

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

М. Р. ТКАЧ, С. О. МОРГУН, А. С. ПОЗНАНСЬКИЙ

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. ЧАСТИНА ПЕРША. СТАТИКА

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як методичні вказівки*

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ • НУК • 2018

УДК 531.2(076)

Т 48

Укладачі:

М. Р. Ткач, д-р техн. наук, професор;
С. О. Моргун, канд. техн. наук, викладач;
А. С. Познанський, канд. техн. наук, викладач

Рецензент О. І. Тарасенко, канд. техн. наук, доцент

Ткач М. Р.

Т 48

Розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки. Частина перша. Статика: методичні вказівки / М. Р. Ткач, С. О. Моргун, А. С. Познанський. – Миколаїв : НУК, 2018. – 61 с.

Уміщено розрахунково-графічні роботи з розділу "Статика" і наведено ілюстровані приклади їх розв'язання.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів. Також можуть бути використані для самостійного вивчення методів і принципів розрахунку типових завдань з курсу теоретичної механіки "Статика".

УДК 531.2(076)

Навчальне видання

**ТКАЧ Михайло Романович
МОРГУН Сергій Олександрович
ПОЗНАНСЬКИЙ Андрій Станіславович**

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. ЧАСТИНА ПЕРША. СТАТИКА

Методичні вказівки

Комп'ютерне верстання *В. Г. Мазанко*
Коректор *М. О. Паненко*

© Ткач М. Р., Моргун С. О., Познанський А. С., 2018
© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2018

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 2,8. Обсяг даних 2820 кб.
Тираж 15 прим. Вид. № 43. Зам. № 84.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ГЛАВА ПЕРША - РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання С-1. Рівновага тіла під дією довільної плоскої системи сил

Знайти реакції опор заданої конструкції. Значення величин навантажень наведено в табл. 1.1.1, схеми конструкцій зображено на рис. 1.1.1–1.1.3. Сили P задаються в кН, моменти сил M – кН·м, максимальна інтенсивність розподіленого навантаження q – в кН/м. Розмір $a = 1$ м. Розподілене навантаження діє перпендикулярно по відношенню до відповідного елемента конструкції.

Таблиця 1.1.1

Варіант	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Варіант	P , кН	M , кН·м	q , кН/м
1	16	25	10	16	18	11	10
2	35	46	12	17	25	23	15
3	8	35	2	18	4	36	18
4	15	30	14	19	6	55	24
5	12	27	8	20	17	28	32
6	14	45	5	21	9	30	16
7	20	10	17	22	5	15	18
8	38	60	20	23	39	65	28
9	27	48	22	24	42	70	36
10	31	52	30	25	40	72	42
11	29	44	24	26	37	25	44
12	34	15	26	27	46	68	15
13	32	27	41	28	10	30	25
14	40	39	6	29	2	18	40
15	48	32	8	30	50	20	10

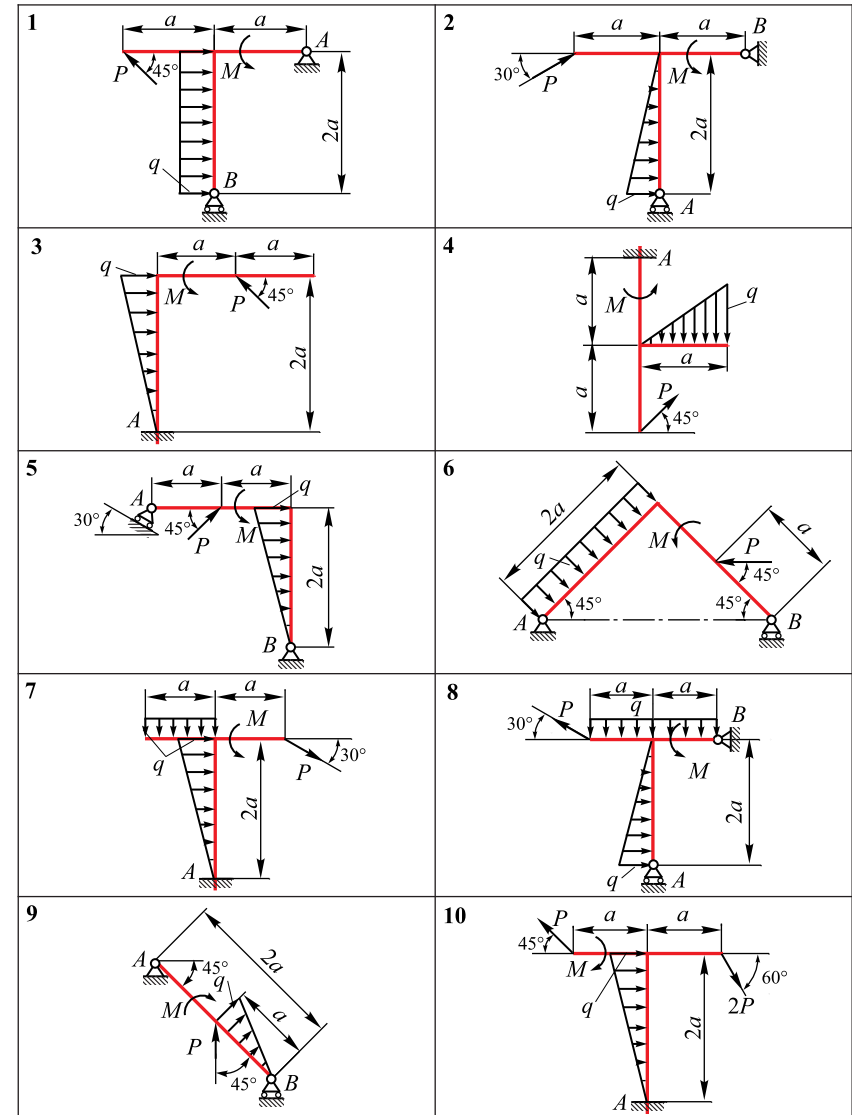


Рис. 1.1.1

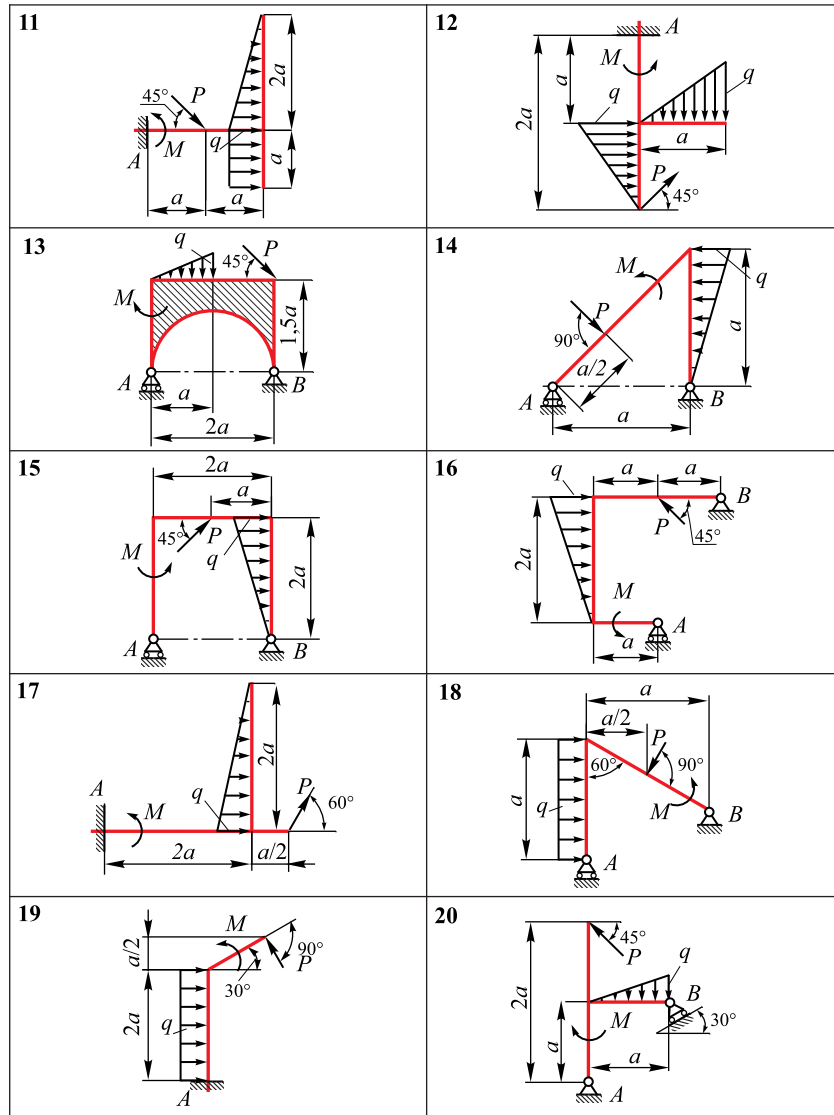


Рис. 1.1.2

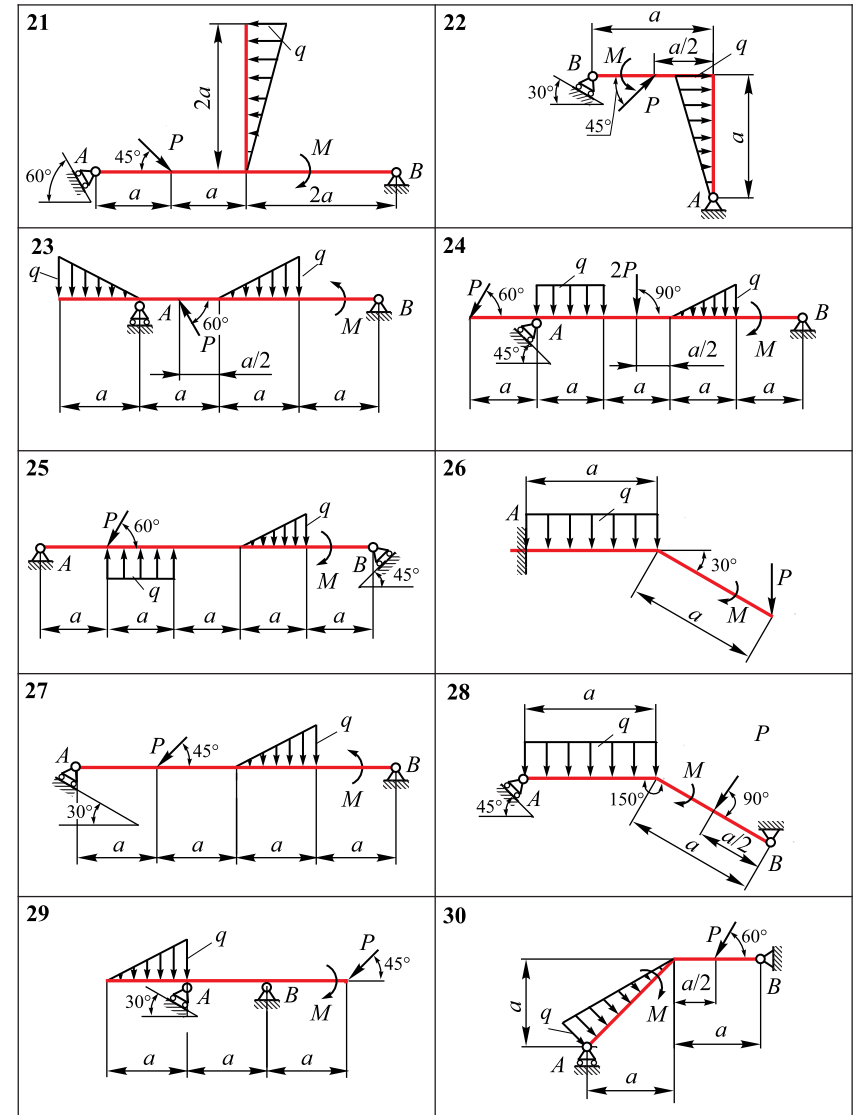


Рис. 1.1.3

Завдання С-2. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів

Знайти реакції опор та сили в стержнях заданої конструкції методом вирізання вузлів.

Значення модулів сил наведено в табл. 1.2.1, схеми конструкцій зображено на рис. 1.2.1–1.2.3. Сили P задаються в кН.

Таблиця 1.2.1

Варіант	P , кН	Варіант	P , кН
1	16	16	36
2	30	17	38
3	8	18	40
4	32	19	42
5	14	20	44
6	20	21	46
7	22	22	48
8	24	23	50
9	26	24	52
10	28	25	54
11	10	26	56
12	12	27	58
13	14	28	60
14	32	29	62
15	34	30	64

