

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

А. Н. Кузнецов

РЕШЕБНИК ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
"Дифференциальные уравнения"

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений*

Николаев 2006

УДК 517.91 (075.8)

ББК 22.1

К 89

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, лист № 14/18.2–1895 от 08.08.2005.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор А.А. Мочалов;

доктор физико-математических наук, профессор И.А. Муленко

Кузнецов А.Н.

К 89 Решебник задач по теме "Дифференциальные уравнения". – Николаев: НУК, 2006. – 312 с.

ISBN 966–321–068–0

Содержатся решения около 450 задач по теме "Дифференциальные уравнения" известного "Сборника задач по курсу математического анализа" автора Г.Н. Бермана.

Предназначен для студентов-иностранцев, молодых преподавателей и всех тех, кто интересуется методами решения задач по дифференциальным уравнениям.

УДК 517.91 (075.8)

ББК 22.1

© Кузнецов А.Н., 2006

© Издательство НУК, 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальные уравнения в курсе математики и в ее приложениях занимают особо важное место. С их помощью решаются многие задачи геометрии, механики, физики и техники. Поэтому на практических занятиях должно быть уделено достаточно времени составлению дифференциальных уравнений, особенно инженерно-технических задач, выработке умений и навыков решения таких задач.

Данное пособие ставит своей целью помочь студенту в решении задач по дифференциальным уравнениям из наиболее популярного "Сборника задач по математическому анализу" Г.Н. Бермана, а молодому преподавателю выбрать задачи, наиболее подходящие для данной группы студентов и их специальности. Разумеется, нельзя обходиться только одним задачником. В конце пособия приводится список наиболее распространенной литературы по данному вопросу.

Важную и трудоемкую работу по рецензированию пособия проделала доцент кафедры Т.А. Юрченко. Ей принадлежит решение задачи 336 (4236) и указанные вторые способы решения в ряде других задач. Решение задачи 250 (4150) представил доцент Л.Л. Вербицкий, задачу 428 (4328) – старший преподаватель А.В. Варшамов, 443 (4343) – старший преподаватель М.Б. Бондаренко.

Большую помощь при подготовке рукописи к печати оказали старшие преподаватели А.Г. Иванова и Н.А. Руденко.

Всем названным лицам автор приносит свою искреннюю благодарность.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнения с разделяющимися переменными

В задачах 1 (3901)–12 (3910) найти общие решения дифференциальных уравнений.

1 (3901). $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

Решение

$$x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0 \Rightarrow \frac{x}{1 - x^2} dx + \frac{y}{y^2 + 1} dy = 0; \int \frac{x dx}{1 - x^2} +$$

$$+ \int \frac{y dy}{y^2 + 1} = \ln c_1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + \frac{1}{2} \ln (y^2 + 1) = \ln c_1 \quad (c_1 > 0);$$

$$\ln \frac{y^2 + 1}{|1 - x^2|} = \ln c_1^2 \Rightarrow y^2 + 1 = \pm c_1^2 (1 - x^2) \Rightarrow \underline{\underline{y^2 + 1 = c (1 - x^2)}} \quad (c = \pm c_1^2).$$

2 (3902). $xyy' = 1 - x^2$.

Решение

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \Rightarrow y dy = \frac{1 - x^2}{x} dx; \int y dy = \int \frac{1 - x^2}{x} dx + c_1 \Rightarrow \frac{y^2}{2} =$$

$$= \ln |x| - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln c \quad \left(c > 0, c_1 = \frac{1}{2} \ln c \right); \underline{\underline{x^2 + y^2 = \ln c x^2}}.$$

3 (3903). $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$.

Решение

$$y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - 2x \Rightarrow y^2 dy = (1 - 2x) dx; \int y^2 dy = \int (1 - 2x) dx + c_1 \Rightarrow \frac{y^3}{3} =$$

$$= x - x^2 + c_1; y^3 = 3x - 3x^2 + c \quad (c = 3c_1) \Rightarrow \underline{\underline{y = \sqrt[3]{c + 3x - 3x^2}}}.$$

4 (3904). $y' \operatorname{tg} x - y = a$.

Решение

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \operatorname{tg} x - y = a &\Rightarrow \frac{dy}{y+a} = \frac{dx}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y+a} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} + c_1; \ln |y+a| = \\ &= \ln |\sin x| + \ln c_0 \quad (\ln c_0 = c_1, \quad c_0 > 0); |y+a| = c_0 |\sin x| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{\underline{y = c \sin x - a}} \quad (c = \pm c_0). \end{aligned}$$

5 (3905). $xy' + y = y^2$.

Решение

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dx} + y = y^2 &\Rightarrow \frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}; \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} + c_1 \Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} - \\ &- \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c_1; \ln |y-1| - \ln |y| = \ln |x| + \ln c_0 \quad (c_1 = \ln c_0, \quad c_0 > 0); \\ \left| \frac{y-1}{y} \right| &= c_0 |x| \Rightarrow y = \underline{\underline{\frac{1}{1+cx}}} \quad (c = \pm c_0). \end{aligned}$$

6 (3906). $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$.

Решение

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0 &\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_1; \arcsin x + \arcsin y = \\ &= \arcsin c \quad (\arcsin c = c_1); \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) = \arcsin c; \\ \underline{\underline{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c.}} \end{aligned}$$

Примечание. Пусть $\arcsin y + \arcsin x = \varphi$. Тогда $\sin \varphi = \sin (\arcsin y +$

$$+ \arcsin x) = \sin (\arcsin y) \cos (\arcsin x) + \sin (\arcsin x) \cos (\arcsin y) =$$

$$= y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \varphi = \arcsin \left(y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} \right).$$

7 (3907). $\sqrt{1-y^2} \, dx + y \sqrt{1-x^2} \, dy = 0$.

Решение

$$\frac{y \, dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \int \frac{y \, dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = c_1; -\sqrt{1-y^2} +$$

$$+ \arcsin x = c_1; \quad \underline{\underline{\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + c}} \quad (c = -c_1).$$

8 (3908). $e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt} \right) = 1$.

Решение

$$e^{-s} + e^{-s} \frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow dt + \frac{e^{-s}}{e^{-s} - 1} ds = 0; \int dt + \int \frac{e^{-s} ds}{e^{-s} - 1} = c_1; \left| \frac{e^{-s} - 1 = z}{-e^{-s} ds = dz} \right| \Rightarrow$$

$$\int dt = \int \frac{dz}{z} + c_1; \quad t = \ln |z| + \ln |c| \quad (c_1 = \ln |c|);$$

$$\underline{\underline{t = \ln |c(1 - e^{-s})| \Rightarrow e^t = c(1 - e^{-s})}} \quad (\text{при } s > 0, c > 0 \text{ и } s < 0, c < 0).$$

9 (3909). $y' = 10^{x+y}$.

Решение

$$\frac{dy}{dx} = 10^x \cdot 10^y \Rightarrow \frac{dy}{10^y} = 10^x dx; \int 10^{-y} dy = \int 10^x dx + c_1 \Rightarrow -\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + c_1;$$

$$\underline{\underline{10^x + 10^{-y} = c}}, \text{ где } c = -c_1 \ln 10.$$

10 (3910). $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$.

Решение

$$dy = \left(\sin \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \right) dx \Rightarrow dy = -2 \sin \frac{y}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx; \quad \frac{dy}{2 \sin \frac{y}{2}} =$$

$$= -\cos \frac{x}{2} dx \Rightarrow \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{y}{4}\right)}{\operatorname{tg} \frac{y}{4}} = -\int \cos \frac{x}{2} dx + c; \quad \underline{\underline{\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{4} \right| = c - 2 \sin \frac{x}{2}}}.$$

11 (3911). Зависимость между скоростью v снаряда и пройденным путем l в канале орудия устанавливается в баллистике следующим уравнением: $v = \frac{al^n}{b+l^n}$, где $v = \frac{dl}{dt}$ и $n < 1$. Найти зависимость между временем t движения снаряда и пройденным расстоянием l по каналу.

Решение

$$v = \frac{al^n}{b+l^n}, \text{ где } v = \frac{dl}{dt} \text{ и } n < 1; \quad \frac{dl}{dt} = \frac{al^n}{b+l^n} \Rightarrow dt = \frac{(b+l^n)dl}{al^n} \Rightarrow \int dt =$$

$$= \int \frac{b+l^n}{al^n} dl + c; \quad \underline{\underline{t = \frac{b}{al^{n-1}(1-n)} + \frac{l}{a} + c}}.$$

$$\text{При } t = 0 \quad l = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ и } t = \frac{1}{a} \left(l + \frac{bl^{1-n}}{1-n} \right).$$

12 (3912). Если x – количество иодисто-водородной кислоты HI, разложившейся к моменту времени t , то скорость разложения $\frac{dx}{dt}$ определяется дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = k_1 \left(\frac{1-x}{v} \right)^2 - k_2 \left(\frac{x}{v} \right)^2$, где k_1, v и k_2 – постоянные. Проинтегрировать это уравнение.

Решение

$$\frac{dx}{dt} = k_1 \left(\frac{1-x}{v} \right)^2 - k_2 \left(\frac{x}{v} \right)^2; \quad \frac{v^2 dx}{k_1(1-x)^2 - k_2 x^2} = dt \Rightarrow \int dt =$$

$$= v^2 \int \frac{dx}{k_1(1-x)^2 - k_2 x^2} + c.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{k_1(1-x)^2 - k_2 x^2} = \frac{1}{(\sqrt{k_1}(1-x) - \sqrt{k_2}x)(\sqrt{k_1}(1-x) + \sqrt{k_2}x)} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{k_1}(1-x) - \sqrt{k_2}x} + \frac{B}{\sqrt{k_1}(1-x) + \sqrt{k_2}x}; \quad A\sqrt{k_1} - A\sqrt{k_1}x + A\sqrt{k_2}x +$$

$$+ B\sqrt{k_1} - B\sqrt{k_2}x - B\sqrt{k_1}x = 1; \quad \begin{cases} (A+B)\sqrt{k_1} = 1, \\ -(A+B)\sqrt{k_1} + (A-B)\sqrt{k_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B = \frac{1}{\sqrt{k_1}}, \\ A-B = \frac{1}{\sqrt{k_2}}; \end{cases} \quad A = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1}k_2}; \quad B = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1}k_2}.$$

$$\text{Итак, } t = v^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{k_1}k_2} \ln |\sqrt{k_1}(1-x) + \sqrt{k_2}x| - \frac{1}{2\sqrt{k_1}k_2} \ln |\sqrt{k_1}(1-x) - \sqrt{k_2}x| + c \right].$$

$$\text{При } t=0 \quad x=0, \quad c=0 \text{ и } t = \frac{v^2}{2\sqrt{k_1}k_2} \ln \left| \frac{\sqrt{k_1}(1-x) + \sqrt{k_2}x}{\sqrt{k_1}(1-x) - \sqrt{k_2}x} \right|.$$

В задачах 13 (3913)–16 (3916) найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным условиям.

13 (3913). $y' \sin x = y \ln y; \quad y|_{x=\pi/2} = l.$

Решение

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y \Rightarrow \frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}; \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + c_1; \ln |\ln y| =$$

$$= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln |c|, \text{ где } \ln |c| = c_1; \ln y = c \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Подставив начальные условия, получим $c = 1$.

Итак, $\ln y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \underline{\underline{y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}}}$.

14 (3914). $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}; y|_{x=0} = 1$.

Решение

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} + c_1; \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} c \times$$

$$\times (\operatorname{arctg} c = c_1); \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} c; \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x) =$$

$$= \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} c); \frac{\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} y) - \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} y) \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x)} = c \Rightarrow \frac{y-x}{1+xy} = c.$$

Используем начальные условия: $c = 1$.

Итак, $y - x = 1 + xy \Rightarrow y = \underline{\underline{\frac{1+x}{1-x}}}$.

15 (3915). $\sin y \cos x \, dy = \cos y \sin x \, dx; y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$.

Решение

$$\frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx; \ln |\cos x| \Big|_0^x = \ln |\cos y| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^y \Rightarrow$$

$$\ln \left| \frac{\cos y}{\cos x} \right| = \ln \frac{\sqrt{2}}{2}; \underline{\underline{\cos x = \sqrt{2} \cos y}}.$$

16 (3916). $y - xy' = b(1 + x^2 y')$; $y|_{x=1} = 1$.

Решение

$$y - b = xy'(1 + bx); \int_1^x \frac{dx}{x(1+bx)} = \int_1^y \frac{dy}{y-b}; \frac{1}{x(1+bx)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+bx};$$

$$1 = A + Abx + Bx \Rightarrow \begin{cases} Ab + B = 0 \Rightarrow B = -b, \\ A = 1 \Rightarrow A = 1; \end{cases} \int_1^x \frac{dx}{x} - \int_1^x \frac{b dx}{bx+1} = \int_1^y \frac{dy}{y-b};$$

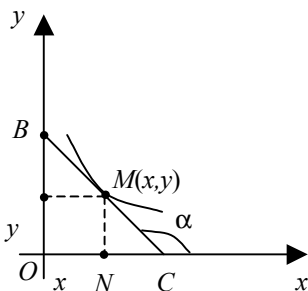
$$\begin{aligned} [\ln|x| - \ln|bx+1|]_1^x &= \ln|y-b|_1^y; \ln|x| - \ln|bx+1| + \ln|b+1| = \ln|y-b| - \\ &- \ln|1-b|; \ln\left|\frac{x(1+b)(1-b)}{bx+1}\right| = \ln|y-b| \Rightarrow \frac{x(1-b^2)}{bx+1} = y-b; \underline{\underline{y = \frac{x+b}{bx+1}}}. \end{aligned}$$

17 (3917). Найти линию, проходящую через точку (2; 3) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Решение

1-й способ. По условию $|BM| = |MC|$. Тогда $|NC| = |ON| = x$.

$$\text{Из } \triangle MNC \Rightarrow y = x \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -x \operatorname{tg} \alpha = -xy' \Rightarrow y = -x \frac{dy}{dx},$$



$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int_3^y \frac{dy}{y} = -\int_2^x \frac{dx}{x}; \ln|y| \Big|_3^y =$$

$$= -\ln|x| \Big|_2^x \Rightarrow \ln|xy| = \ln 6 \Rightarrow \underline{\underline{xy = 6}}.$$

2-й способ. Уравнение касательной BC $Y - y = y'(X - x)$, где X и Y – текущие координаты касательной. Точка $C(2x; 0)$ принадлежит $(BC) \Rightarrow -y = y'x$.

Далее решение такое же, как и в способе 1.

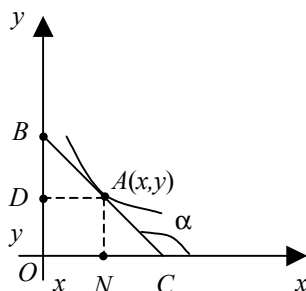
18 (3918). Найти линию, проходящую через точку $(2; 0)$ и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную двум.

Решение

По условию $|AB| = 2$. Из $\triangle ABD$ $|DA| =$

$$= |ON| = x = |AB| \cos(\pi - \alpha) = -2 \cos \alpha =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{2}{\sqrt{1 + y'^2}} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{1 + y'^2} \Rightarrow$$



$$y' = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}; \int_0^y dy = \int_2^x \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx \left[\begin{matrix} x = 2 \sin t, \\ dx = 2 \cos t dt \end{matrix} \right]; y = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{4 \cos^2 t}{2 \sin t} dt =$$

$$= 2 \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} \right| + \cos t \right]_{\alpha}^{\beta} = 2 \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{2} \right| + \cos \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) \right]_2^x =$$

$$= 2 \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{2} \right| + \cos \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) \right] = 2 \ln \left| \frac{1 - \cos \left(\arcsin \frac{x}{2} \right)}{\sin \left(\arcsin \frac{x}{2} \right)} \right| + 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} =$$

$$= 2 \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}} \right| + 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{2} \right| + \sqrt{4 - x^2};$$

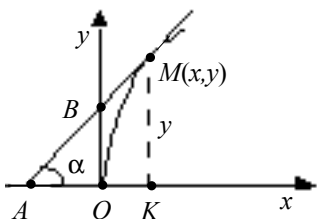
$$y = 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{2} \right| + \sqrt{4 - x^2} \quad \text{— уравнение трактрисы.}$$

Примечание. Трактриса — плоская кривая, обладающая тем свойством, что длина отрезка ее касательной между точкой касания и некоторой прямой (базой трактрисы) есть величина постоянная. В нашем случае базой является ось Oy.

19 (3919). Найти все линии, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

Решение

По условию $|AB| = |BM|$; $|OK| = x$; $|AK| = 2x$.

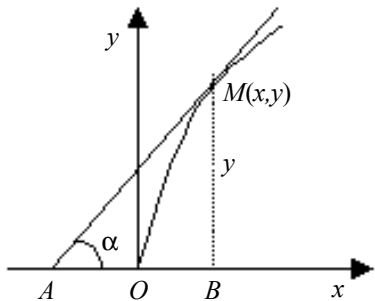


$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle AMK \quad \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{2x} \Rightarrow y' = \frac{y}{2x}; \quad \frac{dy}{y} = \\ &= \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2} \ln |x| + \ln c_1; \quad y = \sqrt{x} \cdot c_1 \Rightarrow \\ &\underline{y^2 = cx} \quad (c = c_1^2) - \text{параболы.} \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение можно было составить, применив уравнение касательной AM : $Y - y = y'(X - x)$; $X_A = -x$; $Y_A = 0 \Rightarrow -y = y'(-2x) \Rightarrow y = 2xy'$.

20 (3920). Найти все линии, у которых подкасательная пропорциональна абсциссе точки касания (коэффициент пропорциональности равен k).

Решение



$$\begin{aligned} \text{По условию } |AB| &= kx. \text{ Из } \triangle AMB \\ \text{имеем } |AB| &= \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{y'}. \text{ Значит, } \frac{y}{y'} = kx, \\ \frac{y dx}{dy} &= kx; \quad \frac{dx}{kx} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{k} \ln |x| = \ln |y| + \\ &+ \ln |c_1|; \quad x^{1/k} = c_1 y \Rightarrow \underline{y^k = cx}, \text{ где } c = c_1^{-k}. \end{aligned}$$

21 (3921). Найти линию, проходящую через точку $(a; 1)$ и имеющую подкасательную постоянной длины a .

Решение

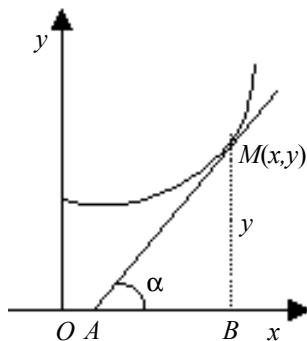
$$\text{По условию } |AB| = a. \text{ Из } \triangle AMB \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{a} \Rightarrow \frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{1}{a} dx \Rightarrow \ln |y| = \frac{x}{a} + \ln c; \quad \ln |y| = \ln e^{x/a} +$$

$$+ \ln c \Rightarrow y = ce^{x/a}.$$

$$\text{При } x = a \quad y = 1 \Rightarrow 1 = ce \Rightarrow c = e^{-1};$$

$$\underline{\underline{y = e^{\frac{x-a}{a}}.}}$$



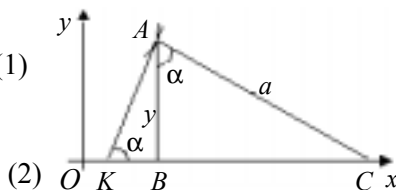
22 (3922). Найти линию, у которой длина нормали (отрезок ее от точки линии до оси абсцисс) есть постоянная величина a .

Решение

По условию $|AC| = a$. Тогда

$$|BC| = a \sin \alpha = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}}; \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{y} \Rightarrow |BC| = yy'.$$



$$\text{Из (1) и (2) } yy' = \frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}} \Rightarrow a = y\sqrt{1+(y')^2} \Rightarrow \frac{a^2}{y^2} = 1 + (y')^2 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}; \quad \frac{y \, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = dx \Rightarrow x = -\sqrt{a^2 - y^2} + c \Rightarrow a^2 - y^2 = (x - c)^2;$$

$$\underline{\underline{a^2 = y^2 + (x - c)^2.}}$$

23 (3923). Найти линию, у которой сумма длин касательной и подкасательной в любой ее точке пропорциональна произведению координат точки касания (коэффициент пропорциональности равен k) (см. рисунок к задаче 22 (3922)).

Решение

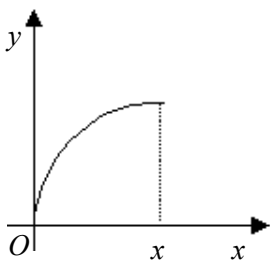
$$|KA| + |KB| = kxy; \quad |KA| = \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{y \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y \sqrt{1 + y'^2}}{y'}; \quad |KB| = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{y}{y'} \Rightarrow \frac{y \sqrt{1+y'^2}}{y'} + \frac{y}{y'} = kxy \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} + 1 = ky'x \Rightarrow 1 + y'^2 = k^2 y'^2 x^2 - \\
 &- 2ky'x + 1 \Rightarrow (k^2 x^2 - 1) dy = 2kx dx \Rightarrow dy = \frac{2kx}{k^2 x^2 - 1} dx; \\
 &y = \frac{1}{k} \ln |k^2 x^2 - 1| + c_1; \quad y = \frac{1}{k} \ln |c (k^2 x^2 - 1)|, \text{ где } c_1 = \frac{1}{k} \ln c.
 \end{aligned}$$

24 (3924). Найти линию $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$, $f(0) = 0$), ограничивающую криволинейную трапецию с основанием $[0, x]$, площадь которой пропорциональна $(n+1)$ -й степени $f(x)$. Известно, что $f(1) = 1$.

Решение

По условию $\int_0^x f(x) dx = k [f(x)]^{n+1}$. Продифференцируем обе части



равенства: $f(x) = k(n+1)[f(x)]^n f'(x)$, $f(x) = y$;

$$y = k(n+1)y^n y' \Rightarrow 1 = k(n+1)y^{n-1} \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx =$$

$$= k(n+1)y^{n-1} dy \Rightarrow \int_0^x dx = k(n+1) \int_0^y y^{n-1} dy \Rightarrow$$

$$x = k(n+1) \frac{y^n}{n}.$$

Из $f(1) = 1$ следует $1 = k(n+1) \frac{1}{n} \Rightarrow k = \frac{n}{n+1}$. Тогда $\underline{\underline{x = y^n}}$.

25 (3925). Материальная точка массой в 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ с скорость равнялась 0,5 м/с, а сила $-4 \cdot 10^{-5}$ Н. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

Решение

$$\begin{aligned}
 m = 1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг} & \quad \text{По условию } F = k \frac{t}{V}, \quad m \frac{dV}{dt} = k \frac{t}{V}. \\
 t = 10 \text{ с} & \quad \text{Найдем } k: 4 \cdot 10^{-5} = k \frac{10}{0,5} \Rightarrow k = 2 \cdot 10^{-6}. \text{ Тогда} \\
 V = 0,5 \text{ м/с} & \quad m \frac{dV}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{t}{V} \Rightarrow mV dV = 2 \cdot 10^{-6} t dt \Rightarrow V^2 = \\
 F = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Н} & \quad = 2 \cdot 10^{-3} t^2 + c. \\
 t_1 = 60 \text{ с} & \quad \text{Найдем } c: 0,25 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 100 + c \Rightarrow c = 0,05.
 \end{aligned}$$

$$V_1 = ? \quad \text{Итак, } V^2 = 2 \cdot 10^{-3} t^2 + 0,05, \text{ откуда}$$

$$V_1 = \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 + 0,05} \approx 2,7 \text{ м/с}.$$

26 (3926). Материальная точка движется прямолинейно, причем так, что ее кинетическая энергия в момент t прямо пропорциональна средней скорости движения в интервале времени от нуля до t . Известно, что при $t = 0$ путь $S = 0$. Показать, что движение равномерное.

Решение

По условию $W_k = kV_{\text{ср}}, S|_{t=0} = 0$.

$$\frac{mV^2}{2} = kV_{\text{ср}} \Rightarrow \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = k \frac{S}{t} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{2kS}{mt}}; \quad \frac{dS}{\sqrt{S}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}} \Rightarrow$$

$$\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} \Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \sqrt{t} \Rightarrow S = \frac{2k}{m} t.$$

Обозначив $\frac{2k}{m} = V$, получим $\underline{S = Vt}$, т. е. движение равномерное.

27 (3927). Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $V = 10$ км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен, и через $t = 20$ с скорость лодки уменьшилась до $V_1 = 6$ км/ч. Считая, что сила сопротивле-

ния воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найти скорость лодки через 2 мин после остановки мотора; найти также расстояние, пройденное лодкой в течение одной минуты после остановки мотора.

Решение

$$V = 10 \text{ км/ч}$$

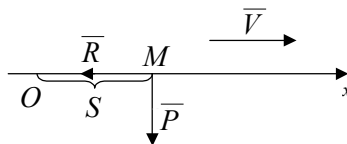
$$t = 20 \text{ сек} = 1/30 \text{ ч}$$

$$V = 6 \text{ км/ч}$$

$$t = 2 \text{ мин} = 1/30 \text{ ч}$$

$$t = 1 \text{ мин} = 1/60 \text{ ч}$$

$$V_2 = ? \quad S_3 = ?$$



По закону Ньютона $m\overline{W} = \overline{P} + \overline{R}$; $mW_x = P_x + R_x$; $\overline{R} = -k\overline{V}$;

$$R_x = -kV_x = -kV; P_x = 0; W_x = \frac{dV}{dt}.$$

$$\text{Итак, } m \frac{dV}{dt} = -kV \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \ln |V| = -\frac{k}{m} t + c_1 \Rightarrow V =$$

$$= e^{c_1} e^{-\frac{k}{m} t} \Rightarrow V = ce^{-\frac{k}{m} t} \left(c = e^{c_1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Из } V|_{t=0} = 10 \Rightarrow 10 = ce^0 \rightarrow c = 10 \Rightarrow V = 10e^{-\frac{k}{m} t}; V|_{t=1/180} = 6 \Rightarrow 6 = \\ = 10e^{-\frac{k}{m} \cdot 1/180} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{3}{5} \right)^{180} = (0,6)^{180}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } V = 10 (0,6)^{180t}; V_2 = 10 (0,6)^{180 \cdot 1/30} = 10 (0,6)^6 \approx 0,467 \text{ км/ч};$$

$$\begin{aligned} S_3 = 10 \int_0^{1/60} (0,6)^{180t} dt = \frac{10}{180 \ln 0,6} (0,6)^{180t} \Big|_0^{1/60} = \frac{1}{180 \ln 0,6} [(0,6)^3 - 1] = \\ = \frac{0,772}{9,194} \approx 0,085 \text{ км} = \underline{\underline{85 \text{ м}}}. \end{aligned}$$

28 (3928). В дне цилиндрического сосуда с поперечным сечением S и вертикальной осью имеется малое круглое отверстие площадью q , закрытое диафрагмой (как у объектива фотоаппарата). В сосуд налита

жидкость высоты h . В момент $t = 0$ диафрагма начинает открываться, причем площадь отверстия пропорциональна времени и полностью отверстие открывается за T секунд. Какова будет высота H жидкости в сосуде через T секунд после начала опыта?

Решение

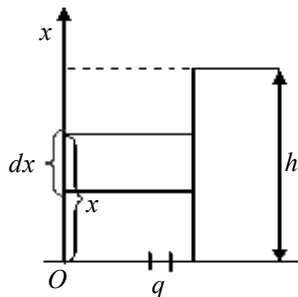
Площадь отверстия $\delta = kt$. При $t = T$ $\delta = q \Rightarrow q = kT$; $k = \frac{q}{T}$.

Таким образом, $\delta = \frac{q}{T}t$.

За время dt объем изменяется на величину $S dx$, за то же время из отверстия вытечет жидкости $\sqrt{2gx} \frac{q}{T} t dt$ (ед. объема):

$$S dx = -\sqrt{2gx} \frac{q}{T} t dt; \quad \frac{q}{T} \int_0^T t dt =$$

$$= -S \int_h^H \frac{dx}{\sqrt{2gx}} \Rightarrow \frac{qT}{2} = -\frac{S}{\sqrt{2g}} 2 (\sqrt{H} - \sqrt{h}) \Rightarrow H = \left(\sqrt{h} - \frac{qT\sqrt{2g}}{4S} \right)^2$$



29 (3929). Скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и среды. В задачах (2710)–(2711) из [1] считаем коэффициент пропорциональности постоянным. При некоторых расчетах считают, что он линейно зависит от времени: $k = k_0(1 + \alpha t)$. Найти при этом предположении зависимость между температурой тела θ и временем t , полагая, что $\theta = \theta_0$ при $t = 0$, а температура окружающей среды θ_1 .

Решение

$$\frac{d\theta}{dt} = k_0(1 + \alpha t)(\theta - \theta_1); \quad \frac{d\theta}{\theta - \theta_1} = k_0(1 + \alpha t) dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta - \theta_1} = k_0 \int_0^t (1 + \alpha t) dt;$$

$$\ln |\theta - \theta_1| \Big|_{\theta_0}^{\theta} = k_0 \left(t + \frac{\alpha}{2} t^2 \right) \Big|_0^t \Rightarrow \ln \frac{\theta - \theta_1}{\theta_0 - \theta_1} = \frac{k_0}{2} (2t + \alpha t^2).$$

30 (3930). Скорость роста площади молодого листа виктории-регии, имеющего, как известно, форму круга, пропорциональна окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее в свою очередь пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью. Найти зависимость между площадью S листа и временем t , если известно, что в 6 часов утра эта площадь равнялась 1600 см^2 , а в 6 часов вечера того же дня 2500 см^2 . (Полагать, что наблюдение производилось на экваторе в день равноденствия, когда угол между направлением лучей солнца и вертикалью можно считать равным 90° в 6 часов утра и в 6 часов вечера и 0° в полдень.)

Решение

По условию S – площадь молодого листа виктории-регии; $\frac{dS}{dt} =$

$$= k_1 2\pi r k_2 S \cos \varphi. \text{ Но } S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

$$\text{Из пропорции } \frac{\pi}{2} : 6 = \varphi - t : 12 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi(t-12)}{12}.$$

$$\text{Таким образом, } \frac{dS}{dt} = 2k_1 k_2 \pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} S \cos \frac{\pi(t-12)}{12}.$$

Обозначив $2k_1 k_2 \sqrt{\pi} = k$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S\sqrt{S}} &= k \cos \frac{\pi(t-12)}{12} dt \Rightarrow \int_{1600}^S \frac{dS}{S^{3/2}} = k \int_6^t \cos \frac{\pi(t-12)}{12} dt; \\ -2 \left(\frac{1}{\sqrt{S}} - \frac{1}{40} \right) &= \frac{12k}{\pi} \left(\sin \frac{\pi(t-12)}{12} + 1 \right). \end{aligned} \quad (*)$$

$$\text{Определим } k: S(18) = 2500 \Rightarrow -2 \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{40} \right) = \frac{12k}{\pi} 2 \Rightarrow k = \frac{\pi}{2400}.$$

$$\text{Подставим } k \text{ в } (*): \frac{1}{\sqrt{S}} - \frac{1}{40} = -\frac{1}{400} \left(\sin \frac{\pi(t-12)}{12} + 1 \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{S}} =$$

$$= \frac{1}{40} - \frac{1}{400} \left(\sin \frac{\pi(t-12)}{12} + 1 \right) \Rightarrow \frac{400}{\sqrt{S}} = 10 - \sin \frac{\pi(t-12)}{12} - 1 \Rightarrow$$

$$S = \frac{1600}{\left[9 - \sin \frac{\pi(t-12)}{12} \right]^2}.$$

В задачах 31 (3931)–33 (3933) при помощи замены искомой функции привести данные уравнения к уравнениям с разделяющимися переменными и решить их.

31 (3931). $y' = \cos(x - y)$.

Решение

Положим $u = x - y \Rightarrow y = x - u$, $y' = 1 - u'$; $1 - u' = \cos u \Rightarrow 1 - \frac{du}{dx} =$

$$= \cos u \Rightarrow \frac{du}{1 - \cos u} = dx; \int \frac{du}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} + c = \int dx \Rightarrow -\operatorname{ctg} \frac{u}{2} + c = x; x + \operatorname{ctg} \frac{u}{2} =$$

$$= c \Rightarrow x + \operatorname{ctg} \frac{x - y}{2} = c.$$

32 (3932). $y' = 3x - 2y + 5$.

Решение

Положим $3x - 2y + 5 = u \Rightarrow 3 - 2y' = u'$, $y' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} u'$. Тогда $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} u' = u$;

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{dx} = u \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - u \right) dx = \frac{1}{2} du \Rightarrow \int \frac{du}{3 - 2u} = \int dx + \ln c_1 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \ln |3 - 2u| = x + \ln c_1 \Rightarrow \ln |3 - 2u| = \ln e^{-2x} + \ln c, \text{ где } \ln c = -2 \ln c_1;$$

$$3 - 2u = ce^{-2x} \Rightarrow \underline{\underline{4y - 6x - 7 = ce^{-2x}}}.$$

33 (3933). $y'\sqrt{1+x+y} = x+y-1$.

Решение

Положим $\sqrt{1+x+y} = u \Rightarrow x+y = u^2 - 1$, $u' = \frac{1+y'}{2\sqrt{1+x+y}}$, $y' = 2u' \times$
 $\times \sqrt{1+x+y} - 1 = 2uu' - 1$; $(2uu' - 1)u = u^2 - 1 - 1 \Rightarrow 2u^2u' = u^2 + u - 2$;
 $2u^2 \frac{du}{dx} = (u-1)(u+2) \Rightarrow 2 \int \frac{u^2 du}{(u-1)(u+2)} = \int dx + c$; $\frac{2u^2}{(u-1)(u+2)} = 2 +$
 $+\frac{-2u+4}{(u-1)(u+2)}$; $\frac{-2u+4}{(u-1)(u+2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+2} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$; $B = -\frac{8}{3}$;
 $2u + \frac{2}{3} \ln|u-1| - \frac{8}{3} \ln|u+2| = x + c$, где $u = \sqrt{1+x+y}$.

Однородные уравнения

|| В задачах 34 (3934)–44 (3944) найти общие решения уравнений.

34 (3934). $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

Решение

Обозначим $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu$, $y' = u + xu'$; $u + xu' = u^2 - 2$; $u + x \frac{du}{dx} =$
 $= u^2 - 2 \Rightarrow \frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln c_1 \Rightarrow$
 $\frac{1}{3} \ln \frac{2u-1-3}{2u-1+3} = \ln c_1 x$; $\frac{1}{3} \ln \frac{2u-4}{2u+2} = \ln c_1 x \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{u-2}{u+1}} = c_1 x \Rightarrow \frac{u-2}{u+1} =$
 $= cx^3 (c_1^3 = c)$; $u-2 = cx^3(u+1) \Rightarrow \underline{\underline{y-2x = cx^3(y+x)}}$.

35 (3935). $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Решение

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux, \quad y' = u + xu'; \quad u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \\ = \frac{1+u}{1-u} - u \Rightarrow x \, du = \frac{1+u^2}{1-u} dx; \quad \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u \, du}{1+u^2} = \\ = \int \frac{dx}{x} + \ln c; \quad \arctg u - \ln \sqrt{1+u^2} = \ln x + \ln c; \quad \arctg \left(\frac{y}{x} \right) = \ln c \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

36 (3936). $x \, dy - y \, dx = y \, dy$.

Решение

Из исходного уравнения следует:

$$\begin{aligned} dy - \frac{y}{x} dx = \frac{y}{x} dy; \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = u + u'x; \quad dy(1-u) = u \, dx \Rightarrow y'(1-u) = u; \\ (u + u'x)(1-u) = u \Rightarrow (u \, dx + x \, du)(1-u) = u \, dx; \quad u \, dx + x \, du - u^2 dx - \\ - ux \, du = u \, dx; \quad x \, du(1-u) = u^2 dx \Rightarrow \frac{(1-u) \, du}{u^2} = \frac{dx}{x}; \quad -\frac{1}{u} - \ln |u| = \ln |x| + \\ + c_1 \Rightarrow -\frac{x}{y} - \ln |y| = c_1; \quad \ln |y| + \frac{x}{y} = c \quad (c = -c_1). \end{aligned}$$

37 (3937). $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Решение

Разделим правую часть исходного уравнения почленно на x^2 и обозначим $\frac{y}{x} = u$, $y' = xu' + u$. Тогда

$$xu' + u = \frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} du = \frac{dx}{x}; \quad \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+D}{1+u^2} \Rightarrow A=1,$$

$$B = -2, D = 0; \int \frac{du}{u} - \int \frac{2u du}{1+u^2} + \ln c = \ln|x| \Rightarrow \ln \frac{|u|c}{1+u^2} = \ln|x| \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 = cy}}.$$

$$38 \text{ (3938). } y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } \frac{y}{x} = u, \quad y' = u + xu'; \quad u + xu' = \frac{1}{u} + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}; \quad u du = \\ = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln c; \quad y^2 = 2x^2 \ln c |x| \Rightarrow y = \pm x \sqrt{2 \ln c |x|}. \end{aligned}$$

$$39 \text{ (3939). } xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \text{Разделим обе части исходного равенства на } x: \quad y' - \frac{y}{x} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \\ \text{и обозначим } \frac{y}{x} = u, \quad y' = u'x + u. \text{ Тогда } u'x + u - u = \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \\ = \sqrt{1 + u^2} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln c_1 \Rightarrow \ln \left| u + \sqrt{1 + u^2} \right| = \\ = \ln c_1 |x|; \quad u + \sqrt{1 + u^2} = c_1 x \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = c_1 x; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = c_1 x^2 - y \Rightarrow \\ x^2 + y^2 = c_1^2 x^4 - 2c_1 x^2 y + y^2; \quad 1 = c_1^2 x^2 - 2c_1 y \Rightarrow c_1^2 x^2 = 1 + 2c_1 y \Rightarrow \\ \underline{\underline{x^2 = c^2 + 2cy}} \quad \left(c = \frac{1}{c_1} \right). \end{aligned}$$

40 (3940). $y^2 + x^2 y' = xy y'$.

Решение

Разделим обе части исходного равенства на xy : $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} y' = y'$. Обо-

значим $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu'$. Тогда $u = (u + xu') \left(1 - \frac{1}{u}\right) \Rightarrow u = u - 1 +$

$$+ \frac{x(u-1)}{u} u'; \quad \frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow cxu = e^u \Rightarrow \underline{\underline{e^{y/x} = cy}}.$$

41 (3941). $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$.

Решение

Обозначим $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu'$; $u + xu' = e^u + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = e^u$; $\frac{du}{e^u} =$

$$= \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-u} = \ln |cx| \Rightarrow \underline{\underline{\ln |cx| = -e^{-y/x}}}.$$

42 (3942). $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

Решение

Обозначим $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu' \Rightarrow u + u'x = u \ln u$; $\frac{du}{dx} x = u (\ln u - 1) \Rightarrow$

$$\frac{du}{u (\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u \ln \frac{u}{e}} = \int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow \int \frac{d\left(\ln \frac{u}{e}\right)}{\ln \frac{u}{e}} = \ln c |x|; \quad \ln \left| \ln \frac{u}{e} \right| =$$

$$= \ln c |x| \Rightarrow \ln \frac{u}{e} = cx \Rightarrow u = ee^{cx} \Rightarrow \underline{\underline{y = xe^{cx+1}}}.$$

43 (3943). $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$.

Решение

Разделим обе части исходного равенства на $xu \, dx$ и обозначим $\frac{y}{x} = u$,

$$y' = u'x + u. \text{ Тогда } 3u + 3 + \frac{1}{u} = \left(\frac{1}{u} + 2 \right) y' \Rightarrow 3u^2 + 3u + 1 = (1 + 2u) \times \\ \times (u'x + u); (3u^2 + 3u + 1)dx = x \, du + 2ux \, du + u \, dx + 2u^2 dx; (u^2 + 2u + \\ + 1)dx = x(1 + 2u)du; \frac{dx}{x} = \frac{(1 + 2u)du}{u^2 + 2u + 1} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \ln c = \int \frac{d(u^2 + 2u + 1)}{u^2 + 2u + 1} - \\ - \int \frac{d(u + 1)}{(u + 1)^2}; \ln |cx| = \ln |u^2 + 2u + 1| + \frac{1}{u + 1}; \ln \left| \frac{u^2 + 2u + 1}{cx} \right| = -\frac{1}{u + 1} \Rightarrow \\ u^2 + 2u + 1 = cxe^{-\frac{1}{u+1}}; \underline{\underline{(x + y)^2 = cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}}}.$$

$$44 \text{ (3944). } y' = \frac{y}{x} + \frac{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\Phi'\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Решение

Пусть $\frac{y}{x} = u$, $y' = u'x + u$; $u'x + u = u + \frac{\Phi(u)}{\Phi'(u)} \Rightarrow u'x = \frac{\Phi(u)}{\Phi'(u)} \Rightarrow$

$$\Phi'(u)u'x = \Phi(u); \frac{d\Phi}{dx}x = \Phi(u) \Rightarrow \frac{d\Phi}{\Phi(u)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \underline{\underline{cx = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)}}.$$

В задачах 45 (3945)–48 (3948) найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям.

$$45 \text{ (3945). } (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x; y|_{x=1} = 0.$$

Решение

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1, \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = u'x + u; \quad (u'x + u - u) \operatorname{arctg} u = 1 \Rightarrow$$

$$x \frac{du}{dx} \operatorname{arctg} u = 1; \quad \int \operatorname{arctg} u \, du = \int \frac{dx}{x} + \ln c; \quad \left[\begin{array}{l} z = \operatorname{arctg} u, \, dz = \frac{1}{1+u^2} du, \\ dv = du, \, v = u \end{array} \right];$$

$$u \operatorname{arctg} u - \int \frac{u}{1+u^2} du = \ln c|x|; \quad u \operatorname{arctg} u - \ln \sqrt{u^2 + 1} = \ln c|x| \Rightarrow y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} =$$

$$= x \ln c \sqrt{x^2 + y^2}; \quad y|_{x=1} = 0 \Rightarrow 0 = \ln c \Rightarrow c = 1; \quad y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} =$$

$$= x \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}}.$$

46 (3946). $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy \, dx = 0; \quad y|_{x=0} = 1.$

Решение

Разделим обе части исходного равенства на $xy \, dx$: $\left(\frac{y}{x} - 3\frac{x}{y}\right)y' + 2 = 0,$

$$\frac{y}{x} = u, \quad y' = u'x + u; \quad \left(u - \frac{3}{u}\right)(u'x + u) + 2 = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} x (u^2 - 3) = u (1 - u^2);$$

$$\int \frac{u^2 - 3}{u(1-u)(1+u)} du = \int \frac{dx}{x} + \ln c; \quad \frac{u^2 - 3}{u(1-u)(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{1+u};$$

$$\begin{cases} -A + B - C = 1, \\ B + C = 0, \\ A = -3 \end{cases} \Rightarrow B = -1, \quad C = 1; \quad -3 \ln |u| + \ln |1-u| + \ln |1+u| =$$

$$= \ln c|x| \Rightarrow \frac{1-u^2}{u^3} = cx \Rightarrow x^2 - y^2 = cy^3.$$

При $x = 0 \quad y = 1 \Rightarrow -1 = c \Rightarrow c = -1; \quad \underline{\underline{y^2 - x^2 = y^3}}.$

47 (3947). $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$; $y|_{x=1} = -1$.

Решение

Разделим дробь на x^2 и обозначим $\frac{y}{x} = u$, $y' = u'x + u$. Тогда

$$u'x + u = \frac{u^2 - 2u - 1}{u^2 + 2u - 1} \Rightarrow u^2 u'x + u^3 + 2uu'x + 2u^2 - u'x - u = u^2 - 2u - 1;$$

$$u'x(u^2 + 2u - 1) = -(u + 1)(u^2 + 1); \quad - \int \frac{u^2 + 2u - 1}{(u + 1)(u^2 + 1)} du = \int \frac{dx}{x} + \ln c;$$

$$\frac{u^2 + 2u - 1}{(u + 1)(u^2 + 1)} = \frac{A}{u + 1} + \frac{Bu + c}{u^2 + 1}; \quad \begin{cases} A + B = 1, \\ B + C = 2, \\ A + C = -1 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = 2, C = 0;$$

$$\ln|u + 1| - \ln(u^2 + 1) = \ln c |x| \Rightarrow \frac{y + x}{x^2 + y^2} = cx.$$

При $x = 1$ $y = -1 \Rightarrow C = 0$. Значит, $y = -x$.

48 (3948). $y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$; $y|_{x=0} = \sqrt{5}$.

Решение

Из исходного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}. \text{ Пусть } \frac{y}{x} = u, \quad y' = u + xu';$$

$$u'x + u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + u^2}}{u} \Rightarrow u'x = \frac{-(1 + u^2) \pm \sqrt{1 + u^2}}{u}.$$

Возьмем радикал со знаком плюс (+):

$$\frac{du}{dx} x = \frac{\sqrt{1+u^2} \left(1 - \sqrt{1+u^2}\right)}{u} \Rightarrow \int \frac{u du}{\sqrt{1+u^2} \left(1 - \sqrt{1+u^2}\right)} = \int \frac{dx}{x} + \ln c.$$

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } \sqrt{1+u^2} = Z \Rightarrow 1+u^2 = Z^2; \quad u du = Z dZ; \quad \int \frac{Z dZ}{Z(1-Z)} = \\ = \int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow -\ln|1-Z| = \ln c|x|; \quad \frac{1}{1-\sqrt{1+u^2}} = cx \Rightarrow \frac{x}{x-\sqrt{x^2+y^2}} = \\ = cx \Rightarrow 1 = c \left(x - \sqrt{x^2+y^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Используем начальные условия: } 1 = c - \sqrt{5} \Rightarrow c = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad -\sqrt{5} = x - \\ -\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow -(\sqrt{5}+x) = \sqrt{x^2+y^2}; \quad 5+2\sqrt{5}x+x^2 = x^2+y^2; \\ \underline{\underline{y^2 = 5+2\sqrt{5}x}} - \text{одно частное решение;} \\ \underline{\underline{y^2 = 5-2\sqrt{5}x}} - \text{другое частное решение, соответствующее радикалу} \\ \text{со знаком минус (-).} \end{aligned}$$

49 (3949). Привести уравнение $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ к квадратуре. Какова должна быть функция $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, чтобы общим решением данного уравнения было $y = \frac{x}{\ln|cx|}$?

Решение

$$y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = u'x + u; \quad u'x + u = u + \varphi\left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow u'x = \varphi\left(\frac{1}{u}\right).$$

Тогда

$$\frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |cx| = \int \frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}. \quad (1)$$

По условию

$$y = \frac{x}{\ln |cx|} \Rightarrow \ln |cx| = \frac{x}{y}. \quad (2)$$

Приравниваем правые части равенств (1) и (2):

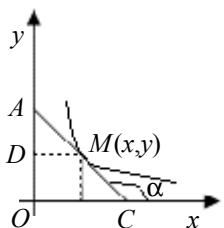
$$\int \frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{1}{u} \Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{u}\right) = -u^2 \text{ или } \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}.$$

50 (3950). Найти линию, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

Решение

По условию $|AO|^2 = xy$. Тогда

$$|AO| = |OD| + |AD| = y + x \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = y - xy'; \quad (y - xy')^2 = xy \Rightarrow$$



$$\begin{aligned} \frac{y}{x} - y' &= \pm \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = u + u'x; \quad u - u'x - u = \\ &= \pm \sqrt{u} \Rightarrow -\frac{du}{dx}x = \pm \sqrt{x} \Rightarrow \pm \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}; \quad \pm 2\sqrt{u} + \\ &+ \ln c = \ln x \Rightarrow \underline{\underline{x = ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}}}. \end{aligned}$$

51 (3951). Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной равна соответствующей поднормали.

Решение

$$\text{По условию } |OA| = |KC|. \text{ Из } \triangle NMK \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{|NO| + |OK|} =$$

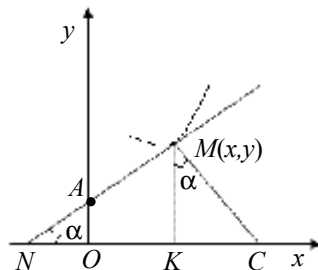
$$= \frac{y}{|NO| + x} = y'; \quad |NO| = |OA| \operatorname{ctg} \alpha = |ck| \operatorname{ctg} \alpha =$$

$$= y \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = y.$$

Итак, $\frac{y}{y+x} = y'; \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = u + u'x;$

$$u + u'x = \frac{u}{u+1} \Rightarrow u'x = -\frac{u^2}{1+u};$$

$$\frac{(1+u) du}{-u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{u} - \ln|u| - \ln|c| = \ln|x| \Rightarrow \underline{\underline{x = y \ln|cy|}}.$$



52 (3952). Найти линию, у которой длина полярного радиуса любой ее точки M равняется расстоянию между точкой пересечения касательной в точке M с осью Oy и началом координат.

Решение

По условию $|OM| = |OK|$. Тогда

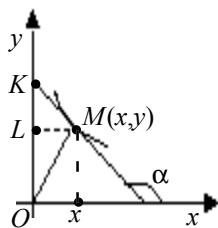
$$\sqrt{x^2 + y^2} = |OL| + |LK| = y + x \operatorname{tg}(\pi - \alpha); \quad \sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'; \quad \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} =$$

$$= \frac{y}{x} - y'; \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = u + xu'; \quad \sqrt{1 + u^2} = u - xu' -$$

$$-u \Rightarrow \sqrt{1 + u^2} = -x \frac{du}{dx}; \quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|u + \sqrt{1 + u^2}| = \ln|c| - \ln|x|; \quad u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{c}{x}; \quad \frac{y}{x} +$$

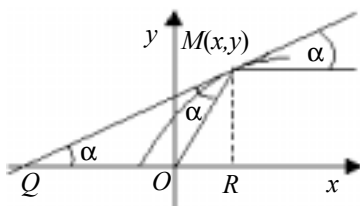
$$+ \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{c}{x}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = c - y \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 - 2cy + y^2; \quad \underline{\underline{x^2 = 2cy + c^2}}.$$



53 (3953). Какой поверхностью вращения является зеркало прожектора, если лучи света, исходящие из точечного источника, отразившись, направляются параллельным пучком?

Решение

Пусть плоскость Oxy – меридианная плоскость поверхности зеркала; источник света помещаем в точку $O(0; 0)$, $\angle OMQ = \angle MQO$ – вытекает из законов отражения света. Тогда $|QO| = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$\text{Из } \triangle RMQ \text{ ctg } \alpha = \frac{|QR|}{|MR|}; \quad \frac{dx}{dy} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{y}, \quad \frac{x}{y} = u, \quad x' = u'y + u;$$

$$u'y + u = \sqrt{1 + u^2} + u \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |u + \sqrt{1 + u^2}| = \ln |c_1 y|;$$

$$u + \sqrt{1 + u^2} = c_1 y \Rightarrow 1 + u^2 = c_1^2 y^2 - 2c_1 y u + u^2 \Rightarrow 1 = c_1^2 y^2 - 2c_1 x.$$

$$\text{Обозначим } \frac{1}{c_1^2} = c \Rightarrow \underline{\underline{y^2 = c^2 + 2cx}}.$$

Линейные уравнения

|| В задачах 54 (3954)–64 (3964) найти общие решения уравнений.

54 (3954). $y' + 2y = 4x$.

Решение

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + 2uv = 4x; \quad u'v + u(v' + 2v) = 4x; \quad v' + 2v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2 \Rightarrow v = e^{-2x}; \quad u'e^{-2x} = 4x \Rightarrow du = 4e^{2x} x dx; \quad u = 4 \int e^{2x} x dx =$$

$$= \left[Z = x, \quad dZ = dx, \quad e^{2x} dx = dq, \quad q = \frac{1}{2} e^{2x} \right] \Rightarrow u = 4 \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right) =$$

$$= 2x e^{2x} - e^{2x} + c; \quad \underline{\underline{y = uv = 2x - 1 + c e^{-2x}}}.$$

55 (3955). $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Решение

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}; \quad u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2};$$

$$v' + 2xv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2x dx \Rightarrow v = e^{-x^2}; \quad \frac{du}{dx} e^{-x^2} = xe^{-x^2} \Rightarrow$$

$$du = x dx \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + c; \quad y = \underline{\underline{\left(\frac{x^2}{2} + c \right) e^{-x^2}}}.$$

56 (3956). $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$.

Решение

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + \frac{1-2x}{x^2}uv = 1; \quad u'v + u\left(v' + \frac{1-2x}{x^2}\right) = 1;$$

$$v' + \frac{1-2x}{x^2}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{1-2x}{x^2}dx \Rightarrow \ln|v| = \ln x^2 + \ln e^{1/x} \Rightarrow v = x^2 e^{1/x};$$

$$u'x^2 e^{1/x} = 1 \Rightarrow du = \frac{dx}{x^2 e^{1/x}} \Rightarrow u = \int \frac{e^{-1/x} dx}{x^2}; \quad u = \int e^{-1/x} d\left(-\frac{1}{x}\right) = e^{-1/x} + c;$$

$$\underline{\underline{y = cx^2 e^{1/x} + x^2}}}.$$

57 (3957). $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Решение

$$y = uv, \quad u'v + uv' - \frac{2x}{1+x^2}uv = 1+x^2; \quad u'v + u\left(v' - \frac{2x}{1+x^2}v\right) = 1+x^2;$$

$$v' - \frac{2x}{1+x^2}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow \ln|v| = \ln(1+x^2) \Rightarrow v = 1+x^2;$$

$$u'(1+x^2) = 1+x^2 \Rightarrow du = dx \Rightarrow u = x + c; \quad \underline{\underline{y = (1+x^2)(x+c)}}.$$

58 (3958). $y' + y = \cos x$.

Решение

$$y = uv, \quad u'v + uv' + uv = \cos x \Rightarrow u'v + u(v' + v) = \cos x; \quad v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} =$$

$$= -v \Rightarrow \ln |v| = -x \Rightarrow v = e^{-x}; \quad u'e^{-x} = \cos x \Rightarrow du = e^x \cos x dx;$$

$$u = \int e^x \cos x dx = I; \quad \left[\begin{matrix} e^x = u_1, \cos x dx = dv_1, \\ du_1 = e^x dx, v_1 = \sin x \end{matrix} \right]; \quad I = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} e^x = u_2, \sin x dx = dv_2, \\ du_2 = e^x dx, v_2 = -\cos x \end{matrix} \right] = e^x \sin x + e^x \cos x - I + c_1 \Rightarrow u = \frac{1}{2}(\sin x +$$

$$+ \cos x)e^x + c; \quad y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x + c.$$

59 (3959). $y' + ay = e^{mx}$.

Решение

$$y = uv, \quad u'v + v'u + auv = e^{mx} \Rightarrow u'v + u(v' + av) = e^{mx}; \quad v' + av = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} =$$

$$= -a dx \Rightarrow \ln |v| = -ax \Rightarrow v = e^{-ax}; \quad du = e^{(m+a)x} dx \Rightarrow u = \frac{1}{m+a} e^{(m+a)x} + c$$

(при $m \neq -a$).

$$\text{Если } m \neq -a, \text{ то } y = \frac{1}{m+a} e^{mx} + ce^{-ax}. \text{ Если } m = -a, \text{ то } u = x + c$$

$$\text{и } y = (x + c)e^{mx}.$$

60 (3960). $2y dx + (y^2 - 6x)dy = 0$.

Решение

$$2y \frac{dx}{dy} + y^2 - 6x = 0; \quad x = uv, \quad x'_y = u'v + uv'; \quad u'v + v'u - \frac{3}{y}uv = -\frac{y}{2};$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{y}v\right) = -\frac{y}{2}; \quad v' - \frac{3}{y}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{3}{y} dy \Rightarrow \ln |v| = 3 \ln |y| \Rightarrow v = y^3;$$

$$u'y^3 = -\frac{y}{2} \Rightarrow du = -\frac{1}{2y^2} dy \Rightarrow u = \frac{1}{2y} + c; \quad x = \frac{1}{2}y^2 + c_1y^3 \text{ или}$$

$$\underline{\underline{y^2 - 2x = cy^3 \quad (c = -c_1)}}.$$

61 (3961). $y' = \frac{1}{2x - y^2}.$

Решение

$$2x - y^2 = \frac{dx}{dy}; \quad \frac{dx}{dy} - 2x = -y^2; \quad x = uv, \quad x' = u'v + v'u; \quad u'v + u(v' - 2v) = -y^2;$$

$$v' - 2v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2 dy \Rightarrow \ln |v| = 2y \Rightarrow v = e^{2y}; \quad u'e^{2y} = -y^2 \Rightarrow$$

$$u = -\int y^2 e^{-2y} dy = \left[y^2 = u_1, \quad du_1 = 2y dy, \right. \\ \left. dv_1 = e^{-2y} dy, \quad v_1 = -\frac{1}{2} e^{-2y} \right] = \frac{1}{2} e^{-2y} y^2 - \int y e^{-2y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} y^2 e^{-2y} + \frac{1}{2} y e^{-2y} + \frac{1}{4} e^{-2y} + c; \quad \left[u_2 = y, \quad du_2 = dy, \right. \\ \left. dv_2 = e^{-2y} dy, \quad v_2 = -\frac{1}{2} e^{-2y} \right];$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} + ce^{2y}}}.$$

62 (3962). $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$

Решение

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} + 2 \ln y + 1; \quad x = uv, \quad x' = u'v + uv'; \quad u'v + v'u + \frac{uv}{y} = 2 \ln y + 1 \Rightarrow$$

$$u'v + u \left(v' + \frac{v}{y} \right) = 2 \ln y + 1; \quad v' + \frac{v}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow v = \frac{1}{y};$$

$$u' = 2y \ln y + y \Rightarrow u = 2 \int y \ln y \, dy + \int y \, dy + c; \left[u_1 = \ln y, \, du_1 = \frac{dy}{y}, \, dv_1 = y \, dy, \, v_1 = \frac{y^2}{2} \right]; u = y^2 \ln y - \int y \, dy + \frac{y^2}{2} + c = y^2 \ln y + c; \, x = y \ln y + \frac{c}{y}.$$

63 (3963). $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$.

Решение

$$y = uv, \, y' = u'v + uv'; \, u'v + v'u - uv = \frac{1+x^2}{x} e^x; \, u'v + u(v' - v) = \frac{1+x^2}{x} e^x;$$

$$v' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = dx \Rightarrow \ln |v| = x \Rightarrow v = e^x; \, u'e^x = \frac{1+x^2}{x} e^x; \, u' = \frac{1+x^2}{x};$$

$$du = \frac{1+x^2}{x} dx \Rightarrow u = \ln |x| + \frac{x^2}{2} + c; \, y = e^x \left(\ln |x| + \frac{x^2}{2} + c \right).$$

64 (3964). $y' + y\varphi'(x) - \varphi(x)\varphi'(x) = 0$, где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Решение

$$y = uv, \, u'v + v'u + uv\varphi'(x) - \varphi(x)\varphi'(x) = 0; \, u'v + u(v' + v\varphi'(x)) = \varphi(x) \times \varphi'(x); \, v' + v\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\varphi'(x) dx \Rightarrow \ln |v| = -\int \varphi'(x) dx = -\varphi(x);$$

$$v = -e^{-\varphi(x)}; \, u'e^{-\varphi(x)} = \varphi(x)\varphi'(x); \, u = \int e^{\varphi(x)} \varphi(x)\varphi'(x) dx =$$

$$= \left[u_1 = \varphi(x), \, du_1 = \varphi'(x) dx, \right] = \varphi(x) e^{\varphi(x)} - \int e^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx = \varphi(x) e^{\varphi(x)} - e^{\varphi(x)} + c; \, y = e^{-\varphi(x)} [\varphi(x) e^{\varphi(x)} - e^{\varphi(x)} + c];$$

|| В задачах 65 (3965)–68 (3968) найти частные решения уравнений.

65 (3965). $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x$; $y|_{x=0} = 0$.

Решение

$$\begin{aligned} y &= uv, \quad y' = u'v + v'u; \quad u'v + v'u - uv \operatorname{tg} x = \sec x; \quad u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \\ &= \sec x; \quad v' - v \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x \, dx \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}; \quad u' \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow du = \\ &= dx \Rightarrow u = x + c; \quad y = \frac{x+c}{\cos x}; \quad \text{при } x=0 \quad y=0 \Rightarrow 0=c; \quad y = \underline{\underline{\frac{x}{\cos x}}}. \end{aligned}$$

66 (3966). $xy' + y - e^x = 0$; $y|_{x=a} = b$.

Решение

$$\begin{aligned} y &= uv, \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}; \quad u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{e^x}{x}; \quad u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{e^x}{x}; \quad v' + \frac{v}{x} = \\ &= 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow v = \frac{1}{x}; \quad u' \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x} \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow u = e^x + c; \quad y = \frac{e^x + c}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{При } x=a \quad y=b \Rightarrow b = \frac{e^a + c}{a} \Rightarrow c = ab - e^a; \quad y = \underline{\underline{\frac{e^x + ab - e^a}{x}}}.$$

67 (3967). $xy' - \frac{y}{x+1} = x$; $y|_{x=1} = 0$.

