

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

А. Н. КУЗНЕЦОВ, Е. Ю. НЕДЕЛЬКО, Н. И. ПОПОВА

**ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
НА НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ
ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ**

Рекомендовано Методическим советом НУК

Электронное издание комбинированного
использования на DVD-ROM



НИКОЛАЕВ • НУК • 2011

УДК 517 (076)
ББК 22.1
П 69

Рецензент: А. А. Щеглов, кандидат технических наук, доцент

Электронный аналог печатного издания:

Кузнецов А.Н., Неделько Е.Ю., Попова Н.И.

П 69 Практикум по решению задач на наибольшее и наименьшее
значения функций. – Николаев : Издательство НУК, 2011. – 82 с.

Учебное пособие относится к серии "РЕШЕБНИК" и содержит около 90 задач
на наибольшее и наименьшее значения функций как из математики, так и из раз-
личных областей физики и техники.

Предназначено для студентов первого курса втуза и старшеклассников.

УДК 517(076)
ББК 22.1

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВ Альберт Миколайович

НЕДЕЛЬКО Євген Юрійович

ПОПОВА Наталя Іванівна

**ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
НА НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ
ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ**

(російською мовою)

Редактор *Н.О. Шайкіна*

Комп'ютерне складання та верстання *В.Г. Мазанко*

Коректор *М.О. Паненко*

© Кузнецов А.Н., Неделько Е.Ю.,
Попова Н.И., 2011

© Издательство НУК, 2011

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 4,9. Объем данных 3666 кб.

Тираж 15. Вид. № 21. Зам. № 161.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54025, м. Миколаїв, просп. Героїв Сталінграда, 9

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідectво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для будущего инженера важно уметь применять дифференциальное исчисление к решению прикладных задач на наибольшее и наименьшее значения функций.

Данное учебное пособие серии РЕШЕБНИК содержит около 90 задач на указанную тематику из алгебры, геометрии, физики, механики и других разделов математики и техники. Большинство задач взято из учебных пособий [1 и 2].

Пособие состоит из трех частей: задачи для функции одной переменной, задачи для функций многих независимых переменных и задачи на условный экстремум.

Каждому разделу предшествуют краткие теоретические положения. Пособие предназначено в основном для студентов-иностранцев. Оно будет полезно также для студентов всех специальностей втуза и выпускников средней школы. Такой ПРАКТИКУМ дает возможность студенту или старшекласснику решать столько задач, сколько ему необходимо, чтобы приобрести устойчивые навыки по указанной тематике.



1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассматриваются задачи геометрического и физического содержания, в которых следует найти наибольшее или наименьшее значение функции.

Алгоритм решения таких задач следующий:

- 1) Ввести необходимые обозначения.
- 2) Составить уравнение, соответствующее условию задачи, и из него найти функцию, которая подлежит исследованию на наименьшее или наибольшее значение.
- 3) Если эта функция окажется функцией двух независимых переменных, то, используя известные теоремы, одну из этих переменных исключить.
- 4) Найти область определения полученной функции одной переменной.
- 5) Определить критические точки функции, взяв для рассмотрения только те из них, которые входят в область определения функции.
- 6) Во всех предлагаемых задачах остается единственная точка возможного экстремума. Далее любым (наиболее целесообразным) способом устанавливается, будет в этой точке минимум или максимум.
- 7) Найденная критическая точка и будет точкой наименьшего или наибольшего значения функции, смотря по тому, будет в этой точке минимум или максимум.
- 8) Если требуется по условию задачи, то в этой точке находят соответственно наименьшее или наибольшее значение функции.

Рассмотрим следующие задачи.

Уровень А

1. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Решение

Если x – одно слагаемое, то $(8 - x)$ – другое. Тогда сумма их кубов $S = x^3 + (8 - x)^3$, $0 < x < 8$.

$$\frac{dS}{dx} = 3x^2 - 3(8 - x)^2; \quad \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 = (8 - x)^2; \quad x = 8 - x; \quad 2x = 8; \quad x = 4;$$

$\frac{d^2S}{dx^2} = 6x + 6(8-x); \frac{d^2S}{dx^2} > 0$ при $x = 4$, т. е. $x = 4$ – точка минимума;
 $x_{\text{нм}} = \underline{\underline{4}}$ и $S_{\text{нм}} = \underline{\underline{128}}$.

2. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

Решение

$$S = x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}; \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{2}{x^3} > 0$ при $x = 1$, т. е. $x = 1$ – точка минимума; $x_{\text{нм}} = \underline{\underline{1}}$ и $S_{\text{нм}} = \underline{\underline{2}}$.

3. Число 36 разложить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

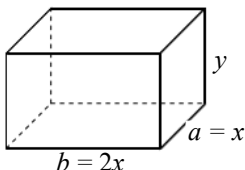
Решение

Если x – один сомножитель, а y – другой, то $36 = x \cdot y$; $y = \frac{36}{x}$; тогда

$$S = x^2 + \frac{36^2}{x^2}; \frac{dS}{dx} = 2x - \frac{2 \cdot 36^2}{x^3} \cdot \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow x^4 = 36^2; \quad x = 6; \quad y = 6.$$

$\frac{d^2S}{dx^2} = 2 + \frac{6 \cdot 36^2}{x^4} > 0$ при $x = 6$, т. е. $x = 6$ – точка минимума;
 $x_{\text{нм}} = \underline{\underline{6}}$ и $S_{\text{нм}} = \underline{\underline{72}}$.

4. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3 , причем стороны основания относились бы, как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

*Решение*

Размеры ящика указаны на рисунке. $72 = 2x^2y$;

$$y = \frac{36}{x^2}; \text{ полная поверхность } S = 4x^2 + 6xy = 4x^2 + \frac{6 \cdot 36}{x}.$$

$$\frac{dS}{dx} = 8x - \frac{6 \cdot 36}{x^2}; \quad \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow 8x^3 = 6 \cdot 36; \quad x = 3; \quad b = 6; \quad y = \frac{36}{9} = 4.$$

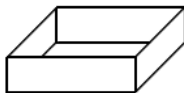
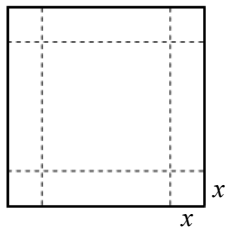
$$\frac{d^2S}{dx^2} = 8 + \frac{12 \cdot 36}{x^3} > 0 \text{ при } x = 3, \text{ т. е. } x = 3 - \text{ точка минимума;}$$

$$x_{\text{нм}} = \underline{\underline{3}} \text{ и } S_{\text{нм}} = \underline{\underline{144}}.$$

5. Из углов квадратного листа картона размером $18 \times 18 \text{ см}^2$ нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям, получить коробку наибольшей вместимости. Каковы должны быть размеры вырезанного квадрата?

Решение

Объем коробки $V = (18 - 2x)^2 \cdot x = 4(9 - x)^2 \cdot x, \quad 0 < x < 9.$



$$V'_x = 4(-2(9 - x)x + (9 - x)^2) =$$

$$= 4(9 - x)(9 - 3x);$$

$$V'_x = 0 \Rightarrow 9 - 3x = 0, \quad x = 3.$$

x	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
V'_x	+	0	-

Следова-

тельно, $x = 3$ – точка максимума;

$$\underline{\underline{V_{\text{нб}}}} = 4(9 - 3)^2 \cdot 3 = \underline{\underline{432 \text{ (см}^3\text{)}}}.$$

6. Решить предыдущую задачу для прямоугольного листа размером $8 \times 5 \text{ см}^2$.

Решение

Объем коробки

$$V = (8 - 2x)(5 - 2x) \cdot x; \quad 0 < x < 2,5.$$

$$V'_x = -2(5 - 2x) \cdot x - 2(8 - 2x) \cdot x + (8 - 2x)(5 - 2x) = 12x^2 - 52x + 40 = 4(3x^2 - 13x + 10);$$

$$V'_x = 0 \Rightarrow 3x^2 - 13x + 10 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{6}; \quad x_1 = \frac{13 - 7}{6} = 1;$$

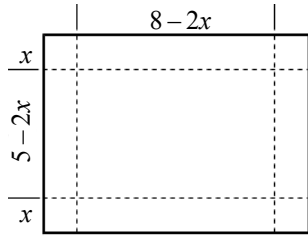
$$x_2 = \frac{13 + 7}{6} = \frac{20}{6} - \text{не подходит.}$$

x	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
V'_x	+	0	-

$x = 1$ – точка

максимума.

$$\underline{\underline{V_{\text{нб}} = (8 - 2)(5 - 2) \cdot 1 = 18 \text{ (см}^3\text{)}}}.$$



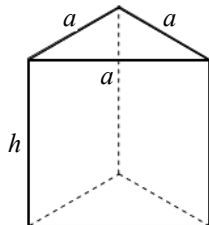
7. Объем правильной треугольной призмы равен V . Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

Решение

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3} h}{4} \Rightarrow h = \frac{4V}{a^2 \sqrt{3}}; \quad S_{\text{бок}} = 3ah; \quad S_{\text{полн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{12V}{a \sqrt{3}}.$$

$$\frac{dS_{\text{полн}}}{da} = a\sqrt{3} - \frac{12V}{a^2 \sqrt{3}}; \quad \frac{dS_{\text{полн}}}{da} = 0 \Rightarrow a^3 = 4V; \quad a = \sqrt[3]{4V};$$

$\frac{d^2 S}{da^2} = \sqrt{3} + \frac{24V}{a^3 \sqrt{3}} > 0$ при $a = \sqrt[3]{4V}$; $a = \sqrt[3]{4V}$ – точка минимума. Полная поверхность призмы будет наименьшей при стороне основания $\underline{\underline{a = \sqrt[3]{4V}}}$.

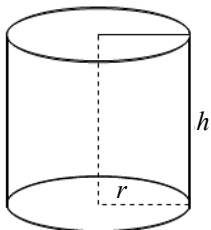


8. Открытый чан имеет форму цилиндра. Каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы при данном объеме V его поверхность была наименьшей?



Решение

$$V = \pi r^2 h; \quad h = \frac{V}{\pi r^2}; \quad S = \pi r^2 + 2\pi r h; \quad S = \pi r^2 + \frac{2V}{r}; \quad \frac{dS}{dr} = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$



$$\frac{dS}{dr} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}; \quad \frac{d^2 S}{dr^2} = 2\pi + \frac{4V}{r^3} > 0 \quad \text{при} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

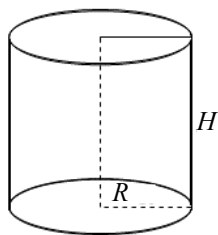
и $\underline{\underline{h = r}}$.

Следовательно, при этих значениях r и h поверхность цилиндра будет наименьшей.

9. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

Решение

Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$; его полная поверхность



$$S_{\text{п}} = 2\pi R^2 + 2\pi R H = 2\pi R(R + H); \quad H = \frac{V}{\pi R^2};$$

$$S = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

$$\frac{dS_{\text{п}}}{dR} = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}; \quad \frac{dS_{\text{п}}}{dR} = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

R	$R < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$R > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
$\frac{dS}{dR}$	-	0	+

$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ – точка минимума.

$$\underline{\underline{H}} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^3}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V^3}{\pi V^2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \underline{\underline{2R}}. \quad \text{При указанных соотношениях меж-}$$

ду R и H полная поверхность цилиндра будет наименьшей.

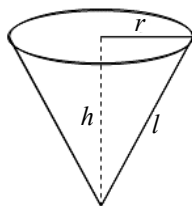
10. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

Решение

$$\text{Объем конуса } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h; \quad r^2 = l^2 - h^2; \quad V = \frac{1}{3}\pi(400h - h^3) \cdot V'_h = \\ = \frac{1}{3}\pi(400 - 3h^2); \quad V'_h = 0 \Rightarrow h = 20 \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

h	$h < 20 \frac{\sqrt{3}}{3}$	$h = 20 \frac{\sqrt{3}}{3}$	$h > 20 \frac{\sqrt{3}}{3}$
V'_h	+	0	-

$$h = 20 \frac{\sqrt{3}}{3} -$$



точка максимума, т. е. при $h = 20 \frac{\sqrt{3}}{3}$ объем конической воронки будет наибольшим.

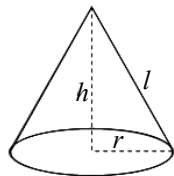
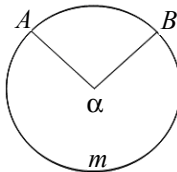
11. Из круга вырезан сектор с центральным углом α . Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

Решение

Длина дуги $A\tilde{m}B = l\alpha$; как видно из рисунка, $2\pi r = l\alpha$; объем кону-

$$\text{са } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h; \text{ тогда } h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2 \alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{l}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{l^2 \alpha^2}{4\pi^2} \cdot \frac{l}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} = \\ = \frac{l^2 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$



$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{l^2 \alpha (8\pi^2 - 3\alpha^2)}{48\pi^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}, \quad 0 < \alpha < 2\pi; \quad \frac{dV}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 5,13.$$



α	$\alpha < 5,13$	$\alpha = 5,13$	$\alpha > 5,13$
$\frac{dV}{d\alpha}$	+	0	-

$\alpha = 5,13$ (рад) = $293^\circ 56'$ – точка мак-

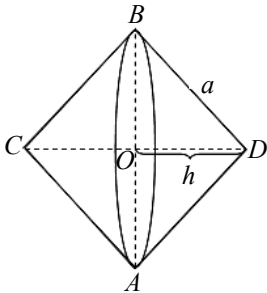
симула.

При $\alpha = 5,13$ (рад) объем конуса будет наибольшим.

12. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

Решение

$2p = 2a + 2h$; $h = p - a$; объем тела вращения $V_{\text{т.вр}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot OB^2 \cdot h$;



$$OB = \sqrt{a^2 - (p-a)^2} = \sqrt{2pa - p^2};$$

$$V_{\text{т.вр}} = \frac{2}{3} \pi (2pa - p^2)(p-a).$$

$$\frac{dV}{da} = \frac{2}{3} \pi (2p(p-a) - (2pa - p^2)) = \frac{2}{3} \pi (3p^2 -$$

$$-4pa); \quad \frac{dV}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4} p; \quad CD = 2h = 2 \left(p -$$

$$-\frac{3}{4} p \right) = \frac{1}{2} p; \quad \frac{d^2 V}{da^2} = -\frac{2}{3} \pi \cdot 4p < 0 \quad \text{при} \quad a = \frac{3}{4} p \Rightarrow a = \frac{3}{4} p \text{ – точка макси-}$$

мула, а значит, при $a = \frac{3}{4} p$ объем тела будет наибольшим.

13. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

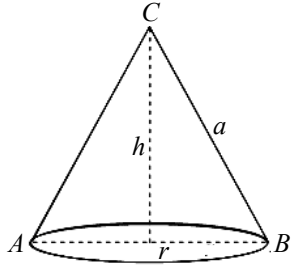
Решение

$$2p = 2a + 2r; \quad r = p - a; \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(p-a)^2 \sqrt{a^2 - (p-a)^2};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(p-a)^2 \sqrt{2pa - p^2}.$$

$$\frac{dV}{da} = \frac{1}{3}\pi \left(-2(p-a)\sqrt{2pa-p^2} + \frac{2p(p-a)^2}{2\sqrt{2pa-p^2}} \right) =$$

$$= \frac{\pi(p-a)(3p^2-5pa)}{3\sqrt{2pa-p^2}}; \quad \frac{dV}{da} = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{5}p = 0,6p.$$



a	$a < 0,6p$	$a = 0,6p$	$a > 0,6p$
V'_a	+	0	-

$a = 0,6p$ – точка максимума;

$\underline{\underline{r}} = p - 0,6p = \underline{\underline{0,4p}}; \quad \underline{\underline{AB}} = 2r = \underline{\underline{0,8p}}.$ При указанных размерах сторон треугольника объем тела вращения будет наибольшим.

14. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R .

Решение

Объем цилиндра

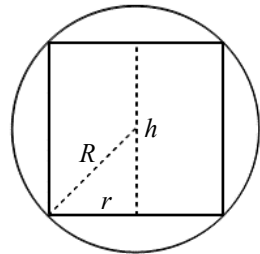
$$V_{\text{ц}} = \pi r^2 h; \quad r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}; \quad V_{\text{ц}} = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4} \right).$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi \left(R^2 - \frac{3}{4}h^2 \right); \quad \frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{2}\pi h < 0 \quad \text{при} \quad h = \frac{2}{3}R\sqrt{3}.$$

$\underline{\underline{h = \frac{2}{3}R\sqrt{3}}}$ – точка максимума. Это и будет вы-

сота цилиндра наибольшего объема.