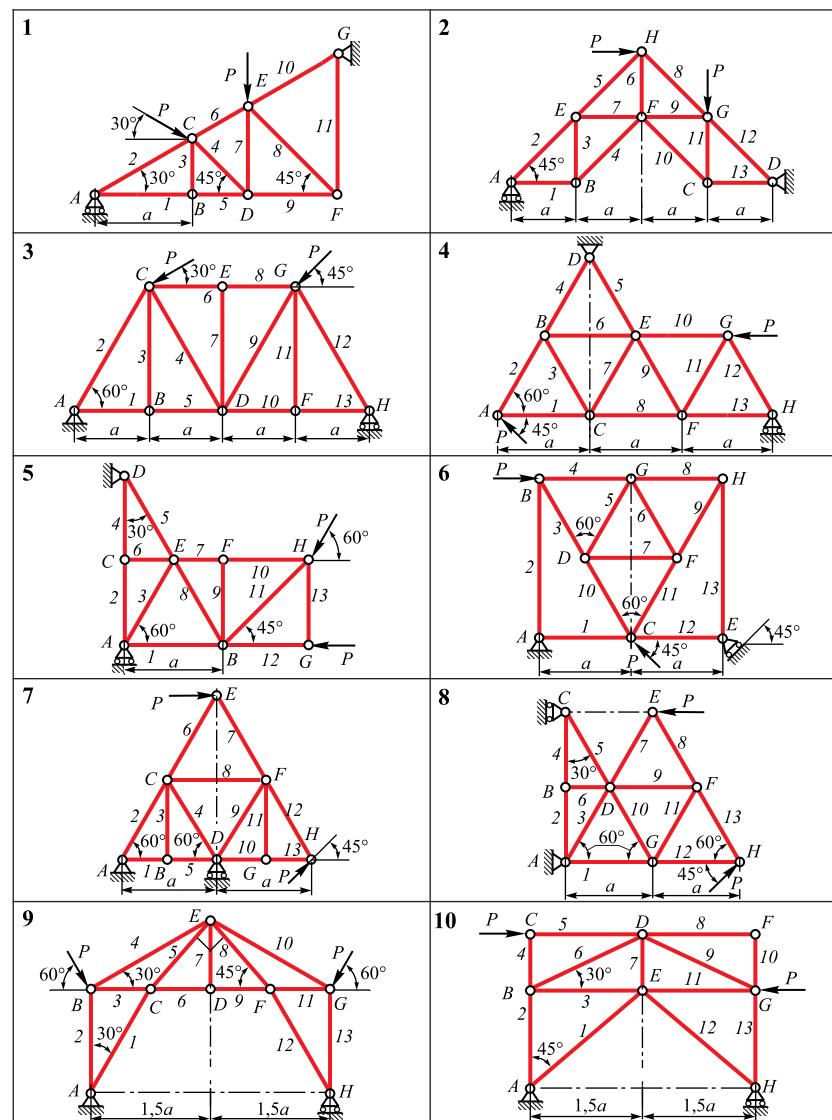


Рис. 1.2.1

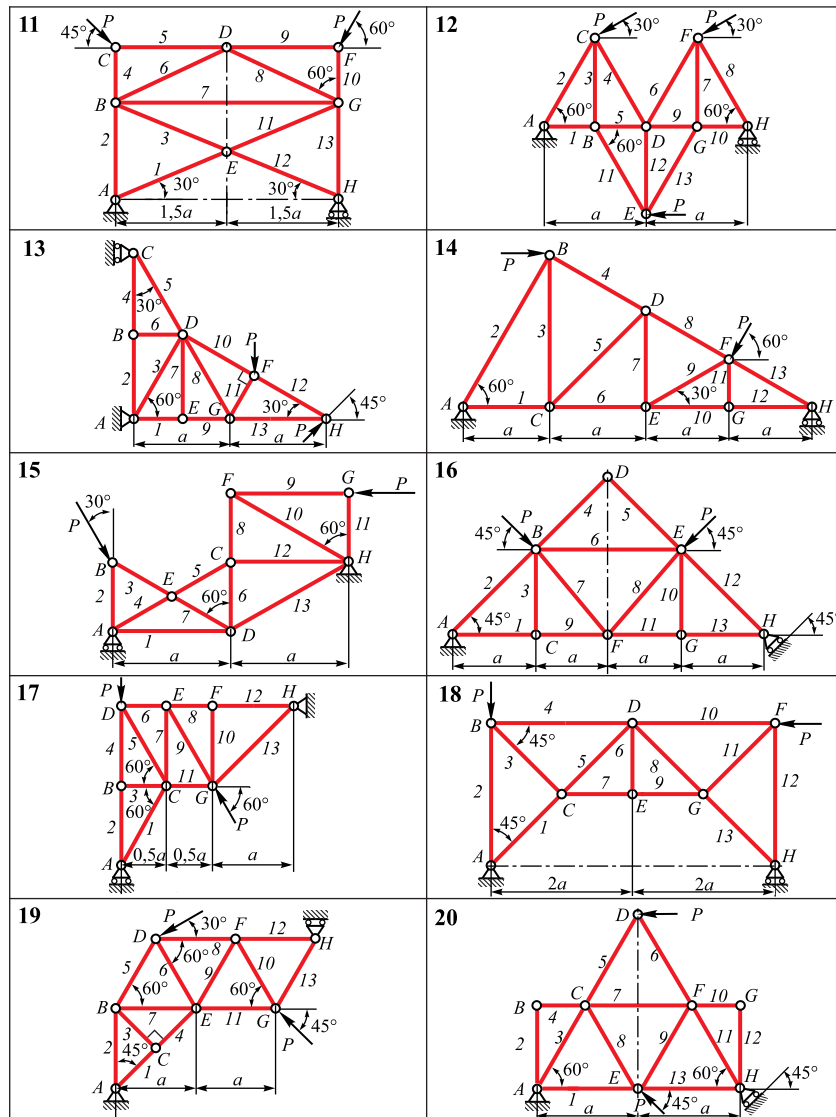


Рис. 1.2.2

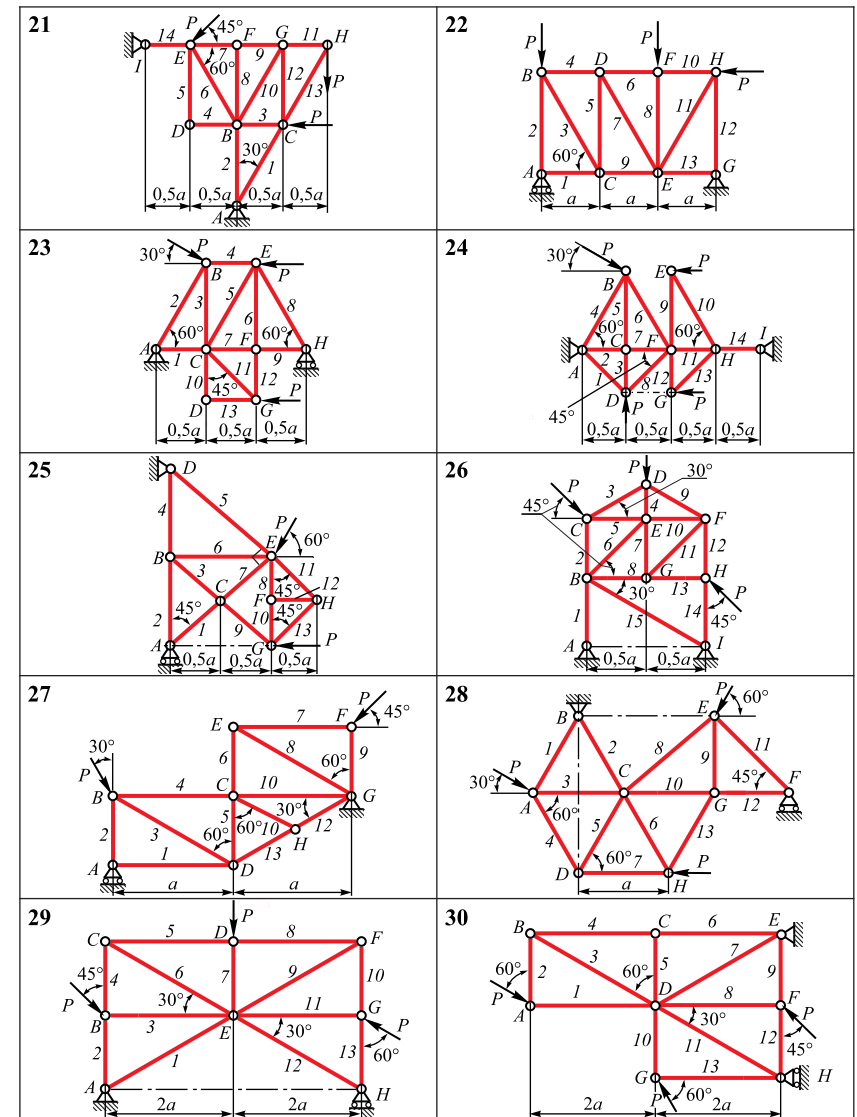


Рис. 1.2.3

Завдання С-3. Рівновага зчленованої системи тіл

Знайти реакції опор і тиск в проміжних шарнірах заданої конструкції, складеної з двох частин. Значення величин навантажень наведено в табл. 1.3.1, схеми конструкцій зображено на рис. 1.3.1–1.3.3. Сили задаються в кН, моменти сил – кН·м, інтенсивність розподіленого навантаження q – в кН/м, а розміри – в метрах.

Таблиця 1.3.1

Варі- ант	P_1	P_2	M_1	M_2	q	Варі- ант	P_1	P_2	M_1	M_2	q
1	0,6	–	2,5	1,0	1,00	16	1,0	1,5	3,5	1,5	0,10
2	0,5	0,8	2,6	–	–	17	1,5	2,0	2,0	1,5	0,15
3	0,8	1,0	3,5	2,0	0,20	18	0,8	1,5	3,0	–	0,10
4	1,5	3,0	3,0	–	0,40	19	0,6	1,8	3,5	–	0,14
5	1,2	2,7	2,7	–	0,10	20	0,7	1,6	3,2	–	0,12
6	1,4	1,2	2,5	–	0,15	21	0,8	1,8	3,0	2,5	0,14
7	1,6	1,0	2,0	0,8	0,20	22	0,5	0,6	3,5	–	0,15
8	1,5	0,6	3,0	–	0,10	23	1,4	1,2	3,6	–	0,12
9	2,0	–	2,5	0,5	0,20	24	1,2	1,4	2,8	1,6	0,18
10	0,8	–	3,0	–	0,10	25	1,6	1,5	3,3	–	0,14
11	1,5	1,0	2,5	–	0,10	26	1,5	1,6	1,8	–	0,18
12	2,0	0,8	3,5	1,5	0,20	27	1,4	1,8	3,5	0,6	0,16
13	1,0	0,6	1,5	2,0	0,15	28	1,2	1,4	3,0	–	0,13
14	0,5	–	4,0	–	0,10	29	1,5	2,0	2,5	–	0,20
15	0,6	2,0	2,5	–	0,20	30	1,5	2,0	2,5	0,5	0,20

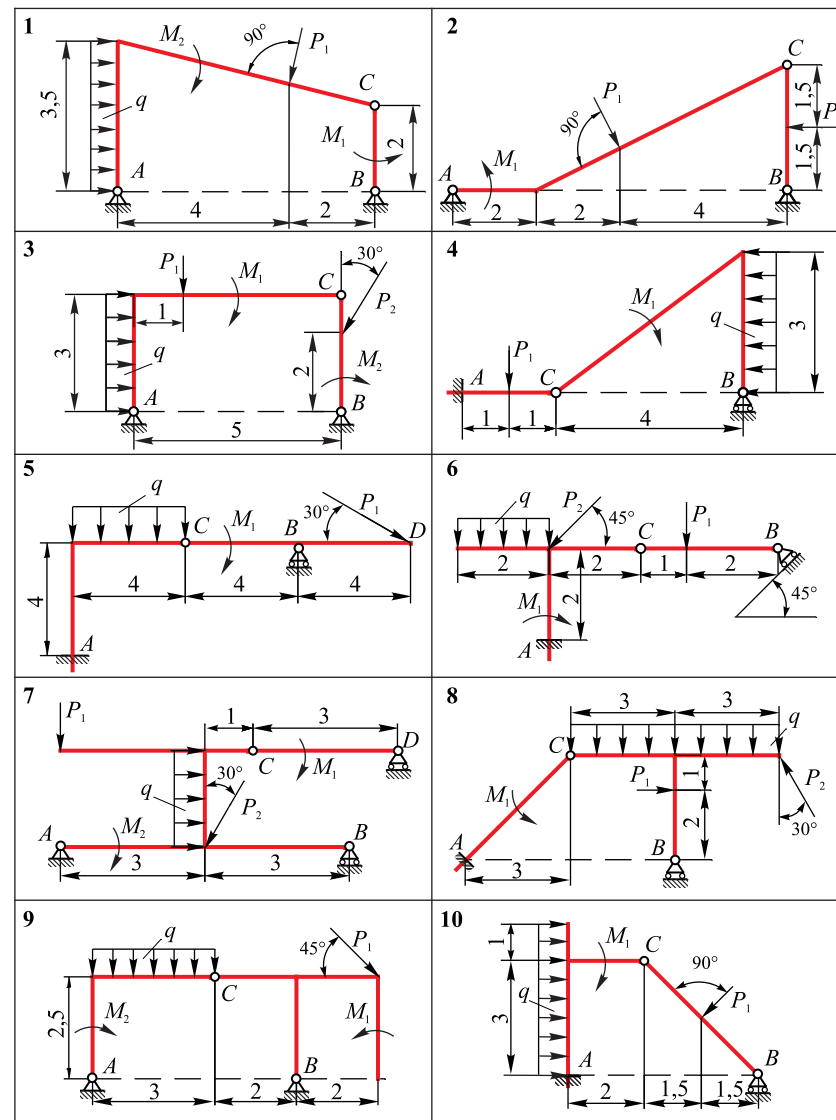


Рис. 1.3.1

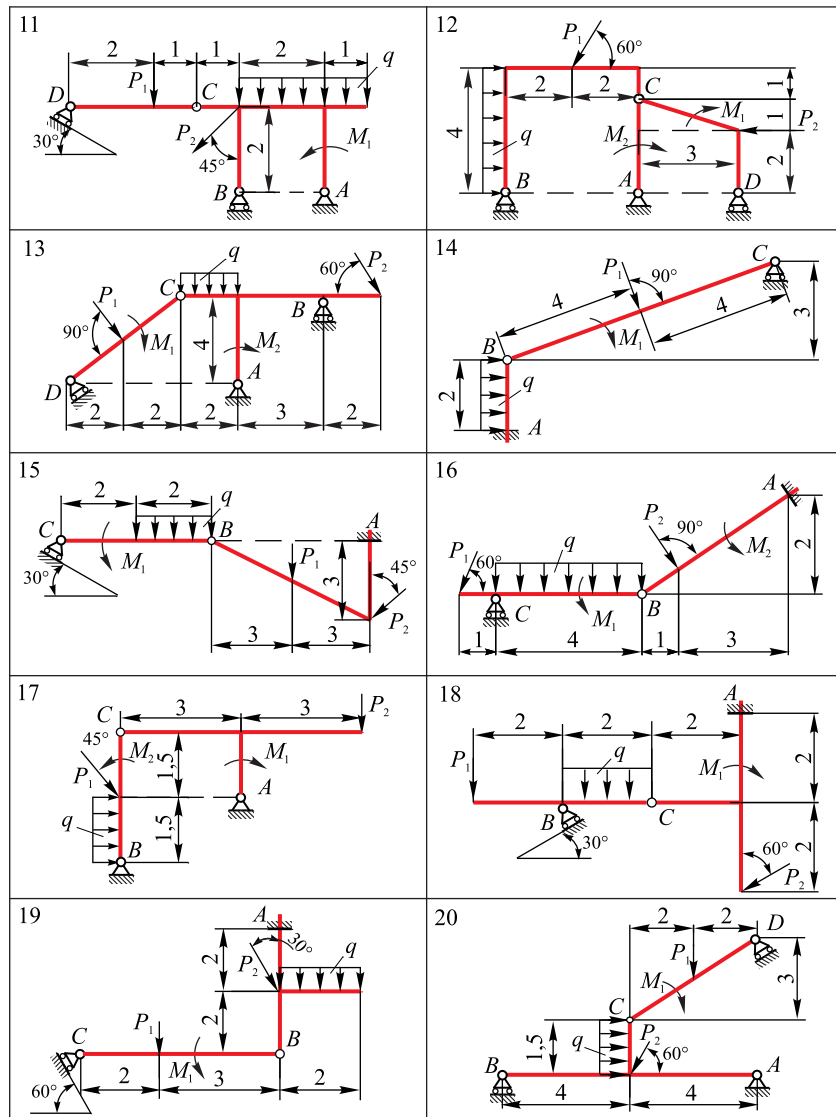


Рис. 1.3.2

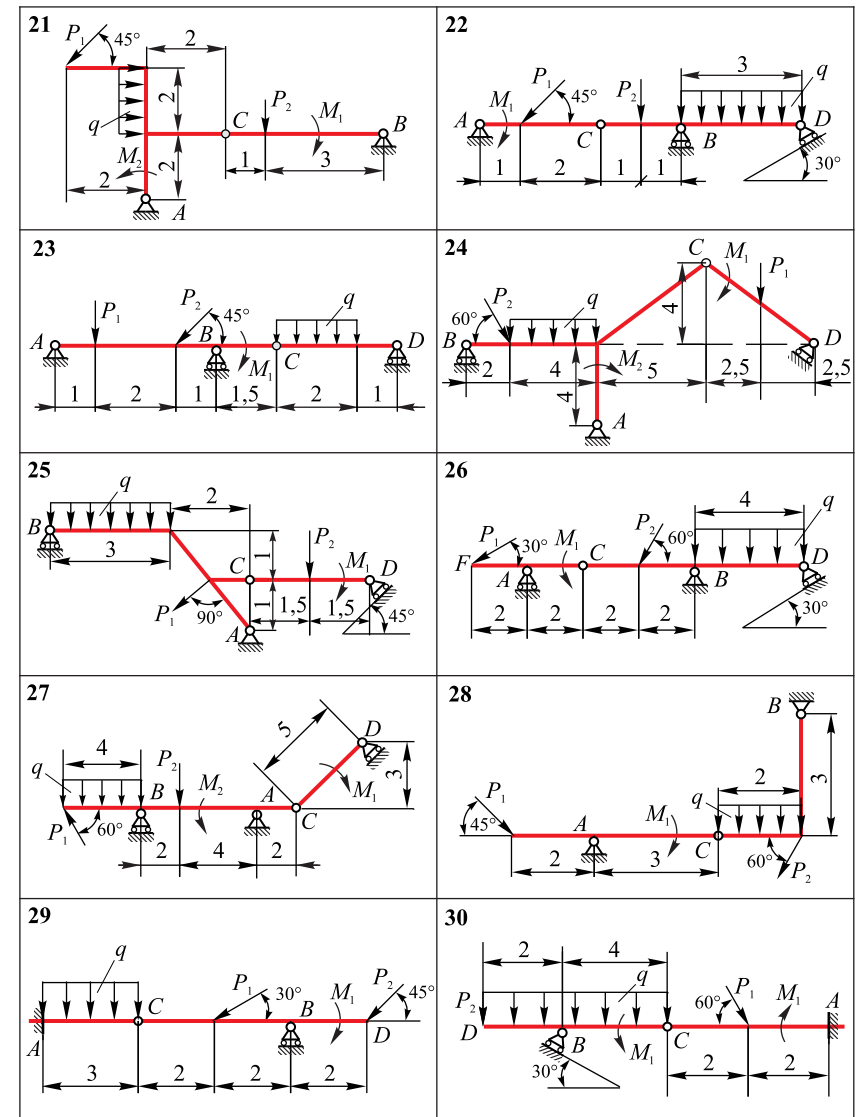


Рис. 1.3.3

Завдання С-4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду

Привести систему сил до простішого виду. Задані системі сил зображено на рис. 1.4.1–1.4.3. Модулі сил та відповідні відстані дано в табл. 1.4.1. Сили задано в Н, моменти сил в кН·м, а розміри – в метрах.

