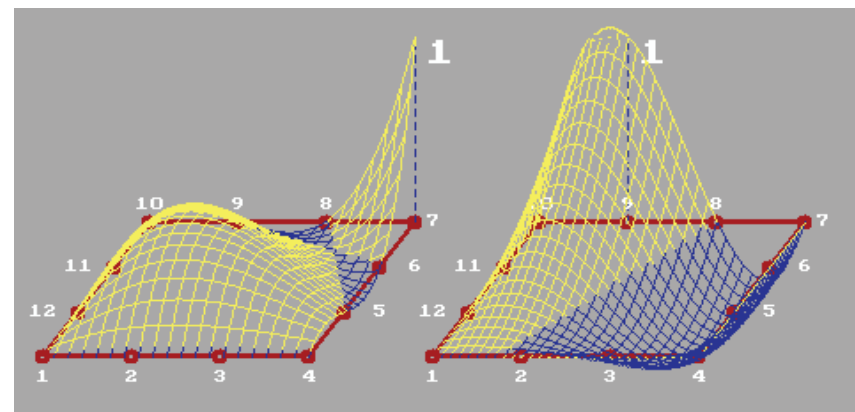
а) графік функції N_7 б) графік функції N_9

Рис. 4.2.22. Графіки функцій модифікованого базису
(модель з гіпаром, який розпадається на дві площини
або модель з двома прямими, що перетинаються)

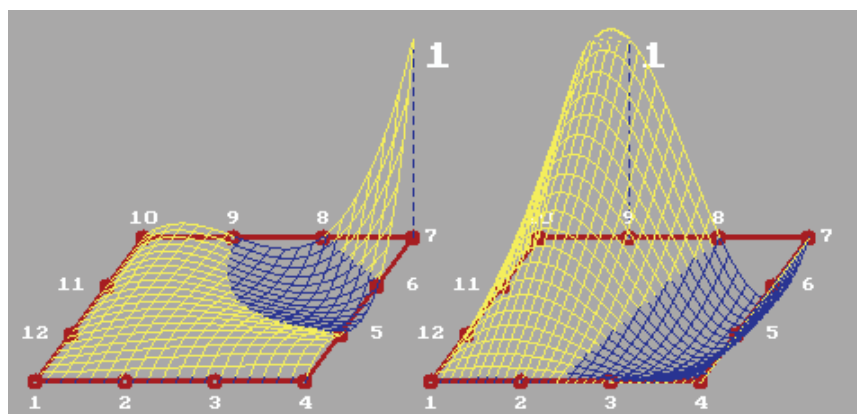
а) графік функції N_7 б) графік функції N_9

Рис. 4.2.21. Графіки функцій модифікованого базису
(модель з площиною і гіперболічним параболоїдом,
що накриває її або модель з прямою і гіперболою)

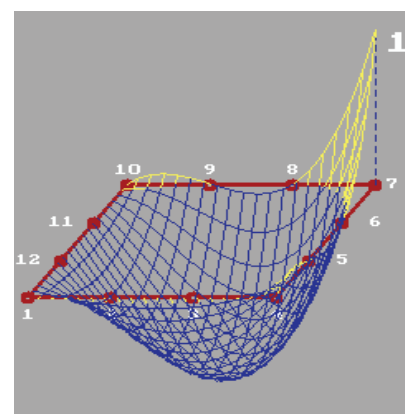
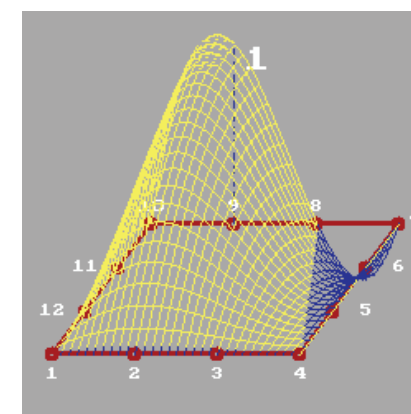
а) графік функції N_7 б) графік функції N_9

Рис. 4.2.23. Графіки функцій модифікованого базису
(модель з похилим параболічним циліндром
або модель з параболою)

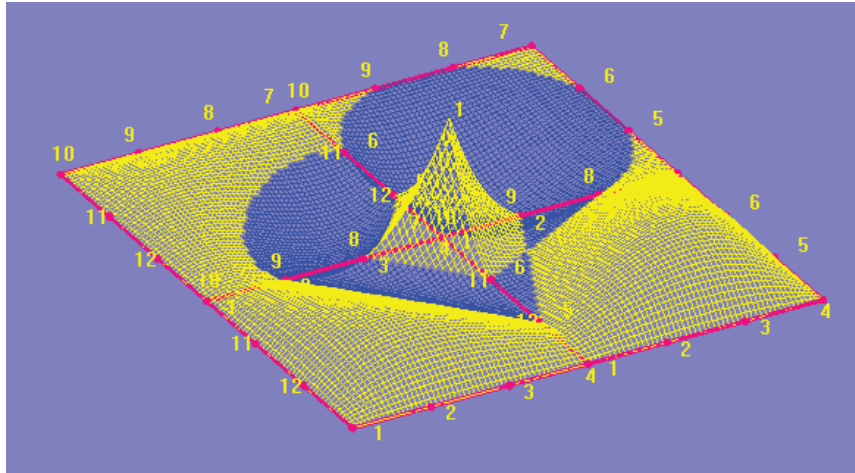


Рис. 4.2.24. Перевірка на міжелементну неперервність чотирьох моделей ССЕ-12

Графічне зображення (рис. 4.2.24) процесу ансамблювання базисних функцій дозволяє визначити головну особливість альтернативних моделей, які були побудовані у параграфі 4.2. Всі базисні функції ССЕ-12 співпадають на границях елемента, таким чином зберігається C^0 -гладкість апроксимації. Це означає, що елементи різних модифікацій можна об'єднувати в єдиний ансамбль [24], при цьому зберігається міжелементна неперервність. На рис. 4.2.24 в ансамбль об'єднані чотири альтернативні моделі ССЕ-12: модель з колом, модель з еліпсом, модель з двома паралельними прямими і модель з двома прямими, що перетинаються.

4.3. Ймовірісно-геометричний метод на бікубічному елементі

I варіант ймовірісно-геометричного методу. Розглянемо реалізацію методу на прикладі побудови «кутової» функції *моделі з паралельними прямими*. Зауважимо, що ССЕ-12 – елемент третього порядку, тому треба обирати три піделементи, три точки і три випадкові події. Для побудови базисної функції N_1 на ССЕ-12 візьмемо компо-

зицію квадрата 1-4-7-10 і двох трикутників $\Delta 1-2-12$ і $\Delta 1-3-11$ (рис. 4.3.1 а). Ймовірність попадання навмання вкинутої точки в протилежну вузлу 1 область квадрата 1-4-7-10, у відповідності з означенням геометричної ймовірності (1.3.1), дорівнює $\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$. Ймовірність попадання навмання вкинутої точки у заштриховану область трикутника $\Delta 1-2-12$ дорівнює $\frac{1}{2}(-3\xi-3\eta-4)$, а трикутника $\Delta 1-3-11$: $\frac{1}{4}(-3\xi-3\eta-2)$ (формула 1.3.1).

Використовуючи теорему добутку ймовірностей незалежних подій, отримаємо:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi+3\eta+2)(3\xi+3\eta+4). \quad (4.3.1)$$

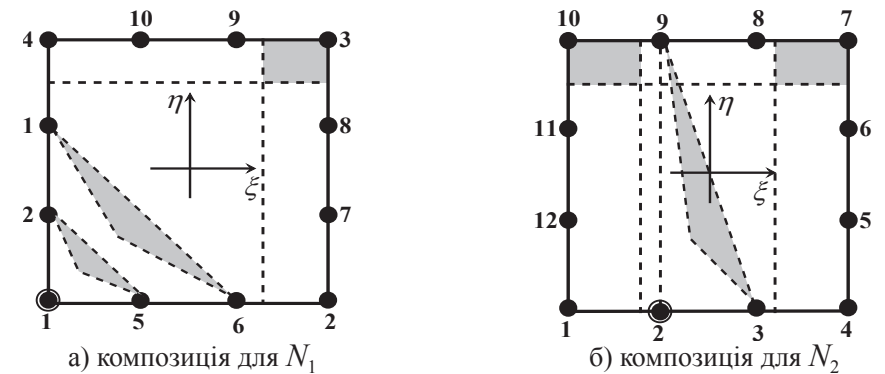


Рис. 4.3.1. До ймовірісно-геометричного методу побудови базису бікубічного елемента (I модифікована модель)

При побудові базисної функції N_2 використаємо композицію з прямокутників: 2-4-7-9, 2-9-10-1 і трикутника $\Delta 239$ (рис. 4.3.1 б). Ймовірність, що навмання вкинута точка потрапила у заштриховану область трикутника $\Delta 239$: $\frac{1}{2}(-3\xi-\eta)$, а у заштриховані області прямокутників: $\frac{9}{16}(1-\xi^2)(1-\eta)$. При цьому для вузла 2 отримуємо:

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(-3\xi - \eta). \quad (4.3.2)$$

Зауваження. При побудові базисної функції N_i другої моделі ССЕ-12 можна використовувати розбиття СЕ тільки на трикутники зі спільною вершиною i (див. параграфи 1.3 і 2.3).

II варіант ймовірнісно-геометричного методу. У розділі 1 для побудови базисних функцій була отримана формула (1.3.10). Покажемо, як ця формула працює для моделі з паралельними прямими на ССЕ-12. Побудуємо базисну функцію N_1 . Розбиваємо ССЕ-12 на квадрат 1-4-7-10 і два трикутники $\Delta 1-2-12$ і $\Delta 1-3-11$ зі спільним вузлом 1 (рис. 4.3.1 а). Для квадрата 1-4-7-10:

$$PL = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta) - 0}{4 - 0} = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4} = N_1^{(1)}(\xi, \eta). \quad (4.3.3)$$

На трикутнику $\Delta 1-2-12$:

$$PL = \frac{(-4 - 3\xi - 3\eta) - 0}{2 - 0} = \frac{-4 - 3\xi - 3\eta}{2} = N_1^{(2)}(\xi, \eta). \quad (4.3.4)$$

На трикутнику $\Delta 1-3-11$:

$$PL = \frac{(-2 - 3\xi - 3\eta) - 0}{4 - 0} = \frac{-2 - 3\xi - 3\eta}{4} = N_1^{(3)}(\xi, \eta). \quad (4.3.5)$$

Базисну функцію для вузла 1 отримуємо як добуток ймовірностей:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)(3\xi + 3\eta + 2)(3\xi + 3\eta + 4). \quad (4.3.6)$$

Базисну функцію для вузла 2 отримуємо, використовуючи означення геометричної ймовірності (1.3.1) для прямокутників і формулу (1.3.10) для трикутника $\Delta 239$. Ймовірнісно-геометричний метод дозволяє будувати інші моделі (з колом, з еліпсом, з параболою і з гіперболами) на ССЕ-12.

Використання криволінійних елементів при побудові базису ССЕ

Базисна функція, наприклад, для вузла 1 для ССЕ-12 у *моделі з параболою обертавання* може бути отримана за допомогою означення геометричної ймовірності (1.3.1) і формули (1.3.10). Ймовірність попа-

дання навмання вкинutoї точки в протилежну вузлу 1 область квадрата 1-4-7-10, у відповідності з означенням геометричної ймовірності, дорівнює $\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$. Трикутник $\Delta 1-2-12$ криволінійний, сторона 2-12 – це дуга кола (рис. 4.3.2а). Обчислимо ймовірність за формулою (1.3.10):

$$PL = \frac{(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) - 0}{8 - 0} = \frac{1}{8}(9(\xi^2 + \eta^2) - 10). \quad (4.3.7)$$

За формулою добутку ймовірностей отримуємо:

$$N(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 - \eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10). \quad (4.3.8)$$

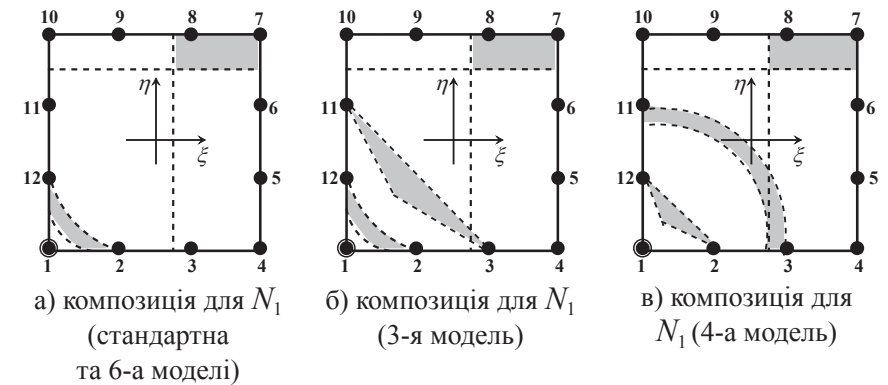


Рис. 4.3.2. До ймовірнісно-геометричного методу побудови базису бікубічного елемента

Для побудови моделі з еліпсом припустимо, що у криволінійному трикутнику $\Delta 1-2-12$, сторона 2-12 – це дуга еліпса, тому ймовірність попадання навмання вкинutoї точки у заштриховану полосу обчислюється наступним чином (рис. 4.3.2 а):

$$PL = \frac{(9\xi^2 + 9\eta^2 + 9\xi\eta + 9\xi + 9\eta - 1) - 0}{8 - 0} = \frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 + 9\xi\eta + 9\xi + 9\eta - 1). \quad (4.3.9)$$

Нехай для побудови моделі з гіперболою та прямою у трикутнику $\Delta 1-2-12$ сторона 2-12 – це дуга гіперболи (рис. 4.3.2 б), тому ймовірність обчислюється наступним чином:

$$PL = \frac{(1-3\xi\eta)-0}{-2-0} = -\frac{1}{2}(1-3\xi\eta). \quad (4.3.10)$$

Для моделі з прямою та гіперболою у криволінійному трикутнику $\Delta 1-3-11$ сторона 3-11- це дуга гіперболи (рис. 4.3.2 в):

$$PL = \frac{(-9\xi\eta + 6\xi + 6\eta + 1) - 0}{-20 - 0} = -\frac{1}{20}(-9\xi\eta + 6\xi + 6\eta + 1). \quad (4.3.11)$$

Для моделі з параболою на трикутнику $\Delta 1-2-12$ сторона 2-12 – це дуга параболи (рис. 4.3.2 а), тому використання (1.3.10) дає:

$$PL = \frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 18\xi\eta - 18\xi - 18\eta - 28). \quad (4.3.12)$$

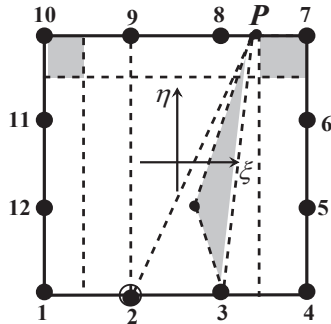


Рис. 4.3.3. Композиція для N_2 до ймовірісно-геометричного методу побудови базису бікубічного елемента

При побудові базисної функції N_2 у всіх моделях використовують розбиття СЕ – на два прямокутники: 2-4-7-9 і 2-9-10-1 та трикутник $\Delta 2-3-P$, де точка P має координати $P(\xi, 1)$ (рис. 4.3.3).

Процедуру знаходження координат точки P описано у наступному параграфі.

4.4. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису ССЕ-12 (обернена задача)

Зауважимо, що вперше ідея комбінованого алгебро-геометричного методу була запропонована у 1995 р. як *процедура визначення коефіцієнтів інтерполяційного полінома* при розв'язанні *прямої задачі*: побудова базисів на бікубічному елементі серендипової сім'ї з *a posteriori* обчисленим повузловим розподілом рівномірної масової сили [31; 54].

Щоб зрозуміти основну ідею і оцінити переваги цього методу, розглянемо, які відмінності він має у порівнянні з традиційним алгебраїчним підходом.

У *традиційному матричному підході* до побудови базису скінченного елемента:

1) записується інтерполяційний поліном відповідного степеня з невідомими коефіцієнтами α_i у неявному вигляді: $\phi = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i y^{n-i}$, де n – кількість вузлів СЕ;

2) будується система рівнянь з використанням *інтерполяційної гіпотези Лагранжа* (формула (2.2.1)), розв'язком якої є значення коефіцієнтів α_i (у загальному випадку, якщо система сумісна, то має єдиний розв'язок);

3) після підстановки знайдених коефіцієнтів α_i поліном перегрупується відносно вузлових значень функції Φ_i , що інтерполюється;

4) інтерполяційний поліном записується у явному вигляді:

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i \Phi_i, \text{ причому } \sum_{i=1}^n N_i = 1, \quad (4.4.1)$$

де N_i – базисні функції на скінченному елементі з *a posteriori* визначеним повузловим розподілом.

Звертаємо увагу, що новий підхід до побудови базису дозволяє записати інтерполяційний поліном *a priori* у явному вигляді (4.4.1), оминаючи громіздкі процедури, пов'язані з інтерполяційним поліномом у неявному вигляді (пункти 1-3).

Кутові базисні функції при цьому записувались за допомогою *геометричного методу* (параграфі 4.2). При побудові проміжної функції,

наприклад, N_2 виникали труднощі, пов'язані з рівнянням прямої, яка проходить через вузол 3 і точку P на стороні 7-10 квадрата, розташування якої змінюється у різних базисах бікубічного елемента (рис. 4.4.1).

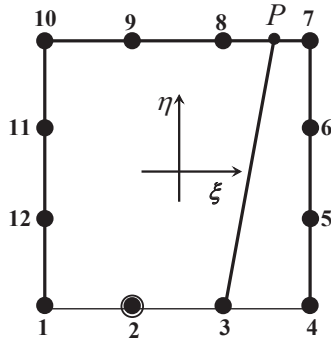


Рис. 4.4.1. До побудови функції N_2 бікубічного скінченного елемента серендипової сім'ї

Процедура визначення коефіцієнтів інтерполяційного полінома дозволила легко знаходити проміжні функції. Щоб знайти абсцису точки $P(\xi, 1)$, запишемо функцію N_2 у вигляді:

$$N_2 = k_2(1 - \xi^2)(1 - \eta)(A\xi + B\eta + 1). \quad (4.4.2)$$

Коефіцієнти A, D, k_2 шукаємо з наступної системи:

$$\left. \begin{aligned} N_2(\xi_2, \eta_2) &= 1, \\ N_2(\xi_3, \eta_3) &= 0, \\ 4k_1 + 8k_2 &= 1, \end{aligned} \right\} \text{де } k_1 = N_1(0, 0). \quad (4.4.3)$$

Абсцису точки P для кожної моделі знаходимо з системи:

$$\left. \begin{aligned} A\xi + B\eta + 1 &= 0, \\ \eta &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.4)$$

У 2007 р., коли А.Н. Хомченком була запропонована **обернена задача серендипової інтерполяції** (див. параграф 2.4), виникла ідея скористатися **процедурою визначення коефіцієнтів інтерполяційного полінома** для побудови альтернативних базисів з *a priori* заданим спектром

на ССЕ. Цей метод отримав назву **комбінований алгебро-геометричний метод** (параграф 2.5).

Такий підхід дозволив не тільки розв'язати обернену задачу серендипової інтерполяції, а й отримати нові багатопараметричні базиси на ССЕ, які неможливо було знайти іншими методами.

Скористаємось **комбінованим алгебро-геометричним методом**, щоб побудувати базис для бікубічного елемента серендипової сім'ї, для якого знайдено експериментальний спектр вузлових навантажень (табл. 2.1.2). Не порушуючи умови зміни функції форми вздовж сторони квадрата за законом кубічної параболи, можна представити $N_1(\xi, \eta)$ та $N_2(\xi, \eta)$ у вигляді:

$$N_1 = k_1(1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta + 1); \quad (4.4.4)$$

$$N_2 = k_2(1 - \xi^2)(1 - \eta)(F\xi + G\eta + 1). \quad (4.4.5)$$

Зауваження 1. Завдяки спостереженням було з'ясовано, що два (для «кутових» функцій) або три (для «проміжних» функцій) рівняння прямих завжди присутні у форматі запису базисної функції. А в останніх дужках записується рівняння кривої, положення якої змінюється при реалізації в альтернативних базисах.

Невідомі коефіцієнти $A, B, C, D, E, F, k_1, k_2$ знайдемо, розв'язавши систему, яка складена за тією ж методикою, що описана у параграфі 2.5:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 3, 11, 12; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 3; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_1 d\xi d\eta &= C_1 = \frac{8}{200}; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_2 d\xi d\eta &= C_2 = \frac{21}{200}, \end{aligned} \right\} \quad (4.4.6)$$

де k – номер вузла, C_1 і C_2 – значення **експериментального спектру** повузлового розподілу (табл. 2.1.2).

Система (4.4.6) має єдиний розв'язок, за допомогою якого отримуємо [3; 7; 77] базис, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень:

$$N_i = \frac{1}{1600} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \times (450 \xi^2 + 450 \eta^2 + 594 \xi_i \xi \eta_i \eta - 594 \xi_i \xi - 594 \eta_i \eta + 94),$$

$$i = 1, 4, 7, 10; \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1; \quad (4.4.7)$$

$$N_i = \frac{9}{1600} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (17 + 450 \xi_i \xi + 33 \eta_i \eta),$$

$$i = 2, 3, 8, 9; \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (4.4.8)$$

Базисні функції для вузлів 5, 6, 11, 12 отримуються з (4.4.8) за допомогою перестановки ξ та η .

На рис. 4.4.2 зображено лінії нульового рівня функції $N_1(\xi, \eta)$ для нового базису.

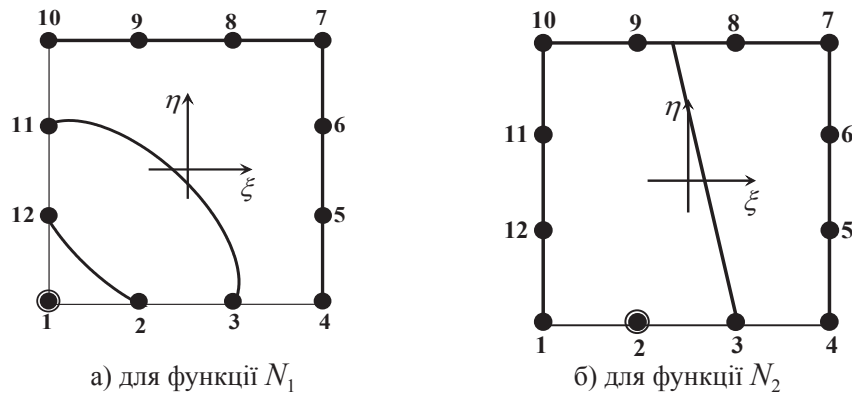


Рис. 4.4.2. Лінії нульового рівня для базису, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень на ССЕ-12

Отримані функції форми задовольняють властивостям 1-5 (див. параграф 2.1).

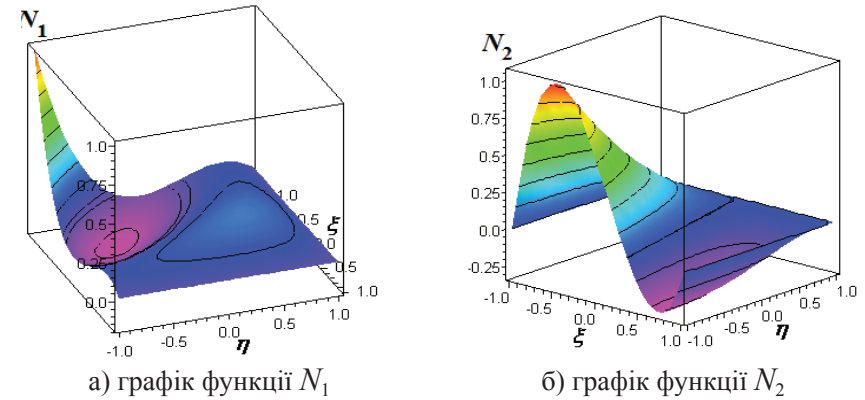


Рис. 4.4.3. Модифікований базис на ССЕ-12
(модель, яка реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень)

На рис. 4.4.3 добре видно, що базис (4.4.7)-(4.4.8) має ще одну перевагу над стандартним – суттєво зменшилась кількість кратних нулів у вузлах елемента. На рис. 4.4.3 зображено графіки функцій $N_1(\xi, \eta)$ та $N_2(\xi, \eta)$ базису, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень.

Таким чином, за допомогою комбінованого алгебро-геометричного методу отримано альтернативний базис для ССЕ-12, який має спектр повузлового розподілу рівномірної масової сили, що відповідає комп'ютерному експерименту (розділ 2).

Зауваження 2. При формулюванні оберненої задачі серендипової інтерполяції систему (4.4.6) можна доповнювати додатковими рівняннями, використовуючи наступні **критерії**:

- 1) формулу обчислення інтегрального середнього розподілу рівномірної масової сили на СЕ (використовуючи гіпотезу про рівність теоретичного p_i та експериментального C_i значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили);
- 2) критерій повноти системи базисних функцій;
- 3) критерії гармонічності (Лапласа, Привалова, Кьобе) або значення відомих гармонічних функцій;

- 4) критерій мінімуму функціоналу від лапласіана на СЕ;
- 5) критерій мінімуму квадрата відхилення від площини нульового рівня та інші.

4.5. Метод оптимізації інтерполяційних властивостей і обчислювальних якостей базисів ССЕ-12

За допомогою геометричного та ймовірнісного методів отримано каталог різних моделей на ССЕ-12. Альтернативні базиси відкривають нові можливості для розв'язання актуальної задачі оптимізації інтерполяційних якостей дискретної моделі. Така оптимізація досягається «зважуванням» альтернативних моделей за формулою [26; 31]:

$$N_i^{(m)} = (1 - \alpha) N_i^{(r)} + \alpha N_i^{(s)}, \quad (4.5.1)$$

де $\{N_i^{(r)}\}$, $\{N_i^{(m)}\}$, $\{N_i^{(s)}\}$ – різні базиси ССЕ, α – ваговий коефіцієнт.

Процедура «зважування» у математичному моделюванні має універсальний характер і є надійним інструментом удосконалення моделі, метода, розрахункової схеми. Усереднення, як правило, приводить до кращого результату [14; 75]. Математика має багато прикладів використання процедури зважування: зважене усереднення вузлових значень у інтерполяційній формулі Лагранжа, середнє інтегральне в інтегральних критеріях гармонічності та ін.

Модель з еліпсоїдом ССЕ-12 можна отримати у випадках:

$$N_i^{(3)} = \frac{1}{2} N_i^{(1)} + \frac{1}{2} N_i^{(2)};$$

$$N_i^{(3)} = \frac{3}{4} N_i^{(2)} + \frac{1}{4} N_i^{(7)};$$

$$N_i^{(3)} = \frac{2}{3} N_i^{(6)} + \frac{1}{3} N_i^{(7)},$$

де $N_i^{(1)}$ – модель з параболоїдом обертання; $N_i^{(2)}$ – модель з параболічним циліндром; $N_i^{(3)}$ – модель з еліптичним параболоїдом; $N_i^{(6)}$ – модель з площинами, що перетинаються; $N_i^{(7)}$ – модель з параболічним циліндром.

Перші спроби генерувати багатопараметричні апроксимації на серендипових скінченних елементах шляхом зваженого усереднення почалися у 1982 р., коли вперше вдалося побудувати у явному вигляді нові альтернативні базиси ССЕ з позавузловими «прихованими» параметрами [73].

Можливість вибору базису за допомогою формули оптимізації має важливе значення для визначення характеру розподілу рівномірної масової сили по вузлах СЕ, для узагальнення барицентричної задачі Мебіуса, для побудови несіткових однокрокових схем випадкових блукань методу Монте-Карло.

Розв'язування оберненої задачі за допомогою формули оптимізації. У параграфі 4.2 наведено каталог альтернативних моделей на ССЕ-12, наявність яких дозволяє запропонувати ще один ефективний варіант розв'язання оберненої задачі [3; 26; 31; 75].

Для цього:

1) задаємось експериментальним значенням C_i та теоретичним значенням p_i спектру навантажень (табл. 2.1.2);

2) знаходимо коефіцієнт α з рівняння:

$$C_i^{(m)} = \alpha p_i^{(r)} + (1 - \alpha) p_i^{(s)}; \quad (4.5.2)$$

3) знайдене значення α підставляємо у формулу зваженого усереднення (4.5.1) і отримуємо новий базис з *a priori* відомим повузловим навантаженням.

Зауваження. Формули (4.5.1) і (4.5.2) використовуються тільки тоді, коли існують, як мінімум, два базиси. На даний час цей метод добре працює на всіх елементах серендипової сім'ї на площині та у просторі, тому що на кожному зі скінченних елементів відомі не тільки стандартні, а й альтернативні базиси.

РОЗДІЛ 5 БІКУБІЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ. БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ

5.1. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій бікубічного елемента

На бікубічному скінченному елементі використаємо метод побудови ієрархічних форм базисних функцій, який був описаний у параграфі 3.2. Когнітивно-графічний аналіз поверхонь [25], які утворюють базисні функції на скінченному елементі, показав, що множину базисів на SSE-12 можливо отримати за допомогою додавання гіперболічного параболоїда з параметром K до фрагмента стандартної поверхні:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \left(\frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) + K \cdot \frac{9}{4} \cdot (1+\xi)(1+\eta) \right), \quad (5.1.1)$$

$$N_2 = \frac{3}{8}(1-\xi)(1-\eta) \left(\frac{3}{4}(1+\xi)(1-3\xi) - K \cdot \frac{3}{4} \cdot (1+\xi)(1+\eta) \right), \quad (5.1.2)$$

де N_1, N_2 – модифіковані базисні функції бікубічного елемента серендипової сім'ї.

Розглянемо ієрархічну процедуру побудови базисних функцій у цьому методі. На рис. 5.1.1 можна спостерігати процедуру отримання поверхні стандартної «кутової» функції бікубічного елемента. При побудові функції форми для вузла 10 (рис. 5.1.1 г) в якості множників використано параболоїд обертання, що проходить через всі проміжні вузли і точку $(-1,1,1)$: $N_{10}^{(1)} = \frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10)$ (рис. 5.1.1 а) та гіперболічний параболоїд (гіпар), що проходить через сторони квадрата 1-4, 4-7 і точку $(-1,1,1)$: $N_{10}^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$ (рис. 5.1.1 д).

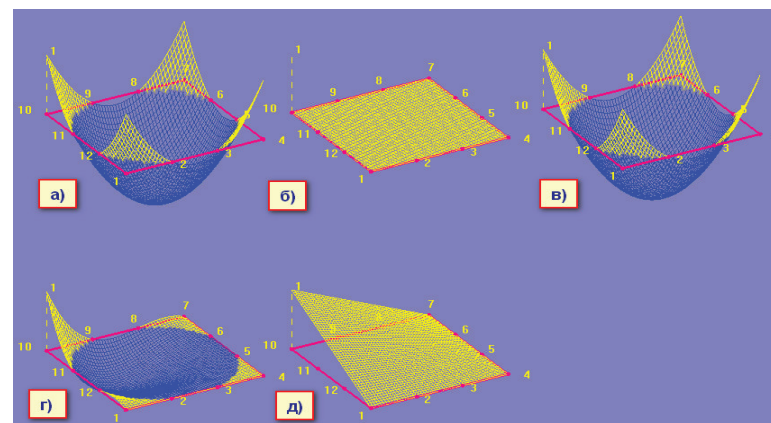


Рис. 5.1.1. Візуалізація компонентів
побудови стандартного базису SSE-12

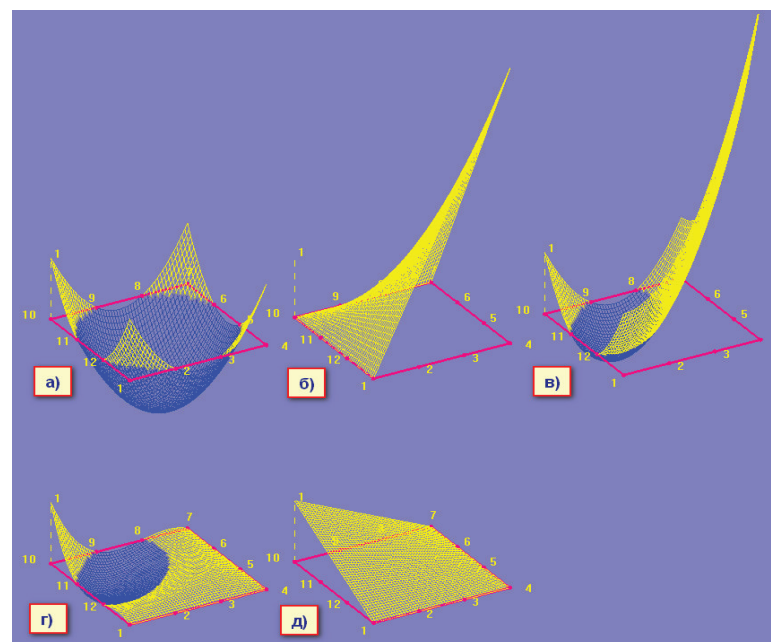


Рис. 5.1.2. Візуалізація компонентів
побудови альтернативного базису SSE-12

Аналогічно можна побудувати і «проміжні» функції CSE-12 для вузлів 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12.

Запишемо узагальнені формули для побудови базису CSE-12:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \times \left(\frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) + K \cdot \frac{9}{4} \cdot (1 - \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta) \right),$$

$$i = 1, 4, 7, 10; \xi_i, \eta_i = \pm 1; \quad (5.1.3)$$

$$N_i = \frac{3}{8}(1 + 3\xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \times \left(\frac{3}{4}(1 - 3\xi_i \xi)(1 + 9\xi_i \xi) - K \cdot \frac{3}{4}(1 - 3\xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta) \right),$$

$$i = 2, 3, 8, 9, \eta_i = \pm 1, \xi_i = \pm \frac{1}{3}. \quad (5.1.4)$$

$$N_i = \frac{3}{8}(1 + 3\eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) \times \left(\frac{3}{4}(1 - 3\eta_i \eta)(1 + 9\eta_i \eta) - K \cdot \frac{3}{4}(1 - 3\eta_i \eta)(1 - \xi_i \xi) \right),$$

$$i = 5, 6, 11, 12, \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm \frac{1}{3}. \quad (5.1.5)$$

Наявність керуючого параметра K у формулах (5.1.3 – 5.1.5) дозволяє будувати всю множину альтернативних моделей CSE-12.

Розглянемо процес побудови альтернативної моделі при $N = 0,5$ (рис. 5.1.2). Базисна функція для вузла 10 у цій моделі має вигляд:

$$N_{10} = \frac{1}{32}(1 - \xi)(1 + \eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 9\xi\eta + 9\xi - 9\eta - 1). \quad (5.1.6)$$

На рис. 5.1.2 показана ієрархічна процедура побудови модифікованого базису. Спочатку будується еліптичний параболоїд (рис. 5.1.2 в), який утворюється як сума двох поверхонь: параболоїда обертання $N_{10}^{(1)} = \frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10)$ (рис. 5.1.2 а) і гіпара $N_{10}^{(3)} = \frac{9}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)$ (рис. 5.1.2 б). Остаточно базисну функцію для вузла 10 (рис. 5.1.2 г)

отримуємо як добуток гіпара, що проходить через сторони квадрата 1-4, 4-7 і точку $(-1, 1, 1)$: $N_{10}^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$ (рис. 5.1.2 д) і еліптичного параболоїда, що проходить через вузли інтерполяції 8, 9, 11, 12 і точку $(-1, 1, 1)$ (рис. 5.1.2 в).

Зауважимо, що на відміну від стандартної поверхні (рис. 5.1.1), де використовувався лише добуток двох поверхонь, у альтернативному базисі при побудові використовується ще один гіперболічний параболоїд (рис. 5.1.2 б).

Незважаючи на те, що при побудові базисних функцій не використовувались внутрішні вузли, **модифіковані базиси** мають тринадцять параметрів у інтерполяційному поліномі. До стандартного поліному, в якому 12 параметрів (при $K = 0$), додається параметр $\alpha_{13} \xi^2 \eta^2$ (табл. 5.1.1).

Таблиця 5.1.1

Схеми Паскаля для CSE-12

Стандартний базис (12 параметрів)	Модифіковані базиси (13 параметрів)
$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \xi & \eta & \\ & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \\ \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 \\ & \xi^3\eta & \dots & \xi\eta^3 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \xi & \eta & \\ & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \\ \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 \\ & \xi^3\eta & \xi^2\eta^2 & \xi\eta^3 \end{array}$

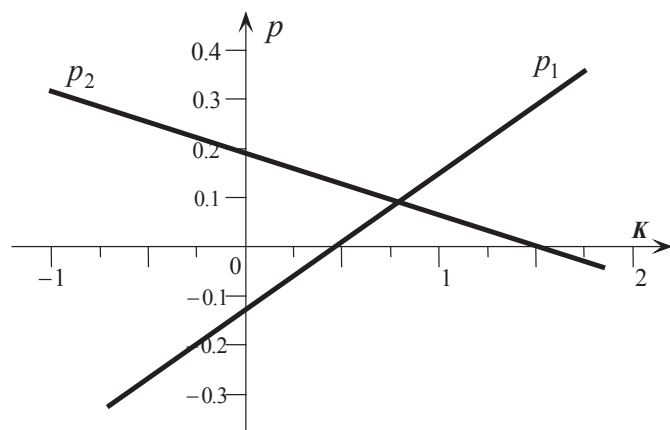
Знайдемо функції **повузлового розподілу рівномірної масової сили** за допомогою формули (2.1.3). Для кутової функції N_1 :

$$p_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}K. \quad (5.1.7)$$

Для проміжної функції N_2 :

$$p_2 = \frac{3}{16} - \frac{1}{8}K. \quad (5.1.8)$$

Графіки функцій $p_1(K)$ і $p_2(K)$ наведено на рис. 5.1.3.

Рис. 5.1.3. Залежність повузлового розподілу масової сили p_i від K

Цікаво, що 13-параметричні моделі, які були побудовані геометричним методом у параграфі 4.2, можна отримати з формул (5.1.1)-(5.1.2) при певних значеннях параметра K (табл. 5.1.2). У табл. 5.1.2 наведені значення повузлового розподілу рівномірної масової сили для відомих 13-параметричних моделей ССЕ-12 [31].

Таблиця 5.1.2

Розподіл рівномірної масової сили

№	Базиси	K	p_1	p_2
1	2	3	4	5
1	Модифікований базис з параболою	-1	$-\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$
2	Стандартний базис з колом	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$
3	Модифікований базис з еліпсом	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$
4	Модифікований базис, що, реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень	$\frac{66}{100}$	$\frac{8}{200}$	$\frac{21}{200}$

Закінчення таблиці 5.1.2

1	2	3	4	5
5	Модифікований базис з двома паралельними прямими	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
6	Модифікований базис з двома прямими, що перетинаються	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

Зауваження. У даному розділі зручніше користуватися планіметричною термінологією у назвах моделей.