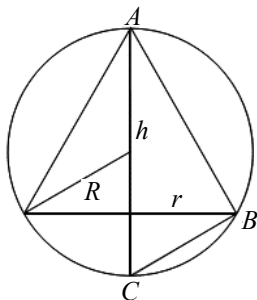


15. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R .

Решение

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

$$\text{Из } \triangle ABC \Rightarrow r^2 = h(2R - h); \quad V = \frac{1}{3} \pi h^2 (2R - h).$$



h	$h < \frac{4}{3}R$	$h = \frac{4}{3}R$	$h > \frac{4}{3}R$
$\frac{dV}{dh}$	+	0	-

$$\underline{\underline{h = \frac{4}{3}R}}$$

точка максимума. Это и будет высота конуса наибольшего объема.

16. Дождевая капля, начальная масса которой m_0 , падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? (Сопротивлением воздуха пренебречь.)

Решение

$m_0 - m = kt$, где m – масса в момент времени t ; $m = m_0 - kt$; кинетическая энергия $W_k = \frac{1}{2} m V^2$; скорость $V = gt$. Тогда $W_k = \frac{1}{2} (m_0 - kt) g^2 t^2$.

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{1}{2} g^2 (-kt^2 + 2t(m_0 - kt)) = \frac{1}{2} g^2 (2m_0 t - 3kt^2); \quad \frac{dW_k}{dt} = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \frac{m_0}{k};$$

$$\frac{d^2 W_k}{dt^2} = \frac{1}{2} g^2 (2m_0 - 6kt) < 0 \text{ при } t = \frac{2}{3} \frac{m_0}{k} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \frac{m_0}{k} - \text{точка максимума.}$$

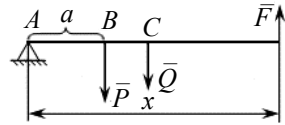
$$\underline{\underline{W_{k\text{нб}} = \frac{2m_0^3 g^2}{27k^2}}}.$$

17. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A ; в точке B ($AB = 0$) подвешен груз P . Вес единицы длины рычага равен k . Какова должна

быть длина рычага, чтобы груз P уравнивался наименьшей силой? (Момент уравнивающей силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага.)

Решение

Пусть точка C – центр тяжести рычага; $Q = kx$ – вес рычага. Сумма моментов сил относительно точки A равна нулю:



$$\sum M = 0 \Rightarrow F \cdot x = \frac{1}{2}kx^2 + Pa \Rightarrow F = \frac{1}{2}kx + \frac{Pa}{x}. \quad \frac{dF}{dx} = \frac{1}{2}k - \frac{Pa}{x^2};$$

$$\frac{dF}{dx} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}}; \quad \frac{d^2F}{dx^2} = \frac{2Pa}{x^3} > 0 \text{ при } x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}} - \text{точка минимума,}$$

т. е. при $x = \sqrt{\frac{2Pa}{k}}$ груз P будет уравниваться наименьшей силой.

18. Расходы на топливо для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 грн в час, остальные же расходы, не зависящие от скорости, составляют 480 грн в час. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

Решение

Расходы на топливо за один час $S_1 = kV^3$; $30 = k \cdot 1000 \Rightarrow k = 0,03$; тогда общие расходы $S_2 = 0,03V^3 + 480$.

За время t при равномерном движении пройден путь $l = V \cdot t$. Расходы на топливо за t часов: $R = (0,03V^3 + 480) \cdot t$. Расходы на 1 км пути:

$$Q = \frac{R}{l}; \quad Q = \frac{1}{V}(0,03V^3 + 480) = 0,03V^2 + \frac{480}{V}. \quad \frac{dQ}{dV} = 0,06V - \frac{480}{V^2}.$$

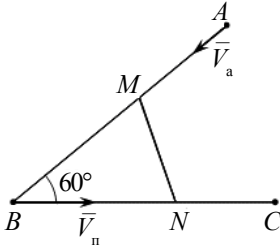
$$\frac{dQ}{dV} = 0 \Rightarrow V = \sqrt[3]{\frac{480}{0,06}} = \sqrt[3]{8000} = 20 \text{ (км/ч)}; \quad \frac{d^2Q}{dV^2} = 0,06 + \frac{960}{V^3} > 0 \text{ при}$$

$V = 20$; $V = 20$ – точка минимума. Общая наименьшая сумма расходов в час $S_2 = 0,03 \cdot 8000 + 480 = 720$ грн.



19. Три пункта A , B и C расположены так, что $\angle ABC = 60^\circ$. Из пункта A выходит автомобиль по направлению к B со скоростью 80 км/ч, из пункта B по направлению к C выходит поезд со скоростью 50 км/ч.

В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?



Решение

Скорость автомобиля $V_a = 80$ км/ч; скорость поезда $V_n = 50$ км/ч; $AB = 200$ км.

К моменту времени t расстояние между автомобилем и поездом MN : $AM = 80t$, $BM = 200 - 80t$, $BN = 50t$. По теореме косинусов имеем:

$$S = MN = \sqrt{(200 - 80t)^2 + 2500t^2 - (200 - 80t) \cdot 50t} =$$

$$= \sqrt{40000 - 42000t + 12900t^2}.$$

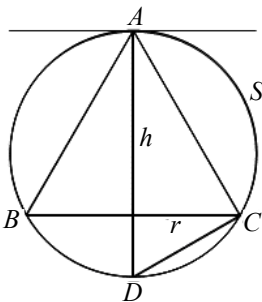
$$\frac{dS}{dt} = \frac{-42000 + 2 \cdot 12900t}{2\sqrt{40000 - 42000t + 12900t^2}}; \quad \frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow t = \frac{21000}{12900} = 1\frac{27}{43} \approx 1,38.$$

$$t = 1 \text{ ч } 38 \text{ мин.}$$

20. На окружности дана точка A . Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь $\triangle ABC$ была наибольшей.

Решение

$AD = 2R$, где R – радиус окружности;



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = r \cdot h; \quad r^2 = h(2R - h);$$

$$S_{\triangle ABC} = h\sqrt{h(2R - h)} = \sqrt{h^3(2R - h)}.$$

$$\frac{dS}{dh} = \frac{3h^2(2R - h) - h^3}{2\sqrt{h^3(2R - h)}} = \frac{6Rh^2 - 4h^3}{2\sqrt{h^3(2R - h)}};$$

$$\frac{dS}{dh} = 0 \Rightarrow h = \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}d \quad (d = 2R).$$



h	$h < \frac{3}{2}R$	$h = \frac{3}{2}R$	$h > \frac{3}{2}R$
S'_h	+	0	-

$h = \frac{3}{2}R$ – точка максимума. При та-

ком значении h площадь треугольника ABC будет наибольшей.

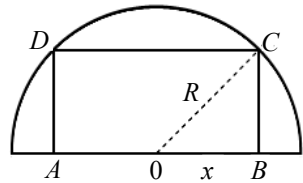
21. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R .

Решение

Периметр $p = 4x + 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

$$\frac{dp}{dx} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}; \quad \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{R^2 - x^2} - x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}R.$$

$$AB = 2x = \frac{4}{\sqrt{5}}R; \quad CB = \sqrt{R^2 - \frac{4}{5}R^2} = \frac{R}{\sqrt{5}};$$



x	$x < \frac{2}{\sqrt{5}}R$	$x = \frac{2}{\sqrt{5}}R$	$x > \frac{2}{\sqrt{5}}R$
P'_x	+	0	-

$x = \frac{2}{\sqrt{5}}R$ – точка максимума; сле-

довательно, стороны прямоугольника наибольшего периметра равны

$$\frac{4R}{\sqrt{5}} \text{ и } \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Уровень B

22. В данный сегмент круга вписать прямоугольник наибольшей площади.

Решение

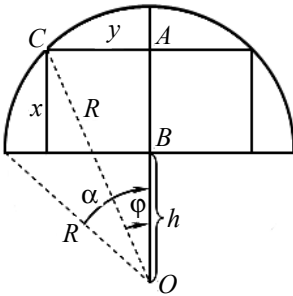
Сторона прямоугольника (см. рисунок) $AB = x = AO - BO = R(\cos \varphi - \cos \alpha)$; $CA = y = R \sin \varphi$.



Площадь прямоугольника $S = 2xy = 2R^2 \sin \varphi (\cos \varphi - \cos \alpha) = S(\varphi)$.
 $S'_\varphi = 2R^2 (\cos \varphi (\cos \varphi - \cos \alpha) - \sin^2 \varphi) = 2R^2 (2\cos^2 \varphi - \cos \varphi \cdot \cos \alpha - 1)$;

$$S'_\varphi = 0 \Rightarrow 2\cos^2 \varphi - \cos \varphi \cdot \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha + 8}}{4}.$$

Полагая $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, имеем $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 8}}{4}$.



$S''_\varphi = 2R^2 (-4\cos \varphi \cdot \sin \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi) =$
 $= 2R^2 \sin \varphi (\cos \alpha - 4\cos \varphi) < 0$ при $\alpha > \varphi$ и при
 $\cos \varphi = \frac{1}{4} \left(\cos \alpha + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha} \right)$. Следовательно,
 функция $S(\varphi)$ имеет максимум при указанных
 условиях. Учитывая, что $\cos \alpha = \frac{h}{R}$, имеем

$$x_{\text{нб}} = R \left(\frac{\frac{h}{R} + \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 8}}{4} - \frac{h}{R} \right) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{8R^2 + h^2} - 3h \right).$$

23. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса должны совпадать).

Решение

Объемы конуса и цилиндра соответственно равны: $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$,

$$V_{\text{ц}} = \pi r^2 h. \text{ Из того, что } \triangle COD \sim \triangle AOB \Rightarrow \frac{H}{H-h} = \frac{R}{r} \Rightarrow H = \frac{hR}{R-r}.$$



$$\text{Тогда } V_k = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi r^2 h H R^2}{3 r^2 h} = \frac{V_{\text{ц}} \cdot H R^2}{3 r^2 h} = \frac{V_{\text{ц}} \cdot R^3}{3 r^2 (R-r)}.$$

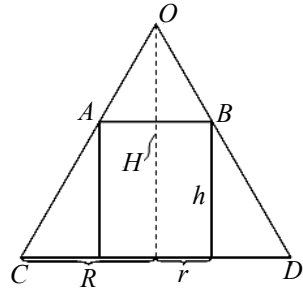
$$\frac{dV_k}{dR} = \frac{V_{\text{ц}}}{3 r^2} \cdot \frac{3 R^2 (R-r) - R^3}{(R-r)^2} = \frac{V_{\text{ц}}}{3 r^2} \cdot \frac{R^2 (2R-3r)}{(R-r)^2}; \quad \frac{dV_k}{dR} = 0 \Rightarrow R = \frac{3}{2} r.$$

R	$R < \frac{3}{2} r$	$R = \frac{3}{2} r$	$R > \frac{3}{2} r$
$\frac{dV_k}{dR}$	-	0	+

Значит,

$R = 1,5r$ – точка минимума. Таким образом,

при условии, что радиус основания конуса будет в полтора раза больше радиуса цилиндра, описанный конус будет иметь наименьший объем.



24. Найти высоту прямого круглого конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R .

Решение

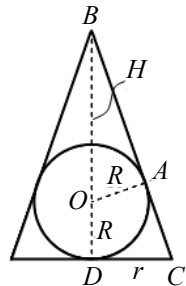
$$\text{Объем конуса } V_k = \frac{1}{3} \pi r^2 H; \quad \Delta OAB \sim \Delta DBC \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H-R}{\sqrt{H^2 + r^2}};$$

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{(H-R)^2}{H^2 + r^2} \Rightarrow R^2 H^2 + R^2 r^2 = r^2 (H-R)^2;$$

$$R^2 H^2 = r^2 ((H-R)^2 - R^2); \quad r^2 = \frac{R^2 H^2}{(H-R)^2 - R^2};$$

$$r^2 = \frac{R^2 H^2}{H^2 - 2HR}; \quad V_k = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2 H^3}{H^2 - 2HR}.$$

$$\frac{dV_k}{dH} = \frac{R^2}{3} \pi \frac{3H^2(H^2 - 2HR) - H^3(2H - 2R)}{(H^2 - 2HR)^2} = \frac{R^2 \pi}{3} \cdot \frac{H^4 - 4H^3 R}{(H^2 - 2HR)^2};$$





$$\frac{dV_{\kappa}}{dH} = 0 \Rightarrow H = 4R.$$

H	$H < 4R$	$H = 4R$	$H > 4R$
V'_H	-	0 min	+

$H = 4R$ – точка

минимума.

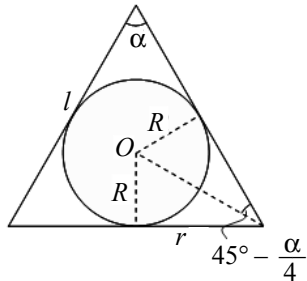
25. Найти угол при вершине осевого сечения конуса наименьшей боковой поверхности, описанного около данного шара.

Решение

Боковая поверхность конуса $S = \pi r l$,

$$r = R \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right).$$

$$l = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{R \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$



Тогда $S = \frac{\pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Находим

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{\pi R^2}{2} \frac{\operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)} - \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}{\sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) \text{ или } \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 = 0; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = -1 \pm \sqrt{1+1},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41; \quad \alpha = 2 \arcsin(0,41) \approx 49^\circ.$$

Нетрудно показать, что при $\alpha \approx 49^\circ$ боковая поверхность конуса будет наименьшей.

26. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

Решение

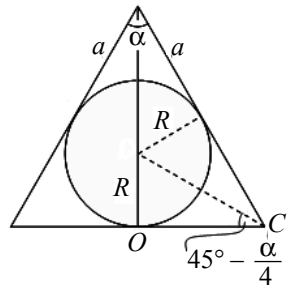
Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$. Радиус круга

$$R = OC \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) = a \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) =$$

$$= \sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}.$$

Найдем

$$\frac{dR}{d\alpha} = \sqrt{S} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \right.$$



$$+ \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \Bigg) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{S}}{4} \cdot \frac{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}} = \\
 &= \frac{\sqrt{S}}{4} \cdot \frac{\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}} = \\
 &= \frac{\sqrt{S}}{8} \cdot \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}} = \\
 &= \frac{\sqrt{S}}{8} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}}.
 \end{aligned}$$

$$\frac{dR}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \left(1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 0; \quad \cos\frac{\alpha}{2} \neq 0, \text{ ибо}$$

тогда $\alpha = 180^\circ$. Значит, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 60^\circ$.

α	$\alpha < 60^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha > 60^\circ$
R'_α	+	0 max	-

$\alpha = 60^\circ$ – точка максимума, т. е. тре-

угольник должен быть равносторонним.



27. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R (центр описанного конуса лежит в центре шара).

Решение

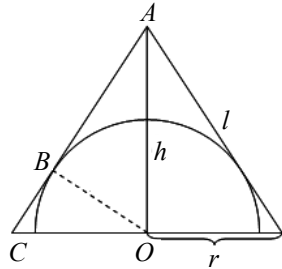
$$\text{Объем конуса } V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad \triangle OBA \sim \triangle OCA \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{h}{l}; \quad l = \sqrt{h^2 + r^2};$$

$$\frac{R}{l} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}; \quad \frac{R^2}{r^2} = \frac{h^2}{h^2 + r^2}; \quad \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2 + r^2}{h^2};$$

$$h^2 r^2 - r^2 R^2 - R^2 h^2 = 0; \quad r^2 = \frac{R^2 h^2}{h^2 - R^2}.$$

$$\text{Тогда } V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi \frac{R^2 h^3}{h^2 - R^2}.$$

$$\frac{dV_{\text{к}}}{dh} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{3h^2(h^2 - R^2) - 2h^4}{(h^2 - R^2)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h^2 - 3R^2)}{(h^2 - R^2)^2}, \quad \frac{dV_{\text{к}}}{dh} = 0 \Rightarrow h = R\sqrt{3}.$$



h	$h < R\sqrt{3}$	$h = R\sqrt{3}$	$h > R\sqrt{3}$
$V'_{\text{к}}$	-	0 min	+

$h = R\sqrt{3}$ – точка минимума. Сле-

довательно, высота h конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса R , равна $R\sqrt{3}$.

28. Какова должна быть высота конуса, вписанного в шар радиуса R , чтобы его боковая поверхность была наибольшей?