Таблиця 1.4.1

Варіант	P_1	P_2	P_3	P_4	M	a	b	c
1	15	25	35	20	100	5,0	5,0	5,0
2	35	25	15	10	200	3,0	3,0	3,0
3	12	16	14	–	50	1,5	5,0	2,5
4	14	12	16	–	25	5,0	2,5	1,5
5	4	6	8	10	100	0,6	0,3	0,2
6	20	24	10	20	200	0,3	0,4	0,4
7	4	2	8	30	50	2,0	1,0	1,0
8	15	20	30	–	100	3,0	4,0	2,0
9	18	11	13	15	50	9,0	8,0	7,0
10	15	25	35	20	100	2,0	3,0	4,0
11	8	10	8	10	150	2,0	2,0	2,0
12	8	4	6	20	75	3,0	4,0	2,0
13	12	16	14	–	50	1,5	5,0	2,5
14	14	12	16	–	500	4,5	6,0	3,5
15	10	16	20	30	200	3,0	4,0	4,0
16	10	10	10	20	100	3,0	4,0	4,0
17	20	30	10	40	200	3,5	4,5	6,0
18	16	12	14	18	400	8,0	7,0	9,0
19	18	11	13	20	200	9,0	8,0	7,0
20	15	25	35	40	100	4,0	4,0	4,0
21	35	15	25	–	200	4,0	2,0	3,0
22	25	35	15	–	100	3,0	4,0	2,0
23	10	20	30	–	50	3,0	4,0	3,0
24	20	30	20	30	100	1,0	1,0	2,0
25	8	12	20	26	200	1,0	4,0	3,0
26	6	20	10	8	250	4,0	8,0	6,0
27	20	30	10	–	150	4,5	6,0	3,0
28	16	14	12	20	100	8,0	7,0	9,0
29	18	11	13	15	50	9,0	8,0	7,0
30	10	20	30	20	150	4,5	6,0	3,5

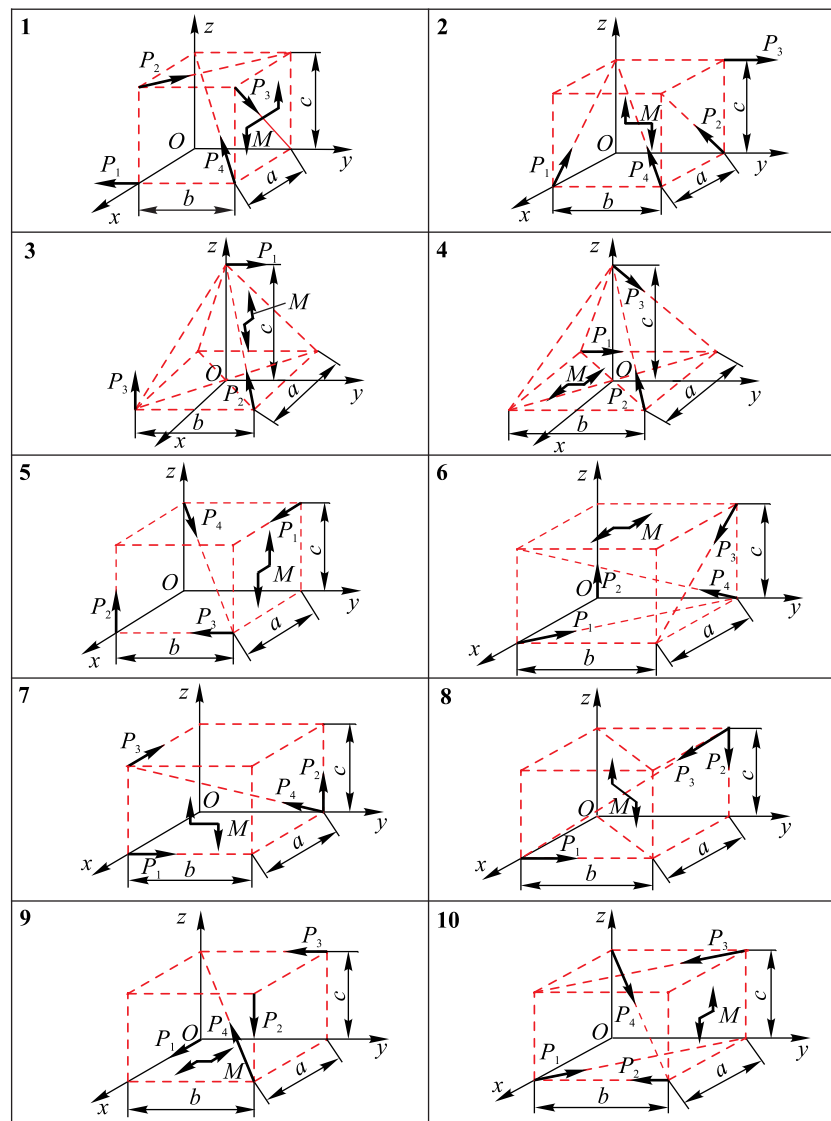


Рис. 1.4.1

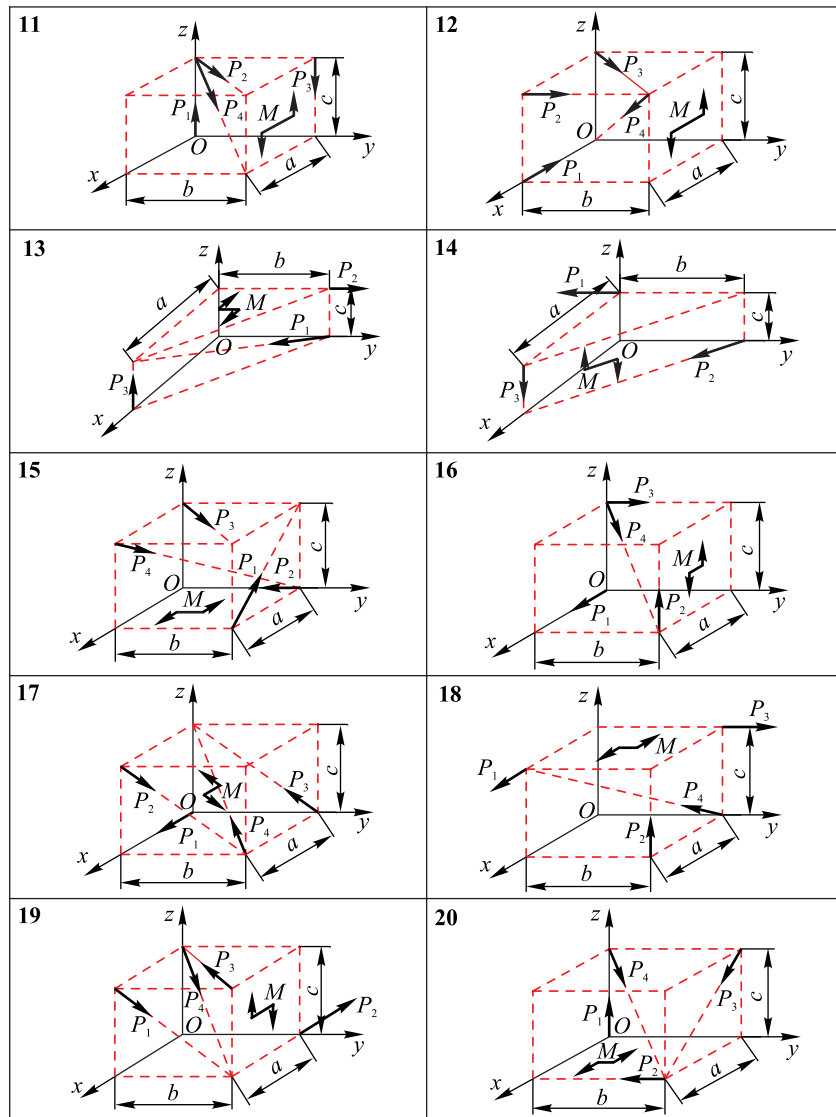


Рис. 1.4.2

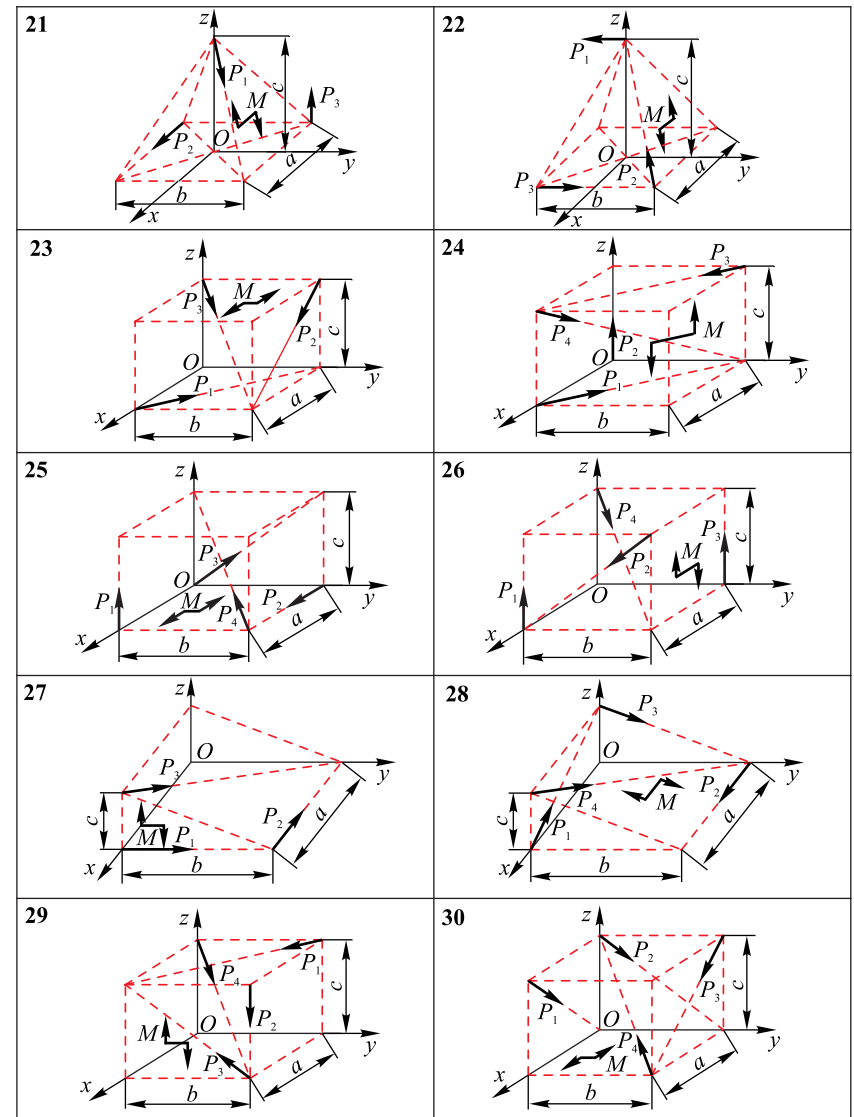


Рис. 1.4.3

Завдання С-5. Рівновага просторової системи довільно розташованих сил

Знайти силу P , що забезпечує рівновагу заданої просторової конструкції, а також реакції опор. Схеми конструкцій зображено на рис. 1.5.1–1.5.3. Модулі сил та необхідні розміри наведено в табл. 1.5.1. Сили задаються в кН, моменти сил – в кН·м, а відстані – в метрах. Сила G розташована паралельно вісі Az . Модуль сили T удвічі більше модулю сили t , а значення $\delta = 5 \cdot 10^{-3} R$.

Таблиця 1.5.1

Варіант	Q	T	G	a	b	c	R	r	M
1	2	–	20	0,20	0,30	0,10	0,15	0,05	4,0
2	4	–	2	0,20	0,10	0,30	0,10	0,10	–
3	6	–	4	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	–
4	3	–	2	0,30	0,20	0,40	0,15	0,10	5,0
5	5	–	3	0,30	0,40	0,20	0,20	0,15	2,0
6	1	4	2	0,40	0,30	0,20	0,20	0,10	3,0
7	–	3	1	0,30	0,10	0,05	0,18	0,06	2,0
8	4	6	3	0,20	0,40	0,15	0,20	0,10	3,0
9	5	–	3	0,20	0,15	0,10	0,30	0,40	–
10	1	4	2	0,30	0,40	0,20	0,20	0,10	2,0
11	–	2	1	0,20	0,30	0,15	0,15	0,10	4,0
12	–	–	10	–	–	–	–	–	5,0
13	10	–	5	0,40	0,30	0,20	0,25	0,15	3,0
14	–	2	1	0,30	0,90	0,20	0,30	0,10	2,0
15	3	–	2	0,60	0,20	0,40	0,20	0,05	2,5
16	4	–	2	0,50	0,30	–	–	–	2,0
17	2	–	1	0,15	0,10	0,20	0,20	0,05	1,0
18	6	–	2	0,60	0,40	0,60	–	–	3,0
19	–	8	2	0,20	0,30	0,40	0,20	0,15	–
20	4	–	–	0,60	0,40	0,20	–	–	–
21	2	4	–	0,40	0,60	0,30	0,20	0,10	1,0
22	–	–	5	0,20	0,50	0,30	–	–	2,0
23	–	–	4	0,40	0,30	0,50	–	–	3,0
24	5	–	2	–	–	–	–	–	1,0
25	2	–	3	0,50	0,50	0,60	–	–	2,0
26	3	–	1	0,20	0,60	0,40	–	–	3,0
27	–	–	1	0,50	0,30	–	–	–	1,0
28	2	–	6	0,30	0,10	0,50	0,10	0,15	0,2
29	–	4	3	0,15	0,20	0,15	0,15	0,10	0,5
30	–	–	4	0,40	0,30	0,10	–	–	1,0