5.2. Аналіз і візуалізація ліній нульового рівня базисних функцій бікубічного елемента

У когнітивно-графічному методі конструювання ієрархічних базисних функцій були отримані наступні формули для першого і другого вузлів:

$$N_1^{(s)} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \left(\frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) + K \cdot \frac{9}{4} \cdot (1+\xi)(1+\eta) \right), \quad (5.2.1)$$

$$N_2^{(s)} = \frac{3}{8}(1-\xi)(1-\eta) \left(\frac{3}{4}(1+\xi)(1-3\xi) - K \cdot \frac{3}{4} \cdot (1+\xi)(1+\eta) \right). \quad (5.2.2)$$

Проаналізуємо лінії рівня, які залишає поверхня базисної функції N_1 у площині $\xi\eta$. Перша і друга дужки асоціюються з протилежними першому вузлу сторонами квадрата: 4-7 та 7-10 (рис. 5.2.1-5.2.9). Для того, щоб проаналізувати останній множник формули (5.2.1), запишемо його у вигляді:

$$f_1 = \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{4}Kxy + \frac{9}{8}y^2 + \frac{9}{4}Kx + \frac{9}{4}Ky + \frac{9}{4}K - \frac{5}{4} = 0. \quad (5.2.3)$$

Аналіз кривої f_1 за допомогою дискримінантів Δ і δ [12; 84]

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{8}K & \frac{9}{8}K \\ \frac{9}{8}K & \frac{9}{8} & \frac{9}{8}K \\ \frac{9}{8}K & \frac{9}{8}K & \frac{9}{4}K - \frac{5}{4} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або}$$

$$-\frac{81}{64}K^2 + \frac{729}{256}K - \frac{405}{256} = 0, \text{ звідки } K = 1; \frac{5}{4}; \quad (5.2.4)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{8}K \\ \frac{9}{8}K & \frac{9}{8} \end{vmatrix} = 0, \text{ або } -\frac{81}{64}(K-1)K = 0, \text{ звідки } K = 0; 1, \quad (5.2.5)$$

показує, що крива f_1 при

- 1) $K \in (-2; -1) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 2\right)$ – це гіпербола (рис. 5.2.1, 5.2.7, 5.2.9);
- 2) $K = -1$ – парабола (рис. 5.2.2);
- 3) $K \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ – еліпс (рис. 5.2.3, 5.2.5);
- 4) $K = 0$ – коло (рис. 5.2.4);
- 5) $K = 1$ – розпадається на паралельні прямі 2-12 і 3-11 (рис. 5.2.6);
- 6) $K = \frac{5}{4}$ – розпадається на прямі, що перетинаються (рис. 5.2.8).

Аналіз ліній нульового рівня кутових базисних функцій показує, що за допомогою когнітивно-графічного методу побудови ієрархічних форм базисних функцій отримані нові базиси, які раніше не були відомі. Наприклад, новими є базисні функції, які містять гіперболи (рис. 5.2.1, 5.2.7, 5.2.9), еліпси (рис. 5.2.3). А відомі базиси отримуємо з кутової функції з параметром як окремі випадки при певних значеннях K (рис. 5.2.2, 5.2.4, 5.2.6, 5.2.8).

Аналогічно можна проаналізувати базисну функцію N_2 (5.2.2). Проаналізуємо криву, що записана в останній дужці базисної функції N_2 , для цього запишемо рівняння кривої у наступному вигляді:

$$f_2 = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{4}Kxy - \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}K\right)x - \frac{3}{4}Ky + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}K = 0. \quad (5.2.6)$$

Аналіз кривої f_2 проведемо за допомогою дискримінантів Δ і δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{3}{8}K & \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{4}K\right) \\ -\frac{3}{8}K & 0 & -\frac{3}{8}K \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{4}K\right) & -\frac{3}{8}K & \frac{3}{4} - \frac{3}{4}K \end{vmatrix} = 0, \text{ або } 0 \equiv 0; \quad (5.2.7)$$

$$\delta = \begin{vmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{3}{8}K \\ -\frac{3}{8}K & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } -\frac{9}{64}K^2 = 0, \text{ звідки } K = 0. \quad (5.2.8)$$

При будь-яких значеннях K крива f_2 розпадається на пряму 1-10 і пряму, що проходить через вузол 3 (на рис. 5.2.1-5.2.9 вона показана пунктиром).

Таблиця 5.2.1

Лінії нульового рівня (бікубічний елемент)

Рис. 5.2.1. Модифіковані базиси з гіперболами при $K \in (-2; -1)$ або при $p \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$	Рис. 5.2.2. Модифіковані базиси з параболою при $K = -1$ або при $p = -\frac{3}{8}$	Рис. 5.2.3. Модифіковані базиси з еліпсами при $K \in (-1; 0)$ або при $p \in \left(-\frac{3}{8}; -\frac{1}{8}\right)$

Закінчення таблиці 5.2.1

Рис. 5.2.4. Стандартний базис з колом при $K = 0$ або при $p = -\frac{1}{8}$	Рис. 5.2.5. Модифіковані базиси з еліпсами при $K \in (0; 1)$ або при $p \in \left(-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$	Рис. 5.2.6. Модифікований базис з двома паралельними прямими при $K = 1$ або при $p = \frac{1}{8}$
Рис. 5.2.7. Модифіковані базиси з гіперболами при $K \in \left(1; \frac{5}{4}\right)$ або при $p \in \left(\frac{1}{8}; \frac{3}{16}\right)$	Рис. 5.2.8. Модифікований базис з двома прямими, що перетинаються при $K = \frac{5}{4}$ або при $p = \frac{3}{16}$	Рис. 5.2.9. Модифіковані базиси з гіперболами при $K \in \left(\frac{5}{4}; 2\right)$ або при $p \in \left(\frac{3}{16}; \frac{1}{2}\right)$

Зауваження до таблиці 5.2.1. Комбінований алгебро-геометричний метод, у якому використовується змінна p , буде розглянутий у параграфі 5.6.

5.3. Узагальнення ймовірнісно-геометричного методу побудови базисних функцій бікубічного елемента

Узагальнимо процедуру побудови базису на ССЕ-12 за допомогою ймовірнісно-геометричного підходу.

Для побудови базисної функції N_1 ССЕ-12 можна розбити двома способами:

- 1) на квадрат 1-4-7-10 і трикутник $\Delta 1-2-12$;
- 2) на три трикутники: $\Delta 1-4-7$, $\Delta 1-7-10$ і $\Delta 1-2-12$ (рис. 5.3.1) (див. параграфи 1.3 і 2.3).

Зауваження. У загальному випадку трикутник $\Delta 1-2-12$ – криволінійний.

Оберемо перший спосіб розбиття. Ймовірність попадання навмання кинутої точки в протилежну вузлу 1 область квадрата 1-4-7-10, у відповідності з означенням геометричної ймовірності (формула (1.3.1)), дорівнює $\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$. На трикутнику $\Delta 1-2-12$, який має криволінійну гіпотенузу, скористаємося формулою (1.3.10). Якщо у загальному випадку взяти

$$\Phi_{\text{поточна}} = \frac{1}{8} \left(9(\xi^2 + \eta^2) + 18(K\xi\eta + K\xi + K\eta + K) - 10 \right),$$

$$\Phi_{\max} = 8, \Phi_{\min} = 0,$$

то

$$PL = \frac{9\xi^2 + 18K\xi\eta + 9\eta^2 + 18K\xi + 18K\eta + 18K - 10}{8 - 0} = N_1(\xi, \eta). \quad (5.3.1)$$

Добуток ймовірностей дає формулу, за якою можна отримувати базисні функції для вузла 1 при довільних значеннях K :

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} \cdot \frac{9\xi^2 + 18K\xi\eta + 9\eta^2 + 18K\xi + 18K\eta + 18K - 10}{8}. \quad (5.3.2)$$

Після перетворень маємо для вузла 1:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \left(\frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) + K \cdot \frac{9}{4} \cdot (1+\xi)(1+\eta) \right). \quad (5.3.3)$$

Для побудови базисної функції N_2 ССЕ-12 можна розбити двома способами:

- 1) на два прямокутника 2-4-7-9 і 2-9-10-1 та трикутник $\Delta 2 - 3 - P$;
- 2) на чотири трикутники: $\Delta 2 - 4 - 7$, $\Delta 2 - 7 - 10$, $\Delta 2 - 10 - 1$ і $\Delta 2 - 3 - P$ (рис. 5.3.2) (див. параграфи 1.3 та 2.3).

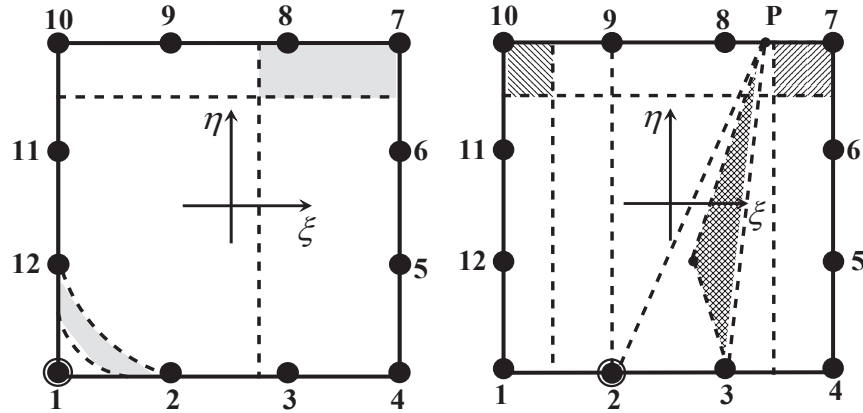


Рис. 5.3.1. До побудови N_1
(K – довільне)

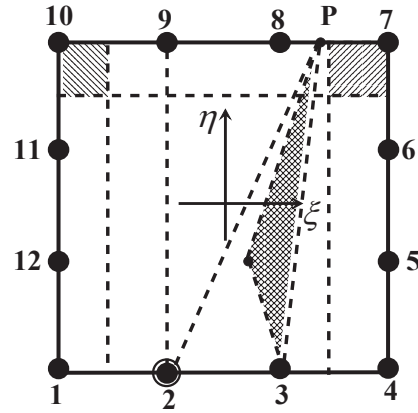


Рис. 5.3.2. До побудови N_2
(K – довільне)

Оберемо перший спосіб розбиття. Ймовірність попадання навмання вкинутої точки у протилежні вузлу 2 області прямокутників 2-4-7-9 і 2-9-10-1, у відповідності з означенням геометричної ймовірності (1.3.1), дорівнює $\frac{9}{16}(1-\xi^2)(1-\eta)$. На трикутнику $\Delta 2 - 3 - P$ скористаємося формулою (1.3.10) і отримаємо:

$$PL = \frac{(1-K-3\xi-K\eta)-0}{2-0} = \frac{1-K-3\xi-K\eta}{2} = N_2^{(3)}(\xi, \eta).$$

Тоді базисна функція для вузла 2 будується як добуток:

$$N_2 = \frac{9}{16}(1-\xi^2)(1-\eta) \left(\frac{1}{2}(1-3\xi) - K \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+\eta) \right). \quad (5.3.4)$$

Оберемо другий метод розбиття. Для побудови базисної функції N_1 розбиваємо СЕ на чотири трикутника: $\Delta 1 - 4 - 7$, $\Delta 1 - 7 - 10$, $\Delta 1 - 3 - 11$

і $\Delta 1 - 2 - 12$ зі спільною вершиною 1 (рис. 5.3.3). На кожному з трикутників будуємо базис лінійної інтерполяції за формулами:

$$N_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1-\xi); \quad N_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1-\eta);$$

$$N_1^{(3)} = \frac{1}{4}(-2-3\xi-3\eta), \quad N_1^{(4)} = \frac{1}{4}(-4-3\xi-3\eta). \quad (5.3.5)$$

За формулою добутку ймовірностей отримуємо:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(2+3\xi+3\eta)(4+3\xi+3\eta). \quad (5.3.6)$$

Для побудови N_2 розглянемо трикутники: $\Delta 2 - 4 - 7$, $\Delta 2 - 10 - 1$, $\Delta 2 - 3 - 9$ і $\Delta 2 - 3 - 10$ (рис. 5.3.4). Отримуємо відповідні ймовірності:

$$N_2^{(1)} = \frac{3}{4}(1-\xi), \quad N_2^{(2)} = \frac{3}{2}(1+\xi),$$

$$N_2^{(3)} = \frac{1}{2}(-3\xi-\eta), \quad N_2^{(4)} = \frac{1}{2}(1-\eta). \quad (5.3.7)$$

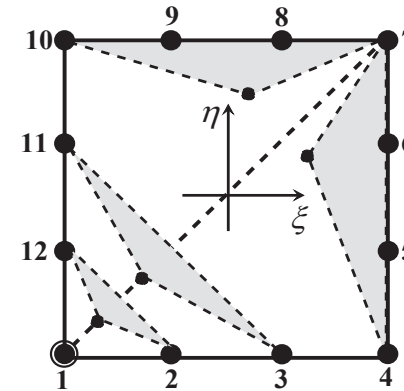


Рис. 5.3.3. До побудови N_1
базису ССЕ-12

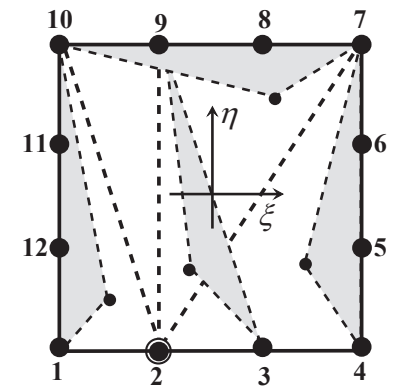


Рис. 5.3.4. До побудови N_2
базису ССЕ-12

За правилом добутку ймовірностей отримуємо

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} \cdot N_2^{(3)} \cdot N_2^{(4)} = \frac{9}{32} (1 - \xi^2) (1 - \eta) (-3\xi - \eta). \quad (5.3.8)$$

5.4. Узагальнення геометричного методу конструювання базисних функцій бікубічного елемента

Узагальнення геометричного методу відбувається за допомогою формул (5.1.1) і (5.1.2). У цьому випадку при побудові функції N_1 формулу (5.1.1) можна записати наступним чином:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \left(\frac{1}{8} (9\xi^2 + 9\eta^2 + 18K\xi\eta + 18K\xi + 18K\eta - 10) \right). \quad (5.4.1)$$

Базисна функція N_1 будується з поверхонь:

1) гіперболічного параболоїда $N_1^{(1)}$, що проходить через сторони квадрата 4-7, 7-10 і точку $(-1; -1; 1)$ (рис. 4.2.11 а):

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta);$$

2) та поверхні другого порядку (рис. 5.4.1 – 5.4.9), зведені в табл. 5.4.1.

$$N_1^{(2)} = \left(\frac{1}{8} (9\xi^2 + 9\eta^2 + 18K\xi\eta + 18K\xi + 18K\eta - 10) \right),$$

яка завжди проходить через вузли 2, 3, 11, 12 та точку $(-1; -1; 1)$:

при $K = (-2; -1) \cup (1; 2)$ – це гіпар $N_1^{(2)}$ (рис. 5.4.1, 5.4.7, 5.4.8, 5.4.9);

при $K = -1$ – параболічний циліндр $N_1^{(2)}$ (рис. 5.4.2);

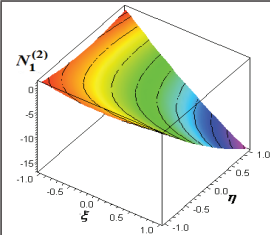
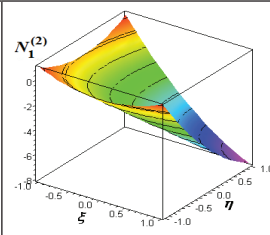
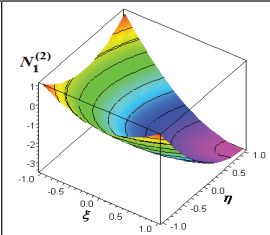
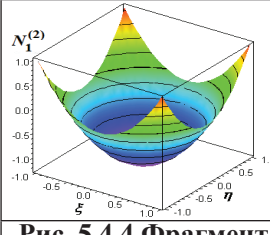
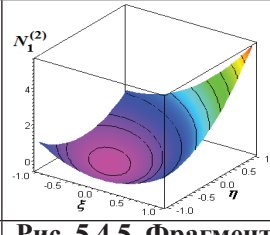
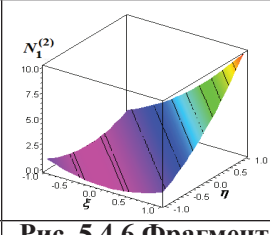
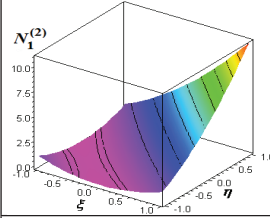
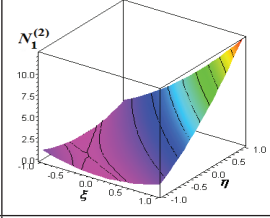
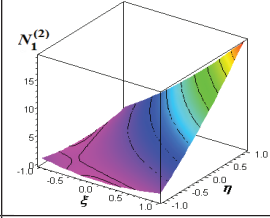
при $K \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ – еліптичний параболоїд $N_1^{(2)}$ (рис. 5.4.3, 5.4.5);

при $K = 0$ – параболоїд обертання $N_1^{(2)}$ (рис. 5.4.4);

при $K = 1$ – параболічний циліндр $N_1^{(2)}$, який розпадається на дві площини (рис. 5.4.6).

Таблиця. 5.4.1

Поверхні другого порядку (бікубічний елемент)

		
Рис. 5.4.1. Фрагмент поверхні гіпара $N_1^{(2)}$ при $K = (-2; -1)$ або $p \in (-0,5; 0,375)$	Рис. 5.4.2. Фрагмент поверхні параболічного циліндра $N_1^{(2)}$ при $K = -1$ або $p = -0,375$	Рис. 5.4.3. Фрагмент еліптичного параболоїда $N_1^{(2)}$ при $K \in (-1; 0)$ або $p \in (-0,375; -0,125)$
		
Рис. 5.4.4. Фрагмент параболоїда обертання $N_1^{(2)}$ при $K = 0$ або $p = -0,125$	Рис. 5.4.5. Фрагмент еліптичного параболоїда $N_1^{(2)}$ при $K \in (0; 1)$ або $p \in (-0,125; 0,125)$	Рис. 5.4.6. Фрагмент параболічного циліндра $N_1^{(2)}$ при $K = 1$ або $p = 0,125$
		
Рис. 5.4.7. Фрагмент $N_1^{(2)}$ при $K \in (1; 1,25)$ або $p \in (0,125; 0,1875)$	Рис. 5.4.8. Фрагмент гіпара $N_1^{(2)}$ при $K = 1,25$ або $p = 0,1875$	Рис. 5.4.9. Фрагмент $N_1^{(2)}$ при $K \in (1,25; 2)$ або $p \in (0,1875; 0,5)$

Зауваження до таблиці 5.4.1.

Змінна p використовується у комбінованому алгебро-геометричному методі, який буде розглянуто у параграфі 5.6.

Для базисної функції N_2 в якості множників візьмемо чотири рівняння площин, одне з яких теж містить параметр K :

$$N_2 = N_2^{(1)} \cdot N_2^{(2)} \cdot N_2^{(3)} \cdot N_2^{(4)} = \frac{3}{4}(1-\xi) \cdot \frac{1}{2}(1-\eta) \cdot \frac{3}{2}(1+\xi) \cdot \frac{1}{2}(2-K-K\eta-3K\xi). \quad (5.4.2)$$

За допомогою узагальненого геометричного методу можна побудувати безліч базисів на ССЕ-12, використовуючи формули (5.4.1), (5.4.2) при довільних значеннях K .

5.5. Модифікація методу Тейлора на ССЕ-12

Отримані за допомогою когнітивно-графічного методу конструювання ієрархічних форм базисних функцій проміжні базисні функції з коефіцієнтом K використовуємо у модифікованому методі Тейлора на ССЕ-12. Для побудови функції $N_1(\xi, \eta)$ утворимо лінійну комбінацію функції білінійної інтерполяції $\bar{N}_1(\xi, \eta)$ та проміжних базисних функцій для вузлів 2, 3, 11, 12 (відповідно формули (5.1.4) та (5.1.5)). Вибір вагових коефіцієнтів лінійної комбінації обумовлюється інтерполяційною гіпотезою Лагранжа (рис. 4.1.2):

$$N_1(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta) - \frac{2}{3}(N_2 + N_{12}) - \frac{1}{3}(N_3 + N_{11}). \quad (5.5.1)$$

Після нескладних перетворень отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1^{(s)} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \left(\frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) + K \cdot \frac{9}{4} \cdot (1+\xi)(1+\eta) \right). \quad (5.5.2)$$

Як бачимо, (5.5.2) співпадає з (5.1.1).

5.6. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису ССЕ-12 (обернена задача з параметром)

При побудові базисних функцій ССЕ-12 використаємо новий комбінований алгебро-геометричний метод, що був описаний у параграфі 3.1 [2]. Базисні функції будемо шукати у вигляді:

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta + 1), \quad (5.6.1)$$

$$N_2 = k_2(1-\xi^2)(1-\eta)(F\xi + G\eta + 1). \quad (5.6.2)$$

Система рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів (5.6.3) будуватиметься аналогічно системі (4.5.3), єдиною відмінністю є параметр p у правій частині останніх двох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 3, 11, 12; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 3; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_1 d\xi d\eta &= p; \\ \iint_{\omega} \frac{1}{4} N_2 d\xi d\eta &= p_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} p. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.3)$$

Для запису правої частини останнього рівняння системи (5.6.3) використане співвідношення $4p + 4p = 1$, звідки $p_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} p$.

Розв'язки системи (5.6.3) дозволяють записати базисні функції, які залежать від параметра p :

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9x^2 + 9y^2 + (72p+9)(xy + x + y) + 72p - 1), \quad (5.6.4)$$

$$N_2 = \frac{9}{64}(1-x^2)(1-y)((1-8p) - 6x - (8p+1)y). \quad (5.6.5)$$

Отримані базисні функції задовольняють властивостям 1-5 (параграф 2.1).

Запишемо базисні функції $N_1(\xi, \eta)$ та $N_2(\xi, \eta)$ у вигляді:

$$N_1 = \left(\frac{9}{4}p - \frac{1}{32} \right) + \frac{5}{16}\xi + \frac{5}{16}\eta - \frac{9}{4}p\xi^2 - \frac{5}{16}\xi\eta - \frac{9}{4}p\eta^2 - \frac{9}{32}\xi^3 - \frac{9}{32}\xi^2\eta - \frac{9}{32}\xi\eta^2 - \frac{9}{32}\eta^3 + \frac{9}{32}\xi^3\eta + \frac{9}{32}\xi\eta^3 + \left(\frac{9}{32} + \frac{9}{4}p \right)\xi^2\eta^2; \quad (5.6.6)$$

$$N_2 = \left(\frac{9}{64} - \frac{9}{8}p \right) - \frac{27}{32}\xi - \frac{9}{32}\eta + \left(\frac{9}{8}p - \frac{9}{64} \right)\xi^2 + \frac{27}{32}\xi\eta + \left(\frac{9}{8}p + \frac{9}{64} \right)\eta^2 - \frac{27}{32}\xi^3\eta + \left(-\frac{9}{8}p - \frac{9}{64} \right)\xi^2\eta^2. \quad (5.6.7)$$

Аналіз формул (5.6.6) і (5.6.7) показує, що, змінюючи p , отримуємо безліч базисів на ССЕ-12, які мають 13-й ступінь волі $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$ (схема Паскаля наведена у табл. 5.1.1).

При $p = -\frac{1}{8}$ зникає $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$ і отримуємо стандартний базис (4.1.2)-(4.1.4) (табл. 5.1.1).

Узагальнені формули для 13-параметричних базисів, які отримані за допомогою комбінованого алгебро-геометричного методу для ССЕ-12 мають вигляд:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) \times \\ \times (9(\xi^2 + \eta^2) + 9(8p+1)(\xi_i\xi\eta_i\eta - \xi_i\xi - \eta_i\eta) + 72p - 1), \\ i = 2, 3, 8, 9; \xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1. \quad (5.6.8)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(18\xi_i\xi + (8p+1)\eta_i\eta + 1 - 8p), \\ i = 2, 3, 8, 9; \xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i = \pm 1. \quad (5.6.9)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{64}(1 - \eta^2)(1 + \xi_i\xi)(18\eta_i\eta + (8p+1)\xi_i\xi + 1 - 8p), \\ i = 5, 6, 11, 12; \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm \frac{1}{3}. \quad (5.6.10)$$

Зауваження. Від формул алгебро-геометричного методу (5.6.8)-(5.6.10) можна перейти до формул когнітивно-графічного методу побудови ієрархічних базисів СЕ (5.1.3)-(5.1.5) за допомогою підстановки:

$$p = p_1(K) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}K. \quad (5.6.11)$$

Зауваження. Аналіз ліній нульового рівня у формулах (5.6.8)-(5.6.10) аналогічний тому, який був зроблений у параграфі 5.2, дає проміжки для параметра p , які наведені на рис. 5.2.1-5.2.9.

5.7. Побудова базисних функцій ССЕ-12, які задовольняють критеріям гармонічності

Покажемо процедуру побудови базисних функцій, які задовольняють критеріям гармонічності на бікубічному скінченному елементі. На ССЕ-12 базисні функції будемо шукати у вигляді:

$$N_1 = k_1(1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta + 1). \quad (5.7.1)$$

$$N_2 = k_2(1 - \xi^2)(1 - \eta)(F\xi + G\eta + 1). \quad (5.7.2)$$

Використаємо **інтегральний критерій Привалова** для дискретного елемента [6; 15; 60] (формула (1.6.9)). Систему рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 3, 11, 12; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 3; \\ \frac{1}{4} \iint_{\omega} N_1 d\xi d\eta &= N_1(0, 0) = k_1; \\ \frac{1}{4} \iint_{\omega} N_2 d\xi d\eta &= N_2(0, 0) = k_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.3)$$

Система має єдиний розв'язок, тобто існують функції, які задовольняють критерію Привалова:

$$N_1 = \frac{1}{160}(1-\xi)(1-\eta)(45\xi^2 + 45\eta^2 + 54\xi\eta + 54\xi + 54\eta + 4). \quad (5.7.4)$$

$$N_2 = \frac{9}{160}(1-\xi^2)(1-\eta)(2-15\xi-3\eta). \quad (5.7.5)$$

Повузлові навантаження рівномірної масової сили (обчислені за формулою (2.1.3)) для кутових функцій цього базису дорівнюють $\frac{1}{40}$, для проміжних – $\frac{9}{80}$.

У системі (5.7.3) замість критерію Привалова можна використати **інтегральний критерій Кьобе** [6; 15; 60] (формула (1.6.10)).

Систему рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 2, 3, 11, 12; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 1, \quad k = 2; \\ N_2(\xi_k, \eta_k) &= 0, \quad k = 3; \\ \frac{1}{8} \oint N_1 dl &= N_1(0,0) = k_1; \\ \frac{1}{8} \oint N_2 dl &= N_2(0,0) = k_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.6)$$

Система має розв'язок:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 + 12\xi\eta + 12\xi + 12\eta + 2). \quad (5.7.7)$$

$$N_2 = \frac{3}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-9\xi-2\eta). \quad (5.7.8)$$

Повузлові навантаження рівномірної масової сили (2.1.3) для кутових функцій цього базису дорівнюють $\frac{1}{24}$, для проміжних – $\frac{5}{48}$.

Перевірка показує, що на ССЕ-12 неможливо побудувати поліноміальні базисні функції, які б задовольняли диференціальному критерію Лапласа (1.6.8) і гіпотезі Лагранжа одночасно.

5.8. Багатопараметричні моделі на ССЕ-12 (14, 15, 16 параметрів)

При лагранжевій інтерполяції ставиться задача «побудувати інтерполяційний поліном як можна нижчого степеня...» [22]. Якщо зняти це обмеження при побудові серендипового інтерполяційного полінома, то на одному скінченному елементі можна побудувати безліч базисних функцій. Ще у 1959 р. Березін І.С. і Жидков М.П. у першому виданні книги [13] зауважили, що зовсім не обов'язково вимагати, щоб порядок інтерполяційного полінома був найменший, можна розглядати такі системи вузлів, для яких розв'язок поставленої задачі не буде єдиним.

Серендипів поліном займає проміжне положення між повним поліномом і лагранжевим. Деякі автори вважають [39], що **серендипів поліном n -го порядку** – це неповний поліном $\varphi(\xi, \eta)$ $(n+1)$ -го порядку. Інші автори [16; 23], які згадують про існування ієрархічних форм базисних функцій, вважають, що при побудові **серендипового полінома n -го порядку** можна використовувати мономи більш високих порядків $(n+2), (n+3), \dots$. Покажемо, як будувати на ССЕ-12 багатопараметричні моделі, які мають 14, 15 і 16 параметрів (рис. 5.8.1) [1; 83].

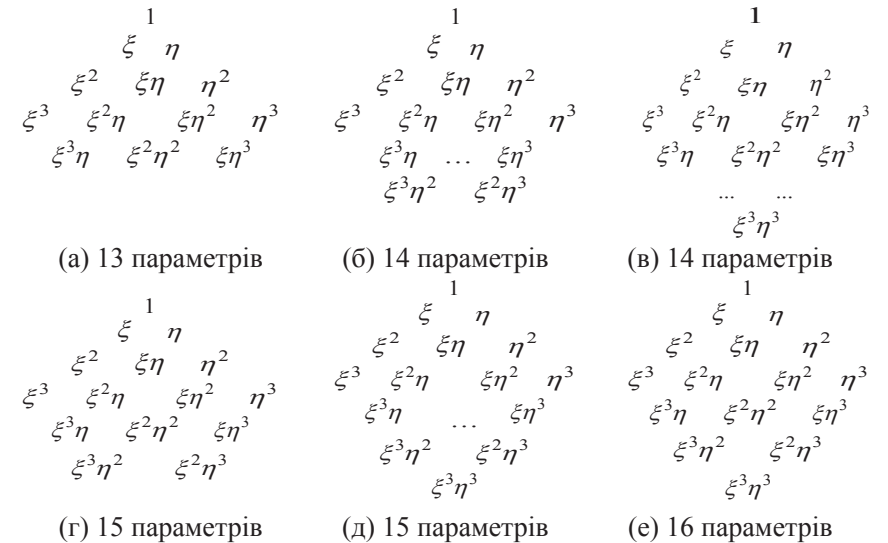


Рис. 5.8.1. Схема Паскаля для суперпараметричних поліномів ССЕ-12

Конструювання інтерполяційних поліномів бікубічного СЕ з 14 і 15 параметрами

Для побудови 15-параметричного інтерполяційного поліному функції форми для вузлів 1 і 2 можна записати у вигляді:

$$N_1 = K_1 (1 - \xi)(1 - \eta)(A\xi\eta + B\xi + C\eta + 1)(D\xi + E\eta + 1), \quad (5.8.1)$$

$$N_2 = K_2 (1 - \xi^2)(1 - \eta)(F\xi + G\eta + 1). \quad (5.8.2)$$

У цьому випадку система (5.6.3) має чотири розв'язки: два симетричні випадки (пряма $D\xi + E\eta + 1 = 0$ проходить через вузли 2-12 або 3-11) та два несиметричні випадки (пряма $D\xi + E\eta + 1 = 0$ проходить через вузли 2-11 або 3-12). Запишемо базисні функції $N_1(\xi, \eta)$, $N_2(\xi, \eta)$ для одного з симетричних випадків:

$$N_1 = \frac{1}{128} (1 - \xi)(1 - \eta)(3\xi + 3\eta + 4) \times \\ \times (9(8p - 1)\xi\eta + 3(24p + 1)\xi + 3(24p + 1)\eta + (72p - 1)). \quad (5.8.3)$$

$$N_2 = \frac{9}{64} (1 - \xi^2)(1 - \eta)(-6\xi - (8p + 1)\eta + 1 - 8p). \quad (5.8.4)$$

Змінюючи p , отримуємо безліч 15-параметричних базисів, які задовольняють властивостям 1-4.

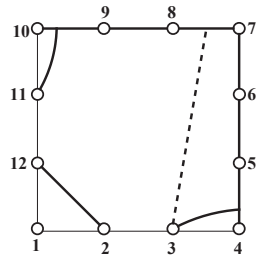
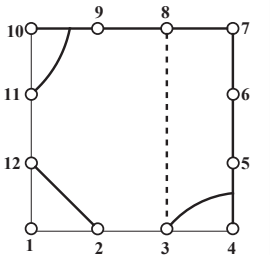
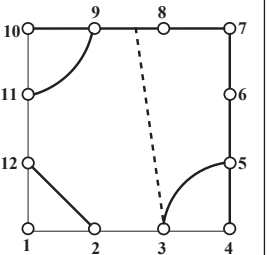
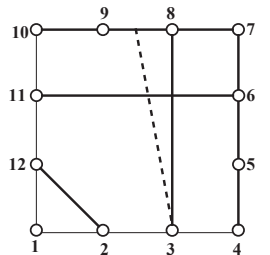
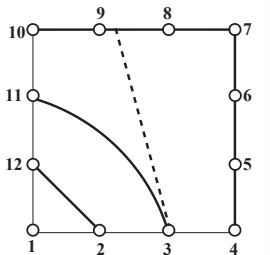
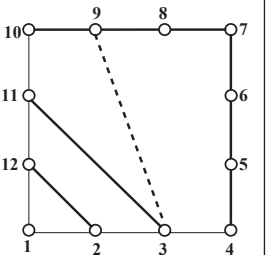
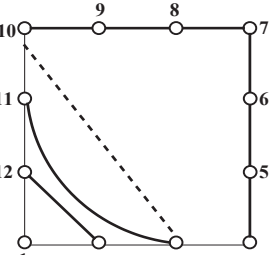
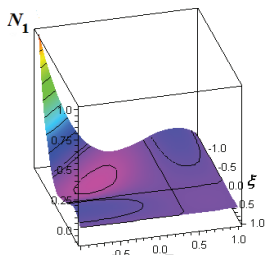
Цікавим видається аналіз і візуалізація ліній нульового рівня – ліній перетину утворюючих функцію поверхонь та площини елемента. Лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ (суцільні лінії) і $N_2(\xi, \eta)$ (пунктир) показані на рис. 5.8.2–5.8.8 (табл. 5.8.1).

Проведена пунктиром пряма на всіх рисунках – це лінія нульового рівня для N_2 яка утворена останнім множником у формулі (5.8.4). Перші дужки у (5.8.4) – це сторони квадрата 4-7, 7-10, 10-1.

При $p = -0,125$ поліном має 14 параметрів (рис. 5.8.1 б), тому що зникає доданок $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$, лінії рівня для цього базису показані на рис. 5.8.3. Якщо $p = 0,125$ (рис. 5.8.7), отримаємо базис з 13 параметрами, цей базис відомий як *модель з паралельними прямими*. У всіх останніх випадках поліном має 15 параметрів. Наприклад, на рис. 5.8.6 показані лінії рівня 15-параметричного базису, який був отриманий геометричним методом і названий *модель з прямою та гіперболою*.

Таблиця 5.8.1

Лінії нульового рівня (симетричний випадок)

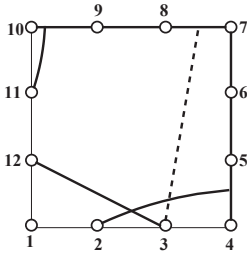
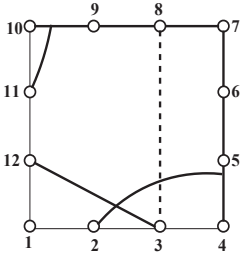
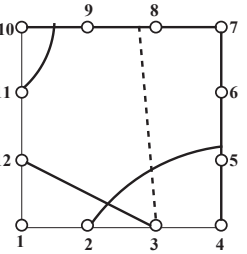
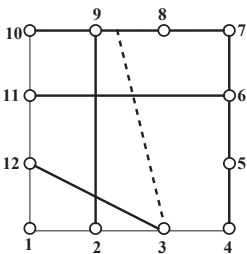
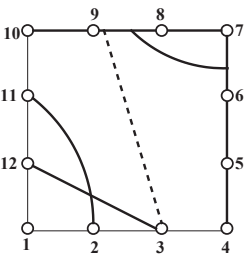
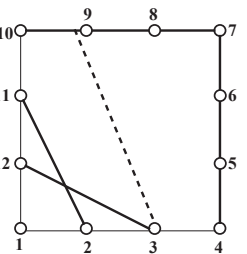
		
Рис. 5.8.2. 15-параметричний базис при $p \in (-0,5; -0,125)$	Рис. 5.8.3. 14-параметричний базис при $p = -0,125$	Рис. 5.8.4. 15-параметричний базис при $p \in (-0,125; 0)$
		
Рис. 5.8.5. 15-параметричний базис при $p = 0$	Рис. 5.8.6. 15-параметричний базис при $p \in (0; 0,125)$	Рис. 5.8.7. 13-параметричний базис при $p = 0,125$
		
Рис. 5.8.8. 15-параметричний базис при $p \in (0,125; 0,5)$	Рис. 5.8.9. Графік $N_1(\xi, \eta)$ 15-параметричного базису ССЕ-12 при $p = 0$ (з геометричною ізотропією)	

Один із несиметричних випадків:

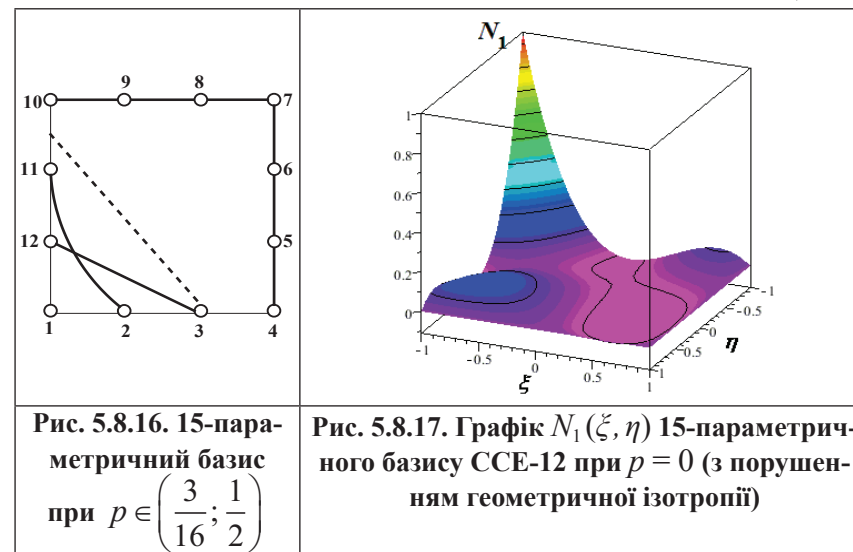
$$N_1 = \frac{1}{320}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi+6\eta+5) \times (9(16p-3)\xi\eta+3(48p+1)\xi+12(24p-1)\eta+2(72p-1)). \quad (5.8.5)$$

Лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ (суцільні лінії) і $N_2(\xi, \eta)$ (пунктир) для цього випадку показані на рис. 5.8.10-5.8.16 (табл. 5.8.2).