Решение

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x(x+1)} &= 1; \quad y = uv, \quad y' = u'v + v'u; \quad u'v + v'u - \frac{uv}{x(x+1)} = 1 \Rightarrow u'v + u \\ &+ u \left(v' - \frac{v}{x(x+1)} \right) = 1; \quad v' - \frac{v}{x(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x(x+1)}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} - \end{aligned}$$

$$-\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln |v| = \ln |x| - \ln |x+1|; \quad v = \frac{x}{x+1}; \quad \frac{du}{dx} \cdot \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow du = \frac{x+1}{x} dx; \quad u = x + \ln |x| + c; \quad y = \frac{x}{x+1} (x + \ln |x| + c).$$

$$\text{При } x=1 \quad y=0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}(1+c) \Rightarrow c = -1; \quad y = \frac{x}{x+1} (x + \ln |x| - 1).$$

68 (3968). $t(1+t^2)dx = (x+xt^2-t^2)dt; \quad x|_{t=1} = -\frac{\pi}{4}.$

Решение

$$t(1+t^2)x' = x+xt^2-t^2; \quad x=uv, \quad x' = u'v + v'u; \quad t(1+t^2)(u'v + v'u) = uv(1+t^2) - t^2; \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{t}\right) = -\frac{t}{1+t^2}; \quad v' - \frac{v}{t} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dt}{t} \Rightarrow v = t;$$

$$u't = -\frac{t}{1+t^2} \Rightarrow \int du = -\int \frac{dt}{1+t^2} + c \Rightarrow u = -\arctg t + c; \quad x = (-\arctg t + c)t.$$

$$\text{При } t=1 \quad x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + c \Rightarrow c = 0; \quad x = -t \arctg t.$$

69 (3969). Пусть y_1 и y_2 – два различных решения уравнения

$$y' + p(x)y = Q(x).$$

а) Доказать, что $y = y_1 + c(y_2 - y_1)$ является общим решением того же уравнения (c – константа).

б) При каком соотношении между постоянными α и β линейная комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ будет решением данного уравнения?

в) Доказать, что если y_3 – третье частное решение, отличное от y_1 и y_2 , то отношение $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ – постоянное.

Решение

Если y_1 и y_2 – два различных решения дифференциального уравнения

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

то $y_1' + P(x)y_1 = Q(x)$; $y_2' + P(x)y_2 = Q(x)$.

а) Докажем, что $y = y_1 + c(y_2 - y_1)$ – общее решение того же уравнения (1):

$$y' = y_1' + c(y_2' - y_1'); \quad y_1' + c(y_2' - y_1') + P(x)[y_1 + c(y_2 - y_1)] = Q(x) \Rightarrow \\ [y_1' + P(x)y_1] + c[y_2' + P(x)y_2] - c[y_1' + P(x)y_1] = Q(x); \quad Q(x) + cQ(x) - \\ - cQ(x) = Q(x) \Rightarrow \underline{Q(x) = Q(x)}.$$

б) При каком соотношении между постоянными α и β линейная комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ будет решением уравнения (1)?

Если $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, то $y' = \alpha y_1' + \beta y_2'$. Подставим y и y' в дифференциальное уравнение (1):

$$\alpha y_1' + \beta y_2' + P(x)\alpha y_1 + P(x)\beta y_2 = Q(x); \quad \alpha[y_1' + P(x)y_1] + \beta[y_2' + \\ + P(x)y_2] = Q(x); \quad \alpha Q(x) + \beta Q(x) = Q(x) \Rightarrow \underline{\alpha + \beta = 1}.$$

в) Доказать, что если y^3 – третье частное решение, отличное от y_1 и y_2 , то отношение $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ – постоянное.

Пусть $y = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$. Докажем, что $y' = 0$, т. е. $y = \text{const}$.

Действительно, $y_1' + P(x)y_1 = Q(x)$, $y_2' + P(x)y_2 = Q(x)$,

$$y_3' + P(x)y_3 = Q(x); \quad y' = \frac{(y_2' - y_1')(y_3 - y_1) - (y_3' - y_1')(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)^2} = \\ = \frac{P(x)(y_2 - y_1)(y_3 - y_1) - P(x)(y_3 - y_1)(y_2 - y_1)}{(y_3 - y_1)^2} = 0.$$

70 (3970). Доказать тождество $\int_0^x e^{Zx - Z^2} dZ = e^{x^2/4} \int_0^x e^{-Z^2/4} dZ$, составив

для функции $I(x) = \int_0^x e^{Zx - Z^2} dZ$ дифференциальное уравнение и решив его.

Решение

$I(x) = \int_0^x e^{Zx-Z^2} dZ$. Формула дифференцирования интеграла, зависящего

от параметра, имеет вид

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, Z) dZ \right)' = \int_{a(x)}^{b(x)} f'_x(x, Z) dZ + f(b(x), Z) \frac{db}{dx} - f(a(x), Z) \frac{da}{dx}.$$

При $a = 0$, $b = x$

$$I'(x) = \int_0^x Z e^{Zx-Z^2} dZ + 1.$$

Проинтегрируем последнее равенство по частям: $e^{Zx} = u$,

$du = x e^{Zx} dZ$, $Z e^{-Z^2} dZ = dv$, $v = -\frac{1}{2} e^{-Z^2}$. Тогда $I'(x) = -\frac{1}{2} e^{Zx} e^{-Z^2} \Big|_0^x +$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^x x e^{Zx-Z^2} dZ + 1 \Rightarrow I'(x) = \frac{x}{2} I(x) + 1; \quad I(x) = uv, \quad I'(x) = u'v + v'u \Rightarrow$$

$$u'v + v'u - \frac{x}{2} uv = 1 \Rightarrow u'v + u \left(v' - \frac{x}{2} v \right) = 1; \quad v' - \frac{1}{2} v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{x}{2} dx \Rightarrow$$

$$\ln v = \frac{x^2}{4} \Rightarrow v = e^{x^2/4}; \quad du = e^{-x^2/4} dx \Rightarrow u = \int_0^x e^{-x^2/4} dx = \int_0^x e^{-Z^2/4} dZ;$$

$$I(x) = uv = e^{x^2/4} \int_0^x e^{-Z^2/4} dZ.$$

71 (3971). Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы масштаба меньше абсциссы точки касания.

Решение

По условию $|OK| = x - 2$. Из $\triangle KMN \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{|MN|}{|KN|} = \frac{y - (x - 2)}{x}$;

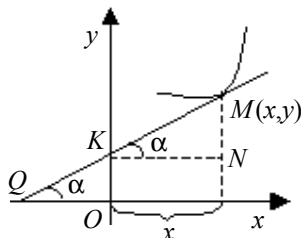
$$y' = \frac{y}{x} - 1 + \frac{2}{x}; \quad (*)$$

$$y = uv; \quad y' = u'v + v'u; \quad u'v + v'u - \frac{uv}{x} = \frac{2}{x} - 1;$$

$$u'v + u \left(v' - \frac{v}{x} \right) = \frac{2}{x} - 1; \quad v' = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$v = x; \quad u'x = \frac{2}{x} - 1 \Rightarrow du = \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$u = -\frac{2}{x} - \ln|x| + c; \quad \underline{\underline{y = uv = cx - x \ln|x| - 2.}}$$



Примечание. Можно исходить из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$.

При $X = 0$ $Y = x - 2$. Тогда $x - 2 = y - xy'$, т. е. приходим к уравнению (*).

72 (3972). Найти линию, у которой площадь прямоугольника, построенного на абсциссе любой точки и начальной ординате касательной в этой точке, есть величина постоянная ($= a^2$).

Решение

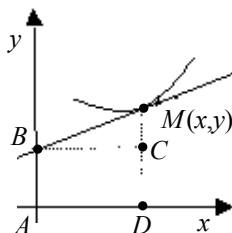
По условию $S_{ABCD} = |AB||AD| = a^2$.

Уравнение касательной в точке $M(x; y)$ имеет вид $Y - y = y'(X - x)$. При $X = 0$ $Y = |AB| = y - y'x$, $|AD| = x$.

Значит, $a^2 = |(y - y'x)x|$.

Если $(y - y'x)x > 0$, то $a^2 = yx - y'x^2$; $y = UV$,

$$y' = U'V + UV', \quad a^2 = UV \cdot x - x^2 U'V - x^2 UV';$$



$$a^2 = U(Vx - x^2 V') - x^2 U'V; \quad Vx = x^2 V' \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} \Rightarrow V = x;$$

$$a^2 = -x^3 \frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = -\frac{a^2 dx}{x^3} \Rightarrow U = \frac{a^2}{2x^2} + C; \quad y = Cx + \frac{a^2}{2x}.$$

Если $(y - y'x) x < 0$, то $a^2 = -yx + y'x^2$.

Аналогично получаем $V = x$, $U = -\frac{a^2}{2x^2} + C$.

Итак, $\underline{\underline{y = Cx \pm \frac{a^2}{2x}}}$.

73 (3973). Найти линию, для которой площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна ($= a^2$).

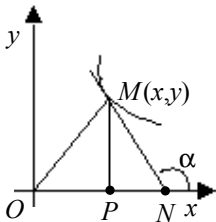
Решение

По условию $S_{OMN} = \frac{1}{2} |MP| |ON|$. Тогда $MP = y$, $|ON| = |OP| + |PN|$,

$$PN = \frac{y}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} = \frac{y}{y'}, \quad OP = x, \quad |ON| = x - \frac{y}{y'}, \quad 2a^2 = \left| xy - y^2 \frac{dx}{dy} \right|.$$

Если $xy - y^2 \frac{dx}{dy} > 0$, то $2a^2 = xy - y^2 x'$; $x = UV$, $x' = U'V + V'U$;

$$2a^2 = yUV - y^2(U'V + V'U); \quad 2a^2 = U(yV - y^2V') - y^2U'V; \quad yV - y^2V' =$$



$$= 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dV}{V} \Rightarrow V = y; \quad 2a^2 + y^3 U' = 0 \Rightarrow dU =$$

$$-2a^2 \frac{dy}{y^3} \Rightarrow U = \frac{a^2}{y^2} + C; \quad x = Cy + \frac{a^2}{y}.$$

Если $xy - y^2 \frac{dx}{dy} < 0$, то $2a^2 = -xy + y^2 x'$.

Аналогично, применив подстановку $x = UV$, получим $V = y$,

$$U = -\frac{a^2}{y^2} + C, \quad x = Cy - \frac{a^2}{y}.$$

Таким образом, $x = Cy \pm \frac{a^2}{y}$.

74 (3974). Точка массой, равной m , движется прямолинейно; на нее действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности равен k_1), протекающему от момента, когда скорость равнялась нулю. Кроме того, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости от времени.

Решение

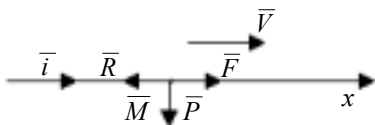
По условию

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{R} + \overline{P}, \quad (1)$$

где $\overline{F} = k_1 t \vec{i}$; $\overline{R} = -k\overline{V}$ ($\vec{i}$ - орт).

Проектируем (1) на ось x -ов:

$$mW_x = F_x + R_x + P_x,$$



где $W_x = \frac{dV_x}{dt}$, $F_x = k_1 t$, $P_x = 0$, $R_x = -kV_x$, $V_x = V$.

Итак, $m \frac{dV}{dt} = k_1 t - kV$, $V = pq$, $V' = p'q + pq'$, $mp'q + mpq' =$

$$= k_1 t - kpq \Rightarrow mp'q + p(mq' + kq) = k_1 t, \quad mq' = -kq, \quad m \frac{dq}{dt} = -kq,$$

$$q = e^{-\frac{k}{m}t}, \quad m \frac{dp}{dt} e^{-\frac{k}{m}t} = k_1 t, \quad p = \frac{k_1}{m} \int e^{\frac{k}{m}t} t \, dt,$$

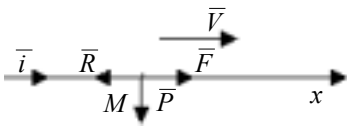
$$\left[\begin{aligned} U_1 = t, \quad dU_1 = dt, \\ dV_1 = e^{\frac{k}{m}t} dt, \quad V_1 = \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} \end{aligned} \right]; \quad p = \frac{k_1}{k} t e^{\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k} \cdot \frac{k_1}{k} e^{\frac{k}{m}t} + C; \quad V = \frac{k_1}{k} \left(t - \frac{m}{k} + \frac{k}{k_1} C e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

$$\text{При } t = 0 \quad V = 0 \Rightarrow C = \frac{mk_1}{k^2}; \quad V = \frac{k_1}{k} \left(t - \frac{m}{k} + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

75 (3975). Точка массой, равной m , движется прямолинейно; на нее действует сила, пропорциональная кубу времени, протекшего с момента, когда скорость была V_0 (коэффициент пропорциональности равен k). Кроме того, точка испытывает противодействие среды, пропорциональное произведению скорости и времени (коэффициент пропорциональности равен k_1). Найти зависимость скорости от времени.

Решение

По условию $m\bar{W} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{P}$; $\bar{F} = kt^3\bar{i}$, $\bar{R} = -k_1\bar{V}t$; $mW_x = F_x + R_x + P_x$, $F_x = kt^3$, $R_x = -k_1Vt$, $P_x = 0$.



Итак, $m \frac{dV}{dt} = kt^3 - k_1Vt$, $V = pq$,

$$V' = p'q + pq', \quad mp'q + p(mq' + k_1qt) = kt^3,$$

$$m \frac{dq}{q} = -k_1t dt \Rightarrow \ln |q| = -\frac{k_1}{m} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Обозначим $\frac{k_1}{2m} = a$. Тогда $q = e^{-at^2}$; $m \frac{dp}{dt} e^{-at^2} = kt^3$;

$$p = \frac{k}{m} \int t^3 e^{at^2} dt = \left[\begin{aligned} at^2 = z, \\ dz = 2at dt \end{aligned} \right] = \frac{k}{m} \int e^z \frac{z}{a} \frac{dz}{2a} = \frac{k}{2a^2m} \int e^z z dz =$$

$$= \left[z = U_1, dz = dU_1, \right] = \frac{k z e^z}{2a^2 m} - \frac{k e^z}{2a^2 m} + C = \frac{k t^2 e^{at^2}}{2am} - \frac{k e^{at^2}}{2a^2 m} + C; V =$$

$$= \frac{kt^2}{2am} - \frac{k}{2a^2 m} + Ce^{-at^2}.$$

$$\text{При } t = 0 \quad V = V_0 \Rightarrow V_0 = -\frac{k}{2a^2 m} + C \Rightarrow C = V_0 + \frac{k}{2a^2 m} = V_0 + \frac{2km}{k_1^2} =$$

$$= V_0 + b, \text{ где } b = \frac{2km}{k_1^2}.$$

$$\text{Итак, } V = (V_0 + b)e^{-at^2} + \frac{k}{2a^2 m}(t^2 a - 1) = (V_0 + b)e^{-at^2} + b(at^2 - 1).$$

76 (3976). Начальная температура тела $\theta_0^\circ\text{C}$ равна температуре окружающей среды. Тело получает тепло от нагревательного прибора (скорость подачи тепла является заданной функцией времени: $c\varphi(t)$, где c – постоянная теплоемкость тела). Кроме того, тело отдает тепло окружающей среде (скорость охлаждения пропорциональна разности между температурами тела и среды). Найти зависимость температуры тела от времени, отсчитываемого от начала опыта.

Решение

$$\frac{d\theta}{dt} = c\varphi(t) - k(\theta - \theta_0); \quad \theta = UV, \quad \theta' = U'V + UV', \quad U'V + UV' + UVk =$$

$$= c\varphi(t) + \theta_0 k; \quad V' + Vk = 0, \quad \frac{dV}{V} = -k dt, \quad \ln|V| = -k \int_0^t dt \Rightarrow V = e^{-kt};$$

$$\frac{dU}{dt} e^{-kt} = c\varphi(t) + \theta_0 k \Rightarrow U = c \int_0^t \varphi(t) e^{kt} dt + \theta_0 k \int_0^t e^{kt} dt = c \int_0^t \varphi(t) e^{kt} dt +$$

$$+ \theta_0 e^{kt} + c_1; \quad \theta = UV = ce^{-kt} \int_0^t \varphi(t) e^{kt} dt + \theta_0 + c_1 e^{-kt}.$$

$$\text{При } t=0 \quad \theta = \theta_0 \Rightarrow c_1 = 0; \quad \theta - \theta_0 = ce^{-kt} \int_0^t \varphi(t) e^{kt} dt.$$

Решить задачи 77 (3977)–78 (3978), учитывая, что если переменный электрический ток $i = i(t)$ течет по проводнику с коэффициентом индуктивности L и сопротивлением R , то падение напряжения вдоль проводника будет равно $L \frac{di}{dt} + Ri$.

77 (3977). Разность потенциалов на зажимах катушки равномерно падает от $E_0 = 2$ В до $E_1 = 1$ В в течение 10 с. Каков будет ток в конце десятой секунды, если в начале опыта он был $16\frac{2}{3}$ А? Сопротивление катушки 0,12 Ом, коэффициент индуктивности 0,1 Гн.

Решение

Закон падения напряжения вдоль проводника имеет вид $E = L \frac{di}{dt} Ri$, $E = E(t)$, $E = E_0 + kt$. Используем начальное условие: $1 = 2 + k \cdot 10 \Rightarrow k = -0,1$.

Итак, $2 - 0,1t = L \frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow \frac{di}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)i = \frac{1}{L}(2 - 0,1t)$; $R = 0,12$ Ом; $L = 0,1$ Гн. Следовательно, $i' + 1,2i = 20 - ti = UV$ $i' = U'V + V'U$, $U'V + U(V' + 1,2V) = 20 - t$, $V' + 1,2V = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -1,2 dt \Rightarrow V = e^{-1,2t}$, $U'e^{-1,2t} = 20 - t \Rightarrow U = \int (20 - t)e^{1,2t} dt + C$; $[20 - t = U_1, dV_1 = e^{1,2t} dt, dU_1 = -dt, V_1 = \frac{1}{1,2}e^{1,2t}]$; $U = \frac{20-t}{1,2}e^{1,2t} + \frac{e^{1,2t}}{1,2^2} + C$; $i = \frac{20-t}{1,2} + \frac{1}{1,44} + Ce^{-1,2t}$.
При $t = 0$ $i = 16\frac{2}{3} \Rightarrow C = -0,6$; $i = \frac{20-t}{1,2} + \frac{1}{1,44} + 0,6e^{-1,2t}$.

$$\text{При } t = 10 \text{ с } i = \frac{10}{1,2} + \frac{1}{1,44} - 0,6 e^{-12} = \underline{\underline{9,03 \text{ а}}}.$$

78 (3978). Найти ток в катушке в момент t , если сопротивление ее R , коэффициент индуктивности L , начальный ток $i_0 = 0$, электродвижущая сила меняется по закону $E = E_0 \sin \omega t$.

Решение

$$E_0 \sin \omega t = L \frac{di}{dt} + Ri; \quad i = UV, \quad i' = U'V + V'U; \quad LU'V + U(LV' + RV) =$$

$$= E_0 \sin \omega t; \quad LV' + RV = 0 \Rightarrow V = e^{-\frac{R}{L}t}; \quad E_0 \sin \omega t = LU'e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow U =$$

$$= \frac{E_0}{L} \int \sin \omega t e^{\frac{R}{L}t} dt = \left[\begin{array}{l} U_1 = \sin \omega t, \quad dU_1 = \omega \cos \omega t dt, \\ dV_1 = e^{\frac{R}{L}t} dt, \quad V_1 = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \end{array} \right] = \frac{E_0}{L} \left[\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \times \right.$$

$$\times \sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t dt \left. \right] = \frac{E_0}{L} \left[\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{L^2\omega}{R^2} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t - \right.$$

$$\left. - \frac{L^2\omega^2}{R^2} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt \right]; \quad \left[\begin{array}{l} U_2 = \cos \omega t, \quad dU_2 = -\omega \sin \omega t dt, \\ dV_2 = e^{\frac{R}{L}t} dt, \quad V_2 = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \end{array} \right];$$

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = \frac{R^2}{R^2 + L^2\omega^2} = \left(\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{\omega L^2}{R^2} \cos \omega t \right) + C;$$

$$U = \frac{E_0 R^2}{R^2 + L^2\omega^2} \left(\frac{1}{R} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t - \frac{\omega L}{R^2} \cos \omega t \right) + \frac{E_0}{L} C; \quad i = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2} \times$$

$$\times (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t} C.$$

$$\text{При } t = 0 \quad i = 0 \Rightarrow C = \frac{\omega L^2}{R^2 + L^2 \omega^2},$$

$$i = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(\omega L e^{-\frac{R}{L}t} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t \right).$$

Разные задачи

(уравнения с разделяющимися переменными,
однородные и линейные)

79 (3979). $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$

Решение

$$\begin{aligned} y' &= 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x} \right)^2, \quad \frac{y}{x} = U, \quad y' = xU' + U; \quad xU' + U = 1 + U + U^2 \Rightarrow x \frac{dU}{dx} = \\ &= 1 + U^2 \Rightarrow \frac{dU}{1 + U^2} = \frac{dx}{x}; \quad \arctg U = \ln |C_1 x| \Rightarrow x = \frac{1}{C_1} e^{\arctg U}, \quad \frac{1}{C_1} = C, \\ &\underline{\underline{x = C e^{\arctg \frac{y}{x}}}}. \end{aligned}$$

80 (3980). $x^2 dy + (3 - 2xy) dx = 0.$

Решение

$$\begin{aligned} x^2 y' + 3 - 2xy &= 0, \quad y = UV, \quad y' = U'V + V'U; \quad x^2 U'V + x^2 UV' - 2xUV + \\ &+ 3 = 0 \Rightarrow x^2 U'V + U(V'x^2 - 2xV) + 3 = 0, \quad V'x^2 - 2xV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln |V| = \ln x^2 \Rightarrow V = x^2, \quad x^4 \frac{dU}{dx} + 3 = 0 \Rightarrow dU = -\frac{3dx}{x^4} \Rightarrow U = \\ &= \frac{1}{x^3} + C, \quad \underline{\underline{y = Cx^2 + \frac{1}{x}}}. \end{aligned}$$

81 (3981). $x(x^2 + 1)y' + y = x(1 + x^2)^2$.

Решение

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x(1+x^2)} &= 1+x^2, y = UV, y' = U'V + V'U; U'V + V'U + \frac{UV}{x(1+x^2)} = \\ &= 1+x^2 \Rightarrow U'V + U \left(V' + \frac{V}{x(1+x^2)} \right) = 1+x^2, V' + \frac{V}{x(1+x^2)} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = \\ &= -\frac{dx}{x(1+x^2)} = \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right) dx, \int \frac{dV}{V} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|V| = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \ln|x| \Rightarrow V = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, \frac{dU}{dx} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1+x^2 \Rightarrow dU = \\ &= x\sqrt{1+x^2} dx, U = \int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{1/2} d(1+x^2) = \\ &= \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + C; y = UV = \frac{(1+x^2)^2}{3x} + \frac{C\sqrt{1+x^2}}{x}. \end{aligned}$$

82 (3982). $y' = \frac{y+1}{x}$.

Решение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y+1| = \ln|cx|; y = \underline{\underline{Cx-1}}.$$

83 (3983). $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

Решение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} \Rightarrow \frac{y dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)} \Rightarrow \int \frac{y dy}{1+y^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx;$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \ln|C_1 x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2); \sqrt{1+y^2} = \frac{x C_1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \underline{\underline{(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2}}, \text{ где } C = C_1^2.$$

84 (3984). $(8y+10x) dx + (5y+7x) dy = 0$.

Решение

$$y' = -\frac{8y+10x}{5y+7x}; \quad y' = -\frac{8\frac{y}{x}+10}{5\frac{y}{x}+7}; \quad y = xU, \quad y' = xU' + U; \quad xU' + U =$$

$$= -\frac{8U+10}{5U+7} \Rightarrow x \frac{dU}{dx} (5U+7) = -8U-10-5U^2-7U; \quad x \frac{dU}{dx} (5U+7) =$$

$$= -5U^2-15U-10 \Rightarrow -\frac{1}{5} \cdot \frac{5U+7}{U^2+3U+2} dU = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{U+\frac{7}{5}}{U^2+3U+2} dU = -\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{(2U+3)\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}{U^2+3U+2} dU = \frac{1}{2} \int \frac{d(U^2+3U+2)}{U^2+3U+2} -$$

$$-\frac{1}{10} \int \frac{dU}{\left(U+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \ln|U^2+3U+2| + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\frac{1}{2}+U+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}-U-\frac{3}{2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|U^2+3U+2| + \frac{1}{10} \ln \left| \frac{U+2}{U+1} \right| = \ln \sqrt{U^2+3U+2} - \frac{1}{10} \ln \left| \frac{U+2}{U+1} \right| = \ln \left| \frac{C_1}{x} \right|;$$

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + \frac{3y}{x}} + 2 \sqrt[10]{\frac{\frac{y}{x} + 2}{\frac{y}{x} + 1}} = \frac{C_1}{x} \Rightarrow (y^2 + 3xy + 2x^2)^5 \frac{y + 2x}{y + x} = C_1^{10};$$

$$\left[(y^2 + xy) + (2xy + 2x^2) \right]^5 \frac{y + 2x}{y + x} = C_2, \text{ где } C_2 = C_1^{10}; \left[y(y + x) + 2x(y + x) \right]^5 \frac{y + 2x}{y + x} = C_2 \Rightarrow (y + 2x)^5 (y + x)^5 \frac{y + 2x}{y + x} = C_2; (y + x)^4 (y + 2x)^6 = C_2 \Rightarrow \underline{\underline{(y + x)^2 (y + 2x)^3 = C}}, \text{ где } C = \sqrt{C_2}.$$

85 (3985). $x^3 y' = y(y^2 + x^2).$

Решение

$$y' = \left(\frac{y}{x} \right)^3 + \frac{y}{x}; \quad \frac{y}{x} = U. \text{ Тогда } y' = U'x + U; \quad U'x + U = U^3 + U \Rightarrow \frac{dU}{U^3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2U^2} = \ln C_1 |x| \Rightarrow C_1 x = e^{-\frac{x^2}{2y^2}} \text{ или } \underline{\underline{x = C e^{-\frac{x^2}{2y^2}}}}, \text{ где } C = \frac{1}{C_1}.$$

86 (3986). $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

Решение

$$y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad \frac{y}{x} = U, \quad y' = xU' + U; \quad xU' + U - U = \operatorname{tg} U \Rightarrow \frac{x dU}{dx} = \operatorname{tg} U \Rightarrow \frac{dU}{\operatorname{tg} U} = \frac{dx}{x}; \quad \ln |\sin U| = \ln |Cx| \Rightarrow \underline{\underline{\sin \frac{y}{x} = Cx}}.$$

87 (3987). $\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0.$

Решение

$$1 - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{y}{x} = U, \quad y' = U'x + U; \quad 1 - U \cos U + \cos U \times \\ \times (U'x + U) = 0 \Rightarrow \cos U dU = -\frac{dx}{x}; \quad \sin U + \ln |x| = C \Rightarrow \sin \frac{y}{x} + \ln |x| = C.$$

88 (3988). $y' = e^{2x} - e^x y$.

Решение

$$y = UV, \quad y' = U'V + V'U; \quad U'V + V'U + e^x UV = e^{2x}; \quad U'V + U(V' + e^x V) = e^{2x}; \quad V' + Ve^x = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -e^x dx \Rightarrow \ln |V| = -e^x \Rightarrow V = e^{-e^x};$$

$$U' e^{-e^x} = e^{2x} \Rightarrow dU = e^{2x} e^{e^x} dx; \quad U = \int e^{2x} e^{e^x} dx = \int z e^z dz = z e^z -$$

$$- \int e^z dz + C = \left[\begin{array}{l} e^x = z, x = \ln z, \left| z = U_1, dU_1 = dz, \right. \\ dx = \frac{dz}{z} \end{array} \right| e^z dz = dV_1, V_1 = e^z \left. \right] = e^z (z - 1) + C = \\ = e^{e^x} (e^x - 1) + C; \quad y = UV = \underline{\underline{e^x - 1 + C e^{-e^x}}}.$$

89 (3989). $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$.

Решение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(2y^2 - xy) + (x^2 - y^2)}{2y^2 - xy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 1 + \frac{x^2 - y^2}{2y^2 - xy}, \quad \frac{x}{y} = U, \quad x' = yu' + u;$$

$$yU' + U = 1 + \frac{U^2 - 1}{2 - U} \Rightarrow U'y(2 - U) = 2U^2 - 3U + 1; \quad \frac{2 - U}{2U^2 - 3U + 1} dU =$$

$$= \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{(2 - U) dU}{(U - 1) \left(U - \frac{1}{2} \right)} = 2 \frac{dy}{y}; \quad \frac{2 - U}{(U - 1) \left(U - \frac{1}{2} \right)} = \frac{A}{U - 1} + \frac{B}{U - \frac{1}{2}} \Rightarrow A = 2,$$

$$B = -3; \ln y^2 = \ln (U-1)^2 + \ln \frac{1}{\left(U - \frac{1}{2}\right)^3} + \ln C_1 \Rightarrow y^2 = \frac{(U-1)^2 C_1}{\left(U - \frac{1}{2}\right)^3};$$

$$\underline{\underline{y(2x-y)^3 = (x-y)C}}, \text{ где } C = 8C_1.$$

90 (3990). $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}.$

Решение

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= x \cos y + \sin 2y, \quad x = UV, \quad x'_y = U'V + V'U; \quad U'V + V'U - UV \cos y = \\ &= \sin 2y \Rightarrow U'V + U(V' - V \cos y) = \sin 2y; \quad V' - V \cos y = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = \\ &= \cos y \, dy \Rightarrow \ln |V| = \sin y \Rightarrow V = e^{\sin y}; \quad \frac{dU}{dy} e^{\sin y} = 2 \sin y \cos y \Rightarrow dU = \\ &= 2e^{-\sin y} \sin y \cos y \, dy; \quad U = 2 \int e^{-\sin y} \sin y \cos y \, dy = 2 \int e^{-z} z \, dz = \\ &= \left[\sin y = z, \cos y \, dy = dz \left| \begin{array}{l} z = U_1, dU_1 = dz, \\ e^{-z} dz = dV_1, V_1 = -e^{-z} \end{array} \right. \right] = 2(-ze^{-z} + \int e^{-z} dz) = \\ &= -2e^{-z}(z+1) + C = -2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C; \quad x = UV = \underline{\underline{-2(\sin y + 1) + Ce^{\sin y}}}. \end{aligned}$$

91 (3991). $(x - 2xy - y^2)dy + y^2dx = 0.$

Решение

$$\begin{aligned} x - 2xy - y^2 + y^2x' &= 0, \quad x = UV, \quad x' = U'V + V'U; \quad y^2U'V + U(y^2V' + \\ &+ V(1-2y)) = y^2; \quad y^2V' = V(2y-1) \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{(2y-1)dy}{y^2} \Rightarrow \ln |V| = \end{aligned}$$

$$= 2 \ln |y| + \frac{1}{y} \Rightarrow V = e^{\ln y^2 + 1/y} = y^2 e^{1/y}; \quad y^2 \frac{dU}{dy} y^2 e^{1/y} = y^2 \Rightarrow dU =$$

$$= e^{-1/y} \frac{dy}{y^2} \Rightarrow U = \int e^{-1/y} d\left(-\frac{1}{y}\right) = e^{-1/y} + C; \quad \underline{\underline{x = y^2(1 + Ce^{1/y})}}.$$

92 (3992). $y' + y \cos x = \sin x \cos x$.

Решение

$$y = UV, \quad y' = U'V + V'U; \quad U'V + V'U + UV \cos x = \sin x \cos x;$$

$$U'V + U(V' + V \cos x) = \sin x \cos x; \quad V' + V \cos x = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\cos x \, dx \Rightarrow$$

$$V = e^{-\sin x}; \quad \frac{dU}{dx} e^{-\sin x} = \sin x \cos x \Rightarrow dU = e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx;$$

$$U = \int e^{\sin x} \sin x \cos x \, dx = \int e^z z \, dz = \left[\sin x = z, \quad \cos x \, dx = \right.$$

$$\left. = dz \right|_{\substack{z=U_1, \\ e^z dz = dV_1, \quad V_1 = e^z}} = e^z (z - 1) + C = e^{\sin x} (\sin x - 1) + C;$$

$$y = UV = \underline{\underline{\sin x - 1 + Ce^{-\sin x}}}.$$

93 (3993). $(x+1)y' - ny = e^x(x+1)^{n+1}$.

Решение

$$y = UV, \quad y' = U'V + V'U; \quad U'V + V'U - \frac{nUV}{x+1} = e^x(x+1)^n; \quad V' - \frac{nV}{x+1} =$$

$$= 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{n \, dx}{x+1} \Rightarrow \ln |V| = n \ln |x+1| \Rightarrow V = (x+1)^n; \quad \frac{dU}{dx} (x+1)^n = e^x(x +$$

$$+ 1)^n \Rightarrow dU = e^x dx \Rightarrow U = e^x + C; \quad y = UV = \underline{\underline{(e^x + C)(1+x)^n}}.$$

94 (3994). $y \, dx = (y^3 - x) \, dy$.

Решение

$$\begin{aligned} yx' &= y^3 - x \Rightarrow x' + \frac{x}{y} = y^2; \quad x = UV, \quad x' = U'V + V'U; \quad U'V + V'U + \frac{UV}{y} = \\ &= y^2 \Rightarrow U'V + U \left(V' + \frac{V}{y} \right) = y^2; \quad V' + \frac{V}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|V| = \\ &= -\ln|y| \Rightarrow V = \frac{1}{y}; \quad \frac{dU}{dy} = y^3 \Rightarrow U = \frac{y^4}{4} + C_1; \quad x = \frac{y^3}{4} + \frac{C_1}{y} \Rightarrow \\ &\underline{\underline{4xy + C = y^4}} \quad (C = -4C_1). \end{aligned}$$

95 (3995). $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (x+y) \frac{dy}{dx} + xy = 0$.

Решение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y \pm \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}}{2} = \frac{(x+y) \pm (x-y)}{2}.$$

а) $\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{x^2}{2} + C}}$;

б) $\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|yC_1| = x \Rightarrow \underline{\underline{y = Ce^x}} \quad \left(C = \frac{1}{C_1} \right).$

96 (3996). Найти общее решение дифференциального уравнения

$$yy' \sin x = \cos x (\sin x - y^2).$$

Решение

Обозначим $y^2 = z$, $2yy' = z'$, $yy' = \frac{z'}{2}$. Тогда $\frac{1}{2} z' \sin x = \cos x (\sin x -$

$$-z) \Rightarrow z' + \frac{2\cos x}{\sin x} z = 2\cos x; \quad z = UV, \quad z' = U'V + V'U; \quad U'V + U \left(V' + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2 \cos x}{\sin x} V \Big) = 2 \cos x; \quad V' + \frac{2 \cos x}{\sin x} V = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -2 \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \ln |V| = \\
 & = -2 \ln |\sin x| \Rightarrow V = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad \frac{dU}{dx} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = 2 \cos x \Rightarrow U = \\
 & = 2 \int \sin^2 x d(\sin x) + C; \quad U = \frac{2}{3} \sin^3 x + C; \quad y^2 = \frac{2}{3} \sin x + \frac{C}{\sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

97 (3997). $y' = (x + y)^2$.

Решение

Обозначим $x + y = z$, $1 + y' = z'$, $y' = z' - 1$. Тогда $z' - 1 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} =$

$$= z^2 + 1 \Rightarrow x + C = \operatorname{arctg} z \Rightarrow \underline{\underline{x + C = \operatorname{arctg} (x + y)}}.$$

98 (3998). Убедиться в том, что интегральными кривыми уравнения $(1 - x^2)y' + xy = ax$ являются эллипсы и гиперболы с центрами в точке $(0; a)$ и осями, параллельными координатным осям, причем каждая кривая имеет одну постоянную ось, длина которой равна 2.

Решение

$$\begin{aligned}
 & y' + \frac{x}{1 - x^2} y = \frac{ax}{1 - x^2}; \quad y = UV, \quad y' = U'V + V'U; \quad U'V + U \left(V' + \right. \\
 & \left. + \frac{x}{1 - x^2} V \right) = \frac{ax}{1 - x^2}; \quad V' + \frac{x}{1 - x^2} V = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{x}{1 - x^2} dx \Rightarrow \ln |V| = \\
 & = \frac{1}{2} \ln |1 - x^2| \Rightarrow
 \end{aligned}$$

a) $V = \sqrt{1 - x^2}$; б) $V = \sqrt{x^2 - 1}$.

$$\text{а) При } V = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \frac{dU}{dx} \sqrt{1-x^2} = \frac{ax}{1-x^2} \Rightarrow dU = ax(1-x^2)^{-3/2} dx$$

$$\Rightarrow U = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + C \Rightarrow y = a + C\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 - \frac{(y-a)^2}{C^2} = 1 \text{ — семейство}$$

эллипсов с центром в точке $(0; a)$.

$$\text{б) При } V = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow \frac{dU}{dx} \sqrt{x^2-1} = -\frac{ax}{x^2-1} \Rightarrow dU = -ax(x^2 -$$

$$-1)^{-3/2} dx \Rightarrow U = \frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + C \Rightarrow y = a + C\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x^2 - \frac{(y-a)^2}{C^2} = 1 \text{ —}$$

семейство гипербол с центром в точке $(0; a)$.

В задачах 99 (3999)–102 (4002) найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям.

$$\mathbf{99} \text{ (3999). } \frac{y-xy'}{x+yy'} = 2; \quad y|_{x=1} = 1.$$

Решение

$$\frac{\frac{y}{x} - y'}{\frac{y}{x} + y'} = 2; \quad \frac{y}{x} = U, \quad y' = U + U'x; \quad \frac{U - U'x - U}{1 + U^2 + UU'x} = 2; \quad U'x(1+2U) =$$

$$= -2(1+U^2) \Rightarrow \frac{(1+2U)dU}{1+U^2} = \frac{-2dx}{x} \Rightarrow \operatorname{arctg} U = -\ln(1+U^2) - \ln x^2 + C;$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) = C.$$

$$\text{При } x=1 \text{ и } y=1 \quad C = \frac{\pi}{4} + \ln 2; \quad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4} + \ln 2.$$

$$\mathbf{100} \text{ (4000). } y' - \frac{y}{1-x^2} = 1+x; \quad y|_{x=0} = 1.$$

Решение

$$y = UV, \quad y' = U'V + V'U; \quad U'V + U\left(V' - \frac{V}{1-x^2}\right) = 1+x; \quad V' - \frac{V}{1-x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dx}{1-x^2} \Rightarrow \ln|V| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Rightarrow V = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad \frac{dU}{dx} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1+x \Rightarrow$$

$$U = \int \sqrt{1-x^2} dx + C; \quad |x = \sin z, \quad dx = \cos z dz|; \quad U = \int \cos^2 z dz + C = \\ = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2z) dz = \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} \sin 2z + C = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C;$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$\text{При } x = 0 \quad y = 1 \Rightarrow C = 2; \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + 2 \right).$$

101 (4001). $(1+e^x)yy' = e^y; \quad y|_{x=0} = 0.$

Решение

$$e^{-y} y dy = \frac{dx}{1+e^x} \Rightarrow \int ye^{-y} dy = \int \frac{dx}{1+e^x} + C_1;$$

$$\left[y = U_1, \quad dy = dU_1, \quad \left| 1+e^x = z, \quad x = \ln(z-1), \right. \right. \\ \left. \left. e^{-y} dy = dV_1, \quad V_1 = -e^{-y} \quad \left| dx = \frac{dz}{z-1} \right. \right]; \quad -ye^{-y} + \int e^{-y} dy =$$

$$= \int \frac{dz}{z(z-1)} + C_1; \quad -ye^{-y} - e^{-y} = \int \frac{dz}{(z-1)} - \int \frac{dz}{z} + C_1; \quad -e^{-y}(1+y) =$$

$$= \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| + C_1; \quad e^{-y}(1+y) = \ln \left| \frac{z}{z-1} \right| + C \quad (C = -C_1); \quad e^{-y}(1+y) =$$

$$= \ln \frac{e^x + 1}{e^x} + C.$$

$$\text{При } x = 0 \text{ и } y = 0 \Rightarrow C = 1 - \ln 2; \quad e^{-y}(1+y) = \ln \frac{e^x + 1}{2} - x + 1.$$

102 (4002). $y' = 3x^2y + x^5 + x^2; \quad y|_{x=0} = 1.$

Решение

$$\begin{aligned} y &= UV, \quad y' = U'V + V'U; \quad U'V + U(V' - 3x^2V) = x^5 + x^2; \quad V' - 3x^2V = \\ &= 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = 3x^2 dx \Rightarrow \ln |V| = x^3 \Rightarrow V = e^{x^3}; \quad \frac{dU}{dx} e^{x^3} = x^5 + x^2 \Rightarrow U = \\ &= \int e^{-x^3} (x^5 + x^2) dx + C = \int e^{-x^3} x^2 dx + \int e^{-x^3} x^5 dx + C; \quad \int x^2 e^{-x^3} = -\frac{1}{3} e^{-x^3}. \end{aligned}$$

Второй интеграл берем по частям: $U_1 = x^3, \quad dU_1 = 3x^2 dx;$

$$\begin{aligned} dV_1 &= e^{-x^3} x^2 dx; \quad V_1 = -\frac{1}{3} e^{-x^3}. \quad \text{Тогда} \quad \int e^{-x^3} x^5 dx = -\frac{1}{3} x^3 e^{-x^3} + \\ &+ \int x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3} e^{-x^3} \left(V_1 = -\frac{1}{3} e^{-x^3} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } U = -\frac{1}{3} e^{-x^3} (x^3 + 2) + C, \quad y = UV = -\frac{1}{3} (x^3 + 2) + C e^{x^3}.$$

$$\text{При } x = 0 \text{ и } y = 0 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{3} + C \Rightarrow C = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{5}{3} e^{x^3} - \frac{1}{3} (x^3 + 2).$$

103 (4003). Доказать, что только прямые $y = kx$ и гиперболы $xy = t$ обладают следующим свойством: длина полярного радиуса любой их точки равна длине касательной, проведенной в этой точке.

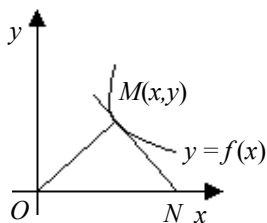
Решение

$$\text{По условию } |OM| = |MN|; \quad |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ имеет вид

$$Y - y = y'(X - x).$$

При $Y = 0$ $X = -\frac{y}{y'} + x$, т. е. $N\left(-\frac{y}{y'} + x, 0\right)$; $|MN| = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2}$;



$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} \Rightarrow xy' = \pm y.$$

a) $xy' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \underline{\underline{y = kx}}$ – прямые;

б) $xy' = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{m}{x}}}$ – гиперболы.

104 (4004). Найти линию, у которой длина нормали пропорциональна квадрату ординаты. Коэффициент пропорциональности равен k .

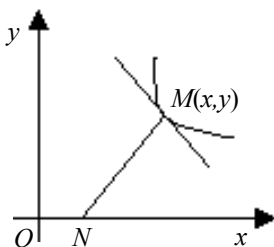
Решение

Уравнение нормали имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

При $Y = 0$ $X = yy' + x$, $|MN| = \sqrt{y^2 y'^2 + y^2} = y \sqrt{y'^2 + 1}$.

По условию $y \sqrt{y'^2 + 1} = ky^2 \Rightarrow y' = \sqrt{k^2 y^2 - 1}$; $\int \frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 - 1}} =$



$$= \int dx + C_1 \Rightarrow \pm \frac{1}{k} \ln \left| ky + \sqrt{k^2 y^2 - 1} \right| = x + C_1;$$

$$\begin{aligned} ky + \sqrt{k^2 y^2 - 1} &= e^{kx+C} \quad (C = C_1 k); \quad \sqrt{k^2 y^2 - 1} = \\ &= e^{kx+C} - ky; \quad k^2 y^2 - 1 = e^{2(kx+C)} - 2kye^{kx+C} + \\ &+ k^2 y^2 \Rightarrow y = \underline{\underline{\frac{1}{2k} \left(e^{kx+C} + e^{-(kx+C)} \right)}}. \end{aligned}$$

105 (4005). Найти линию, у которой любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

Решение

По условию $|NO| = |NM|$. Уравнение касательной имеет вид

$$Y - y = y'(X - x).$$

При $X = 0$ $Y = y - xy' \Rightarrow N(0; y - xy')$, $|NO| = |y - xy'|$,

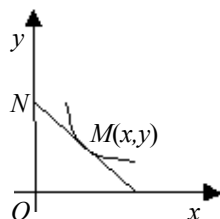
$$|NM| = \sqrt{x^2 + x^2 y'^2}, \quad |y - xy'| = |x| \sqrt{1 + y'^2},$$

$$y^2 - 2xyy' + x^2 y'^2 = x^2(1 + y'^2) \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}y' = 1,$$

$$\frac{y}{x} = U, \quad y' = U'x + U, \quad U^2 - 2U^2 - 2UxU' = 1;$$

$$2UxU' = -(1 + U^2) \Rightarrow \frac{2U dU}{1 + U^2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(1 + U^2) = \ln \frac{C}{x} \Rightarrow 1 + U^2 =$$

$$= \left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{C}{x} \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 = Cx}}.$$



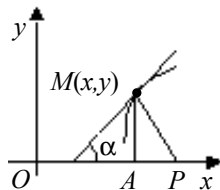
106 (4006). Найти уравнение линии, пересекающей ось абсцисс в точке $x = 1$ и обладающей таким свойством: длина поднормали в каждой точке линии равна среднему арифметическому координат этой точки.

Решение

$$|AP| = \frac{x + y}{2}, \quad |AP| = y \operatorname{tg} \alpha = yy', \quad 2yy' = x + y,$$

$$2\frac{y}{x}y' = 1 + \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x} = U, \quad y' = U'x + U, \quad 2UxU' +$$

$$+ 2U^2 = 1 + U \Rightarrow \frac{2U dU}{1 + U - 2U^2} = \frac{dx}{x},$$



$$2 \int \frac{(-4U+1)\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}}{1+U-2U^2} dU = \int \frac{dx}{x}; -\frac{1}{2} \ln |1+U-2U^2| +$$

$$+ \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \ln \left| \frac{\frac{3}{4} + U - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} - U + \frac{1}{4}} \right| = \ln |Cx|, -3 \ln |1+U-2U^2| + \ln \left| \frac{\frac{1}{2} + U}{1-U} \right| = 6 \ln |C_1 x|;$$

$$\frac{\frac{1}{2} + U}{(1-U)(1+U-2U^2)^3} = Cx^6 \quad (C = C_1^6) \Rightarrow \frac{(x+2y)x^6}{2(x-y)(x^2+xy-2y^2)^3} = Cx^6.$$

При $x = 1$ и $y = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}; (x+2y) = (y-x)(y-x)^3(x+2y)^3 \Rightarrow$
 $(y-x)^2(x+2y) = 1.$

107 (4007). Найти линию, у которой площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной точки и касательной в этой точке, равна половине квадрата абсциссы.

Решение

По условию $S_{OPMN} = \frac{1}{2}x^2$. Тогда $\frac{1}{2}(y + |ON|)x = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y + |ON| = x$;

$$2y + |LN| = x; |LN| = x \operatorname{tg} \beta = x \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -x \operatorname{tg} \alpha = -xy'; 2y - xy' = x,$$

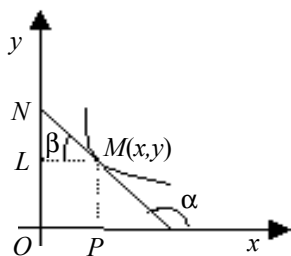
$$y = UV, y' = U'V + V'U; 2UV - xU'V -$$

$$-xUV' = x, U(2V - xV') - xU'V = x,$$

$$U(2V - xV') - xU'V = x; -x^2 \frac{dU}{dx} = 1 \Rightarrow$$

$$dU = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow U = \frac{1}{x} + C; \underline{\underline{y = x + Cx^2}} \text{ — семей-$$

ство парабол.



108 (4008). Найти линию, для которой площадь, заключенная между осью абсцисс, линией и двумя ординатами, одна из которых постоянная, а другая – переменная, равна отношению куба переменной ординаты к переменной абсциссе.

Решение

По условию $\int_a^x y \, dx = \frac{y^3}{x}$. Дифференцируем обе части равенства по x :

$$y = \frac{3y^2 y' x - y^3}{x^2} \Rightarrow x^2 = 3y y' x - y^2 \Rightarrow 1 + \frac{y^2}{x^2} = 3 \frac{y}{x} y'; \quad \frac{y}{x} = U,$$

$$y' = U' x + U, \quad 1 + U^2 = 3U U' x + 3U^2 \Rightarrow 1 - 2U^2 = 3U U' x;$$

$$\frac{3U \, dU}{1 - 2U^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{3}{4} \ln |1 - 2U^2| = \ln |C_1 x| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1 - 2U^2)^3}} = C_1 x;$$

$$\frac{x^6}{(x^2 - 2y^2)^3} = C_1^4 x^4 \Rightarrow -\frac{1}{C_1^4} x^2 = (2y^2 - x^2)^3 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{(2y^2 - x^2)^3 = Cx^2}} \quad \left(-\frac{1}{C_1^4} = C \right).$$

109 (4009). Найти линию, для которой площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, двумя ординатами и дугой MM' этой линии, пропорциональна дуге MM' при любом выборе точек M и M' .

Решение

По условию

$$\int_a^x y \, dx = k S, \quad S = \widetilde{MM'}}, \quad (1)$$

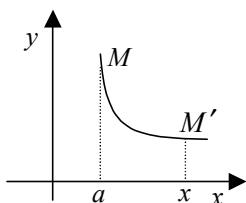
От обеих частей (1) берем производную по x :

$$y = k \frac{dS}{dx} \quad \text{или} \quad y = k \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1} \Rightarrow \frac{k \, dy}{\sqrt{y^2 - k^2}} = dx \Rightarrow$$

$$k \ln |y + \sqrt{y^2 - k^2}| = x + C_1 \Rightarrow y + \sqrt{y^2 - k^2} = C_2 e^{x/k} \quad (C_2 = e^{C_1/k}); \quad y^2 - k^2 =$$

$$= C_2^2 e^{2x/k} - 2y C_2 e^{x/k} + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} C_2 e^{x/k} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{C_2} e^{-x/k} \text{ или } y = \frac{a e^{x/k} + b e^{-x/k}}{2} - \text{цепная}$$



$$\text{линия } \left(a = C_2, b = \frac{k^2}{C_2} \right).$$

110 (4010). Найти линию, для которой абсцисса центра тяжести криволинейной трапеции, образованной осями координат, прямой $x = a$ и линией, была бы равна $3a/4$ при любом a .

Решение

$$\text{Абсцисса центра тяжести } x_c = \frac{\int_0^a xy \, dx}{\int_0^a y \, dx}, \text{ где } x_c = \frac{3}{4}a \text{ по условию.}$$

После замены a на x в верхнем пределе интегрирования и дифференцирования имеем

$$\frac{3}{4} x \int_0^x y \, dx = \int_0^x xy \, dx \Rightarrow \frac{3}{4} \int_0^x y \, dx + \frac{3}{4} xy = xy.$$

Еще раз дифференцируем последнее равенство:

$$\frac{3}{4} y + \frac{3}{4} y + \frac{3}{4} xy' = y + xy' \Rightarrow 2y = xy' \Rightarrow 2 \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}; \quad \underline{\underline{y = Cx^2}} - \text{параболы.}$$

111 (4011). Найти линию, все касательные которой проходят через данную точку (x_0, y_0) .

Решение

Уравнение любой касательной к искомой линии есть $Y - y = y'(X - x)$; точка $(x_0; y_0)$ принадлежит касательной. Тогда $y - y_0 = y'(x - x_0) \Rightarrow \frac{dy}{y_0 - y} = \frac{dx}{x_0 - x} \Rightarrow \ln |y - y_0| = \ln |x - x_0| + \ln |C|$;
 $y - y_0 = C(x - x_0)$.

112 (4012). Найти линию, проходящую через начало координат, все нормали к которой проходят через данную точку $(x_0; y_0)$.

Решение

По условию $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$, точка $(x_0; y_0)$ принадлежит нормали.

Тогда $y_0 - y = -\frac{1}{y'}(x_0 - x) \Rightarrow (y - y_0) = -(x - x_0) dx$; $\frac{(y - y_0)^2}{2} = -\frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{c}{2}$; $x^2 + y^2 = 2(xx_0 + yy_0)$ – уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$.

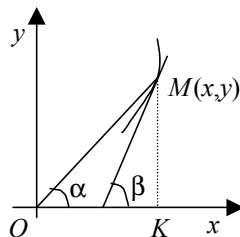
113 (4013). Какая линия обладает следующим свойством: угол, составляемый с осью Ox касательной к линии в любой ее точке, вдвое больше угла, который составляет с той же осью полярный радиус точки касания.

Решение

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{tg} \beta = y'$; $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $\beta = \operatorname{arctg} y'$; $2\alpha = \beta \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} =$

$= \operatorname{arctg} y'$; $\operatorname{tg} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} y') \Rightarrow$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)} = y' \quad \text{или} \quad \frac{2 \frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = y'.$$



$$\text{Пусть } \frac{y}{x} = U, \quad y' = U'x + U, \quad \frac{2U}{1-U^2} = U'x + U, \quad U'x(1-U^2) = \\ = U(1+U^2); \quad \int \frac{1-U^2}{U(1+U^2)} dU = \int \frac{dx}{x}; \quad \frac{1-U^2}{U(1+U^2)} = \frac{A}{U} + \frac{BU+C}{1+U^2};$$

$$U^2|A+B=-1,$$

$$1-U^2 = A + AU^2 + BU^2 + CU; \quad U|C=0, \quad \Rightarrow B=-2;$$

$$U^0|A=1$$

$$\int \frac{dU}{U} - \int \frac{2U dU}{1+U^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|; \quad \ln|U| - \ln(1+U^2) = \ln|Cx|; \quad \frac{C \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} =$$

$$= x \Rightarrow \frac{Cy}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow Cy = x^2 + y^2 \text{ или } x^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4} - \text{окружности}$$

с центром на оси Oy , касающиеся оси Ox .

114 (4014). На тело массы $m = 1$ действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности равен k_1). Кроме того, тело испытывает противодействие среды, пропорциональное скорости тела (коэффициент пропорциональности равен k_2). Найти закон движения тела (зависимость пути от времени).

Решение

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{R} + \overline{P}, \quad P_x = 0; \quad \overline{F} = k_1 t \vec{i}, \quad \overline{R} = -k_2 \overline{V}; \quad F_x = k_1 t,$$

$$R_x = -k_2 V; \quad mW_x = m \frac{dV}{dt}, \quad m=1 \Rightarrow V' = k_1 t - k_2 V; \quad V = pq,$$

$$p'q + q'p = k_1 t - k_2 pq, \quad p'q + p(q' + k_2 q) = k_1 t; \quad q' + k_2 q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} =$$

$$\begin{array}{c} \vec{i} \quad \vec{R} \quad M \quad \vec{F} \quad \vec{V} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \overline{P} \quad \overline{P} \quad \overline{P} \quad \overline{P} \end{array} \quad \begin{array}{l} = -k_2 dt \Rightarrow q = e^{-k_2 t}; \quad \frac{dp}{dt} e^{-k_2 t} = k_1 t \Rightarrow \\ dp = k_1 t e^{k_2 t} dt \Rightarrow p = k_1 \int t e^{k_2 t} dt; \end{array}$$

$$\left[t = U_1, dV_1 = e^{k_2 t} dt, dU_1 = dt, V_1 = \frac{1}{k_2} e^{k_2 t} \right]; p = \frac{k_1}{k_2} t e^{k_2 t} - \frac{k_1}{k_2^2} e^{k_2 t} + C_1;$$

$$V = pq = \frac{k_1}{k_2} t - \frac{k_1}{k_2^2} + C_1 e^{-k_2 t}, V = \frac{dS}{dt} \Rightarrow S = \int V dt + S_0;$$

$$S = S_0 + C e^{-k_2 t} - \frac{k_1}{k_2^2} t + \frac{k_1}{2 k_2} t^2 \left(C = -\frac{C_1}{k_2} \right).$$

115 (4015). Частица падает в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости частицы. Показать, что уравнение движения будет $\frac{dV}{dt} = g - kV^2$, где k – постоянная, g – ускорение силы тяжести.

Проинтегрировать это уравнение и показать, что V стремится к $\sqrt{\frac{g}{k}}$ при $t \rightarrow +\infty$.

Решение

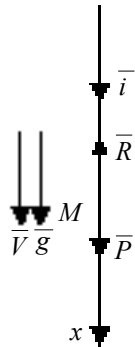
$$m\bar{W} = \bar{P} + \bar{R}, \bar{P} = m\bar{g}, \bar{R} = -k_1 V^2 \bar{i}; m \frac{dV}{dt} = P_x + R_x = mg - k_1 V^2 \Rightarrow \frac{dV}{dt} =$$

$$= g - kV^2 \quad (k = k_1 / m); \frac{dV}{g - kV^2} = dt \Rightarrow \frac{1}{g} \int_0^V \frac{dV}{1 - \frac{k}{g} V^2} = \int_0^t dt \Rightarrow \operatorname{tg} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{k}{g}} V}{1 - \sqrt{\frac{k}{g}} V} \right|; \frac{1 + \sqrt{\frac{k}{g}} V}{1 - \sqrt{\frac{k}{g}} V} = e^{2\sqrt{kg} t} \Rightarrow 1 + \sqrt{\frac{k}{g}} V =$$

$$= e^{2\sqrt{kg} t} - \sqrt{\frac{k}{g}} V e^{2\sqrt{kg} t} \Rightarrow V = \frac{e^{2\sqrt{kg} t} - 1}{e^{2\sqrt{kg} t} + 1} \sqrt{\frac{g}{k}}; \lim_{t \rightarrow \infty} V = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{kg}}{2\sqrt{kg}} \sqrt{\frac{g}{k}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{g}{k}}}}.$$



116 (4016). Сила трения, замедляющая движение диска, вращающегося в жидкости, пропорциональна угловой скорости вращения.

1) Диск, начавший вращаться с угловой скоростью 3 оборота в секунду, через 1 мин вращается с угловой скоростью 2 оборота в секунду. Какова будет его угловая скорость через 3 мин после начала вращения?

2) Диск, начавший вращаться с угловой скоростью 5 оборотов в секунду, через 2 мин вращается с угловой скоростью 3 оборота в секунду. Через сколько времени после начала вращения он будет обладать угловой скоростью, равной 1 обороту в секунду?

Решение

$$m \frac{dV}{dt} = k_1 \omega, V = \omega r, m \frac{d\omega}{dt} \omega r = k_1 \omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{k_1}{mr} \omega \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} =$$

$$= k dt \quad (k = k_1 / mr); \quad \ln |\omega C_1| = k t; \quad \underline{\underline{\omega = C e^{kt}}} \quad (C = 1 / C_1).$$

$$1) \text{ При } t = 0 \quad \omega = 3 \text{ об/с} \Rightarrow C = 3; \quad \underline{\underline{\omega = 3 e^{kt}}}. \text{ Через } t = 60 \text{ с } \omega = 2 \text{ об/с} \Rightarrow$$

$$2 = 3 e^{60k}; \quad k = \frac{\ln 2/3}{60} = -0,0067. \text{ При } t = 180 \text{ с } \omega = 3 e^{-0,0067 \cdot 180} = \frac{3}{e^{1,192}} =$$

$$= \frac{3}{3,3} \approx \underline{\underline{0,9 \text{ об/с}}}.$$

$$2) \text{ При } t = 0 \quad \omega = 5 \text{ об/с} \Rightarrow C = 5; \quad \underline{\underline{\omega = 5 e^{kt}}}. \text{ Через } t = 120 \text{ с } \omega = 3 \text{ об/с} \Rightarrow$$

$$3 = 5 e^{120k} \Rightarrow k = \frac{\ln 1/5}{120} = -0,00425; \quad 1 = 5 e^{-0,00425 t} \Rightarrow -0,0042 t =$$

$$\Rightarrow t = \frac{1,6094}{0,00425} = 378 \quad \underline{\underline{\text{с} = 6 \text{ мин } 18 \text{ с}}}.$$

117 (4017). Пуля входит в доску толщиной $h = 0,1$ м со скоростью $V_0 = 200$ м/с, а вылетает из доски, пробив ее, со скоростью $V_1 = 80$ м/с. Принимая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения, найти, сколько времени продолжалось движение пули через доску.