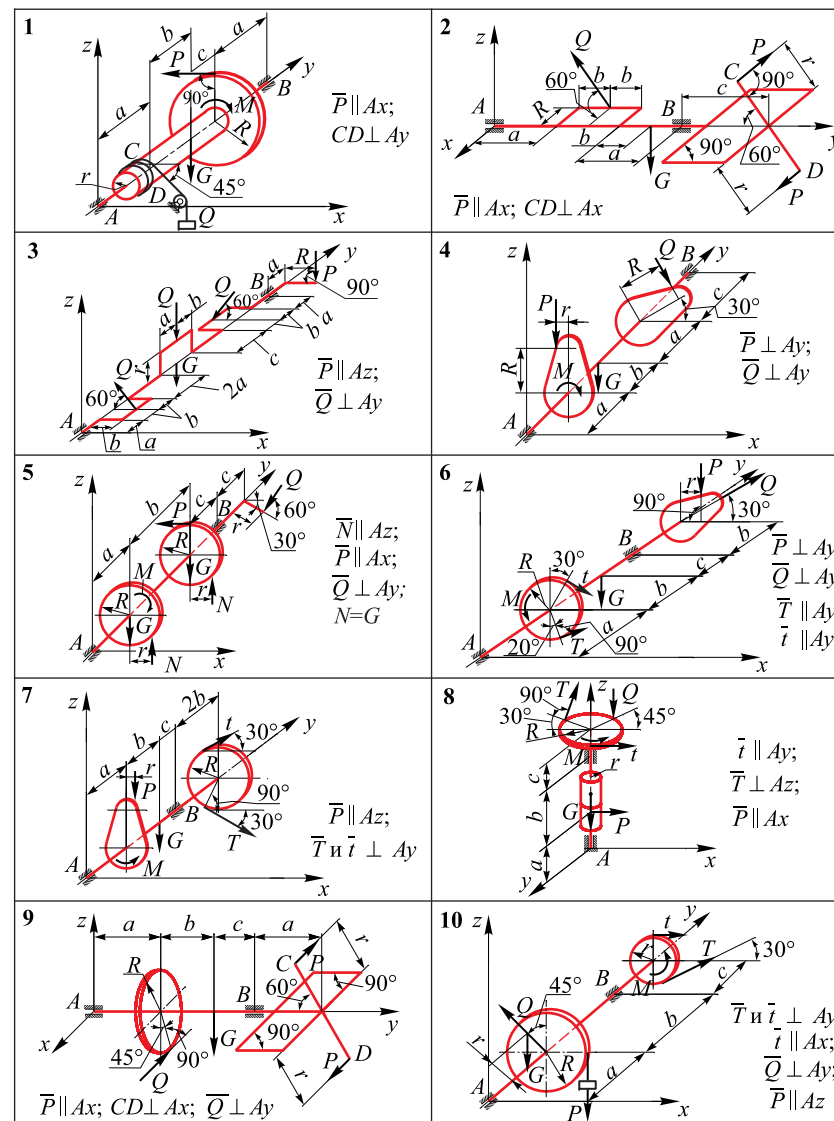


Рис. 1.5.1

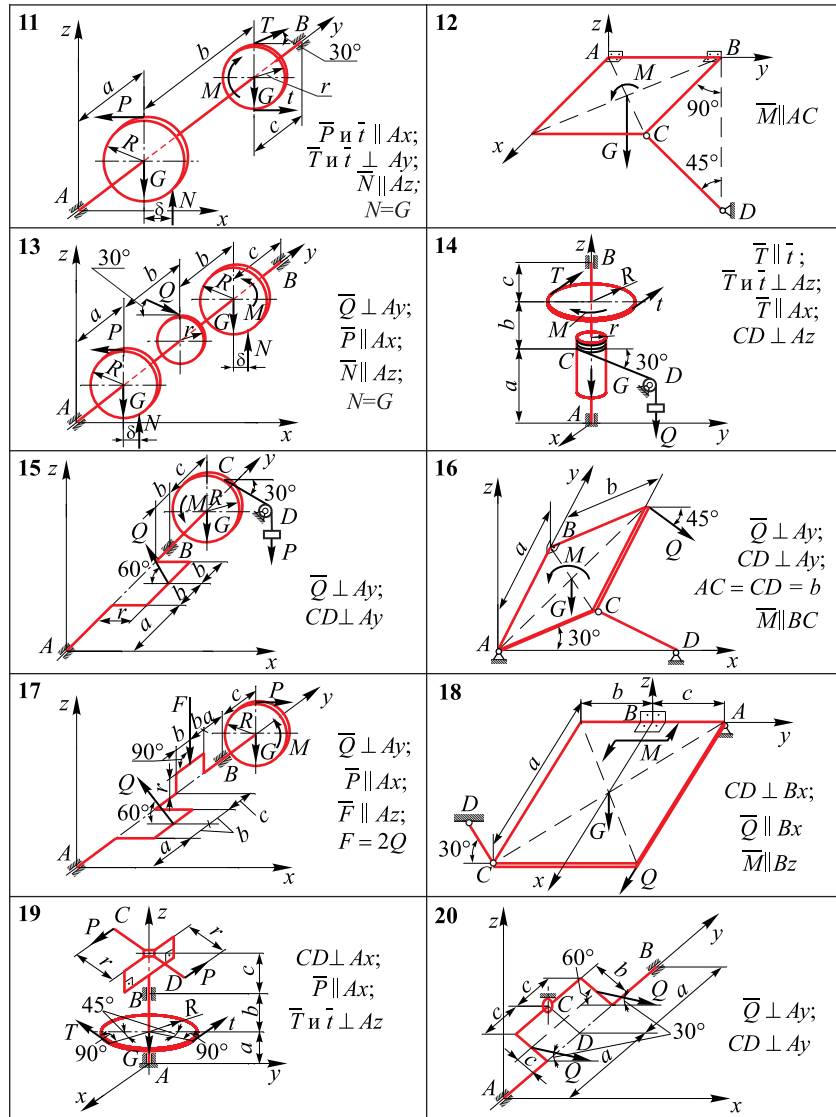


Рис. 1.5.2

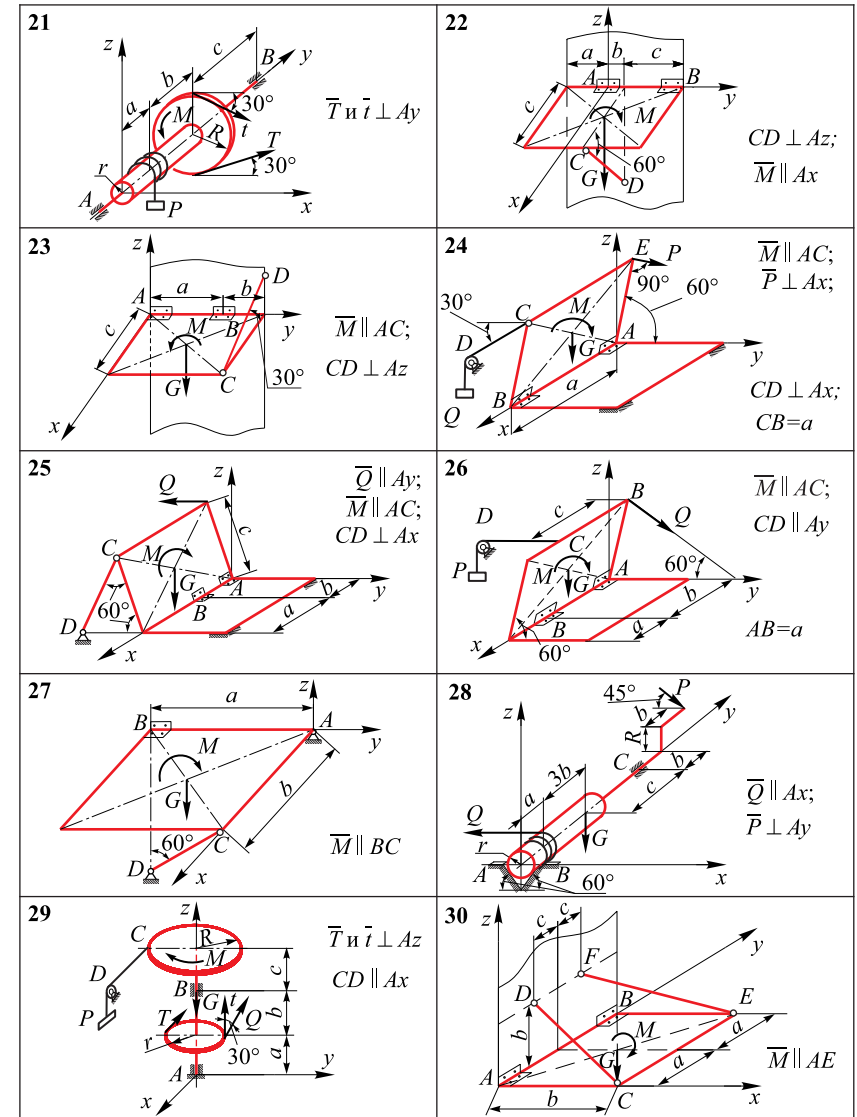


Рис. 1.5.3

Завдання С-6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури

Знайти координати центра ваги фігури, що зображено на рис. 1.6.1–1.6.3. Розміри фігур задано у міліметрах.

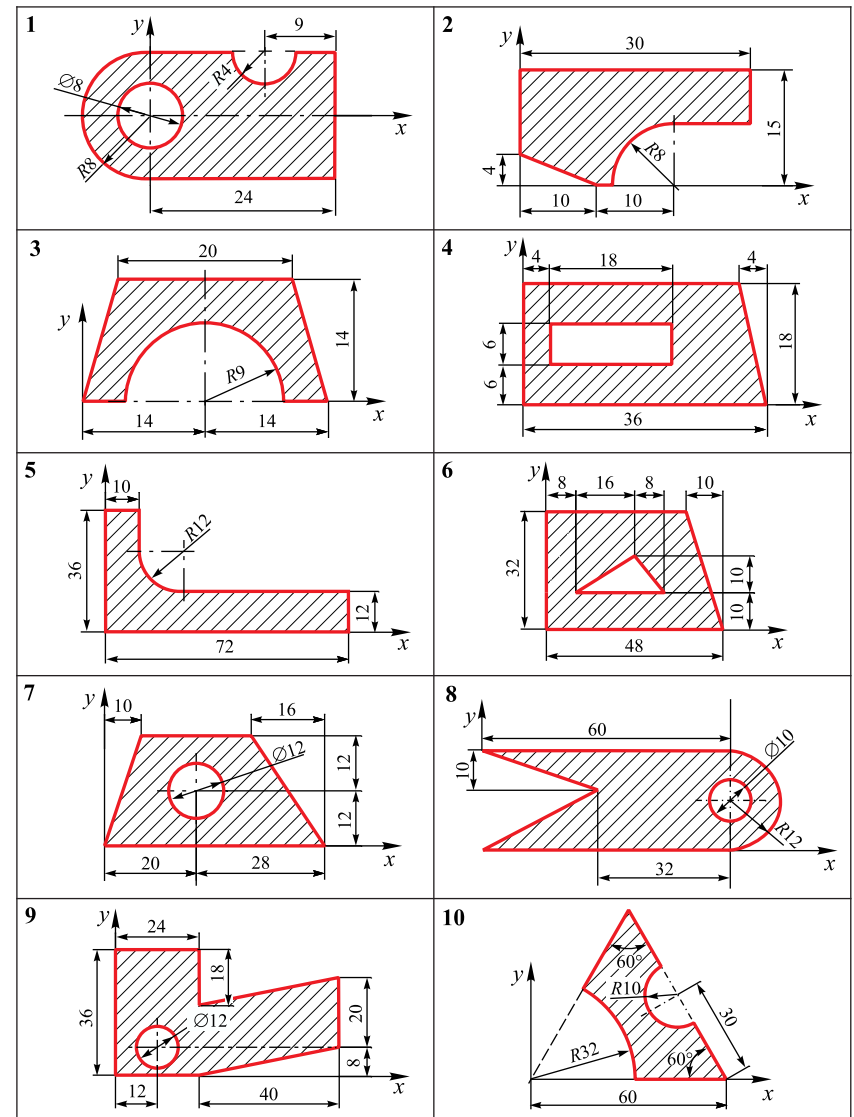


Рис. 1.6.1

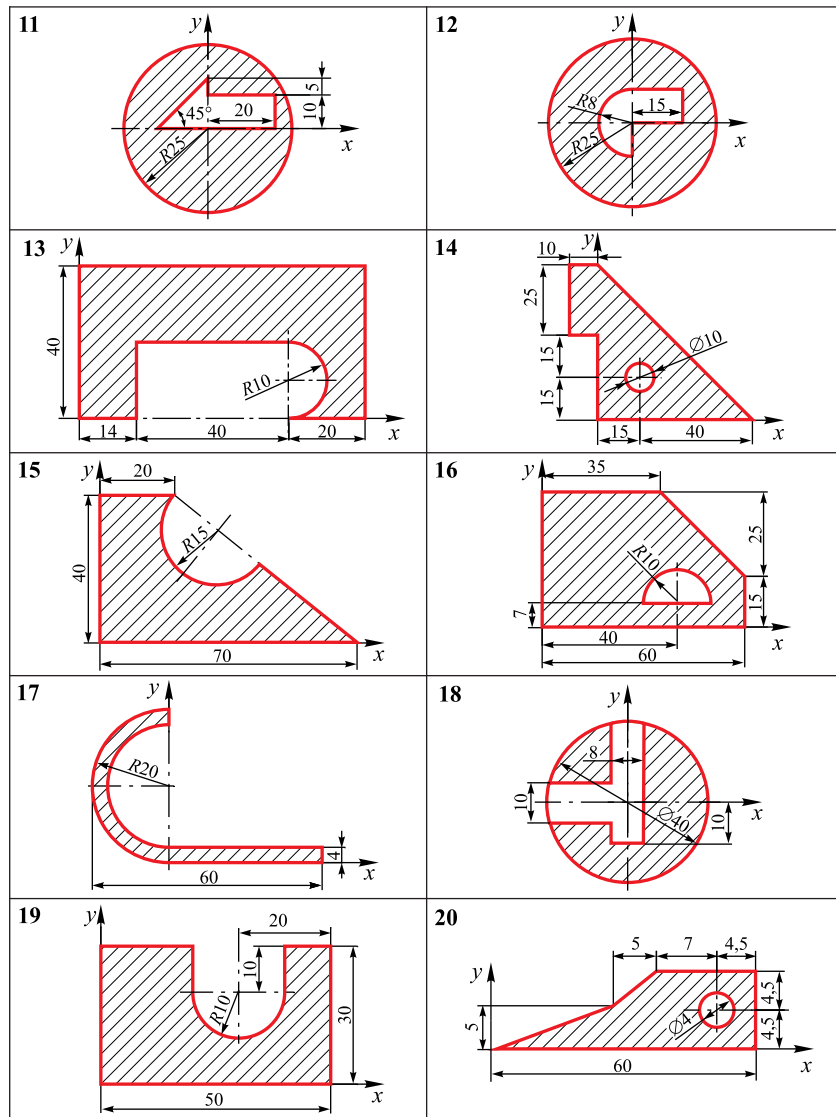


Рис. 1.6.2

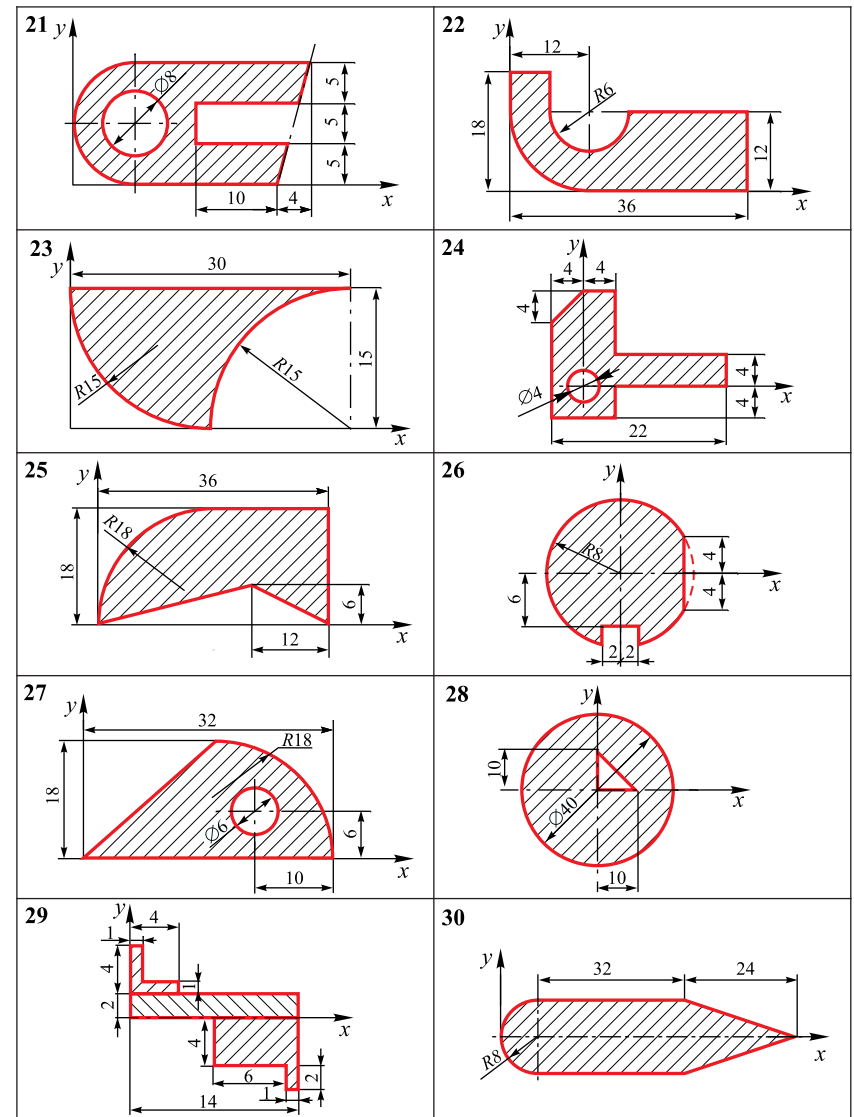


Рис. 1.6.3

ГЛАВА ДРУГА - РІШЕННЯ РГЗ АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

Завдання С-1. Рівновага тіла під дією довільної плоскої системи сил

Жорстка конструкція розташована в площині xOy (рис. 2.1.1). В точці A розташовано рухому опору, а в точці B – нерухому. На конструкцію діє навантаження: $P = 25$ кН; $q = 20$ кН/м; $M = 40$ кН·м; $a = 1$ м; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$. Знайти реакції опор конструкції.

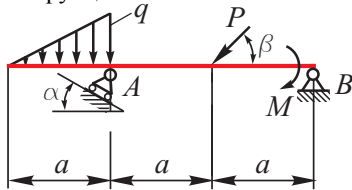


Рис. 2.1.1. Жорстка конструкція під дією плоскої системи сил

Приклад розв'язання задачі

1. Для конструкції, зображеної на рис. 2.1.1, зв'язками є шарнірно-нерухома опора, розташована в точці B та шарнірно-рухома опора в точці A . Виходячи з класифікації реакцій для різних типів зв'язків, розташовуємо в точці B дві складові реакції – X_B та Y_B , а в точці A – реакцію R_A , перпендикулярно до площини опори (рис. 2.1.2). Розподілене по закону трикутника навантаження q замінимо еквівалентною зосередженою силою Q .

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot a = \frac{1}{2} 20 \cdot 1 = 10 \text{ кН.}$$

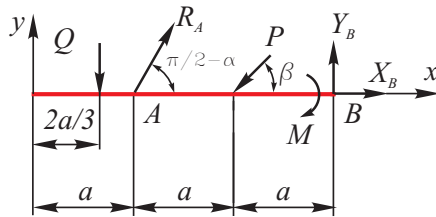


Рис. 2.1.2. Складові реакції зв'язків та розрахункова схема жорсткої конструкції

2. Невідомими є три складові реакції зв'язків X_B , Y_B , та R_A . Рівнянь рівноваги для даної системи сил також три. Тобто задача є статично визначеною.

3. Запишемо рівняння рівноваги системи (1.1):

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ R_A \cdot \cos 45^\circ - P \cdot \cos 60^\circ + X_B &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ -Q + R_A \cdot \cos 45^\circ - P \cdot \cos 30^\circ + Y_B &= 0; \\ \sum M_B &= 0; \\ Q \cdot 2,333 \cdot a - R_A \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 \cdot a + P \cdot \cos 30^\circ \cdot a - M &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

4. Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$R_A = \frac{Q \cdot 2,333 \cdot a + P \cdot \cos 30^\circ \cdot a - M}{2 \cdot a \cdot \cos 45^\circ} = \frac{10 \cdot 2,333 \cdot 1 + 25 \cdot \cos 30^\circ \cdot 1 - 40}{2 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ} = 3,523 \text{ кН}$$

$$X_B = P \cdot \cos 60^\circ - R_A \cdot \cos 45^\circ = 25 \cdot \cos 60^\circ - 3,523 \cdot \cos 45^\circ = 10,009 \text{ кН}$$

$$Y_B = Q - R_A \cdot \cos 45^\circ + P \cdot \cos 30^\circ = 10 - 3,523 \cdot \cos 45^\circ + 25 \cdot \cos 30^\circ = 29,16 \text{ кН.}$$

5. Зробимо аналітичну та графічну перевірку отриманих результатів.

5.1. Для проведення аналітичної перевірки запишемо рівняння моментів для будь-якого вузла конструкції (наприклад, для точки A). Якщо невідомі реакції знайдені вірно, то сума моментів усіх сил відносно точки A повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; \\ Q \cdot \frac{1}{3} \cdot a - P \cdot \cos 30^\circ \cdot a - M + Y_B \cdot 2 \cdot a &= \\ &= 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - 25 \cdot \cos 30^\circ \cdot 1 - 40 + 29,16 \cdot 2 \cdot 1 = 0,002 \approx 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Величина відносної похибки складає 0,2%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа.

Результат рішення рівняння (1.2) не перевищує відносну похибку, отже невідомі реакції знайдені вірно.