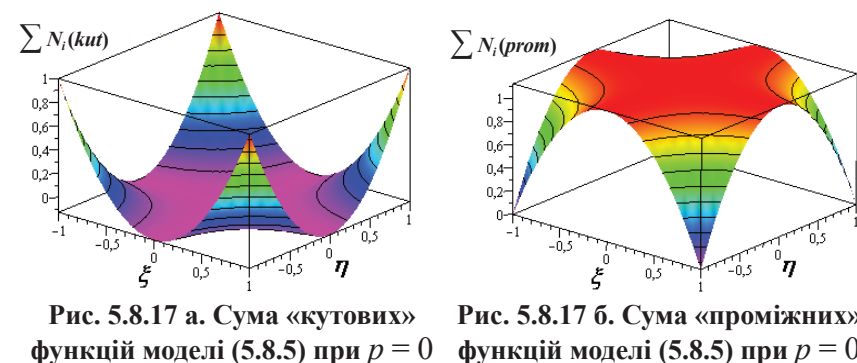
Таблиця 5.8.2

Лінії нульового рівня (несиметричний випадок)		
		
Рис. 5.8.10. 15-параметричний базис при $p \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$	Рис. 5.8.11. 14-параметричний базис при $p = -\frac{1}{8}$	Рис. 5.8.12. 15-параметричний базис при $p \in \left(-\frac{1}{8}; \frac{1}{32}\right)$
		
Рис. 5.8.13. 15-параметричний базис при $p = \frac{1}{32}$	Рис. 5.8.14. 15-параметричний базис при $p \in \left(\frac{1}{32}; \frac{3}{16}\right)$	Рис. 5.8.15. 13-параметричний базис при $p = \frac{3}{16}$

Закінчення таблиці 5.8.2



Зауважимо, що 14-параметричну модель (рис. 5.8.11) отримуємо при тому ж значенні $p = -0,125$, що і у симетричному випадку. Якщо $p = \frac{3}{16}$ (рис. 5.8.15), то отримуємо базис з 13 параметрами, який раніше був названий *модель з прямими, що перетинаються*. У решті випадків поліном має 15 параметрів.



Зауваження. Вперше виявлено явище порушення геометричної ізоотропії «кутової» функції всередині елемента. При цьому на границях елемента геометрична ізоотропія зберігається [39]. Зауважимо, що порушення геометричної ізоотропії всередині елемента не приводить до небажаних наслідків, оскільки аномалії однієї базисної функції анулюються аномаліями іншої функції форми, і це демонструють суми відповідних «кутових» і «проміжних» функцій (рис. 5.8.17 а-5.8.17 б). Таким чином, зберігається геометрична ізоотропія інтерполяційного полінома (властивість 4, параграф 2.1).

Конструювання інтерполяційних поліномів бікубічного ССЕ з 16 параметрами

І спосіб. Не порушуючи умову, що на границі СЕ поліном кубічний, $N_1(\xi, \eta)$ можна записати як добуток лінійних і квадратичних множників:

$$N_1 = K_1(1-\xi)(1-\eta)(A\xi\eta + B\xi + B\eta + 1)(C\xi\eta + D\xi + E\eta + 1). \quad (5.8.6)$$

При цьому система (5.6.3) має два розв'язки, що дає можливість $N_1(\xi, \eta)$ записати у двох варіантах:

$$N_1 = \frac{1}{32(E-1)}(1-\xi)(1-\eta)((4E-3)\xi\eta + E(\xi + \eta) + 1) \times \quad (5.8.7)$$

$$((72Ep - E - 72p + 3)\xi\eta + (72Ep - E - 72p)(\xi + \eta) + (72p - 1)(E - 1)).$$

Або

$$N_1 = \frac{1}{32(E-1)}(1-\xi)(1-\eta)((-2E+3)\xi\eta + E(\xi + \eta) + 1) \times \quad (5.8.8)$$

$$((72Ep - E - 72p - 3)\xi\eta + (72Ep - E - 72p)(\xi + \eta) + (72p - 1)(E - 1)).$$

Отримані розв'язки (5.8.7) і (5.8.8) є функціями від p і одного з коефіцієнтів (наприклад, E). Змінюючи коефіцієнт E , можна отримати безліч базисів з 16 параметрами (рис. 5.8.1 е) для одних і тих же значень p . Розглянемо випадок, коли у формулі (5.8.8) $E = 2$:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)((72p-5)\xi\eta + (72p-2)(\xi + \eta) + (72p-1)) \times (-\xi\eta + 2\xi + 2\eta + 1). \quad (5.8.9)$$

Після нескладних перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned} N_1 = & \left(\frac{9}{4}p - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{9}{2}p - \frac{3}{32}\right)\xi + \left(\frac{9}{2}p - \frac{3}{32}\right)\eta - \frac{9}{4}p\xi^2 - \frac{9}{4}p\eta^2 + \\ & + \left(-\frac{9}{4}p - \frac{5}{32}\right)\xi\eta + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi^3 + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi^2\eta + \\ & + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\xi\eta^2 + \left(-\frac{9}{2}p + \frac{1}{8}\right)\eta^3 + \left(\frac{9}{4}p + \frac{1}{8}\right)\frac{9}{32}\xi^3\eta + \\ & + \left(\frac{9}{4}p + \frac{1}{8}\right)\frac{9}{32}\xi\eta^3 + \left(\frac{9}{4}p + \frac{9}{32}\right)\xi^2\eta^2 + \left(\frac{9}{2}p - \frac{13}{32}\right)\xi^3\eta^2 + \\ & + \left(\frac{9}{16}p - \frac{13}{32}\right)\xi^2\eta^3 + \left(-\frac{9}{4}p + \frac{5}{32}\right)\xi^3\eta^3. \end{aligned} \quad (5.8.10)$$

Лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ (суцільні лінії) і $N_2(\xi, \eta)$ (пунктирна лінія) для цього випадку показані на рис. 5.8.18-5.8.23 (табл. 5.8.3).

Таблиця 5.8.3

Лінії нульового рівня (16-параметричний базис)

Рис. 5.8.18. 16-параметричний базис при $p \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{144}\right)$	Рис. 5.8.19. 15-параметричний базис при $p = -\frac{1}{8}$	Рис. 5.8.20. 16-параметричний базис при $p = \frac{1}{144}$

Закінчення таблиці 5.8.3

Рис. 5.8.21. 16-параметричний базис при $p \in \left(\frac{1}{144}; \frac{5}{72}\right)$	Рис. 5.8.22. 16-параметричний базис при $p = \frac{5}{72}$	Рис. 5.8.23. 16-параметричний базис при $p \in \left(\frac{5}{72}; \frac{1}{2}\right)$

Як і в попередніх випадках, при $p = -\frac{1}{8}$ (рис. 5.8.19) кількість параметрів полінома (5.8.10) зменшується, він стає 15-параметричним – зникає доданок $\alpha_{13}\xi^2\eta^2$. Отриманий при цьому поліном має схему Паскаля рис. 5.8.1 д. При $p = \frac{13}{144}$ зникають доданки $\alpha_{14}\xi^3\eta^2$ і $\alpha_{15}\xi^2\eta^3$, у поліномі залишається 14 параметрів (схема Паскаля на рис. 5.8.1 в).

Посіб. Не порушуючи умови зміни функції форми вздовж сторони квадрата по закону кубічної параболи, можна представити $N_1(\xi, \eta)$ та $N_2(\xi, \eta)$ у вигляді:

$$N_1 = K_1(1-\xi)(1-\eta) \times (1 + A(\xi + \eta) + B(\xi^2 + \eta^2) + C\xi\eta + D(\xi^2\eta + \xi\eta^2) + E\xi^2\eta^2). \quad (5.8.11)$$

$$N_2 = K_2(1-\xi^2)(1-\eta)(F\xi + G\eta + 1). \quad (5.8.12)$$

З такими $N_1(\xi, \eta)$ та $N_2(\xi, \eta)$ інтерполяційний поліном буде мати 16 параметрів, симетрично розташованих в трикутнику Паскаля (рис. 5.8.1 е):

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^3 + \\ & + \alpha_8\xi^2\eta + \alpha_9\xi\eta^2 + \alpha_{10}\eta^3 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3 + \\ & + \alpha_{13}\xi^2\eta^2 + \alpha_{14}\xi^3\eta^2 + \alpha_{15}\xi^2\eta^3 + \alpha_{16}\xi^3\eta^3. \end{aligned} \quad (5.8.13)$$

Невідомі коефіцієнти в (5.8.11) та (5.8.12) знайдемо, розв'язавши систему (5.6.3). Її розв'язок є функцією двох коефіцієнтів і параметра p , що дозволяє записати $N_1(\xi, \eta)$ та $N_2(\xi, \eta)$ у загальному вигляді:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) = & \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta) \cdot ((72p-1) + (72p-1)(C-D)(\xi + \eta) + \\ & + (-72p-C+72pC+D-72pD)(\xi^2 + \eta^2) + (72p-1)C\xi\eta + \\ & + (72p-1)D(\xi^2\eta + \xi\eta^2) + (9+72p+C-72pC-2D+144pD)\xi^2\eta^2); \end{aligned} \quad (5.8.14)$$

$$N_2(\xi, \eta) = -\frac{9}{64}(1-\xi^2)(1-\eta)(6\xi + (8p+1)\eta + 8p-1). \quad (5.8.15)$$

Змінюючи значення коефіцієнтів C і D , ми можемо конструювати нескінченну множину базисів для одних і тих же значень p . Всі ці базиси відповідають гіпотезі типу Лагранжа, умові збереження вагового балансу і дозволяють записати 16-параметричний поліном типу (5.8.13).

Щоб детально проаналізувати отриманий розв'язок, розкриємо в (5.8.14) всі дужки і перетворимо до вигляду (5.8.13). Коефіцієнти α_i набувають наступних значень (для спрощення запису у всіх коефіцієнтах множник $\frac{1}{32}$ відсутній):

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 72p-1; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -72p+1-C+D+72pC-72pD; \\ \alpha_4 = \alpha_6 = -72p; \quad \alpha_5 = 72p-1+C-2D-72pC+144pD; \\ \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10} = 72p+C-D-72pC+72pD; \\ \alpha_{11} = \alpha_{12} = -72p-C+2D+72pC-144pD; \quad \alpha_{13} = 72p+9; \\ \alpha_{14} = \alpha_{15} = -72p-9-C+D+72pC-72pD; \\ \alpha_{16} = 72p+9+C-2D-72pC+144pD. \end{aligned} \quad (5.8.16)$$

Аналогічна процедура для $N_2(\xi, \eta)$ дозволяє визначити, що ця функція не вносить додаткових членів в загальний поліном:

$$N_2 = \left(\frac{9}{64} - \frac{9}{8}p \right) - \frac{27}{32}\xi - \frac{9}{32}\eta + \left(\frac{9}{8}p - \frac{9}{64} \right)\xi^2 + \frac{27}{32}\xi\eta + \left(\frac{9}{8}p + \frac{9}{64} \right)\eta^2 - \frac{27}{32}\xi^3\eta + \left(-\frac{9}{8}p - \frac{9}{64} \right)\xi^2\eta^2. \quad (5.8.17)$$

До того ж, $N_2(\xi, \eta)$ не залежить від параметрів C і D , тому буде залишатися незмінною при подальшому аналізі різних варіантів $N_1(\xi, \eta)$.

При довільних комбінаціях C і D в (5.8.14) інтерполяційний поліном (5.8.13) буде мати 16 параметрів. Наприклад, якщо $C = 0$ і $D = 0$:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)\left((72p+9)\xi^2\eta^2 - 72p(\xi^2 + \eta^2) + 72p - 1\right). \quad (5.8.18)$$

В $N_1(\xi, \eta)$ перші дві дужки – це сторони квадрата 4-7 та 7-10, протилежні першому вузлу. Тип лінії в останніх дужках буде змінюватись в залежності від кількості параметрів, структури цього множника та значення p .

Лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ варіанта (5.8.18) при різних значеннях параметра p – на рис. 5.8.24-5.8.29 (табл. 5.8.4).

Таблиця 5.8.4

Лінії нульового рівня («симетричний» 16-параметричний базис)

Рис. 5.8.24. 16-параметричний базис при $p = -\frac{1}{2}$	Рис. 5.8.25. 16-параметричний базис при $p = -\frac{1}{4}$	Рис. 5.8.26. 12-параметричний базис при $p = -\frac{1}{8}$

Закінчення таблиці 5.8.4

Рис. 5.8.27. 16-параметричний базис при $p = -\frac{5}{144}$	Рис. 5.8.28. 16-параметричний базис при $p = 0$	Рис. 5.8.29. 16-параметричний базис при $p = \frac{1}{48}$

Зауважимо, що при $p = -0,125$ (рис. 5.8.26) кількість параметрів зменшується до 12 і отриманий при цьому базис – це стандартний базис (4.1.4)-(4.1.5). В загальному випадку останній множник (5.8.11) (крива четвертого порядку) не розкладається на два квадратичні множники. Однак можна знайти умову, при виконанні якої це стає можливим. При цьому коефіцієнти C і D перестають бути незалежними, а повинні одночасно залежати від деякої змінної λ :

$$C = \frac{(288p-6)\lambda - 288p}{(72p-1)(\lambda-1)}; D = -\frac{216p+72p\lambda^2 - \lambda^2 - 288p\lambda + 6\lambda}{(72p-1)(\lambda-1)},$$

тоді $N_1(\xi, \eta)$ набуває вигляду:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta) \left[72p-1 + \left((72p-1)(\lambda+1) - \frac{1}{\lambda-1} \right) (\xi+\eta) + \left(72p\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda-1} \right) (\xi^2 + \eta^2) + \left(288p - \frac{6\lambda}{\lambda-1} \right) \xi\eta - \left(72p\lambda - \lambda + 5 - 216p + \frac{5}{\lambda-1} \right) (\xi^2\eta + \xi\eta^2) + \left(-144p\lambda + 2\lambda + 216p + 5 - \frac{4}{\lambda-1} \right) \xi^2\eta^2 \right]. \quad (5.8.19)$$

В цьому випадку множник в квадратних дужках розкладається на два множники, утворюючи добуток двох гіпербол:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)((-2\lambda+3)\xi\eta + \lambda(\xi+\eta)+1) \times \\ \times \left(\left(72p - \frac{\lambda+3}{\lambda-1} \right) \xi\eta + \left(72p - \frac{\lambda}{\lambda-1} \right) (\xi+\eta) + 72p-1 \right). \quad (5.8.20)$$

Знайдений розв'язок є функцією довільного параметра λ , змінюючи значення якого, змінюємо характеристики гіпербол і отримуємо нескінченну множину **16-параметричних** базисів з двома гіперболами, тобто отримуємо функцію (5.8.8.). Наприклад, при $\lambda = 2$ отримуємо (5.8.9):

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)((72p-5)\xi\eta + (72p-2) \times \\ (\xi+\eta) + (72p-1)) \times (-\xi\eta + 2\xi + 2\eta + 1). \quad (5.8.21)$$

Лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ і $N_2(\xi, \eta)$ (пунктирна лінія) цього базису зображені на рис. 5.8.18-5.8.23.

Зауважимо, що для того, щоб зменшити кількість параметрів полінома, до системи (5.6.3) треба додати умови, при яких коефіцієнти в (5.8.16) дорівнюють нулю. При цьому треба пам'ятати, що в схемі Паскаля (рис. 5.8.1) елементи повинні бути розташовані симетрично.

Для отримання **15-параметричного** базису до (5.6.3) додаємо умову $\alpha_{16} = 0$. Отримуємо нескінченну множину базисів:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta) \left((72pD - D + 9)(\xi^2 + \eta^2) + \right. \\ \left. + (72pD - D + 72p + 9)(\xi + \eta) + (144pD - 2D + \right. \quad (5.8.22) \\ \left. + 72p + 9)\xi\eta + (72p-1)(D\xi^2\eta + D\xi\eta^2 + 1) \right).$$

Вираз в квадратних дужках може розпадатися на два множники.

Якщо $D = \frac{27}{4} \cdot \frac{8p-1}{72p-1}$, то $N_1(\xi, \eta)$ набуває вигляду:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{128}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi + 3\eta + 4) \times \\ \times (9(8p-1)\xi\eta + 3(24p+1)\xi + 3(24p+1)\eta + (72p-1)). \quad (5.8.23)$$

Якщо $D = \frac{27}{2} \cdot \frac{8p-1}{72p-1}$, то

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi + 3\eta + 2) \times \\ \times (9(8p-1)\xi\eta + 3(24p-1)(\xi + \eta) + (72p-1)). \quad (5.8.24)$$

Серед цієї множини розв'язків знаходяться і наведені раніше дві моделі з гіперболами (рис. 4.2.8, 4.2.10).

Для інших D крива в квадратних дужках **не розпадається** на пряму та криву другого порядку (основна теорема алгебри виконується завжди тільки для функцій одного аргументу). Якщо $D = 1$, то

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta) \left((72p+8)(\xi^2 + \eta^2) + (144p+8) \times \right. \quad (5.8.25) \\ \left. (\xi + \eta) \times (216p+7)\xi\eta + (72p-1)(\xi^2\eta + \xi\eta^2 + 1) \right).$$

Лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ при деяких значеннях p наведені на рис. 5.8.30 – 5.8.32 (табл. 5.8.5).

Таблиця 5.8.5

Лінії нульового рівня (15-параметричний базис)		
Рис. 5.8.30. 15-параметричний базис при $p = -\frac{1}{2}$	Рис. 5.8.31. 15-параметричний базис при $p = -\frac{5}{144}$	Рис. 5.8.32. 15-параметричний базис при $p = \frac{1}{4}$

14 параметрів отримаємо, якщо до (5.6.3) додамо умови з (5.8.16) $\alpha_{13} = 0$ та $\alpha_{16} = 0$. Така функція має вигляд:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)((9-10D) \times (\xi^2 + \eta^2) - 10D(\xi + \eta + 2\xi\eta + \xi^2\eta + \xi\eta^2) - 10). \quad (5.8.26)$$

Змінюючи значення D , отримуємо нескінченну множину 14-параметричних базисів. Лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ при деяких значеннях D наведено на рис. 5.8.33-5.8.35 (табл. 5.8.6).

Таблиця 5.8.6

Лінії нульового рівня (14-параметричний базис)



13 параметрів залишаться, якщо до (5.6.3) додати умови з (5.8.16) $\alpha_{14}=0, \alpha_{15}=0, \alpha_{16}=0$. При цьому

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta) \times (9(\xi^2 + \eta^2) + 9(8p+1)(\xi\eta + \xi + \eta) + 72p - 1). \quad (5.8.27)$$

Ця множина базисів співпадає з (5.6.8)-(5.6.10).

Нарешті, **12-параметричний** поліном отримаємо, якщо систему (5.6.3) доповнимо рівняннями з (5.8.16) $\alpha_{13}=0, \alpha_{14}=0, \alpha_{15}=0, \alpha_{16}=0$. Це буде стандартний базис (4.1.2)-(4.1.4).

Зауважимо, що всі серендипові поліноми (стандартні і модифіковані) на границі ССЕ інтерполюють шукану функцію за гіпотезою

Лагранжа, всередині ССЕ – апроксимують її. Це означає, що рельєф функції на границі ССЕ регламентований кількістю вузлів, а всередині ССЕ формоутворенням поверхні можна управляти, регулюючи кількість «прихованих» параметрів [83].

Використовуючи комбінований алгебро-геометричний метод, ми довели, що кількість степенів вільності інтерполяційного полінома на ССЕ-12 може змінюватись від 12 до 16 (при фіксованій кількості вузлів на границі).

Узагальнимо деякі закономірності, які притаманні скінченним елементам [5] (табл. 5.8.7).

Таблиця 5.8.7

Характеристики СЕ n -го порядку на площині

	Лагранжеві СЕ	Серендипові СЕ
Кількість вузлів інтерполяції	$(n+1)^2$	$4n$
Порядок інтерполяційного полінома	$2n$	Від $(n+1)$ до $2n$
Кількість доданків інтерполяційного полінома	$(n+1)^3$	Від $4n$ до $(n+1)^2$

Існування закономірностей, представлених у табл. 5.8.7, доведено для елементів 2-го – 4-го порядків [5]. (Дослідження елемента 4-го порядку не проводиться у даній роботі).

5.9. Зауваження стосовно повноти багатопараметричних базисних функцій ССЕ-12

Нагадаємо, що функції форми повинні задовольняти критерію **повноти** або **критерію сталості похідних** [24]. Множина функцій форми називається **повною**, якщо ці функції можуть точно апроксимувати будь-яку лінійну функцію, що задана у вигляді:

$$\phi = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \quad (5.9.1)$$

де α_i – довільні константи.

Формула (5.9.1) має місце, якщо [24]

$$\sum_{i=1}^n N_i \xi_i = \xi; \quad (5.9.2)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i \eta_i = \eta. \quad (5.9.3)$$

Умова вагового балансу (2.1.2) виконується завжди.

Зауважимо, що всі моделі з 13 параметрами задовольняють критерію сталості похідних.

Перевірка показує, що для всіх моделей з 15 і 16 параметрами умови (5.9.2), (5.9.3) не виконуються: з'являється нев'язка. Наведемо нев'язки для різних моделей:

1) для моделі з 15 параметрами (з розкладанням по Гауссу) (формула 5.8.3):

$$S_{\xi} = \frac{59}{32} \xi - \frac{27}{4} \xi p - \frac{27}{32} \xi \eta^2 + \frac{27}{4} \xi \eta^2 p - \frac{27}{32} \xi^3 + \\ + \frac{27}{4} \xi^3 p + \frac{27}{32} \xi^3 \eta^2 - \frac{27}{4} \xi^3 \eta^2 p;$$

2) для 15-параметричної моделі з кривою третього порядку (формула 5.8.25):

$$S_{\xi} = \frac{9}{8} \xi - 9 \xi p - \frac{1}{8} \xi \eta^2 + 9 \xi \eta^2 p - \frac{1}{8} \xi^3 + 9 \xi^3 p + \frac{1}{8} \xi^3 \eta^2 - 9 \xi^3 \eta^2 p;$$

3) для 16-параметричної моделі з центрально-симетричною кривою четвертого порядку (формула 5.8.18):

$$S_{\xi} = \frac{17}{8} \xi + 9 \xi p - \frac{9}{8} \xi \eta^2 - 9 \xi \eta^2 p - \frac{9}{8} \xi^3 - 9 \xi^3 p + \frac{9}{8} \xi^3 \eta^2 + 9 \xi^3 \eta^2 p;$$

4) для 16-параметричної моделі з двома гіперболами (формула 5.8.9):

$$S_{\xi} = \frac{21}{8} \xi - 18 \xi p - \frac{13}{8} \xi \eta^2 + 18 \xi \eta^2 p - \frac{13}{8} \xi^3 + 18 \xi^3 p + \frac{13}{8} \xi^3 \eta^2 - 18 \xi^3 \eta^2 p.$$

При ансамблюванні для виконання умов міжелементної неперервності краще обирати моделі, для яких виконується критерій повноти. При використанні скінченних елементів з порушенням критерію сталості похідних треба проводити кускове тестування за Айронсом-Раззаком [37].

Тестування за Айронсом-Раззаком показало, що всі багатопараметричні моделі ССЕ-12 витримують перевірку: середнє інтегральне нев'язок дорівнює нулю. Ці моделі можна рекомендувати для використання у практичних розрахунках.

5.10. Явище стійкості інтегральних середніх поліномів серендипової бікубічної інтерполяції

Як показано вище, на ССЕ-12 існує безліч базисів, що реалізують бікубічну інтерполяцію (параграфи 4.2, 5.1, 5.6, 5.8). Задача визначення вузлових навантажень шляхом інтегрального усереднення має єдиний розв'язок, а базис може визначатися різними способами. Тобто, може існувати декілька базисів з одним і тим же розподілом вузлових навантажень. Схожа ситуація спостерігається в задачах низькочастотного електромагнітного розсіювання [28], де існує безліч інтегральних рівнянь з одним і тим же розв'язком. Розглянемо саме таку стійкість, а саме – стійкість розподілу вузлових навантажень відносно базисів ССЕ-12. Побудуємо альтернативні базиси ССЕ-12 з різним числом параметрів і з однаковим розподілом вузлових навантажень і докажемо існування нескінченної множини елементів, що задовольняють цій властивості.

Щоб побудувати інтерполяційний базис на ССЕ-12, достатньо знайти тільки дві функції: «кутову», наприклад, $N_1(\xi, \eta)$ і «проміжну», наприклад, $N_2(\xi, \eta)$.

Емпіричний розподіл був отриманий за допомогою комп'ютерних експериментів з випадковими блуканнями. Проведено 10 серій іспитів, в яких стартували 100000 частинок. З'ясовано, що у середньому поглинається по 4000 частинок у кутових вузлах і по 10500 частинок у проміжних вузлах зі 100000 частинок. Емпіричний розподіл вузлових навантажень для ССЕ-12 показано на рис. 5.10.1.

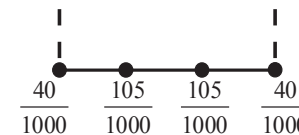


Рис. 5.10.1. Емпіричний розподіл вузлових навантажень

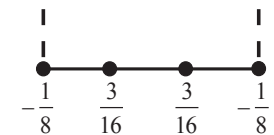


Рис. 5.10.2. Теоретичний розподіл вузлових навантажень у стандартному базисі

Теоретичний розподіл вузлових навантажень обчислюється за формулою (2.1.3). Для стандартного базису ССЕ-12 він має значення, які показані на рис. 5.10.2 [24].

Як бачимо, в кутових вузлах навантаження від'ємні. Такий розподіл Зенкевич називає протиприродним, незважаючи на його теоретичну достовірність. Досвід роботи Зенкевича зі стандартними базисами ССЕ вищих порядків (про нестандартні він, можливо, не знав) переконав його у тому [24], що теоретично обґрунтований розподіл вузових навантажень (навіть, якщо він протиприродний) гарантує більшу точність, ніж рівномірний (або будь-який інший) розподіл, що базується на інженерній інтуїції. Тобто, можна зробити висновок: оптимальні базиси – це такі базиси, які реалізують теоретично і фізично обґрунтовані розподіли вузових навантажень. Пошук таких базисів приводить до розв'язання обернених задач [2; 3; 7; 53; 77], в яких повузловий розподіл задається, а базис знаходиться з системи рівнянь типу (4.5.3) або (5.6.3). Саме так були знайдені базиси, які наведені нижче:

1 модель (13 параметрів):

$$N_1 = \frac{1}{800}(1-\xi)(1-\eta)(225(\xi^2 + \eta^2) + 297(\xi\eta + \xi + \eta) + 47); \quad (5.10.1)$$

$$N_2 = -\frac{9}{1600}(1-\xi^2)(1-\eta)(150\xi + 33\eta - 17). \quad (5.10.2)$$

Інші моделі відрізняються тільки функціями $N_1(\xi, \eta)$.

2 модель (15 параметрів):

$$N_1 = \frac{1}{3200}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi + 3\eta + 4)(-153\xi\eta + 147\xi + 147\eta + 47). \quad (5.10.3)$$

3 модель (15 параметрів):

$$N_1 = \frac{1}{1600}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi + 3\eta + 2)(-153\xi\eta - 3\xi - 3\eta + 47). \quad (5.10.4)$$

4 модель (15 параметрів):

$$N_1 = \frac{1}{8000}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi + 6\eta + 5)(-531\xi\eta + 219\xi - 156\eta + 94). \quad (5.10.5)$$

5 модель (15 параметрів):

$$N_1 = \frac{1}{8000}(1-\xi)(1-\eta)(6\xi + 3\eta + 5)(-531\xi\eta - 156\xi + 219\eta + 94). \quad (5.10.6)$$

6 модель (16 параметрів):

$$N_1 = \frac{1}{800}(1-\xi)(1-\eta)(5\xi\eta + 2\xi + 2\eta + 1)(97\xi\eta + 22\xi + 22\eta + 47). \quad (5.10.7)$$

7 модель (16 параметрів):

$$N_1 = \frac{1}{800}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi\eta + 2\xi + 2\eta + 1)(-53\xi\eta + 22(\xi + \eta) + 47). \quad (5.10.8)$$

Всі наведені вище моделі реалізують емпіричний розподіл (рис. 5.10.1). У цих моделях використовувались тільки ті поліноми, що розкладаються за Гауссом (на лінійні і квадратичні множники). Ще одна цікава особливість цих моделей полягає у тому, що всі поверхні $N_1(\xi, \eta)$ мають одну і ту ж саму аплікату у центрі елемента. На рис. 5.10.3 наведено лінії рівня $N_1(\xi, \eta)$ і $N_2(\xi, \eta)$.

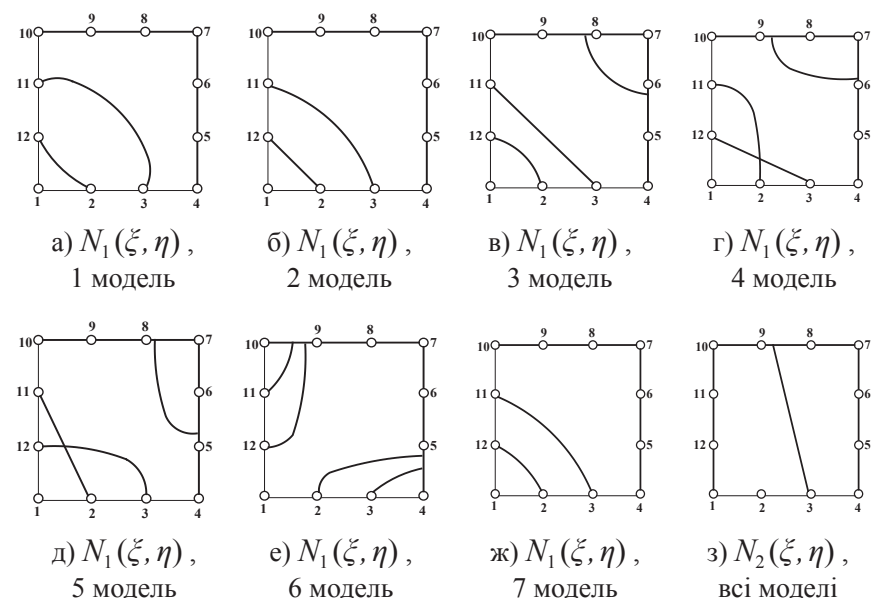


Рис. 5.10.3. Лінії нульового рівня моделей з однаковим розподілом вузових навантажень

Існують моделі бікубічної серендипової інтерполяції з «кутовими» функціями, які неможливо розкласти на лінійні і квадратичні множники (теорема Гаусса для функцій кількох змінних виконується не завжди):

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{800}(1-\xi)(1-\eta)(297\xi^2\eta^2 - 72(\xi^2 + \eta^2) + 47); \quad (5.10.9)$$

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{800}(1-\xi)(1-\eta)(297\xi^2\eta^2 - 25(\xi^2 + \eta^2) + 47(1+\xi+\eta+2\xi\eta+\xi^2\eta+\xi\eta^2)). \quad (5.10.10)$$

Функція $N_2(\xi, \eta)$ в обох випадках така ж сама, як у (5.10.2). Ці моделі, як і лагранжеві, мають 16 степенів вільності, незважаючи на те, що вони побудовані без використання додаткових внутрішніх вузлів. На рис. 5.10.4 показані лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ і $N_2(\xi, \eta)$ цих моделей.

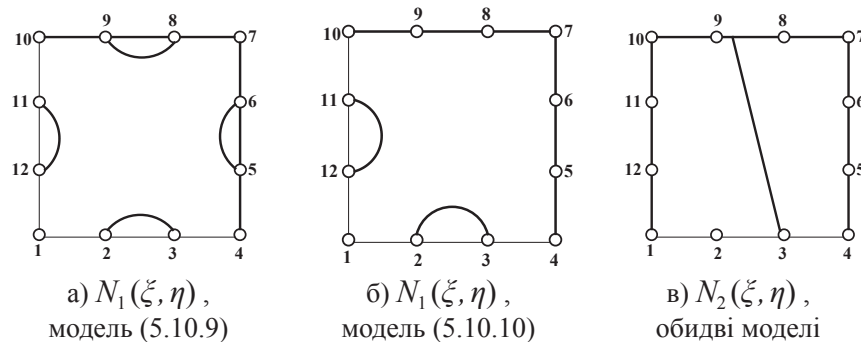


Рис. 5.10.4. Лінії нульового рівня моделей (5.10.9), (5.10.10) з однаковим розподілом вузлових навантажень

Як бачимо, базиси можуть відрізнятися як по «рельєфу», так і по кількості параметрів (степенів вільності), але це не впливає на стійкість розподілу вузлових навантажень.

Таких базисів існує безліч. Це легко довести, якщо розв'язувати обернену задачу за допомогою комбінованого алгебро-геометричного методу (система (5.6.3)) або за допомогою процедури зваженого усеред-

нення (формула (4.4.1)), де в якості $\{N_i^{(m)}\}$, $\{N_i^{(s)}\}$ скористатися базисами (5.10.1)-(5.10.10). Обидва методи генерують базиси з однаковим розподілом навантажень. Таким чином, доведено ТВЕРДЖЕННЯ: існує безліч бікубічних базисів з одним і тим же наперед заданим розподілом вузлових навантажень [53].

Отримані результати – це підтвердження специфічних особливостей поліноміального наближення функцій багатьох аргументів, про які ще до появи серендипових елементів попереджали автори [13].

РОЗДІЛ 6

ТРИЛІНІЙНИЙ ЕЛЕМЕНТ СЕРЕНДИПОВОЇ СІМ'Ї

6.1. Просторові скінченні елементи.

Матричний метод побудови базису трилінійного елемента

Тривимірні елементи дозволяють отримувати розв'язки задач загальної тривимірної теорії пружності, наприклад, розрахунки масивних бетонних конструкцій гребель, розрахунки розподілу напружень у породах, розв'язок задач механіки для ґрунтів і скелястих порід, які виникають при бурових роботах, чисельний розрахунок напружень у фланцях і з'єднаннях товстостінних труб тощо [16; 88; 89; 90; 94; 96; 97; 104; 110].

Тривимірні елементи – це узагальнення СЕ на тривимірний випадок елементів на площині. Розв'язок тривимірних задач потребує великої кількості степенів вільності. На думку авторів книги [37]: «В случае трехмерного пространства элемент с шестью четырехугольными гранями лучше тетраэдра». Справа у тому, що один куб замінює шість тетраедрів і, відповідно, така заміна зменшує розмір розв'язувальної системи рівнянь.

Трилінійний серендипів скінченний елемент (ССЕ-8) – це куб з розмірами $2 \times 2 \times 2$, вузлами у вершинах і базис, що відповідає цим вузлам. Розглянемо процедуру побудови базису матричним методом на ССЕ-8 (рис. 6.1.1) [40; 45]. В англійській літературі цей елемент позначають $H8$ (hexahedron) [86].

Процедура побудови базису для ССЕ-8 починається з вибору 8-параметричного полінома з трьома аргументами:

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \xi \zeta + \alpha_7 \eta \zeta + \alpha_8 \xi \eta \zeta. \quad (6.1.1)$$

Мономи цього полінома розташовані в просторовій схемі Паскаля (рис. 6.1.2).

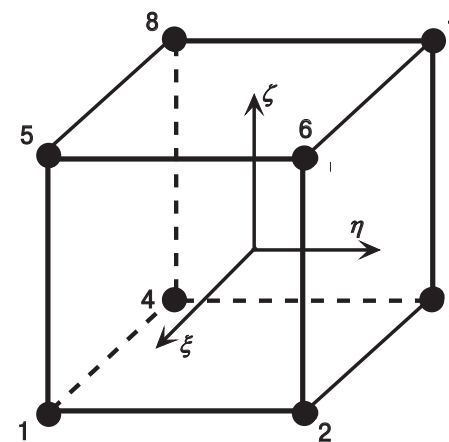


Рис. 6.1.1. Трилінійний елемент серендипової сім'ї (ССЕ-8)

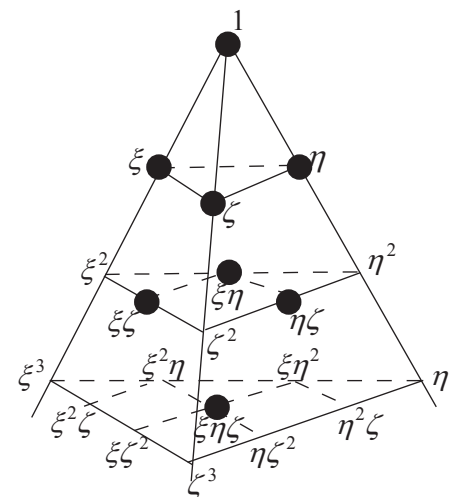


Рис. 6.1.2 Схема Паскаля для ССЕ-8 у просторі

Базис ССЕ складається з 8 поліномів, які підпорядковані інтерполяційній гіпотезі:

$$N_i(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \delta_{ik}, \quad (6.1.2)$$

де i – номер полінома; k – номер вузла; δ_{ik} символ Кронекера; $i, k = 1, 8$.

Розв'язавши СЛАР (8×8) , знайдемо невідомі параметри α_j і запишемо інтерполяційний поліном (6.1.1) у вигляді:

$$\phi = [N_i] \{ \Phi_i \}, \quad (6.1.3)$$

де $[N_i]$ – матриця-рядок базисних функцій СЕ ($i = \overline{1, 8}$);

$\{ \Phi_i \}$ – вектор значень функції, що інтерполюється.

Отримуємо трилінійний (стандартний) базис на ССЕ-8:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta), \quad \xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = \overline{1, 8}. \quad (6.1.4)$$

При цьому має зберігатися ваговий баланс:

$$\sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1. \quad (6.1.5)$$

Розподіл рівномірної масової сили у цьому елементі є природнім – у всіх вузлах по 0,125. Рівномірний розподіл вузлів забезпечує геометричну ізотропію моделі.

На жаль, візуалізація базисних функцій просторових елементів неможлива, тому що ці функції є чотиривимірними. Але можлива візуалізація поверхонь нульового рівня цих функцій.

У випадку тривимірних елементів збереження неперервності при переході від одного елемента до іншого означає неперервність по грані, яка є спільною для двох суміжних елементів. Таким чином, функції форми повинні бути такими, щоб невідомі величини однозначно визначались їх вузловими значеннями у точках фрагменту площини, яка є спільною для двох елементів. Наведені вище формули (6.1.4) цим властивостям задовольняють [38].

6.2. Ймовірісно-геометричний метод на трилінійному елементі

Традиційна процедура побудови інтерполяційного полінома для тривимірних елементів спирається на матричний апарат лінійної алгебри, що приводить до відомих обчислювальних труднощів через високі порядки систем [16; 24]. Ймовірісно-геометричний підхід можна

узагальнити на тривимірні елементи. Покажемо, як працює цей метод на трилінійному елементі серендипової сім'ї [31; 73].