Решение

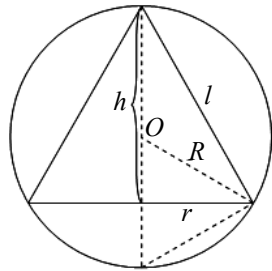
$$\text{Боковая поверхность конуса } S_{\text{б}} = \pi r l;$$

$$r^2 = h(2R - h); \quad l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + h(2R - h)} = \sqrt{2Rh}.$$

Тогда

$$S_{\text{б}} = \pi \sqrt{h(2R - h)} \cdot \sqrt{2Rh} = \pi \sqrt{h^2(2R - h) \cdot 2R} =$$

$$= \pi \sqrt{2R} \sqrt{h^2(2R - h)}.$$





$$\frac{dS_6}{dh} = \pi\sqrt{2R} \frac{2h(2R-h) - h^2}{2\sqrt{h^2(2R-h)}} = \frac{\pi\sqrt{2R}(4R-3h)h}{2\sqrt{h^2(2R-h)}}; \quad \frac{dS}{dh} = 0 \Rightarrow h = \frac{4}{3}R.$$

h	$h < \frac{4}{3}R$	$h = \frac{4}{3}R$	$h > \frac{4}{3}R$
S'_h	+	0 max	-

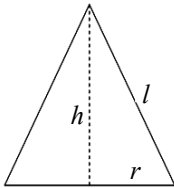
$h = \frac{4}{3}R$ – точка максимума; следова-

тельно, при таком значении h боковая поверхность конуса будет наибольшей.

29. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материала, когда его высота в $\sqrt{2}$ раза больше радиуса основания.

Решение

Объем и боковая поверхность конуса соответственно равны:



$$V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 h; \quad S_6 = \pi r l = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \Rightarrow h = \frac{3V}{\pi r^2}.$$

$$\text{Тогда } S_6 = \sqrt{\frac{9V^2}{r^2} + \pi^2 r^4}.$$

$$\frac{dS_6}{dr} = \frac{-\frac{18V^2}{r^2} + 4\pi^2 r^3}{2\sqrt{\frac{9V^2}{r^2} + \pi^2 r^4}}; \quad \frac{dS_6}{dr} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}} = r_0 \Rightarrow h = \frac{3V}{\pi\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{27V^3}{\frac{9}{2}V^2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}, \quad \text{откуда } \frac{h}{r} = \sqrt{2}; \quad h = r\sqrt{2}.$$

r	$r < r_0$	$r = r_0$	$r > r_0$
S'_r	$-$	0 $\min$	$+$

Как видим, при данных размерах шатра для

его вместимости требуется наименьшее количество материала.

30. Через данную точку $P(1; 4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

Решение

Сумма длин отсекаемых отрезков $S = a + b$, уравнение прямой:

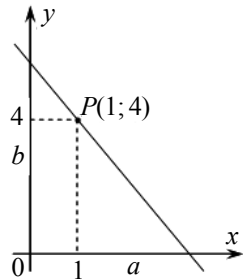
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1 \text{ и } a = \frac{b}{b-4}. \text{ Тогда } S = b \left(1 + \frac{1}{b-4} \right).$$

$$\frac{dS}{db} = 1 + \frac{1}{b-4} - \frac{b}{(b-4)^2}; \quad \frac{dS}{db} = 0 \Rightarrow (b-4)^2 + b -$$

$-4 - b = 0; (b-4)^2 = 4; b-4 = \pm 2; b_1 = 2; b_2 = 6;$
 $b = 2$ — не подходит, так как при этом $a < 0$. Берем

$b = 6$, тогда $a = 3$. Уравнение прямой: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$.

Можно показать, что при таких значениях a и b сумма длин отрезков будет наименьшей.



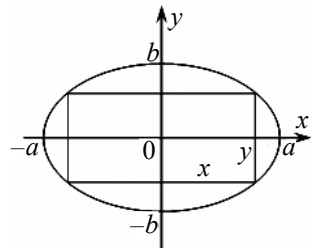
31. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение

Если x и y — длины половины сторон прямоугольника, то его площадь $S = 2x \cdot 2y =$

$$= 4xy; \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow S = \frac{4b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{4b}{a} \cdot \frac{(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$





x	$x < \frac{a}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$x > \frac{a}{\sqrt{2}}$
S'_x	+	0 max	-

$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ – точка максимума, $2x = a\sqrt{2}$.

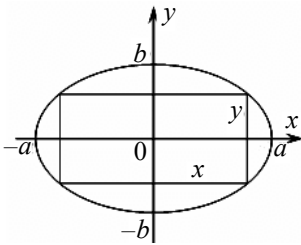
Тогда $2y = b\sqrt{2}$.

32. Найти наименьший по площади эллипс, описанный около данного прямоугольника (площадь эллипса с полуосями a и b равна πab).

Решение

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; площадь $S_{\text{эл}} = \pi ab$,

площадь прямоугольника $S_{\text{пр}} = 4xy$; $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; $y^2 \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$;



$$b = \frac{ay}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad S_{\text{эл}} = \pi \frac{a^2 y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = f(a).$$

$$\frac{dS_{\text{эл}}}{da} = \pi y \frac{2a\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} =$$

$$= \pi y \frac{a(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{(a^2 - 2x^2)^3}}; \quad \frac{dS_{\text{эл}}}{da} = 0 \Rightarrow a = x\sqrt{2}; \quad b = y\sqrt{2}; \quad S_{\text{эл}} = 2\pi xy.$$

$$\frac{S_{\text{пр}}}{S_{\text{эл}}} = \frac{4xy}{2\pi xy} = \frac{2}{\pi}; \quad \underline{\underline{S_{\text{пр}} = \frac{2}{\pi} S_{\text{эл}}}}. \quad \text{При указанных соотношениях площадей}$$

эллипс, описанный около данного прямоугольника, будет наименьшим (доказательство предоставляем читателю).

33. Через точку эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ следует провести касательную, чтобы площадь треугольника, составленного этой касательной с осями координат, была наименьшей.

Решение

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$\frac{x \cdot x_0}{8} + \frac{y \cdot y_0}{18} = 1 \Rightarrow OA = \frac{8}{x_0}, \quad OB = \frac{18}{y_0}; \quad S_{AOB} = \frac{8 \cdot 9}{x_0 y_0};$$

$$\Delta ACM_0 \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{\frac{8}{x_0} - x_0}{\frac{8}{x_0}} = \frac{y_0}{\frac{18}{y_0}}, \quad \frac{8 - x_0^2}{8} = \frac{y_0^2}{18} \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{9}{4}(8 - x_0^2)} =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{8 - x_0^2}.$$

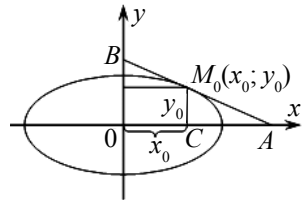
$$S_{\Delta OAB} = \frac{72 \cdot 2}{3x_0 \sqrt{8 - x_0^2}} = \frac{48}{x_0 \sqrt{8 - x_0^2}} = f(x_0).$$

$$S'_{x_0} = 48 \left(\left(x_0 \sqrt{8 - x_0^2} \right)^{-1} \right)'_{x_0} = 48 \left(\sqrt{8 - x_0^2} - \frac{x_0^2}{\sqrt{8 - x_0^2}} \right) \left(x_0 \sqrt{8 - x_0^2} \right)^{-2};$$

$$S'_{x_0} = 0 \Rightarrow 8 - 2x_0^2 = 0; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 3. \text{ Тогда точка } - M_0(2; 3).$$

x_0	$x_0 < 2$	$x_0 = 2$	$x_0 > 2$
S'_{x_0}	-	0 min	+

$x_0 = 2; y_0 = 3$ – точка минимума. Сле-

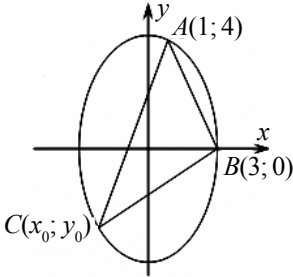


довательно, площадь треугольника, составленного касательной к эллипсу и осям координат, будет наименьшей, если $M_0(2; 3)$.

34. На эллипсе $2x^2 + y^2 = 18$ даны две точки: $A(1; 4)$ и $B(3; 0)$. Найти на данном эллипсе третью точку $C(x_0; y_0)$, такую, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

*Решение*

Уравнение AB : $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{0-4} \Rightarrow 2x + y - 6 = 0$.



Расстояние от $C(x_0; y_0)$ до AB

$$h = \frac{|2x_0 + y_0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x_0 + y_0 - 6|}{\sqrt{5}}.$$

Из уравнения эллипса имеем

$$y_0 = \pm \sqrt{18 - 2x_0^2}.$$

Тогда при $y_0 > 0$

$$h = \frac{|2x_0 + \sqrt{18 - 2x_0^2} - 6|}{\sqrt{5}}, \quad h = \pm \frac{2x_0 + \sqrt{18 - 2x_0^2} - 6}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{dh}{dx_0} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2 - \frac{2x_0}{\sqrt{18 - 2x_0^2}} \right); \quad \frac{dh}{dx_0} = 0 \Rightarrow 18 - 2x_0^2 = x_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{6}, \quad y_0 = \sqrt{6}.$$

Возьмем пару $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$:

x_0	2,4	$\sqrt{6}$	2,5
$+h'_1$	+	0	+
		ext не	

Аналогично пара $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$ не дает экстремума. При $y_0 < 0$

$$h = \frac{|2x_0 - \sqrt{18 - 2x_0^2} - 6|}{\sqrt{5}}, \quad \frac{dh}{dx_0} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{18 - 2x_0^2} + x_0}{\sqrt{18 - 2x_0^2}};$$

$$\frac{dh}{dx_0} = 0 \Rightarrow \sqrt{18 - 2x_0^2} = -x_0 \Rightarrow x_0 = -\sqrt{6}; \quad y_0 = -\sqrt{6}.$$

x_0	-2,4	$-\sqrt{6}$	-2,5
$+h'_1$	+	0	-
		max	

$C(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$ – точка максимума.

35. На оси параболы $y^2 = 2px$ дана точка на расстоянии a от вершины. Указать абсциссу x ближайшей к ней точки кривой.

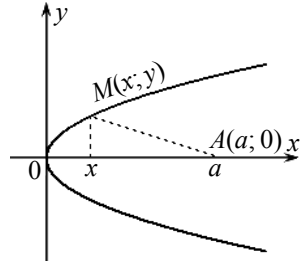
Решение

В данном случае $x \geq 0$. Пусть $x = OA = a$, тогда расстояние

$$S = |AM| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 2px}.$$

$$S'_x = \frac{2(x-a) + 2p}{2\sqrt{(x-a)^2 + 2px}} = \frac{x-a+p}{\sqrt{(x-a)^2 + 2px}};$$

$$S'_x = 0 \Rightarrow x-a = -p \text{ и } x = a-p > 0, \text{ если } a > p; \\ x = 0, \text{ если } a = p.$$



x	$a-2p$	$a-p$	a
S'_x	-	0 min	+

x	$x < 0$	0	$x > 0$
S'_x	-	0 min	+

Абсцисса ближайшей точки $x = a - p$, если $a > 0$ и $x = 0$, если $a \leq p$.

36. Полоса железа шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найти значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при котором вместимость желоба будет наибольшей.

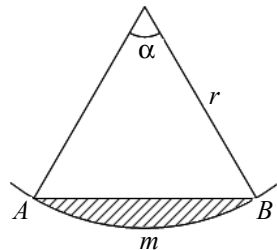
Решение

$$\text{Площадь сегмента } S = \frac{\pi r^2}{2\pi} \alpha - \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha = \frac{r^2 \alpha}{2} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2},$$

$$0 < \alpha < 2\pi; \quad \tilde{A}MB = l = r\alpha \Rightarrow r = \frac{l}{\alpha}; \quad S = \frac{l^2}{2\alpha^2} (\alpha - \sin \alpha).$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{l^2}{\alpha^3} \left(\sin \alpha - \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{l^2}{\alpha^3} \cos \frac{\alpha}{2} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$S'_\alpha = 0 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = 0; \quad \alpha = \pi.$$





α	$\pi - \varepsilon$	π	$\pi + \varepsilon$
S'_α	+	0 max	-

$\alpha = \pi$ – точка максимума. $2 \sin \frac{\alpha}{2} - \alpha \cos \frac{\alpha}{2} = 0$;

$2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \alpha$; $\alpha = 0$ – не входит в область определения.

Значит, сечение желоба имеет форму полукруга и при этом вместимость желоба будет наибольшей.

37. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры основания которого равны соответственно 2 м и 1 м. Требуется изготовить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

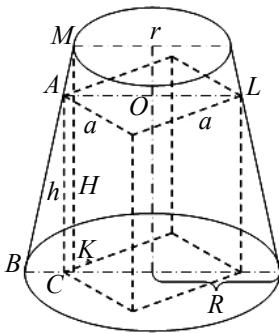
Решение

Согласно обозначениям на рисунке имеем: $2a^2 = AL^2$; $AL = a\sqrt{2}$;

$$AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}; R = 1; r = \frac{1}{2}; H = 20.$$

$$\triangle ABC \sim \triangle BMK \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{BC}{BK}; h = H \frac{BC}{BK} = H \frac{R - 0,5a\sqrt{2}}{R - r}.$$

$$\text{Объем балки } V = a^2 h = a^2 H \frac{R - 0,5a\sqrt{2}}{R - r} = H \frac{a^2 R - 0,5a^3\sqrt{2}}{R - r}.$$



$$V'_a = \frac{H}{R - r} \left(2aR - \frac{3}{2}a^2\sqrt{2} \right); V'_a = 0 \Rightarrow a = \frac{4R}{3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} R; h = 20 \cdot \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = 13 \frac{1}{3}.$$

$$V_a'' = \frac{H}{R-r} (2R - 3a\sqrt{2}); \quad V_a''\left(\frac{4R}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{H}{R-r} (2R - 4R) < 0. \text{ Значит,}$$

$$V_{\text{нб}} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \frac{40}{3} = \underline{\underline{\frac{320}{27}}} \text{ (куб. м).}$$

38. Ряд опытов привел к различным значениям $x_1, x_2, \dots, x_n$ для исследуемой величины A . Часто принимают в качестве значения A такое значение x , при котором сумма квадратов отклонений его от $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет наименьшее значение. Найти x , удовлетворяющее этому требованию.

Решение

$$\text{Сумма квадратов отклонений } \delta = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2; \quad \delta'_x = 2 \sum_{i=1}^n (x - x_i),$$

$$\delta'_x = 0 \Rightarrow nx = x_1 + x_2 + \dots + x_n; \quad x = \underline{\underline{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}} - \text{точка минимума, так}$$

как $\delta''_x = 2n > 0$. Следовательно, искомое значение равно среднему арифметическому результатов измерений.

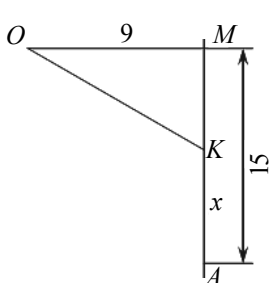
39. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу, от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком по 5 км/ч, а на веслах по 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

Решение

MA – линия берега. Гонец высадился в точке K ; тогда время его

$$\text{передвижения } t = \frac{OK}{4} + \frac{KA}{5} = \frac{\sqrt{81 + (15 - x)^2}}{4} + \frac{x}{5}.$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-15+x}{\sqrt{306-30x+x^2}} + \frac{1}{5}; \quad \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow 75-5x = 4\sqrt{306-30x+x^2};$$



$$9x^2 - 270x - 729 = 0.$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0; \quad x = 3; \quad x = 27 \text{ — не подходит.}$$

x	$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
t'_x	-	0 min	+

Следовательно, $x = 3$ — точка минимума.

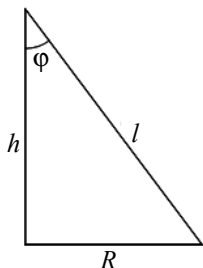
Чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время, гонец должен высадиться в 3 км от лагеря.

40. Прямо над центром круглой площадки радиуса R нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка? (Степень освещенности прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

Решение

По закону физики освещенность $E = k \frac{\cos \varphi}{l^2}$; $\cos \varphi = \frac{h}{l} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$;

$$E = k \frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$



$$\frac{dE}{dh} = k \frac{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \cdot 2h^2 (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2 + R^2)^3} = k \frac{R^2 - 2h^2}{(h^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{dE}{dh} = 0 \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,7R.$$

h	$h < 0,7R$	$h = 0,7R$	$h > 0,7R$
E'_h	+	0 max	-

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,7R - \text{точка максимума,}$$

т. е. фонарь нужно повесить на высоте $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$, чтобы он наилучшим образом освещал площадку.