5.2. Графічна перевірка. Для цього в системі *Autocad* побудуємо головний вектор – геометричну суму – системи сил, що діє на жорстку конструкцію. Задаємо, наприклад, масштаб сили: 1 кН = 10 мм. Тоді довжина вектора

сили X_B дорівнюватиме: $\frac{10,009 \text{ кН}}{1 \text{ кН}} \cdot 10 \text{ мм} = 100,09 \text{ мм}$. Тобто в системі *Autocad*

будуємо відрізок довжини 100,09 мм, який у силовому багатокутнику позначатиме вектор сили X_B . Так, як при розрахунку ми отримали додатне значення сили, то і її вектор буде направлено в додатному напрямку осі x , тобто праворуч. Аналогічно будуємо вектори інших сил, а саме: Y_B , Q , P , R_A . Отриманий результат побудови у вигляді силового багатокутника наведено на рис. 2.1.3.

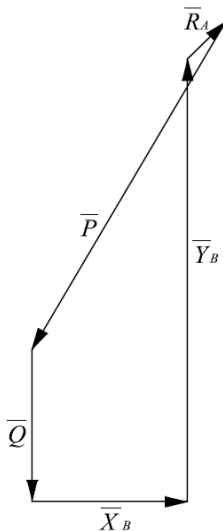


Рис. 2.1.3. Силовий багатокутник плоскої системи сил для конструкції, що розглядається

Силовий багатокутник замкнений, отже головний вектор системи дорівнює нулю. Як наслідок і його проекції на осі координат також дорівнюють нулю.

Аналогічно побудові головного вектора системи сил в системі *Autocad* виконаємо побудову моментів усіх сил відносно лівої опори (точки A), тобто, в точці прикладання кожної сили побудуємо величину її моменту, відносно вказаної опори. Момент пари сил зобразимо як добуток модуля однієї сили пари на плече пари. Задаємо, наприклад, масштаб моменту сили: $1 \text{ кН}\cdot\text{м} = 2 \text{ мм}$.

Розташування моменту пари сил може бути довільним в межах конструкції. Умовно його побудовано там, де наведено у завданні (див. рис. 2.1.1.) Модулі моментів сил і пари сил зі знаком «+» зобразимо направленими таким чином, щоб жорстка конструкція «оберталась» у напрямку про-

ти руху годинникової стрілки, зі знаком «-» – у напрямку руху годинникової стрілки. Отриманий результат наведено на рис. 2.1.4.

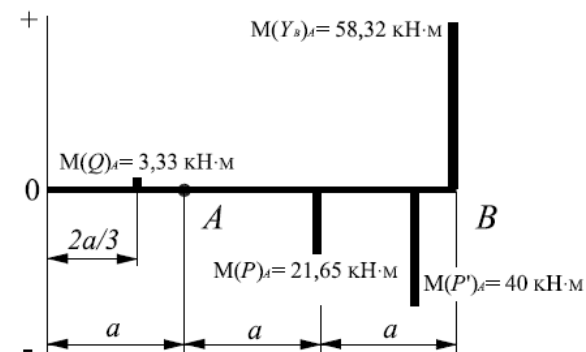


Рис. 2.1.4. Модулі моментів сил відносно точки A і пари сил, що діють на жорстку конструкцію

Як витікає з побудови, алгебраїчна сума моментів усіх сил конструкції відносно точки A дорівнює нулю – можна зробити висновок, що задача розв'язана правильно.

Завдання С-2. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів

На конструкцію діє навантаження: $P_1 = 18 \text{ кН}$; $P_2 = 15 \text{ кН}$; $P_3 = 5 \text{ кН}$. Знайти реакції опор та зусилля в стержнях плоскої ферми (рис. 2.2.1) методом вирізання вузлів.

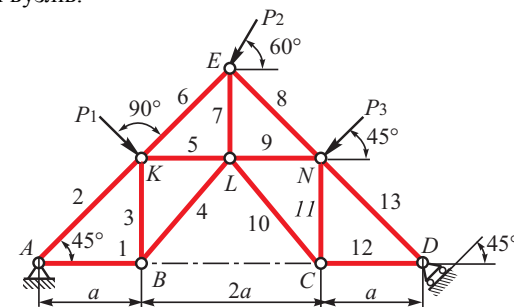


Рис. 2.2.1. Плоска ферма

Приклад розв'язання задачі

1. *Визначення реакції опор.* Покажемо зовнішні сили, прикладені до ферми: активні (задані) сили P_1, P_2, P_3 та реакції опор. Для плоскої ферми, зображеної на рис. 2.2.1, зв'язками є шарнірно-нерухома опора, розташована в точці A та шарнірно-рухома опора в точці D . Виходячи з класифікації реакцій для різних типів зв'язків, розташовуємо в точці A дві складові реакції – X_A та Y_A , а в точці D – реакцію R_D , перпендикулярно до площини опори (рис. 2.2.2).

Запишемо рівняння рівноваги сил, прикладених до ферми (2.1):

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & X_A + P_1 \cdot \cos 45^\circ - P_2 \cdot \cos 60^\circ - P_3 \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & Y_A - P_1 \cdot \cos 45^\circ - P_2 \cdot \cos 30^\circ - P_3 \cdot \cos 45^\circ + R_D \cdot \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum M_A &= 0; & -P_1 \cdot \sqrt{2} \cdot a - P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a + P_3 \cdot \cos 45^\circ \cdot a - & \\ & & -P_3 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3a + R_D \cdot \cos 45^\circ \cdot 4a &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

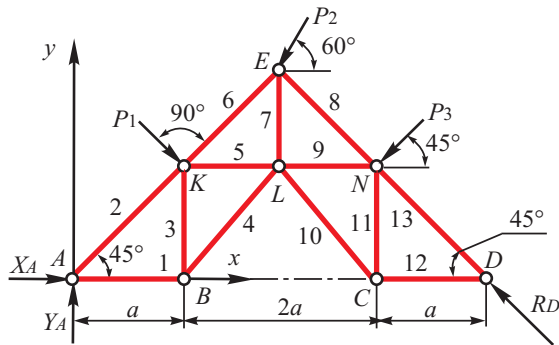


Рис. 2.2.2. Розрахункова схема плоскої ферми

Розв'яжемо отриману систему рівнянь (2.1):

$$\begin{aligned} R_D &= \frac{(P_1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot P_2 \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot P_2 \cdot \cos 60^\circ - P_3 \cdot \cos 45^\circ + 3 \cdot P_3 \cdot \cos 45^\circ) \cdot a}{4 \cdot a \cdot \cos 45^\circ} = \\ &= \frac{(18 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 15 \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ - 5 \cdot \cos 45^\circ + 3 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ)}{4 \cdot \cos 45^\circ} = 15,385 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_A &= -P_1 \cdot \cos 45^\circ + P_2 \cdot \cos 60^\circ + P_3 \cdot \cos 45^\circ + R_D \cdot \cos 45^\circ = \\ &= -18 \cdot \cos 45^\circ + 15 \cdot \cos 60^\circ + 5 \cdot \cos 45^\circ + 15,385 \cdot \cos 45^\circ = 9,187 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= P_1 \cdot \cos 45^\circ + P_2 \cdot \cos 30^\circ + P_3 \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 45^\circ = \\ &= 18 \cdot \cos 45^\circ + 15 \cdot \cos 30^\circ + 5 \cdot \cos 45^\circ - 15,385 \cdot \cos 45^\circ = 18,375 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для перевірки результатів рішення побудуємо, в системі *Autocad*,

головний вектор – геометричну суму системи сил, що діє на плоску ферму (рис. 2.2.3). Особливості побудови детально наведено в завданні С–1.

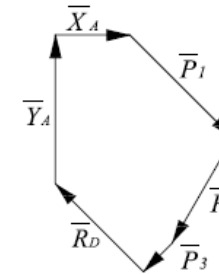


Рис. 2.2.3. Силіовий багатокутник плоскої ферми

Силіовий багатокутник замкнений, отже головний вектор системи дорівнює нулю. Як наслідок, його проекції на осі координат також дорівнюють нулю.

Аналогічно побудові головного вектора системи сил, виконаємо побудову моментів активних сил та реакцій опор відносно правої опори (точки D), тобто, в точці прикладання кожної сили побудуємо величину її моменту, відносно вказаної опори (рис. 2.2.4).

Якщо невідомі реакції знайдені вірно, то сума моментів усіх сил відносно точки D повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} \sum M_D &= 0; \\ -Y_A \cdot 4a - P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot a + P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3a + P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a + P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + & \\ + P_3 \cdot \sqrt{2} \cdot a = -18,375 \cdot 4a - 18 \cdot \cos 45^\circ \cdot a + 18 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3a + 15 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a + & \\ + 15 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot a = 0,008 \cdot a, \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Оскільки розмір a не може дорівнювати нулю, значить лише коефіцієнт у рівнянні (2.2) може бути рівним нулю.

$$\sum M_D = 0,008 \approx 0.$$

Величина відносної похибки складає 1%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа.

Результат рішення рівняння (2.2) не перевищує відносну похибку, отже невідомі реакції знайдені вірно.

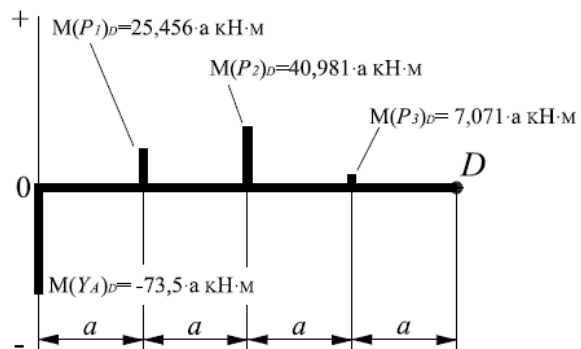


Рис. 2.2.4. Моменти активних сил та реакцій опор плоскої ферми відносно точки D

Головний момент сил та реакцій опор плоскої ферми відносно точки D дорівнює нулю.

Висновок: Так, як головний вектор та головний момент системи сил, прикладених до плоскої ферми дорівнюють нулю, то реакції її опор визначені правильно.

2. *Визначення зусиль в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів.* Стержні, що сходяться в вузлі ферми, являються для вузлового з'єднання зв'язками. Відкинемо уявно зв'язки, та замінимо їх дію на вузли реакціями. На рис. 2.2.5 зображено вузли ферми з прикладеними до них активними та реактивними силами.

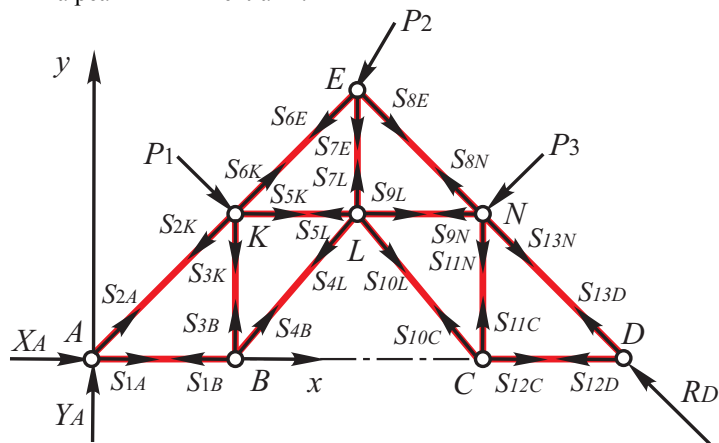


Рис. 2.2.5. Розрахункова схема плоскої ферми з прикладеними до вузлів активними та реактивними силами

Зусилля в стержні з номером i позначимо S_i . Реакцію стержня з номером i , прикладену до вузла L , позначимо S_{iL} . Для стержня, що з'єднує вузли L та N :

$$\bar{S}_{iL} = -\bar{S}_{iN}, \text{ але } S_{iL} = S_{iN} = S_i.$$

Напрямок реакцій усіх стержнів показано від вузла всередину стержня в припущенні, що стержні розтягнуті. Якщо в результаті рішення отримаємо відємну реакцію, це буде означати, що відповідний стержень стиснутий.

Для кожного вузла складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \text{ та } \sum Y_i = 0. \quad (2.3)$$

Рекомендується розглядати вузли в такій послідовності, щоб кожний раз в рівнянні (2.3) входило не більше двох невідомих.

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла A та стержнів 1, 2 (рис. 2.2.6). Невідомими є зусилля в стержнях S_{1A} , S_{2A} . Відомими є реакції опори $A - X_A$ та Y_A .

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + S_{1A} + S_{2A} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + S_{2A} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{2A} = S_2 = -\frac{Y_A}{\cos 45^\circ} = -\frac{18,375}{\cos 45^\circ} = -25,986 \text{ kH}$$

(стержень 2 – стиснутий),

$$S_{1A} = S_1 = -X_A - S_{2A} \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= -9,187 + 25,986 \cdot \cos 45^\circ = 9,188 \text{ kH}.$$

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла A силовий багатокутник (рис. 2.2.7).

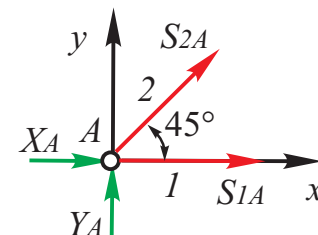


Рис. 2.2.6. Розрахункова схема вузла A

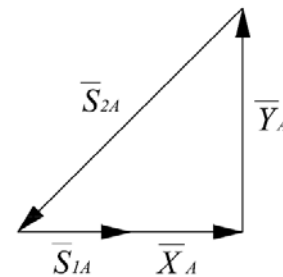


Рис. 2.2.7. Силовий багатокутник вузла A

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла B та стержнів 1, 3, 4 (рис. 2.2.8). Невідомими є зусилля стержнів S_{3B} , S_{4B} . Відомим є складова зусилля стержня S_{1B} .

$$\sum X_i = 0; \quad -S_{1B} + S_{4B} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_{3B} + S_{4B} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{4B} = S_4 = \frac{S_{1B}}{\cos 45^\circ} = \frac{9,188}{\cos 45^\circ} = 12,994 \text{ kH}$$

$$S_{3B} = S_3 = -S_{4B} \cdot \cos 45^\circ = -12,994 \cdot \cos 45^\circ = -9,188 \text{ kH},$$

(стержень 3 – стиснутий).

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла B силовий багатокутник (рис. 2.2.9).

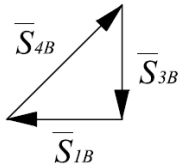


Рис. 2.2.9. Силовий багатокутник вузла B

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла K та стержнів 2, 3, 5, 6 та активної сили P_1 (рис. 2.2.10). Невідомими є зусилля стержнів S_{6K} , S_{5K} . Відомими є зусилля стержнів S_{2K} , S_{3K} та активна сила P_1 .

$$\sum X_i = 0; \quad S_{5K} + S_{6K} \cdot \cos 45^\circ + P_1 \cdot \cos 45^\circ - S_{2K} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_{6K} \cdot \cos 45^\circ - S_{3K} - P_1 \cdot \cos 45^\circ - S_{2K} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{6K} = S_6 = \frac{S_{3K} + P_1 \cdot \cos 45^\circ + S_{2K} \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{-9,188 + 18 \cdot \cos 45^\circ - 25,986 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = -20,980 \text{ kH}$$

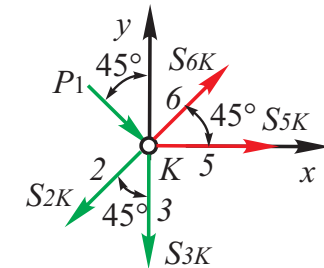


Рис. 2.2.10. Розрахункова схема вузла K

$$S_{5K} = S_5 = S_{2K} \cdot \cos 45^\circ - P_1 \cdot \cos 45^\circ - S_{6K} \cdot \cos 45^\circ = -25,986 \cdot \cos 45^\circ - 18 \cdot \cos 45^\circ + 20,980 \cdot \cos 45^\circ = -16,268 \text{ kH},$$

(стержні 5, 6 – стиснуті).

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла K силовий багатокутник (рис. 2.2.11).

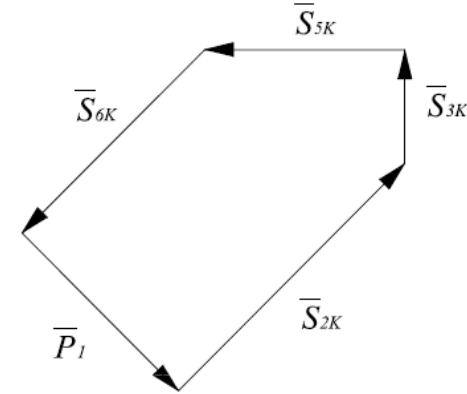


Рис. 2.2.11. Силовий багатокутник вузла K

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла E та стержнів 6, 7, 8 та активної сили P_2 (рис. 2.2.12). Невідомими є зусилля стержнів S_{7E} , S_{8E} . Відомими є зусилля стержня S_{6E} та активна сила P_2 .

$$\sum X_i = 0; \quad S_{8E} \cdot \cos 45^\circ - S_{6E} \cdot \cos 45^\circ - P_2 \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -P_2 \cdot \cos 30^\circ - S_{7E} - S_{6E} \cdot \cos 45^\circ - S_{8E} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{8E} = S_8 = \frac{S_{6E} \cdot \cos 45^\circ + P_2 \cdot \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{-20,980 \cdot \cos 45^\circ + 15 \cdot \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = -10,373 \text{ kH}$$

(стержень 8 – стиснутий),

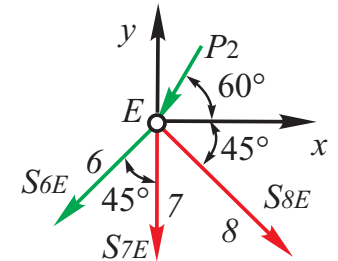


Рис. 2.2.12. Розрахункова схема вузла E

$$S_{7E} = S_7 = -P_2 \cdot \cos 30^\circ - S_{6E} \cdot \cos 45^\circ - S_{8E} \cdot \cos 45^\circ = -15 \cdot \cos 30^\circ + 20,980 \cdot \cos 45^\circ + 10,373 \cdot \cos 45^\circ = 9,18 \text{ kH}.$$

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла E силовий багатокунник (рис. 2.2.13).