Решение

По условию $h = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$; $V_0 = 200 \text{ м/с}$; $V_1 = 80 \text{ м/с}$. Тогда

$$m \frac{dV}{dt} = -kV^2 \Rightarrow \frac{dV}{V^2} = -k_1 dt \Rightarrow -\frac{1}{V} = -k_1 t - C.$$

$$\text{При } t = 0 \quad V = V_0 \Rightarrow C = \frac{1}{V_0};$$

$$\frac{1}{V} = k_1 t + \frac{1}{V_0}. \quad (1)$$

$$\text{При } t = T \quad V = V_1 \Rightarrow T = \frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0} \right).$$

Определим k_1 . Из (1) $\Rightarrow$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V_0}{1 + k_1 V_0 t} \left(V = \frac{dx}{dt} \right); \quad (2)$$

$$x = \frac{1}{k_1} \ln |1 + k_1 V_0 t| + C_1. \quad \text{При } t = 0 \quad x = 0 \Rightarrow C_1 = 0; \quad x = \frac{1}{k_1} \ln |1 + k_1 V_0 t|;$$

$$h = \frac{1}{k_1} \ln |1 + k_1 V_0 T|.$$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{1 + k_1 V_0 T} \text{ и } 1 + k_1 V_0 T = \frac{V_0}{V_1}. \text{ Значит, } h = \frac{1}{k_1} \ln \frac{V_0}{V_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{h}{\ln \frac{V_0}{V_1}}; \quad T = \frac{h}{\ln \frac{V_0}{V_1}} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0} \right) = \frac{0,1}{\ln 2,5} \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{200} \right) =$$

$$= \frac{0,1}{0,9163} \cdot \frac{3}{400} = \underline{\underline{0,00082 \text{ с}}}.$$

118 (4018). Капля воды, имеющая начальную массу M_0 г и равномерно испаряющаяся со скоростью m г/с, движется по инерции с начальной скоростью V_0 см/с. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения капли и ее радиусу. В начальный момент ($t = 0$) она равна f_0 Н. Найти зависимость скорости капли от времени.

Решение

При движении по инерции имеем следующее дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}(m_t V) = -R, \quad (1)$$

где m_t – переменная масса.

По условию сила сопротивления $R = kVr$, плотность $\gamma = 1$.

Вес капли в любой момент времени при $\gamma = 1$ численно равен объему:

$$g(M_0 - mt) = \pi r^3 \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{(M_0 - mt)g \cdot 3}{4\pi}}.$$

$$\text{При } t = 0 \quad R = f_0, \quad V = V_0 : f_0 = k V_0 \sqrt[3]{\frac{M_0 g \cdot 3}{4\pi}} \Rightarrow k = \frac{f_0}{V} \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3 M_0 g}}.$$

Тогда сила сопротивления

$$R = \frac{f_0}{V_0} \sqrt[3]{\frac{\pi^4}{M_0 g^3}} \sqrt[3]{\frac{(M_0 - mt)g^3}{4\pi}} \cdot V = \frac{f_0}{V_0} \sqrt[3]{1 - \frac{m}{M_0} t} \cdot V.$$

$$\text{Из (1)} \Rightarrow \frac{dm_t}{dt} V + \frac{dV}{dt} m_t = -\frac{f_0}{V_0} \sqrt[3]{1 - \frac{m}{M_0} t} \cdot V, \quad m_t = M_0 - mt;$$

$$-mV + \frac{dV}{dt} (M_0 - mt) = -\frac{f_0}{V_0} \sqrt[3]{1 - \frac{m}{M_0} t} \cdot V.$$

После разделения переменных получим

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \left[\frac{m}{M_0 \left(1 - \frac{m}{M_0} t\right)} - \frac{f_0}{V_0 M_0} \sqrt[3]{\left(1 - \frac{m}{M_0} t\right)^{-2}} \right] dt \Rightarrow \ln |V| = -\ln \left|1 - \frac{m}{M_0} t\right| + \\ &+ \frac{3f_0}{V_0 m} \sqrt[3]{1 - \frac{m}{M_0} t} + \ln C \Rightarrow V = C \left(1 - \frac{m}{M_0} t\right)^{-1} e^{\frac{3f_0}{V_0 m} \sqrt[3]{1 - \frac{m}{M_0} t}}. \end{aligned}$$

$$\text{При } t = 0 \quad V = V_0 \Rightarrow V_0 \Rightarrow C e^{\frac{3f_0}{V_0 m}} \Rightarrow C = V_0 e^{-\frac{3f_0}{V_0 m}};$$

$$V = V_0 \left(1 - \frac{m}{M_0} t \right)^{-1} e^{-\frac{3f_0}{V_0 m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m}{M_0} t} \right)}.$$

119 (4019). Капля воды, имеющая начальную массу M_0 г, равномерно испаряющаяся со скоростью m г/с, свободно падает в воздухе. Сила сопротивления пропорциональна скорости движения капли (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости движения капли от времени, протекающего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли равна нулю. Считать, что $k \neq 2m$.

Решение

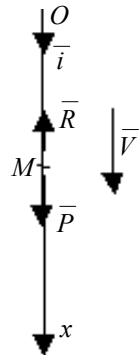
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_t \bar{V}) &= \bar{P} + \bar{R}, \quad \bar{V} = V_x \bar{i} = V \bar{i}, \quad \bar{P} = m_t g \bar{i}, \quad \bar{R} = -k \bar{V}; \quad \frac{d}{dt}(m_t V \bar{i}) = \\ &= m_t g \bar{i} - k \bar{V}; \end{aligned}$$

$$\bar{i} \frac{d}{dt}(m_t V) = m_t g \bar{i} - k \bar{V}. \quad (1)$$

Проектируем (1) на ось Ox : $\frac{d}{dt}(m_t V) = m_t g - k V \quad (V_x = V)$;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_t V) &= m_t g - k V, \quad m_t = M_0 - mt; \quad -mV + (M_0 - \\ &- mt) \frac{dV}{dt} = (M_0 - mt)g - k V; \quad (M_0 - mt) V' + (k - m) V - \\ &- (M_0 - mt)g = 0, \quad V' + \frac{k - m}{M_0 - mt} V = g; \quad V = UW, \end{aligned}$$

$$V' = U'W + UW', \quad U'W + U \left(W' + \frac{k - m}{M_0 - mt} W \right) = g;$$



$$\frac{dW}{W} = \frac{m-k}{M_0 - mt} dt \Rightarrow \ln |W| = \frac{m-k}{-m} \ln |M_0 - mt| \Rightarrow W = (M_0 - mt)^{\frac{k}{m}-1};$$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} (M_0 - mt)^{\frac{k}{m}-1} = g \Rightarrow dU = g (M_0 - mt)^{-\frac{k}{m}+1} dt \Rightarrow U = -\frac{g}{2m-k} \times \\ \times (M_0 - mt)^{-\frac{k}{m}+2} + C; \quad V = UW = -\frac{g}{2m-k} (M_0 - mt) + C (M_0 - mt)^{\frac{k}{m}-1}. \end{aligned}$$

$$\text{При } t = 0 \quad V = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{g M_0}{2m-k} + C M_0^{\frac{k}{m}-1} \Rightarrow C = \frac{g}{2m-k} M_0^{2-\frac{k}{m}};$$

$$\begin{aligned} V = -\frac{g}{2m-k} (M_0 - mt) + \frac{g}{2m-k} M_0^{2-\frac{k}{m}} (M_0 - mt)^{\frac{k}{m}-1} = \frac{g}{2m-k} (M_0 - \\ - mt) \left[M_0^{2-\frac{k}{m}} (M_0 - mt)^{\frac{k}{m}-2} - 1 \right] = \frac{g}{2m-k} (M_0 - mt) \left[\left(1 - \frac{m}{M_0} t \right)^{\frac{k}{m}-2} - 1 \right]; \end{aligned}$$

$k \neq 2m$.

120 (4020). Решить предыдущую задачу для капли сферической формы, предполагая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна произведению скорости капли и площади ее поверхности. Плотность жидкости γ . (Привести к квадратурам.)

Решение

Дифференциальное уравнение задачи имеет вид

$$\frac{d}{dt} (m_t V) = m_t g - k V S, \text{ где } m_t = M_0 - m t; \quad S = 4 \pi r^2.$$

$$\text{Из задачи 118 (4018)} \Rightarrow r = 3 \sqrt{\frac{3 (M_0 - m t)}{4 \pi \gamma}}.$$

Аналогично задаче 119 (4019) имеем

$$-mV + (M_0 - mt) \frac{dV}{dt} = (M_0 - mt) g - 4kV\pi \sqrt[3]{\frac{9(M_0 - mt)^2}{16\pi^2\gamma^2}} \Rightarrow (M_0 -$$

$$-mt) \frac{dV}{dt} + \left[k \sqrt[3]{\frac{36\pi(M_0 - mt)^2}{\gamma^2}} - m \right] V = (M_0 - mt)g; \quad V = u w,$$

$$V' = u'w + u w', \quad u'w + u \left[w' + \left(k \sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2(M_0 - mt)}} - \frac{m}{(M_0 - mt)} \right) w \right] = g;$$

$$\frac{dw}{w} = \frac{m}{(M_0 - mt)} dt - k \sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt[3]{M_0 - mt}} \Rightarrow \ln |w| = -\ln |M_0 - mt| +$$

$$+ \frac{3k}{2m} \sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}} (M_0 - mt)^{2/3}; \quad \frac{3k}{2m} \sqrt[3]{\frac{36\pi}{\gamma^2}} = k_1, \quad M_0 - mt = M.$$

$$\text{Тогда } \ln |wM| = k_1 M^{2/3} \Rightarrow w = \frac{1}{M} e^{k_1 M^{2/3}};$$

$$u' e^{k_1 M^{2/3}} = Mg \Rightarrow u = g \int_0^t M e^{-k_1 M^{2/3}} dt; \quad v = u w - \frac{g}{M} e^{k_1 M^{2/3}} \int_0^t M e^{-k_1 M^{2/3}} dt.$$

121 (4021). Если в каком-либо процессе одно вещество превращается в другое, причем скорость образования продукта пропорциональна наличному количеству вещества, то такое явление называют процессом (реакцией) первого порядка.

Некоторое вещество, начальное количество которого m_0 , превращается в другое вещество, а из образовавшегося продукта немедленно начинает получаться второй продукт. Оба превращения происходят как процессы первого порядка; коэффициенты пропорциональности известны: k_1 – в первом процессе и k_2 – во втором.

Какое количество второго продукта образуется через t единиц времени после начала процесса?

Решение

x – количество первого продукта, образовавшегося через t единиц вре-

мени. Тогда $\frac{dx}{dt} = k_1(m_0 - x) \Rightarrow \frac{dx}{m_0 - x} = k_1 dt \Rightarrow -\ln|m_0 - x| =$
 $= k_1 t + C_1.$

При $t = 0 \quad x = 0 \Rightarrow C_1 = -\ln m_0, \ln \frac{m_0}{m_0 - x} = k_1 t \Rightarrow x = m_0(1 - e^{-k_1 t}).$

Обозначим: y – количество второго продукта. Тогда $\frac{dy}{dt} = k_2(x - y) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = k_2[m_0(1 - e^{-k_1 t}) - y]; y' + k_2 y = k_2 m_0(1 - e^{-k_1 t}); y = u v,$
 $y = u' v + v' u; u' v + v' u + k_2 u v = k_2 m_0(1 - e^{-k_1 t}), u' v + u(v' + k_2 v) =$
 $= k_2 m_0(1 - e^{-k_1 t}); v' + k_2 v = 0 \Rightarrow v = e^{-k_2 t}; \frac{du}{dt} e^{-k_2 t} = k_2 m_0(1 - e^{-k_1 t});$
 $du = k_2 m_0(e^{k_2 t} - e^{(k_2 - k_1)t}); u = k_2 m_0\left(\frac{1}{k_2} e^{k_2 t} + \frac{1}{k_1 - k_2} e^{(k_2 - k_1)t}\right) + C_2;$
 $y = u v = k_2 m_0\left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 - k_2} e^{-k_1 t}\right) + C_2 e^{-k_2 t}.$

При $t = 0 \quad y = 0 \Rightarrow 0 = k_2 m_0\left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 - k_2}\right) + C_2; C_2 = -k_2 m_0\left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 - k_2}\right);$
 $y = k_2 m_0\left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 - k_2} e^{-k_1 t}\right) - k_2 m_0\left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1 - k_2}\right) e^{-k_2 t};$
 $y = m_0 + \frac{m_0}{k_1 - k_2}(k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}).$

122 (4022). В резервуаре, объем которого 100 л, находится рассол, содержащий 10 кг растворенной соли. В резервуар втекает вода со скоростью 3 л/мин, а смесь с такой же скоростью перекачивается во второй резервуар емкостью также 100 л, первоначально наполненный чистой водой, из которого избыток жидкости выливается. Сколько соли будет содержать второй резервуар по прошествии часа? Каково максимальное количество соли во втором резервуаре? Когда это максималь-

ное количество достигается? (Концентрация соли в каждом из резервуаров поддерживается равномерной посредством перемешивания.)

Решение

Пусть к моменту времени t в первом резервуаре x кг соли. Тогда его концентрация составит $x/100$.

Переменной t даем приращение dt и считаем, что за этот промежуток времени процесс происходит равномерно. Скорость изменения количества соли равна $0,03 x$, где $x = x(t)$.

За промежуток времени dt убывает dx ($dx < 0$) кг соли. Отсюда

$$0,03 x dt = -dx \Rightarrow \int_{10}^x \frac{dx}{x} = - \int_0^t 0,03 dt \Rightarrow \ln \frac{x}{100} = -0,03 t, \quad x = 10 e^{-0,03 t}.$$

Во второй резервуар каждую минуту попадает $0,03 x = 0,3 e^{-0,03 t}$ кг соли. За промежуток времени dt количество соли в нем увеличивается от y до $y + dy$. Тогда $(0,3 e^{-0,03 t} - 0,03 y) dt = dy$; $0,3 e^{-0,03 t} - 0,03 y = y'$, $y = uv$, $y' = u'v + v'u$; $0,3 e^{-0,03 t} = u(v' + 0,03 v) + u'v$; $v' + 0,03 v = 0 \Rightarrow v = e^{-0,03 t}$; $0,3 e^{-0,03 t} = u' e^{-0,03 t} \Rightarrow du = 0,3 dt \Rightarrow u = 0,3 t + C$; $y = 0,3 t e^{-0,03 t} + e^{-0,03 t} C$.

При $t = 0$ $y = 0 \Rightarrow C = 0$, $y = 0,3 t e^{-0,03 t}$. Через $t = 60$ мин

$$y = 0,3 \cdot 60 e^{-1,8} \approx 18/6,05 \approx 2,97; \quad \frac{dy}{dt} = 0,3 e^{-0,03 t} (-0,03 t + 1); \quad \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$t = 33 \frac{1}{3} \text{ мин} - \text{точка экстремума; при этом } y = \frac{10}{e} \approx 3,68 \text{ (кг)}.$$

123 (4023). Напряжение и сопротивление цепи равномерно меняются в течение минуты соответственно от нуля до 120 В и от нуля до 120 Ом (см. задачи 77 (3977)–78 (3978)). Индуктивность цепи постоянна (1 Гн). Начальный ток J_0 . Найти зависимость между током и временем в течение первой минуты опыта.

Решение

$$E = L \frac{dJ}{dt} + R J.$$

По условию $E = k t$, $R = k_1 t$, $L = 1$. Отсюда $120 = k \cdot 60 \Rightarrow k = 2$

и $E = 2 t$; $120 = k_1 \cdot 60 \Rightarrow k_1 = 2$ и $R = 2 t$; $\frac{dJ}{dt} + 2 t J = 2 t$, $J = u v$,

$$J' = u' v + v' u, \quad u' v + u (v' + 2 t v) = 2 t; \quad \frac{dv}{dt} = -2 t v \Rightarrow \frac{dv}{v} - 2 t dt \Rightarrow$$

$$v = e^{-t^2}; \quad \frac{du}{dt} e^{-t^2} = 2 t \Rightarrow du = 2 t e^{t^2} dt \Rightarrow u = e^{t^2} + C, \quad J = 1 + C e^{-t^2}.$$

$$\text{При } t = 0 \quad J = J_0 \Rightarrow J_0 = 1 + C \Rightarrow C = J_0 - 1, \quad \underline{\underline{J = 1 + (J_0 - 1) e^{-t^2}}}.$$

124 (4024). В узкой горизонтальной цилиндрической трубке AB , геометрически закрытой, заключен газ. Трубка равномерно вращается вокруг своей оси OO_1 , проходящей через один из ее концов с угловой скоростью ω . Длина трубки l см, поперечное сечение S см², масса заключенного в ней газа M г, давление в покоящейся трубке (постоянное вдоль всей трубки) p_0 . Найти распределение давления вдоль трубки при ее вращении, т. е. выразить p как функцию от x .

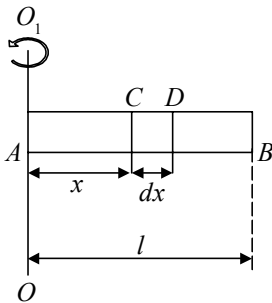
Решение

Если масса элемента $CD - dm$, то дифференциальное уравнение задачи имеет вид

$$S dp = \omega^2 x dm. \quad (1)$$

По закону Бойля–Мариотта

$$v p = v_0 p_0 \Rightarrow v = \frac{v_0 p_0}{p}; \quad \gamma = \frac{M}{v} = \frac{M}{v_0 p_0} p = 2k p \quad \left(\frac{M}{v_0 p_0} = 2k \right);$$



$$dm = \gamma S dx = 2kpS dx. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), имеем

$$S dp = \omega^2 x \cdot 2kpS dx \Rightarrow \frac{dp}{p} = 2k\omega^2 x dx \Rightarrow$$

$$\ln p C_1 = k\omega^2 x^2 \Rightarrow p = C e^{k\omega^2 x^2} \left(C = \frac{1}{C_1} \right).$$

$$\text{Масса газа } M = \int_0^M dm = C \cdot 2kS \int_0^l e^{k\omega^2 x^2} dx \Rightarrow C = \frac{M}{2kS \int_0^l e^{k\omega^2 x^2} dx}$$

$$\text{и } p = \frac{M e^{k\omega^2 x^2}}{2kS \int_0^l e^{k\omega^2 x^2} dx}. \text{ Но } \gamma_0 = 2k p_0 = \frac{M}{lS} \text{ и } k = \frac{M}{2p_0 lS}. \text{ Тогда}$$

$$p = \frac{p_0 l e^{k\omega^2 x^2}}{\int_0^l e^{k\omega^2 x^2} dx}.$$

Другие примеры уравнений первого порядка

В задачах 125 (4025)–137 (4037) найти общее решение уравнений, приведя их с помощью замены переменных к уравнениям линейным или однородным.

$$125 \text{ (4025). } y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}.$$

Решение

Положим:

$$\begin{cases} 2y - x - 5 = 2u - v, & 3u = 3y - 6, & u = y - 2, & y = u + 2, & y'_x = u'_x; \\ 2x - y + 4 = 2v - u & \Rightarrow & 3v = 3x + 3, & v = x + 1, & x = v - 1. \end{cases}$$

$$u'_x = \frac{2u - v}{2v - u}, u'_x = u'_v v'_x = u'_v \Rightarrow u'_v = \frac{2u/v - 1}{2 - u/v}, \frac{u}{v} = z, u = vz, u'_v = v z' + z;$$

$$\begin{aligned}
 v z' + z &= \frac{2z-1}{2-z} \Rightarrow \frac{2-z}{z^2-1} dz = \frac{dv}{v} \Rightarrow \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| - \frac{1}{2} \ln |z^2-1| = \ln |v C_1| \Rightarrow \\
 \frac{z-1}{(z+1)\sqrt{z^2-1}} &= v C_1 \Rightarrow \frac{(u-v)v}{(u+v)\sqrt{u^2-v^2}} = v C_1 \Rightarrow (u-v)^2 = (u+v)^2 \times \\
 \times (u^2-v^2) C_1^2 &\Rightarrow -\frac{1}{C_1^2} (v-u) = (u+v)^3 \text{ или } \underline{\underline{(x+y+1)^3 = C(x-y+3)}} \\
 \left(-\frac{1}{C_1^2} = C \right).
 \end{aligned}$$

126 (4026). $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}.$

Решение

Положим:

$$\begin{cases} 2x-y+1=2u-v, & 3u=3x+1, & u=x+1/3, & x=u-1/3; \\ x-2y+1=u-2v & 3v=3y-1, & v=y-1/3, & y=v+1/3. \end{cases}$$

$$y'_x = v'_x = v'_u u'_x = v'_u; \quad v'_u = \frac{2u-v}{u-2v} \Rightarrow v'_u = \frac{2-v/u}{1-2v/u}, \quad \frac{v}{u} = z, \quad v = zu,$$

$$z'_u = z'u + z; \quad z'u + z = \frac{2-z}{1-2z} \Rightarrow z'u = \frac{2-z}{1-2z} - z \Rightarrow z'u = \frac{2-2z+2z^2}{1-2z};$$

$$\frac{1-2z}{2(1-z+z^2)} dz = \frac{du}{u} \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln |1-z+z^2| = \ln |u C_1|; \quad \frac{1}{\sqrt{z^2-z+1}} = u C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{u}{\sqrt{v^2-uv+u^2}} = u C_1 \Rightarrow \frac{1}{C_1^2} = v^2 - uv + u^2; \quad C_2 = y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} - xy +$$

$$+ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{9} + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \quad \left(C_2 = \frac{1}{C_1^2} \right); \quad \underline{\underline{y^2 + x^2 = xy + x - y = C}}$$

$$\left(C = C^2 - \frac{1}{3} \right).$$

127 (4027). $(x + y + 1) dx = (2x + 2y - 1) dy$.

Решение

$$\begin{aligned} x + y = z, \quad y = z - x, \quad y' = z' - 1, \quad z + 1 = (2z - 1)(z' - 1) \Rightarrow 3z = z'(2z - 1); \\ \frac{2z - 1}{3z} dz = dx \Rightarrow \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} \ln|z| = x + C_1; \quad 2z - \ln|z| = 3x + 3C_1; \quad -x + 2y - \\ - \ln|x + y| = C_2 \quad (C_2 = 3C_1); \quad \underline{\underline{x - 2y + \ln|x + y| = C \quad (C = -C_2)}}. \end{aligned}$$

128 (4028). $y' = \frac{2(y + 2)^2}{(x + y - 1)^2}$.

Решение

$$\begin{aligned} \text{Обозначим } y + 2 = z, \quad x + y - 1 = (x - 3) + (y + 2) = u + z, \text{ где } u = \\ = x - 3; \quad y'_x = z'_x, \quad z'_x = z'_u u'_x = z'_u, \quad z'_u = \frac{2z^2}{u^2 + 2uz + z^2} = \frac{2z^2/u^2}{1 + 2\frac{z}{u} + z^2/u^2}; \\ \frac{z}{u} = v, \quad z'_u = u v' + v; \quad u v' + v = \frac{2v^2}{1 + 2v + v^2} \Rightarrow u v' = \frac{2v^2}{1 + 2v + v^2} - v; \\ u v' = \frac{-v - v^3}{1 + 2v + v^2} \Rightarrow \frac{(v^2 + 1) + 2v}{-v(v^2 + 1)} dv = \frac{du}{u}; \quad - \int \frac{dv}{v} - 2 \int \frac{dv}{v^2 + 1} = \ln|uC| \Rightarrow \\ -\ln|v| - \operatorname{arctg} v = \ln|uC|; \quad u v C = e^{-2 \operatorname{arctg} v}, \quad Cz = e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{z}{u}}; \\ \underline{\underline{C(y + 2) = e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y + 2}{x - 3}}}}. \end{aligned}$$

129 (4029). $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x + 1)}$.

Решение

$$y^2 = z, \quad 2y y' = z'; \quad 2y y'(x + 1) = y^2 - x \Rightarrow z'(x + 1) = z - x; \quad z = uv,$$

$$z' = u'v + v u, \quad u'v(x+1) + u v'(x+1) = u v - x; \quad u'v(x+1) + u[v'(x+1) -$$

$$-v] = -x; \quad \frac{dv}{dx}(x+1) = v \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow v = x+1; \quad \frac{du}{dx}(x+1)^2 = -x \Rightarrow$$

$$du = -\frac{x}{(x+1)^2} dx = -\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} dx = -\frac{dx}{x+1} + \frac{dx}{(x+1)^2}; \quad u = -\ln|x+1| -$$

$$-\frac{1}{x+1} + \ln e C; \quad z = uv = -(x+1) \ln|x+1| - 1 + (x+1) \ln e C =$$

$$= -(x+1) \ln|x+1| - 1 + (x+1) \ln e + (x+1) \ln C = (x+1) \ln \frac{C}{x+1} - 1 + x + 1;$$

$$\underline{\underline{y^2 = x + (x+1) \ln \frac{C}{x+1}}}.$$

130 (4030). $y' = \frac{y^3}{2(x y^2 - x^2)}.$

Решение

$$2 y y' = \frac{y^4}{x y^2 - x^2}, \quad y^2 = z, \quad 2 y y' = z', \quad z' = \frac{z^2}{x z - x^2}; \quad z' = \frac{z^2/x^2}{z/x - 1}, \quad \frac{z}{x} = u,$$

$$z' = x u' + u, \quad x u' + u = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow x u' = \frac{u^2}{u-1} - u \Rightarrow x u' = \frac{u}{u-1} \Rightarrow \frac{u-1}{u} du =$$

$$= \frac{dx}{x} \Rightarrow u - \ln|u| = \ln|x C| \Rightarrow u = \ln|u C x|; \quad u C x = e^u, \quad C z = e^{z/x},$$

$$z \cdot e^{-z/x} = C; \quad \underline{\underline{y^2 e^{-y^2/x} = C}}.$$

131 (4031). $(1 + y^2) dx = x dy.$

Решение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1+y^2} \Rightarrow \ln|x| + \ln|C| = \arctg y; \quad \underline{\underline{y = \operatorname{tg} \ln|Cx|}}.$$

132 (4032). $(x^2 y^2 - 1) y' + 2 x y^3 = 0$.

Решение

$$y = \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{z'}{z^2}; \quad -\left(\frac{x^2}{z^2} - 1\right) \frac{z'}{z^2} + 2x \frac{1}{z^3} = 0 \Rightarrow (z^2 - x^2) z' + 2x z = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{z^2}{x^2} - 1\right) z' + 2 \frac{z}{x} = 0; \quad \frac{z}{x} = u, \quad z' = u' x + u, \quad (u^2 - 1)u + (u^2 - 1)u' x + 2u = 0;$$

$$u(u^2 + 1) = (1 - u^2)u' x, \quad \frac{1 - u^2}{u(u^2 + 1)} du = \frac{dx}{x}; \quad \frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{B u + C}{u^2 + 1},$$

$$1 - u^2 = A u^2 + A + B u^2 + C u; \quad \begin{matrix} u^2 | & A + B = -1, \\ u^1 | & C = 0, \\ u^0 | & A = 1 \end{matrix} \Rightarrow B = -2; \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u} -$$

$$-\int \frac{2u du}{1 + u^2} \Rightarrow \ln |x| = \ln \frac{|Cu|}{u^2 + 1} \Rightarrow x = \frac{Cu}{u^2 + 1}; \quad u = \frac{z}{x} = \frac{1}{xy} \Rightarrow x =$$

$$= \frac{Cx^2 y^2}{xy(x^2 y^2 + 1)} \Rightarrow \underline{\underline{x^2 y^2 + 1 = Cy}}.$$

133 (4033). $yy' + x = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{x} \right)^2$.

Решение

$$y^2 = z, \quad 2yy' = z', \quad z' + 2x = \frac{(x^2 + z)^2}{x^2} = \frac{x^4 + 2x^2 z + z^2}{x^2} = x^2 + 2z + \left(\frac{z}{x}\right)^2,$$

$$\frac{z}{x} = u, \quad z' = u' x + u, \quad u' x + u + 2x = x^2 + 2ux + u^2 \Rightarrow x(u' + 1) + (u + x) = (u + x)^2.$$

Обозначим $u + x = w$, $u' + 1 = w'$. Тогда $x w' + w = w^2 \Rightarrow x \frac{dw}{dx} =$

$$\begin{aligned}
 &= w(w-1) \Rightarrow \frac{dw}{w(w-1)} = \frac{dx}{x}; \int \frac{dw}{w-1} - \int \frac{dw}{w} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \left| \frac{w-1}{w} \right| = \ln |Cx| \\
 &\Rightarrow \frac{w-1}{w} = Cx; Cx = \frac{x+u-1}{x+u} \Rightarrow xC = \frac{x+z/x-1}{x+z/x} = \frac{x^2+z-x}{x^2+z} = \\
 &= \frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2}; \underline{\underline{Cx = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}}}.
 \end{aligned}$$

134 (4034). $x y' + 1 = e^y$.

Решение

$$\begin{aligned}
 x e^y &= z; x e^y = z \text{ или } e^y (x y' + 1) = z' \Rightarrow x y' + 1 = e^{-y} z'; e^{-y} z' = e^y \Rightarrow \\
 z' &= e^{2y}, \text{ но } e^{2y} = \frac{z^2}{x^2}. \text{ Тогда } z' = \frac{z^2}{x^2}, \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C, \\
 x &= z + C x z \text{ и } z = \frac{x}{1+C x} \Rightarrow x e^y = \frac{x}{1+C x}; \underline{\underline{(1+C x) e^y = 1}}.
 \end{aligned}$$

135 (4035). $(x^2 + y^2 + 1) dy + x y dx = 0$.

Решение

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + 1 + xy \frac{dx}{dy} &= 0, x^2 = z, 2x x' = z'; z + y^2 + 1 + \frac{1}{2} y z' = 0, z = uv, \\
 z' &= u' v + u v'; u v + y^2 + 1 + \frac{1}{2} y u' v + \frac{1}{2} y u v' = 0, u \left(v + \frac{1}{2} y v' \right) + y^2 + \\
 + 1 + \frac{1}{2} y u' v &= 0; v + \frac{1}{2} y v' = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2 \frac{dy}{y} \Rightarrow v = \frac{1}{y^2}; \frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{2y} + y^2 + \\
 + 1 &= 0 \Rightarrow du = -2(y^3 + y) dy; u = -\frac{y^4}{2} - y^2 + C_1, z = u v = -\frac{y^2}{2} - 1 + \\
 + \frac{C_1}{y^2} &\Rightarrow \underline{\underline{y^4 + 2x^2 y^2 + 2y^2 = C_1}}.
 \end{aligned}$$

136 (4036). $x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0$.

Решение

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}x' + 1 + x\frac{x}{y} - x x' &= 0, \quad \frac{x}{y} = u, \quad x' = y u' + u; \quad u u' y + u^2 + 1 + u y(u - \\ - y u' - u) &= 0 \Rightarrow u u' y(y-1) = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{u du}{u^2 + 1} = \frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dy}{y-1} - \\ - \frac{dy}{y} &\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) = \ln \left| C \frac{y-1}{y} \right| \Rightarrow \sqrt{u^2 + 1} = C_1 \frac{y-1}{y}; \quad u^2 + 1 = \\ = \frac{C(y-1)^2}{y^2} \quad (C = C_1^2), \quad \frac{x^2 + y^2}{y^2} &= \frac{C(y-1)^2}{y^2} \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 = C(y-1)^2}}. \end{aligned}$$

137 (4037). $(x^2 + y^2 + y) dx = x dy$.

Решение

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + y &= x y', \quad \frac{y}{x} = u, \quad y = u x, \quad y' = x u' + u; \quad x^2 + u^2 x^2 + u x = x^2 u' + \\ + x u &\Rightarrow \frac{du}{1+u^2} = dx; \quad \arctg u = x + C \Rightarrow u = \tg(x + C); \quad \underline{\underline{y = x \tg(x + C)}}. \end{aligned}$$

|| В задачах 138 (4038)–147 (4047) решить уравнения Бернулли.

138 (4038). $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Решение

Разделив все члены уравнения на y^3 , получим $y^{-3}y' + 2xy^{-2} = 2x^3$.

Замена переменной: $z = y^{-2}$, $z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y^{-3}y' = -\frac{1}{2}z'$;

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}z' + 2xz &= 2x^3 \Rightarrow z' - 4xz = -4x^3, \quad z = uv, \quad z' = u'v + v'u; \quad u'v + \\ + v'u - 4xuv &= -4x^3, \quad u'v + u(v' - 4xv) = -4x^3; \quad v' - 4xv = 0 \Rightarrow \ln|v| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x^2 \Rightarrow v = e^{2x^2}; \frac{du}{dx} e^{2x^2} = -4x^3 \Rightarrow du = -4e^{-2x^2} x^3 dx \Rightarrow u = \\
 &= -4 \int e^{-2x^2} x^3 dx; \left[x^2 = u_1, du_1 = 2x dx, x dx e^{-2x^2} = dv_1, v_1 = -\frac{1}{4} e^{-2x^2} \right]; \\
 &u = -4 \left(-\frac{1}{4} x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{4} \int 2x e^{-2x^2} dx \right) = x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2} e^{-2x^2} + C; \\
 &\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + C e^{x^2}.
 \end{aligned}$$

139 (4039). $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0.$

Решение

$$\begin{aligned}
 &y'y^{-2} + \frac{y^{-1}}{x+1} + 1 = 0. \text{ Обозначим } y^{-1} = z, z' = -y^{-2}y'. \text{ Тогда } -z' + \frac{z}{x+1} + \\
 &+ 1 = 0, z = uv, z' = u'v + v'u, u'v + v'u - \frac{uv}{x+1} = 1, u'v + u \left(v' - \frac{v}{x+1} \right) = 1; \\
 &v' - \frac{v}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow v = x+1; \frac{du}{dx}(x+1) = 1 \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow u = \\
 &= C + \ln|x+1|; z = uv = (x+1)(C + \ln|x+1|); y = \frac{1}{(x+1)(C + \ln|x+1|)}.
 \end{aligned}$$

140 (4040). $y^{n-1}(ay' + y) = x.$

Решение

$$\begin{aligned}
 &ay'y^{n-1} + y^n = x, z = y^n, z' = ny^{n-1}y'; \frac{a}{n}z' + z = x, z = uv, z' = u'v + v'u; \\
 &\frac{a}{n}u'v + u \left(\frac{a}{n}v' + v \right) = x, \frac{a}{n} \cdot \frac{dv}{v} = -dx \Rightarrow v = e^{-nx/a}; \frac{a}{n} \cdot \frac{du}{dx} e^{-nx/a} = x \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 du &= \frac{n}{a} x e^{nx/a} dx \Rightarrow u = \frac{n}{a} \int x e^{nx/a} dx; \left[x = u_1, dx = du_1, e^{nx/a} dx = \right. \\
 &= dv_1, v_1 = \frac{a}{n} e^{nx/a} \left. \right]; u = \frac{n}{a} \left(\frac{a}{n} x e^{nx/a} - \frac{a}{n} \int e^{nx/a} dx \right) = \\
 &= \frac{n}{a} \left[\frac{a}{n} e^{-nx/a} \left(x - \frac{a}{n} \right) \right] + C_1; z = uv = \left(x - \frac{a}{n} \right) + C e^{-nx/a} = y^n \Rightarrow \\
 &\underline{\underline{ny^n = C e^{-nx/a} + nx - a}} \quad (C = nC_1).
 \end{aligned}$$

141 (4041). $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy.$

Решение

$$xx' = x^2 y^{-1} - y^3, x^2 = z, 2xx'_y = z'; \frac{1}{2} z' = zy^{-1} - y^3, z = uv, z' = u'v + v'u;$$

$$u'v + v'u - 2uvy^{-1} = -2y^3 \Rightarrow u'v + u(v' - 2vy^{-1}) = -2y^3; v' - 2vy^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v} = 2 \frac{dy}{y} \Rightarrow v = y^2; \frac{du}{dy} y^2 = -2y^3 \Rightarrow du = -2y dy \Rightarrow u = -y^2 + C;$$

$$\underline{\underline{x^2 = y^2}} \quad (C - y^2).$$

142 (4042). $xy' + y = y^2 \ln x.$

Решение

$$xy'y^{-2} + y^{-1} = \ln x, y^{-1} = z, z' = -y^{-2} y'; -x z' + z = \ln x, z = u v,$$

$$z' = u'v + v'u; -x u'v - x v'u + u v = \ln x, -x u'v - u(x v' - v) = \ln x;$$

$$x v' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow v = x; -x^2 \frac{du}{dx} = \ln x \Rightarrow du = -\frac{\ln x}{x^2} dx \Rightarrow u =$$

$$= -\int \frac{\ln x}{x^2} dx; \left[\ln x = u_1, du_1 = \frac{dx}{x}, \frac{dx}{x^2} = dv_1, v_1 = -\frac{1}{x} \right]; u = -\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} \right) = \frac{1}{x} (\ln x + 1) + C; z = \ln x + 1 + C \quad x = y^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{1 = y (\ln x + 1 + C x)}}.$$

143 (4043). $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$

Решение

$$y^{-2} y' - y^{-1} \operatorname{tg} x + \cos x = 0, \quad y^{-1} = z, \quad z' = -y^{-2} y'; \quad -z' - z \operatorname{tg} x + \cos x = 0, \\ z = u v, \quad z' = u' v + v' u; \quad u' v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \cos x; \quad v' + v \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \\ = -\operatorname{tg} x dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Rightarrow v = \cos x; \quad \frac{du}{dx} \cos x = \cos x \Rightarrow du = dx; \\ u = x + C; \quad y^{-1} = (x + C) \cos x; \quad \underline{\underline{y(x + C) = \sec x.}}$$

144 (4044). $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

Решение

$$\sqrt{y} = z \Rightarrow y = z^2, \quad y' = 2 z z', \quad 2 z z' + \frac{2z^2}{x} = \frac{2z}{\cos^2 x} \Rightarrow z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{\cos^2 x}; \\ z = u v, \quad z' = u' v + v' u; \quad u' v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \\ = -\frac{dx}{x} \Rightarrow v = \frac{1}{x}; \quad \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u = \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = \\ = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C; \quad \left[x = u_1, \quad dx = du_1, \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dv_1, \quad v_1 = \operatorname{tg} x \right]; \\ z = \operatorname{tg} x + \frac{\ln |\cos x| + C}{x} = \sqrt{y} \Rightarrow \underline{\underline{y = \left(\operatorname{tg} x + \frac{\ln |\cos x| + C}{x} \right)^2}}.$$

145 (4045). $x y' - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0$.

Решение

$$\sqrt{y} = z, y = z^2, y' = 2 z z', 2 x z z' - 4 z^2 - x^2 z = 0; 2 x z' - 4 z - x^2 = 0,$$

$$z = u v, 2 x u' v + 2 u (x v' - 2 v) - x^2 = 0; x v' - 2 v = 0, \frac{dv}{v} = 2 \frac{dx}{x} \Rightarrow v = x^2;$$

$$2 x^3 \frac{du}{dx} = x^2 \Rightarrow du = \frac{dx}{2 x} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \ln |C x|; z = \frac{x^2}{2} \ln |C x| = \sqrt{y};$$

$$y = \frac{x^4}{4} \ln^2 |x C|.$$

146 (4046). $y dy - \frac{ay^2}{x^2} dx = \frac{b dx}{x^2}$.

Решение

$$y y' - \frac{a y^2}{x^2} = \frac{b}{x^2}, y^2 = z, 2 y y' = z'; \frac{1}{2} z' - \frac{a z}{x^2} = \frac{b}{x^2}, z = u v,$$

$$u' v + u \left(v' - \frac{2av}{x^2} \right) = \frac{2b}{x^2}; v' - \frac{2av}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2a dx}{x^2} \Rightarrow \ln |v| = -\frac{2a}{x} \Rightarrow$$

$$v = e^{-2a/x}; \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{dx} e^{-2a/x} = \frac{b}{x^2} \Rightarrow u = -\frac{2b}{2a} \int e^{2a/x} d\left(\frac{2a}{x}\right) = -\frac{b}{a} e^{2a/x} + C;$$

$$z = -\frac{b}{a} + C e^{-2a/x}; y^2 = C e^{-2a/x} - \frac{a}{b}.$$

147 (4047). $y' = \frac{y \varphi'(x) - y^2}{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Решение

$$y' \varphi(x) = y \varphi'(x) - y^2, y^{-2} y' \varphi(x) = y^{-1} \varphi'(x) - 1, y^{-1} = z, -y^{-2} y' = z';$$

$$-z'\varphi(x) - z\varphi'(x) = -1, \quad z = u v, \quad u'v\varphi(x) + u(v'\varphi(x) + v\varphi'(x)) = 1;$$

$$v'\varphi(x) + v\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)} \Rightarrow v = \frac{1}{\varphi(x)}; \quad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow u = x + C,$$

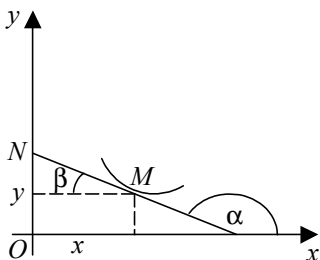
$$z = \frac{x + C}{\varphi(x)}; \quad y = \frac{\varphi(x)}{x + C}.$$

148 (4048). Найти линию, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной в произвольной точке:

1) пропорционален квадрату ординаты точки касания;

2) пропорционален кубу ординаты точки касания.

Решение



$$1) |ON| = k y^2, \quad y + x \operatorname{tg} \beta = k y^2,$$

$$y - x \operatorname{tg} \alpha = k y^2, \quad y - x y' = k y^2,$$

$$y^{-1} - x y' y^{-2} = k, \quad y^{-1} = z, \quad -y^{-2} y' = z',$$

$$z + z' x = k, \quad z = u v; \quad u v + x u' v + x v' u = k,$$

$$u(v + x v') + x u' v = k, \quad v + x v' = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} =$$

$$= -\frac{dx}{x} \Rightarrow v = \frac{1}{x}; \quad du = k dx \Rightarrow u = k x + C;$$

$$z = k + \frac{C}{x}, \quad \frac{1}{y} = k + \frac{C}{x} \Rightarrow -\frac{C}{k} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{y} = 1; \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1 \left(-\frac{C}{k} = a, \quad \frac{1}{k} = b \right).$$

$$2) y - x y' = k y^3, \quad y^{-2} - x y' y^{-3} = k, \quad y^{-2} = z, \quad z' = -2 y^{-3} y',$$

$$z + \frac{1}{2} x z' = k, \quad z = u v, \quad u v + \frac{1}{2} u' v x + \frac{1}{2} u v' x = k, \quad u \left(v + \frac{1}{2} v' x \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} u' v x = k, \quad \frac{dv}{v} = -2 \frac{dx}{x} \Rightarrow v = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = k \Rightarrow du = 2x dx k;$$

$$u = k x^2 + C, \quad z = k + \frac{C}{x^2}, \quad \frac{1}{y^2} = k + \frac{C}{x^2} \Rightarrow -\frac{C}{k} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{y^2} = 1;$$

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1 \quad \left(-\frac{C}{k} = a, \quad \frac{1}{k} = b \right).$$

149 (4049). Найти линии, заданные уравнениями вида $\rho = f(\varphi)$, для которых площадь секторов, ограниченных линией и полярным радиусом постоянной точки $(\rho_0 \text{ и } \varphi_0)$ и текущей точки (ρ, φ) линии, пропорциональна произведению полярных координат ρ и φ этой текущей точки. Коэффициент пропорциональности равен k .

Решение

По условию $\frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho^2 d\varphi = k \rho \varphi$.

Возьмем от обеих частей исходного уравнения производную по φ :

$$\frac{1}{2} \rho^2 = k \rho' \varphi + k \rho, \quad \frac{1}{2} = k \rho' \rho^{-2} \varphi + k \rho^{-1}, \quad \rho^{-1} = z, \quad z' = -\rho^{-2} \rho';$$

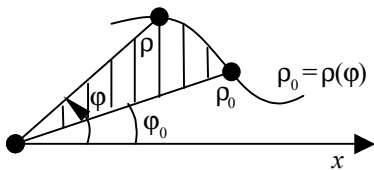
$$\frac{1}{2} = -k z' \varphi + k z, \quad z = u v, \quad \frac{1}{2} = -k u' v \varphi - k u (v' \varphi - v), \quad \frac{dv}{v} = \frac{d\varphi}{\varphi} \Rightarrow v = \varphi,$$

$$\frac{1}{2} = -k \frac{du}{d\varphi} \varphi^2 \Rightarrow du = -\frac{d\varphi}{2 k \varphi^2} \Rightarrow u = \frac{1}{2 k \varphi} + C; \quad z = \frac{1}{2 k} + C \varphi \Rightarrow \frac{1}{\rho} =$$

$$= \frac{1}{2 k} + C \varphi.$$

$$\text{При } \varphi = \varphi_0 \quad \rho = \rho_0 \Rightarrow \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{2 k} + C \varphi_0 \Rightarrow C = \frac{1}{\varphi_0} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2 k} \right);$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2 k} + \frac{\varphi}{\varphi_0} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{2 k} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\rho - 2k}{\rho} = \frac{(\rho_0 - 2k)\varphi}{\rho_0 \varphi_0}}}.$$



Уравнения в полных дифференциалах

|| В задачах 150 (4050)–157 (4057) найти общее решение.

150 (4050). $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$.

Решение

1-й способ. $P = 2x^3 - xy^2$, $Q = 2y^3 - x^2y$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x^3 - xy^2 \Rightarrow u = \int (2x^3 - xy^2)dx + \varphi(y) = \frac{x^4}{2} -$$

$$-\frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x^2y + \varphi'(y) \Rightarrow -x^2y + \varphi'(y) = 2y^3 - x^2y \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 2y^3; \quad \varphi(y) = \int 2y^3 dy + C_1 = \frac{\varphi^4}{2} + C_1, \quad u(x, y) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} +$$

$$+ \frac{y^4}{2} + C_1.$$

По условию $du(x, y) = 0 \Rightarrow u(x, y) = C_2$. Тогда

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} + C_1 = C_2 \Rightarrow \underline{\underline{x^4 - x^2y^2 + y^4 = C}}. \quad (1)$$

2-й способ. $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C_1$.

Пусть $x_0 = y_0 = 0$. Тогда $u(x, y) = \int_0^x (2x^3 - x \cdot 0) dx +$
 $+ \int_0^y (2y^3 - x^2y) dy + C_1$; $u(x, y) = \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + C_1$.

Из $u(x, y) = C_2$ получаем ответ (1).

$$151 \text{ (4051). } \frac{x \, dy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx.$$

Решение

$$P = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{x^2 + y^2};$$

$$x_0 = y_0 = 1, \quad u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) \, dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) \, dy; \quad u(x, y) =$$

$$= \int_1^x \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \int_1^y \left(\frac{dy}{1 + y^2} \right) + C_1 = \left(x - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) \Big|_1^x + \operatorname{arctg} y \Big|_1^y + C_1 =$$

$$= x - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} 1 = C_2 \Rightarrow \underline{\underline{x - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C}}$$

$$\left(\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} \right).$$

$$152 \text{ (4052). } e^y dx + (x e^y - 2y) dy = 0.$$

Решение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y; \quad x_0 = y_0 = 0, \quad u(x, y) = \int_0^x P(x, y) \, dx + \int_0^y Q(0, y) \, dy +$$

$$+ C_1 = \int_0^x e^y \, dx - \int_0^y 2y \, dy + C_1 = x e^y \Big|_0^x - y^2 \Big|_0^y + C_1 = x e^y - y^2 + C_1;$$

$$\underline{\underline{x e^y - y^2 + C_1 = C_2}}; \quad \underline{\underline{x e^y - y^2 = C}}.$$

153 (4053). $y x^{y-1} dx + x^y \ln x dy = 0$.

Решение

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x; \quad x_0 = y_0 = 1, \quad u(x, y) = \\ &= \int_1^x P(x, y) dx + \int_1^y Q(1, y) dy + C_1 = \int_1^x y x^{y-1} dx + \int_1^y 0 dy + C_1 = x^y \Big|_1^x + \\ &+ C_1 = C_2; \quad \underline{\underline{x^y = C.}} \end{aligned}$$

154 (4054). $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y dx - x dy}{x^2}$.

Решение

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} \right) dy = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{x^2}.$$

Пусть $x_0 = y_0 = 1$; $u(x, y) = \int_1^x P(x, 1) dx + \int_1^y Q(x, y) dy$; $u(x, y) =$

$$\begin{aligned} &= \int_1^x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1^2}} - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_1^y \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + 1^2}} - \frac{1}{x} \right) dy + C_1 = \sqrt{x^2 + 1^2} \Big|_1^x + \frac{1}{x} \Big|_1^x + \\ &+ \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_1^y + \frac{y}{x} \Big|_1^y + C_1 = \sqrt{x^2 + 1^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{x} - 1 + \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + 1} + \\ &+ \frac{y}{x} - \frac{1}{x} + C_1 = C_2; \quad \underline{\underline{\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C.}} \end{aligned}$$

$$155 \text{ (4055). } \frac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)} dx + \frac{x}{\cos^2(xy)} dy + \sin y dy = 0.$$

Решение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left[1 + 2 \sin x \cos(xy) (-\sin(xy)x) \cos^2(xy) + 2x \cos(xy) \sin(xy) \times \right.$$

$$\left. \times (y + \sin x \cos^2(xy)) \right] / \cos^4(xy) = \frac{\cos(xy) + 2xy \sin(xy)}{\cos^3(xy)};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\cos^2(xy) + 2xy \sin(xy)}{\cos^4(xy)} = \frac{\cos(xy) + 2xy \sin(xy)}{\cos^3(xy)}.$$

$$\text{Берем } x_0 = y_0 = 0. \text{ Тогда } u(x, y) = \int_0^x P(x, 0) dx + \int_0^y Q(x, y) dy + C_1 =$$

$$= \int_0^x \sin x dx + \int_0^y \left(\frac{x}{\cos^2(xy)} + \sin y \right) dy + C_1 = C_2; \quad -\cos x + \operatorname{tg}(xy) -$$

$$-\cos y = C \text{ или } \underline{\underline{\operatorname{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C}}.$$

$$156 \text{ (4056). } \left(1 + x \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2} \right) y dy = 0.$$

Решение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{2\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{2\sqrt{x^2 + y^2}}. \text{ Берем } x_0 = y_0 = 0. \text{ Тогда } u(x, y) =$$

$$= \int_0^x P(x, 0) dx + \int_0^y Q(x, y) dy + C_1; \quad \int_0^x (1 + x^2) dx + \int_0^y (-y +$$

$$\left(x + y \sqrt{x^2 + y^2} \right) dy = C; \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^x + \left[-\frac{y^2}{2} + \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3} \right]_0^y = C \Rightarrow$$

$$x - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3} = C.$$

$$157 (4057). \left(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy = 0.$$

Решение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y^3} \cos \frac{x}{y} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x} - \frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y^3} \cos \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\text{При } x_0 = y_0 = 0 \quad u(x, y) = \int_1^x P(x, 1) dx + \int_1^y Q(x, y) dy = C_1;$$

$$\int_1^x \left(\sin x - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + 1 \right) dx + \int_1^y \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy = C_1;$$

$$-\cos x \Big|_1^x + \sin \frac{1}{x} \Big|_1^x + x \Big|_1^x + \sin \frac{y}{x} \Big|_1^y - \cos \frac{x}{y} \Big|_1^y - \frac{1}{y} \Big|_1^y = C_1; -\cos x + \cos 1 +$$

$$+ \sin \frac{1}{x} - \sin 1 + x - 1 + \sin \frac{y}{x} - \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{x}{y} + \cos x - \frac{1}{y} + 1 = C_1;$$

$$\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C.$$

Интегрирующий множитель

В задачах 158 (4058)–162 (4062) найти интегрирующий множитель и общие решения уравнений.

158 (4058). $(x^2 + y)dx - x dy = 0$.

Решение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 + y)M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -xM.$$

$$\text{Пусть } M = M(x); \quad \frac{\partial(PM)}{\partial y} = \frac{\partial(QM)}{\partial x} \Rightarrow M \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial M}{\partial y} = M \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial M}{\partial x}.$$

$$\begin{aligned} \text{По условию } \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \text{ тогда } M \frac{\partial P}{\partial y} = M \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial M}{\partial x} &\Rightarrow M \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{\partial M}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{M} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \text{ или } \frac{\partial(\ln M)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1+1}{-x} = \\ &= -\frac{2}{x} \Rightarrow \ln M = -2 \ln x; \quad M = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(1 + \frac{y}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x^2} \Rightarrow \\ u &= \int \left(1 + \frac{y}{x^2} \right) dx + \varphi(y) = x - \frac{y}{x} + \varphi(y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y); \quad -\frac{1}{x} + \varphi'(y) = \\ &= -\frac{1}{x} \Rightarrow \varphi'(y) = 0; \quad \varphi(y) = C_1; \quad \underline{\underline{x - \frac{y}{x} = C.}} \end{aligned}$$

159 (4059). $y(1 + xy)dx - x dy = 0$.

Решение

$$P = y(1 + xy), \quad Q = -x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Пусть } M = M(y), \quad \frac{\partial(PM)}{\partial y} = \frac{\partial(QM)}{\partial x} \text{ или } \frac{\partial P}{\partial y} M + \frac{\partial M}{\partial y} P = \frac{\partial Q}{\partial x} M + \\
 &+ \frac{\partial M}{\partial x} Q, \text{ но } \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} P = M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial \ln M}{\partial y} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \\
 &= \frac{-1 - 1 - 2xy}{P} = -2 \frac{1 + xy}{(1 + xy)y} = -\frac{2}{y}; \quad \partial \ln M = -2 \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln M = -2 \ln y \rightarrow \\
 &\rightarrow M = \frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = MP = \frac{1}{y} + x \Rightarrow u = \int \left(\frac{1}{y} + x \right) dx + \varphi(y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y); \\
 &\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = QM = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \text{ и } \varphi(y) = C_1.
 \end{aligned}$$

Значит, общий интеграл $\underline{\underline{2 \frac{x}{y} + x^2 = C}}$.

160 (4060). $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y dy = 0$.

Решение

$$P = x^2 + y^2 + 2x, \quad Q = 2y; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Пусть $M = M(y)$. Тогда (см. задачу 158 (4058)) $\frac{\partial \ln M}{\partial x} =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y - 0}{2y} = 1 \Rightarrow \ln M = x \text{ и } M = e^x; \quad \int_0^x P_1(x, 0) dx +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^y Q_1(x, y) dy = C_1, \quad Q_1 = QM \text{ и } P_1 = PM; \quad \int_0^x (x^2 + 2x) e^x dx + \int_0^y 2y e^x dy =$$

$$= C_1 \left| \begin{matrix} x^2 = u_1, & dx = dv_1, \\ du_1 = 2x dx, & v_1 = e^x \end{matrix} \right|; x^2 e^x \Big|_0^x - 2 \int_0^x x e^x dx + 2 \int_0^x x e^x dx +$$

$$+ e^x y^2 \Big|_0^y = C_1; \underline{\underline{(x^2 + y^2) e^x = C}}.$$

161 (4061). $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$.

Решение

$$P = \frac{y}{x}, \quad Q = y^3 - \ln x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x}.$$

Пусть $M = M(x)$. Тогда (см. задачу 159 (4059)) $\frac{\partial \ln M}{\partial y} =$

$$= \frac{-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} = -\frac{2}{y} \Rightarrow M = \frac{1}{y^2}.$$

Общий интеграл имеет вид

$$\int_1^x P_1(x, y) dx + \int_1^y Q_1(1, y) dy = C \Rightarrow \int_1^x \frac{dx}{xy} + \int_1^y \left(y - \frac{\ln 1}{y^2} \right) dy = C;$$

$$\underline{\underline{\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C}}.$$

162 (4062). $(x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0$.

Решение

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y.$$

Пусть $M = M(x)$. Тогда (см. задачу 158 (4058)) $\frac{\partial \ln M}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} =$
 $= \frac{x \cos y - y \sin y}{x \cos y - y \sin y} = 1; \ln M = x \text{ и } M = e^x.$

Общий интеграл:

$$\int_0^x P_1(x, 0) dx + \int_0^y Q_1(x, y) dy = C,$$

$$\int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (x \cos y - y \sin y) e^x dy = C,$$

$$x e^x \sin y + (y \cos y - \sin y) e^x = C,$$

$$\underline{\underline{(x \sin y + y \cos y - \sin y) e^x = C.}}$$

$$\int y \sin y dy = I;$$

$$y = u_1, \sin y dy = dv_1;$$

$$dy = du_1, v_1 = -\cos y;$$

$$I = -y \cos y + \sin y.$$

163 (4063). Убедиться, что интегрирующим множителем линейного уравнения $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ служит функция $e^{\int P(x) dx}$.

Решение

Умножим обе части исходного уравнения на $e^{\int P(x) dx}$:

$$e^{\int P(x) dx} [P(x)y - Q(x)] dx + e^{\int P(x) dx} dy = 0.$$

Условие полного дифференциала: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Проверим его:

$$M(x, y) = e^{\int P(x) dx} [P(x)y - Q(x)]; N(x, y) = e^{\int P(x) dx};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) e^{\int P(x) dx}; \frac{\partial N}{\partial x} = P(x) e^{\int P(x) dx}.$$

164 (4064). Найти интегрирующий множитель уравнения Бернулли

$$y' + P(x) y = y^n Q(x).$$

Решение

Замена переменной $z = y^{-n+1}$ приводит исходное уравнение к линейному [9]:

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1) P(x) z = (-n+1) Q(x)$$

или

$$\underbrace{(-n+1)[P(x)z - Q(x)]}_{M} dx + \underbrace{1}_{N} \cdot dz = 0. \quad (1)$$

Считая, что $M = M(x)$, $\frac{\partial \ln M}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = (-n+1) P(x) \Rightarrow$

$$M(x) = e^{-\int (n-1) P(x) dx}. \quad (2)$$

Умножая (2) на (1) и учитывая, что $\frac{dz}{dx} = (-n+1) y^{-n} \frac{dy}{dx}$, получим:

$$\begin{aligned} & e^{-(n-1) \int P(x) dx} (-n+1) [P(x) y^{-n+1} - Q(x)] dx + y^{-n} e^{-(n-1) \int P(x) dx} (-n+1) dy = 0; \\ & y^{-n} e^{-(n-1) \int P(x) dx} [P(x) y - Q(x) y^n] dx + \\ & + y^{-n} e^{-(n-1) \int P(x) dx} dy = 0. \end{aligned}$$

Видно, что интегрирующий множитель уравнения Бернулли есть

$$\underline{\underline{y^{-n} e^{-\int (n-1) P(x) dx}}}$$

165 (4065). Найти условия, при которых уравнение

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

допускает интегрирующий множитель вида $M = F(x + y)$.

Решение

Пусть уравнение (1) допускает интегрирующий множитель вида

$$M = F(x + y). \text{ Тогда } \frac{\partial (XM)}{\partial y} = \frac{\partial (YM)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$X F'_y - Y F'_x = F(x + y) (Y'_x - X'_y). \quad (2)$$

$$\text{Но } F'_y = F'_{x+y} (x + y)'_y = F'_{x+y} \text{ и } F'_x = F'_{x+y}. \text{ Из (2)} \Rightarrow \frac{Y'_x - X'_y}{X - Y} =$$

$$= \frac{F'_{x+y}}{F(x + y)} = f(x + y), \text{ т. е. условием того, что уравнение (1) имеет ин-}$$

тегрирующий множитель вида $F(x + y)$, есть то, что дробь $\frac{Y'_x - X'_y}{X - Y}$ — функция от $(x + y)$.

166 (4066). Найти условия, при которых уравнение

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

допускает интегрирующий множитель вида $M = F(xy)$.

Решение

Пусть уравнение (1) имеет интегрирующий множитель вида

$$M = F(xy). \text{ Тогда } \frac{\partial (XM)}{\partial y} = \frac{\partial (YM)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$X F'_y - Y F'_x = F(xy) (Y'_x - X'_y). \quad (2)$$

Но $F'_y = F'_{xy} (xy)'_y = F'_{xy} x$; $F'_x = F'_{xy} y$. Из (2) $\frac{Y'_x - X'_y}{x X - y Y} = \frac{F'_{xy}}{F(xy)} =$

$= f(xy)$, т. е. дробь $\frac{Y'_x - X'_y}{x X - y Y}$ – функция от xy .

Разные задачи

|| В задачах 167 (4067)–188 (4088) найти общее решение уравнений.

167 (4067). $y' = ax + by + c$.

Решение

$$y = u v, \quad u'v + v'u = ax + buv + c; \quad u'v + u(v' - bv) = ax + c; \quad \frac{dv}{v} = b dx \Rightarrow$$

$$v = e^{bx}; \quad du = e^{-bx}(ax + c) dx; \quad \left[ax + c = u_1, \quad du_1 = a dx, \quad e^{-bx} dx = dv_1, \right.$$

$$\left. v_1 = -\frac{1}{b} e^{-bx} \right]; \quad u = \int e^{-bx}(ax + c) dx = -\frac{ax + c}{b} e^{-bx} + \frac{a}{b} \int e^{-bx} dx =$$

$$= -\frac{ax + c}{b} e^{-bx} - \frac{a}{b^2} e^{-bx} + C \Rightarrow \underline{\underline{abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}}}.$$

168 (4068). $ay' + by + cy^m = 0$.