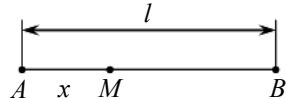
41. На отрезке длиной l , соединяющем два источника света силы I_1 и I_2 , найти наименее освещенную точку.

Решение

$$\text{Освещенность } E = k \frac{I_1}{x^2} + k \frac{I_2}{(l-x)^2} = k \left(\frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(l-x)^2} \right).$$

$$\frac{dE}{dx} = k \left(-\frac{2I_1}{x^3} + \frac{2I_2}{(l-x)^3} \right); \quad \frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{x^3} = \frac{I_2}{(l-x)^3}; \quad \sqrt[3]{I_1} = \frac{\sqrt[3]{I_2}}{l-x};$$

$$l\sqrt[3]{I_1} = x(\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}); \quad x = \frac{l\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}} - \text{точка}$$

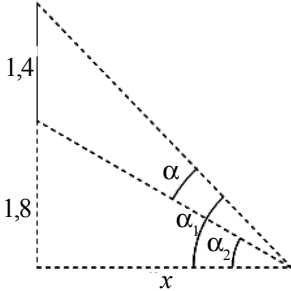


минимума, так как $\frac{d^2E}{dx^2} = 6k \left(\frac{I_1}{x^4} + \frac{I_2}{(x-l)^4} \right) > 0$ при найденном значении x .

42. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стоять наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра (т. е. чтобы угол зрения был наибольшим)?

Решение

$$\text{Угол зрения } \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{3,2}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1,8}{x}.$$



$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{-\frac{3,2}{x^2}}{1 + \left(\frac{3,2}{x}\right)^2} - \frac{-\frac{1,8}{x^2}}{1 + \left(\frac{1,8}{x}\right)^2} = \frac{-3,2}{x^2 + 10,54} +$$

$$+ \frac{1,8}{x^2 + 3,24}; \quad \frac{d\alpha}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1,8}{x^2 + 3,24} =$$

$$= \frac{3,2}{x^2 + 10,54} \Rightarrow 1,8x^2 + 18,432 = 3,2x^2 + 10,368 \text{ и } 1,4x^2 = 8,064;$$

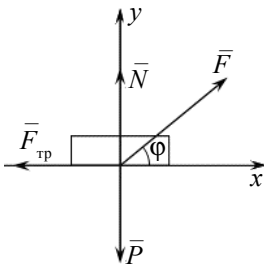
$$x = \sqrt{5,76} = 2,4 \text{ (м)} - \text{точка максимума, так как } \frac{d^2\alpha}{dx^2} = \frac{6,4x}{(x^2 + 10,54)^2} -$$

$$- \frac{1,8x}{(x^2 + 3,24)^2} < 0 \text{ при } x = 2,4.$$

43. Груз весом P , лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой F . Сила трения пропорциональна силе, прижимающей тело к плоскости, и направлена против сдвигающей силы. Коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен k . Под каким углом φ к горизонту надо приложить силу F , чтобы величина ее оказалась наименьшей? Определить наименьшую величину сдвигающей силы.

Решение

Условия равновесия плоской системы сил:



$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \cos \varphi - F_{\text{тр}} = 0, \\ N - P + F \sin \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow N =$$

$$= P - F \sin \varphi,$$

$$F \cos \varphi - kP + kF \sin \varphi = 0 \Rightarrow F = \frac{kP}{\cos \varphi + k \sin \varphi}.$$

$$F'_\varphi = \frac{-Pk \cos \varphi (k - \operatorname{tg} \varphi)}{(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2}; \quad F'_\varphi = 0 \Rightarrow k = \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \operatorname{arctg} k.$$

φ	$\varphi < \operatorname{arctg} k$	$\varphi = \operatorname{arctg} k$	$\varphi > \operatorname{arctg} k$	$\varphi = \operatorname{arctg} k$ – точка минимума.
k	$k > \operatorname{tg} \varphi$	$k = \operatorname{tg} \varphi$	$k < \operatorname{tg} \varphi$	
F'_φ	–	0 min	+	

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}; \quad \text{тогда}$$

$$F_{\text{нм}} = \frac{kP}{\frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{1 + k^2}}} = \frac{kP}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

44. Скорость течения воды по круглой трубе прямо пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу R , вычисляемому по формуле $R = \frac{S}{p}$, где S – площадь сечения потока воды в трубе, а p – смоченный (подводный) периметр сечения трубы. Степень заполнения трубы водой характеризуется центральным углом, опирающимся на горизонтальную поверхность текущей воды. При какой степени заполнения трубы скорость течения воды будет наибольшей? (Корни получающегося уравнения при решении задачи найти графически.)

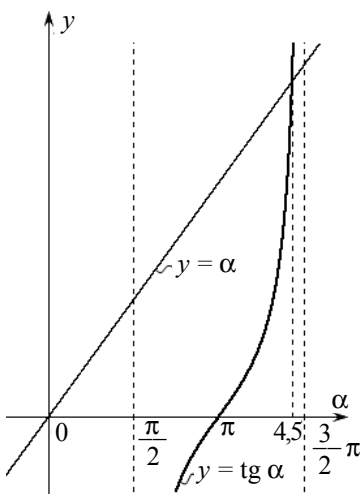
Решение

По условию (см. рисунки) $A\tilde{m}B = p$, площадь

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}r^2\alpha - \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha, \quad p = r\alpha. \quad \text{Тогда скорость течения воды } V = k \frac{S}{p} =$$

$$= k \cdot \frac{1}{2}r \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{dV}{d\alpha} = \frac{rk}{2} \cdot \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^2}; \quad \frac{dV}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \alpha.$$

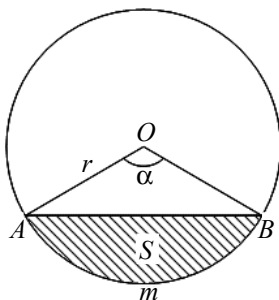
Решая графически последнее уравнение, получим $\alpha = 4,5$ (рад).



α	4	4,5	5
V'_α	+	0 max	-

Значит, при $\alpha = 45$ рад

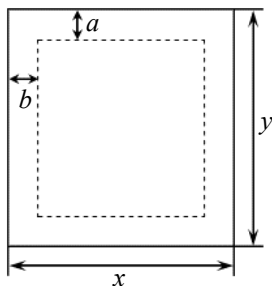
скорость течения воды будет наибольшей.



45. На странице книги печатный текст должен занимать S кв. см. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое – по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Решение

Пусть площадь листа



площадь текста

$$P = x \cdot y, \quad (1)$$

$$S = (x - 2b)(y - 2a). \quad (2)$$

Из (2) получаем $y = \frac{S}{x - 2b} + 2a$ и подстав-
ляем в (1):

$$P = x \left(\frac{S}{x - 2b} + 2a \right) = \frac{Sx + 2ax^2 - 4abx}{x - 2b}.$$

$$P'_x = \frac{dP}{dx} = \frac{(S + 4ax - 4ab)(x - 2b) - (Sx + 2ax^2 - 4abx)}{(x - 2b)^2} =$$

$$= \frac{2ax^2 - 8abx - 2b(S - 4ab)}{(x - 2b)^2} = 2 \frac{ax^2 - 4abx - b(S - 4ab)}{(x - 2b)^2};$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow ax^2 - 4abx - b(S - 4ab) = 0.$$

$$\text{Тогда } x_{1,2} = \frac{4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 + 4Sab - 16a^2b^2}}{2a} = \frac{2ab \pm \sqrt{aSb}}{a};$$

$$x_1 = 2b - \sqrt{\frac{Sb}{a}} \text{ — не подходит по смыслу задачи; } x_2 = 2b + \sqrt{\frac{Sb}{a}}.$$

Проверим найденное значение x_2 по второму достаточному условию экстремума:

$$P''_x = \frac{d^2P}{dx^2} = 2 \frac{(2ax - 4ab)(x - 2b)^2 - 2(x - 2b)(ax^2 - 4abx - b(S - 4ab))}{(x - 2b)^4} =$$

$$= \frac{4Sb}{(x - 2b)^3}.$$

$$\text{При } x = 2b + \sqrt{\frac{Sb}{a}} \quad P''_x = \frac{4Sb}{\left(2b + \sqrt{\frac{Sb}{a}} - 2b\right)^3} = 4a\sqrt{\frac{a}{Sb}} > 0 \Rightarrow$$

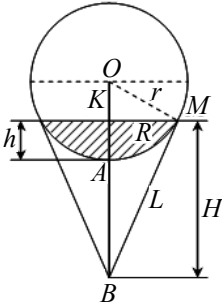
$$\underline{\underline{x = 2b + \sqrt{\frac{Sb}{a}}}} \text{ — точка минимума. Тогда } y = \frac{S}{\sqrt{\frac{Sb}{a}}} + 2a = 2a + \underline{\underline{\sqrt{\frac{Sa}{b}}}}.$$

46. Коническая воронка, радиус основания которой R , а высота H , наполнена водой. В воронку опущен тяжелый шар. Каким должен быть



радиус шара, чтобы объем воды, вытесненной из воронки погруженной частью шара, был наибольшим?

Решение



Радиус $OM = r$, $BM = \sqrt{R^2 + H^2} = L \Rightarrow L > R$,

$KB = H$, $OB - r = H - h \Rightarrow h = H - OB + r$.

$$\triangle OBM \sim \triangle BKM \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{OB}{L} \Rightarrow OB = \frac{r}{R} \cdot L.$$

Тогда $h = H - \frac{rL}{R} + r = H + r \left(1 - \frac{L}{R}\right)$.

Объем шарового сегмента, погруженного

$$\text{в воду, } V = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3}h\right) = \frac{\pi}{3} \left(H + r \left(1 - \frac{L}{R}\right)\right)^2 \left(r \left(2 + \frac{L}{R}\right) - H\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3R^3} (HR + r(R-L))^2 (r(2R+L) - HR) = \frac{\pi}{3R^3} ((R-L)^2(2R+L)r^3 +$$

$$+ 3HR(R-L)(R+L)r^2 + 3H^2R^2Lr - H^3R^3).$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{R^3} ((R-L)^2(2R+L)r^2 + 2HR(R-L)(R+L)r + H^2R^2L).$$

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow (R-L)^2(2R+L)r^2 + 2HR(R-L)(R+L)r + H^2R^2L = 0;$$

$$r_{1,2} = \frac{-HR(R^2 - L^2) \pm \sqrt{H^2R^2(R^2 - L^2)^2 - (R-L)^2(2R+L)^2H^2R^2L}}{(R-L)^2(2R+L)}.$$

Так как $r > 0$, берем знак "+" перед радикалом, тогда

$$r = \frac{-HR(R+L) + HR^2}{(R-L)(2R+L)} = \frac{-HRL}{(R-L)(2R+L)} = \frac{HRL}{(L-R)(2R+L)}.$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{\pi}{R^3} (2(R-L)^2(2R+L)r + 2HR(R^2 - L^2)) < 0$$



при $r = \frac{HRL}{(L-R)(2R+L)}$ и при таком значении r объем воды, вытесненной из воронки, будет наибольшим.

47. Вершина параболы лежит на окружности радиуса R , ось параболы направлена по диаметру. Каков должен быть параметр параболы, чтобы площадь сегмента, ограниченного параболой и ее общей с окружностью хордой, была наибольшей? (Площадь симметрического параболического сегмента равна $\frac{2}{3}$ произведения его основания на "стрелку" (высоту).)

Решение

Уравнение окружности:

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Найдем точки пересечения кривых:

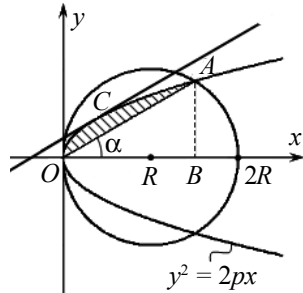
$$\begin{cases} (x-R)^2 + y^2 = R^2, \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2xR + R^2 + 2px = R^2 \Rightarrow x^2 - 2x(R-p) = 0,$$

$$x(x - 2(R-p)) = 0, \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 2(R-p), \\ y_1 = 0, & y_2 = 2\sqrt{p(R-p)}. \end{cases}$$

$$S_{\text{кривол.трап}} = \int_0^{2(R-p)} \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2(R-p)} = \frac{8}{3} \sqrt{p} (R-p)^{\frac{3}{2}};$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot 2(R-p) \cdot 2\sqrt{p(R-p)} = 2\sqrt{p} (R-p)^{\frac{3}{2}};$$

$$S_{\text{сегм}} = \frac{8}{3} \sqrt{p} (R-p)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{p} (R-p)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{p} (R-p)^{\frac{3}{2}} = f(p).$$





$$\frac{dS}{dp} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2\sqrt{p}} (R-p)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \sqrt{p} (R-p)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{3} \frac{(R-p)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p}} (R-4p);$$

$\frac{dS}{dp} = 0 \Rightarrow p = \frac{R}{4}$; $p = R$ – не подходит (будет только одна точка касания параболы и окружности – $O(0; 0)$).

p	$p < \frac{R}{4}$	$p = \frac{R}{4}$	$p > \frac{R}{4}$	$p = \frac{R}{4}$ – точка максимума. Следовательно-
S'_p	+	0 max	–	

но, параметр параболы $p = \frac{R}{4}$ и тогда площадь указанного сегмента будет наибольшей.

Примечание. Другой способ нахождения площади сегмента:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{2}{3} h \cdot OA.$$

$$OA = 2\sqrt{(R-p)^2 + p(R-p)} = 2\sqrt{R(R-p)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{p(R-p)}}{R-p} = \sqrt{\frac{p}{R-p}}.$$

Продифференцируем уравнение $y^2 = 2px$: $2y \cdot y' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}$; $y_C = \sqrt{p(R-p)}$; $x_C = \frac{p(R-p)}{2p} = \frac{R-p}{2}$.

Уравнение OA : $y = x \operatorname{tg} \alpha$; $y = \sqrt{\frac{p}{R-p}}$.

"Стрела" h – расстояние от точки C до прямой OA ,

$$h = \frac{\left| y_C - \sqrt{\frac{p}{R-p}} \cdot x_C \right|}{\sqrt{1 + \frac{p}{R-p}}} = \frac{\left| \sqrt{p(R-p)} - \sqrt{\frac{p}{R-p}} \cdot \frac{R-p}{2} \right|}{\sqrt{\frac{R}{R-p}}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{p(R-p)^2}}{\sqrt{R}} =$$

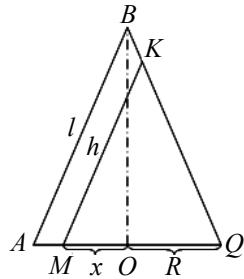
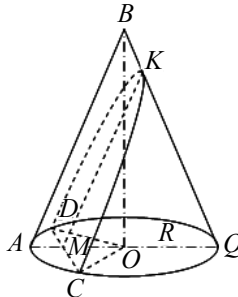
$$= \frac{1}{2} (R-p) \sqrt{\frac{p}{R}}.$$

$$S_{\text{сегм}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{R}} (R-p) \cdot 2\sqrt{R(R-p)} = \frac{2}{3} \sqrt{p} (R-p)^{\frac{3}{2}}.$$

48. Конус, радиус основания которого R , а высота H , пересечен плоскостью, параллельной образующей. Каково должно быть расстояние между линией пересечения этой плоскости с плоскостью основания конуса и центром основания конуса, чтобы площадь сечения была наибольшей?

Решение

$AB = l$; $MK = h$; в сечении получается параболический сегмент. Его площадь $S = \frac{2}{3} CD \cdot KM$.



$$\triangle ABQ \sim \triangle MKQ: \frac{h}{x+R} = \frac{l}{2R} \Rightarrow h = \frac{l(R+x)}{2R}.$$

$$S(x) = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{l(R+x)}{2R} = \frac{2l}{3R} (R+x)\sqrt{R^2 - x^2}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{2l}{3R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{(R+x)x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) = \frac{2l}{3R} \cdot \frac{R^2 - 2x^2 - Rx}{\sqrt{R^2 - x^2}};$$



$$S'_x = 0 \Rightarrow 2x^2 + Rx - R^2 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 8R^2}}{4}; \quad \text{берем } x = \frac{R}{2}.$$

x	$x < \frac{R}{2}$	$x = \frac{R}{2}$	$x > \frac{R}{2}$
S'_x	+	0 max	-

$x = \frac{R}{2}$ — точка максимума.

49. Для какой точки $P(x_0; y_0)$ параболы $y^2 = 2px$ отрезок нормали в точке P , расположенный внутри кривой, имеет наименьшую длину?