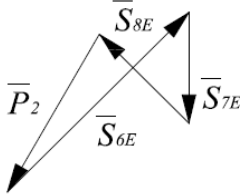


Рис. 2.2.13. Силовий багатокунник вузла E

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла L та стержнів 4, 5, 7, 9, 10 (рис. 2.2.14). Невідомими є зусилля стержнів S_{9L} , S_{10L} . Відомими є зусилля стержнів S_{4L} , S_{5L} , S_{7L} .

$$\sum X_i = 0; \quad S_{9L} - S_{5L} + S_{10L} \cdot \cos 45^\circ - S_{4L} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_{7L} - S_{10L} \cdot \cos 45^\circ - S_{4L} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{10L} = S_{10} = \frac{S_{7L} - S_{4L} \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{9,18 - 12,994 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 0$$

$$S_{9L} = S_9 = S_{5L} - S_{10L} \cdot \cos 45^\circ + S_{4L} \cdot \cos 45^\circ = -16,268 + 12,994 \cdot \cos 45^\circ = -7,074 \text{ kH},$$

(стержень 9 – стиснутий).

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла L силовий багатокунник (рис. 2.2.14).

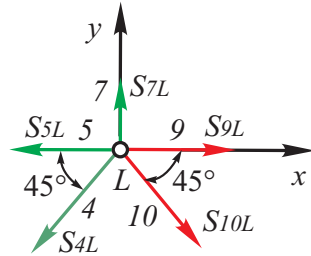


Рис. 2.2.14. Розрахункова схема вузла L

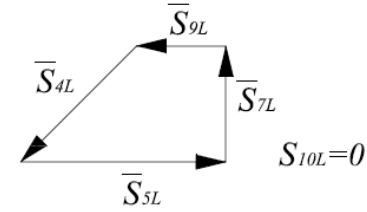


Рис. 2.2.15. Силовий багатокунник вузла L

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла N та стержнів 8, 9, 11, 13 та активної сили P_3 (рис. 2.2.16). Невідомими є зусилля стержнів S_{11N} , S_{13N} . Відомими є зусилля стержнів S_{8N} , S_{9N} та активна сила P_3 .

$$\sum X_i = 0; \quad -P_3 \cdot \cos 45^\circ - S_{9N} - S_{8N} \cdot \cos 45^\circ + S_{13N} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -P_3 \cdot \cos 45^\circ + S_{8N} \cdot \cos 45^\circ - S_{11N} - S_{13N} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{13N} = S_{13} = \frac{P_3 \cdot \cos 45^\circ + S_{9N} + S_{8N} \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{5 \cdot \cos 45^\circ - 7,074 - 10,373 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = -15,377 \text{ kH},$$

(стержень 13 – стиснутий),

$$S_{11N} = S_{11} = -P_3 \cdot \cos 45^\circ + S_{8N} \cdot \cos 45^\circ - S_{13N} \cdot \cos 45^\circ = -5 \cdot \cos 45^\circ - 10,373 \cdot \cos 45^\circ + 15,377 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла N силовий багатокунник (рис. 2.2.17).

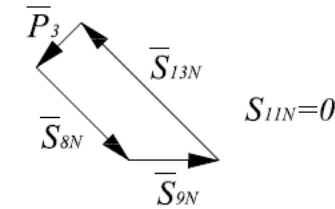


Рис. 2.2.17. Силовий багатокунник вузла N

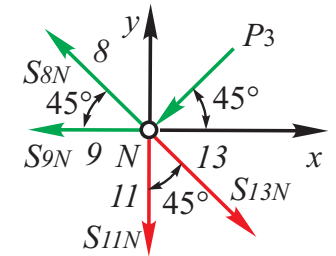


Рис. 2.2.16. Розрахункова схема вузла N

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла C та стержнів $10, 11, 12$ (рис. 2.2.18). Невідомими є зусилля стержнів S_{10C}, S_{12C} . Відомим є зусилля стержня S_{11C} .

$$\sum X_i = 0; S_{12C} - S_{10C} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; S_{11C} + S_{10C} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{12C} = S_{12} = S_{10C} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_{10C} = S_{10} = -\frac{S_{11C}}{\cos 45^\circ} = 0.$$

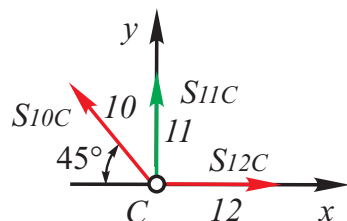


Рис. 2.2.18. Розрахункова схема вузла C

Зусилля в стержнях $10, 11, 12$ дорівнює нулю. Силевий багатокутник будувати не потрібно – система врівноважена.

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла D та стержнів $12, 13$ (рис. 2.2.19). Невідомим є зусилля стержня S_{13D} . Відомими є зусилля стержня S_{12D} та реакція опори $D - R_D$.

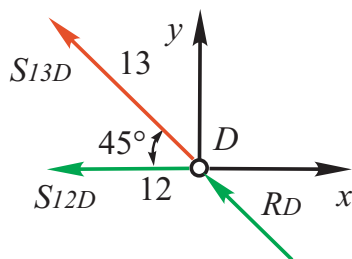


Рис. 2.2.19. Розрахункова схема вузла D

$$\sum X_i = 0; -S_{13D} \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 45^\circ - S_{12D} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; S_{13D} \cdot \cos 45^\circ + R_D \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо

$$S_{13D} = -R_D = -15,385 \text{ kH}.$$

В усіх вузлах силеві багатокутники замкнуті, що підтверджує правильність розрахунку.

Визначимо розтягнуті та стиснуті стержні ферми. Якщо зусилля S в стержні додатне, то стержень вважається розтягнутим. Якщо від'ємне – стержень стиснутий. Якщо зусилля S в стержні дорівнює нулю, то він – недеформований.

Тоді стержні $1, 4$ та 7 – розтягнуті; стержні $2, 3, 5, 6, 8, 9$ та 13 – стиснуті; стержні $10, 11$ та 12 – недеформовані.

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак зусилля S в кожному стержні (рис. 2.2.20).

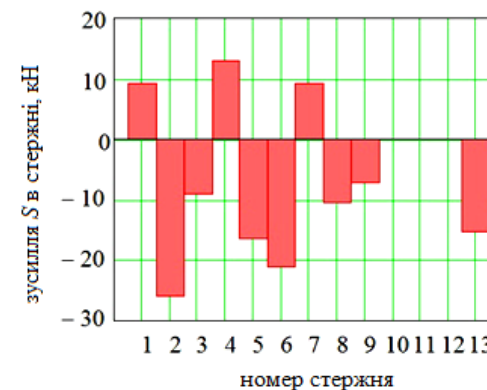


Рис. 2.2.20. Зусилля в стержнях плоскої ферми

Завдання С-3. Рівновага зчленованої системи тіл

Знайти реакції опор і тиск в проміжних шарнірах заданої конструкції, складеної з двох частин (рис. 2.3.1). На конструкцію діє навантаження: $P = 1,5 \text{ kH}$; $q_1 = q_2 = 0,2 \text{ kH/m}$; $M = 4 \text{ kH}\cdot\text{m}$; $a = 1 \text{ м}$; $\alpha = \beta = 30^\circ$.

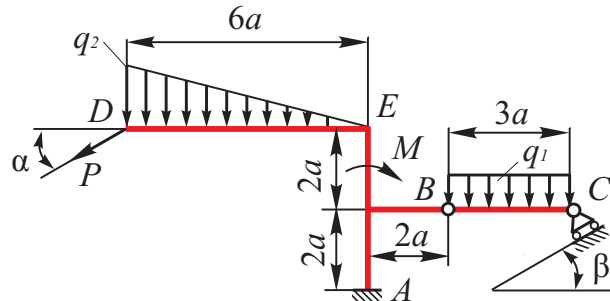


Рис. 2.3.1. Плоска зчленована конструкція

Для конструкції, зображеної на рис. 2.3.1, опорами є жорстке закріплення, розташоване в точці A та шарнірно-рухома опора в точці C . Виходячи з класифікації реакцій для типів зв'язків, розташовуємо в точці A три складові реакції – X_A , Y_A та M_A , а в точці C – реакцію R_C , перпендикулярно до площини опори (рис. 2.3.2). Рівномірно розподілене навантаження q_1 замінимо еквівалентною зосередженою силою Q_1 , а нерівномірно розподілене навантаження q_2 (розподілене по закону трикутника) замінимо еквівалентною зосередженою силою Q_2 .

$$Q_1 = q_1 \cdot 3a = 0,2 \cdot 3 = 0,6 \text{ кН}; \quad Q_2 = \frac{q_2 \cdot 6a}{2} = \frac{0,2 \cdot 6}{2} = 0,6 \text{ кН}.$$

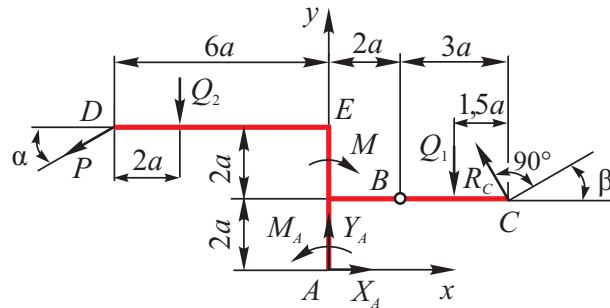
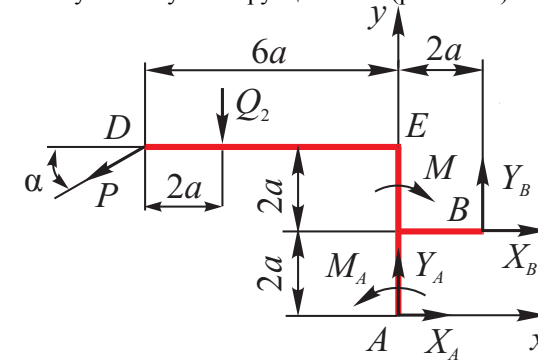


Рис. 2.3.2. Розрахункова схема конструкції

Розєднаємо конструкцію на частини (по внутрішньому шарніру B) і розглянемо рівновагу кожної частини окремо. При цьому, сили взаємодії між частинами повинні бути рівними по величині та протилежні за напрямком. Для кожної частини конструкції складемо по три рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum M_i = 0.$$

Розглянемо ліву частину конструкції $DEAB$ (рис. 2.3.3).

Рис. 2.3.3. Розрахункова схема частини конструкції $DEAB$

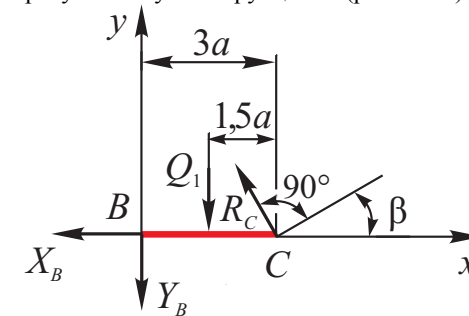
Складемо рівняння рівноваги для лівої частини конструкції:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - P \cdot \cos 30^\circ + X_B = 0; \quad (3.1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - Q_2 - P \cdot \cos 60^\circ + Y_B = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum M_B = 0; \quad X_A \cdot 2a - Y_A \cdot 2a - M + M_A + Q_2 \cdot 6a + P \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + P \cdot \cos 60^\circ \cdot 8a = 0. \quad (3.3)$$

Розглянемо праву частину конструкції BC (рис. 2.3.4).

Рис. 2.3.4. Розрахункова схема частини конструкції BC

Складемо рівняння рівноваги для правої частини конструкції:

$$\sum X_i = 0; \quad -X_B - R_C \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (3.4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_C \cdot \cos 30^\circ - Q_1 - Y_B = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum M_C = 0; \quad Q_1 \cdot 1,5a + Y_B \cdot 3a = 0. \quad (3.6)$$

Розв'язуючи рівняння (3.1–3.6) знайдемо всі невідомі реакції. З рівняння

(3.6) визначаємо складову реакції внутрішнього шарніру Y_B :

$$Y_B = -\frac{Q_1 \cdot 1,5a}{3a} = -\frac{0,6 \cdot 1,5}{3} = -0,3 \text{ кН}.$$

З рівняння (3.2) визначаємо складову невідомої реакції жорсткого закріплення Y_A :

$$Y_A = Q_2 + P \cdot \cos 60^\circ - Y_B = 0,6 + 1,5 \cdot \cos 60^\circ + 0,3 = 1,65 \text{ кН}.$$

Реакцію шарнірно-рухомої опори R_C визначаємо з рівняння (3.5):

$$R_C = \frac{Y_B + Q_1}{\cos 30^\circ} = \frac{-0,3 + 0,6}{\cos 30^\circ} = 0,346 \text{ кН}.$$

Розв'язуючи рівняння (3.4) визначимо другу складову реакції внутрішнього шарніру X_B :

$$X_B = -R_C \cdot \cos 60^\circ = -0,346 \cdot \cos 60^\circ = -0,173 \text{ кН}.$$

З рівнянь (3.1) та (3.3) визначаємо складові невідомої реакції жорсткого закріплення X_A та M_A відповідно:

$$X_A = P \cdot \cos 30^\circ - X_B = 1,5 \cdot \cos 30^\circ + 0,173 = 1,472 \text{ кН};$$

$$M_A = -X_A \cdot 2a + Y_A \cdot 2a + M - Q_2 \cdot 6a - P \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a - P \cdot \cos 60^\circ \cdot 8a = \\ = -1,472 \cdot 2 + 1,65 \cdot 2 + 4 - 0,6 \cdot 6 - 1,5 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 - 1,5 \cdot \cos 60^\circ \cdot 8 = -7,842 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для перевірки результатів рішення побудуємо силові багатокутники для обох частин конструкції $DEAB$ (рис. 2.3.5) та BC (рис. 2.3.6).

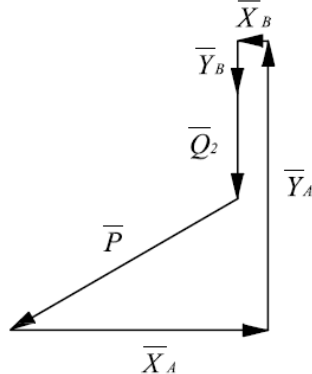


Рис. 2.3.5. Силовий багатокутник частини конструкції $DEAB$

Особливості побудови векторів сил, в системі *Autocad*, детально наведено в завданні С-1.

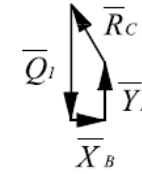


Рис. 2.3.6. Силовий багатокутник частини конструкції BC

Силіві багатокутники для обох частин конструкції замкнені, отже головні вектори підсистем дорівнюють нулю. Як наслідок, проєкції головних векторів на осі координат також дорівнюють нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Для додаткової перевірки правильності розрахунків, виконаємо побудову моментів активних сил та реакцій опор для обох частин конструкції.

Для частини конструкції $DEAB$, виконаємо перевірку відносно лівої опори (точки A), тобто, в точці прикладання кожної сили побудуємо величину її моменту, відносно вказаної опори (рис. 2.3.7).

Якщо невідомі реакції знайдено вірно, то сума моментів усіх сил відносно точки A повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-M + M_A + Q_2 \cdot 4a - X_B \cdot 2a + Y_B \cdot 2a + P \cdot \cos 60^\circ \cdot 6a + P \cdot \cos 30^\circ \cdot 4a = \\ = -4 - 7,842 + 0,6 \cdot 4 + 0,173 \cdot 2 - 0,3 \cdot 2 + 1,5 \cdot \cos 60^\circ \cdot 6 + 1,5 \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 = 0.$$

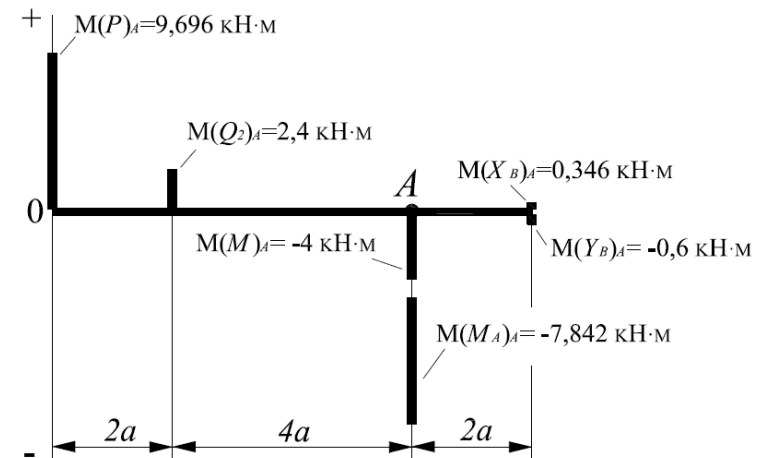


Рис. 2.3.7. Моменти активних сил та реакцій опор частини $DEAB$ відносно точки A

Для частини конструкції BC , виконаємо перевірку відносно лівої опори (точки B), тобто, в точці прикладання кожної сили побудуємо величину її моменту, відносно зазначеної опори (рис. 2.3.8).