Решение

Это – уравнение Бернулли; разделив его почленно на y^m , получим:

$$y^{-m} ay + by^{-m+1} + c = 0; \quad z = y^{-m+1}, \quad z' = (-m+1)y^{-m} y'; \quad \frac{a}{-m+1} z' +$$

$$+bz+c=0; z=uv, au'v+auv'+b(-m+1)uv=(-m+1)uv=-c(-m+1)$$

$$\Rightarrow au'v+u(av'+b(-m+1)v)=-c(-m+1); \frac{dv}{v}=\frac{-b(-m+1)}{a}dx \Rightarrow$$

$$v=e^{-\frac{b(-m+1)}{a}x}; du=-\frac{c}{a}(-m+1)e^{-\frac{b(-m+1)}{a}x}dx \Rightarrow u=-\frac{c}{b}e^{\frac{b(-m+1)}{a}x}+C;$$

$$z=-\frac{c}{b}+Ce^{\frac{(m+1)bx}{a}} \Rightarrow y=\left[Ce^{\frac{(m+1)bx}{a}}-\frac{c}{b}\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

169 (4069). $y'=\frac{x+y-2}{y-x-4}.$

Решение

Положим:

$$\left. \begin{aligned} x+y-2 &= u+v, \\ -x+y-4 &= -u+v \end{aligned} \right\} \Rightarrow y=3+v, x=u-1, y'_x=v'_x, v'_x=\frac{u+v}{-u+v},$$

$$v=y-3, u=x+1, v'_x=v'_u u'_x=v'_u \Rightarrow v'_u=\frac{u+v}{-u+v}; v'_u=\frac{1+\frac{v}{u}}{-1+\frac{v}{u}}, \frac{v}{u}=z,$$

$$v=zu, v'_u=z+z'u, z+z'u=\frac{1+z}{-1+z} \Rightarrow z'u=\frac{1+2z-z^2}{z-1}; \frac{z-1}{1+2z-z^2}dz=$$

$$=\frac{du}{u} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2|=\ln|uC_1| \Rightarrow uC_1=\frac{1}{\sqrt{1+2z-z^2}} \Rightarrow u^2 \times$$

$$\times(1+2z-z^2)=C_2 \Rightarrow (x+1)^2 \left(1+2\frac{y-3}{x+1}-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right)=C_2 \Rightarrow$$

$$x^2+2x+1+2xy-6x+2y-6-y^2+6y-9=C_2 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{x^2+2xy-y^2-4x+8y=C \quad (C=C_2+14)}}.$$

170 (4070). $y' = \frac{y^2 + x y - x^2}{y^2}$.

Решение

$$y' = \frac{\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1}{\frac{y^2}{x^2}}, \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = x u' + u; \quad x u' + u = \frac{u^2 + u - 1}{u^2} \Rightarrow u^2 u' x =$$

$$= -u^3 + u^2 + u - 1; \quad -\frac{u^2 du}{(u-1)^2(1+u)} = \frac{dx}{x}; \quad -\frac{u^2}{(u-1)^2(1+u)} = \frac{A}{(u-1)^2} +$$

$$+ \frac{B}{u-1} + \frac{C}{1+u} \Rightarrow -u^2 = Au + A + Bu^2 - B + Cu^2 - 2Cu + C;$$

$$\left. \begin{array}{l} u^2 \left| \begin{array}{l} B+C=1, \\ A-2C=0, \\ A-B+C=0 \end{array} \right. \Rightarrow A=-\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{3}{4}, \quad C=-\frac{1}{4}; \quad \ln|x| + C_1 = \frac{1}{2(u-1)} -$$

$$-\frac{3}{4} \ln|u-1| - \frac{1}{4} \ln|u+1|; \quad 4 \ln|x| + C_2 = \frac{2}{u-1} - 3 \ln|u-1| - \ln|u+1|;$$

$$\ln \left| \frac{x^4 (y-x)^3 (y+x)}{x^3 \cdot x} \right| + \frac{2x}{x-y} = C; \quad \frac{2x}{x-y} + 3 \ln|y-x| + \ln|y+x| = C.$$

171 (4071). $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$.

Решение

$$x+y=u, \quad 1+y'=u', \quad u'-1 = \frac{a^2}{u^2} \Rightarrow \frac{u^2 du}{a^2 + u^2} = dx; \quad \int \frac{(u^2 + a^2) - a^2}{u^2 + a^2} du =$$

$$= x + C_1; \int du - a^2 \int \frac{du}{u^2 + a^2} = x + C_1 \Rightarrow u - a \operatorname{arctg} \frac{u}{a} = x + C_1; x + y -$$

$$- a \operatorname{arctg} \frac{x+y}{a} = x + C_1 \Rightarrow y - C_1 = a \operatorname{arctg} \frac{x+y}{a}; \frac{x+y}{a} = \operatorname{tg} \left(\frac{y}{a} + C \right);$$

$$\underline{\underline{x + y = a \operatorname{tg} \left(\frac{y}{a} + C \right)}}.$$

172 (4072). $y'(y^2 - x) = y$.

Решение

$$y^2 = z, 2yy' = z', y' = \frac{z'}{2y}, \frac{z'}{2y}(z - x) = y \Rightarrow z'(z - x) = 2z \Rightarrow \frac{z - x}{2z} =$$

$$= \frac{1}{z'_x} = x'; \frac{x}{z} = u, x'_z = u + z u', 1 - u = 2u + 2z u' \Rightarrow 1 - 3u = 2z u',$$

$$\frac{2 du}{1 - 3u} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln |z| = -\frac{2}{3} \ln |1 - 3u| + \ln C_1 \Rightarrow z = \frac{C_1}{\sqrt[3]{(1 - 3u)^2}} \Rightarrow$$

$$z^3 = \frac{C_1^3}{(1 - 3u)^2} \Rightarrow y^6 = \frac{C_1^3 y^4}{(y^2 - 3x)^2} (C_1^3 = C^2), y^2 = \frac{C^2}{(y^2 - 3x)^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y^3 - 3xy = C}}.$$

173 (4073). $\frac{2x dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$.

Решение

$$\frac{2x^3}{y^3} x' + \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x^4}{y^4} = 0, \frac{x}{y} = u, x'_y = u' y + u; 2u^3 (u' y + u) + u^2 - 3u^4 = 0;$$

$$\frac{2u du}{u^2 - 1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |u^2 - 1| = \ln |yC| \Rightarrow \underline{\underline{x^2 - y^2 = Cy^3}}.$$

174 (4074). $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.

Решение

$$P = 2y + xy^3; \quad Q = x + x^2y^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2 + 3xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2xy^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Если M – интегрирующий множитель, а данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, то $\frac{\partial u}{\partial x} = (2y + xy^3)M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = (x + x^2y^2)M$.

Пусть $M = M(x)$. Тогда (см. задачу 156 (4056))

$$\frac{\partial \ln M}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2 + 3xy^2 - 1 - 2xy^2}{x + x^2y^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln M = \ln x \text{ и } M = x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2yx + x^2y^3, \quad u = \int (2yx + x^2y^3)dx + \varphi(y); \quad u = yx^2 + \frac{x^3y^3}{3} + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + x^3y^2 + \varphi'(y).$$

$$\text{Но } \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + x^3y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = C_1.$$

$$\text{Так как } du = 0, \text{ то } u = C_2 - \text{общее решение. Значит, } yx^2 + \frac{x^3}{3}y^3 + C_1 = C_2 \Rightarrow \underline{\underline{3x^2y + x^3y^3 = C}} \quad (C = 3(C_2 - C_1)).$$

175 (4075). $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$.

Решение

$$\text{Обозначим } x^2y + \frac{y^3}{3} = z \Rightarrow 2xy + x^2y' + y^2y' = z'; \quad 2xy + y'(x^2 +$$

$$+ y^2) = z' \Rightarrow$$

$$(x^2 + y^2)y' = z' - 2xy. \quad (1)$$

Подставим (1) в исходное уравнение:

$$2xy + z + z' - 2xy = 0 \Rightarrow \ln \left| \frac{z}{C} \right| = -x; \quad z = Ce^{-x} \quad \text{или} \quad y \left(x^2 + \frac{1}{3} y^2 \right) = Ce^{-x}.$$

$$176 \text{ (4076). } y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}.$$

Решение

$$\begin{aligned} 1+y=z, \quad y'=z', \quad z' &= \frac{z^2}{xz-x^2}; \quad \frac{z}{x}=u, \quad z'=u'x+u, \quad u'x+u=\frac{u^2}{u-1} \Rightarrow \\ u'xu+u^2-u'x-u &= u^2 \Rightarrow u'x(u-1)=u \Rightarrow \frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{u-1}{u} du = \\ &= \int \frac{dx}{x}; \quad u - \ln|u| = \ln|x| + C; \quad \frac{1+x}{x} - \ln|1+y| + \ln|x| = \ln|x| + C; \\ \frac{1+y}{x} - \ln|1+y| &= C. \end{aligned}$$

$$177 \text{ (4077). } x dy + y dx + y^2 (x dy - y dx) = 0.$$

Решение

$$\begin{aligned} y(1-y^2) dx + x(1+y^2) dy &= 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(1+y^2) dy}{y(y^2-1)}; \quad \frac{1+y^2}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \\ &+ \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1}; \quad 1+y^2 = Ay^2 - A + By^2 + By + Cy^2 - Cy; \\ \left. \begin{aligned} A+B+C &= 1, \\ B-C &= 0, \\ -A &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= -1, \\ B &= 1, \\ C &= 1; \end{aligned} \right\} \quad \ln|x| + \ln|C| = -\ln|y| + \ln|y-1| + \ln|y+1|, \\ Cx &= \frac{y^2-1}{y} \quad \text{или} \quad \underline{\underline{Cxy = y^2 - 1.}} \end{aligned}$$

$$178 \text{ (4078). } \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right] dy = 0.$$

Решение

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}; \quad Q = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \Rightarrow u = \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right) dx + \varphi(y) = \ln|x| + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y(x-y) + y^2}{(x-y)^2} + \\ &+ \varphi'(y) = \frac{2yx - y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y); \quad \frac{2yx - y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \Rightarrow \\ \varphi'(y) &= \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{2yx - y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{y} \Rightarrow \varphi(y) = \int \left(1 - \frac{1}{y} \right) dy = \\ &= y - \ln|y| + C_1; \quad u = \ln|x| + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln|y| = C; \quad \ln \left| \frac{x}{y} \right| + \frac{xy}{x-y} = C. \end{aligned}$$

$$179 \text{ (4079). } y' = x \sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= z; \quad y = z^2, \quad y' = 2zz', \quad 2zz' = xz + \frac{xz^2}{x^2 - 1} \Rightarrow 2z' = x + \frac{xz}{x^2 - 1}, \quad z = uv, \\ z' &= u'v + v'u, \quad 2u'v + 2uv' = x + \frac{xuv}{x^2 - 1}, \quad 2u'v + u \left(2v' - \frac{xv}{x^2 - 1} \right) = x; \\ 2 \frac{dv}{dx} &= \frac{xv}{x^2 - 1} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x dx}{x^2 - 1}; \quad v = \sqrt[4]{x^2 - 1}; \quad 2 \frac{du}{dx} \sqrt[4]{x^2 - 1} = x \Rightarrow du = \end{aligned}$$

$$= \frac{x dx}{2\sqrt[4]{x^2-1}} \Rightarrow \frac{1}{3} \sqrt[4]{(x^2-1)^3} + C; \quad z = \frac{1}{3}(x^2-1) + C \sqrt[4]{x^2-1};$$

$$\underline{\underline{3\sqrt{y} = C\sqrt[4]{x^2-1} + x^2 - 1.}}$$

180 (4080). $y \sin x + y' \cos x = 1.$

Решение

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = u v, \quad y' = u' v + v' u; \quad u' v + v' u + u v \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

$$u' v + u (v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}; \quad v' + v \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \ln |v| =$$

$$= \ln |\cos x|, \quad v = \cos x; \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u = \operatorname{tg} x + C; \quad \underline{\underline{y = \sin x + C \cos x.}}$$

181 (4081). $y' - y + y^2 \cos x = 0.$

Решение

Это уравнение Бернулли. Разделим исходное уравнение на y^2 :
 $y^{-2} y' - y^{-1} + \cos x = 0$. Положим $y^{-1} = z \Rightarrow z' = -y^{-2} y'$ и выполним соответствующее преобразование:

$$-z' - z + \cos x = 0 \quad \text{или} \quad z' + z - \cos x = 0, \quad z = uv; \quad u'v + v'u + uv - \cos x = 0,$$

$$u'v + u(v' + v) = \cos x; \quad v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \Rightarrow v = e^{-x}; \quad \frac{du}{dx} e^{-x} = \cos x,$$

$$u = \int e^x \cos x dx; \quad [e^x = u_1, \quad du_1 = e^x dx, \quad dv_1 = \cos x dx, \quad v_1 = \sin x];$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx; \quad [e^x = u_2, \quad du_2 = e^x dx, \quad dv_2 =$$

$$= \sin x dx, \quad v_2 = -\cos x]; \quad \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$\Rightarrow u = \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C; \quad z = \frac{1}{2} (\sin x +$$

$$+ \cos x + Ce^{-x}) = y^{-1}; \quad y = \frac{1}{\frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + Ce^{-x}} \quad \text{или}$$

$$y = \frac{2e^x}{C + e^x (\sin x + \cos x)}.$$

182 (4082). $y' = \frac{\cos |x| \sin y + \operatorname{tg}^2 x}{\sin |x| \cos y} \Rightarrow y' \sin |x| \cos y = \cos |x| \sin y + \operatorname{tg}^2 x.$

Решение

Пусть $\sin y = z$. Тогда $\cos y \cdot y' = z'$; $z' \sin x = z \cos x + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow$

$$z' - z \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad z = uv, \quad z' = u'v + v'u, \quad u'v + u(v' - v \operatorname{ctg} x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x};$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{\cos |x| dx}{\sin x} \Rightarrow v = \sin x; \quad \frac{du}{dx} \sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow u = \operatorname{tg} x + C;$$

$$z = \sin x \operatorname{tg} x + C \sin x = \sin y \Rightarrow \frac{\sin y}{\sin x} - \operatorname{tg} x = C.$$

183 (4083). $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x.$

Решение

$$\frac{y}{x} = u, \quad y' = u'x + u, \quad x^2 u' \cos u + xu \cos u = xu \cos u - x \Rightarrow \cos u \, du =$$

$$= -\frac{dx}{x}, \quad \sin u = -\ln |Cx|; \quad Cx = e^{-\sin u} \Rightarrow x e^{\frac{\sin y}{x}} = C.$$

$$184 \text{ (4084). } \left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x} \right) y \, dx + \left(x \cos \frac{y}{x} - y \sin \frac{y}{x} \right) x \, dy = 0.$$

Решение

$$\left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x} \right) \frac{y}{x} + \left(x \cos \frac{y}{x} - y \sin \frac{y}{x} \right) y' = 0; \quad \frac{y}{x} = u, \quad y = u x,$$

$$y' = u' x + u; \quad u x \cos u + u^2 x \sin u + x^2 u' \cos u + x u \cos u - u u' x^2 \sin u - u^2 x \sin u = 0 \Rightarrow 2 u x \cos u = u' x^2 (u \sin u - \cos u);$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u \sin u - \cos u}{u \cos u} du; \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \left[\int \frac{-(d \cos u)}{\cos u} - \int \frac{du}{u} \right]; \quad \ln |C_1 x| =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |u \cos u| \Rightarrow C_1 x = \frac{1}{\sqrt{u \cos u}} \Rightarrow C_1^2 x^2 = \frac{1}{u \cos u}; \quad C_1^2 x^2 = \frac{x}{y \cos \frac{y}{x}} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{x y \cos \frac{y}{x} = C.}}$$

$$185 \text{ (4085). } y' = \frac{x}{\cos y} - \operatorname{tg} y.$$

Решение

$$y' \cos y = x - \sin y. \text{ Обозначим } \sin y = z \Rightarrow y' \cos y = z'. \text{ Тогда } z' + z = x,$$

$$z = u v, \quad z' = u' v + v' u, \quad u' v + u (v' + v) = x, \quad v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \Rightarrow v = e^{-x};$$

$$\frac{du}{dx} = x e^x \Rightarrow u = \int x e^x dx = x e^x - e^x + C; \quad \Big|_{x=u_1}, \quad du_1 = dx, \quad e^x dx =$$

$$= dv_1, \quad v_1 = e^x \Big|; \quad z = x - 1 + C e^{-x}; \quad \underline{\underline{x - 1 + C e^x = \sin y.}}$$

186 (4086). $y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x)$.

Решение

$y^{-1} - y^{-2} y' \cos x = \cos x (1 - \sin x)$ – уравнение Бернулли; $y^{-1} = z$,

$-y^{-2} y' = z'$; $z + z' \cos x = \cos x (1 - \sin x)$; $z = u v$, $z' = u' v + v' u$,

$$\frac{u v}{\cos x} + u' v + v' u = 1 - \sin x; u' v + u \left(v' + \frac{v}{\cos x} \right) = 1 - \sin x; v' + \frac{v}{\cos x} =$$

$$= 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\cos x} \Rightarrow \ln |v| = -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|; v = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}; \frac{du}{dx} \cdot \frac{1 - \sin x}{\cos x} = 1 - \sin x; du = \cos x dx;$$

$$u = \sin x + C; y = \frac{1}{u v} = \frac{\cos x}{(C + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{\cos x (1 + \sin x)}{(C + \sin x) \cos^2 x};$$

$$y = \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{C + \sin x}.$$

187 (4087). $2yy' = e^{(x^2+y^2)/x} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x$.

Решение

Обозначим $x^2 + y^2 = z \Rightarrow 2x + 2y y' = z'$; $z' = e^{z/x} + \frac{z}{x}$, $\frac{z}{x} = u$,

$$z = u x, z' = u' x + u; u' x + u = e^u + u; \frac{du}{dx} x = e^u; e^{-u} du = \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-u} =$$

$$= \ln |Cx|; \ln |Cx| = -e^{(x^2+y^2)/x}.$$

$$188 \text{ (4088). } (1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0.$$

Решение

$$\frac{x}{y} = u, \quad x = y u, \quad x' = u' y + u, \quad (1 + e^u) (u' y + u) + e^u (1 - u) = 0;$$

$$u' y + e^u u' y + u + u e^u - u e^u = 0; \quad u' y (1 + e^u) = -(u + e^u);$$

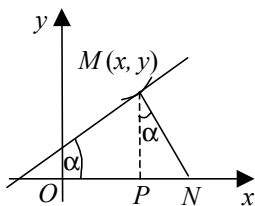
$$\frac{1 + e^u}{u + e^u} du = -\frac{dy}{y}; \quad \int \frac{d(u + e^u)}{u + e^u} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |u + e^u| \Rightarrow u + e^u = \frac{C}{y};$$

$$C = y \left(\frac{x}{y} + e^{x/y} \right); \quad \underline{\underline{C = x + y e^{x/y}}}.$$

189 (4089). Найти линию, у которой поднормаль в любой точке так относится к сумме абсциссы и ординаты, как ордината этой точки к ее абсциссе.

Решение

$$\text{Уравнение нормали } MN \quad Y - y = -\frac{1}{y'} (X - x).$$



$$\text{Для точки } N \quad X = X_N, \quad Y = 0. \text{ Тогда } X_N = X + xy', \quad PN = X_N - X_P = X + y y' - x = yy';$$

$$\frac{PN}{x + y} = \frac{y}{x} \text{ или } \frac{y y'}{x + y} = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{x + y}{x} \text{ или}$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x} = u, \quad y = u x, \quad y' = u' x + u,$$

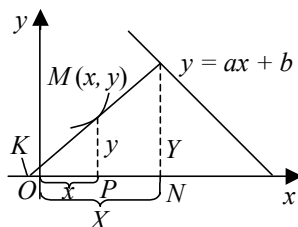
$$u' x + u = 1 + u \Rightarrow u' x = 1 \text{ и } du = \frac{dx}{x}, \quad u = \ln |Cx|; \quad \underline{\underline{y = x \ln |Cx|}}.$$

190 (4090). Найти линию, обладающую тем свойством, что отрезок касательной в любой ее точке, заключенный между осью Ox и прямой $y = ax + b$, делится точкой касания пополам.

Решение

$$\frac{Y}{y} = 2; \quad (1)$$

$$X = x + |PN| = x + |KP| = x + \frac{y}{y'}. \quad (2)$$



Подставив (2) в (1), получим

$$\frac{a \left(x + \frac{y}{y'} \right) + b}{y} = 2 \Rightarrow axy' + ay + by' = 2y y' \Rightarrow (2y - b - ax)y' = ay;$$

$$2y - b - ax = z, \quad 2y' - a = z' \Rightarrow y' = \frac{z' + a}{2}; \quad y = \frac{z + b + ax}{2}; \quad z \frac{z' + a}{2} =$$

$$= a \frac{z + b + ax}{2} \Rightarrow z dz = (a^2 x + ba) dx; \quad \frac{z^2}{2} = \frac{a^2 x^2}{2} + abx + C_1; \quad z^2 = a^2 x^2 +$$

$$+ 2abx + C_2; \quad 4y^2 + b^2 + a^2 x^2 - 4by - 4ax y + 2abx = a^2 x^2 + 2abx + C_2 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y^2 - by - axy = C}}, \text{ где } C = C_2 - b^2.$$

191 (4091). Найти линию, для которой отношение расстояния от нормали в любой ее точке до начала координат к расстоянию от той же нормали до точки $(a; b)$ равно постоянному k .

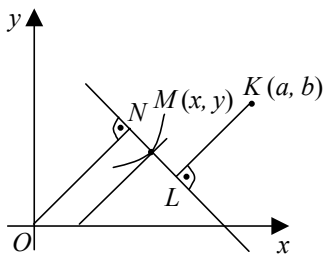
Решение

По условию $|ON| = |LK| \cdot k$. Уравнение нормали NL имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \Rightarrow (Y - y)y' + (X - x) = 0; \quad y \uparrow$$

$$\frac{|ON|}{|LK|} = k; \quad \frac{|-(y y' + x)|}{|(b - y)y' + (a - x)|} = k.$$

Исходя из определения модуля числа, рассмотрим два случая:



$$a) \frac{-(y y' + x)}{(b-y)y' + (a-x)} = k \Rightarrow$$

$$[k b + (1-k) y] y' + (1-k) x + k a = 0; \quad (1)$$

$$k b + (1-k) y = z, \quad (1-k) y' = z', \quad y' = \frac{z'}{1-k}, \quad \frac{z z'}{1-k} + (1-k) x + k a = 0.$$

Обозначим $z^2 = W$, $2zz' = W'$, $\frac{W'}{2(1-k)} = (k-1)x - k a \Rightarrow \int dW =$

$$= \int (-2(k-1)^2 x + 2(k-1)ka) dx \Rightarrow W = -(k-1)^2 x^2 + 2(k-1)kax +$$

$$+ C_1 = z^2; \quad k^2 b^2 + 2kb(1-k)y + (1-k)^2 y^2 = -(k-1)^2 x^2 + 2(k-1)kax +$$

$$+ C_1 = z^2 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 - \frac{2k}{k-1}(ax+by) = C \quad (k \neq 1)}}.$$

$$б) \frac{y y' + x}{(b-y)y' + (a-x)} = k \Rightarrow$$

$$y'[k b - y(k+1)] - (k+1)x + k a = 0; \quad (2)$$

$$k b - y(k+1) = z, \quad -y'(k+1) = z', \quad y' = -\frac{z'}{1+k}, \quad -\frac{z z'}{1+k} - (1+k)x + k a = 0.$$

Обозначим $z^2 = W$, $2zz' = W'$, $-\frac{W'}{2(k+1)} = (1+k)x - k a; \quad \int dW =$

$$= 2 \int (k a - (1+k)x)(1+k) dx + C_1; \quad W = 2 \left[kax - (1+k) \frac{x^2}{2} \right] (1+k) +$$

$$+ C_1 = z^2; \quad k^2 b^2 - 2kby(1+k) + y^2(1+k)^2 = 2ka(1+k)x - (1+k)x^2 +$$

$$+ C_1 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 - \frac{2k}{k+1}(ax+by) = C_1 \quad (k \neq -1)}}.$$

Если в уравнении (1) положить $k = 1$, а в уравнении (2) $k = -1$, то получим одно и то же дифференциальное уравнение:

$$b y' = -a \Rightarrow y' = -\frac{a}{b}, \quad y = -\frac{a}{b}x + C \quad \text{или} \quad a x + b y = C \quad (k = 1 \text{ или } k = -1).$$

192 (4092). Найти линию, для которой расстояние от начала координат до касательной в произвольной ее точке равно расстоянию от начала координат до нормали в той же точке.

Решение

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ будет

$$Y - y = y'(X - x) \quad \text{или} \quad y'(X - x) - (Y - y) = 0.$$

Уравнение нормали имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x); \quad -(X - x) - y'(Y - y) = 0.$$

Расстояние от точки $O(0; 0)$ до касательной и нормали:

$$d_1 = \frac{|-x y' + y|}{\sqrt{y'^2 + 1}}; \quad d_2 = \frac{|x + y' y|}{\sqrt{y'^2 + 1}}.$$

Так как $d_1 = d_2$, то выражение под знаком модуля положительно:

$$-x y' + y = x + y' y, \quad (1)$$

$$-y' + \frac{y}{x} = 1 + y' \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x} = u, \quad y = x u, \quad y' = u' x + u, \quad -u' x - u + u = 1 + u u' x +$$

$$+ u^2 \Rightarrow -\frac{(1+u) du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \arctg u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln |C_1 x| \Rightarrow$$

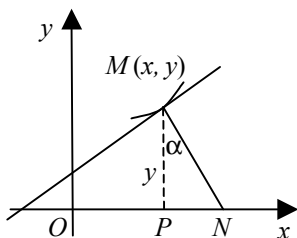
$$\arctg \frac{y}{x} = \ln \left| C_1 x \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\pm \arctg(y/x)} \quad (\text{знак плюс } (+))$$

получится при других вариантах уравнения (1)); $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\frac{y}{x} = \tg \varphi \Rightarrow \underline{\underline{\rho = C e^{\pm \varphi}}} \quad \text{— уравнения логарифмических спиралей.}$$

193 (4093). Найти линию, обладающую следующим свойством: ордината любой ее точки есть средняя пропорциональная между абсциссой и суммой абсциссы и поднормали, проведенной к линии в той же точке.

Решение



Поднормаль $\overline{Pr_x MN} = -PN = -y \operatorname{tg} \alpha = -y y'$. По условию $y^2 = x(x - y y')$. Тогда

$$\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{y}{x} y', \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = u' x + u;$$

$$u^2 = 1 - u' u x - u^2, \quad 2u^2 - 1 = -u' u x \Rightarrow$$

$$-\frac{u du}{2u^2 - 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |2u^2 - 1| = -4 \ln \frac{x}{C} \Rightarrow$$

$$2 \frac{y^2}{x^2} = 1 + \frac{C^4}{x^4} \Rightarrow y^2 = \frac{x^4 + C^4}{2x^2}.$$

194 (4094). В электрическую цепь с сопротивлением $R = 3/2$ Ом в течение двух минут равномерно вводится напряжение (от нуля до 120 В). Кроме того, автоматически вводится индуктивность, так что число, выражающее индуктивность цепи в генри, равно числу, выражающему ток в амперах. Найти зависимость тока от времени в течение первых двух минут опыта.

Решение

По условию $R = \frac{3}{2}$ Ом; $U_0 = 0$; $U = 120$ В; $t = 2$ мин = 120 с. Паде-

ние напряжения вдоль проводника $U = R I + L \frac{dI}{dt}$. Также по условию $I = L$

(численно); значит, $U = R I + I \cdot I'$, $U = k t$, $120 = k 120 \Rightarrow k = 1$ и $U = t$.

Имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$t = R I + I \cdot I'. \quad (1)$$

Ищем решение в виде

$$I = At, \quad I' = A. \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1), учитывая, что $R = \frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2} At = t - A^2 t \Rightarrow 2A^2 + 3A - 2 = 0, \quad A = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}, \quad A > 0, \quad A = \frac{1}{2},$$

$$\underline{\underline{I = \frac{t}{2}}}.$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (продолжение)

Поле направлений. Изоклины

195 (4095). Дано дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x}{y}$.

а) Построить поле направлений, устанавливаемое данным уравнением.

б) Выяснить расположение вектора поля относительно полярного радиуса любой точки поля.

в) Выяснить вид интегральных кривых уравнения исходя из поля направлений.

г) Найти интегральные кривые, решая данное уравнение обычным методом (разделяя переменные).

д) Указать семейство изоклин данного уравнения.

Решение

Изоклиной называется множество точек, в которых касательные к интегральным кривым имеют одно и то же направление.

Для дифференциального уравнения $y' = -\frac{x}{y}$ изоклинами будут

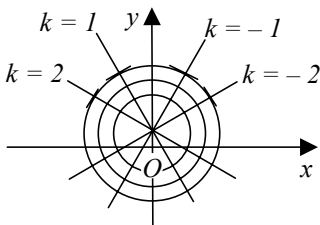
прямые:

$$-\frac{x}{y} = k \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow x dx =$$

$$= -y dy; \quad \underline{x^2 + y^2 = C} \text{ — семейство кон-}$$

центрических окружностей.

Вектор поля в каждой точке перпендикулярен к полярному радиусу точки.



196 (4096). Написать дифференциальное уравнение, изоклинами которого служат: 1) равнобочные гиперболы $xy = a$; 2) параболы $y^2 - 2px$; 3) окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение

$$1) \underline{y' = f(xy)}; 2) \underline{y' = f\left(\frac{y^2}{x}\right)}; 3) \underline{y' = f(x^2 + y^2)}.$$

197 (4097). Найти изоклины дифференциального уравнения семейства парабол $y = ax^2$. Сделать чертеж. Истолковать результат геометрически.

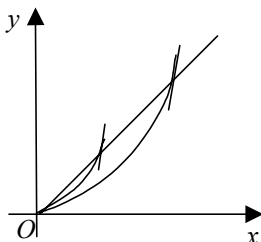
Решение

Дифференцируем исходное уравнение по x :

$$y' = 2ax. \quad (1)$$

Подставляя в (1) значение $a = y/x^2$ из уравнения семейства, получим дифференциальное уравнение данного семейства: $y' = 2\frac{y}{x}$. Изокли-

нами будут линии $2\frac{y}{x} = k \Rightarrow y = \frac{k}{2}x$ или $y = Cx$



$\left(C = \frac{k}{2}\right)$, т. е. прямые. Результат может быть высказан в форме теоремы: если семейство парабол, имеющих общую ось и общую вершину, пересечь прямой, проходящей через вершину, то касательные к различным параболом в точках пересечения их с прямой будут между собой параллельны.

198 (4098). Убедиться, что изоклинами однородного уравнения (и только однородного уравнения) служат прямые, проходящие через начало координат.

Решение

Общий вид однородного уравнения: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Уравнение изоклин $k = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{y}{x} = \varphi(k) = \text{const} = C$, где $\underline{y = Cx}$ – семейство прямых, проходящих через начало координат.

199 (4099). Указать линейные уравнения, изоклинами которых являются прямые.

Решение

$$y' = \frac{ay+b}{x} \Rightarrow k = \frac{ay+b}{x} \Rightarrow \underline{\underline{ay+b=kx}} - \text{семейство прямых.}$$

200 (4100). Пусть y_1, y_2, y_3 – ординаты трех любых изоклин некоторого линейного уравнения, соответствующие одной абсциссе. Убедиться, что отношение $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ сохраняет одно и то же значение, какова бы не была эта абсцисса.

Решение

Линейное уравнение $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

Уравнение изоклины $q(x) - p(x) \cdot y = C$.

Рассмотрим три различные изоклины с ординатами y_1, y_2, y_3 , соответствующие одной абсциссе x :

$$\left. \begin{array}{l} q(x) - p(x) \cdot y_1 = C_1, \\ q(x) - p(x) \cdot y_2 = C_2, \\ q(x) - p(x) \cdot y_3 = C_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = \frac{q(x) - C_1}{p(x)}; \\ y_2 = \frac{q(x) - C_2}{p(x)}; \\ y_3 = \frac{q(x) - C_3}{p(x)}; \end{array} \quad \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 - C_3} = \text{const}.$$

Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

201 (4101). Дано уравнение $y' = \frac{x^2 + y^2}{10}$. Построить приближенно интегральную кривую, соответствующую отрезку $1 \leq x \leq 5$ и проходящую через точку $M(1; 1)$.

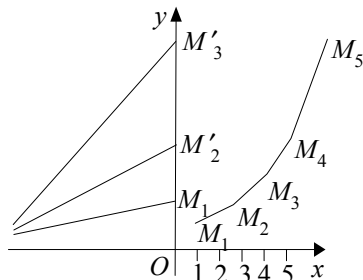
Решение

x_i	y'_i
1	0,2
2	0,54
3	1,30
4	2,52

$$f(x) = \frac{x^2 + y^2}{10}; y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})h, h = 1;$$

$$y_2 = 1 + 0,2 = 1,2; y_3 = 1,2 + 0,54 = 1,74; y_4 = 1,74 + 1,30 = 3,04;$$

$$y_5 = 3,04 + 2,52 = 5,56.$$



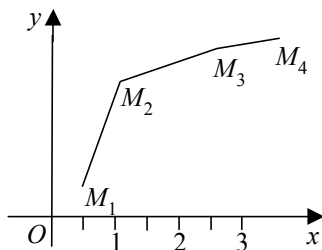
202 (4102). Дано уравнение $y' = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Построить приближенно интегральную кривую, соответствующую отрезку $0,5 \leq x \leq 3,5$ и проходящую через точку $(0,5; 0,5)$.

Решение

x_i	y'_i
0,5	2
1,5	0,13
2,5	0,08

$$x \in [0,5; 3,5], h = 1, (0,5; 0,5);$$

$$y_2 = 0,5 + 2 = 2,5; y_3 = 2,5 + 0,13 = 2,63; y_4 = 2,63 + 0,08 = 2,71.$$



203 (4103). Дано уравнение $y' = xy^3 + x^2$. Применяя способ Эйлера, вычислить y при $x = 1$, если y – частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=0} = 0$. Вычислить y с двумя десятичными знаками.

Решение

Программа вычислений на языке PASCAL:

```

Program Eler;
Function F(X, Y : Real) : Real;
Begin
    F := X*Sqr(Y)*Y + Sqr(X);
End;
```

```
Const
  X0: Real = 0;
  XN: Real = 1;
  Y0: Real = 0;
  N:=20;
Var
  h:Real;
  m : Integer;
  X, Y : Array [0..N] Of Real;
Begin
  X[0] := X0;
  Y[0] := Y0;
  h := (XN - X0)/N;
  For m := 1 To N Do Begin
    Y[m] := Y[m - 1] + h*F(X[m - 1],Y[m - 1]);
    X[m] := X0 + m*h;
  End;
  WriteLn('x = ',X[N]:4:2,' y = ',Y[N]:4:2);
End.
```

x = 1.00 y = 0.31

204 (4104). Дано уравнение $y' = \sqrt{x} \cdot y^2 + 1$. Применяя способ Эйлера, вычислить y при $x = 2$, если y – частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=0} = 0$. Вычислить y с двумя десятичными знаками.

Решение

По способу Эйлера $y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})h$. Вычислить y при $y' = \sqrt{x} \cdot y^2 + 1$; $y|_{x=0} = 0$.

Программа вычислений на языке PASCAL:

```
Program Eler;
Function F(X, Y : Real) : Real;
Begin
  F := Sqrt(X)*Sqr(Y) + 1;
End;
Const
```

```

X0 : Real = 1;
XN : Real = 2;
Y0 : Real = 0;
N = 20;
Var
  h : Real;
  m : Integer;
  X, Y : Array [0..N] Of Real;
Begin
  X[0] := X0;
  Y[0] := Y0;
  h := (XN - X0)/N;
  For m := 1 To N Do Begin
    Y[m] := Y[m - 1] + h*F(X[m - 1],Y[m - 1]);
    X[m] := X0 + m*h;
  End;
  WriteLn('x = ',X[N]:4:2,' y = ',Y[N]:4:2);
End.

x = 2.00 y = 1.71.

```

205 (4105). Дано: уравнение $y' = \frac{xy}{2}$ и начальное условие $y|_{x=0} = 1$.

Решить это уравнение точно и найти значение y при $x = 0,9$. Далее, найти это значение при помощи приближенного метода, разбивая отрезок $[0; 0,9]$ на 9 частей. Указать относительную погрешность последнего результата.

Решение

$$y' = \frac{xy}{2} \Rightarrow \frac{2}{y} dy = x dx \Rightarrow 2 \ln |y| + \ln C = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y^2 C = e^{x^2/2}.$$

При $x = 0$ $y = 1 \Rightarrow C = 1$, $y = e^{x^2/4}$ – точное решение.

Составим программу решения дифференциального уравнения по методу Эйлера на языке PASCAL (здесь Z – точное решение, D – относительная погрешность).

```

Program Eler;
Function F(X, Y : Real) : Real;

```

```

Begin
  F := X*Y/2;
End;
Const
  X0 : Real= 0;
  XN : Real = 0.9;
  Y0 : Real= 1;
  N = 90;
Var
  h, Z, D : Real;
  m : Integer;
  X, Y : Array [0..N] Of Real;
Begin
  Z := Exp (Sqr(0.9)/4) ;
  X[0] := X0;
  Y[0] := Y0;
  h := (XN - X0)/N;
  For m := 1 To N Do Begin
    Y[m] := Y[m - 1] + h*F(X[m - 1],Y[m - 1]);
    X[m] := X0 + m*h;
  End;
  D := Abs(Z - Y[N])*100/Z;
  WriteLn('x = ',X[N]:7:5,' z = ',Z:7:5,
    ' y = ',Y[N] :7:5, ' D = ',D:5:3) ;
End.

0.90000 z = 1.22446 y = 1.22134 D = 0.254.

```

206 (4106). Дано: уравнение $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$ и начальное условие $y|_{x=1} = 0$.

Решить это уравнение точно и, пользуясь каким-либо из приближенных методов интегрирования уравнений, вычислить значение x при $y = 1$ (сравнить со значением x , получаемым при точном решении).

Решение

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1} \Rightarrow x' = \frac{x^3 + y + 1}{3x^2} \Rightarrow 3x^2 x' = x^3 + y + 1; \text{ обозначим } x^3 = z.$$

Тогда $3x^2x' = z'$; $z' - z = y + 1$; $z = uv$; $z' = u'v + v'u$; $uv' + u(v' - v) = y + 1$;

$$v' - v = 0 \Rightarrow v = e^y; \frac{du}{dy} e^y = y + 1 \Rightarrow u = \int (y + 1) e^{-y} dy \quad (u_1 = y + 1, du_1 =$$

$$= dy, e^{-y} dy = dv_1, v_1 = -e^{-y}); u = -(y + 1) e^{-y} + \int e^{-y} dy = -e^{-y} (y +$$

$$+ 2) + C, x^3 = -(y + 2) + Ce^y.$$

При $x = 0, y = 0 \Rightarrow 1 = -2 + C \Rightarrow x^3 = 3e^y - (y + 2)$. При $y = 1$
 $x = \sqrt[3]{3(e - 1)} \approx 1,72720$ – точное решение.

Приближенное решение найдем по методу Эйлера. Программа на языке PASCAL аналогична программе задачи 203 (4103). Имеем $x_{\text{прибл}} = 1,72743$.

207 (4107). $y' = y^2 + xy + x^2$. Найти по методу последовательных приближений второе приближение для решения, удовлетворяющего начальному условию $y|_{x=0} = 1$.

Решение

Последовательность функций, называемых приближенными решениями, строится по правилу:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}) dt, \quad y_0 = 1, x_0 = 0; \quad y_1(x) = y_0 +$$

$$+ \int_{x_0}^x (y_0^2 + ty_0 + t^2) dt \text{ или } y_1(x) = 1 + \int_0^x (1 + t + t^2) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3};$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x (y_1^2 + ty_1 + t^2) dt \text{ или } y_2(x) = 1 +$$

$$+ \int_0^x \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{9} + 2t + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{4} + t^2 \right) \times$$

$$\begin{aligned} \times dt &= \int_0^x \left(1 + 4t^2 + \frac{13}{6}t^3 + \frac{5}{4}t^4 + \frac{t^5}{3} + 3t + \frac{t^6}{9} \right) dt = \\ &= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{18} + \frac{x^7}{63}. \end{aligned}$$

208 (4108). $y' = xy^3 - 1$. Найти при $x = 1$ значение того решения данного уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $y|_{x=0} = 0$. Ограничиться третьим приближением по методу последовательных приближений.

Решение

$$\begin{aligned} y' &= xy^3 - 1, \quad y|_{x=0} = 0; \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}) dt; \quad y_1(x) = \int_0^x -1 dt = -x; \\ y_2(x) &= \int_0^x (-t^4 - 1) dt = -\frac{x^5}{5} - x; \quad y_3(x) = \int_0^x \left(-\frac{t^{16}}{125} - \frac{3}{25}t^{12} - \frac{3}{5}t^8 - t^4 - 1 \right) \times \\ &\times dt = -\left(\frac{x^{17}}{125 \cdot 17} + \frac{3x^{13}}{25 \cdot 13} + \frac{3x^9}{5 \cdot 9} + \frac{x^5}{5} + x \right); \quad y_3(1) = -\left(\frac{1}{125 \cdot 17} + \frac{3}{25 \cdot 13} + \right. \\ &\left. + \frac{3}{15} + \frac{1}{5} + 1 \right) = -(0,0004 + 0,0092 + 0,066 + 0,2 + 1) = \underline{\underline{-1,28}}. \end{aligned}$$

В задачах 209 (4109)–216 (4116) найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решений уравнений при указанных начальных условиях.

209 (4109). $y' = y^3 - x$; $y|_{x=0} = 1$.

Решение

Приближенное решение ищем в виде ряда Маклорена $y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$

При указанных начальных условиях: $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$; $y''(x) = 3y^2 y' - 1 \Rightarrow y''(0) = 2$; $y'''(x) = 6y y' + 3y^2 y'' \Rightarrow y'''(0) = 12$; $y^{(IV)}(x) = 6y'^2 + 6yy'' + 6yy'' + 3y^2 y''' \Rightarrow y^{(IV)}(0) = 78$;

$$y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \dots$$

210 (4110). $y' = x^2 y^2 - 1$; $y|_{x=0} = 1$.

Решение

$y(0) = 1$; $y'(0) = -1$; $y''(x) = 2xy^2 + 2x^2 yy' \Rightarrow y''(0) = 0$; $y''' = 2y^2 + 8xyy' + 2x^2 y'^2 + 2x^2 yy'' \Rightarrow y'''(0) = 2$; $y^{(IV)} = 4yy' + 8yy' + 2xy'^2 + 8xyy'' + 4xy'^2 + 4x^2 y'y'' + 4xyy'' + 2x^2 y'y'' + 2x^2 y'y'''$; $y^{IV}(0) = -12$

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

211 (4111). $y' = x^2 - y^2$; $y|_{x=0} = 0$.

Решение

$y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; $y''(x) = 2x + 2yy' \Rightarrow y''(0) = 0$; $y''' = 2 - 2y'^2 - 2yy'' \Rightarrow y'''(0) = 2$; $y^{(IV)} = -6y'y'' - 2yy''' \Rightarrow y^{(IV)}(0) = 0$; $y^{(V)} = -6y''^2 - 8y'y''' - 2yy^{(IV)} \Rightarrow y^{(V)}(0) = 0$; $y^{(VI)} = -20y''y''' - 10y'y^{(IV)} - 2yy^{(V)} \Rightarrow y^{(VI)}(0) = 0$; $y^{(VII)} = -20y'''^2 - 20y''y^{(IV)} - 10y''y^{(IV)} - 10y'y^{(V)} - 2y'y^{(V)} - 2yy^{(V)} \Rightarrow y^{(VII)}(0) = -80$; $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^7}{7 \cdot 9} + \dots$

212 (4112). $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$; $y|_{x=0} = 1$.

Решение

$$y(0)=1; y'(0)=2; y'' = \frac{-2xy - y'(1-x^2)}{y^2} \Rightarrow y''(0)=-2; y''' =$$

$$= \frac{(-2y - 2xy' - y''(1-x^2) + 2xy')y^2 + 2yy'(2xy + y'(1-x^2))}{y^4} \Rightarrow y'''(0)=8$$

$$y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \dots$$

213 (4113). $y' = \frac{xy}{1+x+y}; y|_{x=0} = 0.$

Решение

$$y(0)=0; y'(0)=0; y'' = \frac{(y+xy')(1+x+y) - (1+y')xy}{(1+x+y)^2} =$$

$$= \frac{y+y^2+x^2y'xy'}{(1+x+y)^2} \Rightarrow y''(0)=0. \text{ Вообще } y^{(n)}(0)=0, \underline{\underline{y=0.}}$$

214 (4114). $y' = e^y + xy; y|_{x=0} = 0.$

Решение

$$y'(0)=1; y'' = e^y y' + y + xy' \Rightarrow y''(0)=1; y''' = e^y y'^2 + e^y y'' + 2y' +$$

$$+ xy'' \Rightarrow y'''(0)=4; y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

215 (4115). $y' = \sin y - \sin x; y|_{x=0} = 0.$

Решение

$$y'(0)=0; y'' = y' \cos y - \cos x \Rightarrow y''(0)=-1; y''' = y'' \cos y + y'^2(-\sin y) +$$

$$+ \sin x \Rightarrow y'''(0)=-1; y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

216 (4116). $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$; $y|_{x=1} = 1$.

Решение

$$y'(1) = 1; \quad y'' = 1 + 2x - 4yy'; \quad y''' = 2 - 4y'^2 - 4yy''; \quad y'''(1) = 2;$$

$$y = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \dots$$

Особые решения. Уравнения Клеро и Лагранжа

В задачах 217 (4117)–230 (4130) найти общие и особые решения уравнений Клеро и уравнений Лагранжа.

217 (4117). $y = xy' + y'^2$.

Решение

Общее решение: $y = Cx + C^2$.

Для нахождения особого решения положим $y' = p$. Тогда $y = xp + p^2 \Rightarrow y' = p + xp' + 2pp'$; $p'(x + 2p) = 0 \Rightarrow x + 2p = 0$; $x = -2p$;

$$p = -\frac{x}{2}; \quad y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + 4y = 0}} \text{ — особое решение.}$$

Другой способ нахождения особого решения: составляем систему

$$\begin{cases} u(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

В нашем случае $\begin{cases} y = Cx + C^2, \\ x + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow C = -\frac{x}{2} \text{ и } y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \text{ или}$

$$\underline{\underline{x^2 + 4y = 0.}}$$

218 (4118). $y = xy' - 3y'^3$.

Решение

Общее решение: $y = Cx - 3C^3$.

Особый интеграл находим из системы

$$\begin{cases} y = Cx - 3C^3, \\ x - 9C^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \pm \sqrt{\frac{x}{9}}. \text{ Тогда } y = \pm \sqrt{\frac{x}{9}} \cdot x \mp \sqrt{\frac{x}{9}} \cdot \frac{x}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{9y \pm 2x\sqrt{x} = 0}}.$$

219 (4119). $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

Решение

Общее решение: $y = Cx + \frac{1}{C}$.

Особый интеграл находим из системы

$$\begin{cases} y = Cx + \frac{1}{C}, \\ x - \frac{1}{C^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \pm \frac{1}{\sqrt{x}}; y = \pm \frac{x}{\sqrt{x}} \pm \sqrt{x} \text{ или } y = \pm 2\sqrt{x}; \underline{\underline{y^2 = 4x}}.$$

220 (4120). $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

Решение

Общее решение: $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$.

Особый интеграл находим из системы

$$\begin{cases} y = Cx + \sqrt{1 + C^2}, \\ x + \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{C^2}{1 + C^2} = x^2 \Rightarrow C = \frac{\pm x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1);$$

$$y = \frac{\pm x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} = \frac{\pm x^2}{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{а) } y \sqrt{1-x^2} = 1-x^2 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 = 1}};$$

$$\text{б) } y \sqrt{1-x^2} = 1+x^2 \Rightarrow y = \frac{1+x^2}{\underline{\underline{\sqrt{1-x^2}}}} \text{ (не подходит).}$$

221 (4121). $y = xy' + \sin y'$.

Решение

Общее решение: $y = Cx + \sin C$.

Особый интеграл: $\begin{cases} y = Cx - \sin C, \\ x + \cos C = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$

$$\underline{\underline{y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1-x^2}}}.$$

222 (4122). $xy' - y = \ln y'$.

Решение

Общее решение: $y = Cx - \ln C$.

Особый интеграл: $\begin{cases} y = Cx - \ln C, \\ x - \frac{1}{C} = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{x}; \underline{\underline{y = 1 + \ln x}}.$

223 (4123). $y = y'^2(x+1)$ – уравнение Лагранжа.

Решение

Положив $y' = p$, имеем $y = p^2x + p^2$; дифференцируем его по x :

$$p = 2pxp' + p^2 + 2pp' \Rightarrow$$

$$p - p^2 = [2xp + 2p] \frac{dp}{dx}; \quad (*)$$

$$p(1-p)dx = 2p(x+1)dp \Rightarrow \frac{dp}{1-p} = \frac{dx}{2(x+1)} \Rightarrow \ln C - \ln|1-p| = \\ = \frac{1}{2} \ln|x+1| \Rightarrow \frac{C}{1-p} = \sqrt{x+1}.$$

Из последнего уравнения найдем параметр p :

$$p^2 = [1 - (1-p)]^2 = \left(1 - \frac{C}{\sqrt{x+1}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{x+1} - C)^2}{x+1}; \quad \underline{\underline{y = (\sqrt{x+1} - C)^2}} - \text{об-}$$

щий интеграл.

Из уравнения (*) можно найти некоторые решения: именно оно обращается в тождество при всяком постоянном $p = p_0$, удовлетворяющем условиям $p_0 - p_0^2 = 0$ и $\frac{dp_0}{dx} = 0$. Обе части равенства (*) обращаются при этом в нуль. Но $p_0 - p_0^2 = 0$ при $p_0^{(1)} = 0$ и $p_0^{(2)} = 1$. Тогда решениями искомого дифференциального уравнения будут функции $y = x \cdot 0 - 0^2 \Rightarrow y = 0$ и $y = x + 1$. При этом решение $y = 0$ будет особым, поскольку оно не получается из общего ни при каком C , а $y = x + 1$ — частное решение, поскольку получается из общего при $C = 0$.

224 (4124). $2yy' = x(y'^2 + 4)$ — уравнение Лагранжа.

Решение

$$y' = p, \quad 2yp = xp^2 + 4x \Rightarrow$$

$$2y = xp + \frac{4x}{p}. \quad (1)$$

$$\text{Дифференцируем (1) по } x: 2p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{4}{p} - \frac{4x}{p^2} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$p - \frac{4}{p} = x \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{4}{p^2}\right); \quad (2)$$

$$\frac{p^2 - 4}{p} = x \frac{dp}{dx} \cdot \frac{p^2 - 4}{p^2} \Rightarrow p = C_1 x.$$

Найдем p из (1):

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \Rightarrow p = \frac{\pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}; \quad y + \sqrt{y^2 - 4x^2} = C_1 x^2;$$

$$\sqrt{y^2 - 4x^2} = C_1 x^2 - y \Rightarrow C_1^2 x^2 - 2C_1 y + 4 = 0; \quad \frac{C_1}{2} = C. \text{ Тогда}$$

$$y = Cx^2 + \frac{1}{C}.$$

Найдем из (2) такие $p = p_0$, при которых $p_0 - \frac{4}{p_0} = 0 \Rightarrow p_0^{(1)} = 2$,

$$p_0^{(2)} = -2.$$

Подставляя эти значения в уравнение $2yp = xp^2 + 4x$, получим $y = \pm 2x$ или $y^2 - 4x^2 = 0$. Это решение *особое*, так как не получается из общего ни при каком C .

225 (4125). $y = yy'^2 + 2xy'$ – уравнение Лагранжа.

Решение

Положим $y' = p$. Тогда

$$y(1 - p^2) = 2xp. \quad (1)$$

Дифференцируя (1), получим $y'(1 - p^2) - 2pp'y = 2p + 2xp' \Rightarrow$

$$-p(1 + p^2) = 2p'(py + x). \quad (2)$$

Из (1) $y = \frac{2xp}{1 - p^2}$. Подставим (1) в (2): $\frac{dx}{2x} = \frac{dp}{(p-1)(p+1)p}$;

$$\frac{1}{(p-1)(p+1)p} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{R}{p} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad R = -1. \text{ Тогда}$$

$$\frac{1}{2} \ln |x| = \frac{1}{2} \ln |p-1| + \frac{1}{2} \ln |p+1| - \ln |p| + C_1 \Rightarrow x = C_1 \frac{p^2 - 1}{p^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Из системы } \begin{cases} x = C_1 \frac{p^2 - 1}{p^2}, \\ y = \frac{2xp}{1 - p^2} \end{cases} &\Rightarrow y = -\frac{2C_1}{p}, \quad 2C_1 = C, \quad p = y'. \text{ Тогда} \\ &y' = -\frac{C}{y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим (3) в исходное уравнение: $y = y \frac{C^2}{y^2} - 2x \frac{C}{y} \Rightarrow$

$2Cx = C^2 - y^2$ – общее решение.

Уравнение (2) обращается в тождество при $p = 0$. Подставим это значение в (1): $y = 0$. Но $y = 0$ не является особым решением, так как получается из общего при $C = 0$. Значит, особого решения нет.

226 (4126). $y = x(1 + y') + y'^2$.

Решение

Положим $y' = p$. Тогда

$$y = x(1 + p) + p^2. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Дифференцируем (1) по } x: y' = 1 + p + x \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx} \text{ или } -1 = \frac{dp}{dx} (x + \\ + 2p) \Rightarrow \frac{dx}{dp} + x = -2p; \quad x = uv, \quad x' = u'v + v'u, \quad u'v + u(v' + v) = -2p; \quad v' + v = \\ = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dp \Rightarrow v = e^{-p}; \quad \frac{du}{dp} e^{-p} = -2p; \quad u = -2 \int p e^p dp = -2p e^p + \\ + 2e^p + C; \quad [p = u_1, \quad dp = du_1, \quad e^p dp = dv_1, \quad v_1 = e^p]; \quad x = uv = -2(p - 1) + \\ + C e^{-p}. \end{aligned}$$

Итак, общее решение $y = x(1 + p) + p^2$; $x = -2(p - 1) + C e^{-p}$.

Особое решение ищем из системы

$$\begin{cases} y = x(1 + C) + C^2, \\ 0 = x + 2C \end{cases} \Rightarrow x = -2C, y = -2C - C^2 = \text{const}; \text{ но это не удовлетво-}$$

ряет исходное дифференциальное уравнение, так как тогда имеем $\underbrace{y}_{\text{const}} = x$.

Особого решения нет.

227 (4127). $y' = \ln(xy' - y)$.

Решение

Положим $y' = p$. Из условия задачи имеем

$$xy' - y = e^{y'} \quad \text{или} \quad xp - y = e^p. \quad (1)$$

Дифференцируем (1) по x :

$$p + x \frac{dp}{dx} - p = e^p \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}(x - e^p) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C.$$

Общее решение получаем из (1), подставляя в него $p = C$:

$$\underline{\underline{y = Cx - e^C}}.$$

При $p = \ln x$ получаем особое решение: $\underline{\underline{y = x(\ln x - 1)}}$. Оно не может быть получено из общего ни при каком C .

228 (4128). $y = y'(x + 1) + y'^2$.

Решение

Положим $y' = p$. Тогда

$$y = p(x + 1) + p^2. \quad (1)$$

Дифференцируем (1) по x :

$$y' = (x + 1) \frac{dp}{dx} + p + 2p \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}(x + 1 + 2p) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{p = C}}.$$

Общее решение получаем из (1): $\underline{\underline{y = Cx + C + C^2}}$.

Далее имеем $x+1+2p=0 \Rightarrow p=-\frac{1}{2}(x+1)$. Подставляем p в (1)

и получаем особое решение: $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{4}(x+1)^2$ и $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2$.

229 (4129). $y = y'x + a\sqrt[3]{1-y'^3}$.

Решение

Положим $y' = p$. Тогда $y = px + a\sqrt[3]{1-p^3}$. Дифференцируем последнее выражение по x : $y' = \frac{dp}{dx}x + p + \frac{1}{3}a\left[(1-p^3)^{-2/3}\right](-3p^2)\frac{dp}{dx} \Rightarrow$

$$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{p^2 a}{\sqrt[3]{(1-p^3)^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{p = C}}.$$

Общее решение дифференциального уравнения: $\underline{\underline{y = Cx + a\sqrt[3]{1-C^3}}}$.

Далее выполняем преобразования:

$$x = \frac{p^2 a}{\sqrt[3]{(1-p^3)^2}}; \quad x^3 = \frac{p^6 a^3}{(1-p^3)^2}; \quad x^3(1-p^3)^2 = p^6 a^3; \quad \sqrt{x^3(1-p^3)^2} =$$

$$= p^3 \sqrt{a^3} \Rightarrow p^3 = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{x^3}}; \quad y = \frac{p^3 a}{\sqrt[3]{(1-p^3)^2}} + a\sqrt[3]{1-p^3} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt[3]{(1-p^3)^2}} [p^3 + (1-p^3)] = \frac{a}{\sqrt[3]{(1-p^3)^2}} = \frac{a}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{x^3}}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(\sqrt{a^3} + \sqrt{x^3}\right)^2} \Rightarrow y^3 = \left(\sqrt{a^3} + \sqrt{x^3}\right)^2; \quad \underline{\underline{\sqrt{y^3} + \sqrt{x^3} = \sqrt{a^3}}} \text{ — особое}$$

решение.

230 (4130). $x = y \left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'} \right).$

Решение

Положим $y'_x = \frac{1}{x'_y}$; $x'_y = p$. Тогда $x = y(\sqrt{p} - p)$; $x'_y = \sqrt{p} - p +$

$$+ y \left(\frac{1}{2\sqrt{p}} - 1 \right) \frac{dp}{dy} \Rightarrow 2p - \sqrt{p} = y \frac{1 - 2\sqrt{p}}{2\sqrt{p}} \cdot \frac{dp}{dy} \Rightarrow -\sqrt{p} = \frac{y}{2\sqrt{p}} \cdot \frac{dp}{dy} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dp}{-2p} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2} \ln|p| + \ln C; y = \frac{C}{\sqrt{p}} \Rightarrow \sqrt{p} = \frac{C}{y} \Rightarrow p = \frac{C^2}{y^2}.$$

Тогда $x = y \left(\frac{C}{y} - \frac{C^2}{y^2} \right) \Rightarrow x = C \left(1 - \frac{C}{y} \right) \Rightarrow \underline{\underline{(C-x)y = C^2}}$ – общее

решение.

$$\begin{cases} x = y(\sqrt{C} - C), \\ 0 = y \left(\frac{1}{2\sqrt{C}} - 1 \right) \Rightarrow C = \frac{1}{4}; \end{cases} x = y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \underline{\underline{y = 4x}}$$
 – особое решение.

В задачах 231 (4131)–233 (4133) найти особые решения уравнений, применяя тот же прием, какой используется в случае уравнений Лагранжа и Клеро.

231 (4131). $y'^2 - yy' + e^x = 0.$

Решение

$$\begin{cases} C^2 = yC + e^x = 0, \\ 2C - y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{y}{2}; \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{2} + e^x = 0; \underline{\underline{y^2 - 4e^x = 0}}$$
 – особое

решение.

232 (4132). $x^2 y'^2 - 2(xy - 2)y' + y^2 = 0$.

Решение

$$\begin{cases} x^2 C^2 - 2(xy - 2)C + y^2 = 0, \\ 2Cx^2 - 2(xy - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{xy - 2}{x^2}; \frac{x^2(xy - 2)^2}{x^4} - \frac{2(xy - 2)^2}{x^2} + y^2 = 0 \Rightarrow (xy - 2)^2 = x^2 y^2 \Rightarrow xy - 2 = \pm xy; \underline{\underline{xy = 1}} - \text{особое решение.}$$

233 (4133). $y'(y' - 2x) = 2(y + x^2)$.

Решение

$$\begin{cases} C(C - 2x) = 2(y + x^2), \\ 2C - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow C = x; x^2 - 2x^2 = 2y - 2x^2 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 - 2y = 0}} -$$

особое решение.

234 (4134). Доказать теорему: если линейное дифференциальное уравнение является уравнением Клеро, то семейство его интегральных кривых представляет собой пучок прямых.