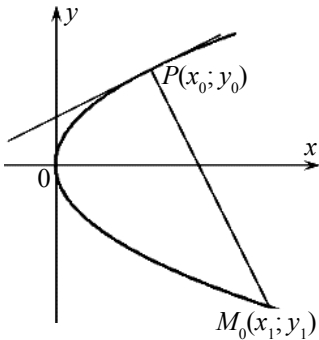
Решение

$$2y \cdot y' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}, \quad y'(x_0) = \frac{p}{y_0}. \quad \text{Уравнение нормали:}$$

$$y - y_0 = \frac{-y_0}{p}(x - x_0) \Rightarrow \begin{cases} y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0), \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

$$py - py_0 = -y_0x + x_0y_0.$$

$$py - py_0 = -\frac{y^2 y_0}{2p} + x_0 y_0 \Rightarrow y_0 y^2 + 2py - 2p^2 y_0 - 2px_0 y_0 = 0,$$



$$y_{1,2} = \frac{-p^2 \pm \sqrt{p^4 + 2p^2 y_0^2 + 2px_0 y_0^2}}{y_0} =$$

$$= \frac{-p^2 \pm (p^2 + y_0^2)}{y_0}.$$

Здесь учли, что

$$y_0^2 = 2px_0; \quad y_1 = y_0, \quad y_2 = \frac{-2p^2}{y_0} - y_0,$$

$$x_1 = \frac{y_0^2}{2p} = x_0,$$



$$x_2 = \frac{1}{2p} \left(\frac{4p^4}{y_0^2} + 4p^2 + y_0^2 \right) = \left(\frac{2p^3}{y_0^2} + 2p + \frac{y_0^2}{2p} \right);$$

$$S = PM = \sqrt{\left(\frac{2p^3}{y_0^2} + 2p + \frac{y_0^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2p} \right)^2 + \left(-\frac{2p^2}{y_0} - 2y_0 \right)^2} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{p^6}{y_0^2} + \frac{2p^4}{y_0^2} + p^2 + \frac{p^4}{y_0^2} + 2p^2 + y_0^2} = 2\sqrt{\frac{p^6}{y_0^4} + \frac{3p^4}{y_0^2} + 3p^2 + y_0^2} = f(y_0).$$

$$\frac{dS}{dy_0} = 2 \frac{-\frac{4p^6}{y_0^5} - \frac{6p^4}{y_0^3} + 2y_0}{2\sqrt{\frac{p^6}{y_0^4} + \frac{3p^4}{y_0^2} + 3p^2 + y_0^2}}; \quad \frac{dS}{dy_0} = 0 \Rightarrow y_0^6 - 3p^4 y_0^2 - 2p^6 = 0,$$

$y_0 = \pm p\sqrt{2}$ (нашли подбором).

y_0	p	$p\sqrt{2}$	$2p$
S'_{y_0}	-	0 min	+

y_0	$-2p$	$-p\sqrt{2}$	$-p$
S'_{y_0}	-	0 min	+

Точки $P(p; \pm p\sqrt{2})$ –

точки минимума. Значит, в этих точках указанный отрезок нормали имеет наименьшую длину.

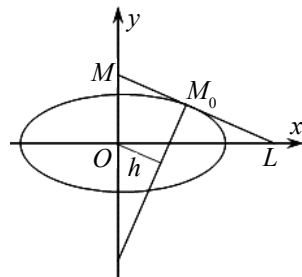
50. Показать, что касательная к эллипсу, отрезок которой между осями координат имеет наименьшую длину, делится в точке касания на две части, соответственно равные полуосям эллипса.

Решение

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2)$$





Уравнение касательной в точке $M_0(x_0; y_0)$: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем производную неявной функции (1): $\frac{x}{a^2} + \frac{y \cdot y'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$;

$$f'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}; \quad y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0) \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \text{ или}$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1 - \text{уравнение касательной. } |\overline{ML}| = \sqrt{\frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2}}, \text{ тогда с уче-}$$

$$\text{том (2) имеем } |\overline{ML}| = \sqrt{\frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^2 a^2}{a^2 - x_0^2}} = f(x_0);$$

$$|\overline{ML}|'_{x_0} = \frac{-\frac{a^4}{x_0^3} + \frac{b^2 a^2 x_0}{(a^2 - x_0^2)^2}}{\sqrt{\frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^2 a^2}{a^2 - x_0^2}}}; \quad |\overline{ML}|'_{x_0} = 0.$$

$$\frac{a^4}{x_0^3} = \frac{b^2 a^2 x_0}{(a^2 - x_0^2)^2} \Rightarrow x_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + ab}}; \quad y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{a^2 + ab}} = \frac{b\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2 + ab}}.$$

$$|\overline{M_0 M}| = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^4}{a^2 + ab} + \frac{a^3 b}{a^2 + ba}} = \underline{\underline{a}};$$

$$|\overline{M_0 L}| = \sqrt{\left(\frac{a^2 y_0^2}{b^2 x_0} \right)^2 + y_0^2} = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 + ab} + \frac{ab^3}{a^2 + ba}} = \underline{\underline{b}}.$$



51. Доказать, что в эллипсе расстояние от центра до любой нормали не превосходит разность полуосей.

Решение

Уравнение нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$ (см. рисунок задачи 50):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$$

или $a^2 x y_0 - b^2 x_0 y + x_0 y_0 (b^2 - a^2) = 0$.

Расстояние от точки $O(0; 0)$ до этой нормали

$$h = \frac{|x_0 y_0 (b^2 - a^2)|}{\sqrt{a^4 y_0^2 + b^4 x_0^2}} = \frac{|b - a| |b + a|}{\sqrt{\frac{a^4}{x_0^2} + \frac{b^4}{y_0^2}}} = \frac{|b - a| |b + a|}{|ML|}.$$

Из предыдущей задачи имеем, что $|\overline{ML}|_{\min} = a + b$; значит, $\frac{b + a}{|ML|} \leq 1$

и тогда $h \leq |b - a|$.

52. В прямоугольной системе координат xOy даны точка $(a; b)$ и кривая $f(x)$. Показать, что расстояние между постоянной точкой $(a; b)$ и переменной $(x; f(x))$ может достигнуть экстремума только в направлении нормали к кривой $y = f(x)$.

Решение

Исходим из определения выпуклости и вогнутости кривой в окрестности точки M_0 . (Кривая лежит ниже (выше) любой своей касательной.)

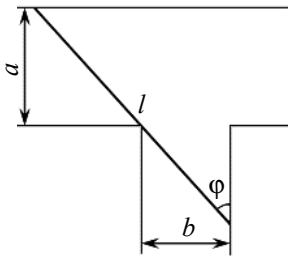




53. К реке шириной a м построен под прямым углом канал шириной b м. Какой наибольшей длины суда могут входить в этот канал?

Решение

Если l – длина судна, то, как видно из рисунка,



$$l = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{b}{\sin \varphi}. \quad (1)$$

$$l'_{\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{b \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{a \sin^3 \varphi - b \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi};$$

$$l'_{\varphi} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^3 \varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right).$$

Можно убедиться, что при таком значении φ $l''_{\varphi} > 0$, т. е. функция l принимает минимальное значение и при этом наибольшая длина l судна

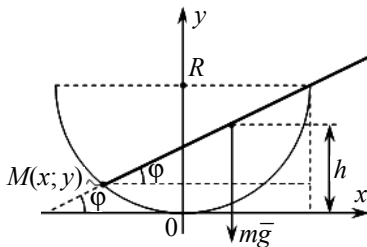
$$\text{будет } l_{\text{ноб}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Примечание. Предоставляем читателю самому проделать необходимые преобразования, подставив в (1) значение $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ и вос-

пользовавшись формулами $\operatorname{arctg} c = \arcsin \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$

54. В чашу, имеющую форму полушара радиуса R , опущен стержень длиной $l > 2R$. Найти положение равновесия стержня.

Решение



Потенциальная энергия стержня относительно точки $O(0; 0)$ (дно чаши) $\Pi = mgh$, где h – высота центра масс стержня относительно точки O . Если

l – длина стержня, то $h = \frac{l}{2} \sin \varphi + y.$

Найдем y . Из рисунка видно, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R-y}{R+x} \Rightarrow y = R - (R+x) \operatorname{tg} \varphi$. Из

уравнения окружности получаем $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$, т. е. $R - (R+x) \operatorname{tg} \varphi = R - \sqrt{R^2 - x^2}$. Из последнего равенства после несложных преобразований имеем $x = R \cos 2\varphi$, тогда $y = R(1 - \sin 2\varphi)$. Итак,

$$\Pi = mg \left(\frac{l}{2} \sin \varphi + R(1 - \sin 2\varphi) \right).$$

Поскольку стержень стремится занять положение с минимальной потенциальной энергией, необходимо найти то значение угла φ , при котором будем иметь $\Pi_{\min}$.

$$\text{Производная } \Pi'_{\varphi} = \frac{l}{2} \cos \varphi - 2R(2 \cos^2 \varphi - 1); \Pi'_{\varphi} = 0 \Rightarrow 8R \cos^2 \varphi -$$

$$-l \cos \varphi - 4R = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 128R^2}}{16R}. \text{ Так как } 0 < \cos \varphi \leq 1, \text{ то рав-}$$

$$\text{новесие возможно, если взять } \cos \varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128R^2}}{16R}.$$

55. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a грн, и переменной*), возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

Решение

Пусть судно прошло S км за t суток. Тогда суммарный расход

$$u = at + ktv^3,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

*) Постоянная часть расходов относится к амортизации и содержанию команды, переменная – к стоимости топлива.



Учитывая, что время $t = \frac{S}{v}$, имеем

$$u = \frac{Sa}{v} + kSv^2.$$

Тогда

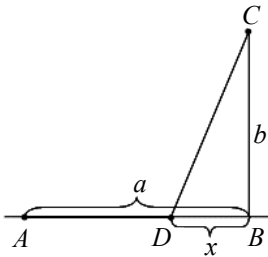
$$\frac{du}{dv} = S \left(-\frac{a}{v^2} + 2kv \right); \quad \frac{du}{dv} = 0 \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}};$$

$$\frac{d^2u}{dv^2} = 2S \left(\frac{a}{v^3} + 2k \right) > 0 \text{ при данном } v.$$

Следовательно, при $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ плавание судна будет наиболее эконо-

мичным. Например, если $a = 2765$ грн, $k = 0,1$, то $v = \sqrt[3]{\frac{2765}{2 \cdot 0,1}} \approx 24$ км/ч ≈ 13 уз**).

56. Из точки A , находящейся на железнодорожной магистрали AB (см. рисунок), груз направляется в точку C , отстоящую от линии железной дороги на расстоянии $CB = b$. Стоимость провоза одной тонны на единицу расстояния: p – по железной дороге и q – при транспортной перевозке. В какой точке D следует провести шоссе CD , чтобы провоз груза из A в C (по линии ADC) был наиболее дешевым?



Решение

Пусть S – стоимость перевозки, $AB = a$,

$DB = x$; тогда согласно условию задачи $S = p(a-x) + q\sqrt{x^2 + b^2}$

($0 \leq x \leq a$). Находим $S'_x = \frac{qx}{\sqrt{x^2 + b^2}} - p = q \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{p}{q} \right)$. Так как

***) Узел равен 1,85 км/ч.

$\frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} < 1$ и если $\frac{p}{q} \geq 1$, то $S'_x < 0$, т. е. производная в нуль не обра-

щается и стоимость расходов S убывает с возрастанием x от 0 до a . Тогда очевидно, что она достигает своего наименьшего значения при $x = a$. В этом случае точки D и A совпадают и шоссе надо прокладывать от A к C , т. е. услугами железнодорожного транспорта не надо пользо-
ваться.

То же самое справедливо и при $\frac{p}{q} < 1$, если одновременно с этим

$\frac{pb}{\sqrt{q^2 - p^2}} \geq a$. Действительно, пусть $\frac{p}{q} < 1$. Если $S'_x = 0$, то $\frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{p}{q}$

и тогда $x = \frac{pb}{\sqrt{q^2 + p^2}}$. При сделанном предположении этот корень ле-

жит вне промежутка $0 \leq x \leq a$ или на его конце, так что внутри про-
межутка $S'_x < 0$.

Лишь в том случае, если $x = \frac{pb}{\sqrt{q^2 + p^2}} < a$, это значение x опреде-

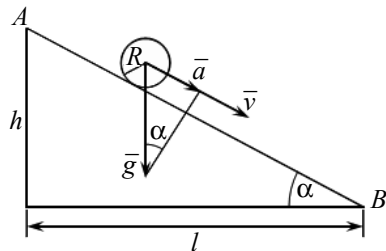
ляет положение точки D между A и B , при котором расходы на топливо
будут наименьшими. Последнее становится ясным, если взять вторую

производную $S''_x = \frac{b^2}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$ при данном x .

57. Каким должен быть угол на-
клона α ($l = \text{const}$), чтобы цилиндр ска-
тился по AB за кратчайшее время?

Решение

Поскольку ускорение свободного
падения $g = \text{const}$, ускорение $a = g \sin \alpha$
постоянно при выбранном α . Движе-
ние цилиндра плоскопараллельное.





Пусть $AB = L$, тогда $L = \frac{at^2}{2}$, скорость $v = at$ и $t = \frac{2L}{v} = \frac{2l}{v \cos \alpha}$. Для плоскопараллельного движения кинетическая энергия движущегося цилиндра $W_k = mgh = mgl \operatorname{tg} \alpha$. С другой стороны, суммируя кинетическую энергию вращательного движения $W_{k_1} = \frac{I\omega^2}{2}$, где I – момент инерции цилиндра, $\omega = \frac{v}{R}$ (R – радиус основания цилиндра) – угловая скорость, и кинетическую энергию поступательного движения $W_{k_2} = \frac{mv^2}{2}$ (m – масса цилиндра), получим $W_k = \frac{v^2}{2} \left(\frac{I}{R^2} + m \right)$.

В результате будем иметь уравнение

$$\left(\frac{I}{R^2} + m \right) v^2 = 2mgl \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgl \operatorname{tg} \alpha}{\frac{I}{R^2} + m}}$$

и время скатывания

$$t = \frac{2l \sqrt{\frac{I}{R^2} + m}}{\sqrt{2mgl \operatorname{tg} \alpha} \cdot \cos \alpha} = \frac{2l \sqrt{\frac{I}{R^2} + m}}{\sqrt{mgl \sin 2\alpha}}.$$

Как видно из последнего выражения, минимальное время скатывания будет при $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

58. Имея N одинаковых электрических элементов, можно различными способами составить батарею по n элементов, а затем полученные группы числом $\frac{N}{n}$ соединить параллельно (считаем, что $\frac{N}{n}$ – целое число). Ток, даваемый такой батареей, определяется формулой



$I = \frac{NnE}{NR + n^2r}$, где E – электродвижущая сила одного элемента, r – его внутреннее, R – внешнее сопротивление. Определить, при каком значении n батарея даст наибольший ток.

Решение

$$\frac{dI}{dn} = NE \frac{NR - n^2r}{(NR + n^2r)^2}; \quad \frac{dI}{dn} = 0 \text{ при } n = \sqrt{\frac{NR}{r}}.$$

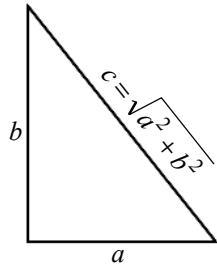
$n < \sqrt{\frac{NR}{r}}, \quad \frac{dI}{dn} < 0$; при $n > \sqrt{\frac{NR}{r}} \quad \frac{dI}{dn} > 0$. Значит, найденное значение n будет наибольшим.

С точки зрения физики это означает, что внутреннее сопротивление $\frac{n^2r}{N}$ должно равняться внешнему сопротивлению R .

59. Найти стороны прямоугольного треугольника, имеющего при заданной площади S наименьший периметр.

Решение

Периметр $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$; площадь прямоугольника $S = \frac{1}{2}ab \Rightarrow b = \frac{2S}{a}$. Тогда $p = a + \frac{2S}{a} + \sqrt{a^2 + \frac{4S^2}{a^2}} = f(a)$.



$\frac{dP}{da} = 1 - \frac{2S}{a^2} + \frac{a^2 - 4S^2}{a^2 \sqrt{a^4 + 4S^2}}$; $\frac{dP}{da} = 0$ при $a = \sqrt{2S}$. Тогда $b = \sqrt{2S}, \quad c = 2\sqrt{S}$.