I варіант. Поточна точка $M(\xi\eta\zeta)$ задає на трилінійному елементі ССЕ-8 вісім піделементів (рис. 6.2.1 а). Кожному вузлу поставимо у відповідність протилежний йому піделемент (заштрихована область). Сформулюємо завдання: знайти ймовірність того, що точка, кинута навання в область СЕ, влучає у підобласть Ω_i , де Ω_i – паралелепіпед, протилежний вузлу i . Базисна функція будується як ймовірність влучання навання кинutoї точки у відповідний піделемент. Об'єм заштрихованого паралелепіпеда Ω_i дорівнює $(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)$, а об'єм всього СЕ дорівнює 8. Використовуючи означення геометричної ймовірності [27] (формула 1.3.1), отримаємо базис для ССЕ-8:

$$N_i = \frac{(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta)}{8}, \quad \xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = \overline{1, 8}. \quad (6.2.1)$$

Зауважимо, що побудовані за допомогою ймовірісно-геометричного методу базисні функції (6.2.1) співпадають з функціями, які були побудовані матричним методом (6.1.4).

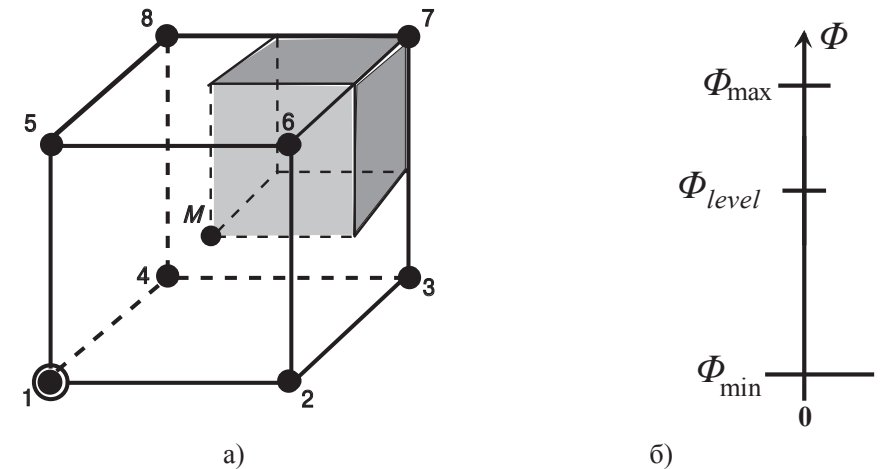


Рис. 6.2.1. До ймовірісно-геометричної побудови базису трилінійного стандартного ССЕ-8

II варіант. У цьому випадку можна для побудови базисної функції використовувати формулу (1.3.10), яка була запропонована у розділі 1.3 [55]:

$$PL = \frac{\Phi_{level} - \Phi_{min}}{\Phi_{max} - \Phi_{min}} = N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad (6.2.2)$$

де PL – це відношення довжини випадкового відрізка $[\Phi_{min}; \Phi_{level}]$ до загальної довжини відрізка $[\Phi_{min}; \Phi_{max}]$ (рис. 6.2.1 б);

Φ_{level} – поверхня поточного рівня функції $\Phi(\xi\eta\zeta)$,

Φ_{max} – поверхня максимального рівня функції $\Phi(\xi\eta\zeta)$,

Φ_{min} – поверхня мінімального рівня функції $\Phi(\xi\eta\zeta)$.

При побудові базисної функції для вузла 1 розбиваємо куб 1-2-3-4-5-6-7-8 на три піраміди 1-2-3-7-6, 1-3-4-8-7 і 1-5-6-7-8 зі спільною вершиною 1 (рис. 6.2.2). Наприклад, для піраміди 1-2-3-7-6 формула (6.2.2) працює наступним чином: якщо $\Phi_{level} = 1 - \xi$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1 - \xi) - 0}{2 - 0} = \frac{1 - \xi}{2} = N_1^{(1)}. \quad (6.2.3)$$

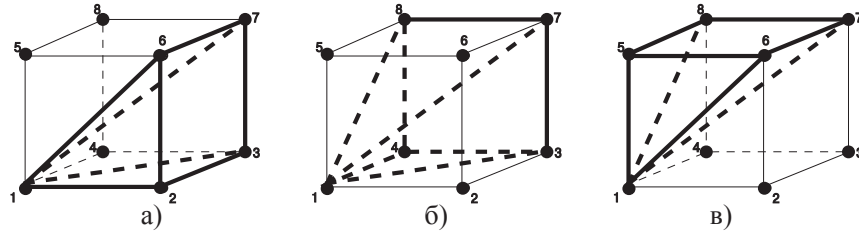


Рис. 6.2.2. До ймовірно-геометричної побудови базису трилінійного SSE-8

Аналогічно, для піраміди 1-3-4-8-7 за формулою (6.2.2) маємо: якщо $\Phi_{level} = 1 - \eta$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1 - \eta) - 0}{2 - 0} = \frac{1 - \eta}{2} = N_1^{(2)}. \quad (6.2.4)$$

Для піраміди 1-5-6-7-8 :

якщо $\Phi_{level} = 1 - \zeta$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1 - \zeta) - 0}{2 - 0} = \frac{1 - \zeta}{2} = N_1^{(3)}. \quad (6.2.5)$$

Базисну функцію для вузла 1 отримуємо за теоремою добутку ймовірностей незалежних подій:

$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2} \cdot \frac{1 - \eta}{2} \cdot \frac{1 - \zeta}{2} = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta). \quad (6.2.6)$$

6.3. Геометричний метод конструювання базисних функцій трилінійного елемента

Покажемо, як за допомогою геометричного моделювання можна отримати базис на SSE-8 [31; 32].

I варіант. Щоб побудувати N_i у трилінійному SE серендипової сім'ї (рис. 6.3.1), треба розглянути рівняння:

1) площини, що співпадає з гранню куба 2-3-7-6:

$$1 - \xi = 0;$$

2) площини, що співпадає з гранню куба 3-4-8-7:

$$1 - \eta = 0;$$

3) площини, що співпадає з гранню куба 5-6-7-8:

$$1 - \zeta = 0.$$

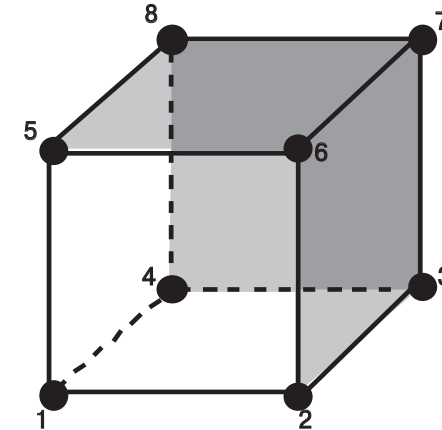


Рис. 6.3.1. До побудови N_i стандартного базису в трилінійному SSE-8

Для того, щоб функція N_1 дорівнювала нулю у вузлах 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, перемножимо $(1 - \xi)$, $(1 - \eta)$ і $(1 - \zeta)$. Пронормуємо функцію з коефіцієнтом $\frac{1}{8}$ для того, щоб N_1 дорівнювала одиниці у вузлі 1. Отримуємо базисну функцію N_1 :

$$N_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta). \quad (6.3.1)$$

II варіант. Геометричний метод можна інтерпретувати інакше. Базисна функція для вузла 1 задається як добуток трьох одновимірних функцій:

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}; \quad N_2(\eta) = \frac{1 - \eta}{2}; \quad N_3(\zeta) = \frac{1 - \zeta}{2}.$$

Кожна з цих функцій дорівнює одиниці в точці $(-1; -1; -1)$.

Перемноживши ці функції, отримуємо базисну функцію N_1 :

$$N_1 = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta). \quad (6.3.2)$$

6.4. Побудова базисних функцій трилінійного елемента інтегруванням щільності рівномірного розподілу

Використання геометричної ймовірності *a priori* передбачає рівномірний розподіл випадкової точки в межах СЕ [62]. Щільність розподілу у випадку трилінійного ССЕ-8 дорівнює $\frac{1}{8}$. Зауважимо,

що тільки одна функція базису, а саме $N_7(\xi, \eta, \zeta)$, бездоганно узгоджена зі стандартним означенням інтегральної функції розподілу. Щоб знайти цю функцію, достатньо тричі проінтегрувати наступне рівняння:

$$\frac{\partial^3 N_7(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \eta \partial \zeta} = \frac{1}{8}. \quad (6.4.1)$$

На кожному кроці інтегрування щільності на вибір «констант» інтегрування впливають властивості самої функції та її частинних похідних. Наприклад,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_7}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1}{8}\zeta + c_1 = \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8}; \\ \frac{\partial N_7}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}\zeta\eta + \frac{1}{8}\eta + c_2 = \frac{1}{8}\zeta\eta + \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(1 + \zeta)(1 + \eta); \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \zeta)(1 + \eta)\xi + c_3 = \frac{1}{8}(1 + \zeta)(1 + \eta)\xi + \frac{1}{8}(1 + \zeta)(1 + \eta) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta). \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

У тому випадку, коли у вузлі непарна кількість від'ємних координат – щільність від'ємна, тому для вузла 1 обираємо значення похідної $-\frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \eta \partial \zeta} &= -\frac{1}{8}; \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial \xi \partial \eta} &= -\frac{1}{8}\zeta + c_1 = -\frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(1 - \zeta); \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}(1 - \zeta)\eta + c_2 = \frac{1}{8}(1 - \zeta)\eta - \frac{1}{8}(1 - \zeta) = -\frac{1}{8}(1 - \zeta)(1 - \eta); \\ N_1(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{8}(1 - \zeta)(1 - \eta)\xi + c_3 = -\frac{1}{8}(1 - \zeta)(1 - \eta)\xi + \frac{1}{8}(1 - \zeta)(1 - \eta); \\ N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta). \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Щільність розподілу ймовірності прийшла з механіки по аналогії зі щільністю маси. Тепер, коли обґрунтовано існування від'ємних мас, то можна говорити і про від'ємні щільності і використовувати їх у відповідних випадках [11; 19; 46; 98].

6.5. Критерії гармонічності для просторових дискретних елементів

Зауважимо, що базисні функції просторового ССЕ-8 є гармонічними не тільки за Лапласом. Вони задовольняють інтегральним критеріям гармонічності Кьюбе та Привалова.

У просторовому випадку **диференціальний критерій** формулюється наступним чином: функція $U(\xi, \eta, \zeta)$, яка має неперервні частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}$ в області G і яка задовольняє рівнянню Лапласа в середині області G :

$$\frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (6.5.1)$$

є гармонічною функцією в області G [22; 50].

Інтегральний критерій Привалова для дискретного елемента порівнює середнє інтегральне (по об'єму) значення базисної функції $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ з її значенням у центрі елемента [6; 15; 36; 42; 60]:

$$N_i(0; 0; 0) = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} N_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (6.5.2)$$

де V – об'єм дискретного елемента,

Ω – дискретний елемент (куб $8 \times 8 \times 8$),

$N_i(0, 0, 0)$ – значення базисної функції у барицентрі елемента [6].

Інтегральний критерій Кюбе для дискретного елемента порівнює середнє інтегральне (по поверхні дискретного елемента) значення базисної функції $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ з її значенням у центрі елемента:

$$N_i(0; 0; 0) = \frac{1}{S} \oint_{\sigma} N_i(\xi, \eta, \zeta) ds, \quad (6.5.3)$$

де S – площа повної поверхні дискретного елемента,

σ – поверхня, що обмежує дискретний елемент,

$N_i(0, 0, 0)$ – значення базисної функції у барицентрі елемента [6].

РОЗДІЛ 7 ТРИКВАДРАТИЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ

7.1. Скінченні елементи серендипової сім'ї вищих порядків у просторі

Для апроксимації функцій трьох аргументів можна використовувати **елементи лагранжевої сім'ї**, які отримують перемноженням трьох одновимірних поліномів Лагранжа відповідного степеня (табл. 7.1.1) [38]. Але фахівці методу скінченних елементів віддають перевагу елементам серендипової сім'ї, які не мають вузлів у середині скінченного елемента. У таблиці 7.1.1 наведено **елементи серендипової сім'ї у просторі** [38; 45; 94].

На просторових серендипових елементах за допомогою матричних методів отримані базиси, які називаються **стандартними** [24; 45; 86; 89; 90; 107; 108]. Стандартним базисам ССЕ вищих порядків у просторі притаманні властивості 1-8 двовимірних елементів, які наведені у параграфі 2.1. Сформулюємо ці властивості для просторових елементів.

Властивість 1. Базисні функції ССЕ задовольняють **інтерполяційній гіпотезі типу Лагранжа**:

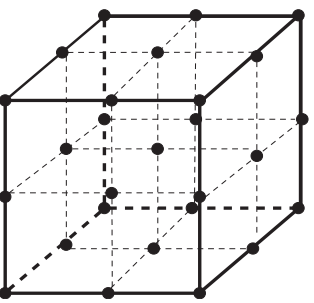
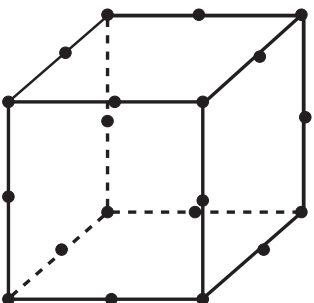
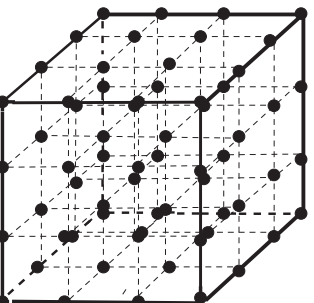
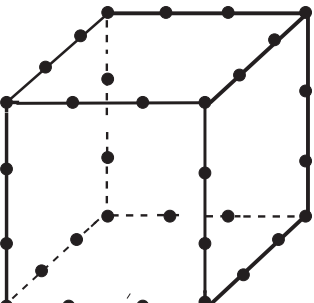
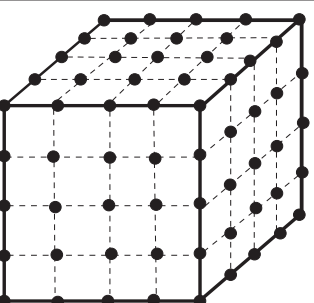
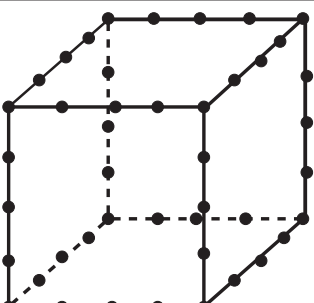
$$N_i(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad (7.1.1)$$

де δ_{ik} – символ Кронекера; i – номер полінома; n – кількість вузлів.

Властивість 2. Системи базисних функцій задовольняють **умові збереження вагового балансу** [45]:

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.1.2)$$

Таблиця 7.1.1

Просторові скінченні елементи вищих порядків		
Лагранжеві елементи	Тип	Серендипові елементи
 ЛСЕ-27	квадратичний	 CSE-20
 ЛСЕ-64	кубічний	 CSE-32
 ЛСЕ-125	четвертого порядку	 CSE-44

Властивість 3. Базисна функція серендипового СЕ вздовж границь елемента є повним поліномом і, як наслідок, має місце неперервність базисної функції на границі між елементами (зберігається C^0 – *гладкість апроксимації*) [23; 88].

Властивість 4. Базисні функції повинні бути *геометрично ізотропними* [39]: представлення залежної змінної на елементі не повинно залежати від системи координат, що використовується, тобто повинно бути геометрично ізотропним для ортогональних перетворень системи координат.

Властивість 5. Функції форми повинні задовольняти критерію *повноти* або *критерію сталості похідних* [24].

Множина функцій форми називається повною, якщо ці функції можуть точно апроксимувати будь-яку лінійну функцію, що задана у вигляді:

$$\phi = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \quad (*)$$

де α_i – довільні константи.

Відношення (*) завжди буде задовольнятися [24], якщо

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1; \quad \sum_{i=1}^n N_i \xi_i = \xi; \\ \sum_{i=1}^n N_i \eta_i = \eta; \quad \sum_{i=1}^n N_i \zeta_i = \zeta.$$

Властивість 6. Кількість мономів інтерполяційного поліному дорівнює кількості вузлів n на СЕ [85; 89].

До недоліків стандартних базисів віднесемо наступні властивості:

Властивість 7. Надлишкова кількість кратних нулів у вузлах на границі ССЕ, що призводить до надмірної жорсткості моделі [47].

Властивість 8. Наявність від'ємних значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили.

Розглянемо питання про розподіл рівномірної масової сили на просторових скінченних елементах. Для ССЕ *вузлова доля рівномірної масової сили* визначається потрібним інтегралом по об'єму Ω скінченного елемента від відповідної базисної функції, зваженої з об'ємною щільністю γ :

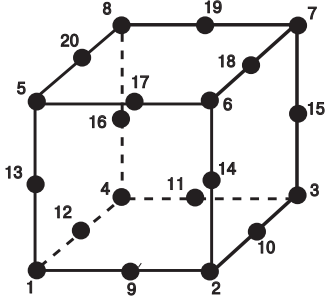
$$p_i = \iiint_{\Omega} \gamma N_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad \gamma = \frac{1}{8}. \quad (7.1.3)$$

Спектр, обчислений за допомогою формули (7.1.3), будемо вважати *теоретичним спектром навантажень* просторового ССЕ.

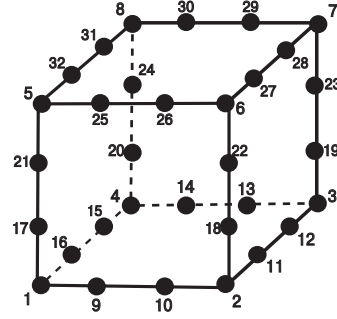
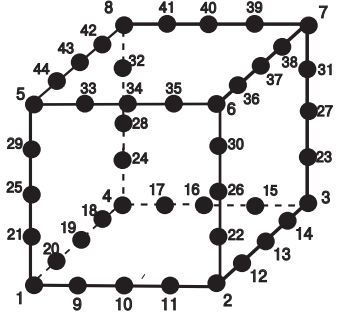
Із сім'ї просторових серендипових скінченних елементів тільки трилінійний елемент ССЕ-8 (рис. 6.1.1) має природний повузловий розподіл – у всіх вузлах по $\frac{1}{8}$ (див. розділ 6) [24]. У стандартних ССЕ вищих порядків завжди присутні від'ємні навантаження (табл. 7.1.2).

Найбільш природний спектр вузлових навантажень C_i з нашої точки зору, можна отримати при проведенні **комп'ютерного експерименту**: з центру скінченного елемента частинки починають блукання по об'ємній решітці з кроком $h = 0,05$. З метою дослідження стійкості результатів були проведені експерименти і при інших значеннях h . Аналіз результатів показав, що оптимальним значенням є $h = 0,05$, при якому виявлено збіжність експериментальних та теоретичних результатів. Для організації блукань використовується просторовий шаблон з шістьма рівномірнісними маршрутами. Щоб змодельовати умови Діріхле, припускаємо, що граничні вузли поглинаючі і обчислюємо відносну частоту попадання частинок у відповідний вузол. З цих апостеріорних перехідних ймовірностей і формується **експериментальний спектр** повузлового розподілу C_i . Довжина однієї серії експерименту – 1000000 частинок, кількість серій – 10 на кожному з елементів серендипової сім'ї. У табл. 7.1.2 наведені результати комп'ютерного експерименту (значення C_i) і значення теоретичного спектру p_i [3].

Таблиця 7.1.2

Розподіл рівномірної масової сили			
Елемент	Номер вузла	p_i	C_i
 CCE-20	1	$-\frac{3}{24}$	0,04475
	9	$\frac{4}{24}$	0,05350

Закінчення таблиці 7.1.2

 CCE-32	1	$-\frac{5}{32}$	0,02120
	9	$\frac{3}{32}$	0,03460
 CCE-44	1	$-\frac{273}{1080}$	0,01175
	9	$\frac{64}{1080}$	0,02200
	10	$\frac{36}{1080}$	0,03150

У схемах випадкових блукань інтеграл (7.1.3) трактується як середнє значення перехідних ймовірностей для всіх траєкторій, що закінчуються у відповідному вузлі [81]. Це дозволяє висунути **гіпотезу про рівність теоретичного p_i та експериментального C_i значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили**. Виникає питання: чи існує базис ССЕ, який реалізує експериментальні значення у повузловому навантаженні. Функції такого базису повинні задовольняти умові:

$$p_i = \iiint_{\omega} \gamma N_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.1.4)$$

де $\gamma = \frac{1}{8}$ – об'ємна щільність.

У наступних параграфах покажемо нові методи конструювання базисів на просторових ССЕ, в яких за допомогою «позавузлових» параметрів можна позбутися недоліків (наприклад, від'ємне повузлове навантаження), які притаманні стандартним просторовим моделям.

7.2. Матричний метод побудови базису трикватратичної інтерполяції. Метод Тейлора

Трикватратична інтерполяція виконується на правильному шестиграннику за допомогою 27 вузлів (елемент лагранжевої сім'ї): 8 вузлів у вершинах, 12 вузлів на ребрах, 6 вузлів на гранях і 1 вузол у центрі елемента (табл. 7.1.1). Щоб уникнути проблеми «дутих» мод, можна виконати редукцію лагранжевої моделі і отримати квадратичний елемент серендипової сім'ї. На рис. 7.2.1 зображено скінченний елемент серендипової сім'ї з трикватратичною інтерполяцією (CCE-20). В англійській літературі цей елемент позначають $H20$ (hexahedron) [86].

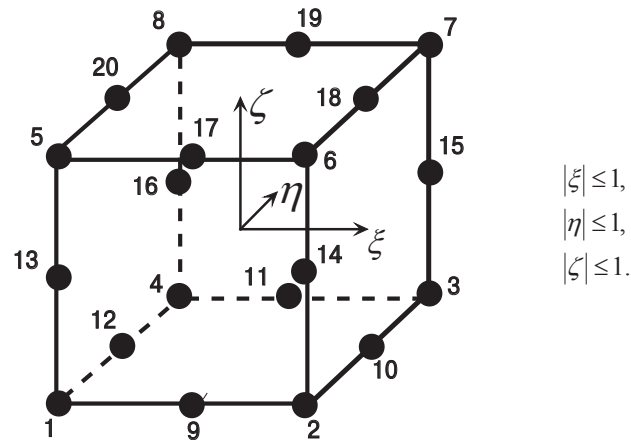


Рис. 7.2.1. CCE-20

Базис елемента складається з 20 поліномів, які підпорядковані інтерполяційній гіпотезі [44; 45]:

$$N_i(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \delta_{ik}, \quad (7.2.1)$$

де i – номер полінома; n – номер вузла; δ_{ik} – символ Кронекера; $i, k = \overline{1, 20}$.

Скористаємося процедурою Тейлора для побудови стандартного базису ССЕ-20 [16; 63; 103]. Побудова «проміжної» функції здійснюється відокремленням змінних. При цьому поліном Лагранжа 2-го степеня вздовж одного напрямку перемножують з лінійними поліномами Лагранжа вздовж другого і третього напрямків. Наприклад,

$$N_9(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta), \quad (7.2.2)$$

$$N_{12}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 - \xi)(1 - \zeta), \quad (7.2.3)$$

$$N_{13}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 - \xi)(1 - \eta). \quad (7.2.4)$$

Для «кутової» функції, наприклад, $N_1(\xi, \eta, \zeta)$, скористаємося лінійною комбінацією відомої функції трилінійної інтерполяції

$$\bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad (7.2.5)$$

і «проміжних» функцій (7.2.2)–(7.2.4). Вибір вагових коефіцієнтів лінійної комбінації обумовлюється інтерполяційною гіпотезою (7.2.1). Таким чином,

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1 - \frac{1}{2}(N_9 + N_{12} + N_{13}). \quad (7.2.6)$$

Базисна функція для вузла 1:

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(-\xi - \eta - \zeta - 2). \quad (7.2.7)$$

Взагалі, для «кутових» вузлів:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2), \quad \xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = \overline{1, 8}. \quad (7.2.8)$$

Для «проміжних» вузлів:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta),$$

$$\eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 9, 11, 17, 19. \quad (7.2.9)$$

Решта функцій утворюються з (7.2.9) шляхом циклічного переставлення ξ, η, ζ .

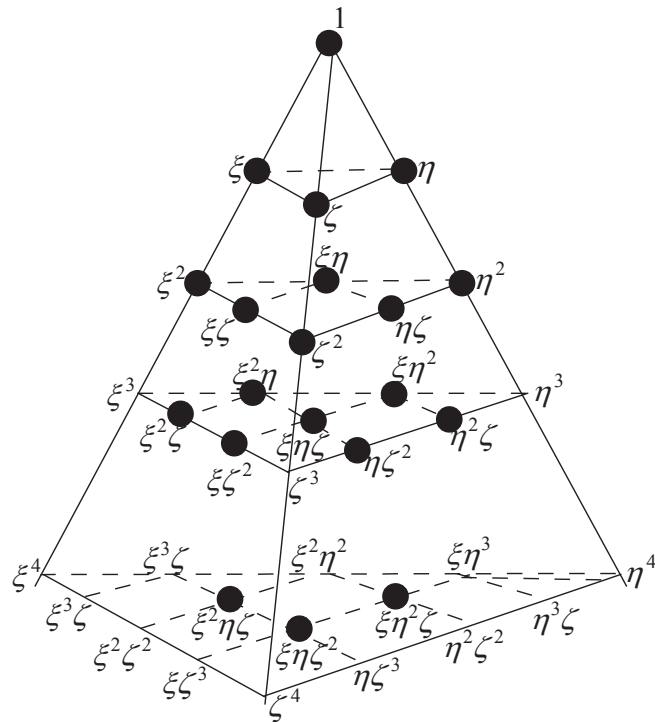


Рис. 7.2.2. Схема Паскаля для просторового ССЕ-20 (20 параметрів)

Модель (7.2.8), (7.2.9) має неприродний розподіл вузлових навантажень з від'ємними значеннями в кутових вузлах. Ця модель інтерполяційного поліному нараховує 20 параметрів, які показані на рис. 7.2.2.

7.3. Ймовірісно-геометричний метод на триквадратичному елементі

І варіант. Побудуємо стандартний базис на ССЕ-20 за допомогою ймовірісно-геометричного методу. Для побудови базису достатньо побудувати дві функції: $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ і $N_9(\xi, \eta, \zeta)$. Побудова починається з «кутової» функції. Це більш змістовна функція, тому що у вершині СЕ з'єднуються 8 сусідніх елементів, в «проміжному» вузлі тільки 4 скінченні елементи.

Процедура побудови $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ потребує розбиття ССЕ-20 на прості піделементи зі спільною вершиною у вузлі 1. Простими СЕ в 3D вважають куб (8 вузлів у вершинах) і тетраедр (4 вузла у вершинах). У даному випадку ми будемо розглядати два піделементи: куб 1-2-3-4-5-6-7-8 і тетраедр 1-9-12-13 (рис. 7.3.1 а). У кожному піделементі вибирається поточна точка $M(\xi, \eta, \zeta)$, яка розбиває піделемент на k підобластей, де k – кількість вершин піделементу. У кожному піделементі нас цікавить область, що є протилежною вузлу 1. У кубі 1-2-3-4-5-6-7-8 протилежна область – це прямокутний паралелепіпед з діагоналлю $M-7$ (ребра паралелепіпеда паралельні ребрам ССЕ (рис. 6.2.1 а)), в тетраедрі 1-9-12-13 – це тетраедр $M-9-12-13$ (див. додаток параграф 2). В кожному з піделементів випадковим чином вкидається точка і ставиться **задача**: знайти ймовірність того, що випадкова точка влучила у область, що є протилежною вузлу 1. Цю ймовірність можна знайти геометрично, як відносний об'єм області «успішних» результатів. Таким чином, для куба маємо

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta).$$

Для тетраедра достатньо знайти відносну відстань від вершини M до протилежної грані. В піделементі 1-9-12-13 маємо:

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) = -\xi - \eta - \zeta - 2.$$

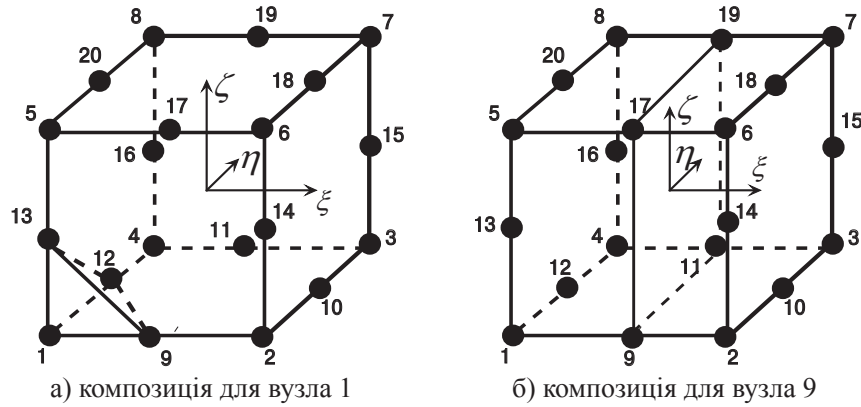


Рис. 7.3.1. Ймовірісно-геометричний метод побудови стандартного базису ССЕ-20

Ймовірність поєднання незалежних подій знаходиться за правилом добутку ймовірностей:

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2). \quad (7.3.1)$$

Для вузла 9 використаємо композицію двох прямокутних паралелепіпедів 9-2-3-11-17-6-7-19 і 9-11-4-1-17-19-8-5 (рис. 7.3.1 б). Використавши означення геометричної ймовірності (формула 1.3.1) отримуємо базисну функцію для вузла 9:

$$N_9(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta). \quad (7.3.2)$$

II варіант. У цьому випадку для побудови базисної функції використаємо формулу (6.2.2). Щоб побудувати функцію форми для вузла 1 розглянемо композицію куба 1-2-3-4-5-6-7-8 і тетраедру 1-9-12-13 зі спільною вершиною у вузлі 1.

Розбиваємо куб 1-2-3-4-5-6-7-8 на три піраміди. Наприклад, для піраміди 1-2-3-6-7 формула (6.2.2) працює наступним чином:

якщо $\Phi_{level} = 1 - \zeta$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{\Phi_{level} - \Phi_{min}}{\Phi_{max} - \Phi_{min}} = \frac{(1-\zeta) - 0}{2 - 0} = \frac{1-\zeta}{2} = N_1^{(1)}(\zeta). \quad (7.3.3)$$

Для піраміди 1-4-3-7-8 маємо: якщо $\Phi_{level} = 1 - \eta$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1-\eta) - 0}{2 - 0} = \frac{1-\eta}{2} = N_1^{(2)}(\eta). \quad (7.3.4)$$

Аналогічно, для піраміди 1-5-6-7-8 маємо: якщо $\Phi_{level} = 1 - \zeta$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1-\zeta) - 0}{2 - 0} = \frac{1-\zeta}{2} = N_1^{(3)}(\zeta). \quad (7.3.5)$$

У тетраедрі 1-9-12-13 за формулою (6.2.2) отримуємо:

$$PL = \frac{(-\xi - \eta - \zeta - 2) - 0}{1 - 0} = \frac{(-\xi - \eta - \zeta - 2)}{1} = N_1^{(4)}(\xi, \eta, \zeta). \quad (7.3.6)$$

Базисну функцію для вузла 1 отримуємо як добуток:

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2). \quad (7.3.7)$$

Щоб побудувати функцію форми для вузла, 9 розбиваємо куб 1-2-3-4-5-6-7-8 на чотири піраміди. Наприклад, для піраміди 9-2-3-7-6 формула (6.2.2) працює наступним чином: якщо $\Phi_{level} = 1 - \xi$, $\Phi_{max} = 1$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1-\xi) - 0}{1 - 0} = \frac{1-\xi}{1} = N_9^{(1)}(\xi). \quad (7.3.8)$$

Для піраміди 9-3-4-8-7 маємо: якщо $\Phi_{level} = 1 - \eta$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1-\eta) - 0}{2 - 0} = \frac{1-\eta}{2} = N_9^{(2)}(\eta). \quad (7.3.9)$$

Аналогічно, для піраміди 9-5-6-7-8 маємо: якщо $\Phi_{level} = 1 - \zeta$, $\Phi_{max} = 2$, $\Phi_{min} = 0$, то

$$PL = \frac{(1-\zeta) - 0}{2 - 0} = \frac{1-\zeta}{2} = N_9^{(3)}(\zeta). \quad (7.3.10)$$

Для піраміди 9-1-4-8-5 за формулою (6.2.2) маємо: якщо $\Phi_{max} = 1$, $\Phi_{min} = 0$, $\Phi_{level} = 1 + \xi$, то

$$PL = \frac{(1+\xi)-0}{1-0} = \frac{1+\xi}{1} = N_9^{(4)}(\xi). \quad (7.3.11)$$

Базисна функція для вузла 9 записується наступним чином:

$$N_9 = N_9^{(1)} \cdot N_9^{(2)} \cdot N_9^{(3)} \cdot N_9^{(4)} = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta). \quad (7.3.12)$$

Отримані ймовірно-геометричним методом базисні функції співпадають з функціями, які були отримані за допомогою процедури Тейлора. Це стандартний базис.

7.4. Геометричний метод конструювання базисних функцій трикватратичного елемента

Зауважимо, що базисні функції просторового ССЕ-20 можна отримати і за допомогою геометричних міркувань [32]. Базисна функція для вузла 1 задається як добуток чотирьох функцій форми, які асоціюються з площинами (рис. 7.4.1):

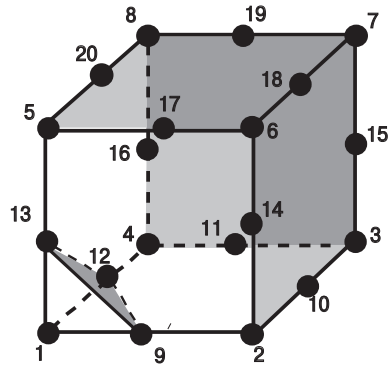


Рис. 7.4.1. До побудови N_1 стандартного базису ССЕ-20

1) площиною 2-3-7-6:

$$N_1^{(1)}(\xi) = \frac{1-\xi}{2};$$

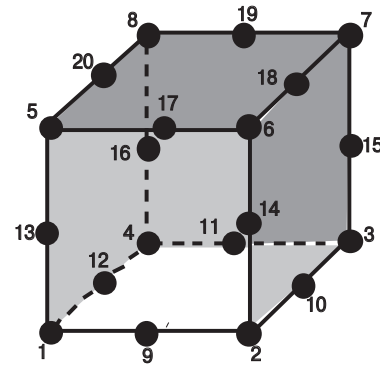


Рис. 7.4.2. До побудови N_9 стандартного базису ССЕ-20

2) площиною 3-4-8-7:

$$N_1^{(2)}(\eta) = \frac{1-\eta}{2};$$

3) площиною 5-6-7-8:

$$N_1^{(3)}(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2};$$

4) площиною 9-12-13:

$$N_1^{(4)}(\xi, \eta, \zeta) = (-\xi - \eta - \zeta - 2).$$

Кожна з цих функцій дорівнює одиниці в точці (-1;-1;-1).

Для вузла 1 отримаємо:

$$N_1 = N_1^{(1)}(\xi) \cdot N_1^{(2)}(\eta) \cdot N_1^{(3)}(\zeta) \cdot N_1^{(4)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi - \eta - \zeta - 2). \quad (7.4.1)$$

Базисна функція для вузла 9 задається як добуток чотирьох функцій, які асоціюються з площинами (рис. 7.4.2):

1) площиною 2-3-7-6:

$$N_9^{(1)}(\xi) = (1-\xi);$$

2) площиною 3-4-8-7:

$$N_9^{(2)}(\eta) = \frac{1-\eta}{2};$$

3) площиною 5-6-7-8:

$$N_9^{(3)}(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2};$$

4) площиною 1-4-8-5:

$$N_9^{(4)}(\xi) = (1+\xi).$$

Кожна з цих функцій дорівнює одиниці в точці (0;-1;-1).

Для вузла 9 отримаємо:

$$N_9 = N_9^{(1)}(\xi) \cdot N_9^{(2)}(\eta) \cdot N_9^{(3)}(\zeta) \cdot N_9^{(4)}(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta). \quad (7.4.2)$$

Побудовані за допомогою ймовірісно-геометричного і геометричного моделювання системи базисних функцій співпадають з добре відомими з літератури базисними функціями для триквадратичного просторового елемента ССЕ-20. Ймовірнісний і геометричний методи значно спростили процедуру побудови базису – зникла необхідність складати і розв'язувати СЛАР 20-го порядку.

7.5. Комбінований алгебро-геометричний метод конструювання базису ССЕ-20 (обернена задача)

Поставимо завдання – розв'язати обернену задачу на просторовому 20-вузловому серендиповому скінченному елементі ССЕ-20, тобто побудувати базис елемента, функції якого будуть мати спектральні навантаження, отримані за допомогою комп'ютерного експерименту (табл. 7.1.2).

Як було показано у попередніх розділах, цей метод побудови базису серендипового скінченного елемента ефективно об'єднує традиційний алгебраїчний метод та геометричне моделювання базису СЕ [3; 64].

З геометричних міркувань базисна функція для вузла 1 будується з рівнянь площин трьох граней куба ($\xi = 1, \eta = 1, \zeta = 1$) та поверхні другого порядку, яка проходить через вузли 9, 12, 13 (всі ці поверхні є поверхнями нульового рівня для N_1):

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(A\xi\eta + B\xi\zeta + C\eta\zeta + D\xi + D\eta + D\zeta + 1). \quad (7.5.1)$$

Базисна функція для вузла 9 будується з рівнянь чотирьох граней куба ($\xi \pm 1, \eta = 1, \zeta = 1$) та довільної площини, яка паралельна вісі $O\xi$:

$$N_9 = k_9(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(Q\eta + G\zeta + 1). \quad (7.5.2)$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів $k_1, k_9, A, B, C, D, Q, G$, побудуємо систему рівнянь, використовуючи властивості базисних функцій та

гіпотезу про збіг теоретичного та експериментального значень у повузловому розподілі рівномірної масової сили (формула (7.1.4)):

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, & k &= 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, & k &= 9, 12, 13; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, & k &= 9; \\ 8 \cdot k_1 + 12 \cdot k_9 &= 1; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= C_1 = 0,04475; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= C_9 = 0,05350. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.3)$$

У правій частині останніх двох рівнянь системи (7.5.3) записані експериментальні значення відносної частоти поглинання в першому і дев'ятому вузлах відповідно частинок, які стартують у барицентрі ССЕ-20. У лівій частині цих же рівнянь записано інтеграли, при обчисленні яких отримуємо долю першого і дев'ятого вузлів у повузловому розподілі рівномірної масової сили. Система має безліч розв'язків, в яких вільною змінною оберемо коефіцієнт G . Базисна функція для вузла 1 має вигляд:

$$N_1 = \frac{1}{16000}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \times (2037\xi\eta + 2037\xi\zeta + 2037\eta\zeta + 2074\xi + 2074\eta + 2074\zeta + 2111). \quad (7.5.4)$$

Базисна функція для вузла 9:

$$N_9 = -\frac{1}{8000}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(37 + (2037 - 37G)\eta + 37G\zeta). \quad (7.5.5)$$

Якщо обрати $G = \frac{2037}{74}$, тоді у функції N_9 коефіцієнти при η і ζ співпадають:

$$N_9 = -\frac{1}{16000}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(74 + 2037\eta + 2037\zeta). \quad (7.5.6)$$

Модифіковані базисні функції (7.5.7)-(7.5.8) 20-вузлового просторового серендипова скінченного елемента мають 26 параметрів (рис. 7.5.1).