Решение

Уравнение Клеро имеет вид

$$y = xy' + \Psi(y'). \quad (1)$$

Положим $y' = p$. Тогда (1) примет вид

$$y = xp + \Psi(p). \quad (1')$$

Продифференцируем (1') по x :

$$y' = x \frac{dp}{dx} + p + \Psi(p) \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} (x + \Psi(p)) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \text{ и } (x + \Psi(p)) = 0.$$

Интегрируя первое из двух последних равенств, получим $p = C$ ($C = \text{const}$). Подставляя это значение p в уравнение (1'), будем иметь его общий интеграл $\underline{\underline{y = xC + \Psi(C)}}$, который с точки зрения геометрии есть семейство прямых линий.

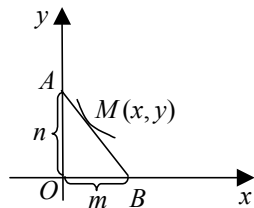
235 (4135). Площадь треугольника, образованного касательной к искомой линии и осями координат, есть величина постоянная. Найти линию.

Решение

Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. Если a^2 – пло-

щадь $\triangle AOB$, то $mn = \pm 2a^2$, т. е. $n = \pm \frac{2a^2}{m}$ и имеем семейство прямых:

$$\frac{x}{m} \pm \frac{my}{2a^2} = 1. \quad (1)$$



Продифференцируем (1) по x :

$$\frac{1}{m} \pm \frac{my'}{2a^2} = 0 \Rightarrow m^2 = \mp \frac{2a^2}{y'} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{2a^2}{\mp y'}} \Rightarrow y = xy' \pm \sqrt{\mp 2a^2 y'}.$$

Общее решение дифференциального уравнения: $y = xC_1 \pm$

$$\pm \sqrt{\mp 2a^2 C_1} \Rightarrow y = \pm \frac{C^2}{2} x + aC \quad (C^2 = 2C_1).$$

Но нас интересует особое решение, которое даст искомую линию – огибающую семейство прямых. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \pm \frac{C^2}{2} x + aC, \\ y = \pm Cx + a \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{2xy = \pm a^2}}.$$

236 (4136). Найти линию, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, сумма которых равна $2a$.

Решение

Уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \quad (1)$$

По условию $m + n = 2a \Rightarrow n = 2a - m$. Подставляем (2) в (1):

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{2a - m} = 1. \quad (2)$$

Дифференцируем (2) по x : $\frac{1}{m} + \frac{y'}{2a - m} = 0 \Rightarrow m = \frac{2a}{1 - y'}$. Тогда урав-

нение прямой имеет вид $\frac{x(1 - y')}{2a} + \frac{y}{2a - \frac{2a}{1 - y'}} = 1$ или $\frac{x(1 - y')}{2a} -$

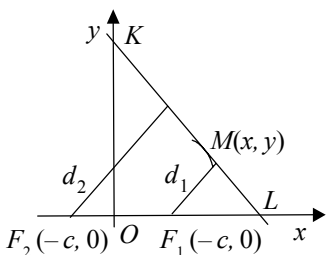
$$- \frac{y(1 - y')}{2ay'}, \text{ или } (1 - y')(xy' - y) = 2ay'.$$

Общее решение дифференциального уравнения: $(1 - C)(xC - y) = 2aC$; $\begin{cases} xC - xC^2 - y + yC = 2aC, \\ x - 2xC + y = 2a \end{cases} \Rightarrow C = \frac{x + y - 2a}{2x};$

$\left(1 - \frac{x + y - 2a}{2x}\right) \left(\frac{x + y - 2a}{2} - y\right) = a \frac{x + y - 2a}{x} \Rightarrow \underline{\underline{(x + y - 2a)^2 = 8ax}}$ - особое решение дифференциального уравнения.

237 (4137). Найти линию, для которой произведение расстояний любой касательной до двух данных точек постоянно.

Решение



Систему координат расположим по отношению к фиксированным точкам, как показано на рисунке. Уравнение касательной в точке $M(x, y)$: $Y - y = y'(X - x)$ или $y'X - Y - (xy' - y) = 0$, где X и Y - текущие координаты точек касательной; F_1 и F_2 - фиксированные точки.

Расстояния d_1 и d_2 до прямой KL найдем по известным формулам:

$$d_1 = \pm \frac{cy' - (xy' - y)}{\sqrt{y'^2 + 1}}; \quad d_2 = \pm \frac{-cy' - (xy' - y)}{\sqrt{y'^2 + 1}}.$$

По условию $d_1 d_2 = b^2$ (const), поэтому $(xy' - y)^2 - c^2 y'^2 = \pm b^2 \sqrt{y'^2 + 1}$ или $(xy' - y)^2 = (c^2 \pm b^2) y'^2 \pm b^2$, обозначив $c^2 \pm b^2 = a^2$ (полагаем $|c| < b$), имеем $y = xy' \pm \sqrt{a^2 y'^2 \pm b^2}$ – уравнение Клеро.

Его общее решение представляет собой семейство прямых. Найдем особое решение. Для этого продифференцируем общее решение по C и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = cx \pm \sqrt{a^2 c^2 \pm b^2}, \\ 0 = x \pm \frac{a^2 c}{\sqrt{a^2 c^2 \pm b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp \frac{a^2 c}{\sqrt{a^2 c^2 \pm b^2}}, \\ y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 c^2 \pm b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \mp \frac{ac}{\sqrt{a^2 c^2 \pm b^2}}; \\ \frac{y}{b} = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 c^2 \pm b^2}}. \end{cases}$$

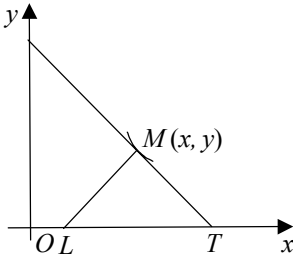
Возьмем знак плюс (+) перед b^2 , возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Затем возьмем знак минус (–) перед b^2 , возведем обе части каждого уравнения в квадрат и вычтем из первого уравнения второе: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Итак, искомые кривые – эллипсы и гиперболы.

238 (4138). Найти линию, для которой площадь прямоугольника, имеющего сторонами касательную и нормаль в любой точке, равна площади прямоугольника со сторонами, равными по длине абсциссе и ординате этой точки.

Решение

Уравнение MT имеет вид $Y - y = y'(X - x)$; $Y = 0 \Rightarrow -y = y'(X -$

$$-x) \Rightarrow X = x - \frac{y}{y'}. \text{ Тогда точка } T \left(x - \frac{y}{y'}; 0 \right).$$



Уравнение ML имеет вид $Y - y =$

$$= \frac{-1}{y'}(X - x); Y = 0 \Rightarrow -y = -\frac{1}{y'}(X - x) \Rightarrow$$

$$X = x + yy'; L(x + yy'; 0).$$

$$\text{Расстояния: } |ML| = \sqrt{(x + yy' - x)^2 + y^2} =$$

$$= y\sqrt{1 + y'^2} \quad (\text{рассматриваем } y > 0); |MT| =$$

$$= \sqrt{\left(x - \frac{y}{y'} - x\right)^2 + y^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

По условию $|ML| \cdot |MT| = xy$ или $y(1 + y'^2) = xy'$.

Дифференциальное уравнение решаем подстановкой $y' = p$:

$$y + p^2y - xp = 0. \quad (1)$$

Дифференцируем (1) по x : $y' + 2py \frac{dp}{dx} + p^2y' - p - x \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$2py \frac{dp}{dx} + p^3 = x \frac{dp}{dx} \Rightarrow p^3 = \frac{dp}{dx}(x - 2py). \text{ Из (1) } \Rightarrow$$

$$y = \frac{xp}{1 + p^2}. \quad (2)$$

$$\text{Тогда } p^3 = \frac{dp}{dx} \left(x - \frac{2xp}{1 + p^2} \right) \Rightarrow p^3 = \frac{(1 - p^2)x}{1 + p^2} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{1 - p^2}{p^3(1 + p^2)} \cdot dp = \frac{dx}{x}; \quad \frac{1 - p^2}{p^3(1 + p^2)} = \frac{A}{p^3} + \frac{B}{p^2} + \frac{R}{p} + \frac{Dp + K}{1 + p^2} \Rightarrow A = 1, B = 0,$$

$$R = -2, K = 0, D = 1 \Rightarrow \ln |C_1 x| = -\frac{1}{2p^2} - 2 \ln |p| + \ln (1 + p^2); \quad \ln \left| \frac{C_1 xp^2}{1 + p^2} \right| =$$

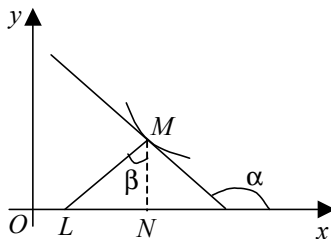
$$= -\frac{1}{2p^2} \Rightarrow \frac{C_1 xp^2}{1 + p^2} = e^{-1/2p^2} \Rightarrow x = \frac{Ce^{-1/2p^2}(1 + p^2)}{p^2}.$$

Из (2) следует $y = \frac{Ce^{-1/2p^2}}{p}$.

239 (4139). Найти линию, для которой сумма нормали и поднормали пропорциональна абсциссе.

Решение

Из задачи 238 (4138) имеем $|LM| = y\sqrt{1+y'^2}$. Поднормаль $LN = NM \operatorname{tg} \beta = y \operatorname{tg} (\pi - \alpha) = -y \operatorname{tg} \alpha = -yy'$; $|LN| = -yy'$; $|LM| + |NL| = kx \Rightarrow yy' + y\sqrt{1+y'^2} = kx$;
 $y^2(1+y'^2) = y^2y'^2 - 2yy'kx + k^2x^2 \Rightarrow y^2 = -2yy'kx + k^2x^2$.



Обозначим $y^2 = w$. Тогда $2yy' = w'$, $w = -w'kx + k^2x^2$, $w = uv$,
 $w' = u'v + v'u$, $u(v + v'kx) = -u'v'kx + k^2x^2$; $\frac{dv}{dx}kx = -v \Rightarrow v = x^{-1/k}$;

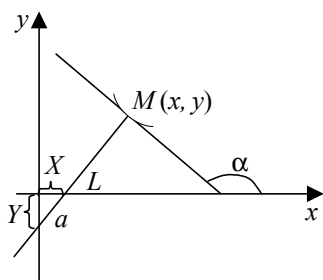
$$k \frac{du}{dx} x^{-1/k+1} = k^2x^2 \Rightarrow du = x^{1/k+1}kdx \Rightarrow u = \frac{k^2x^{1/k+2}}{2k+1} + C;$$

$$y^2 = Cx^{-1/k} + \frac{k^2x^2}{2k+1}.$$

240 (4140). Найти линию, для которой отрезок нормали, заключенный между координатными осями, имеет постоянную длину a .

Решение

Уравнение нормали ML имеет вид $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$; $Y = 0 \Rightarrow y =$
 $= \frac{1}{y'}(X - x) \Rightarrow X = yy' + x$; $X = 0 \Rightarrow Y = y + \frac{x}{y'}$; $X^2 + Y^2 = a^2$; $(yy' + x)^2 +$



$$\left(y + \frac{x}{y'}\right)^2 = a^2 \Rightarrow (yy' + x)^2(1 + y'^2) = a^2 y'^2 \Rightarrow$$

$$(yy' + x)\sqrt{1 + y'^2} = ay'. \quad (1)$$

Положим $y' = \operatorname{tg} \alpha$. Тогда

$$y \operatorname{tg} \alpha + x = a \sin \alpha. \quad (2)$$

Продифференцируем обе части (2):

$$\begin{aligned} dy \operatorname{tg} \alpha + \frac{y d\alpha}{\cos^2 \alpha} + dx &= a \cos \alpha d\alpha \text{ — и заменим } dx \text{ на } \frac{dy}{\operatorname{tg} \alpha}: \left(\operatorname{tg} \alpha + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) dy = \left(a \cos \alpha - \frac{y}{\cos^2 \alpha} \right) d\alpha \Rightarrow \frac{dy}{\operatorname{tg} \alpha} = (a \cos^3 \alpha - y) d\alpha \Rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = \\ &= a \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - y \operatorname{tg} \alpha \quad (y = f(\alpha)); \quad y = uv, \quad u(v' + v \operatorname{tg} \alpha) + u'v = \\ &= a \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha, \quad \frac{dv}{d\alpha} = -v \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow v = \cos \alpha; \quad \frac{du}{d\alpha} = a \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ u &= \frac{a}{2} \sin^2 \alpha + C; \end{aligned}$$

$$y = \cos \alpha \left(C + \frac{a}{2} \sin^2 \alpha \right). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\underline{\underline{x = \sin \alpha \left(a - C - \frac{a}{2} \sin^2 \alpha \right)}}.$$

241 (4141). Скорость материальной точки в произвольный момент времени отличается от средней скорости (от начала движения до этого момента) на величину, пропорциональную кинетической энергии точки и обратно пропорциональную времени, считая от начала движения. Найти зависимость пути от времени.

Решение

$$\frac{ds}{dt} - \frac{S}{t} = k \frac{W_k}{t}; \quad W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2;$$

$$\frac{ds}{dt} - \frac{S}{t} = \frac{km}{2} \cdot \frac{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2}{t}, \quad (1)$$

где $\frac{km}{2} = b$.

Из (1) $\Rightarrow S = tS' - bS'^2$ – уравнение Клеро. Особое решение находим из системы

$$\begin{cases} S = Ct - C^2b, \\ O = t - 2Cb \end{cases} \Rightarrow C = \frac{t}{2b}; \quad S = \frac{t^2}{2b} - \frac{t^2}{4b} \Rightarrow S = \frac{t^2}{4b}. \text{ Обозначим } \frac{1}{4b} = a;$$

тогда $S = at^2$.

Ортогональные и изогональные траектории и эвольвенты

В задачах 242 (4142)–247 (4147) найти траектории, ортогональные данным.

242 (4142). Эллипсам, имеющим общую большую ось, равную $2a$.

Решение

Семейство эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где b^2 – параметр. Продифференцировав обе части данного уравнения, получим дифференциальное уравнение семейства эллипсов:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0; \quad (1) \quad b^2 = \frac{y^2 a^2}{a^2 - x^2}. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y(a^2 - x^2)y'}{y^2 a^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{xy}{x^2 - a^2}.$$

Заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение семей-

ства ортогональных траекторий: $-\frac{1}{y'} = \frac{xy}{x^2 - a^2} \Rightarrow y dy = \frac{a^2 - x^2}{x} dx \Rightarrow$
 $\frac{y^2}{2} = a^2 \ln(Cx) - \frac{x^2}{2}$, или $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln|Cx|$.

243 (4143). Параболам $y^2 = 4(x - a)$.

Решение

Дифференциальное уравнение семейства парабол $2yy' = 4$ или $yy' = 2$. Заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий: $-\frac{y}{y'} = 2 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} dx \Rightarrow \ln|C_1 y| =$
 $= -\frac{1}{2}x$ и $y = Ce^{-1/2x}$.

244 (4144). Окружностям $x^2 + y^2 = 2ax$.

Решение

Дифференциальное уравнение семейства окружностей $x + yy' = a$. Дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий

$$x - \frac{y}{y'} = a, \text{ но } a = \frac{x^2 + y^2}{2x}. \text{ Тогда } x - \frac{y}{y'} = \frac{x^2 + y^2}{2x} \Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \frac{y}{x} = u,$$

$$y' = u'x + u; u'x + u = \frac{2u}{1 - u^2} \Rightarrow u'x(1 - u^2) = u(1 + u^2), \frac{(1 - u^2)du}{u(1 + u^2)} = \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2}; \quad 1-u^2 = A + Au^2 + Bu^2 + Cu; \quad \begin{cases} A+B=-1, \\ C=0, \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$B=-2; \quad \ln|x| = \ln|u| - \ln|C(1+u^2)|, \quad x = \frac{u}{C(1+u^2)} \Rightarrow x = \frac{y}{xC\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y = C(x^2 + y^2)}}.$$

245 (4145). Циссоидам $(2a-x)y^2 = x^3$.

Решение

Продифференцируем исходное выражение по x : $-y^2 + 2(2a-x)y y' = 3x^2$. Заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$, получим семейство ортогональных траекторий:

$$-y^2 - 2(2a-x)\frac{y}{y'} = 3x^2 \Rightarrow y'(y^2 + 3x^2) = 2(x-2a)y. \quad (1)$$

Из исходного уравнения найдем параметр $2a = \frac{x(x^2 + y^2)}{y^2}$ и подставим его в (1):

$$y'(y^2 + 3x^2) = 2\left(x - \frac{x(x^2 + y^2)}{y^2}\right)y \Rightarrow y'(y^2 + 3x^2) = -\frac{2x^3}{y}; \quad \frac{y}{x} = u,$$

$$y' = u'x + u, \quad (u'x + u)(u^2 + 3) = \frac{-2}{u} \Rightarrow xu'u(u^2 + 3) = -(u^4 + 3u^2 + 2);$$

$$\frac{u(u^2 + 3)}{(u^2 + 2)(u^2 + 1)} du = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{u(u^2 + 3)}{(u^2 + 2)(u^2 + 1)} = \frac{Au + B}{u^2 + 2} + \frac{Ku + D}{u^2 + 1}, \quad u^3 + 3u =$$

$$= Au^3 + Bu^2 + Au + B + Ku^3 + Du^2 + 2Ku + 2D;$$

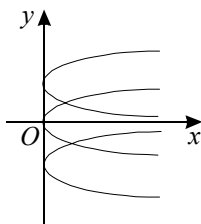
$$\begin{cases} A+k=1, & D=0, \\ B+D=0, & B=0, \\ A+2C=3, & K=2, \\ 2D=0 & A=-1; \end{cases} \Rightarrow \ln \left| \frac{C_1}{x} \right| = -\frac{1}{2} \ln(u^2+2) + \ln(u^2+1);$$

$$\frac{C_1}{x} = \frac{u^2+1}{\sqrt{u^2+2}} \Rightarrow \frac{C_1^2}{x^2} = \frac{(y^2+x^2)^2 x^2}{x^4(y^2+2x^2)}; \underline{\underline{y^2+x^2 = C(y^2+2x^2) \quad (C=C_1^2)}}.$$

246 (4146). Равным параболам, касающимся данной прямой, причем для каждой параболы точкой касания служит ее вершина.

Решение

Уравнения равных парабол



$$(y-a)^2 = 2px. \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по x , получим $2(y-a)y' = 2p$.

Заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное

уравнение ортогональных траекторий: $-\frac{y-a}{y'} = p$.

$$\text{Из (1)} \Rightarrow y-a = \pm \sqrt{2px}; \text{ тогда } \mp \frac{\sqrt{2px}}{y'} = p \Rightarrow dy = \mp \sqrt{\frac{2x}{p}} \cdot dx;$$

$$\underline{\underline{y = C \mp \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2x^3}{p}}}}.$$

247 (4147). Кругам одного радиуса, центры которых лежат на данной прямой линии.

Решение

Пусть центры окружностей радиуса r лежат на оси Ox . Уравнения окружностей: $(x-a)^2 + y^2 = r^2$; $2(x-a) + 2yy' = 0$. Заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$,

получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-a}. \text{ Но } x-a = \pm\sqrt{r^2-y^2}. \text{ Тогда } dx = \pm \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y} \cdot dy \Rightarrow x =$$

$$= C \pm \int \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y} \cdot dy = \left[\begin{array}{l} y = r \sin t, \\ dy = r \cos t \, dt \end{array} \right] = C \pm r \int \frac{\cos^2 t \, dt}{\sin t} = C \pm r \left(\int \frac{dt}{\sin t} - \right.$$

$$\left. - \int \sin t \, dt \right) = C \pm r \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \cos t \right); \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{r};$$

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{r - \sqrt{r^2 - y^2}}{y}; \quad \underline{\underline{x = r \ln \frac{r - \sqrt{r^2 - y^2}}{y} + \sqrt{r^2 - y^2} - \text{урав-}}}$$

нение траектории.

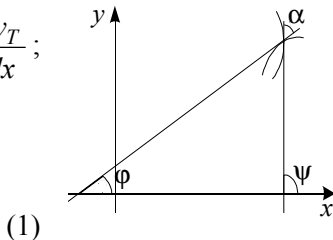
248 (4148). Найти семейство траекторий, пересекающих под углом $\alpha = 60^\circ$ линии $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$.

Решение

Положим $\operatorname{tg} \alpha = k$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg} \psi = \frac{dy_T}{dx}$;

тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{1 + k \frac{dy_T}{dx}}$$



(1)

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} + k}{1 - k \frac{dy_T}{dx}}. \quad (2)$$

По условию $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3}) \Rightarrow$

$$2x = 2a(y' - \sqrt{3}); \quad (3) \quad 2a = \frac{x^2}{y - x\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Подставим (4) в (3): $2 = \frac{2(y' - \sqrt{3})}{y - x\sqrt{3}} \Rightarrow y' = \frac{2y - x\sqrt{3}}{x}$. Заменим y' на

правую часть формулы (2), опуская индекс T :

$$\frac{y' + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}y'} = \frac{2y - \sqrt{3}x}{x} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{3}x - y}{x - \sqrt{3}y}, \quad \frac{y}{x} = u, \quad y' = u'x + u; \quad u'x + u =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - u}{1 - \sqrt{3}u} \Rightarrow \frac{(1 - \sqrt{3}u)du}{\sqrt{3}u^2 - 2u + \sqrt{3}} = \frac{dx}{x}; \quad \frac{1}{2} \ln C_1 - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{3}u^2 - 2u + \sqrt{3}) = \ln|x|;$$

$$\ln C_1 = \ln x^2 \left(\sqrt{3} \frac{y^2}{x^2} - 2 \frac{y}{x} + \sqrt{3} \right) C_1 = \sqrt{3}(x^2 + y^2) - 2xy;$$

$$xy = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2) = C.$$

249 (4149). Найти изогональные траектории семейства парабол $y^2 = 4ax$; угол пересечения $\alpha = 45^\circ$.

Решение

По условию $y^2 = 4ax$, $yy' = 2a$, $y' = \frac{2a}{y}$, $2a = \frac{y^2}{2x}$, $y' = \frac{y^2}{y \cdot 2x} \Rightarrow$

$y' = \frac{y}{2x}$. Вместо y' подставим в последнее уравнение формулу (2) за-

дачи 248 (4148) при $k = 1$: $\frac{y' + 1}{1 - y'} = \frac{y}{2x} \Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{y + 2x}$; $\frac{y}{x} = u$, $y' = u'x + u$;

$$u'x + u = \frac{u - 2}{u + 2} \Rightarrow u'x(u + 2) = -(u^2 + u + 2) \Rightarrow \frac{(u + 2)du}{u^2 + u + 2} = -\frac{dx}{x};$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2}(2u+1) + \frac{3}{2}}{u^2 + u + 2} du &= -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2 + u + 2)}{u^2 + u + 2} + \frac{3}{2} \int \frac{d(u+1/2)}{(u+1/2)^2 + (\sqrt{7}/2)^2} = \\ &= C_1 - \ln|x|; \quad \frac{1}{2} \ln(u^2 + u + 2) + \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{u+1/2}{\sqrt{7}/2} = C_1 - \ln|x|; \\ \ln \sqrt{y^2 + xy + 2x^2} - \ln|x| + \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{y+2x}{\sqrt{7}x} &= C_1 - \ln|x|; \\ \ln(2x^2 + xy + y^2) + \frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{y+2x}{\sqrt{7}x} &= C. \end{aligned}$$

250 (4150). Найти линии распространения звука по плоскости от неподвижного источника звука, лежащего в той же плоскости, если вдоль какого-либо направления дует ветер с постоянной скоростью a .

Решение

Линии распространения звука по плоскости Oxy будут ортогональными траекториями семейства окружностей:

$$(x - at)^2 + y^2 = (v_0 t)^2, \quad (1)$$

где t – время, прошедшее после выхода звуковой волны из источника звука; v_0 – скорость звука в неподвижном воздухе.

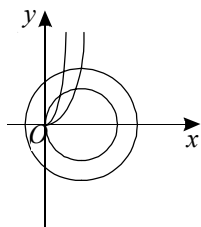
Для любого фиксированного t дифференциальное уравнение искомых ортогональных траекторий получается следующим образом.

Дифференцируем (1) по x :

$$x - at + yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x - at}{y} \text{ – дифференциальное уравнение для волны;}$$

$$y' = \frac{y}{x - at} \quad (2)$$

– дифференциальное уравнение для траектории.



$$\begin{aligned} \text{Из (2)} \Rightarrow t = \frac{1}{a} \left(x - \frac{y}{y'} \right), \quad x - at = \frac{y}{y'}. \text{ Тогда } \frac{y^2}{y'^2} + y^2 = \frac{V_0^2}{a^2} \left(x - \frac{y}{y'} \right)^2 \\ \left(x - \frac{y}{y'} > 0 \text{ для } t > 0 \right); \quad y \sqrt{\frac{1}{y'^2} + 1} = \frac{V_0}{a} \left(x - \frac{y}{y'} \right) \quad (\text{при } y > 0); \quad \frac{V_0}{a} x = \\ = y \left(\frac{V_0}{a} \cdot \frac{1}{y'} + \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}} \right) \Rightarrow x = y \left(\frac{1}{y'} + \frac{a}{V_0} \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}} \right). \\ \text{Пусть } \frac{1}{y'} = p, \text{ т. е. } \frac{dx}{dy} = p, \quad dx = p \, dy; \quad x = y \left(p + \frac{a}{V_0} \sqrt{1 + p^2} \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$p + \frac{a}{V_0} \sqrt{1 + p^2} = \varphi(p), \quad x = y \varphi(p), \quad (3)$$

$$\text{откуда } dx = dy \varphi(p) + y \varphi'(p) dp, \quad p \, dy = dy \varphi(p) + y \varphi'(p) dp, \quad dy (p - \varphi(p)) = y \varphi'(p) dp \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\varphi'(p) dp}{p - \varphi(p)}, \quad \ln \frac{y}{C_1} = \int \frac{\varphi'(p) dp}{p - \varphi(p)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Из (3)} \Rightarrow p - \varphi(p) = -\frac{a}{V_0} \sqrt{1 + p^2}; \quad \varphi'(p) = 1 + \frac{a}{V_0} \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}; \quad \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \\ = \frac{1 + \frac{a}{V_0} \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}}{-\frac{a}{V_0} \sqrt{1 + p^2}} = -\frac{V_0}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{p}{1 + p^2}; \quad \int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot dp = -\frac{V_0}{a} \times \\ \times \ln \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1 + p^2); \quad \ln \frac{y}{C_1} = -\frac{V_0}{a} \ln \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) - \frac{1}{2} \ln(1 + p^2); \\ \frac{y}{C_1} \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right)^{V_0/a} \sqrt{1 + p^2} = 1 \text{ или } y = C_1 \frac{\left(p + \sqrt{1 + p^2} \right)^{-V_0/a}}{\sqrt{1 + p^2}}. \end{aligned}$$

Пусть $p = \operatorname{ctg} \varphi \Rightarrow \sqrt{1+p^2} = \operatorname{cosec} \varphi$; $y = C_1 \sin \varphi \left(\operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} \right)^{-V_0/a}$;

$$x = y \left(p + \frac{a}{V_0} \sqrt{1+p^2} \right) = y \left(\operatorname{ctg} \varphi + \frac{a}{V_0} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \right) = C_1 \sin \varphi \left(\operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} \right)^{-V_0/a} \left(\operatorname{ctg} \varphi + \frac{a}{V_0} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} \right);$$

$$\operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi} = \frac{2 \cos \frac{2\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}; \quad \frac{a}{V_0} = b.$$

Итак, $x = C_1 (\cos \varphi + b) \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{1/b}$; $y = C_1 \sin \varphi \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{1/b}$.

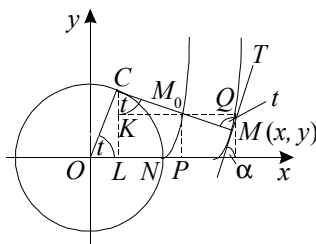
В задачах 251 (4151)–254 (4154) найти эвольвенты линий.

251 (4151). Окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение

Эвольвентой окружности называется кривая, описываемая точкой бесконечной прямой, когда она катится без скольжения по окружности (базис).

1. Рассмотрим вначале ту из эвольвент окружности, которая проходит через точку N . Если радиус окружности R , то, учитывая, что $CM_0 = \widehat{CN} = Rt$, легко получить уравнение эвольвенты окружности:



$$\left. \begin{aligned} OP = x_0 = OL + LP = R \cos t + Rt \sin t, \\ PM_0 = y_0 = LC - KC = R \sin t - Rt \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Пусть M – произвольная точка касательной к окружности и рассто-

яние $M_0 M = C$. Учитывая, что

$$\begin{cases} x = x_0 + M_0 Q = C \sin t + R \cos t + Rt \sin t, \\ y = y_0 - MQ = -C \cos t + R \sin t - Rt \cos t, \end{cases} \quad (1)$$

и дифференцируя (1), имеем

$$\begin{cases} x'_t = C \cos t + Rt \cos t, \\ y'_t = C \sin t + Rt \sin t. \end{cases} \quad (2)$$

Из (2) следует, что в точке M угловой коэффициент касательной к эвольвенте $k = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow k = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} t$, т. е. касательная MT к эвольвенте окружности параллельна радиусу OC , проведенному в точку касания производящей прямой с базисом.

Иначе: эвольвенты являются ортогональными траекториями семейства касательных. Последнее справедливо для эвольвент всех кривых.

2. Эвольвенты – это семейство ортогональных траекторий для семейства касательных к эволюте. Уравнения семейства касательных

$$\frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}} = y', \text{ а уравнения эвольвент } \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}} = \frac{1}{y'}. \text{ Обозначим } \bar{x} = R \cos t, \Rightarrow \bar{y} = R \sin t \Rightarrow$$

$$y'_x = -\frac{\bar{x}'_t}{\bar{y}'_t} = \operatorname{tg} t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad \frac{\bar{x} - x}{\bar{y} - y} = -\operatorname{tg} t \text{ или } \frac{R \cos t - x}{R \sin t - y} = -\operatorname{tg} t \Rightarrow$$

$$R \cos t - x = \operatorname{tg} t (y - R \sin t); \quad -R \sin t - x' = \frac{1}{\cos^2 t} (y - R \sin t) +$$

$$+ \operatorname{tg} t (y' - R \cos t), \quad x'_t = \frac{y'_t}{\operatorname{tg} t}; \quad -R \sin t - \frac{y'}{\operatorname{tg} t} = \frac{1}{\cos^2 t} (y - R \sin t) +$$

$$+ \operatorname{tg} t (y' - R \cos t) \Rightarrow y' (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t) + y \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{R \sin t}{\cos^2 t} + R \sin t - R \sin t;$$

$$y' + y \operatorname{tg} t = \frac{R \sin^2 t}{\cos t}; \quad y = uv; \quad u'v + u(v' + v \operatorname{tg} t) = \frac{R \sin^2 t}{\cos t}; \quad v' + v \operatorname{tg} t = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} t dt \Rightarrow v = \cos t; \quad \frac{du}{dt} \cos t = \frac{R \sin^2 t}{\cos t}; \quad u = R \int \operatorname{tg}^2 t dt =$$

$$= R \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = R(\operatorname{tg} t - t) + C; \quad \underline{\underline{y = C \cos t + R \sin t - R t \cos t}}. \text{ Далее}$$

$$x'_t = y'_t \cdot \operatorname{ctg} t = \operatorname{ctg} t (-C \sin t + R \cos t - R \cos t + R t \sin t) = -C \cos t + R t \cos t; \quad \underline{\underline{x = -C \sin t + R t \sin t + R \cos t}}.$$

252 (4152). Цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Решение

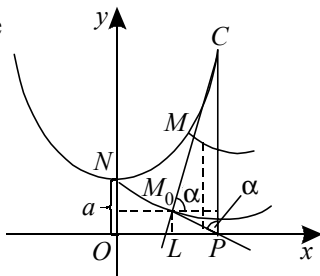
1. Проведем в точке C цепной линии касательную и рассмотрим ту из эвольвент, которая описывается точкой M_0 этой касательной, причем $CM_0 = \widetilde{CN}$.

Выведем некоторые вспомогательные равенства:

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad dS = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} \cdot dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad S = \widetilde{CN} = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = a \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a = \frac{y}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = y \cos \alpha.$$



Опустим из точки P на касательную перпендикуляр PM_0 . Из $\Delta M_0CP \Rightarrow CM_0 = CP \sin \alpha = y \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha} = a \operatorname{tg} \alpha = S = \widetilde{CN}$, т. е. точка M_0 принадлежит эвольвенте цепной линии. Далее $M_0P = CM_0 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = a$. Пусть $M_0(x_0, y_0)$, $C(x, y)$, тогда $x_0 = OP - LP = x -$

$$- a \sin \alpha = x - a \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = x - \frac{a \operatorname{sh} \frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}} = x - \frac{a \operatorname{sh} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = x - a \operatorname{th} \frac{x}{a};$$

$$y_0 = a \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}} = \frac{a}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}.$$

Пусть $M(\bar{x}, \bar{y})$ – произвольная точка касательной, а $M_0 M = c$. Тогда

$$\bar{x} = c \cos \alpha + x_0 = \frac{c}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} + x - a \operatorname{th} \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = c \sin \alpha + y_0 = c \operatorname{th} \frac{x}{a} + \frac{a}{\operatorname{ch} x/a}.$$

Обозначим $\frac{x}{a} = t$, $x = at$. Заменяя $\bar{x}$ и $\bar{y}$ на x и y , получим уравнение эвольвенты: $x = \frac{c}{\operatorname{ch} t} + a(t - \operatorname{th} t)$; $y = c \operatorname{th} t + \frac{a}{\operatorname{ch} t}$.

2. Аналогично (251 (4151)) имеем:

$$\begin{cases} \bar{y} = a \operatorname{ch} t, \\ \bar{x} = at \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{x} - x}{\bar{y} - y} = -\frac{\bar{y}'_t}{\bar{x}'_t} \Rightarrow \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\bar{x}'_t}{\bar{y}'_t} = -\frac{a}{a \operatorname{sh} t} = -\frac{1}{\operatorname{sh} t};$$

$$\frac{\bar{x} - x}{\bar{y} - y} = \frac{1}{\operatorname{sh} t} \text{ или } \frac{at - x}{a \operatorname{ch} t - y} = \frac{1}{\operatorname{sh} t} \Rightarrow (at - x) \operatorname{sh} t = a \operatorname{ch} t - y;$$

$$(a - x') \operatorname{sh} t + (at - x) \operatorname{ch} t = a \operatorname{sh} t - y'; \quad y' = -\frac{x'}{\operatorname{sh} t}; \quad (a - x') \operatorname{sh} t + (at -$$

$$-x) \operatorname{ch} t = a \operatorname{sh} t + \frac{x'}{\operatorname{sh} t} \Rightarrow x \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} + \operatorname{sh} t \right) + x \operatorname{ch} t = a (\operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) \Rightarrow$$

$$x' + x \operatorname{th} t = at \operatorname{th} t; \quad x = uv, \quad u'v + u(v' + v \operatorname{th} t) = at \operatorname{th} t; \quad v' + v \operatorname{th} t \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{th} t dt \Rightarrow v = \frac{1}{\operatorname{ch} t}; \quad \frac{du}{dt} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} t} = at \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \Rightarrow u = a \int t \operatorname{sh} t \cdot dt =$$

$$= a(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) + C; \quad x = at - a \operatorname{th} t + \frac{C}{\operatorname{ch} t}; \quad y' = -\frac{x'}{\operatorname{sh} t} = -\frac{a \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} + \frac{C}{\operatorname{ch}^2 t};$$

$$y = \frac{a}{\operatorname{ch} t} + C \operatorname{th} t.$$

253 (4153). Эвольвенты окружности

$$x = a (\cos t + t \sin t), \quad y = a (\sin t - t \cos t). \quad (1)$$

Решение

Это та из эвольвент окружности, которая проходит через точку N (см. задачу 251 (4151)).

Касательные к эвольвенте окружности (1) будут являться нормальными к эвольвентам эвольвенты окружности. Найдем угловой коэффициент касательной к эвольвенте окружности:

$$x'_t = at \cos t, \quad y'_t = at \sin t, \quad k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t.$$

Эвольвента окружности (1) по отношению к своей эвольвенте является эволютой, и ее координаты должны удовлетворять следующей системе [9, гл. IV, § 6]:

$$\bar{x} = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad \bar{y} = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \quad (2)$$

Здесь под $\bar{x}$ и $\bar{y}$ понимаем координаты точек эвольвенты окружности, а под x и y — координаты эвольвенты эвольвенты окружности. Последние нам и нужно найти.

$$\text{Из (2)} \Rightarrow \frac{\bar{x} - x}{\bar{y} - y} = -\frac{y'}{x'}. \quad \text{Но } \frac{y'}{x'} = -\operatorname{ctg} t, \text{ значит, } \begin{cases} y' = -x' \operatorname{ctg} t, \\ \bar{x} - x = \operatorname{ctg} t (\bar{y} - y) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y' = -x' \operatorname{ctg} t, \\ a \cos t + a \sin t - x = \operatorname{ctg} t (a \sin t - at \cos t - y). \end{cases} \quad (3)$$

Решаем систему (3):

$$a \sin t - at \cos t - y = \operatorname{tg} t (a \cos t + at \sin t - x).$$

Дифференцируем последнее уравнение по t :

$$\begin{aligned} a \cos t - a \cos t + at \sin t - y' &= \frac{1}{\cos^2 t} (a \cos t + at \sin t - x) + \operatorname{tg} t (-a \sin t + \\ &+ a \sin t + at \cos t - x'); \quad y' = -x' \operatorname{ctg} t, \quad x' \frac{\cos t}{\sin t} + x = a \cos t + at \sin t, \quad x = uv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x' &= u'v + v'u; \quad u'v \frac{\cos t}{\sin t} + u \left(v' \frac{\cos t}{\sin t} + v \right) = a \cos t + at \sin t; \quad v' \frac{\cos t}{\sin t} + v = \\
 &= 0 \Rightarrow v = \cos t; \quad \frac{du}{dt} \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin t} = a \cos t + at \sin t; \quad du = \left(a \frac{\sin t}{\cos t} + at \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \right) dt; \\
 u &= -a \ln |\cos t| + a \int t \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \cdot dt + C_1 = -a \ln |\cos t| - \frac{at^2}{2} + a \int \frac{t \, dt}{\cos^2 t} + C_1; \\
 \left[t = u_1, \quad du_1 &= dt, \quad dv_1 = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad v_1 = \operatorname{tg} t \right]; \quad u = -a \ln |\cos t| - \frac{at^2}{2} + \\
 &+ a \left(t \operatorname{tg} t - \int \operatorname{tg} t \cdot dt \right) + C_1 = at \operatorname{tg} t - \frac{at^2}{2} + C_1; \quad x = uv = at \sin t - \\
 &- \cos t \left(\frac{at^2}{2} - C_1 \right).
 \end{aligned}$$

Представим: $C_1 = a - C \Rightarrow x = a (\cos t + t \sin t) - \cos t \left(\frac{at^2}{2} + C \right)$.

$$\begin{aligned}
 x' &= -a \sin t + a \sin t + at \cos t + \sin t \left(\frac{at^2}{2} + C \right) - at \cos t = \sin t \left(\frac{at^2}{2} + C \right); \\
 y' &= -x' \operatorname{ctg} t = -\cos t \left(\frac{at^2}{2} + C \right); \quad y = -C \int \cos t \, dt - \frac{a}{2} \int t^2 \cos t \, dt = \\
 &= -C \sin t - \frac{a}{2} (t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t) = a (\sin t - t \cos t) - \sin t \left(\frac{at^2}{2} + C \right).
 \end{aligned}$$

254 (4154). Полукубической параболы $y = 3t^2$, $x = -2t^3$.

Решение

Это – уравнения полукубической параболы, которая является эволютой по отношению к своей эвольвенте. Координаты точек эволюты удовлетворяют системе уравнений (2) из задачи 253 (4153), откуда находим

$$\frac{\bar{x} - x}{\bar{y} - y} = -\frac{y'}{x'} . \quad (*)$$

Здесь x и y – координаты точек эвольвенты; $\bar{x}' = -6t^2$; $\bar{y}' = 6t$;

$$\frac{\bar{y}'}{\bar{x}'} = -\frac{1}{t} = k_1. \text{ Угловой коэффициент эвольвенты } \operatorname{tg} \varphi = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{1}{k_1} t .$$

Из (*) $\Rightarrow \frac{-2t^3 - x}{3t^2 y} = -t \Rightarrow t^3 - x = yt$. Дифференцируем последнее

$$\begin{aligned} \text{равенство по } t \Rightarrow y' + \frac{1}{1+t^2} y &= 3 \frac{t^3}{1+t^2} ; \quad y = uv, \quad u'v + u \left(v' + \frac{1}{1+t^2} v \right) = \\ &= 3 \frac{t^3}{1+t^2} ; \quad v' + \frac{t}{1+t^2} v = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} ; \quad du = 3 \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} dt . \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство [12, табл. 19], получим:

$$u = \sqrt{(1+t^2)^3} - 3\sqrt{1+t^2} - C ; \quad y = uv = t^2 - 2 - \frac{C}{\sqrt{1+t^2}} ; \quad y' = 2t + \frac{Ct}{\sqrt{(1+t^2)^3}} ;$$

$$x' = \frac{y'}{t} = 2 + \frac{C}{\sqrt{(1+t^2)^3}} .$$

Интегрируя последнее равенство, получаем $x = 2t + \frac{Ct}{\sqrt{1+t^2}}$. Заме-

ним $t = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow x = 2\operatorname{tg} \varphi + C \sin \varphi$; $y = \operatorname{tg}^2 \varphi - 2 - C \cos \varphi$. Вновь заменяя φ на t , получим $x = 2\operatorname{tg} t + C \sin t$; $y = \operatorname{tg}^2 t - 2 - C \cos t$.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ВЫСШЕГО ПОРЯДКА. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

|| В задачах 255 (4155)–282 (4182) найти общие решения уравнений.

255 (4155). $y'' = x + \sin x$.

Решение

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C, \quad y = \frac{x^3}{6} - \sin x + Cx + C_1.$$

256 (4156). $y'' = \operatorname{arctg} x$.

Решение

$$y' = \int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = \left[\operatorname{arctg} x = u, \, du = \frac{dx}{1+x^2}, \right.$$

$$dx = dv, \, x = v \left. \right] = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1; \quad y = \int x \operatorname{arctg} x \, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) dx + C_1 x + C_2; \left[\operatorname{arctg} x = u, \, x dx = dv, \, \ln(1+x^2) = u, \, dv = dx, \right. \\ \left. du = \frac{dx}{1+x^2}, \, v = \frac{x^2}{2} \quad \left| \quad du = \frac{2x}{1+x^2} dx, \, v = x \right. \right];$$

$$y = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) + \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} + C_1 x + C_2 =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg} x}{2} (x^2 - 1) - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) + C_1 x + C_2.$$

257 (4157). $y'' = \ln x$.

Решение

$$y' = \int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx + C_1 = \left[\ln x = u, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad \begin{matrix} dv = dx, \\ v = x \end{matrix} \right] = x \ln x - x + C_1;$$

$$y = -\int x \, dx + \int x \ln x \, dx + C_1 x + C_2 = \left[\ln x = u, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad \begin{matrix} x \, dx = dv, \\ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + C_1 x + C_2}}.$$

258 (4158). $xy'' = y'$.

Решение

Положим $y' = u \Rightarrow y'' = u', xu' = u, \frac{du}{x} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |u| = \ln |Cx| \Rightarrow$

$$u = Cx; \quad y = C \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \text{или} \quad \underline{\underline{y = C_2 x^2 + C_1}} \quad \left(C_2 = \frac{C}{2} \right).$$

259 (4159). $y'' = y' + x$.

Решение

$$y' = y_1, \quad y'_1 = y'' \Rightarrow y'_1 - y_1 = x, \quad y_1 = uv, \quad y'_1 = u'v + uv'; \quad u'v + u(v' - v) = x,$$

$$v' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = dx, \quad v = e^x, \quad \frac{du}{dx} e^x = x, \quad du = x e^{-x} dx; \quad u = \int x e^{-x} dx + C =$$

$$= \left[u_1 = x, \quad du_1 = dx, \quad \begin{matrix} e^{-x} dx = dv_1, \\ v_1 = -e^{-x} \end{matrix} \right] = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx + C_1 = -e^{-x}(x+1) + C;$$

$$y_1 = -x - 1 + C e^{-x}; \quad \underline{\underline{y = -\frac{x^2}{2} - x + C_2 e^{-x} + C}} \quad (C_2 = -C_1).$$

260 (4160). $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

Решение

$$\begin{aligned} y' &= w, \quad y'' = w', \quad w' = \frac{w}{x} + x, \quad w = uv, \quad w' = u'v + v'u, \quad u'v + u \left(v' - \frac{v}{x} \right) = \\ &= xv' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow v = x, \quad du = dx, \quad u = x + C, \quad w = x^2 + Cx, \\ y' &= x^2 + Cx \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2}}. \end{aligned}$$

261 (4161). $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

Решение

$$\begin{aligned} y' &= z, \quad y'' = z', \quad (1+x^2)z' + z^2 + 1 = 0, \quad -\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow -\operatorname{arctg} z = \\ &= \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} C, \quad \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} C - \operatorname{arctg} x \Rightarrow \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} \frac{C-x}{1+Cx} \Rightarrow \\ z &= \frac{C-x}{1+Cx} \quad \text{или} \quad z = \frac{1-\frac{1}{C}x}{\frac{1}{C}+x} \Rightarrow z = \frac{1-C_1x}{C_1+x} \quad \left(C_1 = \frac{1}{C} \right); \quad y = \int \frac{1-C_1x}{C_1+x} dx = \\ &= \int \frac{-C_1(C_1+x)+1+C_1^2}{C_1+x} dx = \underline{\underline{(1+C_1^2) \ln |C_1+x| - C_1x + C_2}}. \end{aligned}$$

262 (4162). $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Решение

$$y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}. \quad \text{Обозначим } \frac{y'}{x} = u, \quad y' = xu, \quad y' = xu, \quad u + u'x = u \ln u,$$

$$u'x = u(\ln u - 1); \text{ тогда } \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |\ln u - 1| =$$

$$= \ln |Cx| \Rightarrow \ln u - 1 = Cx \Rightarrow u = e^{Cx+1}; y' = x e^{Cx+1}, y = \int x e^{Cx+1} dx =$$

$$= \left[x = u, \quad du = dx, \right. \\ \left. e^{Cx+1} dx = dv, \quad v = \frac{1}{C} e^{Cx+1} \right]; y = C_1 x e^{\frac{x}{C_1}+1} - C_1^2 e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2;$$

$$\underline{\underline{y = (C_1 x - C_1^2) e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2 \left(C_1 = \frac{1}{C} \right)}}.$$

263 (4163). $(y'')^2 = y'.$

Решение

$$y' = u, \quad y'' = u'; \quad (u')^2 = u, \quad u' = \pm \sqrt{u}, \quad \frac{du}{\pm \sqrt{u}} = dx \Rightarrow \pm 2 \sqrt{u} = x + C \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{4}(x+C)^2; \quad y = \underline{\underline{\frac{1}{12}(x+C)^3 + C_1}}.$$

264 (4164). $2xy'y'' = (y')^2 + 1.$

Решение

$$y' = u, \quad y'' = u', \quad 2xu u' = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{2u du}{1+u^2} = \frac{dx}{x}; \quad \ln(1+u^2) = \ln |C_1 x| \Rightarrow$$

$$u^2 + 1 = C_1 x; \quad u = \sqrt{C_1 x - 1} \Rightarrow y = \underline{\underline{\frac{2}{3 C_1} \sqrt{(C_1 x - 1)^3} + C_2}}.$$

265 (4165). $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x.$

Решение

$$y' = u, \quad y'' = u'; \quad u' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot u = \sin^3 x, \quad u = zw, \quad u' = z'w + zw';$$

$$zw' + w(z' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot z) = \sin^3 x; \quad z' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2 \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow$$

$$\ln |z| = 2 \ln |\sin x| \Rightarrow z = \sin^2 x; \quad \frac{dw}{dx} \sin^2 x = \sin^3 x; \quad w = -\cos x + C;$$

$$u = -\cos x \cdot \sin^2 x + C_1 \sin^2 x; \quad y = -\int \sin^2 x d(\sin x) + \frac{C_1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx +$$

$$+ C_2 = -\frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{C_1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C_2.$$

266 (4166). $1 + (y')^2 = 2y'y''.$

Решение

Решаем подстановкой $y' = p$, где $p = \varphi(y)$. Тогда $y'' = \frac{dp}{dx} =$

$$= \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}; \quad 1 + p^2 = 2yp \frac{dp}{dy}; \quad \frac{dy}{y} = \frac{2p dp}{1 + p^2} \Rightarrow \ln |yC| = \ln (1 + p^2) \Rightarrow$$

$$yC = 1 + p^2; \quad p = \pm \sqrt{Cy - 1}; \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{Cy - 1}; \quad \frac{dy}{\pm \sqrt{Cy - 1}} = dx; \quad x + C_1 =$$

$$= \frac{\pm 2}{C} \sqrt{Cy - 1}; \quad (x + C_1)^2 = \frac{4}{C} \left(y - \frac{1}{C} \right); \quad \underline{\underline{(x + C_1)^2 = 4 C_2 (y - C_2)}}$$

$$\left(C_2 = \frac{1}{C} \right).$$

267 (4167). $(y')^2 + 2yy'' = 0.$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad p^2 + 2yp \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = -2y \frac{dp}{dy}; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y} \Rightarrow$$

$$\ln |p| = -\frac{1}{2} \ln |Cy| \Rightarrow p = \frac{C'_1}{\sqrt{y}}, \text{ где } C'_1 = \frac{1}{\sqrt{C}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C'_1}{\sqrt{y}};$$

$$\sqrt{y} \cdot dy = C'_1 dx; \quad \frac{2}{3} \sqrt{y^3} = C'_1 x + C'_2; \quad y^{3/2} = \frac{3}{2} C'_1 x + \frac{3}{2} C'_2 = C_1 x + C_3;$$

$$\left(C_1 = \frac{3}{2} C'_1, \quad C_3 = \frac{3}{2} C'_2 \right); \quad y^{3/2} = C_1 (x + C_2) \Rightarrow \underline{\underline{y = C (x + C_2)^{2/3}}}.$$

268 (4168). $a^2 y'' - y = 0$.

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad a^2 p \frac{dp}{dy} = y \Rightarrow a^2 p dp = y dy; \quad a^2 p^2 = y^2 + C_0;$$

$$p = \frac{\pm \sqrt{y^2 + C_0}}{a}; \quad dx = \frac{a dy}{\pm \sqrt{y^2 + C_0}}; \quad x = a \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_0}} =$$

$$= a \ln \left| y + \sqrt{y^2 + C_0} \right| \Rightarrow y + \sqrt{y^2 + C_0} = C_2 e^{x/a}; \quad y - C_2 e^{x/a} =$$

$$= -\sqrt{y^2 + C_0} \Rightarrow y^2 - 2C_2 y e^{x/a} + C_2^2 e^{2x/a} = y^2 + C_0 \Rightarrow y = -\frac{C_0}{2C_2} e^{-x/a} +$$

$$+ \frac{C_2}{2} e^{x/a} \text{ или } \underline{\underline{y = C_1 e^{x/a} + C_2^{-x/a}}} \left(\frac{C_2}{2} = C_1, \quad \frac{-C_0}{2C_2} = C_2 \right).$$

269 (4169). $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{4\sqrt{y}} \Rightarrow p dp = \frac{dy}{4\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{C}{2};$$

$$p = \sqrt{\sqrt{y} + C}; \quad \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C}} = dx; \quad \left[\sqrt{y} = z, \quad = z^2, \right]; \quad 2 \int \frac{z \, dz}{\sqrt{z + C}} = x + C_1;$$

$$x + C_1 = 2 \int \frac{z + C - C}{\sqrt{z + C}} \, dz = 2 \int \sqrt{z + C} \, dz - 2C \int \frac{dz}{\sqrt{z + C}} = 4 \left(\frac{\sqrt{(z + C)^3}}{3} - \right. \\ \left. - C\sqrt{z + C} \right); \quad x = \frac{4}{3}(\sqrt{y} - 2C)\sqrt{\sqrt{y} + C} + C_2 \quad (C_2 = -C_1).$$

270 (4170). $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad p \frac{dp}{dy} + \frac{2}{1-y} p^2 = 0; \quad \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}; \quad \ln|p| = \ln C(y-1)^2$$

$$\Rightarrow p = C(y-1)^2; \quad \frac{dy}{C(y-1)^2} = dx; \quad -\frac{1}{C(y-1)} = x + C_1 \Rightarrow \frac{C'_2}{y-1} =$$

$$= x + C_1 \left(C'_2 = -\frac{1}{C} \right); \quad y = \frac{C'_2 + C_1 + x}{x + C_1} \quad \text{или} \quad y = \frac{x + C_2}{x + C_1} \quad (C_2 = C'_2 + C_1).$$

271 (4171). $yy'' + (y')^2 = 1.$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 1 \Rightarrow \frac{p \, dp}{1-p^2} = \frac{dy}{y}; \quad -\frac{1}{2} \ln|1-p^2| =$$

$$= \ln|Cy| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} = Cy \Rightarrow \frac{1}{1-p^2} = C^2 y^2; \quad p = \sqrt{1 - \frac{1}{C^2 y^2}} = \frac{\sqrt{C^2 y^2 - 1}}{Cy};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C^2 y^2 - 1}}{Cy}; \quad \frac{Cy}{\sqrt{C^2 y^2 - 1}} \cdot dy = dx \Rightarrow \frac{1}{2C} \int \frac{d(C^2 y^2 - 1)}{\sqrt{C^2 y^2 - 1}} = x + C_1;$$

$$\frac{1}{C} \sqrt{C^2 y^2 - 1} = x + C_1; \quad \left(\sqrt{y^2 - C_2} \right)^2 = (x + C_1)^2 \Rightarrow \underline{\underline{(x + C_1)^2 - y^2 = C_2}}.$$

272 (4172). $yy'' = (y')^2$.

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}, \quad yp \frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow y \frac{dp}{dy} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln |p| = \ln |Cy|;$$

$$p = yC; \quad \frac{dy}{dx} = yC, \quad \frac{dy}{yC} = dx, \quad \frac{1}{C} \ln \left| \frac{y}{C_1} \right| = x, \quad y = \underline{\underline{C_1 e^{Cx}}}.$$

273 (4173). $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

Решение

$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}, \quad 2yp \frac{dp}{dy} - 3p^2 = 4y^2$. Разделим обе части последнего равенства на y^2 :

$$2 \frac{p}{y} \cdot \frac{dp}{dy} - 3 \left(\frac{p}{y} \right)^2 = 4, \quad \frac{p}{y} = u, \quad p = uy, \quad \frac{dp}{dy} = u + y \frac{du}{dy}; \quad 2u \left(u + y \frac{du}{dy} \right) -$$

$$- 3u^2 = 4 \Rightarrow 2uy \frac{du}{dy} = 4 + u^2 \Rightarrow \frac{2u du}{4 + u^2} = \frac{dy}{y}; \quad \ln(4 + u^2) = \ln |Cy| \Rightarrow$$

$$4 + u^2 = Cy \Rightarrow u = \sqrt{Cy - 4}; \quad p = \sqrt{Cy - 4} \cdot y, \quad \frac{dy}{y \sqrt{Cy - 4}} = dx,$$

$$x = \int \frac{dy}{y \sqrt{Cy - 4}} + C_1.$$

Положим $\sqrt{Cy - 4} = z, \quad Cy - 4 = z^2, \quad y = \frac{1}{C}(z^2 + 4); \quad dy = \frac{2}{C} z dz \Rightarrow$

$$x = \frac{2}{C} \int \frac{z dz}{(z^2 + 4)z} = 2 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{2} + C_1; \quad x - C_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{Cy-4}}{2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}(x - C_1) = \frac{\sqrt{Cy-4}}{2}; \quad Cy - 4 = 4 \operatorname{tg}^2(x - C_1); \quad y = \frac{4}{C} (1 + \operatorname{tg}^2(x - C_1)) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y \cos^2(x + C_2) = C_3}} \quad \left(\frac{4}{C} = C_3, \quad -C_1 = C_2 \right).$$

274 (4174). $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0.$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad y(1 - \ln y)p \frac{dp}{dy} + (1 + \ln y)p^2 = 0; \quad y(1 - \ln y) \frac{dp}{dy} +$$

$$+ (1 + \ln y)p = 0 \Rightarrow \frac{1 + \ln y}{y(\ln y - 1)} dy = \frac{dp}{p}; \quad \int \frac{(\ln y - 1) + 2}{y(\ln y - 1)} \cdot dy = \ln |pC| \Rightarrow$$

$$\ln |y(\ln y - 1)^2| = \ln |pC|; \quad y(\ln y - 1)^2 = pC \Rightarrow p = C_1 y (\ln y - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{C_1 y (\ln y - 1)^2} = dx; \quad \frac{1}{C_1} \int \frac{d(\ln y - 1)}{(\ln y - 1)^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{C_1 (\ln y - 1)} = x + C_2;$$

$$-\frac{1}{C_1} = C; \quad C = (x + C_2) \ln y - x - C_2, \quad \text{или} \quad \underline{\underline{(x + C_2) \ln y = x + C_1}}.$$

275 (4175). $y'' = 2yy'.$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad p \frac{dp}{dy} = 2yp \Rightarrow dp = 2y dy; \quad p = y^2 + C \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 + C;$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + C} = \int dx. \quad (1)$$

$$1) C_1^2 = C > 0. \text{ Из (1) } \Rightarrow x + C_1^2 = \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1}; \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} = C_1 x + C_2;$$

$$\underline{\underline{y = C_1 \operatorname{tg} (C_1 x + C_2)}}.$$

$$2) C = -C_1^2 < 0: \int \frac{dy}{y^2 - C_1^2} = \int dx \Rightarrow x - C_1'^2 = \frac{1}{2C_1} \ln \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right|;$$

$$\ln \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right| = 2(C_1 x + C_2); \frac{y - C_1}{y + C_2} = e^{2(C_1 x + C_2)} \Rightarrow y = C_1 \frac{1 + e^{2(C_1 x + C_2)}}{1 - e^{2(C_1 x + C_2)}} =$$

$$\underline{\underline{= -C_1 \operatorname{cth}(C_1 x + C_2)}}.$$

$$3) C = 0: \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C_2 \Rightarrow y = \underline{\underline{-\frac{1}{x + C_2}}}.$$

$$\mathbf{276} \text{ (4176). } \cos y \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{dy}{dx}.$$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad p \frac{dp}{dy} \cos y + p^2 \sin y = p \Rightarrow \frac{dp}{dy} + p \operatorname{tg} y = \frac{1}{\cos y};$$

$$p = uv, \quad p' = u'v + v'u; \quad u'v + u(v' + v \operatorname{tg} y) = \frac{1}{\cos y}; \quad v' + v \operatorname{tg} y = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} =$$

$$= -\operatorname{tg} y \, dy \Rightarrow \ln |v| = \ln |\cos y| \Rightarrow v = \cos y; \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}; \quad u = \operatorname{tg} y + C_1',$$

$$p = uv = \sin y + C_1' \cos y; \quad x + C_2 = \int \frac{dy}{\sin y + C_1' \cos y}.$$

Последний интеграл берётся с помощью универсальной тригонометрической подстановки [12]:

$$\int \frac{dy}{a \cos y + b \sin y} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y + \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} \right|.$$

Тогда

$$x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y + \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2}}}{2} \right| \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{x + C_2 = \cos C_1 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y + C_1}{2} \right| \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = \cos C_1 \right)}}.$$

277 (4177). $yy'' - (y')^2 = y^2 y'.$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad yp \frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 p \Rightarrow y \frac{dp}{dy} - p = y^2; \quad p = uv, \quad p' = u'v +$$

$$+ v'u, \quad yu'v + u(yv' - v) = y^2, \quad yv' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \Rightarrow v = y; \quad y^2 \frac{du}{dy} =$$

$$= y^2 \Rightarrow du = dy, \quad u = y + C_1, \quad p = y^2 + y C_1 \Rightarrow \frac{dy}{y(y + C_1)} = dx; \quad x + C_2 =$$

$$= \int \frac{dy}{y(y + C_1)} = \frac{1}{C_1} \left(\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y + C_1} \right) = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right|; \quad x + C_2' =$$

$$= \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right| \Rightarrow \underline{\underline{C_1 x + C_2 = \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right|}}.$$

278 (4178). $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$.