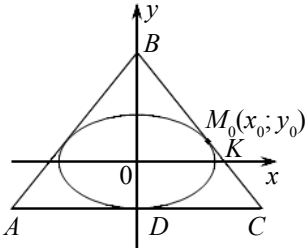
При $a < \sqrt{2S}$, например $a = \sqrt{S}, \quad \frac{dP}{da} < 0$. При $a > \sqrt{2S}$, например

$a = 2\sqrt{S}, \quad \frac{dP}{da} > 0$. Следовательно, при указанных размерах сторон периметр треугольника будет наименьшим.



60. Около данного эллипса описать треугольник с основанием, параллельным большой оси, площадь которого была бы наименьшей.

Решение



Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Нетрудно доказать, что уравнение касательной в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Площадь треугольника $S_{\triangle ABC} = DC \cdot BD$.

При $x = 0$ из (2) имеем $y = OB = \frac{b^2}{y_0}$, тогда $BD = b + \frac{b^2}{y_0} = \frac{b(y_0 + b)}{y_0}$.

При $y = 0$ из (2) имеем $x = OK = \frac{a^2}{x_0}$.

$\triangle BDC \sim \triangle BOK \Rightarrow \frac{DC}{OK} = \frac{BD}{OB}$ и $DC = OK \cdot \frac{BD}{OB} = \frac{a^2}{x_0} \cdot \frac{(y_0 + b)}{b}$. Тогда

$S = \frac{a^2}{x_0} \cdot \frac{(y_0 + b)^2}{y_0}$. Точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит эллипсу, поэтому

$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y_0^2}$ (рассматриваем только правую половину эллипса). Тогда

$$S = \frac{ab(y_0 + b)^2}{\sqrt{b^2 y_0^2 - y_0^4}} = f(y_0).$$

После преобразований получим

$$\frac{dS}{dy_0} = \frac{ab^2(y_0 + b)y_0(2y_0^2 + by_0 - b^2)}{(b^2 y_0^2 - y_0^4)^{3/2}};$$

$$\frac{dS}{dy_0} = 0 \Rightarrow 2y_0^2 + by_0 - b^2 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{b}{2}.$$



Тогда $x_0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $S = 3\sqrt{3}ab$. При $y_0 < \frac{b}{2}$ $\frac{dS}{dy_0} < 0$, при

$y_0 > \frac{b}{2}$ $\frac{dS}{dy_0} > 0$. Следовательно, при данном $y_0 = \frac{b}{2}$ площадь треугольника, описанного вокруг эллипса, будет наименьшей.

61. На эллипсе $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти точки, наименее и наиболее удаленные от прямой $3x + y - 9 = 0$.

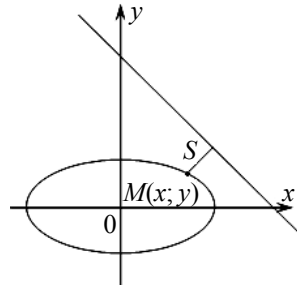
Решение

Обозначим через S расстояние от точки $M(x; y)$ до прямой. Тогда

$S = \frac{|3x + y - 9|}{\sqrt{10}}$. Так как из уравнения эллипса

следует, что $x = \frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$ (рассматриваем вначале $x > 0$), то

$$S = \frac{2\sqrt{9 - y^2} + y - 9}{\sqrt{10}} = f(y).$$



$$\frac{dS}{dy} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(-\frac{2y}{\sqrt{9 - y^2}} + 1 \right); \quad \frac{dS}{dy} = 0 \Rightarrow 2y = \sqrt{9 - y^2}$$

и $y = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$. Легко убедиться, что $y = \frac{3}{\sqrt{5}}$ — точка минимума, $y = -\frac{3}{\sqrt{5}}$ — точка максимума. Тогда

$$x = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ и } \underline{\underline{S_{\min}}} = S \Big|_{\substack{x=4/\sqrt{5} \\ y=3/\sqrt{5}}} = \underline{\underline{\frac{\left| \frac{15}{\sqrt{5}} - 9 \right|}{\sqrt{10}}}}; \quad \underline{\underline{S_{\max}}} = S \Big|_{\substack{x=-4/\sqrt{5} \\ y=-3/\sqrt{5}}} = \underline{\underline{\frac{\left| -\frac{15}{\sqrt{5}} - 9 \right|}{\sqrt{10}}}}.$$

II. ФУНКЦИИ МНОГИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном разделе будем рассматривать только функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Для определения экстремума функции $z = f(x, y)$ следует:

1) Определить стационарные точки, в которых функция достигает экстремума, для чего надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

2) Определить вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3) Вычислить значение вторых частных производных в каждой стационарной точке, а полученные числа обозначить соответственно через A , B и C .

4) Составить выражение $\Delta = AC - B^2$. При этом

а) если $\Delta > 0$, в стационарной точке будет минимум при $A > 0$ и максимум при $A < 0$;

б) если $\Delta < 0$, то экстремума в рассматриваемой стационарной точке нет;

в) если $\Delta = 0$, то имеет место сомнительный случай и для заключения об экстремуме надо привлечь к рассмотрению частные производные выше второго порядка.

При нахождении наибольших и наименьших значений функций двух независимых переменных в замкнутой области следует помнить, что если данная функция ограниченная и дифференцируемая в этой области, то она достигает в ней своего наибольшего и наименьшего значений или во внутренних точках этой области, которые являются точками стационарности функции, или на ее границе.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных следующий:

1) Найти стационарные точки функции, для чего следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

2) Вычислить в стационарных точках значения функции.

3) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на каждой линии, ограничивающей область.

4) Сравнить все полученные значения, выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Рассмотрим следующие задачи.

Уровень А

62. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами $A(1; -3)$; $B(1; 2)$; $C(4; 2)$; $D(4; -3)$.

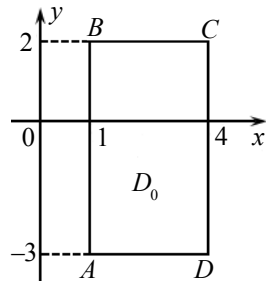
Решение

1) Находим стационарные точки функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 4.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 6 = 0, \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3, \quad y = -2.$$



2) В стационарной точке $(3; -2) \in D_0$ $z(3; -2) = 9 + 4 - 18 - 8 + 2 = -11$.

3) Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезков AB , BC , CD и AD .

а) на AB : $x = 1$ ($-3 \leq y \leq 2$), $z = 1 + y^2 - 6 + 4y + 2 = y^2 + 4y - 3$. На указанном отрезке функция непрерывна и достигает на нем своего наи-



большого и наименьшего значений. Это может произойти или в точках стационарности функции, где $\frac{dz}{dy} = 0$, или на концах отрезка.

$$\frac{dz}{dy} = 2y + 4; \quad 2y + 4 = 0; \quad y = -2; \quad z(1; -2) = 1 + 4 - 6 - 8 + 2 = \underline{-7};$$

$$z(A) = \underline{z(1; -3)} = 1 + 9 - 6 - 12 + 2 = \underline{-6}; \quad z(B) = \underline{z(1; 2)} = 1 + 4 - 6 + 8 + 2 = \underline{9};$$

$$\text{б) на } BC: y = 2 \quad (1 \leq x \leq 4), \quad z = x^2 + 4 - 6x + 8 + 2 = x^2 - 6x + 14.$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 6; \quad 2x - 6 = 0; \quad x = 3; \quad \underline{z(3; 2)} = 9 + 4 - 18 + 8 + 2 = \underline{5};$$

$$z(C) = \underline{z(4; 2)} = 16 + 4 - 24 + 8 + 2 = \underline{6};$$

$$\text{в) на } CD: x = 4 \quad (-3 \leq y \leq 2), \quad z = 16 + y^2 - 24 + 4y + 2 = y^2 + 4y - 6.$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y + 4; \quad 2y + 4 = 0; \quad y = -2; \quad \underline{z(4; -2)} = 16 + 4 - 24 - 8 + 2 = \underline{-10}.$$

$$z(D) = \underline{z(4; -3)} = 16 + 9 - 24 - 12 + 2 = \underline{-9};$$

$$\text{г) на } DA: y = -3 \quad (1 \leq x \leq 4), \quad z = x^2 + 9 - 6x - 12 + 2 = x^2 - 6x - 1.$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 6; \quad 2x - 6 = 0; \quad x = 3; \quad \underline{z(3; -3)} = 9 + 9 - 18 - 12 + 2 = \underline{-10}.$$

Среди всех найденных значений (подчеркнутые) имеем

$$\underline{\underline{z_{\text{нб}} = z(1; 2) = 9;}} \quad \underline{\underline{z_{\text{нм}} = z(3; -2) = -11.}}$$

63. Найти наибольшее значение функции $z = x^2y(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

Решение

1) Находим стационарные точки функции:

$$\frac{dz}{dx} = 8xy - 3x^2y - 2xy^2;$$

$$\frac{dz}{dy} = 4x^2 - x^3 - 2yx^2.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} xy(8-3x-2y)=0, \\ x^2(4-x-2y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0, & y=0; \\ x=2, & y=1. \end{matrix}$$

Обе точки принадлежат области D .

2) $\underline{z(0; 0)=0}$; $\underline{z(2; 1)=4}$.

3) Исследуем функцию на границах области, которая состоит из отрезков OA , AB , BO :

а) на OA : $x=0$, $z=0$, $\underline{z(A)=z(0; 6)=0}$;

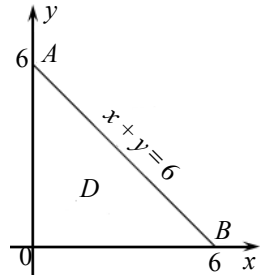
б) на AB : $y=6-x$, $z=x^2(6-x)(4-x-6+x)=2x^3-12x^2$;

$$\frac{dz}{dx}=6x^2-24x, \quad 6x(x-4)=0 \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=4, \quad y_1=6; \quad y_2=2.$$

$\underline{z(0; 6)=0}$; $\underline{z(4; 2)=-64}$.

в) на BO : $y=0$, $z=0$.

Сравнивая все подчеркнутые значения, находим, что $\underline{\underline{z_{\text{нб}}=z(2; 1)=4}}$.



64. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

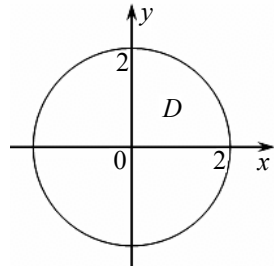
$$z = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + 3y^2) \quad \text{в круге } x^2 + y^2 \leq 4.$$

Решение

1. Находим стационарные точки функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + 3y^2 - 2)(-2x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + 3y^2 + 3)(-2y).$$



Поскольку $e^{-x^2-y^2} \neq 0$, решаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x(2x^2 + 3y^2 - 2) = 0, \\ y(2x^2 + 3y^2 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0, & \begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} & \begin{cases} x=\pm 1, \\ y=0 \end{cases} \end{matrix}$$

$\underline{z(0; 0)=0}$; $\underline{z(0; \pm 1)=\frac{3}{e}}$; $\underline{z(\pm 1; 0)=\frac{2}{e}}$.



2. Исследуем функцию на границе области:

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}. \text{ Тогда; } z = e^{-4}(12 - x^2); \frac{\partial z}{\partial x} = -2e^{-4}x;$$

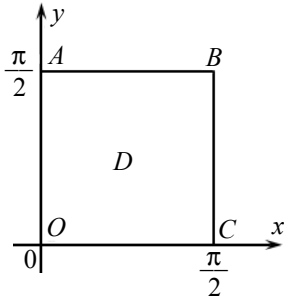
$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = \pm 2; \quad \underline{z(0; \pm 2) = \frac{12}{e^4}}.$$

Сравнивая все подчеркнутые значения, находим, что

$$\underline{\underline{z_{\text{HM}} = z(0; 0) = 0;}} \quad \underline{\underline{z_{\text{HБ}} = z(0; \pm 1) = \frac{3}{e}}}.$$

Уровень Б

65. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.



Решение

1. Находим стационарные точки функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos x(x + y) = 2 \cos \frac{2x + y}{2} \cdot \cos \frac{y}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \cos x(x + y) = 2 \cos \frac{x + 2y}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}.$$

$$\begin{cases} \cos \frac{2x + y}{2} \cdot \cos \frac{y}{2} = 0, \\ \cos \frac{x + 2y}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{2x + y}{2} = 0, \\ \cos \frac{x + 2y}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = \pi + 2\pi n, \\ x + 2y = \pi + 2\pi n, \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{3}; \quad y = \frac{\pi}{3}, \quad \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) \in D \text{ и } \underline{\underline{z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}}}.$$

2. Исследуем функцию на границе области:

а) на OA : $x = 0$, $z = 2 \sin y$; $\frac{dz}{dy} = 2 \cos y$, $\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$;

$z(O) = z(0; 0) = 0$; $z(A) = z\left(0; \frac{\pi}{2}\right) = 2$.

б) на AB : $y = \frac{\pi}{2}$, $z = \sin x + 1 + \cos x$; $\frac{dz}{dx} = \cos x - \sin x$; $\cos x - \sin x =$

$= 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 0$; $z(A) = z\left(0; \frac{\pi}{2}\right) = 2$; $z(B) = z\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = 2$.

в) на BC : $x = \frac{\pi}{2}$, $z = 1 + \sin y + \cos y$; $\frac{dz}{dy} = \cos y - \sin y$; $\cos y - \sin y =$

$= 0 \Rightarrow \operatorname{tg} y = 0 \Rightarrow y = 0$; $z(C) = z\left(\frac{\pi}{2}; 0\right) = 2$.

г) на CO : $y = 0$, $z = 2 \sin x$; $\frac{dz}{dx} = 2 \cos x$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$;

$z\left(\frac{\pi}{2}; 0\right) = z(C) = 2$.

Сравнивая все подчеркнутые значения, находим, что

$z_{\text{нб}} = z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $z_{\text{нм}} = z(0; 0) = 0$.

66. Разложить положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

*Решение*

1. $a = x + y + z$ ($x > 0, y > 0, z > 0$). Рассмотрим функцию $u = xyz = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2 = f(x, y)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y(a - 2x - y), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x(a - 2y - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2x - y = 0, \\ a - 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{a}{3}; \text{ тогда } z = \frac{a}{3}.$$

Точка $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$ – единственная точка экстремума.

2. Найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y$; $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{y=a/3} = -\frac{2}{3}a$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{x=y=a/3} = -\frac{a}{3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{x=a/3} = -\frac{2}{3}a.$$

$$\Delta = AC - B^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{a^2}{9} = \frac{1}{3}a^2 > 0, \quad A = -\frac{2}{3}a < 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right) - \text{точка}$$

максимума функции u . Так как она единственная, то в ней будет наи-

большее значение функции: $\underline{\underline{u_{\text{нб}} = \frac{a^3}{27}}}$.

Примечание. Полученный результат имеет простое геометрическое истолкование: из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых сумма трех измерений есть величина постоянная, наибольший объем

имеет куб с ребром, равным $\frac{a}{3}$.

67. На плоскости Oxy найти точку, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых: $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ – была бы наименьшей.

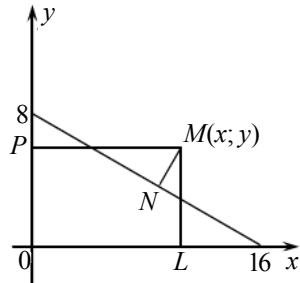
Решение

Пусть $PM^2 + ML^2 + MN^2 = S$, тогда $S = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{5}$.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x + 2y - 16); \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x + 2y - 16).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 4y = 32, \\ 4x + 18y = 64 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{8}{5}; \quad y = \frac{16}{5}.$$

$\left(\frac{8}{5}; \frac{16}{5}\right)$ – единственная точка. Найдем



$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{12}{5}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = \frac{4}{5}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{18}{5}. \quad \text{Значит, } A = \frac{12}{5}; \quad B = \frac{4}{5}; \quad C = \frac{18}{5}.$$

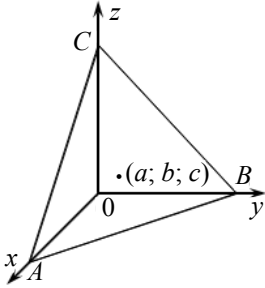
$\Delta = AC - B^2 = 8 > 0$, $A > 0$; следовательно, точка $\left(\frac{8}{5}; \frac{16}{5}\right)$ является точ-

кой, для которой сумма квадратов расстояний от трех указанных прямых наименьшая.

68. Через точку $(a; b; c)$ провести плоскость так, чтобы объем тетраэдра, отсекаемого ею от координатного трехгранника, был наименьшим.