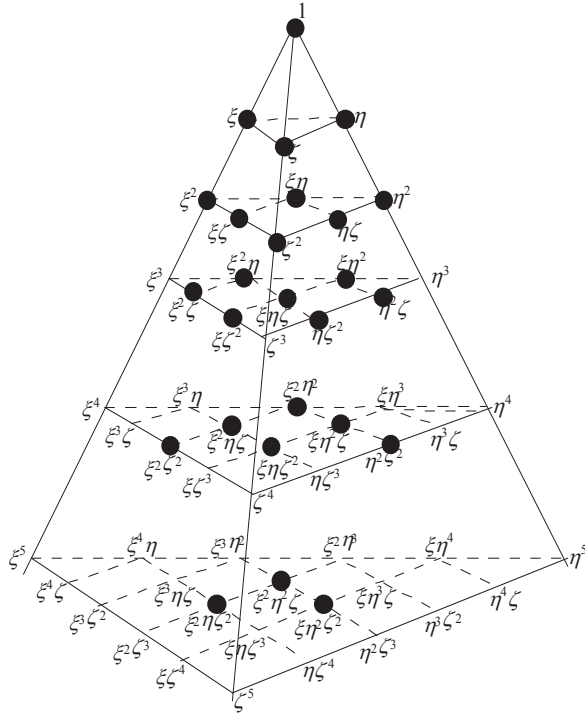


Рис. 7.5.1. Піраміда Паскаля для ССЕ-20 (26 параметрів)

Таким чином, модифікований базис ССЕ-20, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень має вигляд:

$$N_i = \frac{1}{16000} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \times \\ \times (2037 \xi_i \xi \eta_i \eta + 2037 \xi_i \xi \zeta_i \zeta + 2037 \eta_i \eta \zeta_i \zeta - 2074 \xi_i \xi - \\ - 2074 \eta_i \eta - 2074 \zeta_i \zeta + 2111);$$

$$i = \overline{1, 8}; \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1; \quad \zeta_i = \pm 1. \quad (7.5.7)$$

$$N_i = -\frac{1}{16000} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) (74 - 2037 \eta_i \eta - 2037 \zeta_i \zeta) \\ i = 9, 11, 17, 19; \quad \eta_i = \pm 1; \quad \zeta_i = \pm 1. \quad (7.5.8)$$

Решта функцій утворюються з (7.5.8) шляхом циклічного переставлення ξ, η, ζ .

Зауваження. При ансамблюванні для виконання умов міжелементної неперервності краще обирати елементи з однаковими базами. При використанні елементів з різними базами треба проводити кускове тестування за Айронсом-Раззаком [37].

РОЗДІЛ 8

ТРИКВАДРАТИЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ. БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ

8.1. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій просторового ССЕ-20

Покажемо новий когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисів на просторовому елементі, що містить 20 вузлів [25; 30]. Нагадаємо, що *базисними функціями ієрархічного типу* називаються функції вищих порядків, які отримані шляхом адитивного уточнення базисів стандартного типу (параграф 3.2).

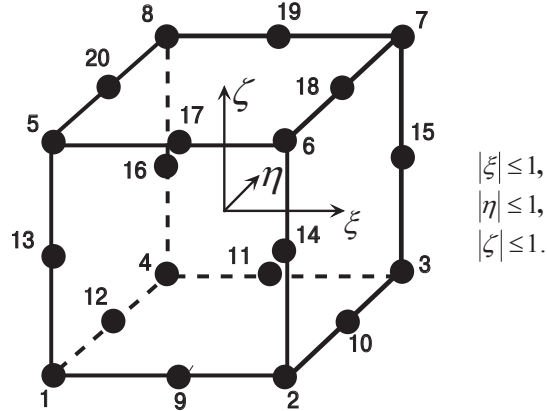


Рис. 8.1.1. ССЕ-20

Для даного елемента з літератури [24; 45] відомий єдиний базис. Базисні функції для вузлів 1 і 9 мають вигляд:

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2), \quad (8.1.1)$$

$$N_9(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta). \quad (8.1.2)$$

Множину альтернативних базисів можливо отримати, комбінуючи стандартний базис (формули (8.1.1), (8.1.2)) з функцією другого порядку з відповідним коефіцієнтом K :

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)((-2-\xi-\eta-\zeta) + K(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta + 2\xi + 2\eta + 2\zeta + 3)), \quad (8.1.3)$$

$$N_9 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\left((1+\xi) - \frac{1}{2}K(1+\xi)(2+\eta+\zeta)\right). \quad (8.1.4)$$

Запишемо узагальнені формули для реалізації когнітивно-графічного методу побудови ієрархічних форм базисних функцій просторового 20-вузлового ССЕ [30]:

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \times (-2 + \xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta + K(\xi_i\eta_i\xi\eta + \xi_i\zeta_i\xi\zeta + \eta_i\zeta_i\eta\zeta - 2\xi_i\xi - 2\eta_i\eta - 2\zeta_i\zeta + 3)),$$

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = 1, 8, \quad (8.1.5)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)\left(1 - \frac{1}{2}K(2 - \eta_i\eta - \zeta_i\zeta)\right),$$

$$\eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = 9, 11, 17, 19. \quad (8.1.6)$$

Решта функцій утворюються з (8.1.6) шляхом циклічного переставлення ξ, η, ζ .

Отримані базисні функції відповідають властивостям 1-5 базису ССЕ (розділ 7) [39].

Знайдемо функції *повузлового розподілу рівномірної масової сили* за допомогою формули (7.1.3). Для кутової функції N_1 :

$$p_1(K) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{6}K. \quad (8.1.7)$$

Для проміжної функції N_9 :

$$p_9(K) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9}K. \quad (8.1.8)$$

Графіки функцій $p_1(K)$ і $p_9(K)$ наведено на рис. 8.1.7.

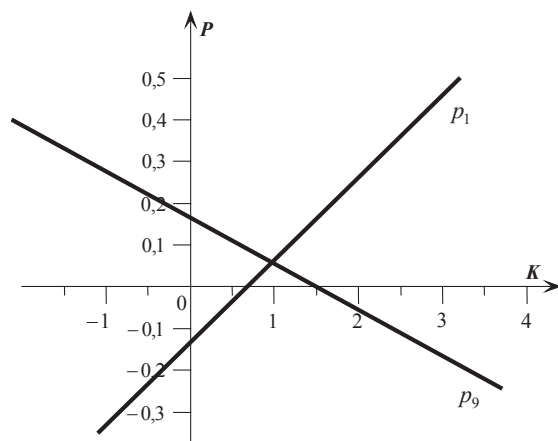


Рис. 8.1.2. Залежність повузлового розподілу масової сили p_i від K

У новому методі базисна функція містить параметр K , тому p_i – це функція, що залежить від K . Для практичних розрахунків краще використовувати базиси для $K \in (0,75; 1,05)$, тому що при $K = 0,75$ зникає негативізм для p_1 , а при $K > 1,05$ – виникає фізично протиприродний розподіл.

8.2. Узагальнення ймовірнісно-геометричного методу побудови базису трикватратичного елемента

Узагальнимо процедуру побудови базису на просторовому ССЕ-20 за допомогою ймовірнісно-геометричного підходу.

Для побудови N_1 ССЕ-20 можна розбити двома способами:

- 1) на куб 1-2-3-4-5-6-7-8 і піраміду 1-9-12-13 (рис. 8.2.1 а);
- 2) на чотири піраміди: 1-2-3-7-6, 1-3-4-8-7, 1-5-6-7-8 і 1-9-12-13.

Зауважимо: у загальному випадку у піраміді 1-9-12-13 грань 9-12-13 є фрагментом поверхні другого порядку.

Оберемо перший спосіб розбиття (рис. 8.2.1 а). Як було показано у параграфі 6.2, ймовірність попадання навмання вкинутої точки в протилежну вузлу 1 область куба 1-2-3-4-5-6-7-8, у відповідності з означенням геометричної ймовірності (формула 1.3.1), дорівнює:

$$N_1^{(1)} = \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8}.$$

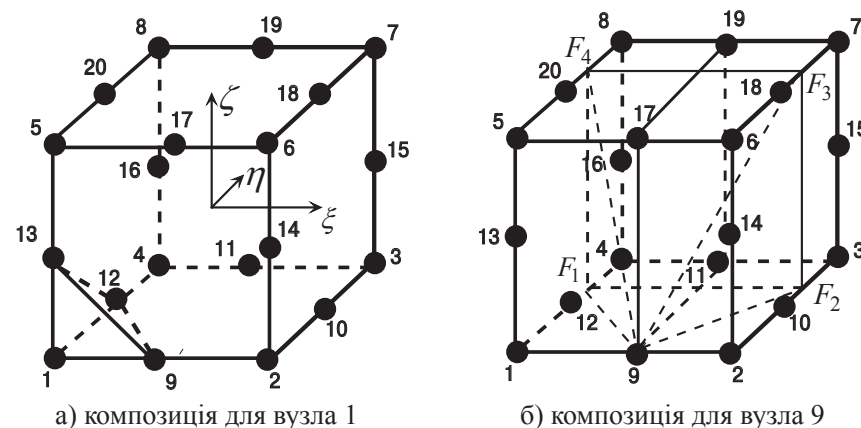


Рис. 8.2.1. Ймовірнісно-геометричний метод побудови модифікованого базису ССЕ-20

Для тетраедра скористаємося формулою (6.2.2). Якщо у загальному випадку взяти

$$\Phi_{level} = K(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + (2K-1)(\xi + \eta + \zeta) + (3K-2),$$

$$\Phi_{\max} = 1, \Phi_{\min} = 0,$$

то

$$N_1^{(2)} = \frac{((-2-\xi-\eta-\zeta) + K(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta + 2\xi + 2\eta + 2\zeta + 3))}{1}.$$

Добуток ймовірностей дає формулу, за якою можна отримувати базисні функції для вузла 1 при певних значеннях K :

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot N_1^{(2)} = \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \times \frac{((-2-\xi-\eta-\zeta) + K(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta + 2\xi + 2\eta + 2\zeta + 3))}{1} \quad (8.2.1)$$

Для побудови N_9 CSE-20 можна розбити куб на паралелепіпеди 9-2-3-11-17-6-7-19, 9-11-4-1-17-19-8-5 і піраміду 9- F_1 - F_2 - F_3 - F_4 (рис. 8.2.1 б).

Як показано у параграфі 7.3, ймовірність попадання навмання вкинутої точки в протилежні вузлу 9 області паралелепіпедів, у відповідності з означенням геометричної ймовірності (формула (1.3.1)), дорівнює:

$$N_9^{(1)} = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)}{4}.$$

Для обчислення ймовірності попадання навмання вкинутої точки у протилежну вузлу 9 область піраміди 9- F_1 - F_2 - F_3 - F_4 , скористаємося формулою (6.2.2). Якщо у загальному випадку взяти

$$\Phi_{level} = 2 - K(2 + \eta + \zeta), \Phi_{max} = 2, \Phi_{min} = 0,$$

то

$$N_9^{(2)} = \frac{2 - K(2 + \eta + \zeta)}{2}.$$

Тоді базисна функція для вузла 9 будується як добуток:

$$N_9 = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)}{4} \cdot \frac{2 - K(2 + \eta + \zeta)}{2}. \quad (8.2.2)$$

Узагальнені формули для реалізації ймовірно-геометричного методу побудови базисних функцій 20-вузлового CSE:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \times (-2 + \xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta + K(\xi_i\eta_i\xi\eta + \xi_i\zeta_i\xi\zeta + \eta_i\zeta_i\eta\zeta - 2\xi_i\xi - 2\eta_i\eta - 2\zeta_i\zeta + 3)), \quad \xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = \overline{1, 8}, \quad (8.2.3)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \cdot \frac{1}{2}(2 - K(2 - \eta_i\eta - \zeta_i\zeta)), \quad \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 9, 11, 19, 17. \quad (8.2.4)$$

8.3. Узагальнення геометричного методу конструювання базисних функцій просторового CSE-20

При геометричному моделюванні базисна функція N_1

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)((-2-\xi-\eta-\zeta) + K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta + 2\xi + 2\eta + 2\zeta + 3)) \quad (8.3.1)$$

будується як добуток функцій, кожна з яких дорівнює одиниці в точці $(-1; -1; -1)$ і для яких поверхнями нульового рівня є наступні:

1) площа 2-3-7-6:

$$N_1^{(1)} = \frac{(1-\xi)}{2};$$

2) площа 3-4-8-7:

$$N_1^{(2)} = \frac{(1-\eta)}{2};$$

3) площа 5-6-7-8:

$$N_1^{(3)} = \frac{(1-\zeta)}{2};$$

4) поверхня другого порядку, що проходить через вузли 9, 12, 13:

$$N_1^{(4)} = (-2 - \xi - \eta - \zeta) + K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta + 2\xi + 2\eta + 2\zeta + 3). \quad (8.3.2)$$

Візуалізуємо поверхні (8.3.2), що утворюються при різних значеннях параметра K (рис. 8.3.1 а, 8.3.2, 8.3.3 а, 8.3.4 а, 8.3.5 а). Щоб створити більш чітке уявлення про поведінку поверхні за межами СЕ, збільшуємо розміри куба (рис. 8.3.1 б, 8.3.3 б, 8.3.4 б, 8.3.5 б) [30].

При $K \in (-2; 0)$ – це двопорожнинний гіперboloїд (рис. 8.3.1).

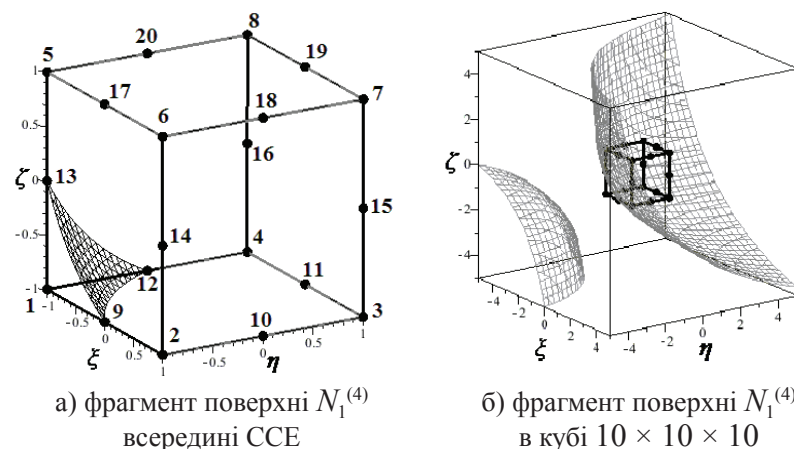


Рис. 8.3.1. Двopopожнинний гіперboloїд

При $N = 0$ – дві площини, які співпадають 9-12-13 (рис. 8.3.2):

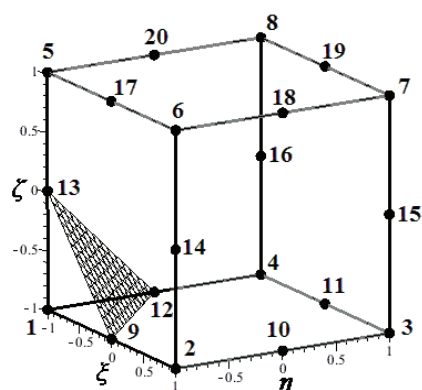


Рис. 8.3.2. Фрагмент площини $N_1^{(4)}$ всередині ССЕ

При $K \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$ – також двопорожнинний гіперboloїд (рис. 8.3.3):

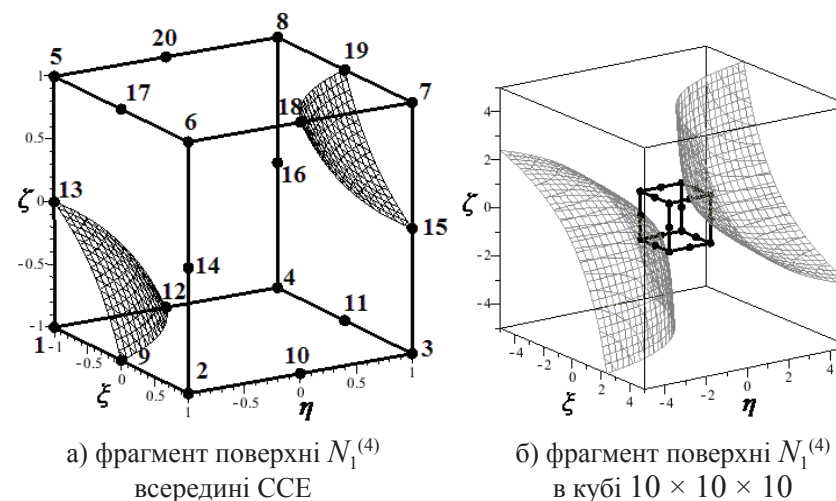


Рис. 8.3.3. Двopopожнинний гіперboloїд

При $K = \frac{3}{4}$ – дійсний конус з вершиною у точці $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ (рис. 8.3.4) :

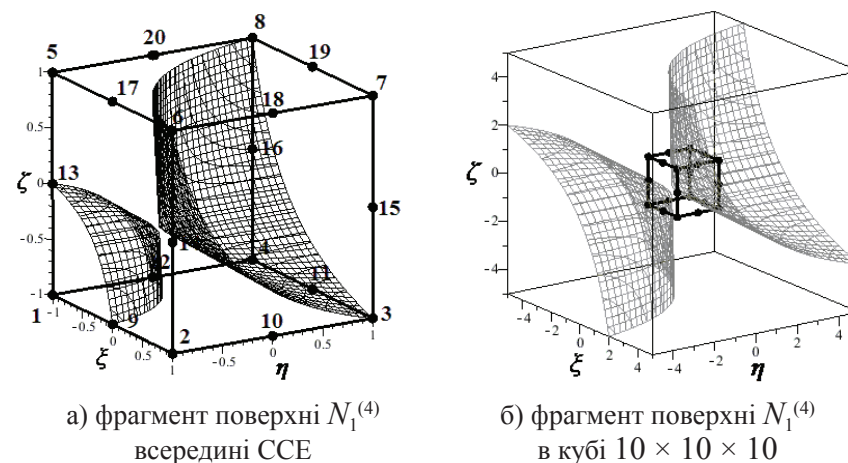


Рис. 8.3.4. Конус

При $K \in \left(\frac{3}{4}; 2\right)$ – однопорожнинний гіперболоїд (рис. 8.3.5):

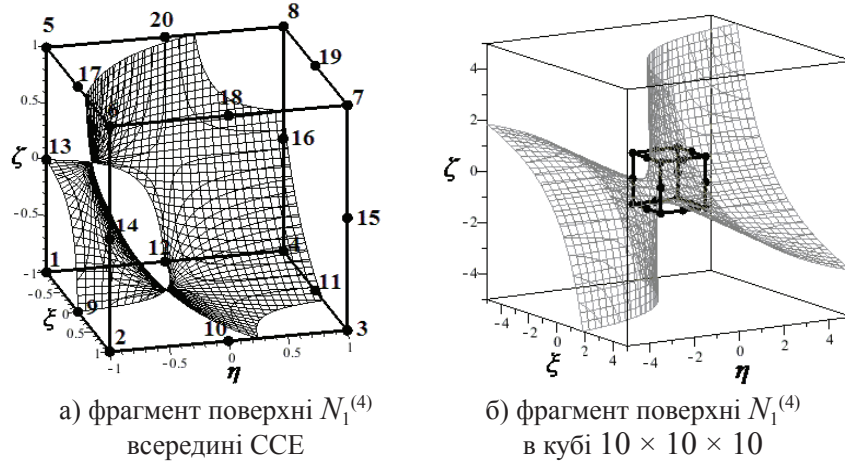


Рис. 8.3.5. Однопорожнинний гіперболоїд

Зауваження. Змінна p , проміжки для якої наведені на рис. 8.3.1-8.3.5, буде розглянута у параграфі 8.5.

Щоб зрозуміти, які поверхні утворюють базисну функцію для 9 вузла, формулу (8.1.4) перепишемо наступним чином:

$$N_9 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(1+\xi)\left(1 - \frac{1}{2}K(2+\eta+\zeta)\right). \quad (8.3.3)$$

З формули (8.3.3) видно, що базисна функція для вузла 9 записується з множників, що є рівняннями п'яти площин: чотири площини співпадають з гранями куба, а п'ята площина завжди паралельна вісі Ox , а при $K = 0$ зникає на нескінченності. Ці функції дорівнюють одиниці в точці $(0;-1;-1)$.

Таким чином, за допомогою узагальненого геометричного методу, змінюючи K у формулах (8.3.1) і (8.3.3), можна побудувати безліч базисів на просторовому ССЕ-20. Зауважимо, що функції, які отримані геометричним методом, співпадають з функціями ймовірісно-геометричного методу (8.2.3)-(8.2.4).

8.4. Модифікація методу Тейлора для побудови базису ССЕ-20

У модифікованому методі Тейлора на ССЕ-20 для функції $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ скористаємося лінійною комбінацією функції трилінійної інтерполяції $\bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)$ і проміжних базисних функцій N_9, N_{12}, N_{13} (формула (8.1.6)), які отримані за допомогою когнітивно-графічного методу конструювання ієрархічних форм базисних функцій:

$$N_1 = \bar{N}_1 - \frac{1}{2}(N_9 + N_{12} + N_{13}). \quad (8.4.1)$$

Після нескладних перетворень отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)((-2-\xi-\eta-\zeta) + K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta + 2\xi + 2\eta + 2\zeta + 3)). \quad (8.4.2)$$

Отримана функція для вузла 1 (формула (8.4.2)) співпадає з функцією (8.1.3), яка отримана у параграфі 8.1.

8.5. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису трикватричного елемента (обернена задача з параметром)

Комбінований алгебро-геометричний метод на ССЕ-20 можна узагальнити наступним чином [64]: функції $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ та $N_9(\xi, \eta, \zeta)$ залишити у вигляді (7.5.1) та (7.5.2) відповідно, а систему (7.5.3) записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k=9, 12, 13; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=9; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= p; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= p_9. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.1)$$

де p – значення рівномірної масової сили у вузлі 1;

p_9 – значення рівномірної масової сили у вузлі 9.

Зважаючи на те, що $8p + 12p_9 = 1$, отримуємо залежність $p_9 = \frac{1-8p}{12}$. Тоді систему (8.5.1) можна записати з одним параметром p наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k=9, 12, 13; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=9; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= p; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1-8p}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.2)$$

Розв'язавши систему (8.5.2), отримуємо базисні функції з параметром p :

$$N_1 = \frac{1}{32} (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \times ((3+24p) \times (\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + (2+48p)(\xi + \eta + \zeta) + (1+72p)); \quad (8.5.3)$$

$$N_9 = -\frac{1}{16} (1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \times ((3+G+24p(1-G))\eta + (24p-1)G\zeta + (24p-1)). \quad (8.5.4)$$

Зауважимо, що у моделі, яка отримується за формулами (8.5.3)-(8.5.4) присутній не тільки параметр p , але і вільна змінна G . Надаючи G різних значень, можна отримувати безліч розв'язків при одному і тому ж значенні p .

Аналіз поверхонь нульового рівня у формулі (8.5.3) можна зробити аналогічно тому, як це зроблено у параграфі 8.3:

при $p \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$ – це двопорожнинний гіперболоїд (рис. 8.3.1);

при $p = -\frac{1}{8}$ – площа 9-12-13 (рис. 8.3.2);

при $p \in \left(-\frac{1}{8}, 0\right)$ – двопорожнинний гіперболоїд (рис. 8.3.3);

при $p = 0$ – конус з вершиною у точці $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ (рис. 8.3.4);

при $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ – однопорожнинний гіперболоїд (рис. 8.3.5).

Функції форми запишемо у загальному вигляді:

$$N_i = \frac{1}{32} (1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) ((\xi_i\eta_i\xi\eta + \xi_i\zeta_i\xi\zeta + \eta_i\zeta_i\eta\zeta) \times (3+24p) + (2+48p)(-\xi_i\xi - \eta_i\eta - \zeta_i\zeta) + 1+72p); \quad (8.5.5)$$

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = \overline{1, 8},$$

$$N_i = -\frac{1}{16} (1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \times ((24p-1) - (3+G+24p(1-G))\eta_i\eta - (24p-1)G\zeta_i\zeta), \quad (8.5.6)$$

$$\eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = 9, 11, 19, 17.$$

Отримані базисні функції відповідають властивостям 1-5 базису ССЕ (розділ 7) [39].

При $p = -\frac{1}{8}$ (вузлове навантаження рівномірної масової сили у стандартному базисі) формули (8.5.5)-(8.5.6) збігаються з (7.2.8)-(7.2.9).

Висунемо додаткові умови на значення повузлового розподілу рівномірної масової сили:

$$\left. \begin{aligned} p &> 0, \\ p_9 = \frac{1-8p}{12} &> 0, \\ p_9 &> p. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.7)$$

Розв'язком системи (8.5.7) є діапазон $p \in \left(0, \frac{1}{20}\right)$, у якому всі

вузлові значення розподілу рівномірної масової сили додатні, а серединні – більше кутових, що є найбільш природним з фізичної точки зору.

Зауваження. Від формул алгебро-геометричного методу (8.5.5)-(8.5.6) можна перейти до формул когнітивно-графічного методу побудови ієрархічних базисів СЕ (8.1.5)-(8.1.6) за допомогою підстановки:

$$p = p_1(K) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{6}K. \quad (8.5.8)$$

8.6. Побудова базисних функцій ССЕ-20, які задовольняють критеріям гармонічності

Для побудови базисних функцій, які задовольняють критеріям гармонічності на просторовому ССЕ-20 в системі (7.5.3) замість гіпотези про збіжність значень теоретичного і експериментального спектрів використаємо **інтегральний критерій Привалова** для просторового дискретного елемента (формула (6.5.2)) [6; 42; 60].

На ССЕ-20 базисні функції будемо шукати у вигляді:

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(A\xi\eta + A\xi\zeta + AF\eta\zeta + B\xi + B\eta + B\zeta + 1). \quad (8.6.1)$$

$$N_9 = k_9(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(Q\eta + G\zeta + 1). \quad (8.6.2)$$

Систему рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k=9, 12, 13; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=9; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= N_1(0;0;0) = k_1; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= N_9(0;0;0) = k_9; \\ 8k_1 + 12k_9 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.6.3)$$

Система (8.6.3) має розв'язок, тобто існують функції, які задовольняють критерію Привалова:

$$N_1 = \frac{1}{40}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(3(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + (\xi + \eta + \zeta) - 1). \quad (8.6.4)$$

Для проміжної функції:

$$N_9 = \frac{1}{10}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)\left(1 - \left(G + \frac{3}{2}\right)\eta + G\zeta\right). \quad (8.6.5)$$

Повузлові навантаження рівномірної масової сили (обчислені за формулою (7.1.3)) для кутових функцій цього базису дорівнюють $-\frac{1}{40}$, для проміжних $\frac{1}{10}$. Значення повузлового розподілу не залежать від G , яка зникає при інтегруванні.

Щоб побудувати базисні функції, які задовольняють **інтегральному критерію Кьобе** (формула (6.5.3)), систему рівнянь запишемо наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k=9, 12, 13; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=9; \\ \frac{1}{24} \oint\!\!\!\oint N_1 ds &= N_1(0;0;0) = k_1; \\ \frac{1}{24} \oint\!\!\!\oint N_9 ds &= N_9(0;0;0) = k_9; \\ 8k_1 + 12k_9 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.6.6)$$

Система (8.6.6) має розв'язок:

$$N_1 = \frac{1}{184}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(15(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + 7(\xi + \eta + \zeta) - 1). \quad (8.6.7)$$

$$N_9 = \frac{2}{23}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)\left(1 - \left(G + \frac{15}{8}\right)\eta + G\zeta\right). \quad (8.6.8)$$

Повузлові навантаження рівномірної масової сили (обчислені за формулою (7.1.3)) для кутових функцій цього базису дорівнюють $-\frac{3}{184}$, для проміжних $\frac{13}{138}$.

Перевірка за критерієм Лапласа показує, що на ССЕ-20 неможливо побудувати базисні функції, які б задовольняли одночасно диференціальному критерію та інтерполяційній гіпотезі Лагранжа.

8.7 Багатопараметричні базиси трикватратичного скінченного елемента

Поставимо задачу: з метою оптимізації інтерполяційних якостей базисів трикватратичного елемента побудувати всі можливі варіанти систем базисних функцій на ССЕ-20, кількість доданків інтерполяційного полінома у яких більша, ніж у стандартного.

Побудовані модифіковані базиси за допомогою нових методів на просторових скінченних елементах дають можливість висунути гіпотезу стосовно можливої кількості степенів вільності в інтерполяційних поліномах просторових СЕ (табл. 8.7.1).

Таблиця 8.7.1

Характеристики СЕ n -го порядку у просторі

	Лагранжеві СЕ	Серендипові СЕ
Кількість вузлів інтерполяції	$(n + 1)^3$	$12n - 1$
Порядок інтерполяційного полінома	$3n$	Від $(n + 2)$ до $3n$
Кількість доданків інтерполяційного полінома	$(n + 1)^3$	Від $12n - 4$ до $(n + 1)^3$

Існування подібної залежності для двовимірних елементів (ССЕ-8, ССЕ-12, ССЕ-16) наведено у табл. 5.8.7.

Як видно з таблиці, для модифікованих базисів просторових ССЕ n -го порядку за рахунок появи «позавузлових» степенів вільності кількість мономів у інтерполяційному поліномі може змінюватись від $12n - 4$ (стандартний елемент серендипової сім'ї) до $(n + 1)^3$ (елемент лагранжевої сім'ї). На просторових елементах вдалося в окремих випадках сконструювати базиси з більшою, ніж у стандартного базису, кількістю степенів вільності на кожному з елементів: на трикватратичному [3; 64], на трикубічному [61; 65; 76], на ССЕ 4-го порядку [3; 81].

Розглянемо трикватратичний скінченний елемент серендипової сім'ї (ССЕ-20) (рис. 8.7.1). У англійській літературі цей елемент позначають $H20$ (hexahedron). За допомогою прямого геометричного моделювання і ймовірно-геометричного методу на ССЕ-20 побудовані модифіковані системи базисних функцій, які мають 26 мономів у інтерполяційному поліномі [3; 64].

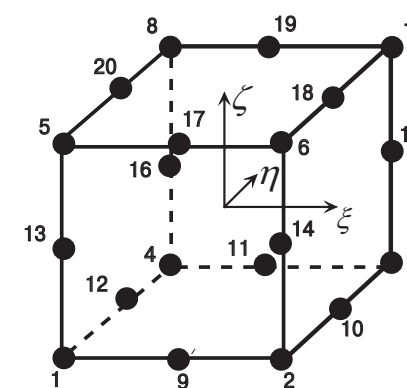


Рис. 8.7.1. ССЕ-20
($|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1, |\zeta| \leq 1$)

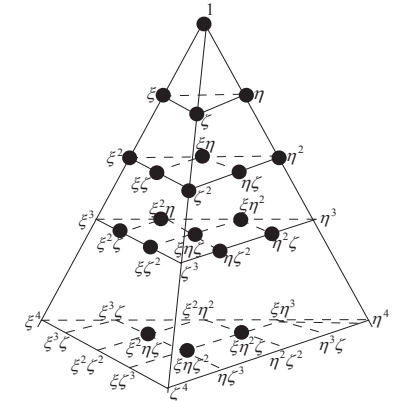


Рис. 8.7.2. Схема Паскаля
для просторового ССЕ-20
(20 мономів)

Аналіз схеми Паскаля дозволив визначити, що без порушення геометричної ізотропії можна утворити комбінації з кількістю мономів від 21 до 27. До того ж, ці комбінації можуть бути різними. Їх можлива кількість вказана в табл. 8.7.2.

Таблиця 8.7.2

27 мономів	1 варіант
26 мономів	2 варіанти
25 мономів	1 варіант
24 мономи	5 варіантів
23 мономи	6 варіантів
22 мономи	3 варіанти
21 моном	5 варіантів

Зауважимо, що не всі варіанти інтерполяційних поліномів (табл. 8.7.2) є цікавими для методу скінченних елементів. З одного боку, зростання порядку інтерполяційного поліному покращує збіжність методу скінченних елементів. З іншого боку, варіанти поліномів, в яких доданки більш високого степеня з'являються за рахунок виключення обов'язкових мономів більш низького степеня, приводять до суттєвого зростання порядку похибки і погіршення збіжності МСЕ [16]. У даній роботі такі варіанти інтерполяційних поліномів не розглядаються.

Ефективним при розв'язанні задачі побудови модифікованих базисів виявився новий *комбінований алгебро-геометричний метод*. Цей метод побудови базису серендипового скінченного елемента ефективно об'єднує традиційний алгебраїчний метод та геометричне моделювання базису СЕ [3; 61; 64; 65; 76].

Побудова базису ССЕ-20

з 27-ма мономами в інтерполяційному поліномі

У комбінованому алгебро-геометричному методі з геометричних міркувань базисна функція для вузла 1 а priori записується з лівих частин рівнянь трьох граней куба ($1 - \xi = 0$, $1 - \eta = 0$, $1 - \zeta = 0$) та поверхні третього порядку з невідомими коефіцієнтами, яка повинна проходити через вузли 9, 12, 13:

$$N_1 = k_1(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \times (A\xi\eta\zeta + B\xi\eta + B\xi\zeta + B\eta\zeta + C(\xi + \eta + \zeta) + 1). \quad (8.7.1)$$

Базисна функція для вузла 9 будується з лівих частин рівнянь чотирьох граней куба ($1 \pm \xi = 0$, $1 - \eta = 0$, $1 - \zeta = 0$) та поверхні другого порядку з невідомими коефіцієнтами:

$$N_9 = k_9(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta)(Q\eta\zeta + R\eta + R\zeta + 1). \quad (8.7.2)$$

Для пошуку коефіцієнтів k_1 , k_9 , A , B , C , Q , R побудуємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 9, 12, 13; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 9; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= p; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1-8p}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7.3)$$

де p – параметр, що дозволяє керувати серендиповою поверхнею на СЕ.

Розв'язавши систему (3), отримуємо базисні функції з параметром p :

$$N_1 = \frac{1}{64}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(-9\xi\eta\zeta(1 - 24p) + (1 - 216p)(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta + \xi + \eta + \zeta) + 216p - 1), \quad (8.7.4)$$

$$N_9 = -\frac{1}{32}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta) \times (-3\eta\zeta(1 - 24p) + (1 + 72p)(\eta + \zeta) + 72p - 3). \quad (8.7.5)$$

Решта функцій утворюються з (8.7.4) і (8.7.5) шляхом циклічного переставлення ξ , η , ζ .

Інтерполяційний поліном цієї моделі має 27 мономів (рис. 8.7.3).

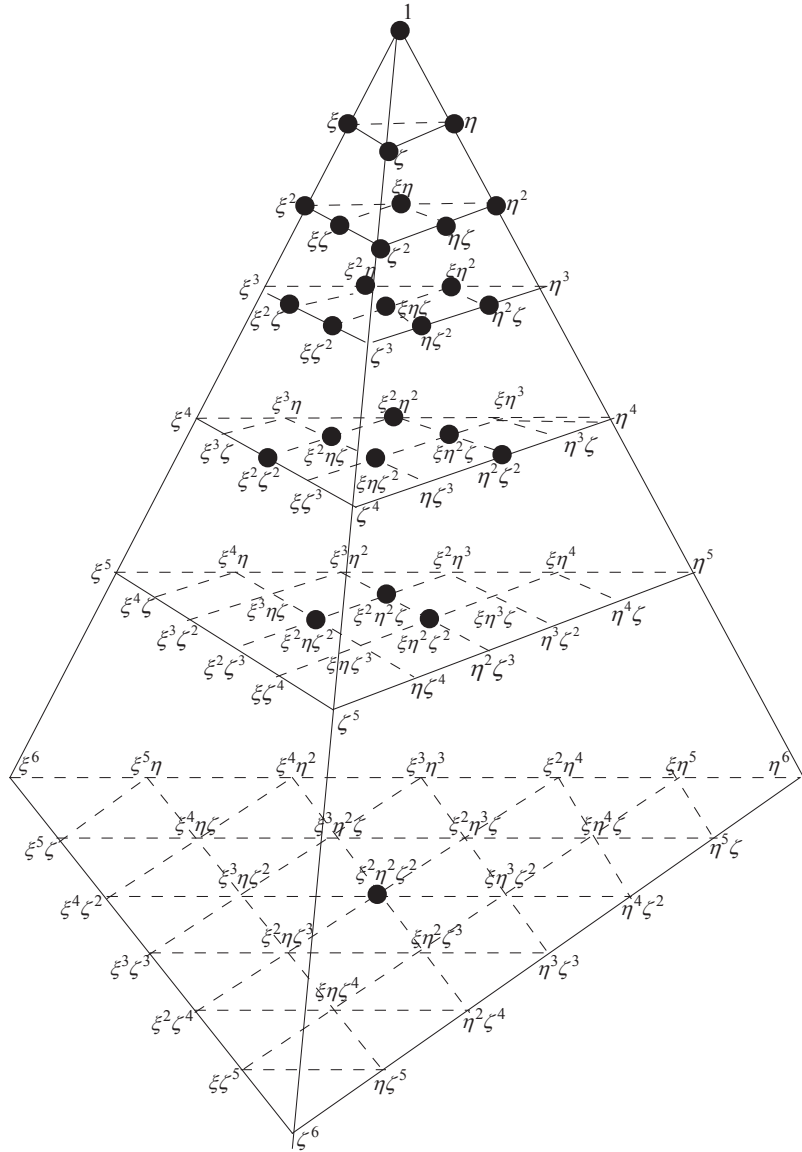


Рис. 8.7.3. Піраміда Паскаля для CSE-20 (27 мономів)

Побудова базису CSE-20 з 26-ма мономами в інтерполяційному поліномі

Базисна функція для вузла 1 будується з лівих частин рівнянь трьох граней куба ($1-\xi=0$, $1-\eta=0$, $1-\zeta=0$) та поверхні другого порядку з невідомими коефіцієнтами, яка проходить через вузли 9, 12, 13 скінченного елемента:

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \times (A\xi\eta + B\xi\zeta + C\eta\zeta + D\xi + D\eta + D\zeta + 1). \quad (8.7.6)$$

Базисна функція для вузла 9 будується з лівих частин рівнянь чотирьох граней куба ($1 \pm \xi=0$, $1-\eta=0$, $1-\zeta=0$) та площини, яка паралельна вісі $O\xi$:

$$N_9 = k_9(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(Q\eta + G\zeta + 1). \quad (8.7.7)$$

Для пошуку коефіцієнтів k_1 , k_9 , A , B , C , D , Q , G побудуємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k=9, 12, 13; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=9; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= p; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1-8p}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7.8)$$

де p – параметр, що дозволяє керувати серендитовою поверхнею на СЕ.

Розв'язавши систему (8.7.8), отримуємо базисні функції з параметром p :

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)((3+24p) \times (\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + (2+48p)(\xi + \eta + \zeta) + (1+72p)), \quad (8.7.9)$$

$$N_9 = -\frac{1}{16}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \times \\ \times \left[(3+G+24p(1-G))\eta + (24p-1)G\zeta + (24p-1) \right]. \quad (8.7.10)$$

Модифіковані базисні функції (8.7.9), (8.7.10) триквадратичного СЕ мають 26 степенів вільності в інтерполяційному поліномі (рис. 8.7.4).