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad yp \frac{dp}{dy} - yp \ln y = p^2 \Rightarrow \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = \ln y; \quad p = uv,$$

$$p' = u'v + v'u, \quad u'v + u \left(v' - \frac{v}{y} \right) = \ln y, \quad v' - \frac{v}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \Rightarrow v = y;$$

$$du = \frac{\ln y}{y} dy \Rightarrow u = \frac{\ln^2 y}{2} + C'_1; \quad p = uv = \frac{y}{2} \ln^2 y + C'_1 y; \quad x + C_2 =$$

$$= 2 \int \frac{dy}{y(\ln^2 y + 2C'_1)}, \quad x + C_2 = 2 \int \frac{d(\ln y)}{\ln^2 y + 2C'_1}.$$

Пусть $2C'_1 > 0$, тогда $\frac{x + C_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2C'_1}} \operatorname{arctg} \frac{\ln y}{\sqrt{2C'_1}}; \quad \frac{1}{\sqrt{2C'_1}} = C_1;$

$x + C_2 = 2C_1 \operatorname{arctg}(C_1 \ln y).$

279 (4179). $y'' = y' \left(\frac{y'}{y} - 2 \sqrt{\frac{y'}{y} - 4} \right).$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad p \frac{dp}{dy} = p \left(\frac{p}{y} - 2 \sqrt{\frac{p}{y} - 4} \right) \Rightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{p}{y} - 2 \sqrt{\frac{p}{y} - 4}; \quad \frac{p}{y} = z,$$

$$p = yz, \quad \frac{dp}{dy} = z + y \frac{dz}{dy}; \quad z + y \frac{dz}{dy} = z - 2 \sqrt{z - 4} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z - 4}};$$

$$\ln |y| + C'_1 = -\sqrt{z - 4} \Rightarrow z = 4 + (\ln |y| + C'_1)^2 \Rightarrow p = y \left[4 + (\ln |y| + C'_1)^2 \right];$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[4 + (\ln |y| + C'_1)^2 \right] \Rightarrow \int \frac{d(\ln |y| + C'_1)}{4 + (\ln |y| + C'_1)^2} = x + C'_2; \quad \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\ln |y| + C'_1}{2} =$$

$$= x + C'_2 \Rightarrow \ln |y| + C'_1 = 2 \operatorname{tg} (2x + C_2); \quad \underline{\underline{\ln |C_1 y| = 2 \operatorname{tg} (2x + C_2) \quad (C'_1 = \ln C_1)}}.$$

280 (4180). $(x+a)y'' + x(y')^2 = y'$.

Решение

$y' = p$, $y'' = p'$; $(x+a)p' + xp^2 = p$ – уравнение Бернулли. Разделим

обе его части на p^2 : $(x+a)\frac{p'}{p^2} + x = p^{-1}$, $p^{-1} = z$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{p^2} \cdot \frac{dp}{dx}$;

$-(x+a)z' + x = z$; $z = uv$, $z' = u'v + v'u$; $-(x+a)u'v - u[(a+x)v' +$

$+v] = -x$; $(x+a)v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+a} \Rightarrow v = \frac{1}{x+a}$; $\frac{du}{dx} = x \Rightarrow$

$$u = \frac{x^2}{2} + C_1'; \quad z = uv = \frac{x^2 + C_1}{2(a+x)}; \quad p = \frac{2(x+a)}{x^2 + C_1} \Rightarrow y = \int \frac{2(a+x)}{x^2 + C_1} dx + C_2 =$$

$$= \begin{cases} \frac{2a}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{C_1}} + \ln(x^2 + C_1) + C_2, & \text{если } C_1 > 0; \\ \frac{a}{\sqrt{-C_1}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{-C_1}}{x + \sqrt{-C_1}} \right| + \ln|x^2 + C_1| + C, & \text{если } C_1 < 0. \end{cases}$$

281 (4181). $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$.

Решение

$y' = p$, $y'' = p' \frac{dp}{dy}$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$yp^2 \frac{dp}{dy} = p^3 + p^2 \left(\frac{dp}{dy} \right)^2. \quad (1)$$

Делим (1) на $p^2 \neq 0$: $yp' = p + (p')^2$ – это уравнение Клеро. Общий интеграл получим, заменяя p' на C_1 :

$$p = C_1 y - C_1^2, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{C_1(y-C_1)} = dx \Rightarrow \frac{dy}{y-C_1} = C_1 dx; \ln|y-C_1| = C_1 x + C_2' \Rightarrow y-C_1 =$$

$$= e^{C_2'} e^{C_1 x} \Rightarrow \underline{y = C_1 + C_2 e^{C_1 x}} \text{ — общее решение.}$$

Для получения особого решения продифференцируем уравнение (2) по C_1 и решим систему

$$\begin{cases} 0 = y - 2C_1, \\ p = C_1 y - C_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{y}{2}, \\ C - \frac{4}{y} = x \Rightarrow y = \frac{4}{C-x} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{4} \Rightarrow 4 \frac{dy}{y^2} = dx; \underline{\underline{y = \frac{4}{C-x}}} \text{ — особое решение.}$$

Ранее уравнение (1) делили на $p^2 \neq 0$, но если $p=0$, то $y' = 0$ и $\underline{y = C}$ — также решение дифференциального уравнения.

$$\mathbf{282} \text{ (4182). } xy'' - \frac{1}{4}(y'')^2 - y' = 0.$$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p'; \quad xp' - \frac{1}{4}p'^2 - p = 0 \text{ — уравнение Клеро. Общее его реше-}$$

$$\text{ние } Cx - \frac{C^2}{4} = p; \quad \frac{dy}{dx} = Cx - \frac{C^2}{4} \Rightarrow y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{C^2 x}{4} + C_2 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y = C_1 x(x - C_1) + C}} \left(C_1 = \frac{C}{2} \right).$$

Для получения особого решения составляем систему:

$$\begin{cases} Cx - \frac{C^2}{4} - p = 0, \\ x - \frac{1}{2}C = 0 \end{cases} \Rightarrow C = 2x, \quad y' = 2x^2 - x^2; \quad y = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + C}}.$$

В задачах 283 (4183)–288 (4188) решить уравнения при помощи подхо-
дящей подстановки: $uy' = p$, $(y')^2 = p$, $xy' = p$, $\frac{y'}{y} = p$ и т. д.

283 (4183). $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$.

Решение

Положим $yy' = p$. Тогда $yy'' + (y')^2 = p' \Rightarrow x(yy'' + y'^2) = 3yy'$;

$$xp' = 3p \Rightarrow \frac{dp}{p} = 3 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|Cx^3| \Rightarrow p = Cx^3, \quad yy' = Cx^3,$$

$$y \, dy = Cx^3 dx, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{Cx^4}{4} + C_2', \quad y^2 = \frac{C}{2}x^4 + 2C_2', \quad \underline{\underline{y^2 = C_1x^4 + C_2}}, \text{ где}$$

$$C_1 = \frac{C}{2}, \quad C_2 = 2C_2'.$$

284 (4184). $xy'' = y'(e^y - 1)$.

Решение

$$xy' = p; \quad y' + xy'' = p', \quad xy'' + y' = y'e^y \Rightarrow p' = e^y y' \Rightarrow dp = e^y dy, \quad p = e^y + C_1,$$

$$xy' = e^y + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{e^y + C_1} = \frac{dx}{x}; \quad \left[e^y + C_1 = z, \quad e^y = z - C_1, \quad y = \ln(z - C_1), \right.$$

$$\left. dy = \frac{dz}{z - C_1} \right]; \quad \ln|C_2'x| = \int \frac{dz}{z(z - C_1)} = \frac{1}{C_1} \int \left[\frac{1}{z - C_1} - \frac{1}{z} \right] dz; \quad \ln|C_2'x| =$$

$$= \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{z - C_1}{z} \right| \Rightarrow \frac{z - C_1}{z} = C_3 x^{C_1} \quad (C_3 = C_2' C_1); \quad \frac{e^y}{e^y + C_1} = C_3 x^{C_1} \Rightarrow e^y =$$

$$= \frac{C_1 C_3 x^{C_1}}{1 - C_3 x^{C_1}} = \frac{C_1 x^{C_1}}{\frac{1}{C_3} - x^{C_1}} \Rightarrow y = \ln \left| \frac{C_1 x^{C_1}}{C_2 - x^{C_1}} \right| \quad \left(C_2 = \frac{1}{C_3} \right).$$

285 (4185). $yy'' + (y')^2 = x$.

Решение

$$yy' = p; \quad yy'' + (y')^2 = p' \Rightarrow p' = x \Rightarrow p = \frac{x^2}{2} + C_1'; \quad y \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1' \Rightarrow$$

$$y \, dy = \left(\frac{x^2}{2} + C_1' \right) dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{6} + C_1'x + C_2'; \quad y^2 = \frac{x^3}{3} + 2C_1'x + 2C_2' \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{3} + C_1x + C_2} \quad (C_1 = 2C_1', \quad C_2 = 2C_2').$$

286 (4186). $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = 0.$

Решение

$$\frac{y}{x} = u; \quad u' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}, \quad y = xu, \quad y' = xu' + u, \quad y'' = xu'' + 2u',$$

$$xu'' + 3u' = 0, \quad u' = z, \quad xz' + 3z = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -3 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = \ln \left| \frac{C}{x^3} \right| \Rightarrow z = \frac{C}{x^3};$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{C}{x^3} \Rightarrow u = -\frac{C}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C_1 \Rightarrow y = C_1x + \frac{C_2}{x} \quad \left(C_1 = -\frac{C}{2} \right).$$

287 (4187). $x^2y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^2 = 0.$

Решение

$$x = e^t, \quad y = we^t \Rightarrow w = \frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dw}{dt}e^t + we^t}{e^t} = \frac{dw}{dt} + w; \quad \frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right)}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t} \left(\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} \right); \quad e^{2t}we^te^{-t} \left(\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} \right) -$$

$$-\left(e^t \frac{dw}{dt} + e^t w - e^t w\right)^2 = 0; \quad w \frac{d^2 w}{dt^2} + w \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dt}\right)^2, \quad \frac{dw}{dt} = p,$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = p \frac{dp}{dw}, \quad wp \frac{dp}{dw} + wp = p^2 \Rightarrow w \frac{dp}{dw} + w = p, \quad p = uv, \quad p'_w = u'v + v'u;$$

$$wu'v + u(wv' - v) + w = 0, \quad wv' - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dw}{w} \Rightarrow v = w; \quad w^2 \frac{du}{dw} = -w,$$

$$w \frac{du}{dw} = -1 \Rightarrow du = -\frac{dw}{w} \Rightarrow u = -\ln |C'_1 w|; \quad p = -w \ln C'_1 w, \quad \frac{dw}{dt} = -w \ln C'_1 w;$$

$$-\int \frac{dw}{w \ln C'_1 w} = \int dt + \ln C_2^{-1} \Rightarrow -\ln (\ln w C'_1) = t + \ln C_2^{-1}; \quad \ln (\ln w C'_1)^{-1} =$$

$$= \ln (C_2^{-1} x) \Rightarrow \ln w C'_1 = (C_2^{-1} x)^{-1}, \quad w C'_1 = e^{C_2/x}; \quad \underline{\underline{y = x C_1 e^{C_2/x} \left(\frac{1}{C'_1} = C_1 \right)}}.$$

288 (4188). $yy'' = y'(2\sqrt{yy'} - y')$.

Решение

$$yy' = p, \quad p' = y'^2 + yy''; \quad yy'' + y'^2 = 2y'\sqrt{yy'}, \quad p' = 2y'\sqrt{p}, \quad \frac{dp}{\sqrt{p}} = 2dy;$$

$$2y + C'_1 = 2\sqrt{p} \Rightarrow y + C_1 = \sqrt{p} \Rightarrow p = (y + C_1)^2; \quad yy' = (y + C_1)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{y dy}{(y + C_1)^2} = dx \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{(y + C_1) - C_1}{(y + C_1)^2} dx = \ln |y + C_1| + \frac{C_1}{y + C_1};$$

$$\underline{\underline{x + C_2 = \ln |y + C_1| + \frac{C_1}{y + C_1}}}.$$

В задачах 289 (4189)–299 (4199) найти частные решения уравнений при указанных начальных условиях.

289 (4189). $y''(x^2 + 1) = 2xy'$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3$.

Решение

$$y' = u, \quad y'' = u', \quad u'(x^2 + 1) = 2xu, \quad \frac{du}{u} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \Rightarrow u = (x^2 + 1)C, \text{ т. е.}$$

$$y' = C(x^2 + 1), \quad C = 3; \quad dy = 3(x^2 + 1)dx \Rightarrow y = x^3 + 3x + C_1; \quad C_1 = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y = x^3 + 3x + 1.}}$$

290 (4190). $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$; $y|_{x=2} = 2$, $y'|_{x=2} = 1$.

Решение

Перепишем исходное уравнение так: $\frac{y' - xy''}{(y')^2} = x$. Левая его часть

есть $\left(\frac{x}{y'}\right)'$, значит, $\left(\frac{x}{y'}\right)' = x$.

Интегрируя обе части последнего равенства, имеем:

$$\frac{x^2}{2} + C = \frac{x}{y'} \Rightarrow C = 0; \quad \frac{x^2}{2} = \frac{x}{y'} \Rightarrow y = \ln x^2 + C_1; \quad 2 = \ln 4 + C \Rightarrow C =$$

$$= 2 - \ln 4 \text{ и } y = \ln x^2 - \ln 4 + 2 \text{ или } \underline{\underline{y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}}}.$$

291 (4191). $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$; $y|_{x=2} = 0$, $y'|_{x=2} = 4$.

Решение

$$\frac{y''x - y'}{x^2} = \frac{x}{y'} \Rightarrow \left(\frac{y'}{x}\right)' = \frac{x}{y'} \Rightarrow \frac{y'}{x} \left(\frac{y'}{x}\right)' = 1; \quad \frac{y'}{x} = p; \quad pp' = 1 \Rightarrow p \frac{dp}{dx} = 1 \Rightarrow$$

$$p \, dp = dx \Rightarrow \frac{p^2}{2} + C = x \Rightarrow \left(\frac{y'}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + C = x \Rightarrow C = 0; \frac{y'^2}{2x^2} = x, y' = \sqrt{2x^3},$$

$$y = \sqrt{2x^5} \cdot \frac{2}{5} + C_1; C_1 = -\frac{16}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}.$$

292 (4192). $2y'' = 3y^2; y|_{x=-2} = 1, y'|_{x=-2} = -1.$

Решение

$$p = y', y'' = 2p \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dy} = 3y^2 \Rightarrow 2p \, dp = 3y^2 dy; p^2 = y^3 + C_1, p =$$

$$= \pm \sqrt{y^3 + C_1}, y' = \pm \sqrt{y^3 + C_1}, y'|_{x=-2} = -1: -1 = -\sqrt{1 + C_1} \Rightarrow C_1 = 0.$$

а) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^3} \Rightarrow x = \int y^{-3/2} dy + C_2 = -\frac{2}{\sqrt{y}} + C_2, -2 = C_2 - 2; C_2 = 0;$

$$x = -\frac{2}{\sqrt{y}} \Rightarrow y = \frac{4}{x^2} \text{ (это решение не подходит, так как не удовлетворяет}$$

начальным условиям);

б) $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y^3} \Rightarrow x = -\int y^{-3/2} dy = \frac{2}{\sqrt{y}} + C_2, -2 = 2 + C_2; C_2 = -4;$

$$x = -4 + \frac{2}{\sqrt{y}} \Rightarrow y = \frac{4}{(x+4)^2}.$$

293 (4193). $yy'' = (y')^2 - (y')^3; y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = -1.$

Решение

$$y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy} \Rightarrow p \frac{dp}{dy} = p^2 - p^3 \Rightarrow \frac{dp}{p(1-p)} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln \left| \frac{p}{1-p} \right| =$$

$$= \ln |y C| \Rightarrow \frac{y'}{1-y'} = y C; -\frac{1}{2} = C; \frac{y'}{y'-1} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-2} \Rightarrow$$

$$\frac{y-2}{y} \cdot dy = dx, \quad y - 2 \ln |y| = x + C_1; \quad 1 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0; \quad \underline{\underline{y - x = 2 \ln |y|}}.$$

294 (4194). $y^3 y'' = -1; \quad y|_{x=1} = 1, \quad y'|_{x=1} = 0.$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}, \quad y^3 p \frac{dp}{dy} = -1 \Rightarrow p \, dp = -\frac{dy}{y^3}; \quad \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + \frac{C}{2},$$

$$p = \sqrt{\frac{1}{y^2} + C}, \quad y' = \sqrt{\frac{1}{y^2} + C}, \quad 0 = \sqrt{1+C} \Rightarrow C = -1; \quad y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

$$\frac{y \, dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx, \quad -\sqrt{1-y^2} = x + C_1; \quad C_1 = 1; \quad 1-y^2 = (x-1)^2, \quad 1-y^2 =$$

$$= x^2 - 2x + 1; \quad \underline{\underline{y = \sqrt{2x - x^2}}}.$$

295 (4195). $y^4 - y^3 y'' = 1; \quad y|_{x=0} = \sqrt{2}, \quad y'|_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}, \quad y^4 - y^3 p \frac{dp}{dy} = 1, \quad \frac{y^4 - 1}{y^3} dy = p \, dp \Rightarrow C_1 + y^2 + \frac{1}{y^2} = p^2;$$

$$C_1 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = -2; \quad y^2 + \frac{1}{y^2} - 2 = p^2; \quad \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{y^2},$$

$$\frac{y \, dy}{y^2 - 1} = dx, \quad \frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = x + C_2, \quad C_2 = 0; \quad y^2 - 1 = e^{2x} \Rightarrow \underline{\underline{y = \sqrt{1 + e^{2x}}}}.$$

296 (4196). $y'' = e^{2y}$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Решение

$$y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}, p \frac{dp}{dy} = e^{2y}, p dp = e^{2y} dy; p^2 = e^{2y} + C_1, C_1 = 0,$$

$$p = e^y, e^{-y} dy = dx, -e^{-y} = x + C_2; -1 = 0 + C_2, C_2 = -1, -e^{-y} = -1 + x, \\ -y = \ln|1-x|; \underline{\underline{y = -\ln|1-x|}}.$$

297 (4197). $2(y')^2 = y''(y-1)$; $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = -1$.

Решение

$$y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}; 2p^2 = p \frac{dp}{dy}(y-1); 2p = \frac{dp}{dy}(y-1); \frac{dy}{y-1} = \frac{dp}{2p};$$

$$\ln|y-1| = \frac{1}{2} \ln|pC|; 0 = \frac{1}{2} \ln|-C|; C = -1; y-1 = \sqrt{-p}, (y-1)^2 =$$

$$= -p \Rightarrow -\frac{dy}{dx} = (y-1)^2; -\frac{dy}{(y-1)^2} = dx; \frac{1}{y-1} = x C_2; C_2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1+x}{x}}}.$$

298 (4198). $x^4 y'' = (y - xy')^3$; $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 1$.

Решение

$x = e^t$, $y = ue^t$. Далее решение аналогично задаче 287 (4187):

$$y' = \frac{du}{dt} + u, y'' = e^{-t} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} \right); e^{4t} e^{-t} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} \right) = \left(ue^t - e^t \frac{du}{dt} - e^t u \right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = p, \frac{d^2 u}{dt^2} = p \frac{dp}{du}, p \frac{dp}{du} + p = -p^3 \Rightarrow \frac{dp}{1+p^2} = -du \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} p = -(u + C_1) \Rightarrow p = -\operatorname{tg}(u + C_1); \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dx} - u = \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x};$$

$$p = \frac{du}{dt} \Big|_{x=1} = 0; \quad 0 = -\operatorname{tg} \left(\frac{1}{1} + C_1 \right) \Rightarrow 1 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -p = -\operatorname{tg} (u + C_1)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = -\operatorname{tg} (u - 1); \quad - \int \frac{du}{-\operatorname{tg} (u - 1)} = dt \Rightarrow -\ln \sin (u - 1) = t + C'_2 \Rightarrow$$

$$\sin (u - 1) = \frac{C_2}{e^t}; \quad \sin \left(\frac{y}{x} - 1 \right) = \frac{C_2}{x}; \quad C_2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = x}}.$$

299 (4199). $y'' = xy' + y + 1; \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$

Решение

$$\begin{aligned} y + 1 &= z, \quad y' = z', \quad y'' = z'' \Rightarrow z'' = xz' + z \Rightarrow z'' - xz' - z = 0 \Rightarrow (z' - xz)' = \\ &= 0 \Rightarrow z' - xz = C_1; \quad z|_{x=0} = 2; \quad z'|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0; \quad \frac{dz}{dx} = xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = \\ &= x \, dx \Rightarrow \ln \left| \frac{z}{C_2} \right| = \frac{x^2}{2} \Rightarrow z = C_2 e^{x^2/2}; \quad C_2 = 2 \Rightarrow z = 2e^{x^2/2} \Rightarrow \underline{\underline{y = 2e^{x^2/2} - 1.}} \end{aligned}$$

300 (4200). Какая линия обладает тем свойством, что радиус кривизны в любой ее точке пропорционален длине нормали? Принять коэффициент пропорциональности $k = -1, +1, -2, +2$.

Решение

По условию $\rho = kn$.

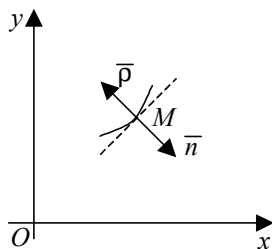
$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad n = y\sqrt{1 + y'^2} \quad (\text{см. задачу}$$

104 (4004)).

Дифференциальное уравнение задачи

$$1 + y'^2 = kyy''. \quad (1)$$

Положим $y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad 1 + p^2 =$



$$= kyp \frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |1 + p^2| = \frac{1}{k} \ln |y C_1| \Rightarrow 1 + p^2 = \left(\frac{y}{C_1} \right)^{2/k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\left(\frac{y}{C_1} \right)^{2/k} - 1}.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (1)

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(C_1/y)^{2/k} - 1}} = x + C_2.$$

$$1) k = -1: \int \frac{dy}{\sqrt{(C_1/y)^2 - 1}} = x + C_2 \Rightarrow -\sqrt{C_1^2 - y^2} = x + C_2 \Rightarrow$$

$(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$ – семейство окружностей.

$$2) k = 1: \int \frac{dy}{\sqrt{(y/C_1)^2 - 1}} = x + C_2 \Rightarrow C_1 \ln \left| \frac{y}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{y}{C_1} \right)^2 - 1} \right| = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\operatorname{arch} \frac{y}{C_1} = \frac{x + C_2}{C_1}.$$

Если $\frac{1}{C_1} = C_3$, $\frac{C_2}{C_1} = C_4$, то $\operatorname{arch} C_3 y = C_3 x + C_4$; $C_3 y = \operatorname{ch} (C_3 x +$

$+ C_4) \Rightarrow y = \frac{\operatorname{ch} (C_3 x + C_4)}{C_3}$ – цепная линия.

$$3) k = 2: \int \frac{dy}{\sqrt{y/C_1 - 1}} = x + C_2 \Rightarrow 2\sqrt{C_1} \sqrt{y - C_1} = x + C_2 \Rightarrow$$

$y = \frac{(y + C_2)^2}{4C_1}$ – семейство парабол.

$$4) k = -2 : \int \frac{dy}{\sqrt{C_1/y-1}} = x + C_2 \Rightarrow \int \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{C_1-y}} = x + C_2.$$

Подстановка: $y = C_1 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{C_1}{2}(1 - \cos t)$, $dy = C_1 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} dt$;

$$x + C_2 = \frac{C_1}{2} \cdot \int \frac{\sqrt{C_1} \cdot \sin \frac{t}{2} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2} dt}{\sqrt{C_1} \cos \frac{t}{2}} = \frac{C_1}{2} (t - \sin t) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{C_1}{2} (t - \sin t) - C_2, \\ y &= \frac{C_1}{2} (1 - \cos t) \end{aligned} \right\} - \text{циклоида.}$$

301 (4201). Найти линию, для которой проекция радиуса кривизны на ось Oy есть величина постоянная, равная a .

Решение

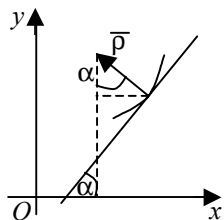
$$\operatorname{tg} \alpha = y', \quad \rho \cos \alpha = a; \quad \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = a \Rightarrow 1+y'^2 = ay''; \quad y' = p,$$

$$y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad 1+p^2 = ap \frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{ap dp}{1+p^2} = dy \Rightarrow \ln \frac{1+p^2}{C_1} = \frac{2y}{a} \Rightarrow 1+p^2 =$$

$$= C_1' e^{2y/a}; \quad p = \sqrt{C_1' e^{2y/a} - 1}; \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1' e^{2y/a} - 1}} = dx;$$

$$e^{y/a} = \frac{1}{\sqrt{C_1'}} \cdot \sec t; \quad y = a \ln \frac{1}{\sqrt{C_1'} \cos t};$$

$$dy = \frac{a \cos t \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt = a \operatorname{tg} t dt \Rightarrow \int \frac{a \operatorname{tg} t dt}{\operatorname{tg} t} =$$

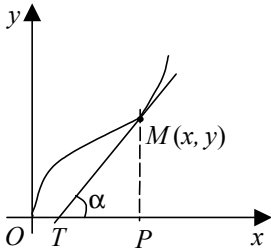


$$= x + C_2' \Rightarrow t = \frac{x}{a} + C_2 \text{ или } \sec t = \sec \left(\frac{x}{a} + C_2 \right). \text{ Но } \sec t = \sqrt{C_1'} e^{y/a} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{e^{y/a} = C_1 \sec \left(\frac{x}{a} + C_2 \right) \left(C_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1'}} \right)}}.$$

302 (4202). Найти линию, проходящую через начало координат, у которой отношение площади треугольника MTP (см. рисунок), образованного касательной в какой-нибудь точке M линии, ординатой этой точки MP и осью абсцисс, к площади криволинейного треугольника OMP равно постоянному числу k ($k > 1/2$).

Решение



$$\frac{S_{\Delta TMP}}{S_{кр.тр}} = k; S_{\Delta} = \frac{1}{2} TP \cdot MP = \frac{1}{2} y^2 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{y'};$$

$$S_{кр.тр} = \int_0^x y \, dx; \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{y'} = k \int_0^x y \, dx.$$

Продифференцируем обе части последнего

равенства по x : $\frac{2yy'^2 - y^2y''}{y'^2} = 2yk; 2y'^2 - yy'' =$

$$= 2y'^2k; y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}, 2p^2(1-k) = yp \frac{dp}{dy} \Rightarrow 2(1-k) \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} \Rightarrow$$

$$y^{2-2k} = \frac{p}{C}; y^{2k-2} dy = C \, dx; y^{2k-2} = Cx + C_1.$$

При $x=0 \quad y=0 \Rightarrow C_1=0; \underline{\underline{Cx = y^{2k-1}}}.$

303 (4203). Найти линию, длина дуги которой, отсчитываемая от некоторой точки, пропорциональна угловому коэффициенту касательной в конечной точке дуги.

Решение

$M_0(x_0; y_0)$; $M(x, y)$ – точки дуги. Тогда $\int_{x_0}^x \sqrt{1+y'^2} dx = ky'$.

Продифференцируем обе части последнего равенства по x :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+y'^2} &= ky''; y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy} \Rightarrow \sqrt{1+p^2} = kp \frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{kp} \Rightarrow \\ \frac{kp dp}{\sqrt{1+p^2}} &= dy \Rightarrow k\sqrt{1+p^2} = y + C; k^2(1+p^2) = (y+C)^2 \Rightarrow p = \\ &= \frac{1}{k} \sqrt{(y+C)^2 - k^2}; \int \frac{k dy}{\sqrt{(y+C)^2 - k^2}} = \int dx \Rightarrow k \ln \left| y + C + \sqrt{(y+C)^2 - k^2} \right| = \\ &= x + C_2 \Rightarrow y = \frac{k}{2} \left(e^{x+C_1/k} + e^{-x+C_1/k} \right) - \frac{C_1}{k}. \end{aligned}$$

304 (4204). Точка массы m вертикально брошена вверх с начальной скоростью v_0 . Сила сопротивления воздуха равна kv^2 . Поэтому, если при-

нять вертикаль за ось Oy , то при движении вверх имеем $m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg -$

kv^2 , а при падении $m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg + kv^2$, где $v = \frac{dy}{dt}$. Найти скорость,

которую будет иметь тело в тот момент, когда оно падает на землю.

Решение

Движение вверх: $m\bar{w} = m\bar{g} + \bar{R}. \quad (1)$ Проектируем (1) на ось y: $mw_x = P_x + R_x; my'' = -mg - kv^2;$	Движение вниз: $my'' = -mg + kv^2; mv \frac{dv}{dy} = -mg + kv^2;$ $\int_S^0 dy = \frac{m}{2k} \int_0^v \frac{d(kv^2 - mg)}{kv^2 - mg};$
---	---

$$mv \frac{dv}{dy} = -mg - kv^2;$$

$$-m \frac{v dv}{mg + kv^2} = dy;$$

$$dy = m \int_{v_0}^0 \frac{v dv}{mg + kv^2};$$

$$y = -\frac{m}{2k} \ln (mg + kv^2) \Big|_{v_0}^0;$$

$$y = \frac{m}{2k} \ln \frac{mg}{mg + kv_0^2} - \text{путь подъема.}$$

$$-S = \frac{m}{2k} \ln \left| kv^2 - mg \right| \Big|_0^v;$$

$$-\frac{m}{2k} \ln \frac{mg + kv_0^2}{mg} =$$

$$= \frac{m}{2k} \ln \left| \frac{kv^2 - mg}{mg} \right| \Rightarrow (\text{здесь } g = g_y <$$

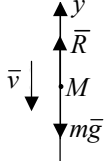
$$< 0, -mg > 0, mg > kv^2) \frac{mg}{mg + kv_0^2} =$$

$$= \frac{kv^2 - mg}{-mg} \Rightarrow -m^2 g^2 = mgkv^2 +$$

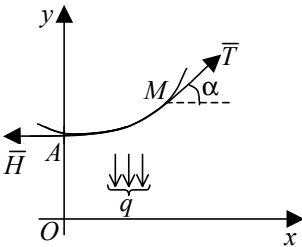
$$+ k^2 v_0^2 v^2; -m^2 g^2 = mgkv_0^2;$$

$$mgv_0^2 = v^2 (kv_0^2 + mg) \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg + kv_0^2}}.$$



305 (4205). Тонкая гибкая и нерастяжимая нить подвешена за оба конца. Какую форму в равновесии примет нить под действием нагрузки, равномерно распределяющей по проекции нити на горизонтальную плоскость? (Весом нити пренебрегаем.)



Решение

Рассмотрим равновесие части AM . Отбрасывая связи и заменяя их действия реакциями связи $\bar{H}$ и $\bar{T}$, направленными по касательной к нити, а также учитывая активно действующую силу $\bar{W} = \bar{q}x$, получаем следующие уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0, \\ \sum F_{iy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cos \alpha - H = 0, \\ T \sin \alpha - W = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{W}{H} \Rightarrow y' = \frac{qx}{H}; \quad dy = \frac{q}{H} x \, dx \Rightarrow$$

$$y = \frac{qx^2}{H} + C \quad - \text{ семейство парабол.}$$

306 (4206). Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m , если известно, что работа силы, действующей в направлении движения и зависящей от пути, пропорциональна времени, протекающему с момента начала движения. Коэффициент пропорциональности равен k .

Решение

$A = kt$, $dA = kdt$. С другой стороны, элементарная работа $dA = Fds$,

$$F = m \frac{dv}{dt}. \text{ Тогда } \frac{md^2s}{dt^2} ds = k \, dt \text{ или } m \frac{dv}{dt} ds = k \, dt \Rightarrow mv \, dv = k \, dt \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{m} t + C_1 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2k}{m} t + C_1}, \text{ или } \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2k}{m} t + C_1} \Rightarrow S =$$

$$= \int \sqrt{\frac{2k}{m} t + C_1} \, dt + C_2 = \frac{m}{2k} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{2k}{m} t + C_1\right)^3} + C_2 =$$

$$= \frac{m}{3k} \sqrt{\left(\frac{2k}{m} t + C_1\right)^3} + C_2.$$

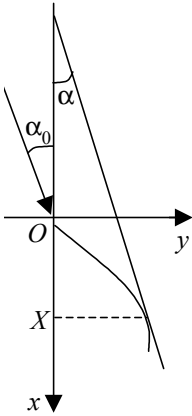
$$\text{При } t = 0 \quad S = 0 \Rightarrow 0 = \frac{m}{3k} \sqrt{C_1^3} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{m}{3k} \sqrt{C_1^3} \Rightarrow$$

$$S = \left[\frac{m}{3k} \sqrt{\left(\frac{2kt}{m} + C_1\right)^3} - \sqrt{C_1^3} \right].$$

307 (4207). Луч света из воздуха (показатель преломления m_0) падает под углом α_0 с вертикалью в жидкость с переменным показателем пре-

ломления. Последний линейно зависит от глубины и постоянен в плоскости, параллельной горизонту; на поверхности жидкости он равен m_1 , а на глубине h он равен m_2 . Найти форму светового луча в жидкости. (Показатель преломления среды обратно пропорционален скорости распространения света.)

Решение



Показатель преломления m линейно зависит от глубины и постоянен в плоскости, параллельной горизонту: $m = kx + b$. При $x = 0$ $m = m_1$; при $x = h$ $m = m_2 \Rightarrow m_1 = b, m_2 = kh + m_1 \Rightarrow k = \frac{m_2 - m_1}{h}; m = \frac{m_2 - m_1}{h}x + m_1$

или

$$m = \frac{(m_2 - m_1)x + hm_1}{h}. \quad (*)$$

Уравнение луча $y = f(x)$. На глубине x имеем:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + d\alpha)} = \frac{m + dm}{m}, \text{ где } m - \text{показатель преломления}$$

на глубине x ; α – угол между вертикалью и касательной к световому лучу, $\operatorname{tg} \alpha = y'$. Следовательно, $m \sin \alpha = (m + dm)(\sin \alpha \cdot \cos d\alpha + \cos \alpha \cdot \sin d\alpha)$; $m \sin \alpha = m \sin \alpha \cdot \cos d\alpha + \sin \alpha \cdot \cos d\alpha dm + m \cos \alpha \cdot \sin d\alpha + \cos \alpha \cdot \sin d\alpha dm$; $\cos d\alpha \sim 1, \sin d\alpha \sim d\alpha \Rightarrow m \sin \alpha \approx m \sin \alpha + \sin \alpha dm + m \cos \alpha d\alpha \Rightarrow$

$$\frac{dm}{m} = -\operatorname{ctg} \alpha d\alpha, \operatorname{tg} \alpha = y' \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} y'; d\alpha = \frac{dy'}{1 + y'^2}; \int \frac{dm}{m} =$$

$$= -\int \frac{dy'}{y'(1 + y'^2)} = -\int \frac{dy'}{y'} = \int \frac{y' dy'}{1 + y'^2}; \ln m = \ln \frac{\sqrt{1 + y'^2} C}{y'} \Rightarrow$$

$$m = \frac{C\sqrt{1 + y'^2}}{y'}. \quad (**)$$

При $x = 0$ $m_1 = m_0, y' = \operatorname{tg} \alpha_0$. Из (*) $\Rightarrow m_0 = \frac{C\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0}}{\operatorname{tg} \alpha_0},$

$$C = m_0 \sin \alpha_0 \text{ и } dx = \frac{h dm}{m_2 - m_1}. \text{ Из (**) } \Rightarrow y' = \frac{C}{\sqrt{m^2 - C^2}} \Rightarrow$$

$$y = \int \frac{C dx}{\sqrt{m^2 - C^2}} = \frac{Ch}{m_2 - m_1} \int \frac{dm}{\sqrt{m^2 - C^2}} = \frac{Ch}{m_2 - m_1} \ln \left| m + \sqrt{m^2 - C^2} \right| + C_1;$$

$$y = \frac{m_0 h \sin \alpha_0}{m_2 - m_1} \ln \left| m + \sqrt{m^2 - m_0^2 \sin^2 \alpha_0} \right| + C.$$

Частные случаи уравнений более высоких порядков

|| В задачах 308 (4208)–317 (4217) найти общее решение уравнений.

308 (4208). $y''' = \frac{1}{x}.$

Решение

$$y'' = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C_1'; \quad y' = \int \ln x dx + C_1' \int dx + C_2 = x \ln x - x + C_1' x + C_2 =$$

$$= x \ln x + C_1'' x + C_2; \quad y = \int x \ln x dx + C_1'' \int x dx + C_2 \int dx + C_3,$$

$$\left[\ln x = u, \quad x dx = dv, \right] \quad \left[du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2} \right]; \quad \underline{\underline{y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.}}$$

309 (4209). $y''' = \cos 2x.$

Решение

$$y'' = \int \cos 2x dx + C_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1; \quad y' = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx + C_1' \int dx + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1' x + C_2; \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{8} \sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.}}$$

310 (4210). $y^{(X)} = e^{ax}$.

Решение

$$y^{(IX)} = \frac{1}{a} e^{ax} + C'_1, \quad y^{(VIII)} = \frac{1}{a^2} e^{ax} + C'_1 x + C'_2; \quad y = \frac{e^{ax}}{a^{10}} + C_1 x^9 + C_2 x^8 + \\ + C_3 x^7 + C_4 x^6 + C_5 x^5 + C_6 x^4 + C_7 x^3 + C_8 x^2 + C_9 x + C_{10}.$$

311 (4211). $x^2 y''' = (y'')^2$.

Решение

$$y'' = u, \quad y''' = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{x} + C'_1 \Rightarrow u = \frac{x}{1 + x C'_1}; \quad y'' = \frac{1}{C'_1} \cdot \frac{x}{C_1 + x};$$

$$y' = \frac{1}{C'_1} \int \frac{x dx}{C_1 + x} = \frac{1}{C'_1} \int \frac{(C_1 + x) - C_1}{C_1 + x} dx = \frac{1}{C'_1} x - \frac{C_1}{C'_1} \ln |C_1 + x|; \quad y' = C_1 x - \\ - C_2 \ln |C_1 + x|; \quad y = C_1 \int x dx - C_2 \int \ln(x + C_1) dx + C_3 = C_1 \frac{x^2}{2} -$$

$$- C_2 \left(x \ln(x + C_1) - \int \frac{x dx}{x + C_1} \right) + C_3; \quad \left[\begin{array}{l} \ln(x + C_1) = u, \quad du = \frac{dx}{x + C_1}, \\ dx = dv, \quad v = x \end{array} \right];$$

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 - C_2 (x + C_1) \ln(x + C_1).$$

312 (4212). $xy^{(V)} = y^{(IV)}$.

Решение

$$y^{(IV)} = u, \quad y^{(V)} = u', \quad \frac{x du}{dx} = u, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}; \quad \ln |u| = \ln |C'_1 x|; \quad u = C'_1 x,$$

$$y''' = C_1' \int x \, dx + C_2' = C_1' \frac{x^2}{2} + C'; \quad y'' = C_1' \frac{x^3}{6} + C_2' x + C_3'; \quad y' = C_1' \frac{x^4}{24} + C_2' \frac{x^2}{2} + C_3' x + C_4';$$

$$y = C_1' \frac{x^5}{96} + C_2' \frac{x^3}{6} + C_3' \frac{x^2}{2} + C_4' x + C_5';$$

$$\underline{\underline{y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 .}}$$

313 (4213). $y''' = (y'')^3$.

Решение.

$$y'' = u, \quad y''' = u', \quad u' = u^3; \quad \frac{du}{u^3} = dx \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = x + C_1' \Rightarrow u^2 = -\frac{1}{2}(x + C_1')^{-1};$$

$$u^2 = \frac{1}{C_1 - 2x} \quad (C_1 = -2C_1'); \quad u = \frac{1}{\sqrt{C_1 - 2x}}; \quad y' = \int \frac{dx}{\sqrt{C_1 - 2x}} + C_2 =$$

$$= -\frac{2}{2}(C_1 - 2x)^{1/2} + C_2; \quad y = -\int \sqrt{C_1 - 2x} \, dx + C_2 \int dx + C_3;$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3}\sqrt{(C_1 - 2x)^3} dx + C_2 x + C_3 .}}$$

314 (4214). $y'y''' = 3(y'')^2$.

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p', \quad y''' = p''; \quad pp'' = 3(p')^2, \quad p' = z, \quad p'' = z \frac{dz}{dp}, \quad pz \frac{dz}{dp} = 3z^2,$$

$$\frac{dz}{z} = 3 \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln|z| = \ln|cp^3| \Rightarrow z = cp^3, \quad \frac{dp}{dx} = cp^3, \quad \frac{dp}{p^3} = c \, dx; \quad -\frac{1}{2p^2} =$$

$$= Cx - C_0 \Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{C_0 - C'x}}; \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{C_0 - C'x}} \Rightarrow y = -\frac{2}{C'} \sqrt{C_0 - C'x} +$$

$$+ C_2' \Rightarrow (C'y - C_2')^2 = 4(C_0' - C'x); \quad C'^2 y^2 - 2C'C_2'y + C_2'^2 = 4C_0' - 4C'x;$$

$$4C'x = -C'^2 y^2 + 2C'C_2'y + (4C_0' - 4C'x) \Rightarrow x = \underline{\underline{C_1 y^2 + C_2 y + C_3}}.$$

315 (4215). $yy''' - y'y'' = 0$.

Решение

$$yy''' - y'y'' \Rightarrow \frac{y'''}{y''} = \frac{y'}{y} \Rightarrow (\ln y'')' = \ln(y)' \Rightarrow \ln y'' = \ln |y C_1| \Rightarrow y'' = y C_1;$$

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}; \quad p \frac{dp}{dy} = y C_1 \Rightarrow p dp = C_1 y dy \Rightarrow p^2 = C_1 y^2 + C_2;$$

$$p = \sqrt{C_1 y^2 + C_2}; \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + C_2}} = dx, \quad \frac{1}{\sqrt{C_2}} \int \frac{dy}{\sqrt{(C_1/C_2)y^2 + 1}} = x + C_3,$$

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} y = z, \quad dz = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} dy, \quad \frac{1}{\sqrt{C_1}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = x + C_3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln |z + \sqrt{z^2 + 1}| =$$

$$= x + C_3 \text{ или } \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arsh} z = x + C_3 \Rightarrow z = \operatorname{sh} (\sqrt{C_1} x + \sqrt{C_1} C_3);$$

$$y = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \operatorname{sh} (\sqrt{C_1} x + \sqrt{C_1} C_3); \quad \underline{\underline{y = C_4 \operatorname{sh} (C_2 x + C_6)}} \quad \left(\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = C_4, \sqrt{C_1} = \right.$$

$$\left. = C_2, \sqrt{C_1} C_3 = C_6 \right).$$

316 (4216). $y''' = [1 + (y')^2] = 3y'(y'')^2$.

Решение

$$y' = p, \quad y'' = p', \quad y''' = p'' \Rightarrow p''(1 + p^2) = 3pp'^2; \quad p' = z, \quad p'' = z \frac{dz}{dp},$$

$$z \frac{dz}{dp} (1 + p^2) = 3pz^2 \Rightarrow \ln |zC_1| = \frac{3}{2} \ln (1 + p^2) \Rightarrow C_1 z = \sqrt{(1 + p^2)^3};$$

$$C_1 \frac{dp}{\sqrt{(1 + p^2)^3}} = dx; \quad p = \operatorname{tg} t, \quad dp = \frac{dt}{\cos^2 t}; \quad C_1 \int \frac{dt \cdot \cos^3 t}{\cos^2 t} = x + C_2 \Rightarrow$$

$$C_1 \sin t = x + C_2 \text{ или } \frac{C_1 p}{\sqrt{1 + p^2}} = x + C_2; \quad C_1^2 p^2 = (x + C_2)^2 + p^2 (x + C_2)^2 \Rightarrow$$

$$p^2 = \frac{(x + C_2)^2}{C_1^2 - (x + C_2)^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{(x + C_2)^2}{C_1^2 - (x + C_2)^2}}, \quad dy = \sqrt{\frac{(x + C_2) dx}{C_1^2 - (x + C_2)^2}} \Rightarrow$$

$$y = -\sqrt{C_1^2 - (x + C_2)^2} - C_3 = \underline{\underline{(y + C_3)^2 + (x + C_2)^2 = C_1^2}}.$$

$$317 \text{ (4217). } (y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2.$$

Решение

$$\frac{y'}{x} = z, \quad y' = zx, \quad y'' = z + z'x, \quad y''' = z' + z' + z''x = 2z' + z''x; \quad (z + z'x)^2 -$$

$$-zx(2z' + z''x) = z^2 \Rightarrow z^2 + 2zz'x + z'^2x^2 - 2zz'x - zz''x^2 = z^2 \Rightarrow z'^2 = zz'',$$

$$z = p, \quad z'' = p \frac{dp}{dz}; \quad p^2 = zp \frac{dp}{dz} \Rightarrow p = z \frac{dp}{dz} \Rightarrow p = C_1 z; \quad \frac{dz}{dx} = C_1 z \Rightarrow \ln |z| =$$

$$= C_1 x + C_2'' \Rightarrow z = C_2' x e^{C_1 x}; \quad y = C_2' \int x e^{C_1 x} dx + C_3 = C_2' \left(\frac{x e^{C_1 x}}{C_1} -$$

$$- \frac{1}{C_1} \int e^{C_1 x} dx \right) + C_3; \quad \left[x = u, \quad du = dx, \quad e^{C_1 x} dx = dv, \quad v = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} \right];$$

$$\underline{\underline{y = C_2 e^{C_1 x} \left(x - \frac{1}{C_1} \right) + C_3}} \quad \left(C_2 = \frac{C_2'}{C_1} \right).$$

Приближенные решения

318 (4218). При исследовании колебания материальной системы с одной степенью свободы встречается дифференциальное уравнение вида $y'' = f_1(x) + f_2(y) + f_3(y')$. Решить это уравнение графически, если $f_1(x) = -x$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y') = -0,1y' - 0,1y'^3$, $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$.

Решение

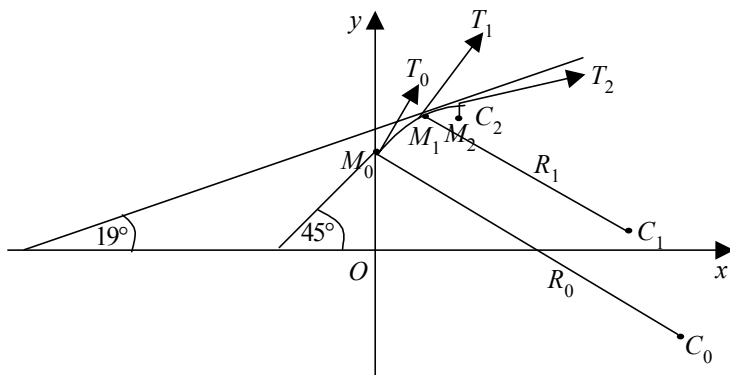
$$y'' = -x - 0,1y' - 0,1y'^3.$$

Теоретическое обоснование графического метода интегрирования дифференциального уравнения можно найти в книге [9]:

$$R = \frac{1}{\left| \cos^3 \varphi \right| f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)}. \quad (1)$$

Через точку $M_0(0; 1)$ проведем луч M_0T_0 (см. рисунок) с угловым коэффициентом

$$y' = \operatorname{tg} \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 45^\circ.$$



Из уравнения (1) находим величину

$$R_0 = \frac{1}{0,707^3(-0,1-0,1)} = -14,7.$$

Отложим отрезок $M_0C_0 = 14,7$ (так как $R_0 < 0$, то отрезок M_0C_0 нужно направлять в такую сторону, чтобы дуга окружности была обращена выпуклостью вверх) на перпендикуляре к направлению M_0T_0 , и из точки C_0 (как из центра) опишем небольшую дугу M_0M_1 радиусом R_0 . Координаты точки $M_1(1,2; 2)$, $\varphi_1 = 40^\circ$. Тогда

$$R_1 = \frac{1}{0,766^3(-1,2 - 0,1 \cdot 0,84 - 0,1 \cdot 0,84^3)} = -2,169.$$

При этом $\operatorname{tg} \varphi_1$ – угловой коэффициент касательной M_1T_1 , проведенной к окружности в точке M_1 .

Из (1) нашли, что $R_1 = -2,169$. Проведем отрезок $M_1C_1 = R_1$ и перпендикулярный к M_1T_1 . Из точки C_1 (как из центра) опишем дугу M_1M_2 радиусом R_1 . Затем на этой дуге возьмем близкую к M_1 точку $M_2(1,7; 2,2)$ и продолжим построение: $\varphi_2 = 19^\circ$,

$$R_2 = \frac{1}{0,945^3(-1,7 - 0,1 \cdot 2,9 - 0,1 \cdot 2,9^3)} = -0,27.$$

319 (4219). $y'' = yy' - x^2$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$. Найти несколько первых членов разложения решения в степенной ряд.

Решение

Ищем решение в виде ряда Маклорена:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1 \cdot 1 - 0 = 1; \\ y''' = y'^2 + yy'' - 2x, \quad y'''(0) = 2; \quad y^{(IV)} = 2y'y'' + y'y''' - yy''' - 2; \\ y^{(IV)} = 3y'y'' - yy''' - 2; \quad y^{(IV)}(0) = 3 + 2 - 2 = 3 \text{ и т. д.};$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots$$

320 (4220). Найти шесть первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$.

Решение

Ищем решение в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned}
 y &= y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(IV)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \\
 &+ \frac{y^{(V)}(1)}{5!}(x-1)^5 + \dots; \quad y'(1) = \frac{0}{1} - \frac{1}{1} = -1; \quad y'' = \frac{y''y - y'^2}{y^2} + \frac{1}{x^2}, \\
 y'''(1) &= \frac{-1-0}{1} + 1 = 0; \quad y^{(IV)} = \frac{(y'''y + y''y' - 2y'y'')y^2 - 2yy'(y''y - y'^2)}{y^4} - \\
 &- \frac{2}{x^3} = \frac{y'''y^3 - 3y^2y'y'' + 2yy'^3}{y^4} - \frac{2}{x^3}; \quad y^{(IV)}(1) = \frac{0}{1} - \frac{2}{1} = -2; \quad y^{(V)} = \\
 &= \frac{(y^{(IV)}y^3 + 3y'''y^2y' - 6yy'^2y'' - 3y^2y''^2 - 3y^2y'y''' + 2y'^4 + 6y'^2y''y)y^4}{y^8} - \\
 &- \frac{4y^3y'(y'''y^3 - 3y^2y'y'' + 2yy'^3)}{y^8} + \frac{6}{x^4}; \quad y^{(V)}(1) = \frac{-2-3}{1} + 6 = 1; \\
 y &= 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{(x-1)^5}{5!} + \dots
 \end{aligned}$$

321 (4221). Найти в форме степенного ряда частное решение уравнения $y'' = x \sin y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$.
(Ограничиться шестью первыми членами.)

Решение

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(IV)}(1)}{4!}(x-1)^4 +$$

$$+ \frac{y^{(V)}(1)}{5!}(x-1)^5 + \dots; \quad y''(1) = 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad y''' = \sin y' + x \cos y' \cdot y'';$$

$$y'''(1) = \sin \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 = 1; \quad y^{(IV)} = 2 \cos y' \cdot y'' - x \sin y' \cdot y''^2 + x \cos y' \cdot y''';$$

$$y^{(IV)}(1) = 2 \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 = -1; \quad y^{(V)} = -3 \sin y' \cdot y''^2 + \\ + 2 \cos y' \cdot y''' - x \cos y' \cdot y''^3 - 2x \sin y' \cdot y'' y''' + \cos y' \cdot y''' - x \sin y' \cdot y'' y''' + \\ + x \cos y' \cdot y^{(IV)} = -3 \sin y' \cdot y''^2 + 3 \cos y' \cdot y''' - x \cos y' \cdot y''^3 - \\ - 3x \sin y' \cdot y'' y''' + x \cos y' \cdot y^{(IV)}; \quad y^{(V)}(1) = -3 + 0 - 0 - 3 = -6;$$

$$y = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{6(x-1)^5}{5!} + \dots$$

322 (4222). Найти в форме степенного ряда частное решение $y = f(x)$ уравнения $y'' = xy'$, удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Если ограничиться пятью первыми членами разложения, то будет ли это достаточно для вычисления $f(-0,5)$ с точностью до 0,001?

Решение

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(IV)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(V)}(0)}{5!}x^5 + \dots,$$

$$y''(0) = 0, \quad y''' = yy' + xy'^2 + xyy''; \quad y'''(0) = 1, \quad y^{(IV)} = 2y'^2 + yy'' + 2xy'y'' + \\ + yy'' + xy'y'' + xyy''' = 2y'^2 + 2yy'' + 3xy'y'' + xyy'''; \quad y^{(IV)}(0) = 2;$$

$$y^{(V)} = 4y'y'' + 2y'y''' + 2yy''' + 3y'y'' + 3xy''^2 + 3xy'y''' + yy''' + xy'y''' + \\ + xyy^{(IV)} = 9y'y'' + 3yy''' + 3xy''^2 + 4xy'y''' + xyy^{(IV)}; \quad y^{(V)}(0) = 3,$$

$$y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \dots$$

Тогда $f(-0,5) \approx 1 - 0,5 - \frac{(0,5)^3}{3!} + \frac{2(0,5)^4}{4!}$, а абсолютная погрешность

$\Delta < \frac{3(0,5)^5}{5!} \approx 0,0005 < 0,001$. (Можно ограничиться первыми пятью членами разложения.)

323 (4223). Найти семь первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $yy'' + y' + y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Какого порядка малости будет при $x \rightarrow 0$ разность $y - (2 - x - e^{-x})$?

Решение.

$$\begin{aligned}
 yy'' + y' + y &= 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0; \quad y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \\
 &+ \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(IV)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(V)}(0)}{5!}x^5 + \frac{y^{(VI)}(0)}{6!}x^6 + \dots; \quad y'' = -\frac{y'}{y} - 1, \\
 y''(0) &= -1; \quad y''' = \frac{-y''y + y'^2}{y^2}, \quad y'''(0) = 1; \quad y^{(IV)} = -\left[(y'''y + y''y' - 2y'y'')y^2 - \right. \\
 &- 2yy'(y''y - y'^2)]/y^4 = -\frac{y'''y^2 + y''y'y}{y^3} - \frac{-2y'y''y - 2y'y'y + 2y'^3}{y^3} = \\
 &= -\frac{y'''y^2 - 3y'y''y + 2y'^3}{y^3}, \quad y^{(IV)}(0) = -1; \quad y^{(V)} = \left[(y^{(IV)}y^2 + 2y'''yy' - 3y''^2y - \right. \\
 &- 3y'^2y'' - 3y'y'''y + 6y'^2y'')y^3 - 3y^2y'(y'''y^2 - 3y'y''y + 2y'^3)]/y^6 = \\
 &= -\frac{y^{(IV)}y^3 - 4y'''y'y^2 - 3y''^2y^2 + 12y'^2y''y - 6y'^4}{y^4}, \quad y^{(V)}(0) = 4.
 \end{aligned}$$

Аналогично $y^{(VI)}(0) = -14$. Таким образом,

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{14x^6}{6!} + \dots$$

Разность $y - (2 - x - e^{-x}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{14x^6}{6!} + \dots -$

$$- \left[2 - x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \right) \right] = \frac{3x^5}{5!} - \frac{13x^6}{6!} + \dots$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y - (2 - x - e^{-x})}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{5!}x^5 - \frac{13x^6}{6!}}{x^5} = \frac{3}{5!} = \text{const}$ при $k = 5$. Следовательно, порядок малости равен 5.

324 (4224). Найти 12 первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y'' + yy' - 2 = 0$, удовлетворяющего начальным

условиям $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$. Вычислить интеграл $\int_0^1 y \, dx$ с точно-

стью до 0,001. Вычислить $y'|_{x=0,5}$ с точностью до 0,00001.

Решение

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots; \quad y'' = 2 - yy', \quad y''(0) = 2;$$

$$y''' = -y'^2 - yy'', \quad y'''(0) = 0; \quad y^{(IV)} = -2y'y'' - y'y''' - yy'''' = -3yy'' - yy''',$$

$$y^{(IV)}(0) = 0; \quad y^{(V)} = -3y''^2 - 3y'y''' - y'y'''' - yy^{(V)} = -3y''^2 - 4y'y''' - yy^{(IV)},$$

$$y^{(V)}(0) = -12; \quad y^{(VI)} = -6y''y''' - 4y''y'''' - 4y'y^{(IV)} - y'y^{(V)} - yy^{(VI)} =$$

$$= -10y''y''' - 5y'y^{(IV)} - yy^{(V)}, \quad y^{(VI)}(0) = 0; \quad y^{(VII)} = -10y''''^2 - 10y''y^{(IV)} -$$

$$-5y''y^{(IV)} - 5y'y^{(V)} - y'y^{(V)} - yy^{(IV)} = -10y'''^2 - 15y''y^{(IV)} - 6y'y^{(V)} - yy^{(IV)},$$

$$y^{(VII)}(0) = 0; \quad y^{(VIII)} = -35y''y^{(IV)} - 21y''y^{(V)} - 7y'y^{(VI)} - yy^{(VII)},$$

$$y^{(VIII)}(0) = -504 \text{ и т. д.}; \quad y = x^2 + \frac{x^5}{10} + \frac{x^8}{80} - \frac{7x^{11}}{4400} + \dots;$$

$$\int_0^1 y \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{720} - \frac{x^{12}}{12 \cdot 44000} + \dots \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{60} + \frac{1}{720} -$$

$$- \frac{7}{12 \cdot 4400} + \dots = 0,3333 - 0,0166 + 0,0013 - \underbrace{0,00013}_{\text{погрешность}} = \underline{\underline{0,317}}.$$

$$y' = 2x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^7}{10} - \frac{7}{1100}x^{10} + \dots; \quad y'(0,5) = 1 - 0,03125 + 0,00078 -$$

$$- \underbrace{0,000006}_{\text{погрешность}} = \underline{\underline{0,96953}}.$$

325 (4225). Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных индуктивности $L = 0,4$ Гн и электрической ванны. В ванне находится литр воды, подкисленной небольшим количеством серной кислоты. Вода разлагается током, при этом меняются концентрации, а следовательно, и концентрация раствора в ванне. Напряжение на клеммах поддерживается постоянным (20 В). Количество вещества, выделяющееся при электролизе, пропорционально току, времени и электрохимическому эквиваленту вещества (закон Фарадея). Электрохимический эквивалент воды равен 0,000187 г/Кл. Сопротивление раствора в начале опыта $R_0 = 2$ Ом, начальный ток 10 А. Найти зависимость (в форме степенного ряда) объема воды в сосуде от времени.

Решение

$$L = 0,4 \text{ Гн}, \quad E = 20 \text{ В}, \quad k = 0,000187 \text{ г/Кл}, \quad R_0 = 2 \text{ Ом}, \quad I_0 = 10 \text{ А},$$

$$V_0 = 1000 \text{ см}^3, \quad \gamma = 1 \text{ г/см}^3.$$

По закону Кирхгофа э. д. с. в цепи равна сумме: падению напряжения на индуктивности — $L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2 Q}{dt^2}$, где Q — количество электриче-

ства в кулонах, и падению напряжения в электролитической ванне –

$$IR = \frac{dQ}{dt} R, \text{ где сопротивление } R = \frac{m}{k_1}, \text{ масса } m = m_1 - m_2; m_1 = V_0 \gamma = V_0;$$

$$m_0 = kQ; m_0 = m_1 = V_0, m_2 = 0; k_1 = \frac{m_0}{R_0} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ (г/Ом)}.$$

Итак, дифференциальное уравнение задачи

$$E = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{V_0 - kQ}{k_1}. \quad (1)$$

Если V – количество воды в ванне в момент времени t , то

$$V\gamma = V_0\gamma - ka; \gamma = 1 \Rightarrow Q = \frac{V_0 - V}{k}, \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dt}, \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} \Rightarrow$$

$$E = -L \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} - \frac{1}{k} \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \frac{V}{k_1} = 0 \Rightarrow$$

$$V'' + \frac{V}{k_1 L} V' + \frac{kE}{L} = 0. \quad (2)$$

$$\text{Обозначим } a = \frac{1}{k_1 L} = \frac{1}{500 \cdot 0,4} = 0,005, \quad b = \frac{kE}{L} = \frac{0,000187 \cdot 20}{0,4} =$$

$= 0,00935$. Из (2) получим дифференциальное уравнение

$$V'' + 0,005 V V' + 0,00935 = 0. \quad (3)$$

Решение дифференциального уравнения (3) ищем в виде ряда:

$$V = V_0 + \frac{V'_0}{1!} t + \frac{V''_0}{2!} t^2 + \frac{V'''_0}{3!} t^3 + \frac{V^{IV}_0}{4!} t^4 + \frac{V^V_0}{5!} t^5 + \dots; V_0 = 1000; \frac{dV}{dt} =$$

$$= -k \frac{dQ}{dt} = -kI \Rightarrow V'_0 = -kI_0 = -0,00187, V'' = -0,005 V V' - 0,00935,$$

$$V''_0 = 0,005 \cdot 1000 \cdot 0,000187 - 0,00935 = 0; V''' = -0,005 V'^2 - 0,005 V V'',$$

$$V'''_0 = -0,005 \cdot 0,000187^2 = 2,91 \cdot 10^{-9}; V^{(IV)} = -0,005(3V'V'' + VV''');$$

$$V_0^{(IV)} = 0,005 \cdot 1000 \cdot 2,91 \cdot 6 \cdot 10^{-9} = 14,55 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \text{ и т. д.};$$

$$V = 1000 - 0,00187t - 10^{-9} (2,91t^3 - 3,64t^6 + 3,64t^5 - 3,04t^6 + 2,17t^7 - \dots).$$

Ряд знакопередающийся, коэффициенты, начиная с шестого, убывают, стремясь к нулю, что удобно для вычисления.