Решение

Уравнение искомой плоскости: $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$, где A , B и C суть отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях. Поскольку точка



$(a; b; c)$ принадлежит плоскости, справедливо

$$\text{равенство } \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 1 \Rightarrow C = \frac{c}{1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}}.$$

$$\text{Объем тетраэдра } V = \frac{1}{6} ABC = \frac{1}{6} AB \frac{c}{1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}} =$$

$= f(A; B)$. Находим:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{Bc}{6} \frac{1 - \frac{2a}{A} - \frac{b}{B}}{\left(1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right)^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial B} = \frac{Ac}{6} \frac{1 - \frac{a}{A} - \frac{2b}{B}}{\left(1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right)^2}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial A} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{2a}{A} - \frac{b}{B} = 0, \\ 1 - \frac{a}{A} - \frac{2b}{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 3a, B = 3b; \text{ тогда } C = \frac{c}{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 3c.$$

Таким образом, уравнение плоскости: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$. Покажем, что

$$\text{в таком случае объем тетраэдра наименьший: } \frac{\partial^2 V}{\partial A^2} = \frac{Ba^2c}{3A^3 \left(1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right)^3};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial A \partial B} = \frac{c \left(1 - \frac{3a}{A} - \frac{3b}{B} + \frac{2a^2}{A} + \frac{2b^2}{B} + \frac{6ab}{AB}\right)}{6 \left(1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right)^3}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial B^2} = \frac{Ab^2c}{3B^3 \left(1 - \frac{a}{A} - \frac{b}{B}\right)^3}.$$

$$A_1 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} \right)_{\substack{A=3a \\ B=3b}} = \frac{bc}{a}; \quad B_1 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial A \partial B} \right)_{\substack{A=3a \\ B=3b}} = \frac{c}{2}; \quad C_1 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} \right)_{\substack{A=3a \\ B=3b}} = \frac{ac}{b}.$$



$A_1 C_1 - B_1^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4} c^2 > 0 \Rightarrow$ при полученном уравнении плоскости объем тетраэдра будет наименьшим.

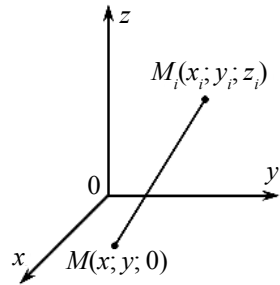
69. Даны n точек: $A_1(x_1; y_1; z_1), \dots, A_n(x_n; y_n; z_n)$. На плоскости Oxy найти точку, сумма квадратов расстояний которой от всех данных точек была бы наименьшей.

Решение

Пусть S – сумма квадратов расстояний от $M(x; y; 0)$ до всех данных точек $M_i(x_i; y_i; z_i)$ ($i = \overline{1, n}$); тогда

$$S = \sum_{i=1}^n ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2).$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \sum_{i=1}^n (x - x_i); \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2 \sum_{i=1}^n (y - y_i).$$



$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x - x_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y - y_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}.$$

Стационарная точка – единственная. Находим:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 2n; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 2n \Rightarrow A = C = 2n; B = 0.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 4n^2 > 0, A = 2n > 0. \text{ Следовательно, точка } \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)$$



есть точка минимума и сумма квадратов расстояний от нее до всех данных точек будет наименьшей.

70. Даны три точки: $A(0; 0; 12)$; $B(0; 0; 4)$ и $C(8; 0; 8)$. На плоскости Oxy найти такую точку D , чтобы сфера, проходящая через A , B , C и D , имела наименьший радиус.

Решение

$\triangle ABC$ – равнобедренный: $AC = CB = \sqrt{CK^2 + AK^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.

Радиус окружности, которая получается в сечении сферы с плоскостью $y = 0$,

$$r = PA = PB = PC = \frac{AC \cdot BC \cdot AB}{4S_{\Delta}} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 8}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8} = 5.$$

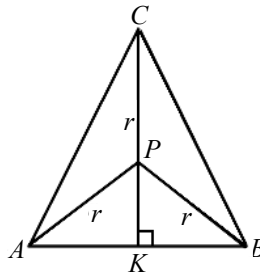
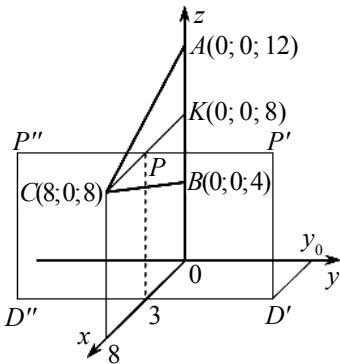
Тогда имеем $P(3; 0; 8)$ и $P'(3; y_0; 8)$.

$$P'A = P'B = P'C = P'D' = \sqrt{y_0^2 + 5^2} = \sqrt{y_0^2 + 25}.$$

P' – центр сферы, на которой расположены точки A, B, C, D .

Очевидно, что $R_{\min} = P'D' = 8$; с другой стороны, $8 = \sqrt{y_0^2 + 25} \Rightarrow y_0^2 = 39$, $y_0 = \pm\sqrt{39}$.

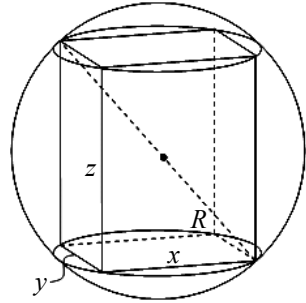
Имеем две точки $D'(3; \sqrt{39}; 0)$ и $D''(3; -\sqrt{39}; 0)$, такие, что сфера, проходящая через A, B, C и D , имеет наименьший радиус.



71. В данный шар диаметра $2R$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Решение

Пусть x, y и z — длины ребер параллелепипеда, тогда $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 \Rightarrow z = \sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$.



Объем $V = xyz = xy\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y \frac{4R^2 - 2x^2 - y^2}{\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = x \frac{4R^2 - x^2 - 2y^2}{\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4R^2 - 2x^2 - y^2 = 0, \\ 4R^2 - x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}R. \text{ Тогда и } z = \frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Очевидно, что при данных размерах объем будет наименьшим и такой фигурой будет куб.

72. Доказать, что из всех треугольников, периметр которых $2p$, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Решение

Пусть x, y и z — стороны треугольника. По формуле Герона его площадь $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$. Учитывая, что $z = 2p - x - y$, имеем

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{p(p-y)(2p-2x-y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}};$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{p(p-x)(2p-x-2y)}{2\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(p-y)(2p-2x-y) = 0, \\ p(p-x)(2p-x-2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-x=0, \\ p-y=0 \end{cases}, \begin{cases} 2p-2x-y=0, \\ 2p-x-2y=0 \end{cases}, \begin{cases} 2p-2x-y=0, \\ p-x=0 \end{cases}, \begin{cases} 2p-x-2y=0, \\ p-y=0 \end{cases}.$$

Находим стационарные точки: $(p; p); \left(\frac{2}{3}p; \frac{2}{3}p\right); (p; 0); (0; p)$. По смыслу задачи исследованию подлежит только точка $\left(\frac{2}{3}p; \frac{2}{3}p\right)$.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -2p(p-y); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = p(2x+2y-3p); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -2p(p-x).$$

$$A = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right)_{x=y=\frac{2}{3}p} = -\frac{2}{3}p^2; \quad B = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right)_{x=y=\frac{2}{3}p} = -\frac{1}{3}p^2;$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right)_{x=y=\frac{2}{3}p} = -\frac{2}{3}p^2. \quad \Delta = AC - B^2 = \frac{1}{3}p^4 > 0, \quad A < 0 \Rightarrow \text{в точке}$$

$\left(\frac{2}{3}p; \frac{2}{3}p\right)$ функция достигает максимума. Но так как это единствен-

ная стационарная точка, то при $x = y = \frac{2}{3}p$ и $z = 2p - x - y = \frac{2}{3}p$ (равносторонний треугольник) площадь треугольника будет наибольшей.

73. На плоскости $3x - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $A(1; 1; 1)$ и $B(2; 3; 4)$ была бы наименьшей.

Решение

Пусть такой точкой будет $M(x; y; z)$. Тогда $S = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2$. Учитывая, что $z = \frac{3}{2}x$, получим

$$S = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(\frac{3}{2}x-1\right)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 + \left(\frac{3}{2}x-4\right)^2.$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 13x - 21; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 4y - 8; \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x - 21 = 0, \\ 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{21}{13}; \quad y = 2;$$

тогда $z = \frac{63}{26}$.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 13 = A; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0 = B; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 4 = C.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 52 > 0, \quad A = 13 > 0.$$

Поскольку имеем только одну точку минимума, в ней величина $S(x; y)$ будет наименьшей.

74. На плоскости $x + y - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от плоскостей $x + 3z = 6$ и $y + 3z = 2$ была бы наименьшей.

Решение

Пусть такой точкой будет $M(x; y; z)$. Напомним, что расстояние d от точки $P(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + D = 0$ определяется

формулой $d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + D|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Тогда

$$S = \frac{(x + 3z - 6)^2}{10} + \frac{(y + 3z - 2)^2}{10}.$$

Учитывая, что $x = 2z - y$, имеем

$$S = \frac{(5z - y - 6)^2}{10} + \frac{(y + 3z - 2)^2}{10}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{5}((5z - y - 6)(-1) + y + 3z - 2) = \frac{1}{5}(-2z + 2y + 4);$$

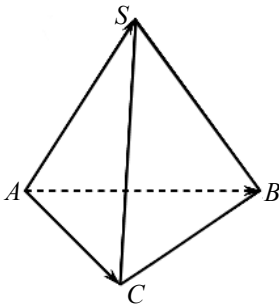
$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{5}(5(5z - y - 6) + 3(y + 3z - 2)) = \frac{1}{5}(34z - 2y - 36).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z + 2y = -4, \\ 34z - 2y = 36 \end{cases} \Rightarrow z = 1; y = -1; x = 3.$$

Имеем единственную стационарную точку $(3; -1; 1)$.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{2}{5} = A; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} = -\frac{2}{5} = B; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{34}{5} = C.$$

$AC - B^2 = \frac{64}{25} > 0$, $A > 0 \Rightarrow$ искомая сумма квадратов расстояний от плоскости будет наименьшей.



75. Даны точки $A(4; 0; 4)$, $B(4; 4; 4)$, $C(4; 4; 0)$. На поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти такую точку S , чтобы объем пирамиды $SABC$ был: а) наибольшим; б) наименьшим.

Решение

Пусть точка $S(x; y; z)$ принадлежит указанной сфере. Тогда имеем векторы $\overrightarrow{AS} = (x - 4; y; z - 4)$, $\overrightarrow{AB} = (0; 4; 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (0; 4; -4)$.

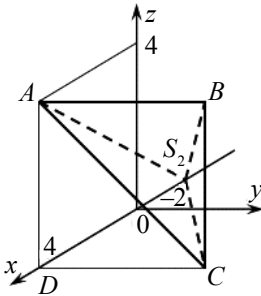
Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AS} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x-4 & y & z-4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} |-16x + 64| = \frac{1}{6} |-16\sqrt{4-y^2-z^2} + 64| = \frac{8}{3} \left(-\sqrt{4-y^2-z^2} + 4 \right).$$

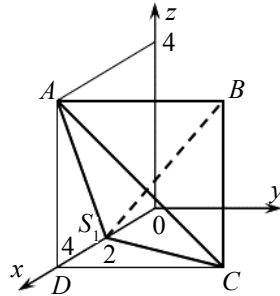
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{16}{3} \cdot \frac{y}{\sqrt{4-y^2-z^2}}; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{16}{3} \cdot \frac{z}{\sqrt{4-y^2-z^2}};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = z = 0; \text{ тогда } x = \pm 2 \Rightarrow S_1(2; 0; 0) \text{ или } S_2(-2; 0; 0).$$



$$V_{\text{нб}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot S_2 D =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = \frac{48}{3} = 16 \text{ (куб. ед.)}.$$



$$V_{\text{нм}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot S_1 D =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{16}{3} \text{ (куб. ед.)}.$$

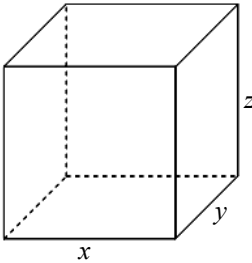


76. Найти прямоугольный параллелепипед данного объема V , имеющий наименьшую площадь поверхности.

Решение

Поверхность $S = 2(xy + xz + yz)$.

Объем $V = xyz \Rightarrow z = \frac{V}{xy}$, тогда $S = 2\left(xy + \frac{V}{xy}(x + y)\right) = S(x; y)$.



$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2\left(y - \frac{V}{x^2}\right); \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2\left(x - \frac{V}{y^2}\right);$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{V}{x^2} = 0, \\ x - \frac{V}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \sqrt[3]{V};$$

$z = \frac{V}{\sqrt[3]{V}^2} = \sqrt[3]{V}$, т. е. данная фигура является кубом.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 2; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}. \quad A = \frac{4V}{V} = 4; \quad B = 2; \quad C = 4.$$

$\Delta = AC - B^2 = 16 - 4 = 12 > 0$, $A > 0$. Так как стационарная точка единственная, то из всех прямоугольных параллелепипедов с данным объемом V у куба площадь поверхности будет наименьшей.

77. Найти прямоугольный параллелепипед данной площади поверхности S , имеющий наименьший объем.

Решение

$$V = xyz; \quad S = 2(xy + xz + yz) \Rightarrow z = \frac{S - 2xy}{2(x + y)}. \quad \text{Тогда } V = \frac{Sxy - 2x^2y^2}{2(x + y)};$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(Sy - 4xy^2)(x + y) - Sxy + 2x^2y^2}{(x + y)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Sy^2 - 2x^2y^2 - 4xy^3}{(x + y)^2};$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Sx^2 - 2x^2y^2 - 4x^3y}{(x + y)^2} \cdot \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2(S - 2x^2 - 4xy) = 0, \\ x^2(S - 2y^2 - 4xy) = 0; \end{cases}$$

$x \neq 0, y \neq 0$; следовательно,

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy = S, \\ 2y^2 + 4xy = S \end{cases} \Rightarrow x = y = \sqrt{\frac{S}{6}} \Rightarrow z = \frac{S - \frac{2}{3}S}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \sqrt{\frac{S}{6}},$$

т. е. $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$ и фигура является кубом.

Аналогично предыдущему доказывается, что объем при этом будет наибольшим.

78. Найти объем наибольшего прямоугольного параллелепипеда, который можно вписать в эллипсоид с полуосями a, b и c .

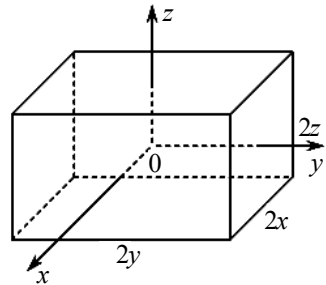
Решение

Объем $V = 8xyz$ ($x > 0; y > 0; z > 0$). Вершины параллелепипеда находятся на эллип-

соиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

и объем параллелепипеда

$$V = 8xyc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \text{ Находим:}$$



$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8yc \frac{1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 8xc \frac{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \\ x^2b^2 + 2a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Тогда $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$ и $V_{\text{нб}} = \underline{\underline{\frac{8abc}{3\sqrt{3}}}}$.

79. Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме $12a$ всех его ребер.

Решение

Используя обозначения задачи № 78, имеем $12a = 4x + 4y + 4z$.
Объем $V = xyz = xy(3a - x - y)$.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y(3a - 2x - y); \quad \frac{\partial V}{\partial y} = x(3a - 2y - x).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2x - y = 0, \\ 3a - 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = a;$$

тогда $z = a$, т. е. данная фигура есть куб.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 3a - 2x - 2y; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2x.$$

$A = -2a$; $B = -a$; $C = -2a$. $AC - B^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 > 0$, $A < 0$. Значит, при данной сумме ребер в $12a$ наибольший объем параллелепипеда будет, если данная фигура – куб.



80. Сечение канала имеет форму равнобочной трапеции данной площади. Как выбрать его размеры, чтобы омываемая поверхность канала была наименьшей?