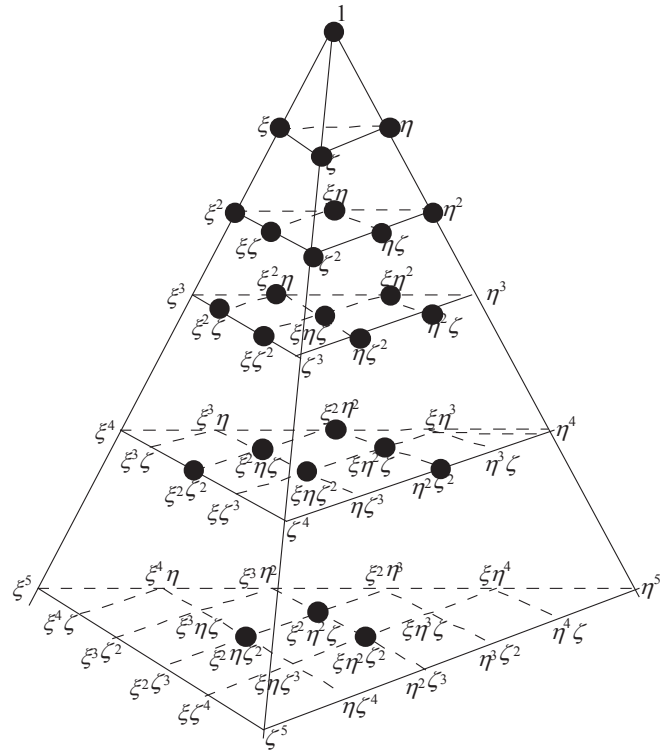


Рис. 8.7.4. Піраміда Паскаля для ССЕ-20 (26 мономів)
Побудова базису ССЕ-20 з 24-ма мономами
в інтерполяційному поліномі

Базисна функція для вузла 1 будується з лівих частин рівнянь трьох граней куба, що є протилежними вузлу 1 та поверхні третього порядку, яка проходить через вузли 9, 12, 13:

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \times \\ \times (A(\xi\eta\zeta + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + B(\xi + \eta + \zeta) + 1). \quad (8.7.11)$$

Базисна функція для вузла 9 будується з лівих частин рівнянь чотирьох граней куба, що є протилежними вузлу 9 та поверхні другого порядку з невідомими коефіцієнтами:

$$N_9 = k_9(1-x^2)(1-y)(1-z)(Q\eta\zeta + Q\eta + Q\zeta + 1). \quad (8.7.12)$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів k_1 , k_9 , A , B , Q побудуємо систему рівнянь з урахуванням симетрії «кутової» базисної функції N_1 , відносно діагональної площини 1-3-7-5 (рис. 8.7.1):

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k=9; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=9; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= p; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1-8p}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7.13)$$

Розв'язавши систему (8.7.13), отримуємо базисні функції з параметром p :

$$N_1 = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \times (27(1+8p)(\xi\eta\zeta + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + \\ + (19+216p)(\xi + \eta + \zeta) + 11+216p). \quad (8.7.14)$$

$$N_9 = -\frac{1}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(9(1+8p)(\eta\zeta + \eta + \zeta) + 1). \quad (8.7.15)$$

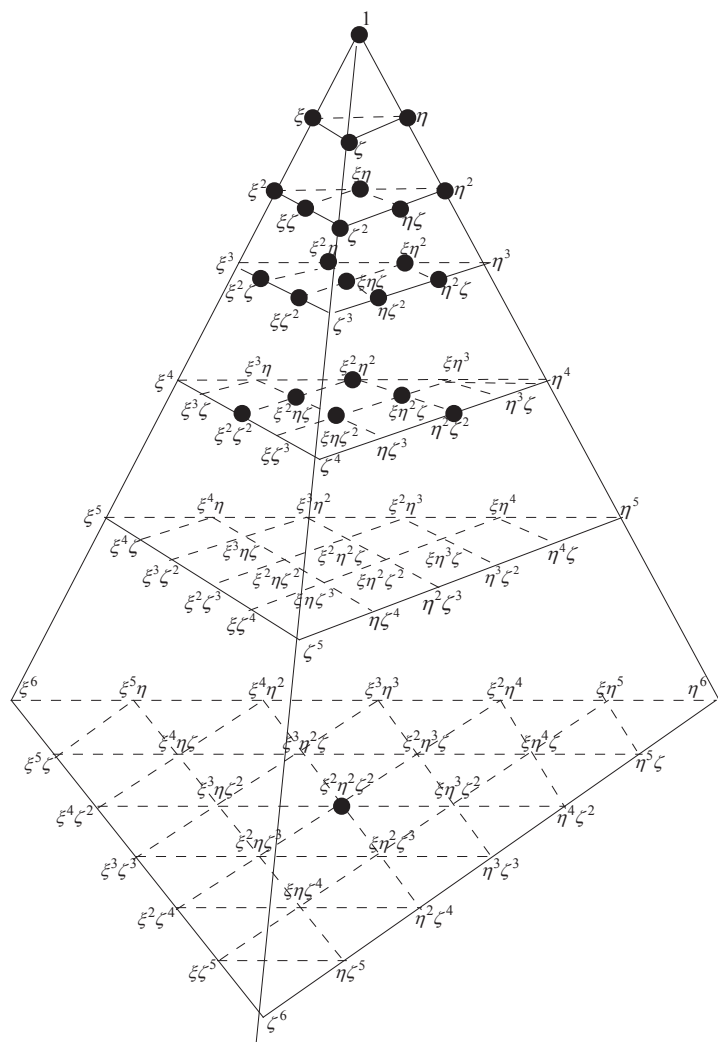


Рис. 8.7.5. Піраміда Паскаля для CSE-20 (24 мономи)

Отримані функції відповідають всім властивостям базису просторового CSE [1; 3] і мають 24 степені вільності (рис. 8.7.5). Решта функцій утворюються з (8.7.14), (8.7.15) шляхом циклічного переставлення ξ, η, ζ .

Побудова базису CSE-20 з 22, 23, 25-ма мономами в інтерполяційному поліномі

Розв'язати задачу побудови базисів з 22, 23, 25-ма мономами в інтерполяційному поліномі на CSE-20 комбінованим алгебро-геометричним методом не вдалося. За допомогою матричного методу побудови базисних функцій були перевірені всі можливі комбінації мономів у цих інтерполяційних поліномах (табл. 8.7.2). Наприклад, у випадку 25-ти мономів на CSE-20 було обрано інтерполяційний поліном з 25-ма доданками, які зображені на рис. 8.7.6. Для пошуку невідомих коефіцієнтів будувалась система лінійних алгебраїчних рівнянь (25×25) з використанням інтерполяційної гіпотези типу Лагранжа:

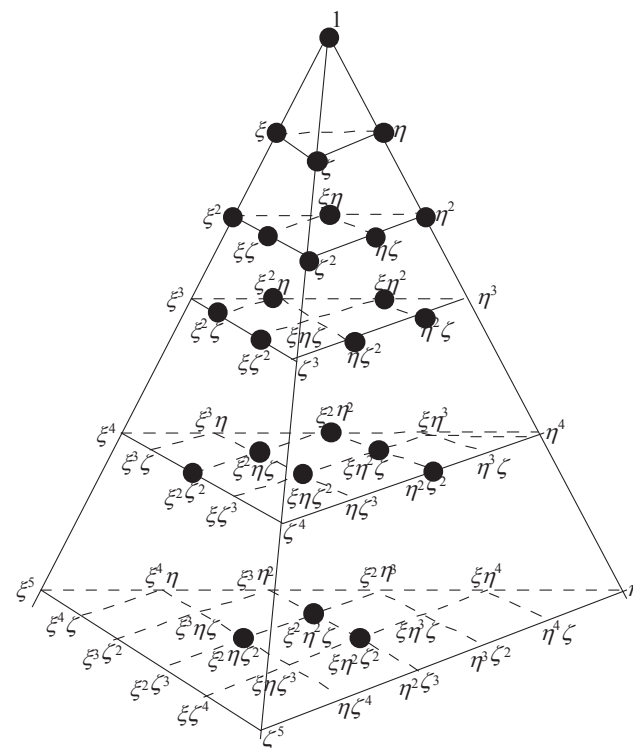


Рис. 8.7.6. Піраміда Паскаля для CSE-20 (25 мономів)

$$N_i(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = \delta_{ik} \quad (8.7.16)$$

де i – номер полінома; k – номер вузла; δ_{ik} – символ Кронекера; $i, k = 1, 25$.

Матриця системи виявилась сингулярною. Це має місце і для випадків з 22-ма та 23-ма мономами.

Побудова базису ССЕ-20 з 21 мономом в інтерполяційному поліномі

Цікавим виявився випадок з 21-им мономом в інтерполяційному поліномі. Для побудови такого базису було використано дискретний елемент: куб ($2 \times 2 \times 2$) з 21-им вузлом інтерполяції (8 вузлів у вершинах, 12 на ребрах і 1 вузол у центрі куба) (рис. 8.7.7). В англomовній літературі цей елемент позначають PR-21.

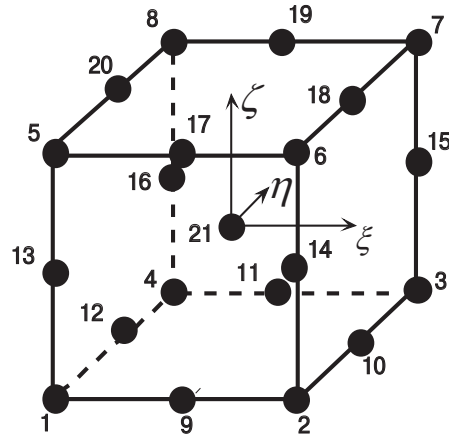


Рис. 8.7.7. Елемент PR-21

Цей дискретний елемент використовувався в розрахунках динаміки конструкцій [16]. Треба зауважити, що в попередніх публікаціях не наведено інтерполяційного базису PR-21. Для побудови базису PR-21 було використано *матричний підхід*, який починається з вибору 21-параметричного полінома з трьома аргументами:

$$\begin{aligned} |\xi| &\leq 1, \\ |\eta| &\leq 1, \\ |\zeta| &\leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi = & \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \xi \zeta + \alpha_7 \eta \zeta + \\ & + \alpha_8 \xi^2 + \alpha_9 \eta^2 + \alpha_{10} \zeta^2 + \alpha_{11} \xi^2 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^2 + \alpha_{13} \eta^2 \zeta + \\ & + \alpha_{14} \eta \zeta^2 + \alpha_{15} \xi^2 \zeta + \alpha_{16} \xi \zeta^2 + \alpha_{17} \xi \eta \zeta + \alpha_{18} \xi^2 \eta \zeta + \\ & + \alpha_{19} \xi \eta^2 \zeta + \alpha_{20} \xi \eta \zeta^2 + \alpha_{21} \xi^2 \eta^2 \zeta^2. \end{aligned} \quad (8.7.17)$$

Базис елемента складається з 21-го полінома, які підпорядковані гіпотезі типу Лагранжа (8.7.16). Розв'язавши СЛАР (21×21), знайдемо невідомі параметри α_i і запишемо інтерполяційний поліном (8.7.17) у вигляді:

$$\phi = [N_i] \{\Phi_i\}, \quad (8.7.18)$$

де $[N_i]$ – матриця-рядок базисних функцій СЕ ($i = \overline{1, 21}$);

$\{\Phi_i\}$ – вектор значень функції, що інтерполюється.

Отримуємо базисні функції для PR-21:

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{1}{8} (\xi + \eta + \zeta - \xi^2 \eta - \xi \eta^2 - \eta^2 \zeta - \eta \zeta^2 - \xi^2 \zeta - \\ & - \xi \zeta^2 - \xi \eta \zeta + \xi^2 \eta \zeta + \xi \eta^2 \zeta + \xi \eta \zeta^2 + \xi^2 \eta^2 \zeta^2); \end{aligned} \quad (8.7.19)$$

$$\begin{aligned} N_9 = & \frac{1}{4} (-\eta - \zeta + \eta \zeta - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \zeta^2 + \\ & + \xi^2 \eta + \xi^2 \zeta - \xi^2 \eta \zeta - \frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 \zeta^2); \end{aligned} \quad (8.7.20)$$

$$N_{21} = 1 - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 \zeta^2. \quad (8.7.21)$$

При цьому має зберігатися ваговий баланс:

$$\sum_{i=1}^{21} N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1. \quad (8.7.22)$$

Щоб отримати базисні функції ССЕ-20, скористаємось відомою у МСЕ *процедурою виключення внутрішнього вузла*, наприклад, за формулами [16]:

$$N_1^{(CCE-20)} = N_1^{(PR-21)} + w_1 \cdot N_{21}^{(PR-21)}, \quad (8.7.23)$$

$$N_9^{(CCE-20)} = N_9^{(PR-21)} + w_2 \cdot N_{21}^{(PR-21)}. \quad (8.7.24)$$

Використовуючи значення коефіцієнтів $w_1 = -\frac{1}{8}$ і $w_2 = \frac{1}{6}$, отримаємо базисні функції для ССЕ-20, поверхні нульового рівня яких показано на рис. 8.7.8.

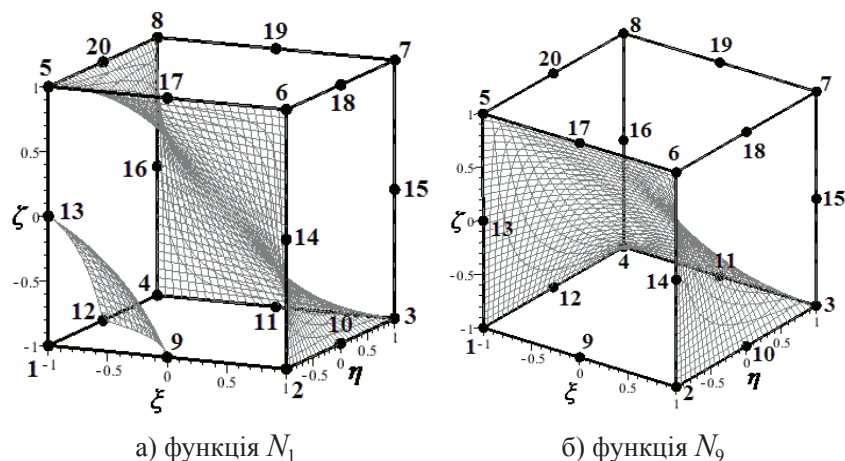


Рис. 8.7.8. Поверхні нульового рівня базисних функцій моделі ССЕ-20 з 21 мономом

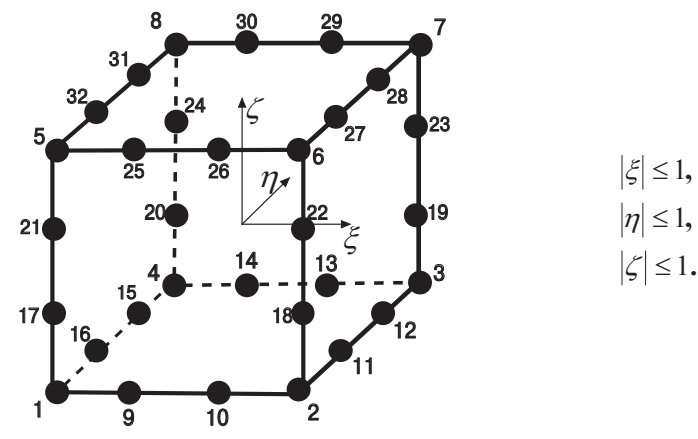
Зауваження. Аналіз поверхонь нульового рівня (рис. 8.7.8) дозволяє знайти відповідь на питання: чому неможливо знайти розв'язок системи (типу (3)) з 21-им мономом в інтерполяційному поліномі *комбінованим алгебро-геометричним методом*? Це відбувається тому, що серед поверхонь нульового рівня немає поверхонь, що асоціюються з гранями куба, що є протилежними вузлам 1 (рис. 8.7.8 а) і 9 (рис. 8.7.8 б), які *a priori* задаються у комбінованому алгебро-геометричному методі.

Висновки. За допомогою нових методів моделювання базисів серендипових скінченних елементів на ССЕ-20 отримано всі можливі модифіковані базиси, що мають кількість степенів вільності більшу, ніж у стандартного полінома. Цікавим є тестування отриманих базисних функцій при розв'язанні практичних задач методом скінченних елементів.

РОЗДІЛ 9 ТРИКУБІЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ

9.1. Матричний метод побудови базису трикубичної інтерполяції. Метод Тейлора

На рис. 9.1.1 зображено трикубичний скінченний елемент серендипової сім'ї з 32-ма вузлами (ССЕ-32). В англійській літературі цей елемент позначають *H32* (hexahedron) [86].



$$\begin{aligned} |\xi| &\leq 1, \\ |\eta| &\leq 1, \\ |\zeta| &\leq 1. \end{aligned}$$

Рис. 9.1.1. ССЕ з кубічним законом інтерполяції

Для отримання базису ССЕ-32 *алгебраїчним методом* треба скласти і розв'язати систему з 32 рівнянь, які підпорядковані інтерполяційній гіпотезі типу Лагранжа (див. формулу (7.1.1)) та умові вагового балансу (див. формулу (7.1.2)) [44; 45].

Для побудови *стандартного* базису на ССЕ-32 можна також скористатися *процедурою Тейлора* [63; 102]. Спочатку будуємо «проміжні» функції, у яких змінні відокремлені:

$$N_9(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), \quad (9.1.1)$$

$$N_{10}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), \quad (9.1.2)$$

$$N_{15}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1 - \eta^2)(1 + 3\eta)(1 - \xi)(1 - \zeta), \quad (9.1.3)$$

$$N_{16}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1 - \eta^2)(1 - 3\eta)(1 - \xi)(1 - \zeta), \quad (9.1.4)$$

$$N_{17}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1 - \zeta^2)(1 - 3\zeta)(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (9.1.5)$$

$$N_{21}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1 - \zeta^2)(1 + 3\zeta)(1 - \xi)(1 - \eta). \quad (9.1.6)$$

Для функції $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ скористаємося формулою:

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_1 - \frac{1}{3}(N_{10} + N_{15} + N_{21}) - \frac{2}{3}(N_9 + N_{16} + N_{17}), \quad (9.1.7)$$

$$\text{де } \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta).$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{64}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19). \quad (9.1.8)$$

Взагалі, для вузлів у вершинах кубу:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{64}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta)(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19),$$

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = \overline{1, 8}. \quad (9.1.9)$$

Для вузлів на ребрах куба:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta),$$

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \quad \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30. \quad (9.1.10)$$

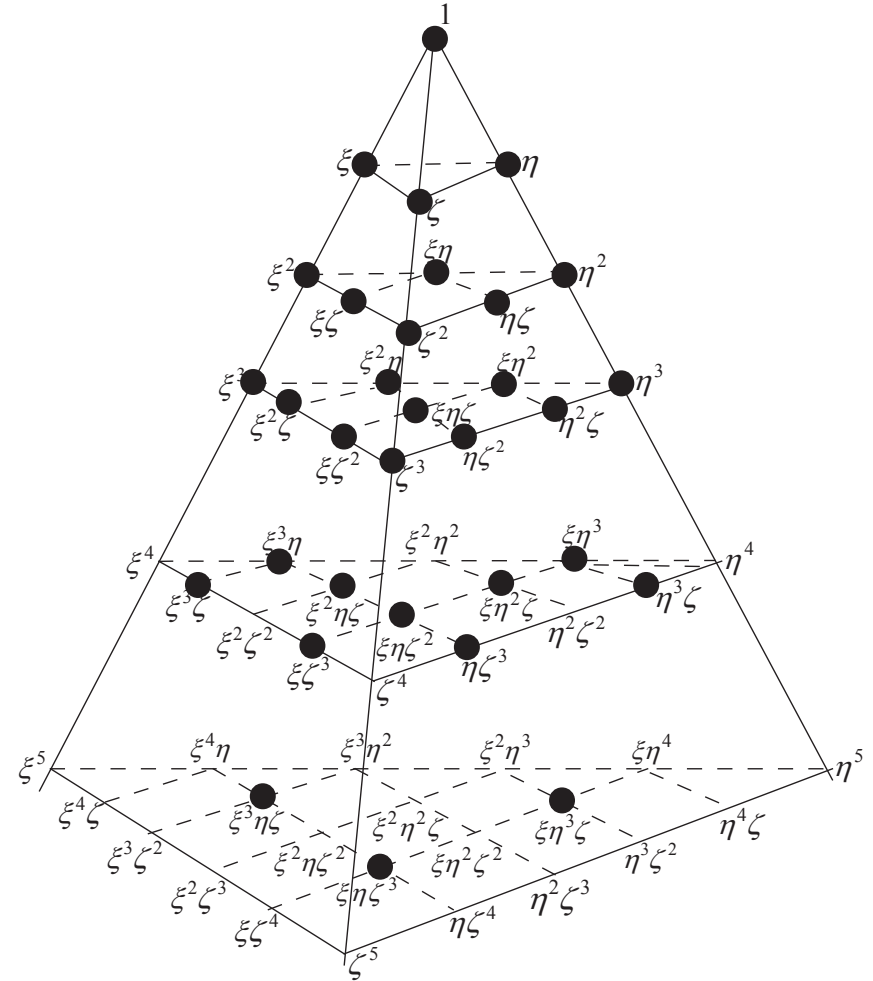


Рис. 9.1.2. Схема Паскаля для просторового ССЕ-32 (32 параметри) (стандартна модель)

Решта функцій утворюються з (9.1.10) шляхом циклічного переставлення ξ, η, ζ . Ця модель інтерполяційного поліному нарахує 32 параметри, які показані на рис. 9.1.2.

В «кутових» поліномах неважко помітити рівняння сфери, яка проходить через всі «проміжні» вузли. Саме вона спричиняє виникнення небажаних кратних (подвійних та потрійних) нулів у вузлах.

Модель (9.1.9), (9.1.10) має неприродний розподіл вузлових навантажень з від'ємними значеннями в «кутових» вузлах (див. табл. 7.1.2).

9.2. Геометричний метод конструювання базисних функцій трикубічного елемента

Складні проблеми просторових ССЕ вищих порядків краще розв'язувати методами прикладної геометрії [31; 32; 73; 82]. Покажемо, як реалізується процедура геометричної побудови базису ССЕ-32. Зрозуміло, що для побудови базису, що має 32 функції достатньо побудувати дві: $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ і $N_9(\xi, \eta, \zeta)$.

I модель. Базисну функцію для вузла 1 зручно задати як добуток функцій, кожна з яких дорівнює одиниці в точці (-1;-1;-1) і які асоціюються з поверхнями (рис. 9.2.1):

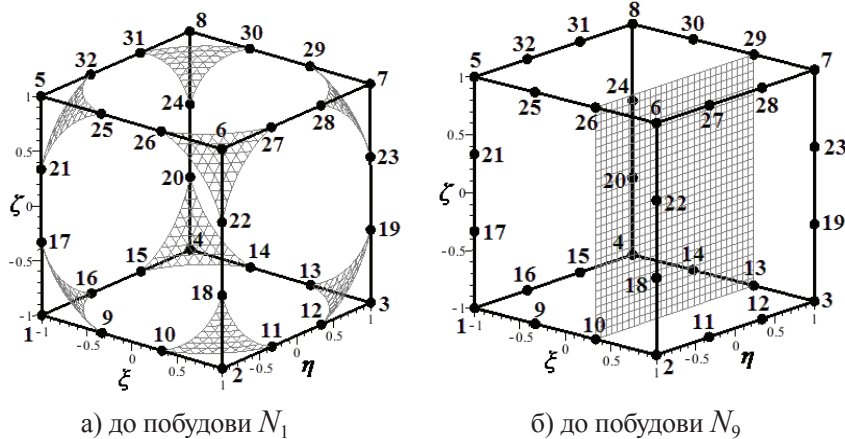


Рис. 9.2.1. До геометричної побудови стандартних базисних функцій ССЕ-32 (модель зі сферою)

1) площиною 2-3-7-6:

$$N_1^{(1)}(\xi) = \frac{1-\xi}{2},$$

2) площиною 3-4-8-7:

$$N_1^{(2)}(\eta) = \frac{1-\eta}{2},$$

3) площиною 5-6-7-8 :

$$N_1^{(3)}(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2},$$

4) сферою, що проходить через всі проміжні вузли (рис. 9.2.1 а):

$$N_1^{(4)}(\xi, \eta, \zeta) = (9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19).$$

Отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = N_1^{(1)}(\xi) \cdot N_1^{(2)}(\eta) \cdot N_1^{(3)}(\zeta) \cdot N_1^{(4)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19). \quad (9.2.1)$$

Базисну функцію для вузла 9 зручно задати як добуток функцій, які асоціюються з поверхнями (рис. 9.2.1):

1) площиною 2-3-7-6:

$$N_9^{(1)}(\xi) = \frac{3(1-\xi)}{4},$$

2) площиною 3-4-8-7:

$$N_9^{(2)}(\eta) = \frac{1-\eta}{2},$$

3) площиною 5-6-7-8:

$$N_9^{(3)}(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2},$$

4) площиною 1-4-8-5:

$$N_9^{(4)}(\xi) = \frac{3(1+\xi)}{2},$$

5) площиною 10-13-29-26 (рис. 9.2.1 б):

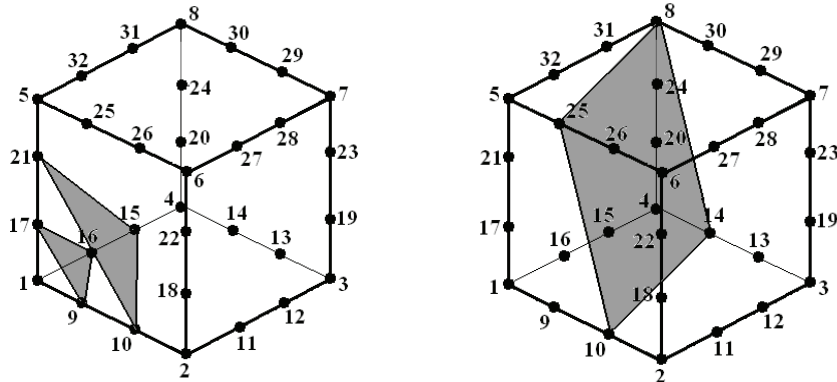
$$N_9^{(5)}(\xi) = \frac{1-3\xi}{2}.$$

Отримуємо базисну функцію для вузла 9:

$$N_9 = N_9^{(1)}(\xi) \cdot N_9^{(2)}(\eta) \cdot N_9^{(3)}(\zeta) \cdot N_9^{(4)}(\xi) \cdot N_9^{(5)}(\xi) = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1-3\xi)(1-\eta)(1-\zeta). \quad (9.2.2)$$

Геометричний аналіз поліномів на ССЕ-32 стимулює пошуки інших (альтернативних) моделей, що задовольняють інтерполяційній гіпотезі Лагранжа і умові збереження вагового балансу.

II модель. Базисну функцію для вузла 1 цієї моделі задамо як добуток функцій, кожна з яких дорівнює одиниці в точці $(-1;-1;-1)$ і які асоціюються з поверхнями (рис. 9.2.2):



а) до побудови N_1

б) до побудови N_9

Рис. 9.2.2. До геометричної побудови модифікованих базисних функцій ССЕ-32 (модель з трикутними пірамідами)

1) площиною 2-3-7-6:

$$N_1^{(1)}(\xi) = \frac{1-\xi}{2},$$

2) площиною 3-4-8-7:

$$N_1^{(2)}(\eta) = \frac{1-\eta}{2},$$

3) площиною 5-6-7-8:

$$N_1^{(3)}(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2},$$

4) площиною 9-16-17 (рис. 9.2.2 а):

$$N_1^{(4)}(\xi, \eta, \zeta) = 3\xi + 3\eta + 3\zeta + 5,$$

5) площиною 10-15-21 (рис. 9.2.2 а):

$$N_1^{(5)}(\xi, \eta, \zeta) = 3\xi + 3\eta + 3\zeta + 7.$$

Отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = N_1^{(1)}(\xi) \cdot N_1^{(2)}(\eta) \cdot N_1^{(3)}(\zeta) \cdot N_1^{(4)}(\xi, \eta, \zeta) \cdot N_1^{(5)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(3\xi + 3\eta + 3\zeta + 5)(3\xi + 3\eta + 3\zeta + 7). \quad (9.2.3)$$

Взагалі, для «кутових» вузлів:

$$N_i = \frac{1}{64}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \times (-3\xi_i \xi - 3\eta_i \eta - 3\zeta_i \zeta + 5)(-3\xi_i \xi - 3\eta_i \eta - 3\zeta_i \zeta + 7), \quad \xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, \quad i = \overline{1, 8}. \quad (9.2.4)$$

Базисну функцію для вузла 9 зручно задати як добуток функцій, які асоціюються з поверхнями (рис. 9.2.2):

1) площиною 2-3-7-6:

$$N_9^{(1)}(\xi) = \frac{3(1-\xi)}{4},$$

2) площиною 3-4-8-7:

$$N_9^{(2)}(\eta) = \frac{1-\eta}{2},$$

3) площиною 5-6-7-8:

$$N_9^{(3)}(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2},$$

4) площиною 1-4-8-5:

$$N_9^{(4)}(\xi) = \frac{3(1+\xi)}{2},$$

5) площиною 10-14-25 (рис. 9.2.2 б):

$$N_9^{(5)}(\xi) = \frac{-3\xi - \eta - \zeta - 1}{2}.$$

Базисна функція для вузла 9:

$$N_9 = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta)(-3\xi - \eta - \zeta - 1). \quad (9.2.5)$$

Для «проміжних» вузлів:

$$N_i = \frac{9}{64}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta)(9\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 1),$$

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i, \zeta_i = \pm 1 \quad i = 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30. \quad (9.2.6)$$

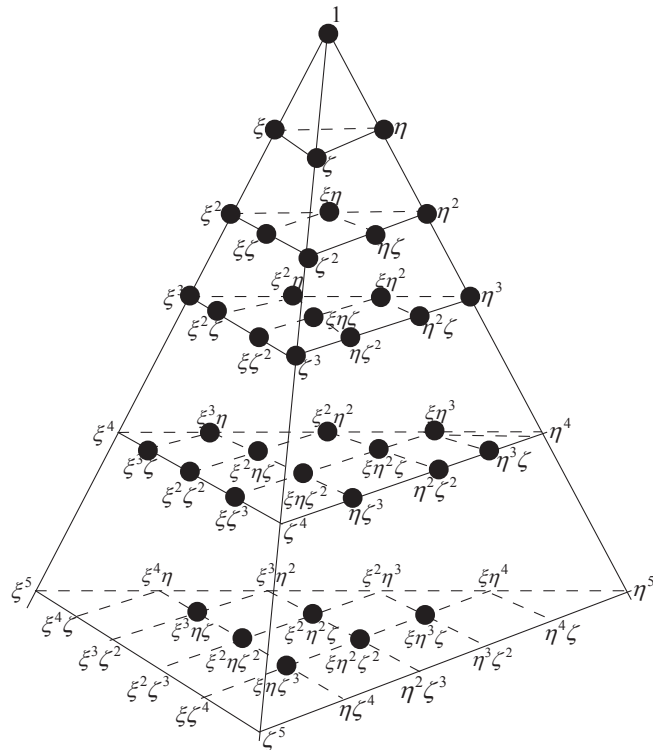


Рис. 9.2.3. Схема Паскаля для просторового ССЕ-32 (38 параметрів)

Зауважимо, що в рамках алгебраїчного підходу таку інтерполяцію з 38-ма параметрами (рис. 9.2.3) можна отримати лише на гранецентрованому СЕ [73]. Перевага геометричного моделювання полягає в тому, що виникає можливість поліпшення інтерполяційного поліному за рахунок додаткових параметрів, які з'являються без використання додаткових вузлів.

9.3. Ймовірісно-геометричний метод на трикубичному елементі

Перевага геометричного та ймовірісно-геометричного методів полягає в тому, що за їх допомогою можна будувати альтернативні (модифіковані) базиси, що містять «приховані» параметри інтерполяції [82].

I варіант. Побудуємо спочатку на ССЕ-32 **модифікований базис (II модель)**. Процедура побудови $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ потребує розбиття ССЕ-32 на прості піделементи зі спільною вершиною у вузлі 1. У даному випадку ми будемо розглядати три піделементи: куб 1-2-3-4-5-6-7-8 і два тетраедра 1-9-16-17 та 1-10-15-21 (рис. 9.3.1 а). У кожному піделементі вибирається поточна точка $M(\xi, \eta, \zeta)$, яка розбиває піделемент на підобласті. У кожному піделементі нас цікавить підобласть, що є протилежною вузлу 1. У кубі 1-2-3-4-5-6-7-8 протилежна область – це прямокутний паралелепіпед з діагоналлю $M-7$ (ребра паралелепіпеда паралельні ребрам ССЕ) (див. рис. 6.2.1 а), а в тетраедрі 1-9-16-17 (рис. 9.3.1 а) – це тетраедр $M-9-16-17$ (точка M знаходиться всередині 1-9-16-17), а в тетраедрі 1-10-15-21 (рис. 9.3.1 а) – це тетраедр $M-10-15-21$ (точка M знаходиться всередині 1-10-15-21). (Детальніше реалізацію ймовірісно-геометричного методу в тетраедрі можна подивитись в додатку, параграф 2). Ймовірність того, що випадкова точка влучила в область, що є протилежною вузлу 1, обчислюється за означенням геометричної ймовірності (формула (1.3.1)). Таким чином, для куба маємо

$$N_1^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta).$$

У тетраедрах достатньо знайти відносну відстань від вершини M до протилежної грані. В піделементі 1-9-16-17 маємо

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(-3\xi - 3\eta - 3\zeta - 7),$$

в піделементі 1-10-15-21

$$N_1^{(3)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(-3\xi - 3\eta - 3\zeta - 5).$$

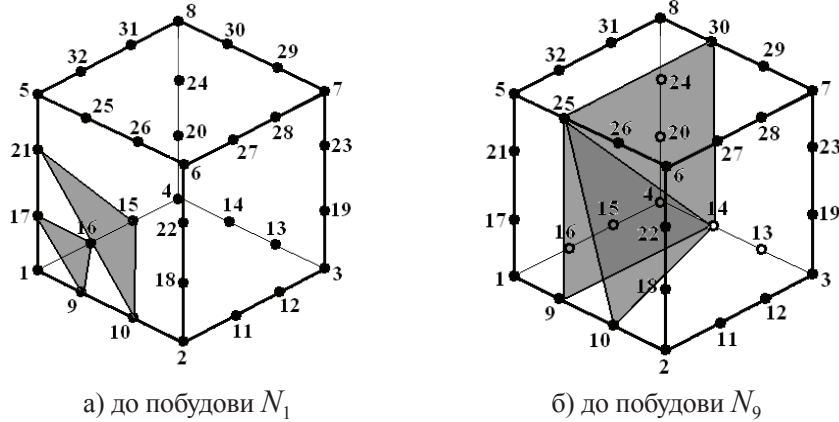


Рис. 9.3.1. До ймовірно-геометричного методу побудови базису ССЕ-32 (модель з тетраедрами)

Ймовірність поєднання незалежних подій знаходиться за правилом добутку ймовірностей:

$$N_1 = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(3\xi+3\eta+3\zeta+5)(3\xi+3\eta+3\zeta+7). \quad (9.3.1)$$

Взагалі, для вузлів у вершинах:

$$N_i = \frac{1}{64}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \times \\ \times (-3\xi_i\xi - 3\eta_i\eta - 3\zeta_i\zeta + 5)(-3\xi_i\xi - 3\eta_i\eta - 3\zeta_i\zeta + 7), \\ i = \overline{1, 8}, \xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1. \quad (9.3.2)$$

Щоб отримати $N_9(\xi, \eta, \zeta)$, розіб'ємо ССЕ-32 на прості піделементи зі спільною вершиною у вузлі 9 (рис. 9.3.1 б). Це два прямокутних паралелепіпеда 9-2-3-14-25-6-7-30 і 9-14-4-1-5-25-30-8, і піраміда 9-10-14-25. Зауважимо, що протилежна вузлу грань піраміди (паралелепіпеда) повинна проходити через вузол 10, щоб забезпечити виконання інтерполяційної гіпотези (7.1.1) і умови збереження вагового балансу (7.1.2).

Як і у попередньому випадку, достатньо обчислити геометричні ймовірності попадання випадкових точок у протилежні області кожного піделементу і результати перемножити. При цьому отримуємо:

$$N_9(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(-3\xi - \eta - \zeta - 1). \quad (9.3.3)$$

Взагалі, для «проміжних» вузлів 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(9\xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta - 1), \\ \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad \eta_i, \zeta_i = \pm 1. \quad (9.3.4)$$

Функції форми для решти вузлів отримуємо з (9.3.4) за допомогою циклічного переставлення ξ, η, ζ . Базис (9.3.2), (9.3.4) має 38 параметрів (рис. 9.2.3).

Щоб переконатися в універсальності ймовірно-геометричного методу, побудуємо **стандартний базис ССЕ-32 (I модель)**. Для побудови $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ в якості простих піделементів використаємо куб і тетраедр із скривленою гранню. Елементи зі скривленою гранню у МСЕ мають самостійне значення [37], а на серендипових елементах використовуються у якості простих піделементів.

Для куба ми вже обчислювали (розділ 6.2) ймовірність $N_1^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$. В тетраедрі одну грань 9-16-17 (протилежну вузлу 1) замінимо фрагментом сфери $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{19}{9}$. Цікаво, що ця сфера проходить через всі «проміжні» вузли на ребрах і утворює 18 кратних нулів, які, на думку фахівців [47], є небажаними. У тетраедрі зі сферичною гранню область «успішних» результатів – це сферичний шар всередині тетраедра, протилежний вузлу 1. Нас цікавить ймовірність попадання випадкової величини R^2 у проміжок $\left(\frac{19}{9}; \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\right)$. Ця ймовірність обчислюється наступним чином:

$$N_1^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \frac{19}{9}}{3 - \frac{19}{9}} = \frac{9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19}{8}.$$

Остаточно, за формулою добутку ймовірностей незалежних подій отримуємо:

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19). \quad (9.3.5)$$

При обчисленні $N_9(\xi, \eta, \zeta)$ куб розбиваємо на три шестигранника: 9-2-3-14-25-6-7-30, 9-10-13-14-25-26-29-30 і 9-14-4-1-25-30-8-5. Добуток геометричних ймовірностей дає наступний результат:

$$N_9(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1-3\xi)(1-\eta)(1-\zeta). \quad (9.3.6)$$

Обираючи різні композиції з площин і поверхонь нульового рівня для $N_i(\xi, \eta, \zeta)$, можна отримати базиси з більшою кількістю параметрів.

Зауваження. Побудова на SSE-32 базису з фіксованою кількістю параметрів – це самостійна і досить складна задача, яка потребує від дослідника винахідливості і досвіду побудови серендипових апроксимацій.

II варіант. У цьому методі можна для побудови базисної функції, наприклад, **модифікованого базису (II модель)** використовувати формулу (6.2.2) [55].