326 (4226). Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных индуктивности $L = 0,4$ Гн и электрической ванны, первоначальное сопротивление которой 2 Ом. В ванне в литре воды растворено 10 г хлористого водорода. Кислота разлагается током, при этом меняется концентрация раствора (ср. с предыдущей задачей, где количество растворенного вещества не менялось, а менялся объем растворителя). Напряжение на клеммах цепи 20 В, электрохимический эквивалент k хлористого водорода равен 0,000381 г/Кл, начальный ток 10 А. Найти зависимость (в форме степенного ряда) между количеством соляной кислоты в растворе и временем.

Решение

Дифференциальное уравнение задачи имеет вид

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \frac{k_1}{M_0 - kQ} = E.$$

Взяв в качестве искомой функции количество y хлористого водорода, не разложившегося к моменту t , приведем уравнение к виду

$$yy'' + ay' + by = 0, \text{ где } a = \frac{k_1}{L} = 50, \quad b = \frac{kE}{L} = 0,0191. \text{ Интегрируя это уравнение}$$

при начальных условиях $y_0 = M_0 = 10$; $y'_0 = -kI_0 = -0,00381$, полу-

чим ряд $y = 10 - 0,00381t + 10^{-10} t^3 (1,21 - 1,52t + \dots)$.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

327 (4227). Функции x^3 и x^4 удовлетворяют некоторому однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Убедиться, что они образуют фундаментальную систему, и составить уравнение.

Решение

$$\begin{aligned} y_1 &= x^3, & y_2 &= x^4, \\ y_1' &= 3x^2, & y_2' &= 4x^3. \end{aligned}$$

Вронскиан $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = x^6 \neq 0$, кроме $x = 0$. Функции образуют фундаментальную систему. Тогда $y_1'' = 6x$, $y_2'' = 12x^2$. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (1)$$

Подставим в (1) значения y , y' и y'' :

$$\begin{cases} 6xa_0 + 3x^2a_1 + x^3a_2 = 0, \\ 12x^2a_0 + 4x^3a_1 + x^4a_2 = 0 \end{cases} \times x \Rightarrow \begin{cases} 6x^2a_0 + x^3a_1 = 0 \\ 12x^3a_0 + 4x^4a_1 + x^5a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{-6a_0}{x};$$

$$6xa_0 - 18xa_0 + x^3a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{12}{x^2}a_0. \text{ Итак, } a_0y'' - \frac{6a_0}{x}y' + \frac{12}{x^2}a_0y =$$

$$= 0 \Rightarrow \underline{\underline{x^2y'' - 6xy' + 12y = 0}}.$$

328 (4228). То же для функции e^x и x^2e^x .

Решение

$y_1 = e^x$, $y_2 = x^2e^x$; $\frac{y_2}{y_1} = x^2 \neq \text{const}$. Значит, решения y_1 и y_2 – линейно независимые и составляют фундаментальную систему решений:

$$y_1' = e^x, \quad y_1'' = e^x; \quad (2)$$

$$y_2' = 2xe^x + x^2e^x, \quad y_2'' = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x. \quad (3)$$

Подставляем (2) и (3) в дифференциальное уравнение (1) (см. задачу 327 (4227)):

$$\left. \begin{aligned} a_0 e^x + a_1 e^x + a_2 e^x &= 0, \\ a_0(2 + 4x + x^2)e^x + a_1(2x + x^2)e^x + a_2 x^2 e^x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= 0, \\ (2 + 4x + x^2)a_0 + (2x + x^2)a_1 + a_2 x^2 &= 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 x^2 + a_1 x^2 + a_2 x^2 &= 0, \\ (2 + 4x + x^2)a_0 + (2x + x^2)a_1 + a_2 x^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2x)a_0 + 2xa_1 = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 = -\frac{1 + 2x}{x}a_0; \quad a_0 - \frac{1 + 2x}{x}a_0 + a_2 = 0; \quad -a_0 \frac{1 + x}{x} = -a_2; \quad a_2 = \frac{1 + x}{x}a_0;$$

$$a_0 y'' - \frac{1 + 2x}{x}a_0 y' + a_2 y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0}}.$$

329 (4229). Функции x, x^3, e^x образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения третьего порядка. Составить это уравнение.

Решение

$$\begin{aligned} y_1 &= x, & y_2 &= x^3, & y_3 &= e^x; \\ y_1' &= 1, & y_2' &= 3x^2, & y_3' &= e^x; \\ y_1'' &= 0, & y_2'' &= 6x, & y_3'' &= e^x; \\ y_1''' &= 0, & y_2''' &= 6, & y_3''' &= e^x. \end{aligned} \quad (1)$$

Общий вид дифференциального уравнения третьего порядка

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0. \quad (2)$$

Подставляем (1) в (2):

$$\left. \begin{aligned} a_2 + a_3 x &= 0, \\ 6a_0 + 6xa_1 + 3x^2 a_2 + x^3 a_3 &= 0, \\ (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) e^x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_2}{x}, \\ 6a_0 + 6xa_1 + 2x^2 a_2 &= 0, \\ a_0 + a_1 - \frac{1 - x}{x} a_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{3(x-1)}{x^2-3x+3} a_0; \quad a_0 + a_1 + \frac{3(x-1)^2}{x(x^2-3x+3)} a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = \\
 &= -\frac{x^3-3x+3}{x(x^2-3x+3)} a_0; \quad a_3 = -\frac{3(x-1)}{x(x^2-3x+3)} a_0; \quad a_0 y''' - \frac{x^3-3x+3}{x(x^2-3x+3)} a_0 y'' + \\
 &+ \frac{3(x-1)}{x^2-3x+3} a_0 y' - \frac{3(x-1)}{x(x^2-3x+3)} a_0 y = 0 \Rightarrow \\
 &\underline{\underline{(x^3-3x^2+3x)y''' - (x^3-3x+3)y'' - 3x(1-x)y' + 3(1-x)y = 0.}}
 \end{aligned}$$

330 (4230). Функции x^2 и x^3 образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения второго порядка. Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$.

Решение

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3; \quad y = c_1 x^2 + c_2 x^3, \quad \Rightarrow \begin{cases} 1 = c_1 + c_2, \\ 0 = 2c_1 + 3c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3, \\ c_2 = -2; \end{cases}$$

$$\underline{\underline{y = 3x^2 - 2x^3.}}$$

331 (4231). Функции $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$ удовлетворяют некоторому линейному однородному уравнению второго порядка: а) проверить, что они составляют фундаментальную систему решений; б) составить уравнение; в) показать, что другой фундаментальной системой этого уравнения являются функции 1 и $\cos 2x$.

Решение

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \cos^2 x, & y_2 &= \sin^2 x; \\
 y_1' &= -\sin 2x, & y_2' &= \sin 2x.
 \end{aligned}$$

$$\text{Вронскиан } W = \begin{vmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ -\sin 2x & \sin 2x \end{vmatrix} = \sin 2x \neq 0, \text{ кроме } x = 0. \text{ Фундамен-}$$

тальную систему решений составляют y_1 и y_2 . Тогда $y_1'' = -2 \cos 2x$,
 $y_2'' = 2 \cos 2x$, $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$;

$$\begin{cases} -2a_0 \cos 2x - a_1 \sin 2x + a_2 \cos^2 x = 0, \\ 2a_0 \cos 2x + a_1 \sin 2x + a_2 \sin^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 0, \quad a_1 = -2a_0 \frac{\cos 2x}{\sin 2x};$$

$$y'' a_0 - y' 2a_0 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y'' \sin 2x - 2y' \cos 2x = 0.}} \quad (*)$$

Функции $y_1 = 1$, $y_2 = \cos 2x$ удовлетворяют (*);

$$y_1' = 0, \quad y_2' = -2 \sin 2x; \quad y_1'' = 0, \quad y_2'' = -4 \cos 2x; \quad W = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x \\ 0 & -2 \sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \sin 2x \neq 0, \text{ кроме } x = 0.$$

332 (4232). Если y_1 есть частное решение уравнения $y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0$,

то $y_2 = Cy_1 \int e^{-\int P(x)dx} \frac{dx}{y_1^2}$ (C – постоянная) тоже является решением.

Показать это тремя способами: 1) непосредственной проверкой; 2) заменой $y = y_1 z$; 3) из формулы Остроградского.

Решение

y_1 – частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0; \quad (*)$$

$y_2 = Cy_1 \int e^{-\int P(x)dx} \frac{dx}{y_1^2}$ ($C = \text{const}$) – также решение. Покажем это тремя способами:

1) непосредственной проверкой:

$$y_1'' + y_1'P(x) + y_1Q(x) = 0; \quad (1)$$

$$y_2' = Cy_1' \int e^{-\int P(x) dx} \frac{dx}{y_1^2} + \frac{C}{y_1} e^{-\int P(x) dx}; \quad y_2'' = Cy_1'' \int e^{-\int P(x) dx} \frac{dx}{y_1^2} +$$

$$+ \frac{Cy_1'}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx} - \frac{Cy_1'}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx} - \frac{C}{y_1} e^{-\int P(x) dx} P(x).$$

Подставим y_2'' , y_2' и y_2 в (*):

$$Cy_1'' \int e^{-\int P(x) dx} \frac{dx}{y_1^2} - \frac{C}{y_1} e^{-\int P(x) dx} P(x) + Cy_1' \int e^{-\int P(x) dx} \frac{dx}{y_1^2} P(x) +$$

$$+ \frac{C}{y_1} e^{-\int P(x) dx} P(x) + Cy_1 \int e^{-\int P(x) dx} \frac{dx}{y_1^2} Q(x) =$$

$$= C \int e^{-\int P(x) dx} \frac{dx}{y_1^2} (y_1'' + y_1' P(x) + y_1 Q(x)) = 0;$$

2) заменой $y = y_1 z$, $y' = y_1' z + y_1 z'$, $y'' = y_1'' + 2y_1' z' + y_1 z''$.

Подставим y , y' и y'' в (*):

$$y_1 z'' + [2y_1' + y_1 P(x)] z' + [y_1'' + y_1' P(x) + y_1 Q(x)] z = 0; \quad y_1 z'' + [2y_1' +$$

$$+ y_1 P(x)] z' = 0, \quad z' = u, \quad z'' = u'; \quad y_1 u' + [2y_1' + y_1 P(x)] u = 0, \quad u = vw,$$

$$u' = v'w + vw'; \quad yv'w + v[y_1 w' + 2y_1' w + y_1 P(x)w] = 0;$$

$$\frac{dw}{w} = -\frac{2y_1' + y_1 P(x)}{y_1} dx; \quad \ln w = -\int P(x) dx - 2 \ln |y_1| \Rightarrow w = \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2};$$

$$y \frac{dv}{dx} w = 0 \Rightarrow v = C; \quad u = c \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} = z' \Rightarrow \underline{\underline{z = C \int e^{-\int P(x) dx} \frac{dx}{y_1^2}}};$$

3) из формулы Остроградского.

Из дифференциального уравнения $y_1'' + y_1' P(x) + y_1 Q(x) = 0$ найдем $P(x)$:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 &= 0, \\ y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \times y_2 \Rightarrow P(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_1'' y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \\ = -\frac{w'(x)}{w(x)} \Rightarrow -w(x)P(x) = w'(x); \quad \frac{dw}{w} = -P(x) dx; \\ w = Ce^{-\int P(x) dx}. \quad (**) \end{aligned}$$

Равенство (**) называется формулой Остроградского–Лиувилля. Перепишем эту формулу так: $y_1 y_2' - y_1' y_2 = Ce^{-\int P(x) dx}$, и разделим ее обе части на y_1^2 :

$$\begin{aligned} \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = C \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = C \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} \Rightarrow \\ \underline{\underline{y_2 = C y_1 \int e^{-\int P(x) dx} \frac{dx}{y_1^2}, \text{ ч. т. д.}}} \end{aligned}$$

333 (4233). Пользуясь формулой задачи 332 (4232), найти общее решение уравнения $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, зная его частное решение $y_1 = x$.

Решение

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x, \quad p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}; \quad y_2 = c_2 x \int e^{-\int \frac{2x dx}{1-x^2}} \frac{dx}{x^2} = \\ = c_2 x \int e^{-\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2}} \frac{dx}{x^2} = c_2 x \int e^{-\ln|1-x^2|} \frac{dx}{x^2} = c_2 x \int \frac{dx}{(1-x^2)x^2} = \\ = c_2 x \int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx = c_2 x \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\text{Общее решение: } y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - c_2.}}$$

334 (4234). Решить уравнение $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$, зная его частное решение $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

Решение

$$\begin{aligned} y_2 &= -c_2 y_1 \int e^{-\int p(x) dx} \frac{dx}{y_1^2} = -c_2 \frac{\sin x}{x} \int e^{-2 \int \frac{dx}{x}} \frac{dx}{\sin^2 x / x^2} = \\ &= -c_2 \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = c_2 \frac{\cos x}{x}. \end{aligned}$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$\underline{\underline{y = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x}}}$$

335 (4235). Уравнение $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$ имеет решение $y = e^x$. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$.

Решение

$$\begin{aligned} y_2 &= c_2 e^x \int e^{-\int \frac{x^2 - 2}{2x - x^2} dx} \frac{dx}{e^{2x}} = c_2 e^x \int e^{-x} (2x - x^2) dx = \\ &= \left[\begin{matrix} 2x - x^2 = u, & du = 2 - 2x, \\ e^{-x} dx = dv, & v = -e^{-x} \end{matrix} \right] = c_2 e^x \left[-e^{-x} (2x - x^2) + \int e^{-x} (2 - 2x) dx \right] = \\ &= \left[\begin{matrix} 2 - 2x = u, & -2dx = du, \\ e^{-x} dx = dv, & v = -e^{-x} \end{matrix} \right] = c_2 e^x \left[-e^{-x} (2x - x^2) - e^{-x} (2 - 2x) - 2 \int e^{-x} dx \right] = \end{aligned}$$

$$= c_2 e^x \left[e^{-x} x^2 \right] = c_2 x^2, \quad y = c_1 e^x + c_2 x^2, \quad y' = c_1 e^x + 2x c_2; \quad \begin{cases} c_1 e + c_2 = 0, \\ c_1 e + 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_1 = -e^{-1}, \quad c_2 = 1.$$

Частное решение: $y = x^2 - e^{x-1}$.

336 (4236). Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $y'' + y'p(x) - yQ(x) = 0$ имело два линейно независимых решения: y_1 и y_2 , — удовлетворяющих условию $y_1 y_2 = 1$.

Решение

Необходимость. Из задачи 332 (4232) вытекает, что

$$y_2 = c y_1 \int e^{-\int p(x) dx} \frac{dx}{y_1^2}. \quad (1)$$

Подставив в (1) $y_1 = \frac{1}{y_2}$, получим $y_2^2 = c \int e^{-\int p(x) dx} y_2^2 dx$. Продиф-

ференцируем это равенство по x : $2y_2 y_2' = c e^{-\int p(x) dx} y_2^2 \Rightarrow y_2' =$

$= \frac{c}{2} e^{-\int p(x) dx} y_2$. Теперь продифференцируем последнее равенство по x :

$$y_2'' = \frac{c}{2} \left[e^{-\int p(x) dx} (-p(x)) y_2 + y_2' e^{-\int p(x) dx} \right] = \frac{c}{2} e^{-\int p(x) dx} (y_2' - y_2 p(x)).$$

Подставим y_2' и y_2'' в исходное дифференциальное уравнение:

$$\frac{c}{2} e^{-\int p(x) dx} (y_2' - y_2 p(x)) + \frac{c}{2} e^{-\int p(x) dx} y_2 p(x) - y_2 Q(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{c}{2} e^{-\int p(x) dx} y_2' - y_2 Q(x) = 0, \text{ а затем } y_2' \text{ в полученное:}$$

$$\frac{c}{2} e^{-\int p(x) dx} \frac{c}{2} e^{-\int p(x) dx} y_2 - y_2 Q(x) = 0 \Rightarrow \frac{c^2}{4} e^{-2\int p(x) dx} = Q(x) \Rightarrow$$

$$\ln \frac{c^2}{4} - 2 \int p(x) dx = \ln Q(x), \text{ и продифференцируем его по } x:$$

$$\Rightarrow -2p(x) = \frac{Q'(x)}{Q(x)} \Rightarrow$$

$$2p(x)Q + Q'(x) = 0. \quad (2)$$

Достаточность. Доказывается с использованием равенства (2) и проведением всех преобразований в обратном порядке.

337 (4237). Найти общее решение уравнения $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, если его частное решение есть многочлен третьей степени.

Решение

Частное решение по условию $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$; $y_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C$; $y_1'' = 6Ax + 2B$. Подставив y_1 , y_1' и y_1'' в исходное уравнение, получим $B = D = 0$; $A / C = -4 / 3$ или $A = 4k$; $C = -3k$.

Положив $k = 1$, получим $y_1 = 4x^3 - 3x$. Второе частное решение находим по формуле $y_2 = cy_1 \int e^{-\int p(x) dx} \frac{dx}{y_1^2}$, где $p(x) = -\frac{x}{1-x^2}$. Получаем

$$y_2 = c\sqrt{1-x^2} (4x^2 - 1).$$

$$\text{Общее решение: } \underline{\underline{y = c_1(4x^3 - 3x) + c_2\sqrt{1-x^2} (4x^2 - 1)}}.$$

В задачах 338 (4238)–340 (4240) легко подобрать одно частное решение (не считая тривиального $y = 0$) для данного уравнения. Найти общее решение этих уравнений.

338 (4238). $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$.

Решение

Одно частное решение: $y_1 = \sin x$, $y_1' = \cos x$, $y_1'' = -\sin x$; тогда $-\sin x - \sin x + 2\sin x = 0$.

Второе частное решение ищем по формуле (см. задачу 332 (4232))

$$\begin{aligned} y_2 &= c y_1 \int e^{-\int p(x) dx} \frac{dx}{y_1^2}; \quad p(x) = -\operatorname{tg} x; \quad y_2 = \sin x \int e^{-\int -\operatorname{tg} x dx} \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= \sin x \int e^{-\ln|\cos x|} \frac{dx}{\sin^2 x} = \sin x \int \frac{(\cos x)^{-1} dx}{\sin^2 x} = \sin x \int \frac{1 \cdot dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} = \\ &= \sin x \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx = \sin x \left[\int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \right] = \\ &= \sin x \left[\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} \right] = \sin x \left[\int \frac{dx}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\sin x} \right] = \sin x \left[\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| - \frac{1}{\sin x} \right]. \end{aligned}$$

Общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{или} \quad y = c_1 \sin x + c_2 \left[\sin x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| - 1 \right].$$

339 (4239). $y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$.

Решение

Одно частое решение: $y_1 = x$, где $p(x) = -1$.

Второе: $y_2 = x \int e^{-\int -dx} \frac{dx}{x^2} = x \int \frac{e^x}{x^2} dx$; $y = c_1 x + c_2 x \int \frac{e^x}{x^2} dx$.

340 (4240). $y'' - \frac{2x}{x^2 + 1} y' + \frac{2y}{x^2 + 1} = 0$.

Решение

Одно частое решение: $y_1 = x$, где $p(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1}$.

Второе: $y_2 = x \int e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \frac{dx}{x^2} = x \int e^{\ln(1+x^2)} \frac{dx}{x^2} = x \int \frac{1+x^2}{x^2} dx =$
 $= x \left(-\frac{1}{x} + x \right) = x^2 - 1.$

Зная частные решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2 - 1$, находим общее решение:

$$\underline{\underline{y = c_1 x + c_2 (x^2 - 1)}}.$$

341 (4241). Найти общее решение уравнения $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$, зная частные решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$.

Решение

Подбором находим, что $y_3 = x^3$. Для проверки линейной независимости составляем вронскиан:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x(12x^2 - 6x^2) - 1 \cdot (6x^3 - 2x^3) =$$

$$= 10x^3 \neq 0; \quad \underline{\underline{y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}}.$$

В задачах 342 (4242)–344 (4244) найти общее решение неоднородных уравнений.

342 (4242). $x^2 y'' - xy' + y = 4x^3$.

Решение

Одно частное решение соответствующего однородного уравнения $y_1 = x$. Введем замену: $y = y_1 \int z \, dx$, с помощью которой понижаем порядок уравнения:

$$y = x \int z \, dx, \quad y' = \int z \, dx + xz, \quad y'' = 2z + xz'.$$

Подставим эти значения y, y', y'' в исходное уравнение:

$$2x^2z + x^3z' - x \int z \, dx - x^2z + x \int z \, dx = 4x^3; \quad x^2z + x^3z' = 4x^3 \Rightarrow xz' + z =$$

$$= 4x \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = 4; \quad z = UV; \quad z' = U'V + UV'; \quad U'V + UV' + \frac{1}{x} \cdot UV = 4;$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{1}{x} \cdot V\right) = 4; \quad \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot V, \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln V = -\ln x \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{x}; \quad \frac{dU}{dx} \cdot \frac{1}{x} = 4, \quad dU = 4x \, dx; \quad U = 2x^2 + c_1, \quad z = 2x + c_1/x;$$

$$y = x \int \left(2x + \frac{c_1}{x}\right) dx = x(x^2 + c_1 \ln|x| + c_2) = \underline{\underline{x^3 + x(c_2 + c_1 \ln|x|)}}.$$

343 (4243). $y'' - \frac{x}{x-1} \cdot y' + \frac{1}{x-1} \cdot y = x-1.$

Решение

Одно частное решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y_1 = x$. Другое частное решение однородного уравнения $y_2 = e^x$, причем y_1 и y_2 – линейно независимые решения. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $y^* = c_1x + c_2e^x$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $y = -(x^2 + 1)$ есть частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение $y = c_1x + c_2e^x - x^2 - 1$. Его можно найти также по методу Лагранжа из системы уравнений:

$$\begin{cases} c_1'x + c_2'e^x = 0, \\ c_1' + c_2'e^x = x-1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = e^x(x-1), \Delta_{c_1'} = -(x-1)e^x, \Delta_{c_2'} = x(x-1);$$

$$c_1' = -1, c_1(x) = -x + c_3, c_2' = xe^{-x}, c_2 = -e^{-x}(x+1) + c_4; y = (-x + c_3)x + (c_4 - e^{-x}(1+x))e^x = c_3x + c_4e^x - x^2 - x - 1 = (c_3 - 1)x + c_4e^x - x^2 - 1.$$

$$\text{Обозначая } c_3 - 1 = c_1, c_4 = c_2, \text{ получим } \underline{y = c_1x + c_2e^x - x^2 - 1}.$$

344 (4244). $(3x + 2x^2)y'' - 6(1+x)y' + 6y = 6.$

Решение

Два частных решения неоднородного дифференциального уравнения: $y_1 = -x; y_2 = 1$. Соответствующее однородное уравнение имеет решение $y_3 = y_2 - y_1$ или $y_3 = x + 1$ [13]. Общее решение ищем в виде $y = y_1 + y_3z$ или $y = -x + (x+1)z$, откуда $y' = 1 + (x+1)z' + z, y'' = (x+1)z'' + 2z'$.

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} (3x + 2x^2)(1+x)z'' - [6(1+x)^2 - 2(3x + 2x^2)]z' &= 0 \Rightarrow \frac{z''}{z'} = \frac{6 \cdot (1+x)}{3x + 2x^2} - \\ - \frac{2}{1+x} &\Rightarrow (\ln z')' = \frac{6 + 6x + 6x + 6x^2 - 6x - 4x^2}{x(3 + 2x)(1+x)} \Rightarrow (\ln z')' = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x(3 + 2x)(1+x)}; \end{aligned}$$

$$\frac{2x^2 + 6x + 6}{x(3 + 2x)(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3 + 2x} + \frac{C}{1+x}; 2x^2 + 6x + 6 = 3A + 2Ax + 3Ax +$$

$$+ 2Ax^2 + Bx + Bx^2 + 3Cx + 2Cx^2; \begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \left| \begin{array}{l} 2A + B + 2C = 2, \\ 5A + B + 3C = 6, \\ 3A = 6 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B + 2C = -2, \\ B + 3C = -4 \end{cases}$$

$$C = -2, B = 2; \ln z = 2 \left(\ln |x| + \frac{1}{2} \ln |3 + 2x| - \ln |1 + x| \right) \ln c_1';$$

$$z' = c_1' \left[\frac{x \sqrt{3 + 2x}}{(x+1)} \right]^2 = c_1' \frac{x^2(3 + 2x)}{(1+x)^2} = c_1' \left(2x - 1 + \frac{1}{(x+1)^2} \right);$$

$$z = c_1' \left(x^2 - x - \frac{1}{(x+1)} \right) + c_2' \Rightarrow y = -x + c_1' (x(x^2 - 1) - 1) - c_2' (x+1) \text{ или}$$

$$\underline{\underline{y = c_1 x^3 + c_2 (x+1) - x .}}$$

345 (4245). Уравнение $(1 + x^2) y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$ допускает частное решение $y = x^2$. Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $y|_{x=-1} = 0$, $y'|_{x=-1} = 0$.

Решение

Одно частное решение соответствует однородному уравнению $y_1 = x$,

другое ищем по формуле $y_2 = y_1 \int e^{-\int p(x) dx} \frac{dx}{y_1^2}$

или

$$y_2 = x \int e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \frac{dx}{x^2} = x \int \frac{dx}{(1+x^2)x^2} = x \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = x \left(-\frac{1}{x} - \arctg x \right) = -1 - x \arctg x .$$

Общее решение уравнения:

$$y = c_1 x + c_2 (1 + x \arctg x) + x^2 \Rightarrow y' = c_1 + c_2 \left(\arctg x + \frac{x}{1+x^2} \right) + 2x ;$$

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0, \\ c_1 + c_2 \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) + 1; \\ c_2 = 2, \quad c_1 = 3 + \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\underline{\underline{y = 3x + 2 + x \left(\frac{\pi}{4} + 2 \arctg x \right) + x^2 .}}$$

346 (4246). Найти шесть первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - (1 + x^2)y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=0} = -2$, $y'|_{x=0} = 2$.

Решение

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(IV)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(V)}(0)}{5!}x^5 + \dots;$$

$$y''(0) = -2; y''' = 2xy + (1 + x^2)y', y'''(0) = 2; y^{(IV)} = 2xy' + 2y + 2xy' +$$

$$+ (1 + x^2)y'' = 4xy' + 2y + (1 + x^2)y'', y^{(IV)}(0) = -(4 + 2) = -6; y^{(V)} = 6y' +$$

$$+ 6xy'' + (1 + x^2)y''', y^{(V)}(0) = 14; y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7}{60}x^5 + \dots$$

347 (4247). Найти девять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2y - y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$.

Решение

$$y''(0) = 0; y''' = 2xy + x^2y' - y'', y'''(0) = 0; y^{(IV)} = 4xy' + 2y + x^2y'' - y''',$$

$$y^{(IV)}(0) = 2; y^{(V)} = 6y' + 6xy'' + x^2y''' - y^{(IV)}, y^{(V)}(0) = -2; y^{(VI)} = 12y'' +$$

$$+ 8xy''' + x^2y^{(IV)} - y^{(V)}, y^{(VI)}(0) = 2; y^{(VII)} = 20y''' - 10xy^{(IV)} + x^2y^{(V)} -$$

$$- y^{(VI)}, y^{(VII)}(0) = -2; y^{(VIII)} = 30y^{(IV)} - 12xy^{(V)} + x^2y^{(VI)} - y^{(VII)},$$

$$y^{(VIII)}(0) = 62; y = 1 + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} + \frac{2x^7}{7!} + \frac{62x^8}{8!} + \dots$$

348 (4248). Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y'' - xy' + y - 1$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

Решение

$$y''(0)=1; \quad y''' = xy'', \quad y'''(0)=0; \quad y^{(IV)} = y'' + xy''', \quad y^{(IV)}(0)=1;$$

$$y^{(V)} = 2y''' + xy^{(IV)}, \quad y^{(V)}(0)=0; \quad y^{(VI)} = 3y^{(IV)} + xy^{(V)}, \quad y^{(VI)}(0)=3;$$

$$y^{(VII)} = 4y^{(V)} + xy^{(VI)}, \quad y^{(VII)}(0)=0;$$

$$y = \frac{x^2}{2!} + \left[\frac{x^4}{4!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{5x^8}{8!} + \dots + \frac{(2n-1)x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots \right], \quad n=1, 2, \dots$$

349 (4249). Записать в виде степенного ряда общее решение уравнения $y'' = y \cdot e^x$. (Ограничиться шестью первыми членами.)

Решение

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots; \quad y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \\ &+ 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots; \quad y'' = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + 5 \cdot 4c_5x^3 + \\ &+ 6 \cdot 5c_6x^4 + \dots; \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots; \quad 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + \\ &+ 4 \cdot 3c_4x^2 + 5 \cdot 4c_5x^3 + 6 \cdot 5c_6x^4 + 7 \cdot 6c_7x^5 = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \\ &+ c_4x^4 + c_5x^5 + c_0x + c_1x^2 + c_2x^3 + c_3x^4 + c_4x^5 + \frac{c_0}{2!}x^2 + \frac{c_1}{2!}x^3 + \frac{c_2}{2!}x^4 + \\ &+ \frac{c_3}{2!}x^5 + c_0 \frac{x^3}{3!} + c_1 \frac{x^4}{3!} + c_2 \frac{x^5}{3!} + c_0 \frac{x^4}{4!} + c_1 \frac{x^5}{5!} + c_0 \frac{x^5}{5!}. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа:

$$\begin{aligned} 2c_2 = c_0 &\Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{2}; \quad 3 \cdot 2c_3 = c_1 + c_0 \Rightarrow c_3 = \frac{c_1}{6} + \frac{c_0}{6}; \quad 4 \cdot 3c_4 = c_2 + c_1 + \\ &+ \frac{c_0}{2!} \Rightarrow c_4 = \frac{c_0}{12} + \frac{c_1}{12}; \quad 5 \cdot 4c_5 = c_3 + c_2 + \frac{c_1}{2!} + \frac{c_0}{3!} \Rightarrow c_5 = \frac{c_0}{24} + \frac{c_1}{30}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } y = c_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \dots \right) + c_1 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \dots \right).$$

350 (4250). Записать в виде степенного ряда общее решение уравнения $y'' + xy' - x^2y = 0$. (Ограничиться шестью первыми членами.)

Решение

$$\begin{aligned}
 y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots; \quad y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \\
 &+ 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots; \quad y'' = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + 5 \cdot 4c_5x^3 + \dots; \\
 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + 5 \cdot 4c_5x^3 + 6 \cdot 5c_6x^4 + 7 \cdot 6c_7x^5 + c_1x + \\
 &+ 2c_2x^2 + 3c_3x^3 + 4c_4x^4 + 5c_5x^5 - c_0x^2 - c_1x^3 - c_2x^4 - c_3x^5 = 0 \Rightarrow 2c_2 = \\
 &= 0 \Rightarrow c_2 = 0; \quad 3 \cdot 2c_3 + c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{c_1}{6}; \quad 4 \cdot 3c_4 + 2c_2 - c_0 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{c_0}{12}; \\
 5 \cdot 4c_5 + 3c_3 - c_1 = 0 \Rightarrow c_5 &= \frac{1}{20}(c_1 - 3c_3) = \frac{1}{20}\left(c_1 + \frac{c_1}{2}\right) = \frac{3}{40}c_1; \quad 6 \cdot 4c_6 + \\
 &+ 4c_4 - c_2 = 0 \Rightarrow c_6 = -\frac{4}{6 \cdot 5}c_4 = -\frac{4c_0}{6 \cdot 15 \cdot 12} = -\frac{c_0}{270}; \quad 7 \cdot 6c_7 + 5c_5 - c_3 = 0; \\
 y &= c_0 \left(1 + \frac{x^4}{12} + \dots\right) + c_1 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots\right).
 \end{aligned}$$

Уравнения с постоянными коэффициентами

|| В задачах 351 (4251)–361 (4261) найти общие решения уравнений.

351 (4251). $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение: $r^2 + r - 2 = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = -2$;

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x}.$$

352 (4252). $y'' - 9y = 0$.

Решение

$$r^2 - 9 = 0; \quad r_1 = 3, \quad r_2 = -3; \quad \underline{\underline{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}}}.$$

353 (4253). $y'' - 4y' = 0$.

Решение

$$r^2 - 4r = 0; \quad r_1 = 4, \quad r_2 = 0; \quad \underline{\underline{y = c_1 e^{4x} + c_2}}}.$$

354 (4254). $y'' - 2y' - y = 0$.

Решение

$$r^2 - 2r - 1 = 0; \quad r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}; \quad \underline{\underline{y = c_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})x}}}.$$

355 (4255). $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

Решение

$$3r^2 - 2r - 8 = 0; \quad r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{3}; \quad r_1 = 2, \quad r_2 = -\frac{4}{3}; \quad \underline{\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x/3}}}.$$

356 (4256). $y'' + y = 0$.

Решение

$$r^2 + 1 = 0; \quad r_{1,2} = \pm i; \quad \underline{\underline{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x}}}.$$

357 (4257). $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Решение

$$r^2 + 6r + 13 = 0; \quad r_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm 2i; \quad \underline{\underline{y = e^{-3x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)}}.$$

358 (4258). $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

Решение

$$4r^2 - 8r + 5 = 0; \quad r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{4} = \frac{4 \pm 2i}{4} = 1 \pm \frac{1}{2}i; \quad y = e^x \left(c_1 \cos \frac{1}{2}x + c_2 \sin \frac{1}{2}x \right).$$

359 (4259). $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение

$$r^2 - 2r + 1 = 0; \quad r_{1,2} = 1; \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x = e^x (c_1 + c_2 x).$$

360 (4260). $4 \frac{d^2 x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$.

Решение

$$4r^2 - 20r + 25 = 0; \quad r_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{4} = \frac{5}{2}; \quad x = (c_1 + c_2 t) e^{2,5t}.$$

361 (4261). $2y'' + y' + 2 \sin^2 15^\circ \cdot \cos^2 15^\circ y = 0$ (или $2y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$).

Решение

$$2r^2 + r + \frac{1}{2} = 0; \quad r_{1,2} = -\frac{1}{4}; \quad y = (c_1 + c_2 x) e^{-0,25x}.$$

В задачах 362 (4262)–364 (4264) найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

362 (4262). $y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y|_{x=0} = 6, \quad y'|_{x=0} = 10$.

Решение

$$r^2 - 4r + 3 = 0; \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 1; \quad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x, \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 6, \\ y' = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^x \\ 3c_1 + c_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 4.$$

Частное решение: $y = 2e^{3x} + 4e^x$.

363 (4263). $y'' + 4y' + 29y = 0; \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 15.$

Решение

$$r^2 + 4r + 29 = 0; \quad r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 29} = -2 \pm 5i; \quad y = e^{-2x} (c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x);$$

$$y' = -2e^{-2x} (c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x) + e^{-2x} 5(-c_1 \sin 5x + c_2 \cos 5x);$$

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + 5c_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 3.$$

Частное решение: $y = 3e^{-2x} \sin 5x$.

364 (4264). $4y'' + 4y' + y = 0; \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 0.$

Решение

$$4r^2 + 4r + 1 = 0; \quad r_{1,2} = -\frac{1}{2}; \quad y = (c_1 + c_2 x) e^{-x/2}; \quad y' = -\frac{1}{2} c_1 e^{-x/2} -$$

$$-\frac{1}{2} c_2 e^{-x/2} + c_2 e^{-x/2}; \quad \begin{cases} c_1 = 2, \\ -\frac{1}{2} c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 2, \quad c_2 = 1.$$

Частное решение: $y = e^{x/2} (2 + x)$.

365 (4265). Дано частное решение некоторого линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y_1 = e^{mx}$. Дискриминант соответствующего характеристического уравнения ра-

вен нулю. Найти частное решение этого дифференциального уравнения, обращающееся вместе со своей производной в 1 при $x = 0$.

Решение

Общее решение: $y = e^{mx} (c_1 + c_2 x)$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$;

$$y' = m e^{mx} (c_1 + c_2 x) + c_2 e^{mx}; \begin{cases} c_1 = 1, \\ m c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1 - m.$$

Частное решение: $y = [1 + (1 - m)x] e^{mx}$.

366 (4266). Найти интегральную кривую уравнения $y'' + 9y = 0$, проходящую через точку $M(\pi; -1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y + 1 = x - \pi$.

Решение

Начальные условия: $y|_{x=\pi} = -1$, $y'|_{x=\pi} = 1$.

$$r^2 + 9 = 0; r_{1,2} = \pm 3i; \begin{cases} y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x, \\ y' = 3(-c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c_1 = -1, \\ -3c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1,$$

$$c_2 = -\frac{1}{3}.$$

Частное решение: $y = \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x$.

367 (4267). Найти интегральную кривую уравнения $y'' + ky = 0$, проходящую через точку $M(x_0; y_0)$ и касающуюся в этой точке прямой $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Решение

Начальные условия: $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = a$.

$$r^2 + k = 0; r_{1,2} = \pm \sqrt{-k};$$

$$1) k > 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \sqrt{k} i ;$$

$$y = c_1 \cos \sqrt{k} x + c_2 \sin \sqrt{k} x,$$

$$y' = \sqrt{k} (-c_1 \sin \sqrt{k} x + c_2 \cos \sqrt{k} x) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 \cos \sqrt{k} x_0 + c_2 \sin \sqrt{k} x_0 &= y_0, \\ \sqrt{k} (-c_1 \sin \sqrt{k} x_0 + c_2 \cos \sqrt{k} x_0) &= a; \end{aligned} \right\} \Delta = \begin{vmatrix} \cos \sqrt{k} x_0 & \sin \sqrt{k} x_0 \\ \frac{a}{\sqrt{k}} & \cos \sqrt{k} x_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos^2 \sqrt{k} x_0 + \sin^2 \sqrt{k} x_0 = 1; \Delta c_1 = \begin{vmatrix} y_0 & \sin \sqrt{k} x_0 \\ \frac{a}{\sqrt{k}} & \cos \sqrt{k} x_0 \end{vmatrix} = y_0 \cos \sqrt{k} x_0 +$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} x_0 = c_1; \Delta c_2 = \begin{vmatrix} \cos \sqrt{k} x_0 & y_0 \\ -\sin \sqrt{k} x_0 & \frac{a}{\sqrt{k}} \end{vmatrix} = \frac{a}{\sqrt{k}} \cos \sqrt{k} x_0 +$$

$$+ y_0 \sin \sqrt{k} x_0 = c_2; y = y_0 \cos \sqrt{k} x \cdot \cos \sqrt{k} x + \frac{a}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} x_0 \cdot \cos \sqrt{k} x +$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{k}} \cos \sqrt{k} x_0 \cdot \sin \sqrt{k} x + y_0 \sin \sqrt{k} x_0 \cdot \sin \sqrt{k} x = y_0 (\cos \sqrt{k} x_0 \times$$

$$\times \cos \sqrt{k} x + \sin \sqrt{k} x_0 \cdot \sin \sqrt{k} x) + \frac{a}{\sqrt{k}} (\cos \sqrt{k} x_0 \cdot \sin \sqrt{k} x + \sin \sqrt{k} x_0 \times$$

$$\times \cos \sqrt{k} x) \Rightarrow y = \frac{a}{\sqrt{k}} \sin [\sqrt{k} (x - x_0)] + y_0 \cos [\sqrt{k} (x - x_0)].$$

$$2) k < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \sqrt{k_1}, \text{ где } k_1 = -k;$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{k_1} x} + c_2 e^{-\sqrt{k_1} x}; y' = \sqrt{k_1} (c_1 e^{\sqrt{k_1} x} - c_2 e^{-\sqrt{k_1} x});$$

$$\begin{cases} c_1 e^{\sqrt{k_1} x_0} + c_2 e^{-\sqrt{k_1} x_0} = y_0, & c_1 = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{k_1} x_0} \left(y_0 + \frac{a}{\sqrt{k_1}} \right), \\ c_1 e^{\sqrt{k_1} x_0} - c_2 e^{-\sqrt{k_1} x_0} = \frac{a}{\sqrt{k_1}} \Rightarrow & c_2 = \frac{1}{2} e^{\sqrt{k_1} x_0} \left(y_0 - \frac{a}{\sqrt{k_1}} \right); \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} e^{-\sqrt{k_1} x_0} \left(y_0 + \frac{a}{\sqrt{k_1}} \right) e^{\sqrt{k_1} x} + \frac{1}{2} e^{\sqrt{k_1} x_0} \left(y_0 - \frac{a}{\sqrt{k_1}} \right) e^{-\sqrt{k_1} x_0} = \\
 &= \frac{1}{2} e^{\sqrt{k_1} (x-x_0)} \left(y_0 + \frac{a}{\sqrt{k_1}} \right) + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{k_1} (x-x_0)} \left(y_0 - \frac{a}{\sqrt{k_1}} \right); \\
 y &= \frac{1}{2\sqrt{k_1}} \left[(y_0 \sqrt{k_1} + a) e^{\sqrt{k_1} (x-x_0)} + (y_0 \sqrt{k_1} - a) e^{-\sqrt{k_1} (x-x_0)} \right].
 \end{aligned}$$

В задачах 368 (4268)–382 (4282) составить общие решения неоднородных уравнений, находя их частные решения либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных.

368 (4268). $2y'' + y' - y = 2e^x$.

Решение

$$2r^2 + r - 1 = 0; \quad r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}; \quad r_1 = -1, \quad r_2 = \frac{1}{2}.$$

Общее решение однородного уравнения: $y^* = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2}$.

Частное решение: $\bar{y} = Ae^x$, $\bar{y}' = Ae^x$, $\bar{y}'' = Ae^x$. Подставив $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное дифференциальное уравнение, получим $A = 1$.

Общее решение неоднородного уравнения: $y = y^* + \bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} + e^x$.

369 (4269). $y'' + a^2 y = e^x$.

Решение

$$\begin{aligned}
 2r^2 + a^2 = 0, \quad k = \pm ai, \quad y^* &= c_1 \cos ax + c_2 \sin ax; \quad \bar{y} = Ae^x, \quad \bar{y}' = Ae^x, \\
 \bar{y}'' &= Ae^x \Rightarrow A + a^2 A = 1 \Rightarrow A = 1/(1+a^2); \quad \underline{\underline{y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax +}} \\
 &\underline{\underline{+ \frac{1}{1+a^2} e^x}}.
 \end{aligned}$$

370 (4270). $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

Решение

$$r^2 - 7r + 6 = 0; r_1 = 6, r_2 = 1; y^* = c_1 e^{6x} + c_2 e^x; \bar{y} = A \cos x + B \sin x, \\ \bar{y}' = -A \sin x + B \cos x, \bar{y}'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Подставляя найденные значения $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в исходное выражение, получим $-A \cos x - B \sin x + 7A \sin x - 7B \cos x + 6A \cos x + 6B \sin x = \sin x$;

$$\left. \begin{aligned} 5A - 7B &= 0, \\ 5B + 7A &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{7}{74}, B = \frac{5}{74}; y = c_1 e^{6x} + c_2 e^x + \frac{7 \cos x + 5 \sin x}{74}.$$

371 (4271). $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2} \cos 2x$.

Решение

$$r^2 + 2r + 5 = 0; r_{1,2} = -1 \pm 2i; y^* = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x); \\ \bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x, \bar{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \bar{y}'' = -4A \cos 2x -$$

$$-4B \sin 2x; \left. \begin{aligned} A + 4B &= -\frac{17}{2}, \\ -4A + B &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = -2; y = e^{-x} (c_1 \cos 2x + \\ + c_2 \sin 2x) - \frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x.$$

372 (4272). $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

Решение

$$r^2 - 6r + 9 = 0; r_{1,2} = 3; y^* = (c_1 + c_2 x) e^{3x}; \bar{y} = Ax^2 + Bx + C, \\ \bar{y}' = 2Ax + B, \bar{y}'' = 2A; 2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - x + 3;$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 & \left| \begin{aligned} 9A &= 2, \\ -12A + 9B &= -1, \\ 2A - 6B + 9C &= 3 \end{aligned} \right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{9} \left(-1 + \frac{24}{9} \right) = \frac{5}{27}, C = \frac{1}{9} \left(3 - \frac{4}{9} + \right. \\ \left. + \frac{30}{27} \right) = \frac{11}{27}; y = (c_1 + c_2 x) e^{3x} + \frac{2}{9} x^2 + \frac{5}{27} x + \frac{11}{27}.$$

373 (4273). $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

Решение

$$r^2 - 2r + 2 = 0; r_{1,2} = 1 \pm i; y^* = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x); \bar{y} = Ax + B, \bar{y}' = A,$$

$$\bar{y}'' = 0; -2A + 2Ax + 2B = 2x \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B-A=0 \end{cases} \Rightarrow B=1; \underline{\underline{y = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + x + 1}}.$$

374 (4274). $y'' + 4y' - 5y = 1$.

Решение

$$r^2 + 4r - 5 = 0; r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5}, r_1 = 1, r_2 = -5; y^* = c_1 e^x + c_2 e^{-5x};$$

$$\bar{y} = A, \bar{y}' = 0, \bar{y}'' = 0; -5A = 1, A = -0,2; \underline{\underline{y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} - 0,2}}.$$

375 (4275). $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

Решение

1) $f(x) = 10e^{-x}$.

$$r^2 - 3r + 2 = 0; r_1 = 2, r_2 = 1; y^* = c_1 e^{2x} + c_2 e^x; \bar{y} = Ae^{-x}, \bar{y}' = -Ae^{-x},$$

$$\bar{y}'' = Ae^{-x}; A = \frac{5}{3}; \underline{\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \frac{5}{3} e^{-x}}}.$$

2) $f(x) = 3e^{2x}$.

$$\bar{y} = Axe^{2x}, \bar{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}, \bar{y}'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}; 4A + 4Ax - 3A - 6Ax + 2Ax = 3, A = 3; \underline{\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 3xe^{2x}}}.$$

3) $f(x) = 2\sin x$.

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x, \bar{y}' = -A\sin x + B\cos x, \bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x;$$

$$-A \cos x - B \sin x + 3A \sin x - 3B \cos x + 2A \cos x + 2B \sin x = 2 \sin x \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} A - 3B &= 0, \\ 3A + B &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 3B, \\ 10B &= 2 \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{3}{5}, B = \frac{1}{5}; \underline{\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.}}$$

$$4) f(x) = 2x^3 - 30.$$

$$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad \bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B;$$

$$6Ax + 2B - 9Ax^2 - 6Bx - 3C + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2Cx + 2D = 3x^3 - 30;$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 1, \\ -9A + 2B, \\ 6A - 6B + 2C, \\ 2B - 3C + 2D &= -30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 1, B = \frac{9}{2}, C = \frac{21}{2}, D = -\frac{15}{4};$$

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}.}}$$

$$5) f(x) = 2e^x \cos \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right) e^x, \quad \bar{y}' = \left(-A \sin \frac{x}{2} + B \cos \frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} e^x + \left(A \cos \frac{x}{2} + \right. \\ &+ \left. B \sin \frac{x}{2} \right) e^x, \quad \bar{y}'' = \left(-A \sin \frac{x}{2} + B \cos \frac{x}{2} \right) e^x + \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right) e^x + \\ &+ \left(-A \cos \frac{x}{2} - B \sin \frac{x}{2} \right) \frac{1}{4} e^x + \left(-A \sin \frac{x}{2} + B \cos \frac{x}{2} \right) e^x + \left(A \cos \frac{x}{2} + \right. \\ &+ \left. B \sin \frac{x}{2} \right) e^x - \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right) \frac{1}{4} e^x - \frac{3}{2} \left(-A \sin \frac{x}{2} + B \cos \frac{x}{2} \right) e^x - \\ &- 3 \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right) e^x + 2 \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right) e^x = 2e^x \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B &= 2, \\ \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}B &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -\frac{8}{5}, B = \frac{16}{5}; \underline{\underline{y = -\frac{8e^x}{5} \left(\cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \right) +$$

$$+ c_1 e^{2x} + c_2 e^x .$$

6) $f(x) = x - e^{-2x} + 1.$

$$\bar{y} = Ax + Be^{-2x} + C, \quad \bar{y}' = A - 2Be^{-2x}, \quad \bar{y}'' = 4Be^{-2x}; \quad 4Be^{-2x} - 3A +$$

$$+ 6Be^{-2x} + 2Ax + 2C = x - e^{-2x} + 1; \quad \left. \begin{aligned} 12B &= -1, \\ 2A &= 1, \\ -3A + 2C &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{12},$$

$$C = \frac{5}{4}; \quad \underline{\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}e^{-2x} + \frac{5}{4} .}}$$

7) $f(x) = e^x(3 - 4x).$

$$\bar{y} = xe^x(A + Bx) = e^x(Ax + Bx^2), \quad \bar{y}' = e^x(Ax + Bx^2) + e^x(A + 2Bx),$$

$$\bar{y}'' = 2e^x(A + 2Bx) + e^x(Ax + Bx^2) + e^x \cdot 2B; \quad 2A + 4Bx + Ax + Bx^2 +$$

$$+ 2B - 3Ax - 3Bx^2 - 3A - 6Bx + 2Ax + 2Bx^2 = 3 - 4x \Rightarrow \begin{cases} -2B = -4, \\ -A + 2B = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$B = 2, A = 1; \quad \underline{\underline{\bar{y} = e^x(2x^2 + x) .}}$$

8) $f(x) = 3x + 5 \sin 2x.$

$$\bar{y} = Ax + B \cos 2x + C \sin 2x + D, \quad \bar{y}' = A - 2B \sin 2x + 2C \cos 2x,$$

$$\bar{y}'' = -4B \cos 2x - 4C \sin 2x; \quad -4B \cos 2x - 4C \sin 2x - 3A + 6B \sin 2x - \\ - 6C \cos 2x + 2Ax + 2B \cos 2x + 2D + 2C \sin 2x = 3x + 5 \sin 2x;$$

$$\left. \begin{aligned} -2B - 6C &= 0, \\ -2C + 6B &= 5, \\ 2A &= 3, \\ -3A + 2D &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{3}{2}, D = \frac{9}{4}, B = \frac{1}{5}, -20C = 5 \Rightarrow C = -\frac{1}{4};$$

$$\bar{y} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}(9 + 3\cos 2x - \sin 2x).$$

$$9) f(x) = 2e^x - e^{-2x}.$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= Axe^x + Be^{-2x}, \bar{y}' = Axe^x + Ae^x - 2Be^{-2x}, \bar{y}'' = 2Ae^x + Axe^x + 4Be^{-2x}; \\ 2Ae^x + Axe^x + 4Be^{-2x} - 3Axe^x - 3Ae^x + 6Be^{-2x} + 2Axe^x + 2Be^{-2x} &= \\ = 2e^x - e^{-2x}; \left. \begin{aligned} -A &= 2, \\ 12B &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -2, B = -\frac{1}{12}; \bar{y} &= -2xe^x - \frac{1}{12}e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$10) f(x) = \sin x \sin 2x \left(\text{или } f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) \right).$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= A\cos x + B\sin x + C\cos 3x + D\sin 3x, \bar{y}' = A\sin x + B\cos x - 3C\sin 3x + \\ + 3D\cos 3x, \bar{y}'' &= -A\cos x - B\sin x - 9C\cos 3x - 9D\sin 3x; -A\cos x - \\ - B\sin x - 9C\cos 3x - 9D\sin 3x + 3A\sin x - 3B\cos x + 9C\sin 3x - 9D\cos 3x &+ \\ + 2A\cos x + 2B\sin x + 2C\cos 3x + 2D\sin 3x &= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} -3B + A &= \frac{1}{2}, \\ B + 3A &= 0, \\ -7C - 9D &= -\frac{1}{2}, \\ -7D + 9C &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{20}, B = -\frac{3}{20}, C = \frac{7}{9}D, -\frac{49}{9}D - 9D = -\frac{1}{2},$$

$$D = \frac{9}{260}, C = \frac{7}{260}; \bar{y} = \frac{1}{20}\cos x - \frac{3}{20}\sin x + \frac{7}{260}\cos 3x + \frac{9}{260}\sin 3x.$$

$$11) f(x) = \operatorname{sh} x \left(\text{или } f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right).$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= Axe^x + Be^{-x}, \quad \bar{y}' = -Ae^x + Axe^x - Be^{-x}, \quad \bar{y}'' = 2Ae^x + Axe^x - Be^{-x}; \\ 2Ae^x + Axe^x + Be^{-x} - 3Ae^x - 3Ae^x + 3Be^{-x} + 2Axe^x + 2Be^{-x} &= \frac{1}{2}e^x - e^{-x}; \\ -A = \frac{1}{2}, \quad \left. \begin{aligned} 6B &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{12}; \quad \underline{\underline{\bar{y} = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{12}e^{-x}}}.\end{aligned}$$

376 (4276). $2y'' + 5y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:

Решение

1) $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$.

$$\begin{aligned} 2r^2 + 5r &= 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{5}{2}; \quad y^* = c_1 + c_2 e^{-5x/2}; \quad \bar{y} = x(Ax^2 + Bx + \\ + C) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx, \quad \bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B; \\ 12Ax + 4B + 15Ax^2 + 10Bx + 5C &= 5x^2 - 2x - 1; \quad \left. \begin{aligned} 15A &= 5, \\ 12A + 10B &= -2, \\ 5C + 4B &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$B = -\frac{3}{5}, \quad C = \frac{7}{25}; \quad \underline{\underline{\bar{y} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x}}.$$

2) $f(x) = e^x$.

$$\bar{y} = Ae^x, \quad \bar{y}' = Ae^x, \quad \bar{y}'' = Ae^x; \quad 2Ae^x + 5Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{7}; \quad \underline{\underline{\bar{y} = \frac{1}{7}e^x}}.$$

3) $f(x) = 29\cos x$.