Решение

Пусть L – "мокрый" периметр канала, тогда $L = DC + 2BC = b + 2l$;

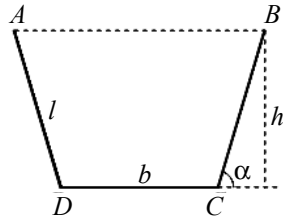
площадь трапеции $ABCD$ $S = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{2b + 2l \cos \alpha}{2} l \sin \alpha =$

$$= (b + l \cos \alpha) l \sin \alpha \Rightarrow b = \frac{S}{l \sin \alpha} - l \cos \alpha;$$

$$L = 2l + \frac{S}{l \sin \alpha} - l \cos \alpha = f(l; \alpha). \text{ Находим:}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 2 - \frac{S}{l^2 \sin \alpha} - \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\frac{S \cos \alpha}{l \sin^2 \alpha} + l \sin \alpha.$$



$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial l} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2l^2 \sin^2 \alpha - S - l^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0, \\ l^2 \sin^3 \alpha - S \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} l^2 \sin \alpha (2 - \cos \alpha) = S, \\ l^2 \sin \alpha = \frac{S \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha (2 - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда

$$l = \sqrt{\frac{S \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}} = \sqrt{\frac{8S}{2\sqrt{3}^3}} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}^3}; \quad b = \frac{2S\sqrt[4]{3}^3}{2\sqrt{S} \cdot \sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}^3}.$$

Определим значения производных второго порядка при найденных значениях α и l :



$$\frac{\partial^2 L}{\partial l^2} = \frac{2S}{l^3 \sin^2 \alpha}; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial l \partial \alpha} = \frac{S \cos \alpha}{l^2 \sin^2 \alpha} + \sin \alpha; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = \frac{S}{l} \cdot \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha};$$

$$A = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial l^2} \right)_{\alpha=\pi/3} = \frac{4S}{\sqrt{3}l^3} = \frac{12^4 \sqrt{3}^3}{\sqrt{S}}; \quad B = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial l \partial \alpha} \right)_{\alpha=\pi/3} = \sqrt{3};$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=\pi/3} = \frac{5\sqrt{S} \sqrt[4]{S}}{3}; \quad AC - B^2 = 57 > 0, \quad A > 0.$$

Значит, при найденных значениях оmyаемая поверхность канала будет наименьшей: $\underline{\underline{L_{\text{HM}} = 2\sqrt{S} \sqrt[4]{3}}}$.

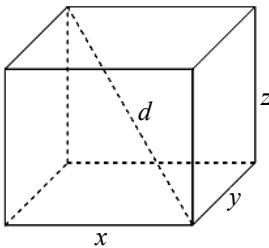
81. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ, найти тот, объем которого наибольший.

Решение

Размеры указаны на рисунке. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = xyz$, при этом $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Тогда $V = xy\sqrt{d^2 - x^2 - y^2}$. Находим:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y(d^2 - 2x^2 - y^2)}{\sqrt{d^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x(d^2 - x^2 - 2y^2)}{\sqrt{d^2 - x^2 - y^2}}.$$



$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2 - 2x^2 - y^2 = 0, \\ d^2 - x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{d}{\sqrt{3}},$$

$$z = \sqrt{d^2 - \frac{2}{3}d^2} = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Данная фигура – куб. Покажем, что объем при этом наибольший.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -xy \frac{3d^2 - 2x^2 - 3y^2}{(d^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 - 2x^2 - 2y^2}{\sqrt{d^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -xy \frac{3d^2 - 3x^2 - 2y^2}{(d^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad x = y = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

$$A = -12\sqrt{3}d; \quad B = -\frac{d}{\sqrt{3}}; \quad C = -12\sqrt{3}d.$$

$$AC - B^2 = 432d^2 - \frac{d^2}{3} > 0, \quad A < 0; \quad \text{следовательно, из всех прямо-}$$

угольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ, наибольший объем имеет куб.

82. Указать наружные размеры открытого (без крышки) ящика формы прямоугольного параллелепипеда с заданной толщиной стенок α и объемом V , чтобы на него пошло наименьшее количество материала.

Решение

x, y и z – наружные размеры ящика (см. рисунок задачи 81). Объем $V = xyz$. Количество материала, которое пошло на его изготовление, $S = xy + 2(x - 2\alpha)(z - \alpha) + 2y(z - \alpha)$.

Если $y = \frac{V}{xz}$, то

$$S = \frac{V}{z} + 2(x - 2\alpha)(z - \alpha) + \frac{2V}{xz}(z - \alpha) = f(x; z). \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 2(z - \alpha) \left(1 - \frac{V}{x^2 z} \right);$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{V}{z^2} \left(\frac{2\alpha}{x} - 1 \right) + 2(x - 2\alpha). \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z - \alpha) \left(1 - \frac{V}{x^2 z} \right) = 0, \\ \frac{V}{z^2} \left(\frac{2\alpha}{x} - 1 \right) + 2(x - 2\alpha) = 0. \end{cases}$$



Если $z = \frac{V}{x^2}$, то $x = \sqrt[3]{2V}$; тогда $z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} = \frac{x}{2}$; $y = \frac{V}{xz} = \frac{2V}{x^2} = \sqrt[3]{2V}$,

т. е. $x = y$.

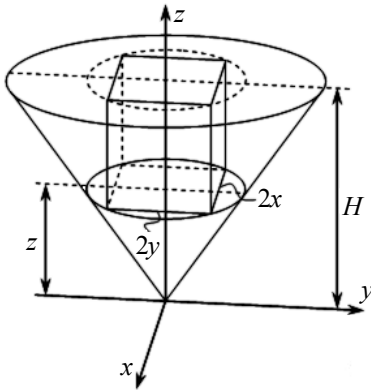
$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 4(z - \alpha) \frac{V}{x^3 z}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} = 2 \left(1 - \frac{V\alpha}{x^2 z^2} \right); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -\frac{2V}{z^3} \left(\frac{2\alpha}{x} - 1 \right).$$

$$A = 2 \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{2V}} \right); \quad B = 2 \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{2V}} \right); \quad C = 8 \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{2V}} \right).$$

$$AC - B^2 = 16 \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{2V}} \right)^2 - 4 \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{2V}} \right)^2 = 12 \left(1 - \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{2V}} \right)^2 > 0.$$

По смыслу задачи $1 - \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{2V}} > 0$, тогда $A > 0$ и при указанных размерах x , y и z на изготовление коробки пойдет наименьшее количество материала. Окончательно получаем, что каждая из сторон основания равна $\underline{\underline{2\alpha + \sqrt[3]{2V}}}$, высота равна $\underline{\underline{\alpha + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}}}$.

83. В прямой эллиптический конус, полуоси основания которого a и b , высота H , вписана призма с прямоугольным основанием так, что стороны основания параллельны осям, а пересечение диагоналей основания лежит в центре эллипса. Каковы должны быть стороны основания и высота этой призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Каков этот наибольший объем?



Решение

Уравнение конуса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{H^2} = 0. \quad (1)$$

Если стороны основания призмы $2x$ и $2y$, а высота — h , то объем

$V = 4xyh = 4xy(H - z)$. Из (1) следует, что $x = a\sqrt{\frac{z^2}{H^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, тогда

$$V = 4ay(H - z)\sqrt{\frac{z^2}{H^2} - \frac{y^2}{b^2}} = f(y, z).$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{4a(H - z)\left(\frac{z^2}{H^2} - \frac{2y^2}{b^2}\right)}{\sqrt{\frac{z^2}{H^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{4ay\left(\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{z^2}{H^2} + \frac{z}{H}\right)}{\sqrt{\frac{z^2}{H^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z^2}{H^2} - \frac{2y^2}{b^2} = 0, \\ \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{z^2}{H^2} + \frac{z}{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{H} = \frac{\sqrt{2}y}{b}, \quad 3\frac{y^2}{b} = \frac{\sqrt{2}}{b}y;$$

тогда $y = \frac{\sqrt{2}}{3}b$; $x = a\frac{\sqrt{2}}{3}$; $h = H - z = H\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{b}y\right) = H\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{H}{3}$.

$V = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}b \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}a \cdot \frac{H}{3} = \frac{8abH}{27}$. Размеры основания призмы будут соот-

ветственно $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2b\sqrt{2}}{3}$. Можно доказать, что при указанных разме-

рах объем призмы будет наименьшим.

III. УСЛОВНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ

Во многих задачах на нахождение наибольших или наименьших значений функции вопрос сводится к разысканию максимума или минимума функции от нескольких переменных, которые связаны между собой некоторыми добавочными условиями (уравнениями связи).

Тогда исследование функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на условный экстремум при наличии уравнений связи $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \sqrt{(j=1, m, \quad m < n)}$ сводится к исследованию на обычный экстремум функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

называемой функцией Лагранжа, где λ_j – постоянные множители. Находим от этой функции частные производные по $x_1, x_2, \dots, x_n$ и приравняем их нулю. Из полученной системы уравнений и уравнений связи определяем точки $x_1, x_2, \dots, x_n$, в которых возможен экстремум, а также $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Вопрос о том, будет ли в найденных точках максимум или минимум или его не будет вовсе, в общем случае остается открытым. Этот вопрос в каждом конкретном случае решается на основании тех или иных соображений. Как это делается, покажем на примерах.

84. Исследовать на экстремум функцию $z = x^m + y^m$ ($m > 1$) при $x + y = 2$ ($x \geq 0, y > 0$).

Решение

Исследуем на условный экстремум функцию $z = x^m + y^m$, если $x + y = 2$. Функция Лагранжа $F(x, y, z) = x^m + y^m + \lambda(2 - x - y)$.

$$\text{Находим} \quad F'_x = mx^{m-1} - \lambda, \quad F'_y = my^{m-1} - \lambda \Rightarrow \begin{cases} mx^{m-1} - \lambda = 0, \\ my^{m-1} - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow x =$$

$$= y = \sqrt[m-1]{\frac{\lambda}{m}}, \quad x + y = 2 \cdot \sqrt[m-1]{\frac{\lambda}{m}} \Rightarrow 2 = 2 \cdot \sqrt[m-1]{\frac{\lambda}{m}} \quad \text{и} \quad l = m;$$

тогда $x = y = 1$ – точки возможного экстремума.

Находим второй дифференциал $d^2F = m(m-1)(dx^2 + dy^2)$. Так как $d^2F(x, y) > 0$, то функция $z(x, y)$ имеет минимум в точке $x = 1$, $y = 1$ и $\underline{z_{\min} = 2}$.

85. Исследовать на экстремум функцию $u = xyz$ при $xy + xz + yz = 8$.

Решение

Функция Лагранжа $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 8)$. Находим частичные производные по x, y и z и приравниваем их нулю, за четвертое уравнение берем уравнение связи:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + z) = 0, \\ xz + \lambda(x + z) = 0, \\ xy + \lambda(x + y) = 0, \\ xy + xz + yz - 8 = 0. \end{cases}$$

Умножая последовательно каждое из трех первых уравнений соответственно на x, y и z , складывая их и учитывая четвертое уравнение

связи, получаем $3xyz + 2\lambda(xy + xz + yz) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3xyz}{16}$. Тогда

$$\begin{cases} yz \left(1 - \frac{3x}{16}(y + z) \right) = 0, \\ xz \left(1 - \frac{3y}{16}(x + z) \right) = 0, \\ xy \left(1 - \frac{3z}{16}(x + y) \right) = 0. \end{cases}$$

Так как по смыслу задачи x, y и z отличны от нуля, то из системы

получим $\frac{3x}{16}(y + z) = 1$; $\frac{3y}{16}(x + z) = 1$; $\frac{3z}{16}(x + y) = 1 \Rightarrow x = y = z$, а значит,

$3x^2 = 8$ и $x = \sqrt{\frac{8}{3}}$ (для определенности считаем x, y и z положительными).

Если предположить, что $u = xyz$ – объем прямоугольного параллелепипеда, то, поскольку он не может быть неограниченно большим, при найденных значениях x, y и z он будет наибольшим.

86. Доказать справедливость соотношения

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2.$$

Доказательство

Исследуем на условный экстремум функцию $u = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$,

если $x_1 + x_2 + \dots + x_n = A$. Составим функцию Лагранжа

$$F = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} + \lambda(A - x_1 - x_2 - \dots - x_n). \text{ Находим } F'_{x_1} = \frac{2x_1}{n} - \lambda;$$

$$F'_{x_2} = \frac{2x_2}{n} - \lambda; \dots; F'_{x_1} = \frac{2x_1}{n} - \lambda. \text{ Составим систему уравнений:}$$

$$\begin{cases} F'_{x_1} = 0, \\ F'_{x_2} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F'_{x_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{n}x_1 = \lambda, \\ \frac{2}{n}x_2 = \lambda, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{2}{n}x_n = \lambda \end{cases} \Rightarrow n\lambda = \frac{2}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

или $n\lambda = \frac{2}{n}A$; тогда $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{A}{n}$ – стационарные точки функции u .

Второй дифференциал $d^2F = \frac{2}{n}(dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2) > 0$ в указанных стационарных точках. Тогда в этих точках функция u имеет минимум,

$$\text{т. е. } u_{\min} = \frac{A^2}{n^2} \leq u(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ если } x_1 + x_2 + \dots + x_n = A \text{ или}$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Примечание. Последние рассуждения можно провести иначе: по

смыслу задачи значения $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{A}{n}$ дают минимум функции

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}, \text{ равный } \frac{A^2}{n^2}. \text{ Таким образом, для } x_1 + x_2 + \dots + x_n =$$

$$-A = 0 \text{ выполняется соотношение } \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \frac{A^2}{n^2} \text{ или}$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2.$$

87. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при данном объеме?

Решение

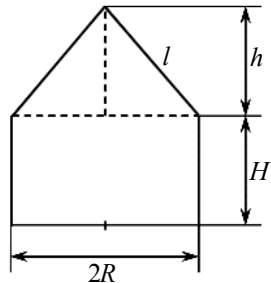
Размеры палатки указаны на рисунке. Для изготовления палатки потребуется материал на боковую цилиндрическую поверхность и на конус, т. е. суммарная площадь $S = 2\pi RH + \pi Rl = 2\pi RH + \pi R\sqrt{R^2 + h^2} =$

$$= \pi R \left(2H + \sqrt{R^2 + h^2} \right).$$

Объем палатки

$$V = \pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi R^2 h = \pi R^2 \left(H + \frac{1}{3} h \right).$$

Поскольку нужно найти соотношения между линейными размерами, обозначим





$R = \alpha h$; $H = \beta h$. Тогда $S = \pi \alpha h^2 \left(2\beta + \sqrt{\alpha^2 + 1} \right)$; $V = \pi \alpha^2 h^3 \left(\beta + \frac{1}{3} \right)$. Второе уравнение есть уравнение связи. Пользуясь методом множителей Лагранжа, составляем функцию

$$F(h, \alpha, \beta) = \pi \alpha h^2 \left(2\beta + \sqrt{\alpha^2 + 1} \right) + \lambda \left(\pi \alpha^2 h^3 \left(\beta + \frac{1}{3} \right) - V \right).$$

Находим, что $\frac{\partial F}{\partial h} = \pi \alpha h \left(4\beta + 2\sqrt{\alpha^2 + 1} + 3\lambda \alpha h \left(\beta + \frac{1}{3} \right) \right)$;

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \pi h^2 \left(2\beta + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} + 2\lambda \alpha h \left(\beta + \frac{1}{3} \right) \right); \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = \pi \alpha h^2 (2 + \lambda \alpha h).$$

Приравниваем к нулю каждую из частных производных:

$$\begin{cases} 4\beta + 2\sqrt{\alpha^2 + 1} + 3\lambda \alpha h \left(\beta + \frac{1}{3} \right) = 0, \\ 2\beta + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} + 2\lambda \alpha h \left(\beta + \frac{1}{3} \right) = 0 \Rightarrow \lambda \alpha h = -2, \\ 2 + \lambda \alpha h = 0 \end{cases}$$

и система принимает вид

$$\begin{cases} 4\beta + 2\sqrt{\alpha^2 + 1} - 6 \left(\beta + \frac{1}{3} \right) = 0, \\ 2\beta + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} - 4 \left(\beta + \frac{1}{3} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = -\frac{1}{3}.$$

Тогда $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\beta = \frac{1}{2}$, т. е. $R = \frac{\sqrt{5}}{2} h$; $H = \frac{1}{2} h$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2002. – 432 с.
 2. **Демидович, Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1969. – 540 с.
 3. **Запорожец, Г. И.** Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] / Г. И. Запорожец. – М. : Высшая школа, 1964. – 476 с.
 4. **Каплан, И. А.** Практические занятия по высшей математике [Текст] : в 4 ч. / И. А. Каплан. – Х. : Изд-во Харьк. ун-та, 1965. – Ч. 1. – 576 с.
 5. **Ляшко, И. И.** Математический анализ в примерах и задачах [Текст] : в 2 ч. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – К. : Вища школа, 1974. – Ч. 1. – 678 с.
 6. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – 608 с.
-

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
I. Функции одной переменной	4
II. Функции многих независимых переменных	52
III. Условные экстремумы	76
Список литературы	81