Для побудови «кутової» базисної функції N_1 за допомогою формули (6.2.2) розглянемо композицію куба 1-2-3-4-5-6-7-8 (див. параграф 6.2) і двох тетраедрів 1-9-16-17 і 1-10-15-21 зі спільною вершиною у вузлі 1.

У тетраедрах 1-9-16-17 і 1-10-15-21 за формулою (6.2.2) отримуємо:

$$PL = \frac{(3\xi + 3\eta + 3\zeta + 7) - 0}{-2 - 0} = \frac{(3\xi + 3\eta + 3\zeta + 7)}{-2} = N_1^{(4)}(\xi, \eta, \zeta).$$

$$PL = \frac{(3\xi + 3\eta + 3\zeta + 5) - 0}{-4 - 0} = \frac{(3\xi + 3\eta + 3\zeta + 5)}{-4} = N_1^{(5)}(\xi, \eta, \zeta).$$

За теоремою добутку ймовірностей незалежних подій отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(3\xi + 3\eta + 3\zeta + 5)(3\xi + 3\eta + 3\zeta + 7). \quad (9.2.7)$$

Щоб побудувати функцію форми для вузла 9, розбиваємо куб на два паралелепіпеда 9-2-3-14-25-6-7-30, 9-14-4-1-25-30-8-5 і тетраедр 9-10-14-25. Ймовірність того, що випадкова точка влучила в область, що є протилежною вузлу 9, у паралелепіпедах обчислюється за означенням геометричної ймовірності (див. формулу (1.3.1)). Таким чином, маємо

$$N_9^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta).$$

Для піраміди 9-10-14-25 скористаємося формулою (6.2.2):

$$PL = \frac{(-3\xi - \eta - \zeta - 1) - 0}{2 - 0} = \frac{-3\xi - \eta - \zeta - 1}{2} = N_9^{(2)}.$$

Базисна функція для вузла 9 записується наступним чином:

$$N_9 = N_9^{(1)} \cdot N_9^{(2)} = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(-3\xi - \eta - \zeta - 1). \quad (9.2.8)$$

9.4. Метод оптимізації інтерполяційних властивостей і обчислювальних якостей базисів SSE-32

Наявність двох базисів (9.1.9), (9.1.10) і (9.2.2), (9.2.4) дає можливість генерувати безліч нових базисів за формулою зваженого усереднення [26]:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \alpha N_i^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) + (1 - \alpha) N_i^{(2)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (9.4.1)$$

де $N_i^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$ – функції першого базису, $N_i^{(2)}(\xi, \eta, \zeta)$ – функції другого базису, α – ваговий коефіцієнт.

Цікаво відзначити, що об'єднання сфери від I моделі і двох паралельних площин від II моделі при $\alpha = \frac{1}{2}$ дає третю модель з еліпсоїдом (рис. 9.4.1 а). Тоді базисна функція для вузла 1:

$$N_1 = \frac{1}{128}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \times (18(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 18(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + 36(\xi + \eta + \zeta) + 16). \quad (9.4.2)$$

Взагалі, для «кутових» вузлів отримуємо

$$N_i = \frac{1}{128}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta)(18(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 18(\xi_i\eta_i\xi\eta + \xi_i\zeta_i\xi\zeta + \eta_i\zeta_i\eta\zeta) + 36(-\xi_i\xi - \eta_i\eta - \zeta_i\zeta) + 16). \quad (9.4.3)$$

$$\xi_i = \pm 1; \eta_i = \pm 1; \zeta_i = \pm 1; i = \overline{1, 8}$$

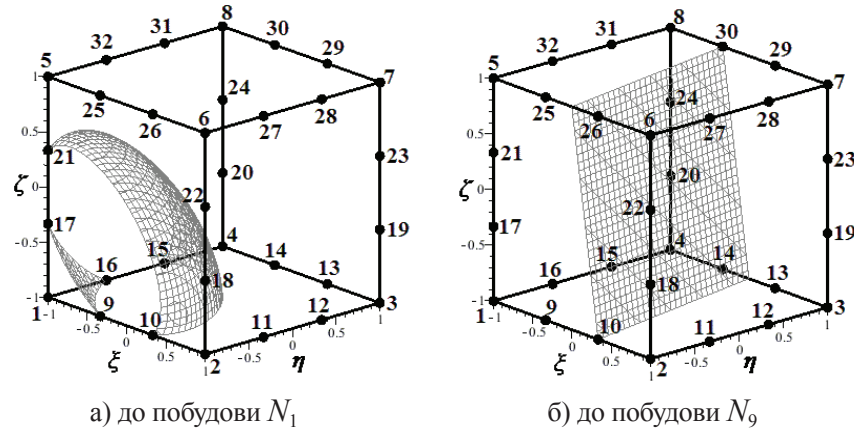


Рис. 9.4.1. Візуалізація поверхонь нульового рівня базисних функцій ССЕ-32 (модель з еліпсоїдом)

Для «проміжного» вузла, наприклад, 9 отримуємо (рис. 9.4.1 б):

$$N_9 = \frac{9}{128} (1 - \xi^2) (1 - \eta) (1 - \zeta) (-6\xi - \eta - \zeta). \quad (9.4.4)$$

Взагалі, для «проміжних» вузлів отримуємо:

$$N_i = \frac{9}{128} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) (18\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta),$$

$$\xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30. \quad (9.4.5)$$

Решта функцій утворюються з (9.4.5) шляхом циклічного переставлення ξ, η, ζ .

Зрозуміло, що формула (9.4.1) не залежить від вимірності простору і моделі елемента. Вона створює привабливі можливості для розв'язування задач оптимізації базисів [71; 74]. Нові моделі будуються за допомогою формули оптимізації з різних міркувань, наприклад, щоб отримати природний розподіл рівномірної масової сили по вузлах СЕ.

9.5. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису ССЕ-32 (обернена задача)

Поставимо задачу: дослідити можливості корекції величин повзулових навантажень на просторовому ССЕ-32.

Використовуючи геометричні уявлення, базисну функцію для вузла 1 побудуємо з рівнянь протилежних граней куба ($\xi = 1, \eta = 1, \zeta = 1$) та поверхні другого порядку, яка проходить через вузли 9, 10, 15, 16, 17, 21 (рис. 9.1.1).

$$N_1 = k_1 (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta + M\xi + M\eta + M\zeta + 1). \quad (9.5.1)$$

Базисну функцію для вузла 9 побудуємо з рівнянь протилежних граней куба ($\xi = \pm 1, \eta = 1, \zeta = 1$) та довільної площини, що проходить через вузол 10 (рис. 9.1.1):

$$N_9 = k_9 (1 - \xi^2) (1 - \eta) (1 - \zeta) (R\xi + Q\eta + G\zeta + 1). \quad (9.5.2)$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів $A, B, C, D, E, F, M, R, Q, G, k_1, k_9$ складемо систему рівнянь, використовуючи властивості базисних функцій (див. формули (7.1.1) і (7.1.2)) та гіпотезу про збіг теоретичного та експериментального значень у повзуловому розподілі рівномірної масової сили (див. формулу (7.1.4)):

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 9, 10, 15, 16, 17, 21; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 9; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 10; \\ 8 \cdot k_1 + 24 \cdot k_9 &= 1; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= C_1 = 0,0212; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= C_9 = 0,0346. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.3)$$

Значення вузлових навантажень C_1, C_2 наведено у табл. 7.1.2.

Запишемо один з варіантів базису ССЕ-32, який є розв'язком системи (9.5.3). Базисна функція для вузла 1 має вигляд:

$$N_1 = \frac{1}{80000}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(11250(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 10647(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + 21294(\xi + \eta + \zeta) + 8191). \quad (9.5.4)$$

Система (9.5.3) має безліч розв'язків завдяки тому, що до складу функції для вузла 9 входить як параметр змінна G :

$$N_9 = \frac{9}{80000}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \times \\ \times (67 - 3750\xi - (67G + 1183)\eta + 67G\zeta).$$

Запишемо базисну функцію для вузла 9 за умови рівності коефіцієнтів Q та G у формулі (9.5.2):

$$N_9 = \frac{9}{160000}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(134 - 7500\xi - 1183(\eta - \zeta)). \quad (9.5.5)$$

Таким чином, базисні функції для «кутових» вузлів мають вигляд:

$$N_i = \frac{1}{80000}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta)(11250(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 10647(\xi\eta_i\xi\eta + \xi_i\zeta_i\xi\zeta + \eta_i\zeta_i\eta\zeta) - 21294(\xi_i\xi\eta_i\eta - \zeta_i\zeta) + 8191) \\ \xi_i = \pm 1; \eta_i = \pm 1; \zeta_i = \pm 1; i = \overline{1, 8}. \quad (9.5.6)$$

Для «проміжних» вузлів:

$$N_i = \frac{9}{160000}(1-\xi^2)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta) \times \\ \times (134 + 22500\xi_i\xi + 1183\eta_i\eta + 1183\zeta_i\zeta), \\ \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \eta_i = \pm 1; \zeta_i = \pm 1; i = 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30. \quad (9.5.7)$$

Решта функцій утворюються з (9.5.7) шляхом циклічного переставлення ξ, η, ζ .

Нова модель 32-вузлового серендипового скінченного елемента задовольняє вимогам міжелементної неперервності та геометричної ізотропії [39], має спектр повузлового розподілу рівномірної масової сили, що відповідає комп'ютерному експерименту, має меншу кількість кратних нулів, тому її можна без будь-якого ризику об'єднувати в ансамбль при розв'язанні інженерних задач за допомогою метода скінченних елементів. Ця модель названа модифікований базис ССЕ-32, що реалізує експериментальний спектр вузлових навантажень.

РОЗДІЛ 10 ТРИКУБІЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ. БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ

10.1. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису просторового ССЕ-32 (обернена задача з параметром)

Комбінований алгебро-геометричний метод на ССЕ-32 можна узагальнити наступним чином [61; 76]: функції $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ та $N_9(\xi, \eta, \zeta)$ залишити у вигляді (9.5.1) та (9.5.2) відповідно, а систему (9.5.3) записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 9, 10, 15, 16, 17, 21; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 9; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 10; \\ 8k_1 + 24k_9 &= 1; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= p; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= p_9, \end{aligned} \right\} \quad (10.1.1)$$

де p – значення вузлового навантаження рівномірної масової сили у вузлі 1;

p_9 – значення вузлового навантаження рівномірної масової сили у вузлі 9.

Зважаючи на те, що $8p + 24p_9 = 1$, отримуємо залежність $p_9 = \frac{1-8p}{24}$. Тоді систему (10.1.1) можна записати з одним параметром p наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 9, 10, 15, 16, 17, 21; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 9; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 10; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= p; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= \frac{1-8p}{24}. \end{aligned} \right\} \quad (10.1.2)$$

Система (10.1.2) будується аналогічно системі (9.5.3), єдиною відмінністю є параметр у правій частині останніх двох рівнянь, завдяки якому ми отримуємо можливість записати $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ у вигляді функцій зі змінним параметром p .

Розв'язавши систему (10.1.2), отримуємо наступні функції (з додатковим параметром G , як і при розв'язанні системи (9.5.3)):

$$N_1 = \frac{1}{128} (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \times (18(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 3(5+32p)(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + 6(5+32p)(\xi + \eta + \zeta) + (7+288p)), \quad (10.1.3)$$

$$N_9 = -\frac{3}{128} (1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta) \times (18\xi - ((32p-1)G - 32p-5)\eta + (32p-1)G\zeta + (32p-1)). \quad (10.1.4)$$

Функції форми запишемо у загальному вигляді:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{128} (1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \times (3(5+32p) \times \\ &\times (\xi_i\eta_i\xi\eta + \xi_i\zeta_i\xi\zeta + \eta_i\zeta_i\eta\zeta) + 18(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \\ &- 6(5+32p)(\xi_i\xi + \eta_i\eta + \zeta_i\zeta) + (7+288p)), \\ \xi_i, \eta_i, \zeta_i &= \pm 1, \quad i = \overline{1, 8}, \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

$$N_i = -\frac{3}{128}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \times \\ (-54\xi_i\xi + ((32p-1)G - 32p-5)\eta_i\eta - (32p-1)G\zeta_i\zeta + (32p-1)), \\ \xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30. \quad (10.1.6)$$

Отримані базисні функції відповідають властивостям 1-5 базису ССЕ (розділ 7) [39].

Зауваження. Перевагою узагальненого комбінованого алгебро-геометричного методу є той факт, що, змінюючи значення параметру p , отримуємо безліч базисів на ССЕ-32 і маємо можливість обирати базис для кожної конкретної задачі, який найкращим чином буде відповідати критеріям задачі, що розв'язується.

Наявність у функції форми N_9 додаткового параметра G свідчить про те, що при фіксованому значенні повузлового розподілу рівномірної масової сили p , можна отримувати безліч базисів, змінюючи параметр G .

Зауважимо, що при $p = -\frac{5}{32}$ (вузлове навантаження рівномірної масової сили у стандартному базисі) формули (10.1.5)-(10.1.6) збігаються з (9.1.9)-(9.1.10).

Виходячи з фізичних міркувань, висунемо додаткові умови для значень розподілу рівномірної масової сили:

$$\left. \begin{array}{l} p > 0, \\ p_9 = \frac{1-8p}{24} > 0, \\ p_9 > p. \end{array} \right\} \quad (10.1.7)$$

Розв'язком цієї системи нерівностей є діапазон $p \in \left(0, \frac{1}{32}\right)$, в якому всі вузлові значення розподілу рівномірної масової сили додатні, а серединні – більше кутових.

10.2. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій просторового ССЕ-32

Покажемо когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисів на просторовому елементі, що містить 32 вузла з трикубічною інтерполяцією [25; 65].

Для даного елемента в літературі [45] відомий єдиний базис. Базисні функції для 1 і 9 вузлів записані у формулах:

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{64}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19), \quad (10.2.1)$$

$$N_9(\xi, \eta, \zeta) = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1-3\xi)(1-\eta)(1-\zeta). \quad (10.2.2)$$

Множину альтернативних базисів можливо отримати комбінуючи поверхню стандартного базису (формули (10.2.1), (10.2.2)) з поверхнею другого порядку з відповідним коефіцієнтом K :

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \left(\frac{1}{8}(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19) + \right. \\ \left. + \frac{9}{4}K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta + 2(\xi + \eta + \zeta) + 3) \right); \quad (10.2.3)$$

$$N_9 = \frac{3}{16}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \left(\frac{3}{4}(1+\xi) \times \right. \\ \left. \times (1-3\xi) - \frac{3}{4}K(1+\xi)(2+\eta+\zeta) \right). \quad (10.2.4)$$

Запишемо узагальнені формули для базисних функцій 32-вузлового ССЕ для цього методу:

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \times \left(\frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 + 9\zeta^2 - 19) + \right. \\ \left. + \frac{9}{4}K(\xi_i\eta_i\xi\eta + \eta_i\zeta_i\eta\zeta + \xi_i\zeta_i\xi\zeta - 2\xi_i\xi - 2\eta_i\eta - 2\zeta_i\zeta + 3) \right), \\ \xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = \overline{1, 8}; \quad (10.2.5)$$

$$N_i = \frac{3}{16}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \times \\ \times \left(\frac{3}{4}(1+9\xi_i\xi) - \frac{3}{4}K(2-\eta_i\eta-\zeta_i\zeta) \right), \\ \xi_i = \pm \frac{1}{3}, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 9, 10, 13, 14, 25, 26, 29, 30. \quad (10.2.6)$$

Решта функцій утворюються з (10.2.6) шляхом циклічного переставлення ξ, η, ζ .

Отримані базисні функції відповідають властивостям 1-5 базису ССЕ (розділ 7) [39].

Знайдемо залежності *позвулового розподілу рівномірної масової сили від параметру K* за допомогою формули (7.1.3). Для кутової функції N_1 :

$$p_1(K) = \frac{3}{8}K - \frac{5}{32}. \quad (10.2.7)$$

Для проміжної функції N_9 :

$$p_9(K) = -\frac{1}{8}K + \frac{3}{32}. \quad (10.2.8)$$

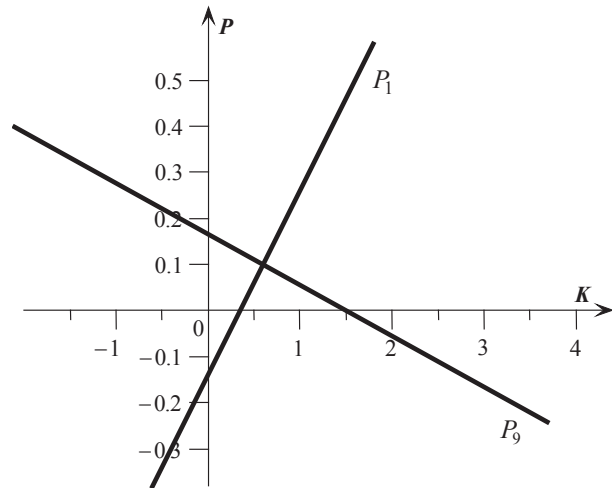


Рис. 10.2.2. Залежність позвулового розподілу масової сили p_i від K

У цьому методі базисні функції мають параметр K , тому, обчислюючи спектр навантажень за формулою (7.1.3), отримуємо залежності p_i від K . Як видно з рис. 10.2.2, на якому показані графіки $p_1(K)$ і $p_9(K)$, для практичних розрахунків краще використовувати базиси зі значеннями $K \in (0,4166; 0,5)$, тому що при $K > 0,4166$ зникає негативізм, а при $K > 0,5$ – виникає фізично протиприродний розподіл рівномірної масової сили.

Зауваження. Від формул алгебро-геометричного методу (10.1.5)-(10.1.6) можна перейти до формул когнітивно-графічного методу побудови ієрархічних базисів СЕ (10.2.5)-(10.2.6) за допомогою підстановки:

$$p = p_1(K) = -\frac{5}{32} + \frac{3}{8}K. \quad (10.2.9)$$

10.3. Узагальнення ймовірнісно-геометричного методу побудови базисних функцій просторового ССЕ-32

Узагальнимо процедуру побудови базису на ССЕ-32 за допомогою ймовірнісно-геометричного підходу.

Для побудови базисної функції N_1 ССЕ-32 (рис. 9.1.1) можна розбити двома способами:

- 1) на куб 1-2-3-4-5-6-7-8 і тетраедр 1-9-16-17;
- 2) на чотири піраміди: 1-2-3-7-6, 1-3-8-4-7, 1-5-6-7-8 і 1-9-16-17.

Зауважимо: у загальному випадку тетраедр 1-9-16-17 має скривлену грань 9-16-17.

Оберемо перший спосіб розбиття. Ймовірність попадання навмання вкинутої точки в протилежну вузлу 1 область куба 1-2-3-4-5-6-7-8, у відповідності з означенням геометричної ймовірності (формула 1.3.1), дорівнює:

$$N_1^{(1)} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta).$$

У тетраедрі, який має скривлену грань 1-9-16-17, для обчислення геометричної ймовірності скористаємося формулою (6.2.2) [55]:

$$\Phi_{level} = 9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 18K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta) + 36K(\xi + \eta + \zeta) + (54K - 19),$$

$$\Phi_{max} = 8, \Phi_{min} = 0,$$

$$PL = \frac{1}{8}(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 18K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta) + 36K(\xi + \eta + \zeta) + (54K - 19)).$$

Добуток ймовірностей дає формулу, за якою можна отримувати базисні функції для вузла 1 при певних значеннях K :

$$N_1 = N_1^{(1)} \cdot PL = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \cdot \frac{1}{8}(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 18K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta) + 36K(\xi + \eta + \zeta) + (54K - 19)). \quad (10.3.1)$$

Для побудови базисної функції N_9 ССЕ-32 можна розділити на два паралелепіпеда 9-2-3-14-25-6-7-30 і 9-14-4-1-25-30-8-5 та піраміду 1-9-16-17. Ймовірність попадання навмання вкинутої точки в протилежні вузлу 9 області паралелепіпедів, у відповідності з означенням геометричної ймовірності і правилом множення ймовірностей, дорівнює:

$$N_9^{(1)} = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta).$$

На піраміді скористаємося формулою (6.2.2) і отримаємо:

$$PL = \frac{(1 - 3\xi - K(2 + \eta + \zeta)) - 0}{2 - 0} = \frac{(1 - 3\xi - K(2 + \eta + \zeta))}{2} = N_9^{(2)}(\xi, \eta).$$

Тоді базисна функція для вузла 9 буде як добуток $N_9^{(1)} \cdot N_9^{(2)}$:

$$N_9 = \frac{3}{32}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta) \frac{1}{2}((1 - 3\xi) - K(2 + \eta + \zeta)). \quad (10.3.2)$$

10.4. Узагальнення геометричного методу конструювання базисних функцій ССЕ-32

При геометричному моделюванні базисна функція N_1

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)}{8} \times \frac{9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 18K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta) + 36K(\xi + \eta + \zeta) + (54K - 19)}{8} \quad (10.4.1)$$

будується як добуток функцій, що асоціюються з наступними поверхнями:

1) площина

$$N_1^{(1)} = \frac{(1 - \xi)}{2};$$

2) площина

$$N_1^{(2)} = \frac{(1 - \eta)}{2};$$

3) площина

$$N_1^{(3)} = \frac{(1 - \zeta)}{2};$$

4) поверхня другого порядку

$$N_1^{(4)} = \frac{9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 18K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta) + 36K(\xi + \eta + \zeta) + (54K - 19)}{8},$$

яка має проходити через вузли 9, 10, 15, 16, 17, 21.

Для базисної функції N_9 в якості множників візьмемо п'ять площин, одна з яких теж містить параметр K :

$$N_9 = N_9^{(1)} \cdot N_9^{(2)} \cdot N_9^{(3)} \cdot N_9^{(4)} \cdot N_9^{(5)} = \frac{3}{32}(1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta) \frac{1}{2}((1 - 3\xi) - K(2 + \eta + \zeta)). \quad (10.4.2)$$

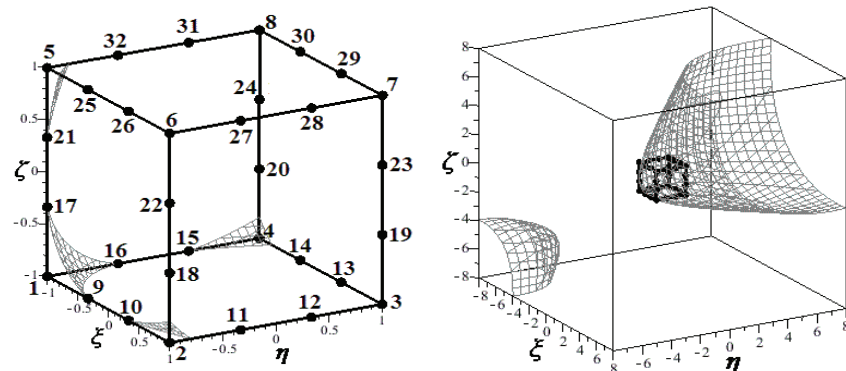
Цікавим є аналіз поверхні другого порядку, рівняння якої записано в останньому множнику формули (10.4.1). Представимо рівняння у вигляді, зручному для аналізу:

$$f_1 = \frac{9}{8}\xi^2 + \frac{9}{8}\eta^2 + \frac{9}{8}\zeta^2 + \frac{9}{4}K\xi\eta + \frac{9}{4}K\eta\zeta + \frac{9}{4}K\xi\zeta + \frac{9}{2}K\xi + \frac{9}{2}K\eta + \frac{9}{2}K\zeta + \left(\frac{27}{4}K - \frac{19}{8}\right) = 0. \quad (10.4.3)$$

Візуалізуємо поверхні (10.4.3), що утворюються при різних значеннях параметра K (рис. 10.4.1 а, 10.4.2 а, 10.4.3 а, 10.4.4 а, 10.4.5 а, 10.4.6 а, 10.4.7 а, 10.4.8 а). Щоб отримати чітке уявлення про вигляд поверхні за межами СЕ, збільшуємо розміри куба (рис. 10.4.1 б, 10.4.2 б, 10.4.3 б, 10.4.4 б, 10.4.5 б, 10.4.6 б, 10.4.7 б, 10.4.8 б) [65].

Зауваження. В комбінованому алгебро-геометричному методі (параграф 10.1) поліном з останньої дужки формули (10.1.3) утворює при відповідних значеннях параметра p ті ж самі поверхні, що зображені на рис. 10.4.1-10.4.8 [76].

При $K \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ або $p \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{32}\right)$ – двопорожнинний гіперболоїд (рис. 10.4.1):

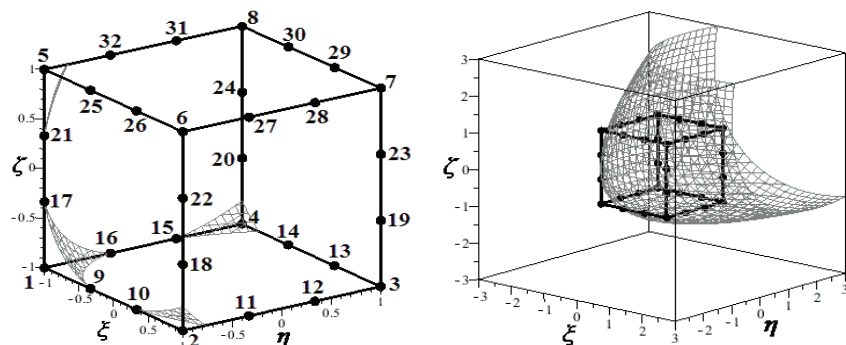


а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ

б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $16 \times 16 \times 16$

Рис. 10.4.1. Двупорожнинний гіперболоїд

При $K = -\frac{1}{2}$ або $p = -\frac{11}{32}$ – параболоїд обертання (рис. 10.4.2):

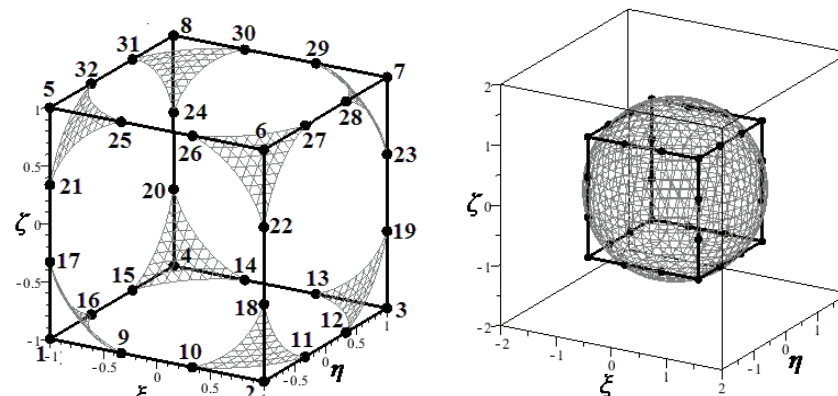


а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ

б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $6 \times 6 \times 6$

Рис. 10.4.2. Параболоїд обертання

При $K = 0$ або $p = -\frac{5}{32}$ – сфера (рис. 10.4.3):

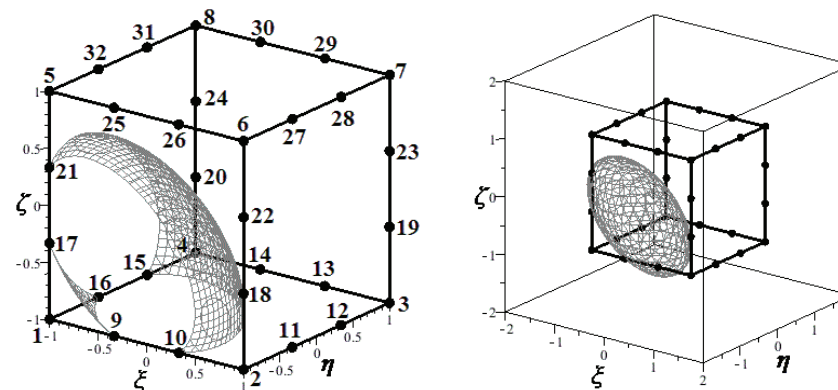


а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ

б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $4 \times 4 \times 4$

Рис. 10.4.3. Сфера

При $K \in (-0,5; 1)$ або $p \in \left(-\frac{11}{32}, \frac{7}{32}\right)$ – еліпсоїд (рис. 10.4.4):

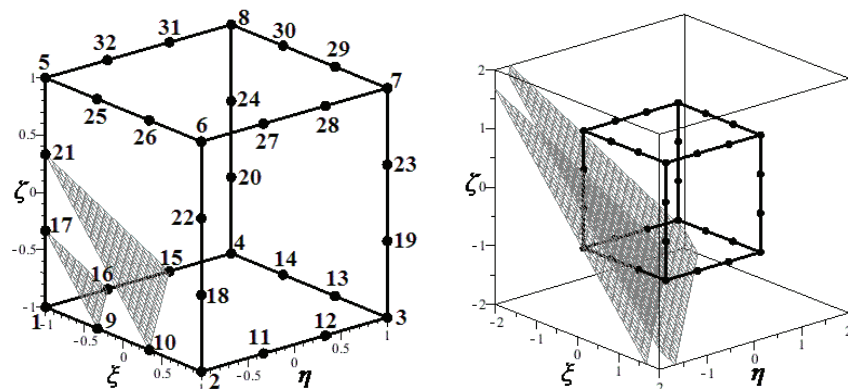


а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ

б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $4 \times 4 \times 4$

Рис. 10.4.4. Еліпсоїд

При $K = 1$ або $p = \frac{7}{32}$ – дві паралельні площини (рис. 10.4.5):

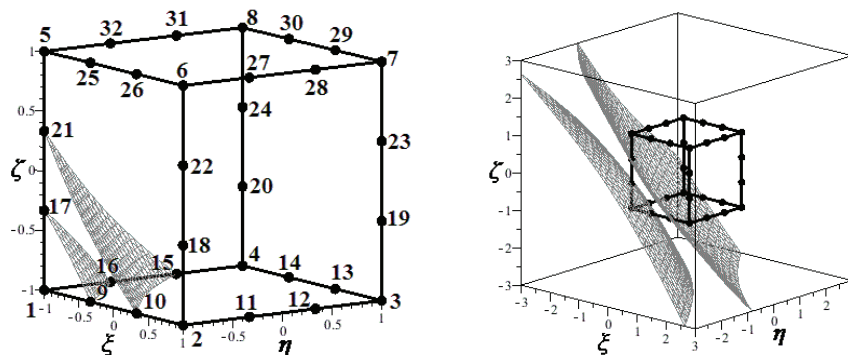


а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ

б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $4 \times 4 \times 4$

Рис. 10.4.5. Дві паралельні площини

При $K \in (1; 1,1875)$ або $p \in \left(\frac{7}{32}, \frac{37}{128}\right)$ – двопорожнинний гіперболоїд (рис. 10.4.6):

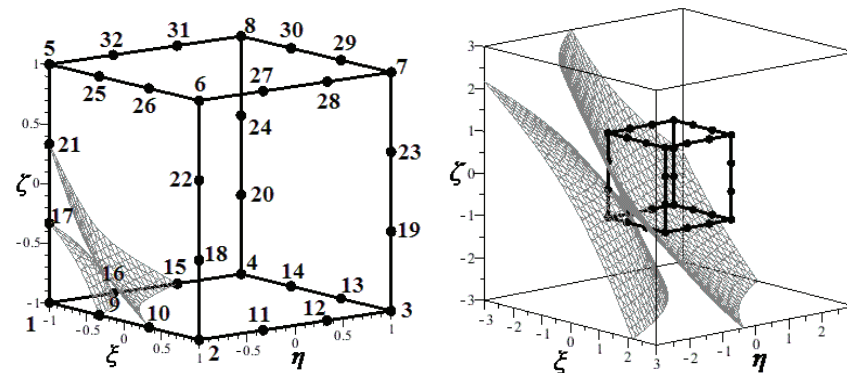


а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ

б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $6 \times 6 \times 6$

Рис. 10.4.6. Двупорожнинний гіперболоїд

При $K = 1,1875$ або $p = \frac{37}{128}$ – конус (рис. 10.4.7):

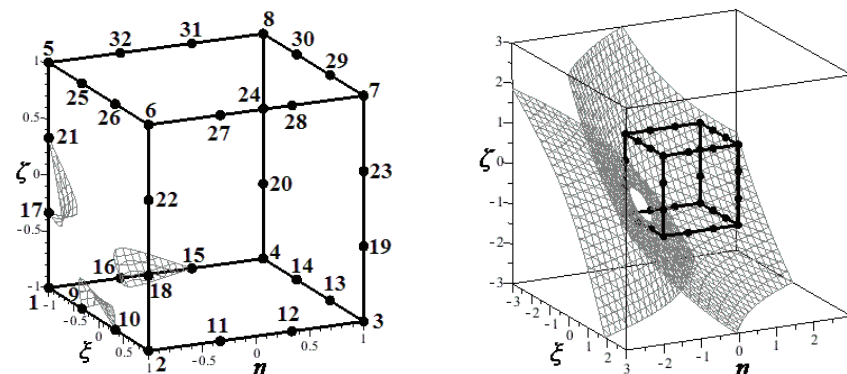


а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ

б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $10 \times 10 \times 10$

Рис. 10.4.7. Конус

При $K \in (1,1875; 2)$ або $p \in \left(\frac{37}{128}, \frac{1}{2}\right)$ – однопорожнинний гіперболоїд (рис. 10.4.8):



а) фрагмент поверхні f_1
всередині ССЕ

б) фрагмент поверхні f_1
в кубі $6 \times 6 \times 6$

Рис. 10.4.8. Однопорожнинний гіперболоїд

За допомогою узагальненого геометричного методу на просторовому ССЕ-32 можна побудувати безліч базисів, змінюючи у формулах (10.4.1), (10.4.2) значення K .

10.5. Модифікація методу Тейлора на просторовому ССЕ-32

У модифікованому методі Тейлора на ССЕ-32 для знаходження функції $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ скористаємося лінійною комбінацією функції трилінійної інтерполяції $\bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta)$ і проміжних базисних функцій з коефіцієнтом K для вузлів 9, 10, 15, 16, 17, 21, які отримали з (10.2.6) за допомогою циклічної перестановки координат. Вибір вагових коефіцієнтів лінійної комбінації обумовлюється інтерполяційною гіпотезою типу Лагранжа (рис. 7.1.1):

$$N_1 = \bar{N}_1 - \frac{2}{3}(N_9 + N_{15} + N_{17}) - \frac{1}{3}(N_{10} + N_{16} + N_{21}). \quad (10.5.1.)$$

Після нескладних перетворень отримуємо базисну функцію для вузла 1:

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \times \left(\frac{1}{8}(9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19) + \frac{9}{4}K(\xi\eta + \eta\zeta + \xi\zeta + 2(\xi + \eta + \zeta) + 3) \right). \quad (10.5.2.)$$

Отримана функція для вузла 1 (10.5.2) співпадає з функцією (10.2.3), яка отримана у параграфі 10.2.

10.6. Побудова базисних функцій ССЕ-32, які задовольняють критеріям гармонічності

Для побудови базисних функцій, які задовольняють критеріям гармонічності на просторовому ССЕ-32 в системі (10.1.2) замість гіпотези про збіжність значень теоретичного і експериментального спектрів використаємо *інтегральний критерій Привалова* для просторового дискретного елемента (формула 6.5.2) [6; 42; 60].

На ССЕ-32 базисні функції будемо шукати у вигляді:

$$N_1 = k_1(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta + M\xi + M\eta + M\zeta + 1). \quad (10.6.1)$$

$$N_9 = k_9(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(R\xi + Q\eta + G\zeta + 1). \quad (10.6.2)$$

Систему рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k=9, 10, 15, 16, 17, 21; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k=9; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k=10; \\ 8k_1 + 24k_9 &= 1; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_1 d\xi d\eta d\zeta &= N_1(0;0;0) = k_1; \\ \frac{1}{8} \iiint_{\Omega} N_9 d\xi d\eta d\zeta &= N_9(0;0;0) = k_9. \end{aligned} \right\} \quad (10.6.3)$$

Система має розв'язок, тобто існують функції, які задовольняють критерію Привалова:

$$N_1 = \frac{1}{320}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \left(45(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 27(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + 54(\xi + \eta + \zeta) - 14 \right). \quad (10.6.4)$$

Для проміжної функції:

$$N_9 = \frac{9}{320}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)(2-12\xi - (2G+3)\eta - 2G\zeta). \quad (10.6.5)$$

Повузлові навантаження рівномірної масової сили (обчислені за формулою (7.1.3)) для кутових функцій цього базису дорівнюють $-\frac{7}{160}$, для проміжних $\frac{9}{160}$ (ці значення не залежать від G).

У системі (10.6.3) замість критерія Привалова використаємо інтегральний критерій Кьобе (формула 6.5.3) [6; 42; 60].

Систему рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 1; \\ N_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 9, 10, 15, 16, 17, 21; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 1, \quad k = 9; \\ N_9(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= 0, \quad k = 10; \\ 8k_1 + 24k_9 &= 1; \\ \frac{1}{24} \oint N_1 ds &= N_1(0; 0; 0) = k_1; \\ \frac{1}{24} \oint N_9 ds &= N_9(0; 0; 0) = k_9. \end{aligned} \right\} \quad (10.6.6)$$

Система має розв'язок, а функції, які задовольняють критерію Кьобе, записуються наступним чином:

$$N_1 = \frac{1}{1472} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \left(207(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 165(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta) + 270(\xi + \eta + \zeta) - 32 \right). \quad (10.6.7)$$

$$N_9 = \frac{9}{1472} (1 - \xi^2)(1 - \eta)(1 - \zeta) (8 - 69\xi - (8G + 15)\eta + 8G\zeta). \quad (10.6.8)$$

Повузлові навантаження рівномірної масової сили (обчислені за формулою (7.1.3)) для кутових функцій цього базису дорівнюють $-\frac{25}{736}$, для проміжних $\frac{39}{736}$ (ці значення не залежать від G).

Перевірка показує, що на ССЕ-32 неможливо побудувати поліноміальні базисні функції, які б задовольняли диференціальному критерію Лапласа та інтерполяційній гіпотезі Лагранжа одночасно.

Заключне слово

За допомогою розробленого алгебро-геометричного метода показано, що задача відновлення функції за її значеннями на границі скінченного елемента вищого порядку має нескінченну множину розв'язків.

Запропоновані нові альтернативні моделі серендитових апроксимацій мають важливе значення для розвитку обчислювальних методів: вони можуть бути використані в пакетах прикладних програм, орієнтованих на скінченно-елементні розрахунки. Це знаходить застосування в задачах теплофізики, геомеханіки, руху рідини та газу, будівельної механіки, задачах теорії пружності та пластичності. Моделі з покращеними обчислювальними властивостями можуть з успіхом застосовуватись в автоматизованих системах наукових досліджень, що дозволить значно підвищити точність розрахунків в МСЕ та зменшити витрати машинного часу.

ДОДАТОК

1. Побудова базису на симплексах у методі скінченних елементів

У методі скінченних елементів для побудови інтерполяційних поліномів застосовується матричний метод. Розглянемо побудову базису на симплексах [40; 45; 105; 106]. Симплекс-елементам відповідають поліноми, що містять константу і лінійні доданки. Кількість коефіцієнтів полінома на одиницю більша за вимірність координатного простору.