Якщо невідомі реакції знайдено вірно, то сума моментів усіх сил відносно точки B повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\sum M_B = 0; \\ -Q_1 \cdot 1,5a + R_C \cdot \cos 30^\circ \cdot 3a = -0,6 \cdot 1,5 + 0,346 \cdot \cos 30^\circ \cdot 3 = -0,001 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (3.7)$$

Величина відносної похибки складає 0,11%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа. Результат рішення рівняння (3.7) не перевищує відносну похибку, отже невідомі реакції знайдено вірно.

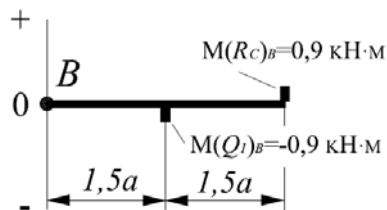


Рис. 2.3.8. Моменти активних сил та реакцій опор частини BC відносно точки B

Моменти активних сил та реакцій опор для обох частин конструкції відносно зазначених точок дорівнюють нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Для контрольної перевірки розрахунків побудуємо силовий багатокутник для всієї конструкції, вважаючи її суцільною (рис. 2.3.9).

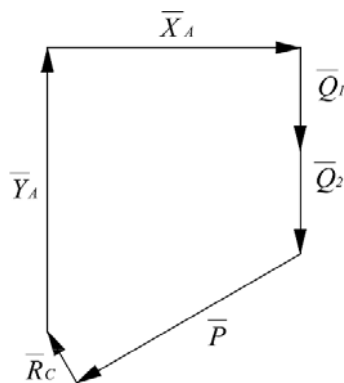


Рис. 2.3.9. Силовий багатокутник суцільної конструкції

Силовий багатокутник замкнений, отже головний вектор системи сил, прикладеної до суцільної конструкції дорівнює нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Також для суцільної конструкції, виконаємо побудову моментів активних сил та реакцій опор відносно точки D (рис. 2.3.10).

Якщо невідомі реакції знайдено правильно, то сума моментів усіх сил відносно точки D повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\sum M_D = 0; \\ -Q_2 \cdot 2a - M + Y_A \cdot 6a + X_A \cdot 4a + M_A - Q_1 \cdot 9,5a + R_C \cdot \cos 30^\circ \cdot 11a - \\ - R_C \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a = -0,6 \cdot 2 - 4 + 1,65 \cdot 6 + 1,472 \cdot 4 - 7,842 - \\ - 0,6 \cdot 9,5 + 0,346 \cdot \cos 30^\circ \cdot 11 - 0,346 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 = -0,004 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (3.8)$$

Величина відносної похибки складає 0,04%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа. Результат рішення рівняння (3.8) не перевищує відносну похибку, отже невідомі реакції знайдено вірно.

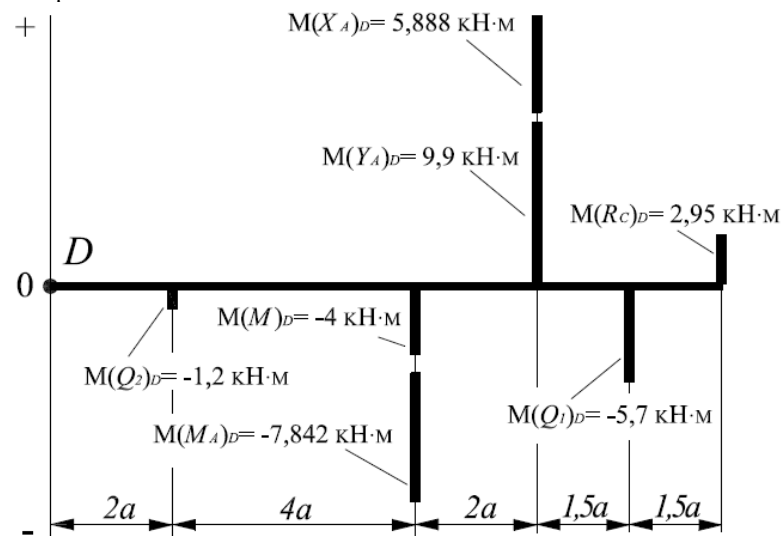


Рис. 2.3.10. Моменти активних сил та реакцій опор суцільної конструкції відносно точки D

Алгебраїчна сума моментів усіх активних сил та реакцій опор для суцільної конструкції відносно точки D дорівнює нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Завдання С-4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду

До вершин прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.4.1) прикладене навантаження: $P_1 = 100$ кН; $P_2 = 50$ кН; $P_3 = 80$ кН; $P_4 = 10$ кН; $M = 50$ кН·м; $a = 0,3$ м; $b = 0,4$ м; $c = 0,5$ м. Привести просторову систему довільно розташованих сил до простішого виду.

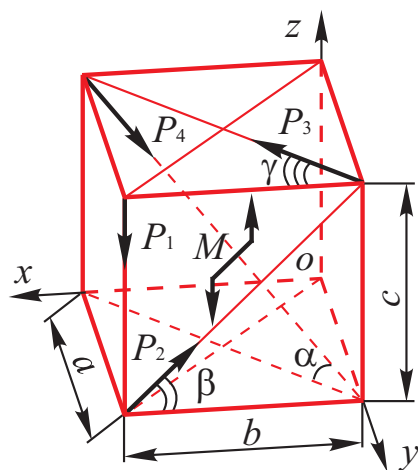


Рис. 2.4.1. Просторова система довільно розташованих сил з центром O

Попередньо визначимо кути нахилу діагоналей граней паралелепіпеда – α , β та γ . Кут α – це кут нахилу діагоналі паралелепіпеда до його основи. Кут β – це кут нахилу діагоналі бічної грані до осі x . Кут γ – це кут нахилу діагоналі основи паралелепіпеда до осі x .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{0,3^2 + 0,4^2}} = 1; \Rightarrow \alpha = \arctg(1) = 45^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{b} = \frac{0,5}{0,4} = 1,25; \Rightarrow \beta = \arctg(1,25) = 51,34^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75; \Rightarrow \gamma = \arctg(0,75) = 36,87^\circ.$$

Проекція вектора моменту M на горизонтальну площину (основу паралелепіпеда) представлена на рис. 2.4.2.

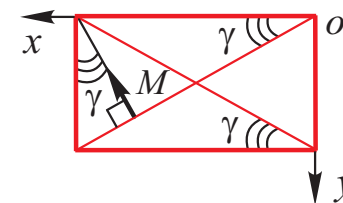


Рис. 2.4.2. Проекція вектора моменту M на горизонтальну площину

Визначаємо проекції головного вектора R^* заданої системи сил на осі координат:

$$\begin{aligned} R_x &= P_3 \cdot \cos \gamma - P_2 \cdot \cos \beta - P_4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma = \\ &= 80 \cdot \cos \gamma - 50 \cdot \cos \beta - 10 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma = 27,108 \text{ кН}; \\ R_y &= -P_3 \cdot \sin \gamma + P_4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma = -80 \cdot \sin \gamma + 10 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma = -43,757 \text{ кН}; \\ R_z &= -P_1 + P_2 \cdot \sin \beta - P_4 \cdot \sin \alpha = -100 + 50 \cdot \sin \beta - 10 \cdot \sin \alpha = -68,028 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Модуль головного вектора R^* :

$$R^* = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{27,108^2 + (-43,757)^2 + (-68,028)^2} = 85,307 \text{ кН}.$$

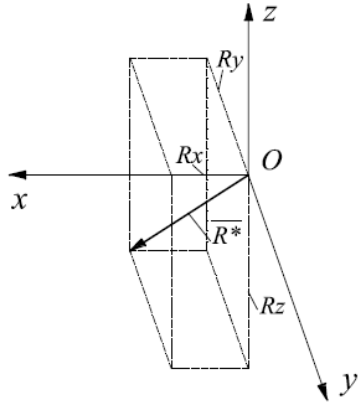
Визначимо кути нахилу головного вектора системи R^* до координатних вісей x , y , z (направляючі косинуси):

$$\cos(R^*, i) = \frac{R_x}{R^*} = \frac{27,108}{85,307} = 0,3178;$$

$$\cos(R^*, j) = \frac{R_y}{R^*} = \frac{-43,757}{85,307} = -0,5129;$$

$$\cos(R^*, k) = \frac{R_z}{R^*} = \frac{-68,028}{85,307} = -0,7974.$$

Виконаємо побудову головного вектора R^* заданої системи сил. Для цього, вибираємо систему координатних вісей $Oxyz$. Відкладаємо, в довільно вибраному масштабі, відрізки проекцій головного вектора R^* вздовж координатних вісей (з урахуванням знаку проекції), будемо прямокутний паралелепіпед. Направлена діагональ, проведена з початку координат в протилежну вершину паралелепіпеда, визначає головний вектора R^* заданої системи сил (рис. 2.4.3).

Рис. 2.4.3. Головний вектор R^* заданої системи сил

Обчислимо головні моменти заданої системи сил відносно координатних вісей:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -P_1 \cdot a + P_2 \cdot \sin \beta \cdot a + P_3 \cdot \sin \gamma \cdot c - P_4 \cdot \sin \alpha \cdot a + M \cdot \sin \gamma = \\
 &= -100 \cdot 0,3 + 50 \cdot \sin \beta \cdot 0,3 + 80 \cdot \sin \gamma \cdot 0,5 - 10 \cdot \sin \alpha \cdot 0,3 + 50 \cdot \sin \gamma = 33,594 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_y &= P_1 \cdot b - P_2 \cdot \sin \beta \cdot b + P_3 \cdot \cos \gamma \cdot c - M \cdot \cos \gamma = \\
 &= 100 \cdot 0,4 - 50 \cdot \sin \beta \cdot 0,4 + 80 \cdot \cos \gamma \cdot 0,5 - 50 \cdot \cos \gamma = 16,38 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_z &= P_2 \cdot \cos \beta \cdot a - P_3 \cdot \cos \gamma \cdot a + P_4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot b = \\
 &= 50 \cdot \cos \beta \cdot 0,3 - 80 \cdot \cos \gamma \cdot 0,3 + 10 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot 0,4 = -8,128 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

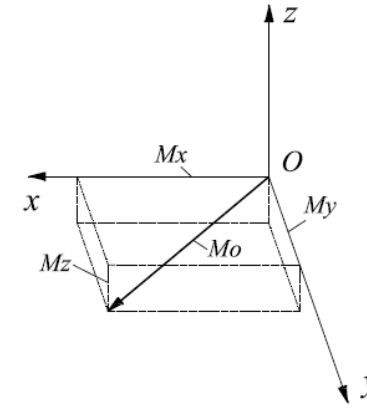
Модуль головного моменту системи сил відносно центру O :

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{33,594^2 + 16,38^2 + (-8,128)^2} = 38,248 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначимо кути нахилу головного моменту системи сил M_o до координатних вісей x, y, z (направляючі косинуси):

$$\begin{aligned}
 \cos(M_o, i) &= \frac{M_x}{M_o} = \frac{33,594}{38,248} = 0,878; \\
 \cos(M_o, j) &= \frac{M_y}{M_o} = \frac{16,38}{38,248} = 0,428; \\
 \cos(M_o, k) &= \frac{M_z}{M_o} = \frac{-8,128}{38,248} = -0,213.
 \end{aligned}$$

Виконаємо побудову головного моменту системи сил M_o відносно центру O аналогічно побудові головного вектора R^* заданої системи сил (рис. 2.4.4).

Рис. 2.4.4. Головний момент системи сил M_o відносно центру O

Обчислимо найменший головний момент M^* заданої системи сил:

$$\begin{aligned}
 M^* &= (R_x \cdot M_x + R_y \cdot M_y + R_z \cdot M_z) / R^* = \\
 &= \frac{(27,108 \cdot 33,594 - 43,757 \cdot 16,38 + 68,028 \cdot 8,128)}{85,307} = 8,755 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

Так як $R^* \neq 0$, та $M^* \neq 0$, то задана система сил приводиться до простішого виду – динами (силового гвинта) (рис. 2.4.5).

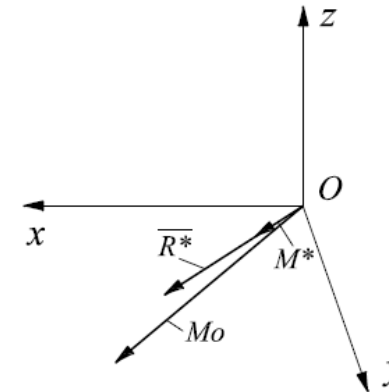


Рис. 2.4.5. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду – динами (силового гвинта)

Для виконання перевірки правильності розрахунків необхідно визначити розташування центральної вісі системи. Рівняння центральної вісі системи має наступний вигляд:

$$\frac{M_x - (y \cdot R_z - z \cdot R_y)}{R_x} = \frac{M_y - (z \cdot R_x - x \cdot R_z)}{R_y} = \frac{M_z - (x \cdot R_y - y \cdot R_x)}{R_z} = \frac{M^*}{R^*}.$$

З цих трьох рівнянь незалежними є тільки два рівняння. Підставляючи в будь-які два з цих рівнянь знайдені величини, отримаємо спрощені рівняння центральної вісі системи:

$$\frac{M_x - (y \cdot R_z - z \cdot R_y)}{R_x} = \frac{M^*}{R^*}; \quad 2,51 \cdot y - 1,614 \cdot z = -1,136;$$

$$\frac{M_y - (z \cdot R_x - x \cdot R_z)}{R_y} = \frac{M^*}{R^*}; \quad 0,62 \cdot z + 1,555 \cdot x = 0,477.$$

Знайдемо точки перетину центральної вісі з координатними площинами.

– Перетин з площиною yOz ($x_1=0$) – точка A_1 :

$$0,62 \cdot z_1 = 0,477; \quad z_1 = \frac{0,477}{0,62} = 0,769 \text{ м,}$$

$$2,51 \cdot y_1 - 1,614 \cdot z_1 = -1,136; \quad y_1 = \frac{-1,136 + 1,614 \cdot z_1}{2,51} = 0,0419 \text{ м.}$$

– Перетин з площиною zOx ($y_2=0$) – точка A_2 :

$$-1,614 \cdot z_2 = -1,136; \quad z_2 = \frac{-1,136}{-1,614} = 0,704 \text{ м,}$$

$$0,62 \cdot z_2 + 1,555 \cdot x_2 = 0,477; \quad x_2 = \frac{0,477 - 0,62 \cdot z_2}{1,555} = 0,026 \text{ м.}$$

– Перетин з площиною xOy ($z_3=0$) – точка A_3 :

$$1,555 \cdot x_3 = 0,477; \quad x_3 = \frac{0,477}{1,555} = 0,307 \text{ м,}$$

$$2,51 \cdot y_3 = -1,136; \quad y_3 = \frac{-1,136}{2,51} = -0,453 \text{ м.}$$

Отже, центральна вісь буде перетинатися з координатними площинами в наступних точках – $A_1(0; 0,0419; 0,769)$, $A_2(0,026; 0; 0,704)$ та $A_3(0,307; -0,453; 0)$. Побудову центральної вісі системи представлено на рис. 2.4.6.

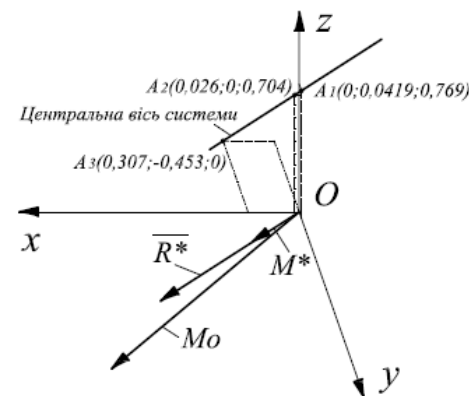


Рис. 2.4.6. Побудова центральної вісі системи

Так як головний вектор паралельний центральній вісі системи, отже отриманий розв'язок є вірним.

Завдання С-5. Рівновага просторової системи довільно розташованих сил

До просторової конструкції (рис. 2.5.1) прикладене навантаження: $G = 8 \text{ кН}$; $P = 2 \text{ кН}$; $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Розміри складають: $AB = DC = 1,8 \text{ м}$; $AD = BC = 1 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$. $\vec{P} \parallel Ay$; $\vec{G} \parallel Az$; $\vec{M} \parallel AC$. Визначити реакції в опорах конструкції.