Одновимірний симплекс-елемент – це прямолінійний відрізок довжини L з двома вузлами інтерполяції (рис. Д.1.1). Поліноміальна інтерполяційна функція ϕ має вигляд

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (\text{Д.1.1})$$

Коефіцієнти α_1 і α_2 можуть бути знайдені з наступних умов:

$$\phi = \Phi_i \text{ при } x = X_i;$$

$$\phi = \Phi_j \text{ при } x = X_j.$$

Отримуємо систему двох рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i \\ \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j \end{aligned} \right\}.$$

Розв'язок системи має вигляд:

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L},$$

$$\alpha_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L}.$$

Підставивши знайдені значення α_1 та α_2 у формулу (Д.1.1), отримуємо ϕ у наступному вигляді:

$$\phi = \left(\frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L} \right) + \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) x.$$

Цей вираз можна переписати наступним чином:

$$\phi = \left(\frac{X_j - x}{L} \right) \Phi_i + \left(\frac{x - X_i}{L} \right) \Phi_j. \quad (\text{Д.1.2})$$

Зауваження. Інтерполяційний поліном (Д.1.2) записаний у формі Лагранжа.

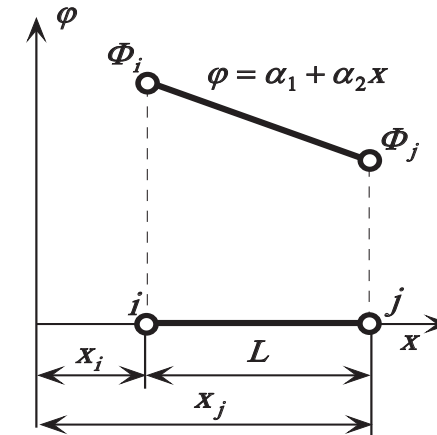


Рис. Д.1.1. Одновимірний симплекс-елемент

Лінійні функції від x у формулі (Д.1.2) називаються базисними функціями (функціями форми, коефіцієнтами Лагранжа, барицентричними координатами одновимірного симплексу) і позначаються:

$$N_i = \frac{X_j - x}{L}, \quad N_j = \frac{x - X_i}{L}. \quad (\text{Д.1.3})$$

Як видно з формули (Д.1.3), функція N_i дорівнює одиниці у вузлі з номером i та нулю в j -му вузлі. Аналогічно функція N_j дорівнює нулю в i -му вузлі та одиниці у вузлі з номером j . Ця властивість характерна для функцій форми. Співвідношення (Д.1.2) може бути записане у матричному вигляді

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j = [N] \{\Phi\}, \quad (\text{Д.1.4})$$

де $[N] = [N_i \ N_j]$ – базисні функції,

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} \text{ – вузлові значення функції, що інтерполюється.}$$

Двовимірний симплекс-елемент (рис. Д.1.2) – це трикутник з трьома вузлами інтерполяції у вершинах [45].

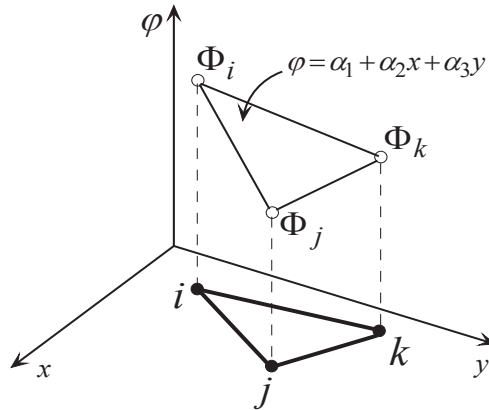


Рис. Д.1.2. Двовимірний симплекс-елемент

Інтерполяційний поліном має вигляд

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (\text{Д.1.5})$$

У вузлах виконуються наступні умови:

$$\phi = \Phi_i \text{ при } x = X_i, \ y = Y_i,$$

$$\phi = \Phi_j \text{ при } x = X_j, \ y = Y_j,$$

$$\phi = \Phi_k \text{ при } x = X_k, \ y = Y_k.$$

Коефіцієнти α_i ($i = \overline{1,3}$) можуть бути знайдені з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\ \Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\ \Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, отримуємо:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} \left[(X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k \right],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} \left[(Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k \right],$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} \left[(X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k \right].$$

Визначник системи обчислюється за формулою:

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A, \quad (\text{Д.1.6})$$

де A – це площа Δijk .

Підставивши значення α_1, α_2 і α_3 в формулу (Д.1.5) і виконавши певні перетворення, отримуємо:

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (\text{Д.1.7})$$

$$\text{де } N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y], \quad \begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{cases}$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y], \quad \begin{cases} a_j = X_k Y_i - Y_k X_i, \\ b_j = Y_k - Y_i, \\ c_j = X_i - X_k; \end{cases}$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y], \quad \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_k = Y_i - Y_j, \\ c_k = X_j - X_i. \end{cases}$$

Тривимірний симплекс елемент – це тетраедр з вузлами інтерполяції у вершинах (рис. Д.1.3) [45].

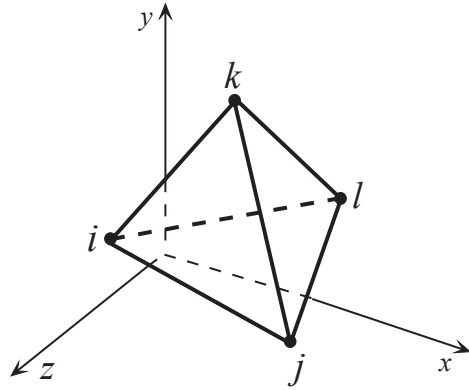


Рис. Д.1.3. Тривимірний симплекс-елемент

Інтерполяційний поліном для цього елемента має вигляд:

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (\text{Д.1.8})$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти із системи:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i + \alpha_4 Z_i, \\ \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j + \alpha_4 Z_j, \\ \Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k + \alpha_4 Z_k, \\ \Phi_l &= \alpha_1 + \alpha_2 X_l + \alpha_3 Y_l + \alpha_4 Z_l. \end{aligned} \right.$$

Систему рівнянь запишемо у матричному вигляді:

$$\{\Phi\} = [C]\{\alpha\},$$

$$\text{де } \{\Phi\}^T = [\Phi_i \ \Phi_j \ \Phi_k \ \Phi_l], \ \{\alpha\}^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4],$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти $\{\alpha\}$ можна отримати за допомогою обернення матриці $[C]$:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{\Phi\}. \quad (\text{Д.1.9})$$

Якщо інтерполяційний поліном (А.1.8) записати у вигляді:

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z = [1 \ x \ y \ z] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix},$$

то, використавши формулу (Д.1.9), отримаємо:

$$\{\phi\} = [1 \ x \ y \ z][C]^{-1} \{\Phi\}. \quad (\text{Д.1.10})$$

2. Ймовірісно-геометричний метод побудови базисів на симплексах

Для побудови інтерполяційних поліномів зручно використовувати метод ймовірісно-геометричного моделювання, в основу якого покладено означення геометричної ймовірності.

Нехай маємо область G і в ній міститься інша область g . В область G навмання кидається точка і ставиться питання: чому дорівнює ймовірність того, що точка влучить в область g ? Ймовірність влучити в будь-яку частину області G пропорційна мірі цієї частини (довжині, площі, об'єму) і не залежить від її розташування і форми. Таким чином, за визначенням, ймовірність влучити в область g при киданні навмання точки в область G дорівнює:

$$p(g) = \frac{\text{mes}(g)}{\text{mes}(G)}. \quad (\text{Д.2.1})$$

На **одновимірному симплекс-елементі** (рис. Д.2.1) реалізуємо ймовірісно-геометричну процедуру побудови інтерполяційного поліному, використовуючи при цьому означення геометричної ймовірності.

Оберемо на елементі поточну точку x . Вона ділить відрізок на дві частини $[x_i, x]$ і $[x, x_j]$. Випадковим чином будемо вкидати точку на елемент довжиною L . Знайдемо ймовірність попадання навмання вкинутої точки в ту чи іншу частину симплекса. Позначимо через N_i

ймовірність попадання точки на відрізок $[x, x_j]$, протилежний вузлу x_i . Через N_j позначимо ймовірність попадання на відрізок $[x_i, x]$, протилежну вузлу x_j .

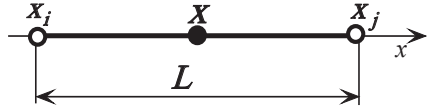


Рис. Д.2.1. До ймовірнісно-геометричного методу побудови базису на одновимірному симплекс-елементі

За означенням геометричної ймовірності (формула (Д.2.1)) отримуємо:

$$N_i = \frac{l_i}{L} = \frac{L - x}{L} = \xi_i, \quad (\text{Д.2.3})$$

$$N_j = \frac{l_j}{L} = \frac{x}{L} = \xi_j. \quad (\text{Д.2.4})$$

Попадання точки на елемент $[x, x_j]$ – це достовірна подія, тому

$$N_i + N_j = 1. \quad (\text{Д.2.5})$$

Вираз (Д.2.5) відбиває зміст теореми про суму ймовірностей повної групи подій.

Зауважимо, що N_i , N_j – це базисні функції або барицентричні координати ξ_i , ξ_j одновимірного симплекс-елемента, а ймовірнісний метод наочно ілюструє відомі властивості цих функцій: вони дорівнюють одиниці у «своєму» вузлі і нулю – у протилежному.

Зауваження. *Барицентричні координати* (ξ_1, ξ_2) будь-якої точки M відрізка визначаються як частки одиничної маси, які слід розташувати у відповідних вершинах відрізка, щоб M стала його центром тяжіння.

Покажемо, що барицентрична координата **двовимірного симплексу** і базисна функція трикутного СЕ з трьома вузлами – це поняття тотожні (рис. Д.2.2). *Барицентричні координати* (ξ_i, ξ_j, ξ_k) будь-якої точки M площини визначаються як частки одиничної маси, які слід розташувати у відповідних вершинах базисного трикутника Δijk , щоб M стала його

центром мас. Барицентричну координату симплексу можна обчислювати як відношення площ трикутників (рис. Д.2.2 а), так і як відношення висот відповідних трикутників (рис. Д.2.2 б) [29; 40; 45].

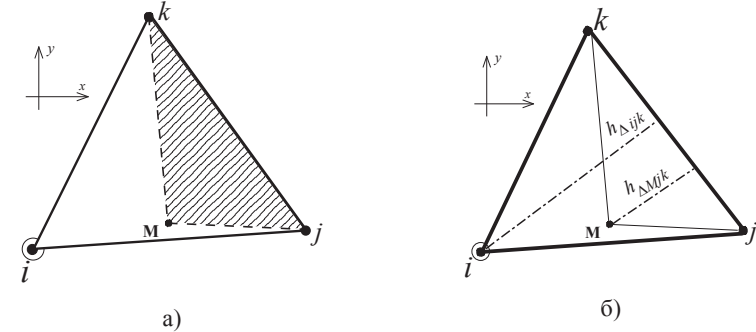


Рис. Д.2.2. Визначення барицентричних координат у двовимірному симплекс-елементі

Наприклад, перша координата задається формулою:

$$\xi_i(x, y) = \frac{S_{\Delta Mjk}}{S_{\Delta ijk}} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} = N_i,$$

$$\text{або } \xi_i(x, y) = \frac{h_{\Delta Mjk}}{h_{\Delta ijk}} = N_i, \quad (\text{Д.2.6})$$

де $S_{\Delta ijk}$ – площа Δijk ; $S_{\Delta Mjk}$ – площа ΔMjk ; $M(x, y)$ – поточна точка, $h_{\Delta Mjk}$ – висота ΔMjk , $h_{\Delta ijk}$ – висота Δijk .

Для **тривимірного симплекс-елемента** (рис. Д.2.3) *барицентричні координати* $(\xi_i, \xi_j, \xi_k, \xi_l)$ будь-якої точки M тетраедру визначаються як частки одиничної маси, які слід розташувати у відповідних вершинах тетраедру, щоб M стала його центром мас.

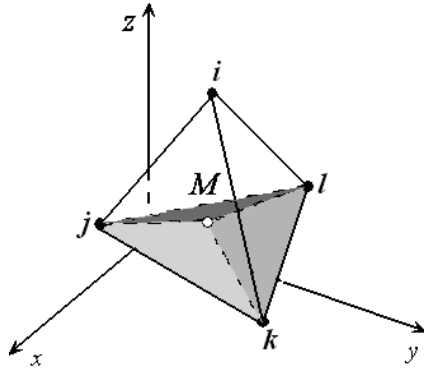


Рис. Д.2.3. Визначення барицентричних координат у тривимірному симплекс-елементі

Барицентричну координату симплексу можна обчислювати як відношення об'ємів (рис. Д.2.3) [29; 40; 45]. Наприклад, перша координата задається формулою:

$$\xi_i(x, y) = \frac{V_M}{V} = \frac{\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_l & y_l & z_l & 1 \end{vmatrix}}{\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_l & y_l & z_l & 1 \end{vmatrix}} = N_i, \quad (\text{Д.2.7})$$

де V – об'єм тетраедра $ijkl$; V_M – об'єм тетраедра $Mjkl$; $M(x, y, z)$ – поточна точка.

3. Кульково-лінійна інтерполяція в методі скінченних елементів

В якості «будівельного» матеріалу для кульково-лінійної інтерполяції в МСЕ використовують прості функції (рис. Д.3.1). Ці функ-

ції називають «кришками» для внутрішніх вузлів і «півкришками» для граничних вузлів.

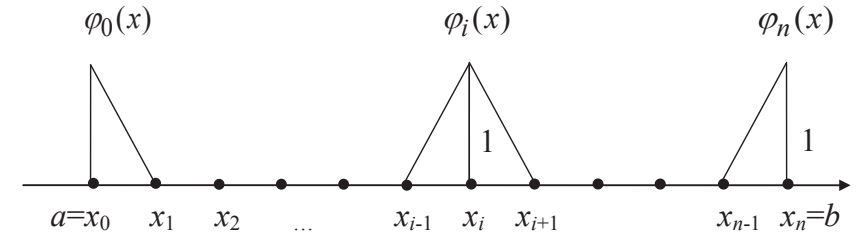


Рис. Д.3.1 Базис для кульково-лінійної інтерполяції

Базис кульково-лінійної інтерполяції має наступний вигляд:

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{в } [x_0; x_1], \\ 0 & \text{поза } [x_0; x_1]; \end{cases}$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{в } [x_{i-1}; x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{в } [x_i; x_{i+1}], \\ 0 & \text{поза } [x_{i-1}; x_{i+1}]; \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & \text{в } [x_{n-1}; x_n], \\ 0 & \text{поза } [x_{n-1}; x_n]. \end{cases}$$

Для побудови цих формул зручно скористатися правилом обчислення геометричної ймовірності (Д.2.1). Поліном кульково-лінійної інтерполяції має вигляд:

$$(x) = \sum_{i=0}^n \phi_i(x) \cdot y_i. \quad (\text{Д.3.1})$$

На рис. Д.3.2 наведено приклад кусково-лінійної інтерполяції з 5-ма вузлами.

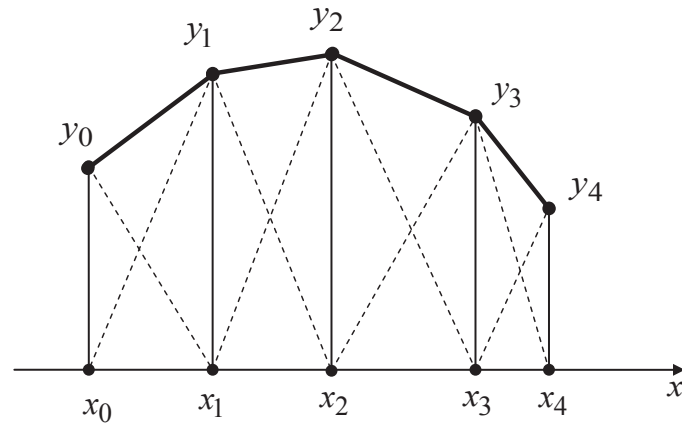


Рис. Д.3.2. Кусково-лінійна інтерполяція

Пунктирні лінії – це окремі доданки суми (Д.3.1), суцільна ламана – результат додавання.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Астионенко И.А., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства. *Научные ведомости. Серия: математика, физика*. Белгород, 2009. № 5 (60). Вып. 16. С. 15-31.
2. Астионенко И.А., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2009. Вып. 2 (35). С. 36-42.
3. Астионенко И.А., Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Базисы серендиповых конечных элементов с естественным спектром. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2008. Вып. 2 (31). С. 24-30.
4. Астионенко И.А., Козуб Н.А., Хомченко А.Н. Задача о паритете призовых и штрафных маршрутов в одношаговых схемах блужданий. *Компьютерное моделирование и интеллектуальные системы*. Запорожье: ЗНТУ, 2007. С. 111-115.
5. Астионенко И.А., Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Многопараметрические серендиповы элементы в 2D. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2010. Вып. 3 (39). С. 40-47.
6. Астионенко И.А., Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Моделирование физических полей с распределенными параметрами в многоугольных областях. *Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы*. Херсон: ХНТУ, 2006. Вып. № 1 (17). С. 5-11.
7. Астионенко И.А., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. Харків: ХДУХТ, 2007. Вып. 17. С. 97-102.
8. Астионенко И.А., Козуб Н.А., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Управляемые серендиповы поверхности, сохраняющие межэлементную непрерывность. *Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки*. Запоріжжя, 2008. № 1. Вып. 17. С. 8-11.
9. Астіоненко І.О., Литвиненко О.І., Хомченко А.Н. Ймовірісно-геометричний метод побудови серендипового базису. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: тези міжн. наук.-практ. конф. (м. Дніпропетровськ, 25-27 лист. 2009 р.)*. Дніпропетровськ: ДНУ, 2009. С. 20-21.
10. Астіоненко І.О., Литвиненко О.І., Хомченко А.Н. Інтерполяційна процедура Тейлора для побудови базисів серендипових скінченних елементів: модифікація. *Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту: матеріали міжн. наук. конф. (м. Євпаторія, 18-22 травня 2009 р.)*. Херсон: ХНТУ, 2009. Т. 1. С. 9-12.

11. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс: монография. М.: Наука, 1987. 160 с.
12. Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П. Аналитическая геометрия: учебн. пособ. М.: Просвещение, 1970. 376 с.
13. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: учебн. пособ. М.: Физматгизд., 1962. Т.1. 464 с.
14. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Н.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов: учебн. пособ. К.: Наукова думка. 1976. 272 с.
15. Валько Н.В., Хомченко А.Н. Интегральный критерій гармонічності функції та моделі методу барицентричного усереднення. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*: зб. наук. пр. Дніпропетровськ: ДНУ, 2004. С. 36-47.
16. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: монография. М.: Мир, 1984. 428 с.
17. Гнеденко Б.В. Из истории науки о случайном: монография. М.: Знание, 1981. 64 с.
18. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: учебн. пособ. М.: Наука, 1971. 340 с.
19. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: учебн. пособ. М: Мир, 1998. 703 с.
20. Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Буба М.С., Хомченко А.Н. Моделирование конечных элементов серендипова семейства для исследования температурных полей. *Проблеми пожежної безпеки*: зб. наукових праць. Київ, 1995. С. 75-77.
21. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: учебн. пособ. М.: Наука, 1970. 664 с.
22. Демидович Б.П., Марон И.А. Шувалова Э.З. Численные методы анализа: учебн. пособ. М.: Наука, 1967. 368 с.
23. Зенкевич О. Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: монография. М.: Мир, 1986. 318 с.
24. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: монография. М.: Мир, 1975. 541 с.
25. Зенкин А.А. Когнитивная компьютерная графика: учебн. пособ. / под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1991. 192с.
26. Камаева Л.И., Хомченко А.Н. О моделировании конечных элементов серендипова семейства. *Прикладные проблемы прочности и пластичности*: всесоюзн. межвуз. сб. Горький: ГГУ, 1985. Вып. 31. С. 14-17.
27. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности: учебн. пособ. М.: Наука, 1972. 192 с.
28. Клейнман Р. Низкочастотное электромагнитное рассеяние. *Численные методы теории дифракции*: сб. статей. М.: Мир, 1982. С. 172-198.
29. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости: монография. Л.: Судостроение, 1979. 264 с.
30. Литвиненко Е.И. Аналитический метод конструирования иерархических базисов серендиповых пространственных элементов. *Materialy V mezinarodni vedecko-prakticka konference «Aplikovane vedecke novinky – 2009»*. (Praha, 27.07-05.08.2009). Dil. 5. Matematika. Praha: Education and Science, 2009. P. 60-67.
31. Литвиненко Е.И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей: дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.06 / Херсонский государственный технический университет. Херсон, 1999. 172 с.
32. Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Геометрическое моделирование трехмерных серендиповых КЭ. *Прикладная геометрия и инженерная графика*. Мелитополь: ТГАТА, 1997. Вып. 4. Т. 1. С. 40-42.
33. Майстров Л.Е. Развитие понятия вероятности: монография. М.: Наука, 1980. 269 с.
34. Манойленко О.С., Хомченко А. Н. Деякі узагальнення схеми випадкових блукань у мультиплексах. *Труди інститута прикладної математики і механіки*. Донецьк: ИПММ, 2001. Вып.6. С. 75-79.
35. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы: учебн. пособ. М.: Наука, 1981. 416 с.
36. Математическая энциклопедия / Гл. ред.: И.М. Виноградов. М.: Советская Энциклопедия, 1984. Т.4. С. 630.
37. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными: монография. М.: Мир, 1981. 216 с.
38. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов): учебн. пособ. К.: Будівельник, 1980. 232 с.
39. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: учебн. пособ. М.: Мир, 1981. 304 с.
40. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: учебн. пособ. М.: Мир, 1976. 464 с.
41. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии: учебн. пособ. М.: Гостехиздат, 1976. 143 с.
42. Привалов И.И. О гармонических функциях. *Математический сборник*. 1925. Т. 32. С. 464-471.
43. Рассказов А.О. Расчет оболочек типа гиперболических параболоидов: монография. К.: КГУ, 1972. 175 с.
44. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам: монография. М.: Стройиздат, 1977. 132 с.
45. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: монография. М.: Мир, 1979. 392 с.
46. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: монография. М.: Мир, 1990. 240 с.
47. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов: монография. М.: Мир, 1977. 349 с.
48. Субботин Ю.Н. Численные методы приближения функций и математический эксперимент. *Число и мысль*: сб. статей. Вып. 10. М.: Знание, 1987. С. 101-126.
49. Тулученко Г.Я., Хомченко А.Н. Моделі випадкових блукань на трикутних скінченних елементах вищих порядків. *Праці Таврійської державної агротехнологічної академії*. Мелітополь: ТДАТА, 2004. Вип.4. Том 28. С. 32-36.
50. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: учебн. пособие. М.: Мир, 1985. 384 с.

51. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: учебн. пособие. М.: Мир, 1988. 352 с.
52. Хомченко А.Н. «Скрытые» параметры и «мягкие» модели серендиповых элементов. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2008. Вып. 2 (31). С. 500-503.
53. Хомченко А.Н. Альтернативные серендиповы аппроксимации и явление устойчивости интегральных средних. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2010. Вып. 3 (39). С.498-502.
54. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Гучек П.И. Конечные элементы серендипова семейства: справочно-методическое руководство для аспирантов и соискателей. Херсон: ХИИ, 1995. 24 с.
55. Хомченко А.Н., Козуб Н.А. Геометрическое моделирование дискретных элементов с криволинейными границами. *Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы*. Херсон: ХНТУ, 2008. №1 (21). С. 24-27.
56. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Гучек П.И. Геометрия серендиповых аппроксимаций. *Прикладная геометрия и инженерная графика*. К.: Будівельник, 1996. Вып. 59. С. 40-42.
57. Хомченко А.Н., Астионенко И.А., Козуб Н.А. Геометрия серендиповых полиномов: классические результаты и артефакты. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*: зб. наук. праць. Харків: ХДУХТ, 2007. Вып. 18. С.24-29.
58. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А. Геометрия серендиповых полиномов: обратные задачи. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: міжвідомчий науково-технічний збірник. К.: КНУБА, 2009. Вып. 82. С. 58-63.
59. Хомченко А.Н., Зуб П.М., Цибуленко О.В. Геометрія випадкових блукань у центрованих дискретних елементах. *Сучасні проблеми геометричного моделювання*. Львів: Львівська політехніка, 2003. С. 104-106.
60. Хомченко А.Н., Валько Н.В. Дискретные аналоги интегрального условия гармоничности функции. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2004. Вып. 1 (19). С. 17-19.
61. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Задачі корекції інтегральних середніх на серендипових скінченних елементах. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. Вып. 4. Т. 39. С. 24-29.
62. Хомченко А.Н. Знакопеременная плотность и полилинейная интерполяция. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2007. Вып. 2 (28). С. 378-382.
63. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Інтерполяційна процедура Тейлора для серендипових моделей: геометричний аналіз. *Наукові нотатки*: міжвуз. зб. Луцьк: ЛДТУ, 2008. Вып. 22 (частина 1). С. 355-359.
64. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Комбінований алгебро-геометричний метод моделювання базису просторового серендипового скінченного елемента з 20 вузлами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: міжвідомчий науково-технічний збірник. К.: КНУБА, 2010. Вып. 85. С. 232-236.
65. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Конструювання базисів серендипових просторових елементів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Мелітополь: ТДАТУ, 2009. Вып. 4. Т. 43. С. 24-30.
66. Хомченко А.Н. Метод конечных элементов: стохастический подход. Ивано-Франковск: Ивано-Франковский ин-т нефти и газа. 1982. Деп. в ВИНТИ 15.10.82, № 5167. 7 с.
67. Хомченко А.Н., Крючковский В.В., Хомченко Б.А. Модели броуновского движения и аналогии Л. Прандтля. *Вестник Херсонского государственного технического университета*. Херсон: ХГТУ, 2001. Вып. 12. С. 288-290.
68. Хомченко А.Н., Крючковский В.В. Модели барицентрического усреднения и одношаговые схемы случайных блужданий. *Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности*. СПб.: МАН ВШ, 2005. С. 112-115.
69. Хомченко А.Н., Валько Н.В., Литвиненко О.І. Моделі методу барицентричного усереднення. *Інформаційні технології в системі керування вищою освітою України*: матеріали міжн. наук.-практ. конф. Херсон: ХГУ, 2004. С. 24-26.
70. Хомченко А.Н., Камаева С.О. Некласичний базис скінченного елемента з біквадратичною інтерполяцією. *Геом. та комп'ютерне моделювання*: Збірник наукових праць. Харків: ХДУХТ, 2008. Вып. 17. С. 97-102.
71. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ. Ивано-Франковск: Ивано-Франковский ин-т нефти и газа, 1982. Деп. в ВИНТИ 18.03.82, № 1213. 9 с.
72. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*: зб. наук. праць. Харків: ХДУХТ, 2009. Вып. 23. С. 90-95.
73. Хомченко А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных. *III Респ. симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям*: тез. докл. Одесса: ОГУ, 1982. С. 257-258.
74. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ. Ивано-Франковск: Ивано-Франковский ин-т нефти и газа, 1982. Деп. в ВИНТИ 21.10.82, № 5264. 5 с.
75. Хомченко А.Н., Крючковский В.В. Об усреднении в математическом моделировании. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2005. Вып. 22. С. 340-343.
76. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Обернена задача побудови базисів тривимірних серендипових скінченних елементів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: праці Таврійського держ. агротехнологічного університету. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. Вып. 4. Т. 41. С. 9-17.
77. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А. Обратные задачи об интегральных средних для серендиповых полиномов. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2007. Вып. 2 (28). С. 383-389.
78. Хомченко А.Н., Лурье І.А., Моїсеєнко С.В., Цибуленко О.В. Однокрокові випадкові блукання та штрафні маршрути. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: праці Таврійської держ. агротехнологічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2007. Вып. 4. Т. 34. С. 42-46.

79. Хомченко А.Н., Астіоненко І.О., Козуб Н.О. П'ять способів побудови функцій-«пагоди». *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: праці Таврійського держ. агротехнологічного університету. Мелітополь: ТДАТУ, 2008. Вип. 4. Т. 37. С. 24-31.
80. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Проблема збереження геометричної ізотропії на серендипових елементах вищих порядків. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: праці Таврійської держ. агротехнологічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2007. Вип. 4. Т. 36. С. 39-44.
81. Хомченко А.Н., Колеснікова Н.В., Манойленко О.С. Просторові схеми випадкових блукань у мультиплексах. *Вісник Запорізького державного університету*. Запоріжжя: ЗДУ, 2001. Вип. 1. С. 61-64.
82. Хомченко А.Н. Трикубическая интерполяция как задача на геометрическую вероятность. *Вестник Херсонского национального технического университета*. Херсон: ХНТУ, 2009. Вип. 2 (35). С. 449-454.
83. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Формоутворення серендипових поверхонь з «прихованими» параметрами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*: праці Таврійського держ. агротехнологічного університету. Мелітополь: ТДАТУ, 2010. Вип. 4. Т. 48. С. 55-62.
84. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии: учебное пособ. М.: Физматгиз, 1963. 296 с.
85. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axisymmetric Problems. *Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech, AFFDL-TR-68-150*. Ohio: Wright-Patterson AFB, 1968. P. 539-572.
86. Akin J.E. Finite Elements Analysis with Error Estimators. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. 477 p.
87. Bathe K. Finite Element Procedures. Prentice Hall. New Jersey, 1996. 1038 p.
88. Behr M. Stabilized Space-Time Finite Element Formulations for Free-Surface Flows. *Comm. For Num. Meth. In Eng.* 11. 2001. P. 813-819.
89. Ciarlet P.G. The Finite Element Method for Elliptical Problems. SIAM. Philadelphia, PA, 2002. 30 p.
90. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley. New York, 2001. 736 p.
91. Courant R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1943. № 49 P. 1-23.
92. Dasgupta G. Interpolants within Convex Polygons: Wachspress' Shape Functions. *Journal of Aerospace Engineering*. 2003. Vol. 16. № 1. P. 1-8.
93. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved Isoperimetric «Quadrilateral» Elements for Finite Element Analysis. *Internat. J. Solids Struct.* 1968. № 4. P. 31-42.
94. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Three Dimensional Analysis of Arch Dams and their Foundations. *Proc. Symp. Arch, Dams*, 1968. P. 21-34.
95. Gallagher R.H., Rattinger I., Archer J.S. A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis. New York: Pergamon Press Book, 1964. 126 p.
96. Greiner G., Grosso R. Hierarchical Tetrahedral-Octahedral Subdivision for Volume Visualization. *The Visual Computer*. 2000. I. 16. P. 357-369.
97. Hanslo P.A Crank-Nicolson Type Space-Time Finite Element Method for Computing on Moving Meshes. *J. Comp. Physics*. 2000. № 159. P. 274-289.
98. Hochberg K.J. Central Limit Theorem for Signed Distributions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1980. № 79. P. 298-302.
99. Irons B.M. Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method. *AIAA J.* 1966. № 4. P. 2035-2037.
100. Ishiguro M. Construction of Hexagonal Basis Functions Applied in the Galerkin-Type Finite Element Method: *J. Inf. Process*, 1984. V. 7. № 2. P. 88-95.
101. Lui G.R., Quek S.S. The Finite Element Method: A practical Course. Butterworth-Heinemann, 2003. 348 p.
102. Taig I.C. Structural Analysis by the Matrix Displacement Method. English Electric Aviation Ltd., 1962. 96 p.
103. Taylor R.L. On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis. *J. Num. Meth. Eng.* 1972. V. 4. № 1. P. 17-22.
104. Tezduyar T.E. Finite Element Method for Flow Problems with Moving Boundaries and Interfaces. *Computational Methods in Engineering*. 2001. V. 8. P. 83-130.
105. Turner M.I., Gough R.W., Martin H.C., Topp L.P. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *J. Aeron. Sci.* 1956. V. 23. № 9. P. 805-823.
106. Wachspress E.I. A rational finite element basis. Academic Press. New York, 1975. 344 p.
107. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. V. 1. Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p.
108. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. V. 2. Butterworth-Heinemann, 2000. 464 p.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1	
МЕТОДИ ПОБУДОВИ ФУНКЦІЙ-«ПАГОДИ»	8
1.1. Функція-«пагода»	8
1.2. Матричний метод побудови білінійної інтерполяції	10
1.3. Ймовірісно-геометричний метод на білінійному елементі	11
1.4. Геометричний метод конструювання базисних функцій білінійного елемента	19
1.5. Побудова базисних функцій білінійного елемента методами інтегрування	21
РОЗДІЛ 2	
БІКВАДРАТИЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ	
СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ	26
2.1. Скінченні елементи серендипової сім'ї вищих порядків	26
2.2. Матричний метод побудови біквадратичної інтерполяції. Процедура Тейлора	32
2.3. Ймовірісно-геометричний метод на біквадратичному елементі	35
2.4. Геометричний метод конструювання базисних функцій біквадратичного елемента	41
2.5. Обернена задача серендипової інтерполяції. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису SSE-8	43

РОЗДІЛ 3	
БІКВАДРАТИЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ	
СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ.	
БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ	49
3.1. Узагальнення комбінованого алгебро-геометричного методу побудови базисних функцій SSE-8 (обернена задача з параметром)	49
3.2. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій біквадратичного скінченного елемента	51
3.3. Дослідження та візуалізація ліній нульового рівня базисних функцій біквадратичного скінченного елемента	61
3.4. Узагальнення ймовірісно-геометричного методу побудови базисних функцій біквадратичного елемента	64
3.5. Узагальнення геометричного методу конструювання базисних функцій біквадратичного елемента	65
3.6. Модифікація методу Тейлора на SSE-8	67
3.7. Візуалізація базисних функцій SSE-8	68
3.8. Міжелементна неперервність моделей біквадратичного елемента	71
3.9. Побудова базисних функцій SSE-8, які задовольняють критеріям гармонічності	72
РОЗДІЛ 4	
БІКУБІЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ	75
4.1. Матричний метод побудови бікубічної інтерполяції. Процедура Тейлора	75
4.2. Геометричний метод конструювання базисних функцій бікубічного елемента	78
4.3. Ймовірісно-геометричний метод на бікубічному елементі	98

4.4. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису CSE-12 (обернена задача)	103
4.5. Метод оптимізації інтерполяційних властивостей і обчислювальних якостей базисів CSE-12	108

РОЗДІЛ 5

БІКУБІЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ.

БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ	110
5.1. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій бікубічного елемента	110
5.2. Аналіз і візуалізація ліній нульового рівня базисних функцій бікубічного елемента	115
5.3. Узагальнення ймовірнісно-геометричного методу побудови базисних функцій бікубічного елемента	119
5.4. Узагальнення геометричного методу конструювання базисних функцій бікубічного елемента	122
5.5. Модифікація методу Тейлора на CSE-12	124
5.6. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису CSE-12 (обернена задача з параметром).	125
5.7. Побудова базисних функцій CSE-12, які задовольняють критеріям гармонічності	127
5.8. Багатопараметричні моделі на CSE-12 (14, 15, 16 параметрів).	129
5.9. Зауваження стосовно повноти багатопараметричних базисних функцій CSE-12	143
5.10. Явище стійкості інтегральних середніх поліномів серендипової бікубічної інтерполяції	145

РОЗДІЛ 6

ТРИЛІНІЙНИЙ ЕЛЕМЕНТ СЕРЕНДИПОВОЇ СІМ'Ї

6.1. Просторові скінченні елементи. Матричний метод побудови базису трилінійного елемента	150
---	-----

6.2. Ймовірнісно-геометричний метод на трилінійному елементі	152
6.3. Геометричний метод конструювання базисних функцій трилінійного елемента	155
6.4. Побудова базисних функцій трилінійного елемента інтегруванням щільності рівномірного розподілу.	156
6.5. Критерії гармонічності для просторових дискретних елементів	157

РОЗДІЛ 7

ТРИКВАДРАТИЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ

СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ

7.1. Скінченні елементи серендипової сім'ї вищих порядків у просторі	159
7.2. Матричний метод побудови базису триквadraticної інтерполяції. Метод Тейлора	164
7.3. Ймовірнісно-геометричний метод на триквadraticному елементі	167
7.4. Геометричний метод конструювання базисних функцій триквadraticного елемента	170
7.5. Комбінований алгебро-геометричний метод конструювання базису CSE-20 (обернена задача).	172

РОЗДІЛ 8

ТРИКВАДРАТИЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ

СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ. БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ

8.1. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій просторового CSE-20	176
--	-----

8.2. Узагальнення ймовірісно-геометричного методу побудови базису трикватричного елемента	178
8.3. Узагальнення геометричного методу конструювання базисних функцій просторового ССЕ-20.	181
8.4. Модифікація методу Тейлора для побудови базису ССЕ-20.	185
8.5. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису трикватричного елемента (обернена задача з параметром).	185
8.6. Побудова базисних функцій ССЕ-20, які задовольняють критеріям гармонічності.	188
8.7 Багатопараметричні базиси трикватричного скінченного елемента	190

РОЗДІЛ 9

ТРИКУБІЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ

СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ

9.1. Матричний метод побудови базису трикубічної інтерполяції. Метод Тейлора	203
9.2. Геометричний метод конструювання базисних функцій трикубічного елемента	206
9.3. Ймовірісно-геометричний метод на трикубічному елементі	211
9.4. Метод оптимізації інтерполяційних властивостей і обчислювальних якостей базисів ССЕ-32	215
9.5. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису ССЕ-32 (обернена задача).	217

РОЗДІЛ 10

ТРИКУБІЧНИЙ СЕРЕНДИПІВ

СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ.

БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ З ПАРАМЕТРОМ

10.1. Комбінований алгебро-геометричний метод побудови базису просторового ССЕ-32 (обернена задача з параметром).	220
10.2. Когнітивно-графічний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій просторового ССЕ-32	223
10.3. Узагальнення ймовірісно-геометричного методу побудови базисних функцій просторового ССЕ-32	225
10.4. Узагальнення геометричного методу конструювання базисних функцій ССЕ-32	226
10.5. Модифікація методу Тейлора на просторовому ССЕ-32	232
10.6. Побудова базисних функцій ССЕ-32, які задовольняють критеріям гармонічності	232

ДОДАТОК

1. Побудова базису на симплексах у методі скінченних елементів	236
2. Ймовірісно-геометричний метод побудови базисів на симплексах	241
3. Кусково-лінійна інтерполяція в методі скінченних елементів	244

ЛІТЕРАТУРА

**Анатолій Никифорович Хомченко
Олена Іванівна Литвиненко
Ігор Олександрович Астіоненко**

КОГНІТИВНО-ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ ІЄРАРХІЧНИХ БАЗИСІВ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Монографія

Українською мовою

Верстка – І.І. Стратій

Підписано до друку 02.05.2019 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Цифровий друк.
Ум. друк. арк. 15,11. Тираж 300. Замовлення №2004м-120.
Ціна договірна. Віддруковано з готового оригінал-макета.

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»
73034, м. Херсон, вул. Паровозна, 46-а
E-mail: office@oldiplus.com
Свід. ДК №6532 від 13.12.2018 р.