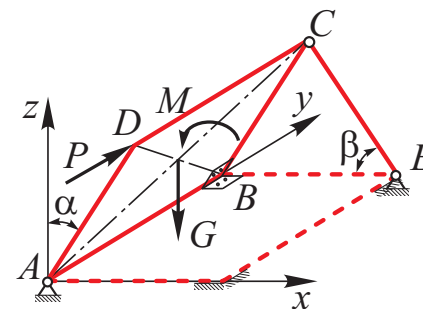


Рис. 2.5.1. Схема просторової конструкції

До рами $ABCD$ прикладені сила тяжіння G , сила P , реакція S стержня CE та реакції опор в точках A та B . Реакція шарніру A визначається трьома складовими: X_A , Y_A , Z_A , а реакція петлі B двома: X_B , Z_B (рис. 2.5.2).

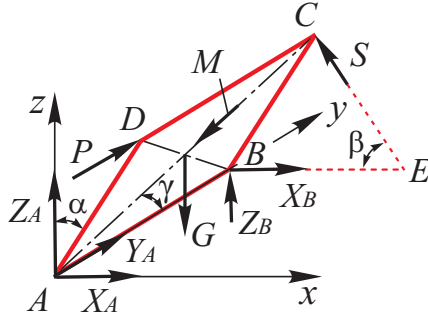


Рис. 2.5.2. Розрахункова схема просторової конструкції

Попередньо визначимо кут γ – кут нахилу діагоналі AC до основи рами.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1,8} = 0,556; \Rightarrow \gamma = \arctg(0,556) = 29,07^\circ.$$

З перерахованих сил – шість є невідомими. Для їх визначення можна скласти шість рівнянь рівноваги.

Рівняння моментів сил відносно координатних вісей:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -P \cdot AD \cdot \cos \alpha - G \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB + S \cdot AB \cdot \sin \beta = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad G \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin \alpha - S \cdot BC \cdot \sin \beta - M \cdot \cos \gamma = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{iz} = 0; \quad P \cdot AD \cdot \sin \alpha + S \cdot AB \cdot \cos \beta - X_B \cdot AB - M \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Рівняння проекцій сил на осі координат:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cdot \cos \beta = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A + Z_B - G + S \cdot \sin \beta = 0. \quad (6)$$

Кількість невідомих, не перевищує число можливих рівнянь рівноваги, отже задача є статично вирішуваною.

З рівняння (2) визначимо реакцію S стержня CE :

$$S = \frac{G \cdot BC/2 \cdot \sin \alpha - M \cdot \cos \gamma}{BC \cdot \sin \beta} = \frac{8 \cdot 1/2 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot \cos 29,07^\circ}{1 \cdot \sin 60^\circ} = -7,783 \text{ kH}.$$

Розв'язуючи рівняння (1) знайдемо складову реакції петлі Z_B :

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{P \cdot AD \cdot \cos \alpha + G \cdot AB/2 - S \cdot AB \cdot \sin \beta}{AB} = \\ &= \frac{2 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ + 8 \cdot 1,8/2 + 7,783 \cdot 1,8 \cdot \sin 60^\circ}{1,8} = 11,702 \text{ kH}. \end{aligned}$$

З рівняння (3) визначимо складову реакції петлі X_B :

$$\begin{aligned} X_B &= \frac{P \cdot AD \cdot \sin \alpha + S \cdot AB \cdot \cos \beta - M \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha}{AB} = \\ &= \frac{2 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ - 7,783 \cdot 1,8 \cdot \cos 60^\circ - 10 \cdot \sin 29,07^\circ \cdot \cos 30^\circ}{1,8} = -5,673 \text{ kH}. \end{aligned}$$

З рівняння (4) визначимо складову реакції шарніру X_A :

$$X_A = S \cdot \cos \beta - X_B = -7,783 \cdot \cos 60^\circ + 5,673 = 1,782 \text{ kH}.$$

Розв'язуючи рівняння (5) знайдемо складову реакції шарніру Y_A :

$$Y_A = -P = -2 \text{ kH}.$$

З рівняння (6) визначимо складову реакції шарніру Z_A :

$$Z_A = -Z_B + G + S \cdot \sin \beta = -11,702 + 8 + 7,783 \cdot \sin 60^\circ = 3,038 \text{ kH}.$$

Для перевірки правильності рішення побудуємо, в системі *Autocad*, головний вектор – геометричну суму системи сил, що діє на просторову конструкцію. Особливості побудови детально наведено в завданні С–1. Однак, з огляду на те, що поточна задача задана у просторі, потрібно побудувати два головних вектори сил. Наприклад, побудуємо проекції головного вектору сил в площині zAx (рис. 2.5.3, а) та в площині zAy (рис. 2.5.3, б).

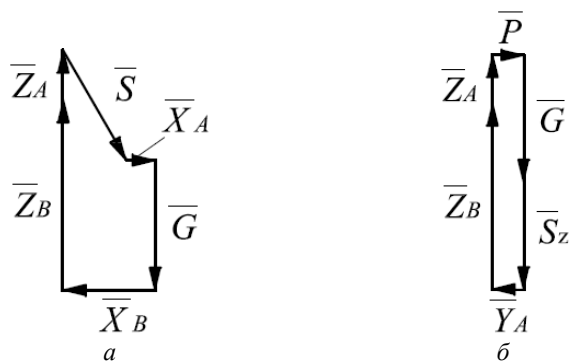


Рис. 2.5.3. Силувий багатокутник просторової конструкції:
а – площина zAx ; б – площина zAy

Силувий багатокутник обох отриманих результатів замкнений, отже їх вектор системи дорівнює нулю. Як наслідок і його проекції на вісі координат також дорівнюють нулю.

Для додаткової перевірки правильності розрахунків, виконаємо побудову моментів активних сил та реакцій опор просторової конструкції відносно координатних вісей, перпендикулярних площині zAx (рис. 2.5.4) та площині zAy (рис. 2.5.5).

$$\begin{aligned}\sum M_{Ay} &= G \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin \alpha - S \cdot BC \cdot \sin \beta - M \cdot \cos \gamma = \\ &= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 30^\circ + 7,783 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ - 10 \cdot \cos 29,07^\circ = 2 + 6,74 - 8,74 = 0; \\ \sum M_{Ax} &= -P \cdot AD \cdot \cos \alpha - G \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB + S \cdot AB \cdot \sin \beta = \\ &= -2 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ - 8 \cdot \frac{1,8}{2} + 11,702 \cdot 1,8 - 7,783 \cdot 1,8 \cdot \sin \beta = -1,732 - 7,2 + 21,064 - 12,132 = 0.\end{aligned}$$

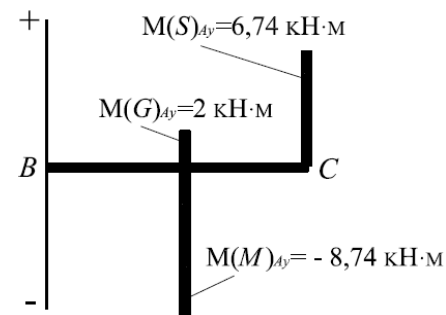


Рис. 2.5.4. Моменти активних сил та реакцій опор просторової конструкції відносно координатної вісі Ay

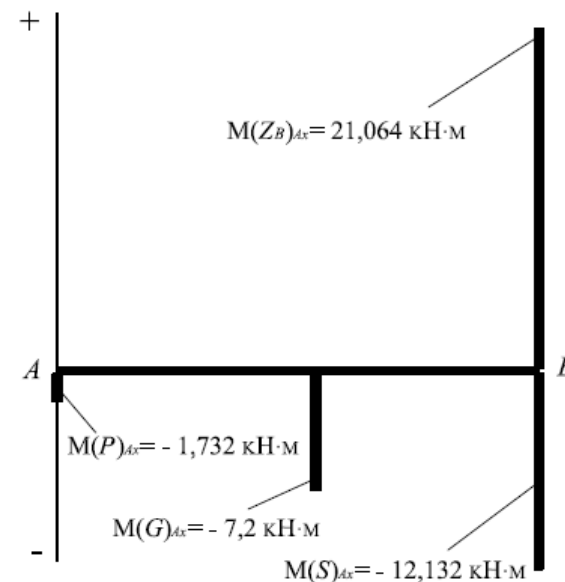


Рис. 2.5.5. Моменти активних сил та реакцій опор просторової конструкції відносно координатної вісі Ax

Алгебраїчна сума моментів усіх активних сил та реакцій опор просторової конструкції відносно координатних вісей Ay (рис. 2.5.4) та Ax (рис. 2.5.5) дорівнює нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Завдання С-6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури

Визначити положення центра тяжіння плоскої фігури (рис. 2.6.1). Розміри вказані на рис. в міліметрах.

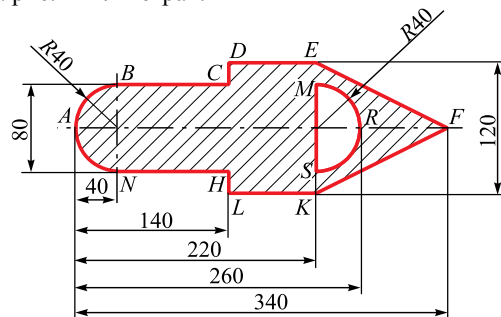


Рис. 2.6.1. Плоска фігура

Координати центру тяжіння плоскої фігури визначаються за наступними формулами:

$$x_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_x}{F}, \quad (6.1)$$

де $S_x = \sum F_i y_i$, $S_y = \sum F_i x_i$ – статичні моменти фігури відносно координатних вісей x та y , F_i – площа фігури.

Дана фігура має вісь симетрії – вісь Ox . Отже, її центр тяжіння знаходиться на цій осі, тобто координату центра тяжіння по осі y знаходити не потрібно.

Для того, щоб скористатися формулами (6.1), розбиваємо плоску фігуру на частини, для яких відомі, або легко визначаються площі F_i та координати центрів тяжіння x_i та y_i .

В даному випадку в якості таких частин приймаємо півколо ABN , прямокутник $BCHN$, прямокутник $DEKL$, трикутник EFK та півколо MRS (рис. 2.6.2). Площу півкола MRS , будемо вважати від'ємною, так як це півколо вирізане з заданої плоскої фігури.

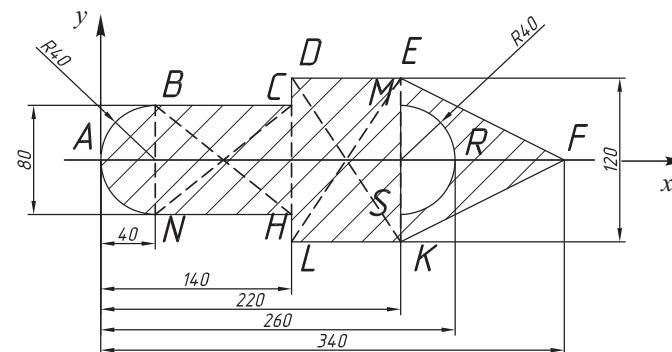


Рис. 2.6.2. Плоска фігура, що складається з простих фігур

Визначимо положення центру тяжіння кожної частини фігури. Відстань центрів тяжіння однакових площ півкол ABN та MRS від їх геометричних центрів знайдемо за формулою:

$$x_{C_{ABN}} = x_{C_{MRS}} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = 1,6985 \text{ см.}$$

Координата центру тяжіння прямокутника знаходиться в точці перетину його діагоналей.

Центр тяжіння площі трикутника EFK знаходиться в точці перетину його медіан, – на відстані однієї третьої сторони EK .

Визначимо відстань від початку координат до координати центру тяжіння кожної з простих фігур:

$$x_{ABN} = R40 - x_{C_{ABN}} = 4 - 1,6985 = 2,3015 \text{ см};$$

$$x_{BCHN} = R40 + \frac{BC}{2} = 4 + \frac{10}{2} = 9 \text{ см};$$

$$x_{DEKL} = R40 + BC + \frac{DE}{2} = 4 + 10 + \frac{8}{2} = 18 \text{ см};$$

$$x_{EFK} = R40 + BC + DE + \frac{1}{3} \cdot EF \cos 30^\circ = 4 + 10 + 8 + \frac{12}{3} = 26 \text{ см};$$

$$x_{MRS} = R40 + BC + DE + x_{C_{ABN}} = 4 + 10 + 8 + 1,6985 = 23,6985 \text{ см};$$

Визначимо площі всіх частин фігури:

$$F_{ABN} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 25,12 \text{ см}^2;$$

$$F_{BCHN} = BC \cdot CH = 10 \cdot 8 = 80 \text{ см}^2;$$

$$F_{DEKL} = DE \cdot KL = 8 \cdot 12 = 96 \text{ см}^2;$$

$$F_{EFK} = \frac{1}{2} \cdot EK \cdot EF \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 \text{ см}^2;$$

$$F_{MRS} = -\frac{\pi \cdot R^2}{2} = -\frac{\pi \cdot 4^2}{2} = -25,12 \text{ см}^2.$$

Площа всієї фігури :

$$F = F_{ABN} + F_{BCHN} + F_{DEKL} + F_{EFK} + F_{MRS} = 25,12 + 80 + 96 + 72 - 25,12 = 248 \text{ см}^2.$$

Визначимо статичний момент фігури відносно осі Oy:

$$S_y = F_{ABN} \cdot x_{ABN} + F_{BCHN} \cdot x_{BCHN} + F_{DEKL} \cdot x_{DEKL} + F_{EFK} \cdot x_{EFK} + F_{MRS} \cdot x_{MRS} =$$

$$= 25,12 \cdot 2,3015 + 80 \cdot 9 + 96 \cdot 18 + 72 \cdot 26 - 25,12 \cdot 23,6985 = 3782,5508 \text{ см}^3.$$

Тоді шукана координата центру тяжіння:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{3782,5508}{248} = 15,252 \text{ см}.$$

Перевірку розрахунків виконаємо у системі «Autocad». Будемо плоску фігуру, та в властивостях елемента визначаємо координати центру тяжіння фігури. Результати побудови фігури в системі «Autocad» наведено на рис. 2.6.3.

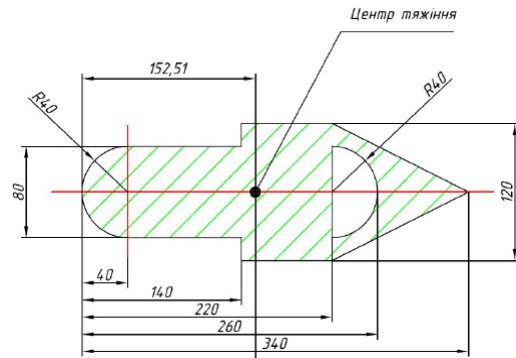


Рис. 2.6.3. Побудова плоскої фігури в системі «Autocad»

Так як координати центру тяжіння співпадають з розрахунковими – розв'язок є правильним.

Література

1. **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики : в 2 т. [Текст] / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Лань, 2009. – 736 с.
2. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики. Статика и кинематика [Текст] / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – СПб. : Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.
3. **Павловський, М. А.** Теоретична механіка [Текст] / М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2002.
4. **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для вузов по дисциплине "Теоретическая механика" [Текст] / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – СПб. : Лань, 2008. – 448 с.
5. **Яблонский, А. А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / А. А. Яблонский. – М. : КноРус, 2010. – 400 с.
6. **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики [Текст] / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2010. – 416 с.
7. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика. [Текст] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – СПб. : Лань, 2010. – 672 с.

Зміст

Глава перша - Розрахунково-графічні завдання

Завдання С1 - РІВНОВАГА ТІЛА ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ	3
Завдання С2 - РОЗРАХУНОК РЕАКЦІЙ ОПОР ТА СИЛ В СТРИЖНЯХ ПЛОСКОЇ ФЕРМИ МЕТОДОМ ВИРІЗАННЯ ВУЗЛІВ.....	7
Завдання С3 - РІВНОВАГА ЗЧЛЕНОВАНОЇ СИСТЕМИ ТІЛ.....	11
Завдання С4 - ПРИВЕДЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ ДОВІЛЬНО РОЗТАШОВАНИХ СИЛ ДО ПРОСТІШОГО ВИДУ.....	15
Завдання С5 - РІВНОВАГА ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ ДОВІЛЬНО РОЗТАШОВАНИХ СИЛ.....	19
Завдання С6 - ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРУ ТЯЖІННЯ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ.....	23

Глава друга - Рішення РГЗ аналітичним методом

Завдання С1 - РІВНОВАГА ТІЛА ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ	27
Завдання С2 - РОЗРАХУНОК РЕАКЦІЙ ОПОР ТА СИЛ В СТРИЖНЯХ ПЛОСКОЇ ФЕРМИ МЕТОДОМ ВИРІЗАННЯ ВУЗЛІВ.....	30
Завдання С3 - РІВНОВАГА ЗЧЛЕНОВАНОЇ СИСТЕМИ ТІЛ.....	40
Завдання С4 - ПРИВЕДЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ ДОВІЛЬНО РОЗТАШОВАНИХ СИЛ ДО ПРОСТІШОГО ВИДУ.....	47
Завдання С5 - РІВНОВАГА ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ ДОВІЛЬНО РОЗТАШОВАНИХ СИЛ.....	52
Завдання С6 - ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРУ ТЯЖІННЯ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ.....	57
Література.....	60