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x, \quad \bar{y}' = -A\sin x + B\cos x, \quad \bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x;$$

$$2(-A\cos x - B\sin x) - 5A\sin x + 5B\cos x = 29\cos x; \quad \left. \begin{aligned} 2A + 5B &= 29, \\ -2B - 5A &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{5}{2}A, \quad -2A - \frac{25}{2}A = 29; \quad A = -2, \quad B = 5; \quad \underline{\underline{\bar{y} = 5\sin x - 2\cos x}}.$$

$$4) f(x) = \cos^2 x \left(\text{или } f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right).$$

$$\bar{y} = Ax + B \cos 2x + C \sin 2x, \quad \bar{y}' = A - 2B \sin 2x + 2C \cos 2x,$$

$$\bar{y}'' = -4B \cos 2x - 4C \sin 2x; \quad 2(-4B \cos 2x - 4C \sin 2x) + 5A - 10B \sin 2x +$$

$$+ 10C \cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \left. \begin{array}{l} -8B + 10C = \frac{1}{2}, \\ -8C - 10B = 0, \\ 5A = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{10}, \quad C = -\frac{5}{4}B,$$

$$-8B - \frac{25}{2}B = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{41}, \quad C = \frac{5}{164}; \quad \underline{\underline{\bar{y} = \frac{1}{10}x + \frac{5}{164} \sin 2x - \frac{1}{41} \cos 2x.}}$$

$$5) f(x) = 0,1 e^{-2,5x} - 25 \sin 2,5x.$$

$$2y'' - 5y' = 0,1 e^{-2,5x} - 25 \sin 2,5x; \quad \bar{y} = Axe^{-2,5} + B \cos 2,5x + C \sin 2,5x,$$

$$\bar{y}' = Ae^{-2,5} - 2,5Ae^{-2,5}x - 2,5B \sin 2,5x + 2,5C \cos 2,5x, \quad \bar{y}'' = -5Ae^{-2,5} +$$

$$+ 6,25Axe^{-2,5} - 6,25B \cos 2,5x - 6,25C \sin 2,5x - 10Ae^{-2,5} + 12,5Axe^{-2,5};$$

$$-12,5B \cos 2,5x - 12,5C \sin 2,5x + 5Ae^{-2,5} - 12,5Axe^{-2,5} - 12,5B \sin 2,5x +$$

$$+ 12,5C \cos 2,5x = 0,1e^{-2,5} - 25 \sin 2,5x; \quad \left. \begin{array}{l} -5A = 0,01, \\ -12,5B + 12,5C = 0, \\ -12,5C - 12,5B = -25 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A = -0,02, \quad B = C = 1; \quad \underline{\underline{\bar{y} = \cos 2,5x + \sin 2,5x - 0,02e^{-2,5x}}}.$$

$$6) f(x) = 29x \sin x.$$

$$\bar{y} = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x, \quad \bar{y}' = -A \cos x - (Ax + B) \sin x +$$

$$+ C \sin x + (Cx + D) \cos x, \quad \bar{y}'' = -2A \sin x - (Ax + B) \cos x + 2C \cos x -$$

$$- (Cx + D) \sin x; \quad -4 \sin x - (2Ax + 2B) \cos x + 4C \cos x - (2Cx +$$

$$+ 2D) \sin x + 5A \cos x - (5Ax + 5B) \sin x + 5C \sin x + (5Cx + 5D) \cos x =$$

$$= 29x \sin x; \left. \begin{array}{l} -4A - 2D - 5B + 5C = 0, \\ -2C - 5A = 29, \\ -2B + 4C + 5A + 5D = 0, \\ -2A + 5C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C = \frac{2}{5}A, -\frac{4}{5}A - 5A = 29 \Rightarrow$$

$$A = -5, C = -2; \left. \begin{array}{l} -2D - 5B = -10, \\ 5D - 2B = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow B = -\frac{16}{29}, D = \frac{185}{29};$$

$$\underline{\underline{\bar{y} = \left(-5x - \frac{16}{29}\right) \cos x - \left(2x - \frac{185}{29}\right) \sin x.}}$$

$$7) f(x) = 100x \cdot e^{-x} \cos x.$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= e^{-x}[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x], \quad \bar{y}' = -e^{-x}[(Ax + B) \cos x + \\ &+ (Cx + D) \sin x] + e^{-x}[A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x], \\ \bar{y}'' &= e^{-x}[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x] - e^{-x}[A \cos x - (Ax + B) \sin x + \\ &+ C \sin x + (Cx + D) \cos x] + e^{-x}[-A \sin x - A \sin x - (Ax + B) \cos x + \\ &+ C \cos x + C \cos x + (Cx + D)(-\sin x)] = e^{-x}[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x] - \\ &- 2e^{-x}[A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x] + \\ &+ e^{-x}[-2A \sin x - (Ax + B) \cos x + 2C \cos x - (Cx + D) \sin x]. \end{aligned}$$

Подставляя $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в исходное дифференциальное уравнение, получим $A = -20, B = -1, C = 10, D = 18$;

$$\underline{\underline{\bar{y} = e^x[(10x + 18) \sin x - (20x + 1) \cos x].}}$$

$$8) f(x) = 3 \cdot \operatorname{ch} \frac{5}{2} x \left(\text{или } f(x) = \frac{3}{2} (e^{5x/2} + e^{-5x/2}) \right).$$

$$\bar{y} = Ae^{5x/2} + Bxe^{-5x/2}, \quad \bar{y}' = \frac{5}{2} Ae^{5x/2} - \frac{5}{2} Be^{-5x/2}x + Be^{-5x/2},$$

$$\bar{y}'' = \frac{25}{4} A e^{5x/2} - \frac{10}{2} B e^{-5x/2} + \frac{25}{4} B e^{-5x/2} x; \quad \frac{25}{2} A e^{5x/2} - 10 B e^{-5x/2} + \\ + \frac{25}{2} B e^{-5x/2} + \frac{25}{2} A e^{5x/2} - \frac{25}{2} B e^{-5x/2} x + 5 B e^{-5x/2} = \frac{3}{2} (e^{5x/2} + e^{-5x/2});$$

$$\left. \begin{aligned} 25A &= \frac{3}{2}, \\ 5B &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{3}{50}, \quad B = \frac{3}{10}; \quad \bar{y} = \frac{3}{10} \left(\frac{1}{5} e^{5x/2} - x e^{-5x/2} \right).$$

377 (4277). $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

Решение

$$y'' - 4y' + 4y = 0; \quad r^2 - 4r + 4 = 0, \quad r_{1,2} = 2; \quad y^* = e^{2x} (c_1 + c_2 x).$$

$$1) \quad f(x) = 1.$$

$$\bar{y} = A, \quad \bar{y}' = 0, \quad \bar{y}'' = 0; \quad 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}; \quad \bar{y} = \underline{\underline{e^{2x} (c_1 + c_2 x) + \frac{1}{4}}}.$$

$$2) \quad f(x) = e^{-x}.$$

$$\bar{y} = A e^{-x}, \quad \bar{y}' = -A e^{-x}, \quad \bar{y}'' = A e^{-x}; \quad A + 4A + 4A = 1 \Rightarrow 9A = 1; \quad \bar{y} = \underline{\underline{\frac{1}{9} e^{-x}}}.$$

$$3) \quad f(x) = 3e^{2x}.$$

$$\bar{y} = A x^2 e^{2x}, \quad \bar{y}' = 2A x e^{2x} + 2A x^2 e^{2x}, \quad \bar{y}'' = 8A x e^{2x} + 2A e^{2x} + 4A x^2 e^{2x};$$

$$8A x + 2A + 4A x^2 - 8A x - 8A x^2 + 4A x^2 = 3 \Rightarrow 9A = \frac{3}{2}; \quad \bar{y} = \underline{\underline{\frac{3}{2} x^2 e^{2x}}}.$$

$$4) \quad f(x) = 2(\sin 2x + x).$$

$$\bar{y} = A x + B + C \sin 2x + \cos 2x, \quad \bar{y}' = A + 2C \cos 2x - 2D \sin 2x,$$

$$\bar{y}'' = -4C \sin 2x - 4D \cos 2x; \quad -4C \sin 2x - 4D \cos 2x - 4A - 8C \cos 2x + \\ + 8D \sin 2x + 4A x + 4B + 4C \sin 2x + 4D \cos 2x = 2 \sin 2x + 2x;$$

$$\left. \begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4A + 4B = 0, \\ 4A = 2, \\ -4D - 8C + 4D = 0, \\ -4C + 8D + 4C = 2 \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = 0, D = \frac{1}{4};$$

$$\underline{\underline{\bar{y} = \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} .}}$$

$$5) f(x) = \sin x \cdot \cos 2x \left(\text{или } f(x) = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) \right).$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= A \sin 3x + B \cos 3x + C \sin x + D \cos x, \quad \bar{y}' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x + \\ &+ C \cos x - D \sin x, \quad \bar{y}'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x - C \sin x - D \cos x; \\ &-9A \sin 3x - 9B \cos 3x - C \sin x - D \cos x - 12A \cos 3x + 12B \sin 3x - \\ &-4C \cos x + 4D \sin x + 4A \sin 3x + 4B \cos 3x + 4C \sin x + 4D \cos x = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x; \quad \left. \begin{array}{l} \sin 3x \\ \cos 3x \\ \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5A + 12B = \frac{1}{2}, \\ -5B + 12A = 0, \\ 3C + 4D = -\frac{1}{2}, \\ -3D - 4C = 0 \end{array} \Rightarrow D = -\frac{2}{25}, C = -\frac{3}{50},$$

$$A = -\frac{5}{338}, B = \frac{6}{169}; \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{169} \left(-\frac{5}{2} \sin 3x + 6 \cos 3x \right) -}}$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{50}(3 \sin x + 4 \cos x) .}}$$

$$6) f(x) = \sin^3 x .$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x); \quad \bar{y} = A \sin x + B \cos x + C \sin 3x + D \cos 3x,$$

$$\bar{y}' = A \cos x - B \sin x + 3C \cos 3x + 3D \sin 3x, \quad \bar{y}'' = -A \sin x - B \cos x -$$

$$-9C \sin 3x - 9D \cos 3x; -A \sin x - B \cos x - 9C \sin 3x - 9D \cos 3x - \\ -4A \cos x + 4B \sin x - 12C \cos 3x + 12D \sin 3x + 4A \sin x + 4B \cos x +$$

$$+ 4C \sin 3x + 4D \cos 3x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x); \left. \begin{array}{l} \sin x \left| \begin{array}{l} 3A + 4B = \frac{3}{4}, \\ 3B - 4A = 0, \end{array} \right. \\ \cos x \left| \begin{array}{l} -5C + 12D = -\frac{1}{4}, \\ -5D - 12C = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$B = \frac{3}{25}, A = \frac{9}{100}, C = \frac{5}{676}, D = -\frac{12}{676} = -\frac{3}{196}; \underline{\underline{\bar{y} = \frac{3}{100}(3 \sin x + \\ + 4 \cos x) + \frac{1}{676}(5 \sin 3x - 12 \cos 3x)}}.$$

$$7) f(x) = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x).$$

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C + Dx^2e^{2x} + M \sin 2x + N \cos 2x, \bar{y}' = 2Ax + B + \\ + 2Dx^2e^{2x} + 2Dxe^{2x} + 2M \cos 2x - 2N \sin 2x, \bar{y}'' = 2A + 4Dx^2e^{2x} + \\ + 8Dxe^{2x} + 2De^{2x} + 4M \sin 2x - 4N \cos 2x; 2A + 2De^{2x} - 8Ax - 4B - \\ - 8M \cos 2x + 8N \sin 2x + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x);$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \\ e^{2x} \\ \sin 2x \\ \cos 2x \end{array} \right| \left\{ \begin{array}{l} 4A = 8, \\ -8A + 4B = 0, \\ 2A - 4B + 4C = 0, \\ 2D = 8, \\ 8N = 8, \\ -8M = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 2, B = 4, C = 3, D = 4, N = 1, M = 0;$$

$$\underline{\underline{\bar{y} = 2x^2 + 4x + 3 + 4x^2e^{2x} + \cos 2x}}.$$

$$8) f(x) = \operatorname{sh} 2x \left(\text{или } f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) \right).$$

$$\bar{y} = Ax^2 e^{2x} + Be^{-2x}, \quad \bar{y}' = 2Ae^{2x}x^2 + 8Axe^{2x} + 4Be^{-2x} + 2Ae^{2x},$$

$$\bar{y}'' = 2A + 4De^{2x} + 4Dxe^{2x} - 4M \sin 2x - 4N \cos 2x; \quad 4Ae^{2x}x^2 + 8Axe^{2x} +$$

$$+ 4Be^{-2x} + 2Ae^{2x} - 8Ax^2e^{2x} - 8Axe^{2x} + 8Be^{-2x} + 4Ax^2e^{2x} + 4Be^{-2x} =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}); \quad \left. \begin{array}{l} e^{2x} \\ e^{-2x} \end{array} \right| \begin{array}{l} 2A = \frac{1}{2}, \\ 16B = -\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{32};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4} \left(x^2 e^{2x} - \frac{1}{8} e^{-2x} \right).$$

$$9) \quad f(x) = \operatorname{sh} x + \sin x \left(\text{или } f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sin x \right).$$

$$\bar{y} = Ae^x + Be^{-x} + C \sin x + D \cos x, \quad \bar{y}' = Ae^x - Be^{-x} + C \cos x - D \sin x,$$

$$\bar{y}'' = Ae^x + Be^{-x} - C \sin x - D \cos x; \quad Ae^x + Be^{-x} - C \sin x - D \cos x -$$

$$- 4Ae^x + 4Be^{-x} - 4C \cos x + 4D \sin x + 4Ae^x + 4Be^{-x} = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x});$$

$$\left. \begin{array}{l} e^x \\ e^{-x} \\ \sin x \\ \cos x \end{array} \right| \begin{array}{l} A = \frac{1}{2}, \\ B = -\frac{1}{2}, \\ 3C + 4D = 1, \\ 3D - 4C = 0 \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{18}, \quad C = \frac{3}{25}, \quad D = \frac{4}{25}; \quad \bar{y} = \frac{1}{2} \left(e^x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{9} e^{-x} \right) + \frac{1}{25} (3 \sin x + 4 \cos x).$$

$$10) \quad f(x) = e^x - \operatorname{sh}(x-1) \left(\text{или } f(x) = e^x - \frac{1}{2}(e^{x-1} - e^{-x+1}) \right).$$

$$\bar{y} = Ae^x + Be^{x-1} + Ce^{-x+1}, \quad \bar{y}' = Ae^x + Be^{x-1} - Ce^{-x+1}, \quad \bar{y}'' = Be^{x-1} + Ce^{-x+1} + Ae^x;$$

$$Ae^x + Be^{x-1} + Ce^{-x+1} - 4Ae^x - 4Be^{x-1} + 4Ce^{-x+1} +$$

$$+ 4Ae^x + 4Be^{x-1} + 4Ce^{-x+1} = e^x - \frac{1}{2}(e^{x-1} - e^{-x+1}); \quad \left. \begin{array}{l} e^x \\ e^{x-1} \\ e^{-x+1} \end{array} \right| \begin{array}{l} A=1, \\ B=-\frac{1}{2}, \\ 9C=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{18}; \quad \underline{\underline{\bar{y} = e^x - \frac{1}{2}e^{x-1} + \frac{1}{18}e^{-x+1}}}.$$

378 (4278). $y'' + y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

Решение

$$y'' + y = 0; \quad r^2 + 1 = 0, \quad r_{1,2} = \pm i; \quad y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

$$1) \quad f(x) = 2x^3 - x + 2.$$

$$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \quad \bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B;$$

$$6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 2x^3 - x + 2; \quad \left. \begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} A=2, \\ B=0, \\ 6A+C=-1, \\ D+2B=2 \end{array} \right\} \Rightarrow A=2,$$

$$B=0, \quad C=-13, \quad D=2; \quad \underline{\underline{\bar{y} = 2x^3 - 13x + 2}}.$$

$$2) \quad f(x) = -8 \cos 3x.$$

$$\bar{y} = A \cos 3x + B \sin 3x, \quad \bar{y}' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x, \quad \bar{y}'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x;$$

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x + A \cos 3x + B \sin 3x = -8 \cos 3x;$$

$$\left. \begin{array}{l} -8A = -8, \\ -8B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A=1, \quad B=0; \quad \underline{\underline{\bar{y} = \cos 3x}}.$$

$$3) \quad f(x) = \cos x.$$

$$\bar{y} = (A \cos x + B \sin x) x, \quad \bar{y}' = A \cos x + B \sin x + (-A \sin x + B \cos x) x,$$

$$\bar{y}'' = (-A \sin x + B \cos x) \cdot 2 + (-A \cos x - B \sin x) x; 2(-A \sin x + B \cos x) - (-A \cos x + B \sin x) x + (A \cos x + B \sin x) x = \cos x \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{2};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} x \sin x.$$

$$4) f(x) = \sin x - 2e^{-x}.$$

$$\bar{y} = (A \sin x + B \cos x) x + Ce^{-x}, \bar{y}' = A \sin x + B \cos x + (A \cos x - B \sin x) x - Ce^{-x}, \bar{y}'' = 2(A \cos x - B \sin x) + (A \sin x - B \cos x) x + Ce^{-x};$$

$$2(A \cos x - B \sin x) + (-A \cos x - B \cos x)x + Ce^{-x} + (A \cos x + B \cos x)x +$$

$$+ Ce^{-x} = \sin x - 2e^{-x}; \left. \begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \\ e^{-x} \end{array} \right| \begin{array}{l} 2A = 0, \\ -B = 1, \\ 2C = -2 \end{array} \Rightarrow A = 0, B = -\frac{1}{2}, C = -1;$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2} x \cos x - e^{-x}.$$

$$5) f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \left(\text{или } f(x) = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) \right).$$

$$\bar{y} = (A \cos 3x + B \sin 3x + (C \cos x + D \sin x) x, \bar{y}' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x + C \cos x + D \sin x + (-C \sin x + D \cos x) x, \bar{y}'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x +$$

$$+ 2(-C \sin x + D \cos x) + (-C \cos x - D \sin x) x; -9A \cos 3x - 9B \sin 3x +$$

$$+ 2(-C \sin x + D \cos x) - (C \cos x + D \sin x) x + A \cos 3x + B \sin 3x + (C \cos x +$$

$$+ D \sin x) x = \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x; \left. \begin{array}{l} \cos 3x \\ \sin 3x \\ \sin x \\ \cos x \end{array} \right| \begin{array}{l} -8A = \frac{1}{2}, \\ -8B = 0, \\ -2C = 0, \\ 2D = \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow A = -\frac{1}{16}, B = 0,$$

$$C = 0, D = \frac{1}{4}; \bar{y} = \frac{1}{4} \left(x \sin x - \frac{1}{4} \cos 3x \right).$$

$$6) f(x) = 24 \sin^4 x \left(\text{или } f(x) = 24 (\sin^2 x)^2 \right).$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 24 (\sin^2 x)^2 = 6 (1 - \cos 2x)^2 = 6 \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \\ &= 9 - 12 \cos 2x + 3 \cos 4x; \quad \bar{y} = A + B \cos 2x + C \sin 2x + D \cos 4x + L \sin 4x, \\ \bar{y}' &= -2B \sin 2x - 2C \cos 2x - 4D \sin 4x - 4L \cos 4x, \quad \bar{y}'' = -4B \cos 2x - \\ &- 4C \sin 2x - 16D \cos 4x - 16L \sin 4x; \quad -4B \cos 2x - 4C \sin 2x - 16D \cos 4x - \\ &- 16L \sin 4x + A + B \cos 2x + C \sin 2x + D \cos 4x + L \sin 4x = 9 - 12 \cos 2x + \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 9, \\ -3B &= -12, \\ +3 \cos 4x; -3C &= 0, \\ -15D &= 3, \\ -15L &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 9, B = 4, C = 0, D = -0,2, L = 0;$$

$$\underline{\underline{\bar{y} = 9 + 4 \cos 2x - 0,2 \cos 4x.}}$$

$$7) f(x) = \operatorname{ch} x \left(\text{или } f(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right).$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= Ae^x + Be^{-x}, \quad \bar{y}' = Ae^x - Be^{-x}, \quad \bar{y}'' = Ae^x + Be^{-x}; \quad Ae^x + Be^{-x} + Ae^x + \\ &+ Be^{-x} \Rightarrow \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}; \quad \bar{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = 0,5 \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

379 (4279). $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

Решение

$$5y'' - 6y' + 5y = 0; \quad 5r^2 - 6r + 5 = 0, \quad r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 25}}{5} = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i;$$

$$y^* = e^{3x/5} \left(c_1 \cos \frac{4}{5}x + c_2 \sin \frac{4}{5}x \right).$$

$$1) f(x) = 5e^{3x/5}.$$

$$\bar{y} = Ae^{3x/5}, \bar{y}' = \frac{3}{5}Ae^{3x/5}, \bar{y}'' = \frac{9}{25}Ae^{3x/5}; \frac{9}{5}A - \frac{18}{5}A + 5A = 5 \Rightarrow A = \frac{25}{16};$$

$$\bar{y} = \frac{25}{16}e^{3x/5}.$$

$$2) f(x) = \sin \frac{4}{5}x.$$

$$\bar{y} = A \sin \frac{4}{5}x + B \cos \frac{4}{5}x, \bar{y}' = \frac{4}{5}A \cos \frac{4}{5}x - \frac{4}{5}B \sin \frac{4}{5}x, \bar{y}'' = -\frac{16}{25}A \sin \frac{4}{5}x -$$

$$-\frac{16}{25}B \cos \frac{4}{5}x; -\frac{16}{5}A \sin \frac{4}{5}x - \frac{16}{5}B \cos \frac{4}{5}x - \frac{24}{5}A \cos \frac{4}{5}x + \frac{24}{5}B \sin \frac{4}{5}x +$$

$$+ 5A \sin \frac{4}{5}x + 5B \cos \frac{4}{5}x = \sin \frac{4}{5}x; \left. \begin{array}{l} \sin \frac{4}{5}x \left| \begin{array}{l} \frac{9}{5}A + \frac{24}{5}B = 1, \\ \frac{9}{5}B - \frac{24}{5}A = 0 \end{array} \right. \\ \cos \frac{4}{5}x \end{array} \right\} \Rightarrow A =$$

$$= \frac{15}{219} = \frac{5}{73}, B = \frac{40}{219}; \bar{y} = \frac{15}{219} \sin \frac{4}{5}x + \frac{40}{219} \cos \frac{4}{5}x.$$

$$3) f(x) = e^{2x} + 2x^3 - x + 2.$$

$$\bar{y} = Ae^{2x} + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E, \bar{y}' = 2Ae^{2x} + 3Bx^2 + 2Cx + D,$$

$$\bar{y}'' = 4Ae^{2x} + 6Bx + 2C; 20Ae^{2x} + 30Bx + 10C - 12Ae^{2x} - 18Bx^2 -$$

$$- 12Cx - 6D + 5Ae^{2x} + 5Bx^3 + 5Cx^2 + 5Dx + 5E = e^{2x} + 2x^3 - x + 2;$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{2x} \\ x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 13A = 1, \\ 5B = 2, \\ -18B + 5C = 0, \\ 30B - 12C + 5D = -1, \\ -6D + 5E = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{13}, B = \frac{2}{5}, C = \frac{36}{25}, D = \frac{107}{125},$$

$$E = -\frac{908}{125 \cdot 5}; \bar{y} = \frac{1}{13}e^{2x} + \frac{1}{5} \left(2x^3 + \frac{36}{5}x^2 + \frac{107}{25}x - \frac{908}{125} \right).$$

$$4) f(x) = e^{3x/5} \cos x.$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= e^{3x/5} (B \cos x + C \sin x), \quad \bar{y}' = \frac{3}{5} e^{3x/5} (B \cos x + C \sin x) + \\ &+ e^{3x/5} (-B \sin x - C \cos x), \quad \bar{y}'' = \frac{6}{5} e^{3x/5} (-B \sin x - C \cos x) + \\ &+ \frac{9}{25} e^{3x/5} (B \cos x + C \sin x) + e^{3x/5} (-B \cos x + C \sin x); \quad 6e^{3x/5} (-B \sin x - \\ &- C \cos x) + \frac{9}{5} e^{3x/5} (B \cos x + C \sin x) + 5e^{3x/5} (-B \cos x + C \sin x) - \\ &- \frac{18}{5} e^{3x/5} (B \cos x + C \sin x) - 6e^{3x/5} (-B \sin x - C \cos x) + 5e^{3x/5} (B \cos x + \\ &+ C \sin x) = e^{3x/5} \cos x; \quad \left. \begin{array}{l} e^{3x/5} \cos x \left| -\frac{9}{5} B = 1, \right. \\ e^{3x/5} \sin x \left| -\frac{41}{5} C = 0 \right. \end{array} \right\} \Rightarrow B = -\frac{5}{9}, \quad C = 0; \end{aligned}$$

$$\bar{y} = -\frac{5}{9} e^{3x/5} \cos x.$$

$$5) f(x) = e^{3x/5} \sin \frac{4}{5} x.$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= e^{3x/5} \left(A \cos \frac{4}{5} x + B \sin \frac{4}{5} x \right) x, \quad \bar{y}' = \frac{3}{5} e^{3x/5} \left(A \cos \frac{4}{5} x + B \sin \frac{4}{5} x \right) x + \\ &+ e^{3x/5} \left(A \cos \frac{4}{5} x + B \sin \frac{4}{5} x \right) + e^{3x/5} \left(-\frac{4}{5} A \sin \frac{4}{5} x + \frac{4}{5} B \cos \frac{4}{5} x \right) x, \\ \bar{y}'' &= \frac{9}{25} e^{3x/5} \left(A \cos \frac{4}{5} x + B \sin \frac{4}{5} x \right) x + \frac{3}{5} e^{3x/5} \left(-\frac{4}{5} A \sin \frac{4}{5} x + \right. \\ &+ \left. \frac{4}{5} B \cos \frac{4}{5} x \right) x + \frac{3}{5} e^{3x/5} \left(A \cos \frac{4}{5} x + B \sin \frac{4}{5} x \right) + \frac{3}{5} e^{3x/5}; \quad \left(A \cos \frac{4}{5} x + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + B \sin \frac{4}{5} x \Big) + e^{3x/5} \left(-\frac{4}{5} A \sin \frac{4}{5} x + \frac{4}{5} B \cos \frac{4}{5} x \right) x + \frac{3}{5} e^{3x/5} \left(-\frac{4}{5} A \sin \frac{4}{5} x + \right. \\
 & \left. + \frac{4}{5} B \cos \frac{4}{5} x \right) x + e^{3x/5} \left(-\frac{16}{25} A \cos \frac{4}{5} x - \frac{16}{25} B \sin \frac{4}{5} x \right) x + \\
 & + e^{3x/5} \left(-\frac{4}{5} A \sin \frac{4}{5} x + \frac{4}{5} B \cos \frac{4}{5} x \right) = \frac{9}{25} e^{3x/5} \left(A \cos \frac{4}{5} x + B \sin \frac{4}{5} x \right) + \\
 & + \frac{11}{5} e^{3x/5} \left(-\frac{4}{5} A \sin \frac{4}{5} x + \frac{4}{5} B \cos \frac{4}{5} x \right) x + \frac{6}{5} e^{3x/5} \left(A \cos \frac{4}{5} x + B \sin \frac{4}{5} x \right) + \\
 & + e^{3x/5} \left(-\frac{16}{25} A \cos \frac{4}{5} x - \frac{16}{25} B \sin \frac{4}{5} x \right) + e^{3x/5} \left(-\frac{4}{5} A \sin \frac{4}{5} x + \frac{4}{5} B \cos \frac{4}{5} x \right).
 \end{aligned}$$

Подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}''$ и $\bar{y}'''$ в исходное дифференциальное уравнение, получим $A = -\frac{1}{8}$, $B = 0$; $\bar{y} = -\frac{1}{8} x e^{3x/5} \cos x$.

$$\begin{aligned}
 6) \quad f(x) &= 13e^x \operatorname{ch} x \quad \left(\text{или} \quad f(x) = 13e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{13}{2} (e^{2x} + 1) = \right. \\
 &= \left. \frac{13}{2} e^{2x} + \frac{13}{2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= Ae^{2x} + B, \quad \bar{y}' = 2Ae^{2x}, \quad \bar{y}'' = 4Ae^{2x}; \quad 20Ae^{2x} - 12Ae^{2x} + 5Ae^{2x} + \\
 + 5B &= \frac{13}{2} e^{2x} + \frac{13}{2} \Rightarrow A = 0,5, \quad B = 1,3; \quad \underline{\underline{\bar{y} = 0,5e^{2x} + 1,3.}}
 \end{aligned}$$

380 (4280). $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

Решение

$y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0 \Rightarrow y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$; $y'' + y = 0$; $r^2 + 1 = 0$, $r_{1,2} = \pm i$;
 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ – частные решения однородного дифференциального уравнения.

Ищем общее решение неоднородного дифференциального уравнения в виде $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$.

Метод вариации произвольных постоянных дает следующую систему для определения $c_1(x)$ и $c_2(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0, \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = -\operatorname{ctg}^2 x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ -\operatorname{ctg}^2 x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{\cos^2 x}{\sin x};$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & -\operatorname{ctg}^2 x \end{vmatrix} = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}; \quad c_1'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}; \quad c_2'(x) = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x};$$

$$c_1(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx + c_1 = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx + c_1 = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x dx + c_1 =$$

$$= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + c_1; \quad c_2(x) = -\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx + c_2 = -\int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} d(\sin x) +$$

$$+ c_2 = \frac{1}{\sin x} + \sin x + c_2; \quad y = \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos^2 x + c_1 \cos x + 1 + \sin^2 x +$$

$$+ c_2 \sin x.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2 + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \cos x.$$

381 (4281). $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$

Решение

$$y'' - 2y' + y = 0; \quad r^2 - 2r + 1 = 0, \quad r_{1,2} = 1; \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x; \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

Аналогично задаче 380 (4280) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0, \\ c_1' e^x + c_2' (e^x + x e^x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}; \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x (1+x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2x} (1+x) - x e^{2x} = e^{2x}; \Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ x^2 + 1 & e^x (1+x) \end{vmatrix} = -\frac{x e^{2x}}{x^2 + 1};$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2 + 1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}; c_1'(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}; c_2'(x) = \frac{1}{x^2 + 1};$$

$$c_1(x) = -\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c_1; c_2(x) = \arctg x + c_2; y = c_1(x) y_1 +$$

$$+ c_2(x) y_2 = -\frac{e^x}{2} \ln(x^2 + 1) + c_1 e^x + x e^x \arctg x + c_2 x e^x; y = e^x \left(c_1 + c_2 x - \right.$$

$$\left. - \ln \sqrt{x^2 + 1} + x \arctg x \right).$$

382 (4282). $y'' - y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:

$$1) f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

$$y'' - y' = 0; r^2 - r = 0, r_1 = 0, r_2 = 1.$$

Решение

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y^* = c_0 + c_1 e^x.$$

Частное решение ищем по общей формуле [2]

$$\bar{y}(x) = \int_0^x \psi(x-t) f(t) dt,$$

где $\psi(x)$ – частное решение соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющего условиям $\psi(0) = 0$; $\psi'(0) = 1$.

В качестве такой функции возьмем $\psi(x) = e^x - 1$. Тогда

$$\bar{y}(x) = \int_0^x (e^{x-t} - 1) \frac{e^t}{1+e^t} dt = e^x \int_0^x \frac{dt}{1+e^t} - \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt.$$

Первый интеграл последнего уравнения берем подстановкой:

$$1 + e^t = z \Rightarrow t = \ln(z - 1), \quad dt = \frac{dz}{z - 1}.$$

t	z
0	2
x	$1 + e^x$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= e^x \int_2^{1+e^x} \frac{dz}{(z-1)z} - \int_0^x \frac{d(1+e^t)}{1+e^t} = e^x \ln \frac{z-1}{z} \Big|_2^{1+e^x} - \ln(e^t + 1) \Big|_0^x = \\ &= e^x \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) + \ln 2 = xe^x - e^x \ln(e^x + 1) - \ln(e^x + 1) + \ln 2 = \\ &= xe^x - (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + 1 + e^x \cdot 2; \quad y = y^* + \bar{y} = \underline{\underline{e^x(x + c_1) - (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + c_2}}, \text{ где } c_2 = c_0 + \ln 2. \end{aligned}$$

$$2) \quad f(x) = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \int_0^x (e^{x-t} - 1) e^{2t} \sqrt{1 - e^{2t}} dt = \int_0^x e^{x+t} \sqrt{1 - e^{2t}} dt - \int_0^x e^{2t} \sqrt{1 - e^{2t}} dt = \\ &= e^x \left[\int_0^x e^t \sqrt{1 - e^{2t}} dt + \frac{1}{2} \int_0^x (1 - e^{2t})^{1/2} d(1 - e^{2t}) \right]. \end{aligned}$$

Первый интеграл выражения в скобках берем подстановкой:

$$e^t = z \Rightarrow t = \ln z, \quad dt = \frac{dz}{z}.$$

t	z
0	1
x	e^x

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= e^x \left[\int_1^{e^x} \sqrt{1-z^2} dz + \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-e^{2t})^3} \Big|_1^x \right] = \frac{e^x}{2} \left[z\sqrt{1-z^2} + \arcsin z \right]_1^{e^x} + \\ &+ \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-e^{2x})^3} \Big|_1^x = \frac{e^x}{2} \left[e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x \right] - \frac{e^x}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-e^{2x})^3} - \\ &- \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-e^2)^3}; \quad y = y^* + \bar{y} = \frac{e^x}{2} \left[e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x + \underbrace{2c_1 - \frac{\pi}{2}}_{\text{новое } c_1} \right] + \\ &+ \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-e^{2x})^3} + \left(c_0 - \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-e^2)^3} \right) \text{ или } y = \frac{e^x}{2} \left[e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x + \right. \\ &\left. + c_1 \right] + \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-e^{2x})^3} + c_2. \end{aligned}$$

$$3) f(x) = e^{2x} \cos e^x.$$

$$\bar{y}(x) = \int_0^x (e^{x-t} - 1) e^{2t} \cos e^t dt = e^x \int_0^x e^t \cos e^t dt - \int_0^x e^{2t} \cos e^t dt; \quad e^t = z \Rightarrow$$

$$t = \ln z, \quad dt = \frac{dz}{z}.$$

t	z
0	1
x	e^x

$$\text{Тогда } \bar{y}(x) = e^x \int_1^{e^x} \cos z dz - \underbrace{\int_1^e z \cos z dz}_\text{берем по частям} = \left[e^x \sin z - z \sin z - \cos z \right]_1^{e^x} =$$

$$= \cancel{e^x \sin e^x} - \cancel{e^x \sin e^x} - \cos e^x - e^x \sin 1 + \sin 1 + \cos 1; \quad y = y^* + \bar{y} = c_1 e^x -$$

$$-e^x \sin 1 + \sin 1 + \cos 1 + c_0 = \underbrace{(c_1 - \sin 1) e^x}_{\text{новое } c_1} - \cos e^x + \underbrace{(c_0 + \sin 1 + \cos 1)}_{\text{новое } c_2};$$

$$y = c_1 e^x - \cos e^x + c_2.$$

Примечание. Можно решить пример и методом вариации произвольных постоянных.

$$1) \begin{cases} c_1' + c_2' e^x = 0 \\ c_2' e^x = \frac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \Rightarrow c_1' = \frac{e^x}{1+e^x}, c_2' = \frac{1}{1+e^x}; c_1(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx =$$

$$= \ln(1+e^x) + c_1, c_2(x) = \int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + c_2; y = \underline{\underline{(e^x + 1) \ln(1+e^x) +$$

$$+ e^x(c_1 + x) + c_2.}}$$

$$2) \begin{cases} c_1' + c_2' e^x = 0, \\ c_2' e^x = e^{2x} \sqrt{1-e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow c_1' = -e^{2x} \sqrt{1-e^{2x}}, c_2' = e^x \sqrt{1-e^{2x}};$$

$$c_1(x) = -\int e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(1-e^{2x})^3} + c_1, c_2(x) = \int e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin e^x + \frac{1}{2} e^x \sqrt{1-e^{2x}} + c_2; y = \underline{\underline{\frac{e^x}{2} \left[e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x + c_1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{3} \sqrt{(1-e^{2x})^3} + c_2.}}$$

$$3) \begin{cases} c_1' + c_2' e^x = 0, \\ c_2' e^x = e^{2x} \cos e^x \end{cases} \Rightarrow c_1' = -e^{2x} \cos e^x, c_2' = e^x \cos e^x;$$

$$c_1(x) = -\int e^{2x} \cos e^x dx = -e^x \sin e^x - \cos e^x + c_1, c_2(x) = \int e^x \cos e^x dx =$$

$$= \sin e^x + c_2; y = \underline{\underline{c_1 e^x - \cos e^x + c_2.}}$$

В задачах 383 (4283)–387 (4287) найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

383 (4283). $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2}$; $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = -5,5$.

Решение

$$4r^2 + 16r + 15 = 0; r_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{4} = \frac{-8 \pm 2}{4} = -2 \pm \frac{1}{2}, r_1 = -\frac{3}{2},$$

$$r_2 = -\frac{5}{2}; y^* = c_1 e^{-3x/2} + c_2 e^{-5x/2}; \bar{y} = A x e^{-3x/2}; \bar{y}' = A e^{-3x/2} -$$

$$-\frac{3}{2} A x e^{-3x/2}; \bar{y}'' = -3A e^{-3x/2} + \frac{9}{4} A x e^{-3x/2}; \cancel{9Ax} - 12A + 16A - \cancel{24Ax} +$$

$$+ \cancel{15Ax} = 4 \Rightarrow A = 1; \bar{y} = y^* + \bar{y} = c_1 e^{-3x/2} + c_2 e^{-5x/2} + x e^{-3x/2};$$

$$y' = -\frac{3}{2} c_1 e^{-3x/2} - \frac{5}{2} c_2 e^{-5x/2} - \frac{3}{2} x e^{-3x/2} + e^{-3x/2};$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3, \\ -\frac{3}{2} c_1 - \frac{5}{2} c_2 + 1 = -5,5 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 2; \underline{\underline{y = (1+x)e^{-3x/2} + 2e^{-5x/2}}}.$$

384 (4284). $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3,2$.

Решение

$$r^2 - 2r + 10 = 0; r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i; y^* = e^x (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x);$$

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C, \bar{y}' = 2Ax + B, \bar{y}'' = 2A; 2A - 4Ax - 2B + 10Ax^2 +$$

$$+ 10Bx + 10C = 10x^2 + 18x + 6 \Rightarrow \begin{cases} 10A = 10, \\ -4A + 10B = 18, \\ 2A - 2B + 10C = 6 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = 2,2,$$

$$C = 0,84; y = e^x (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84; y' = e^x (c_1 \cos 3x +$$

$$+ c_2 \sin 3x) + 3e^x (-c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + 2x + 2,2;$$

$$\begin{cases} c_1 + 0,84 = 1, \\ c_1 + 3c_2 + 2,2 = 3,2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 0,16; c_2 = 0,28.$$

Частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$\underline{y = e^x (0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84}.$$

385 (4285). $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

Решение

$$r^2 - r = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1; \quad \bar{y} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx, \quad \bar{y}' = 2Ax + B,$$

$$\bar{y}'' = 2A; \quad 2A - 2Ax - B = 2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} -2A = -2, \\ 2A - B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 1, \quad B = 0;$$

$$y = c_1 + c_2 e^x + x^2, \quad y' = c_2 e^x + 2x; \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1, \quad c_1 = 0;$$

$y = e^x + x^2$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

386 (4286). $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 2$.

Решение

$$r^2 - 2r = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 2; \quad y^* = c_1 + c_2 e^{2x}, \quad \bar{y} = e^x(Ax^2 + Bx + C),$$

$$\bar{y}' = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B), \quad \bar{y}'' = 2e^x(2Ax + B) + e^x(Ax^2 + Bx + C) + 2Ae^x$$

$$- 2e^x(2Ax + B) = e^x(x^2 + x - 3); \quad \begin{cases} -A = 1, \\ -B = 1, \\ 2A - C = -3 \end{cases} \Rightarrow A = -1,$$

$$B = -1, \quad C = 1; \quad y = c_1 + c_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1), \quad y' = 2c_2 e^{2x} +$$

$$+ e^x (-x^2 - x + 1) + e^x (-2x - 1); \begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 2, \\ 2c_2 + 1 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1, c_1 = 0;$$

$y = e^x (e^x - x^2 - x + 1)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

387 (4287) $y'' + y + \sin 2x = 0$; $y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1$.

Решение

$$r^2 + 1 = 0, r_{1,2} = \pm i; y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x,$$

$$\bar{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \bar{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x; -4A \cos 2x -$$

$$-4B \sin 2x + A \cos 2x + B \sin 2x = -\sin 2x; \left. \begin{array}{l} \cos 2x \left| -3A = 0, \right. \\ \sin 2x \left| -3B = -1 \right. \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0,$$

$$B = \frac{1}{3}; \bar{y} = \frac{1}{3} \sin 2x, y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x, y' = -c_1 \sin x +$$

$$+ c_2 \cos x + \frac{2}{3} \cos 2x; \begin{cases} -c_1 = 1, \\ -c_2 + \frac{2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = -\frac{1}{3};$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3} \sin 2x - \cos x - \frac{1}{3} \sin x.}}$$

388 (4288). Показать, что частное решение $\bar{y}$ уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = A e^{px}$ (a_0, a_1, a_2 – постоянные коэффициенты; p, A – действительные или комплексные числа) имеет вид $\bar{y} = \frac{A}{\varphi(p)} e^{px}$, если p не является корнем

характеристического уравнения $\varphi(r) \equiv a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$; $\bar{y} = \frac{Ax}{\varphi'(p)} e^{px}$,

если p – простой корень характеристического уравнения; $\bar{y} = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)} e^{px}$,

если p – двойной корень характеристического уравнения.

Решение

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$. Обозначим через $\varphi(r) = a_0 r^2 + a_1 r + a_2$. Найдем: $\varphi'(r) = 2a_0 r + a_1$; $\varphi''(r) = 2a_0$. Ищем частное решение дифференциального уравнения

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = A e^{px} \quad (1)$$

для случаев:

а) p не является корнем характеристического уравнения. Пусть $\bar{y} = c e^{px}$, $\bar{y}' = c p e^{px}$, $\bar{y}'' = c p^2 e^{px}$. Подставим $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в (1): $c(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) = A$ или $c\varphi(p) = A \Rightarrow C = \frac{A}{\varphi(p)} \Rightarrow \bar{y} = \frac{A}{\varphi(p)} e^{px}$;

б) p – простой корень характеристического уравнения. Ищем $\bar{y} = c x e^{px}$, $\bar{y}' = c e^{px} + c p x e^{px}$, $\bar{y}'' = 2c p e^{px} + c p^2 x e^{px}$.

Подставим $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в (1):

$$c \left[\underbrace{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)}_{=0} x + \underbrace{(2a_0 p + a_1)}_{\varphi'(p)} \right] = A \Rightarrow c = \frac{A}{\varphi'(p)} \text{ и } \bar{y} = \frac{Ax}{\varphi'(p)} e^{px};$$

в) p – двойной корень характеристического уравнения. Ищем $\bar{y} = c x^2 e^{px}$; $\bar{y}' = 2c x e^{px} + c x^2 p e^{px}$; $\bar{y}'' = 4c x e^{px} p + 2c e^{px} + c x^2 p^2 e^{px}$.

Подставим $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в (1):

$$c \left[\underbrace{(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)}_{=0} x^2 + 2a_0 \underbrace{\left(2p + \frac{a_1}{a_0}\right)}_{=0} x + 2a_0 \right] = A \Rightarrow c = \frac{A}{2a_0} = \frac{A}{\varphi''(p)};$$

$$\bar{y} = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)} e^{px}.$$

В задачах 389 (4289)–392 (4292) найти общее решение уравнений Эйлера.

389 (4289). $x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0$.

Решение

Положим $y = x^r \Rightarrow y' = rx^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2}$; $r(r-1)x^r - 9rx^r + 21x^r = 0$; $x^r(r^2 - 10r + 21) = 0$; $r^2 - 10r + 21 = 0$; $r_1 = 7$, $r_2 = 3$; $y_1 = x^7$, $y_2 = x^3$; $y = x^3(c_1 + c_2 x^4)$.

390 (4290). $x^2 y'' + xy' + y = x$.

Решение

Положим $x = e^t \Rightarrow t = \ln|x|$. Тогда $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$;

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

Подставляем значения x , y , y' , y'' в исходное дифференциальное уравнение:

$$e^{2t} e^{-2t} (y_t'' - y_t') + e^t e^{-t} y_t' + y = e^t \Rightarrow y'' + y = e^t.$$

Характеристическое уравнение: $r^2 + 1 = 0$, $r_{1,2} = \pm i$; $y^* = c_1 \cos t + c_2 \sin t$; $\bar{y} = Ae^t$, $\bar{y}' = Ae^t$, $\bar{y}'' = Ae^t \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

Итак, $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} e^t = c_1 \cos \ln|x| + c_2 \sin \ln|x| + \frac{1}{2} x$.

391 (4291). $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Решение

$$x^2 y'' - y'x + y = 2x.$$

Положим $x = e^t$. Тогда (см. задачу 390 (4290)) $y'_x = e^{-t} y'_t$,
 $y''_x = e^{-2t} (y''_t - y'_t)$; $e^{-2t} e^{2t} (y''_t - y'_t) - e^t e^{-t} y'_t + y = 2e^t \Rightarrow y'' - 2y' + y = 2e^t$;
 $r^2 - 2r + 1 = 0$; $r_{1,2} = 1$; $y = (c_1 + c_2 t) e^t$, $\bar{y} = Ae^t t^2$, $\bar{y}' = At^2 e^t + 2At e^t$,
 $\bar{y}'' = 4Ate^t + At^2 e^t + 2Ae^t$; $4At + At^2 + 2A - 2At^2 - 4At + At^2 = 2 \Rightarrow A = 1$;
 $y = (c_1 + c_2 t) e^t + e^t t^2 = (c_1 + c_2 \ln |x|) x + x \ln^2 |x|$ или $y = x \left[\underline{\underline{c_1 + c_2 \ln |x| + \ln^2 |x|}} \right]$.

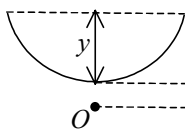
392 (4292). $x^2 y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$.

Решение

Положим $x = e^t$, $y'_x = e^{-t} y'_t$, $y''_x = e^{-2t} (y''_t - y'_t)$; $y''_t - y'_t - 2y'_t + 2y = 2e^{3t} - e^t \Rightarrow y''_t - 3y'_t + 2y = 2e^{3t} - e^t$.

Характеристическое уравнение: $r^2 - 3r + 2 = 0$; $r_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$; $r_1 = 2$, $r_2 = 1$; $y^* = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$, $\bar{y} = Ae^{3t} + Bte^t$, $\bar{y}' = 3Ae^{3t} + Be^t + Bte^t$, $\bar{y}'' = 9Ae^{3t} + 2Be^t + Bte^t$; $9Ae^{3t} + 2Be^t + Bte^t - 3(3Ae^{3t} + Be^t + Bte^t) + 2Ae^{3t} + 2Bte^t = 2e^{3t} - e^t \Rightarrow A = 1$, $B = 1$; $y = \underline{\underline{c_1 e^{2t} + c_2 e^t + e^{3t} + te^t}} = c_1 x^2 + c_2 x + x^3 + x \ln |x|$.

393 (4293). Если ось вала турбины расположена горизонтально и если центр тяжести диска, насаженного на вал, не лежит на оси, то прогиб y оси вала (см. рисунок) при его вращении удовлетворяет уравнению



$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) y = g \cos \omega t + \omega^2 e$, где m — масса диска; α — постоянное число, зависящее от рода закрепления концов A и B ; ω — угло-

вая скорость вращения; e – эксцентриситет центра тяжести диска. Найти общий интеграл этого уравнения.

Решение

Случай 1. Характеристическое уравнение

$$k^2 + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) = 0 \Rightarrow k = \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{m\alpha}}.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения при $\omega^2 > \frac{1}{m\alpha}$ имеет вид $y^* = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$, где $k^2 = \omega^2 - \frac{1}{m\alpha}$.

Частное решение ищем в виде:

$$\bar{y} = A + B \cos \omega t + C \sin \omega t, \quad \bar{y}' = -B\omega \sin \omega t + C\omega \cos \omega t,$$

$$\bar{y}'' = -B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t; \quad -B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t + \frac{A}{m\alpha} -$$

$$-A\omega^2 + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) B \cos \omega t + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) C \sin \omega t = g \cos \omega t + \omega^2 e;$$

$$\left. \begin{aligned} -B\omega^2 + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) B &= g, \\ -C\omega^2 + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) C &= 0, \\ A \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2 \right) &= \omega^2 e \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = -\frac{g}{\omega^2 + k^2}, \quad C = 0, \quad A = -\frac{\omega^2 e}{k^2};$$

$$y = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} - \frac{\omega^2 e}{k^2} - \frac{g}{\omega^2 + k^2} \cos \omega t.$$

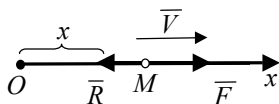
Случай 2. $\omega^2 < \frac{1}{m\alpha}$. Тогда $k_{1,2} = \pm ki$, $k^2 = \frac{1}{m\alpha} - \omega^2$.

Общее решение однородного уравнения $y^* = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$;

$$A = \frac{\omega^2 R}{k^2}, \quad B = \frac{g}{k^2 - \omega^2}, \quad C = 0; \quad y = c_1 \cos k t + c_2 \sin k t + \frac{g}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{\omega^2 e}{k^2}.$$

394 (4294). Материальная точка массы 1 г отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной ее расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности равен 4). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 1 см, а скорость – нулю. Найти закон движения.

Решение



$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ г}, \quad V|_{t=0} = 0, \\ k &= 4, \quad x|_{t=0} = 0. \\ k_1 &= 3, \end{aligned}$$

По второму закону Ньютона

$$\begin{aligned} m\bar{w} &= \bar{F} + \bar{R}, & \bar{F} &= k\overline{OM} \quad (k > 0), \\ mw_x &= F_x + R_x, & F_x &= kx = 4x, \\ m\ddot{x} &= 4x - 3\dot{x}, & \bar{R} &= -k_1\bar{V}, \\ \ddot{x} + 3\dot{x} - 4x &= 0. & R_x &= -k_1V_x = -3\dot{x}. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение: $r^2 + 3r - 4 = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = -4$;

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1 e^t + c_2 e^{-4t}, \\ \dot{x} &= c_1 e^t - 4c_2 e^{-4t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ c_1 - 4c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = \frac{4}{5}, \quad c_2 = \frac{1}{5}; \quad x = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t}).$$

395 (4295). Частица массы 1 г движется по прямой к точке A под действием некоторой силы притяжения, пропорциональной расстоянию ее от точки A . На расстоянии 1 см действует сила 10^{-6} Н. Сопротивление среды пропорционально скорости движения и равно $4 \cdot 10^{-6}$ Н при скорости 1 см/с. В момент $t = 0$ частица расположена на расстоянии 10 см от

точки A и скорость равна нулю. Найти зависимость расстояния от времени и вычислить это расстояние для $t = 3$ с (с точностью до 0,01 см).

Решение

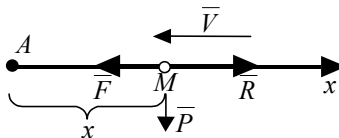
$$m = 1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг},$$

$$F|_{x=0,01 \text{ м}} = 10^{-6} \text{ Н},$$

$$R|_{v=0,01 \text{ м/с}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Н},$$

$$x|_{t=0} = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м},$$

$$v|_{t=0} = 0.$$



По второму закону Ньютона

$$\left. \begin{aligned} m\bar{W} &= \bar{F} + \bar{R} + \bar{P}, & \bar{F} &= -k\bar{AM} \quad (k > 0), \quad F_x = -kx; \\ mW_x &= F_x + R_x + P_x, & \bar{R} &= -k_1V \quad (k > 0), \quad R_x = -k_1\dot{x}, \quad P_x = 0, \quad W_x = \ddot{x}; \\ m\ddot{x} &= -0,1x - 0,4\dot{x}. \end{aligned} \right|$$

$$10^{-6} = k \cdot 0,01 \Rightarrow k = 10^{-4}; \quad 4 \cdot 10^{-6} = k_1 \cdot 0,01 \Rightarrow k_1 = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Дифференциальное уравнение движения: $10^{-3}\ddot{x} = -10^{-4}x - 4 \cdot 10^{-4}\dot{x}$
или $10\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$.

Характеристическое уравнение: $10r^2 + 4r + 1 = 0$, $r_{1,2} = -0,2 \pm$

$$\pm 0,245i; \quad x = e^{-0,2t}(c_1 \cos 0,245t + c_2 \sin 0,245t); \quad V = \frac{dx}{dt} =$$

$$= -0,2e^{-0,2t}(c_1 \cos 0,245t + c_2 \sin 0,245t) + e^{-0,2t}(-0,245 \cos 0,245t +$$

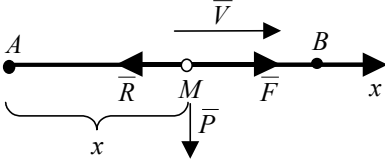
$$+ 0,245 \sin 0,245t); \quad \begin{cases} -0,2c_1 + 0,245c_2 = 0, \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{2}{0,245} = 8,16;$$

$$x = e^{-0,2t}(10 \cos 0,245t + 8,16 \sin 0,245t).$$

396 (4296). Материальная точка массы m движется по прямой из A в B под действием постоянной силы F . Сопротивление среды пропорционально расстоянию тела от B и в начальный момент (в точке A) равно f ($f < F$).

Начальная скорость точки равна нулю. Сколько времени точка будет двигаться из A в B ? ($AB = a$.)

Решение



$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{R} + \overline{P}, mW_x = F_x + R_x + P_x,$$

$$\overline{R} = -k\overline{MB} = -k(\overline{AB} - \overline{AM}),$$

$$R_x = -k(a - x), F_x = F, P_x = 0.$$

При $x=0$ $|R_x| = f, f = ka; R_x = -\frac{f}{a}(a - x); m\ddot{x} = F - \frac{f}{a}(a - x);$

$$mx = F - f + \frac{f}{ax}; \ddot{x} - \frac{f}{am} = \frac{F - f}{m}.$$

Характеристическое уравнение: $r^2 - \frac{f}{am} = 0, r = \pm \sqrt{\frac{f}{ma}}.$

Общее решение однородного уравнения

$$x^* = c_1 e^{\sqrt{\frac{f}{ma}} t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}} t}.$$

Частное решение ищем в виде: $x = A, x' = 0, x'' = 0; -\frac{f}{ma} A =$

$$= \frac{F - f}{m} \Rightarrow A = \frac{f - F}{f} a.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x = c_1 e^{\sqrt{\frac{f}{ma}} t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}} t} + \frac{(f - F) a}{f} \Rightarrow x' = \sqrt{\frac{f}{ma}} \left(c_1 e^{\sqrt{\frac{f}{ma}} t} - c_2 e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}} t} \right).$$

Используем начальные условия: $x|_{t=0} = 0, \dot{x}|_{t=0} = 0;$

$$\begin{cases} 0 = c_1 - c_2, \\ 0 = c_1 + c_2 + (f - F) \frac{a}{f} \Rightarrow (f - F) \frac{a}{f} = 2c_1, c_1 = (f - F) \frac{a}{2f}; \end{cases}$$

$$x = a(F - f) \frac{e^{\sqrt{\frac{f}{ma}} t} + e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}} t}}{2f} + \frac{a(f - F)}{f}.$$

$$\text{При } x=a \quad t=T \Rightarrow (F-f) \frac{e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}T} + e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}}T}}{2f} = 1 + \frac{f-F}{f} = 1;$$

$$(F-f) \frac{e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}T} - e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}}T}}{2f} = \frac{F}{f} e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}T} - e^{-\sqrt{\frac{f}{ma}}T} = \frac{2F}{F-f}; \quad e^{\sqrt{\frac{f}{ma}}T} = y;$$

$$\frac{y^2+1}{y} = \frac{2F}{F-f}; \quad y^2 - 2F \frac{y}{F-f} + 1 = 0; \quad y = \frac{F}{F-f} \pm \sqrt{\frac{F^2}{(F-f)^2} - 1};$$

$$y = \frac{F}{F-f} + \frac{\sqrt{2Ff-f^2}}{F-f} = \left(\frac{F + \sqrt{f(2F-f)}}{F-f} \right);$$

$$T = \sqrt{\frac{am}{f}} \cdot \ln \frac{F + \sqrt{f(2F-f)}}{F-f}.$$

397 (4297). Тело массы 200 г подвешено на пружине и выведено из состояния покоя вытягиванием пружины на 2 см, после чего отпущено (без начальной скорости). Найти уравнение движения тела, считая, что сопротивление среды пропорционально скорости движения. Если тело движется со скоростью 1 см/с, то среда оказывает сопротивление 10^{-3} Н; сила напряжения пружины при растяжении ее на 2 см равна 100 Н. Весом пружины пренебрегаем.

Решение

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{R} + \overline{P},$$

$$mW_x = F_x + R_x + P_x,$$

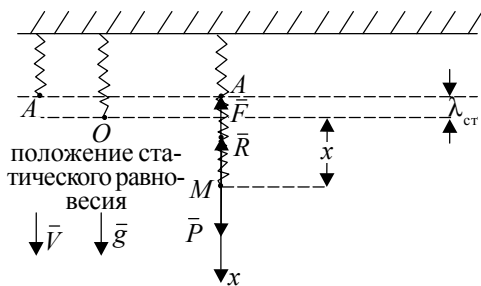
$$\overline{R} = -k\overline{V},$$

$$R_x = -kV_x = -k\dot{x},$$

$$\overline{F} = c \cdot \overline{AM} \Rightarrow F_x = -c(x + \lambda_{\text{ст}}),$$

$$P_x = 0,$$

$$m\ddot{x} = mg - c(x + \lambda_{\text{ст}}) - k\dot{x}.$$



В положении статического равновесия $mg = c \lambda_{\text{ст}}$.

По условию задачи

$$\begin{aligned} x_{t=0} &= 2 \text{ см}, & R &= 10^{-3} \text{ Н при } V = 1 \text{ см/с} = 0,01 \text{ м/с}; \\ R &= kV, & F &= 100 \text{ Н при } x = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}; \\ V_{t=0} &= 0, & k &= R / V = 0,1 \text{ Н·с/см}; \\ F &= c \cdot AM, & c &= F / AM = 100 / 0,2 = 5000 \text{ Н/м}. \\ m &= 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение движения: $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$;
 $0,2\ddot{x} + 0,1\dot{x} + 5000x = 0$ или $\ddot{x} + 0,5\dot{x} + 25000x = 0$.

Характеристическое уравнение: $r^2 + 0,05r + 25000 = 0$; $r_{1,2} =$
 $= -0,25 \pm \sqrt{0,0625 - 25000} = -0,25 \pm 158,1 i$.

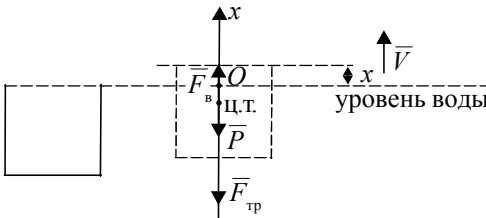
Общее решение: $x = e^{-0,25t}(c_1 \cos 158,1 t + c_2 \sin 158,1 t)$.

Используем начальные условия:

$$\begin{cases} 0,02 = c_1, \\ 0 = -0,25 c_1 + 158,1 c_2 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 0,0000316; \quad \underline{\underline{x = e^{-0,25t}(0,02 \cos 158,1 t + 0,0000316 \sin 158,1 t) \text{ (м)}}}$$

398 (4298). Деревянный цилиндрический чурбанчик ($S = 100 \text{ см}^2$, $h = 20 \text{ см}$, $\gamma = 0,5 \text{ г/см}^3$) полностью погружен в воду и отпущен без начальной скорости. Считая, что сила трения пропорциональна высоте погруженной части, выяснить, каков должен быть коэффициент пропорциональности k , чтобы в результате первого подъема над поверхностью воды показалась ровно половина чурбанчика. Сколько времени (t_1) будет продолжаться первый подъем? Каково будет уравнение движения при первом подъеме?

Решение



$$\begin{aligned} S &= 100 \text{ см}^2; \\ h &= 20 \text{ см}; \\ \gamma &= 0,5 \text{ г/см}^3; \\ \gamma_1 &= 1 \text{ г/см}^3 \text{ (вода)}; \\ g &= 1000 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$\bar{F}_B$ – выталкивающая сила; $\bar{F}_{\text{тр}}$ – сила трения; $\bar{P}$ – вес чурбанчика.

$$m\bar{W} = \bar{P} + \bar{F}_B + \bar{F}_{\text{тр}}, mW_x = P_x + F_{Bx} + F_{\text{тр}x}; F_{Bx} = S(h-x)\gamma_1; Wx = \ddot{x}; \\ F_{\text{тр}x} = -k(h-x); P_x = -P = -Sh\gamma.$$

$$1) m\ddot{x} = m \frac{dV}{dt} = m \cdot \frac{dV}{dx} V;$$

$$m \frac{dV}{dx} V = -Sh\gamma + S(h-x)\gamma_1 - k(h-x). \quad (1)$$

$$\left[-S\gamma_1 \frac{(h-x)^2}{2} - Sh\gamma x + k \frac{(h-x)^2}{2} \right]_0^{h/2} = 0; S\gamma_1 \frac{h^2 - \frac{h^2}{4}}{2} - Sh^2 \frac{\gamma}{2} + \\ + \frac{k}{2} \cdot \frac{h^2}{4} - \frac{k}{2} h^2 = 0; h^2 \left(\frac{3}{8} S\gamma_1 - \frac{S}{2} \gamma - \frac{3}{8} k \right) = 0; S \left(\frac{3}{8} \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma \right) = \frac{3}{8} k; \frac{S}{8} = \\ = \frac{3}{8} k \Rightarrow k = \frac{S}{3} = \frac{100}{3} = \underline{\underline{33 \frac{1}{3}}} \text{ (Г/см)}.$$

2) Если X – глубина погруженной части, то $X = h - x$ и дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$m\ddot{X} + (S\gamma_1 - k)X = Sh\gamma;$$

$$m = \frac{Sh\gamma}{g} = 1 \text{ Г}; S\gamma - k = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}, Sh\gamma = 1000; \ddot{X} + \frac{200}{3} X = 1000.$$

$$\text{Характеристическое уравнение: } r^2 + 200/3 = 0; r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{200}{3}} i.$$

$$\text{Общее решение однородного уравнения: } x_i^* = c_1 \cos 8,16 t + \\ + c_2 \sin 8,16 t.$$

$$\text{Частное решение ищем в общем виде: } \bar{X} = A, \bar{X}' = 0 \Rightarrow A = 15; \\ X = 15 + c_1 \cos 8,16 t + c_2 \sin 8,16 t; \bar{X}' = 8,16(-c_1 \sin 8,16 t + c_2 \cos 8,16 t).$$

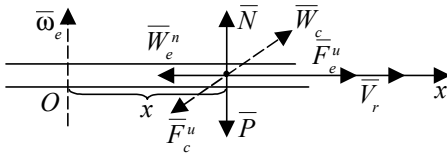
Используем начальные условия: $t = 0, X = 20, V = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 20 = 15 + c_1, \Rightarrow c_1 = 5, \\ 0 = c_2 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 0; \quad \underline{\underline{X = 5(3 + \cos 8,16 t)}}.$$

t_1 – время первого подъема ($X = 10$ см); $10 = 15 + 5 \cos 8,16 t_1 \Rightarrow 1 = \cos 8,16 t_1 \Rightarrow 8,16 t_1 = \pi; t_1 = 3,14/8,16 = \underline{\underline{0,38 \text{ с}}}$.

399 (4299). Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси. В начальный момент времени на расстоянии a_0 от оси внутри трубки находился шарик массы m . Считая, что в начальный момент скорость шарика относительно трубки равна нулю, найти закон движения шарика относительно трубки.

Решение



Движение шарика в трубке – относительное. Ускорение Кориолиса $\overline{W}_c = 2\overline{\omega} \times \overline{V}_r$.

Уравнение относительного движения шарика:

$$m\overline{W}_r = \overline{F}_a + \overline{F}_e^u + \overline{F}_c^u, \quad (1)$$

где $\overline{W}_r$ – ускорение относительного движения; $\overline{F}_a$ – вектор активной силы и силы реакции, в данном случае $\overline{F}_a = \overline{P} + \overline{N}$; $\overline{F}_e^u$ – сила инерции переносного движения, $\overline{F}_e^u = -m\overline{W}_e$; $\overline{F}_c^u$ – сила инерции Кориолиса, $\overline{F}_c^u = -m\overline{W}_c$.

Спроектируем (1) на ось Ox :

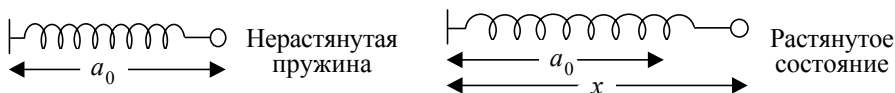
$$mW_{rx} = F_{ex}^u = -mW_{ex} = mW_e^n = m\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x = 0. \quad (2)$$

Характеристическое уравнение: $r^2 - \omega^2 = 0, r = \pm\omega; x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}, x' = \omega(c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}); \begin{cases} a = c_1 + c_2, \Rightarrow c_1 = c_2 = a/2; \\ 0 = c_1 - c_2 \end{cases}$

$$\underline{\underline{x = a \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}}}$$

400 (4300). Решить предыдущую задачу в предположении, что шарик прикреплен к точке O пружиной. Сила действия пружины на шарик пропорциональна деформации пружины, сила $K \cdot 10^{-5}$ Н вызывает изменение длины пружины на 1 см. Длина пружины в свободном состоянии равна a_0 .

Решение



Пружина растягивается на $(x - a_0)$ см, $K \cdot 10^{-5}$ Н = k . По условию сила упругости $F = cx$, $k = c \cdot 1 \Rightarrow c = k$, $F = kx$.

Дифференциальное уравнение (2) задачи 399 (4299) принимает вид

$$m\ddot{x} - m\omega^2 x = -k(x - a_0) \text{ или } m\ddot{x} - (m\omega^2 - k)x = ka_0.$$

Характеристическое уравнение: $mr^2 - (m\omega^2 - k) = 0$,

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}.$$

Случай 1.

$$m\ddot{x} - (m\omega^2 - k)x = ka_0. \quad (*)$$

Пусть $\frac{k}{m} > \omega^2$. Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения будет

$$x_1 = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t.$$

Частное решение: $\bar{x} = A$, $\dot{\bar{x}} = 0$, $\ddot{\bar{x}} = 0$. Подставляя $\bar{x}$, $\dot{\bar{x}}$, $\ddot{\bar{x}}$ в (*),

$$\text{имеем } A = \frac{a_0 k}{k - m\omega^2}. \text{ Тогда производная } \dot{x} = \left(-c_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t + \right. \\ \left. + c_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t \right) \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}. \text{ При } t = 0 \quad x = a_0, \quad \dot{x} = 0;$$

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + \frac{a_0 k}{k - m\omega^2}, \\ 0 = c_2 \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \end{cases} \Rightarrow c_2 = 0; \quad c_1 = -\frac{a_0 m \omega^2}{k - m\omega^2}; \quad x = \frac{a_0 k}{k - m\omega^2} \left[k - \right. \\ \left. - m\omega^2 \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t \right].$$

Случай 2. $k = m\omega^2$; $r_{1,2} = 0$.

Общее решение: $x_1 = c_1 + c_2 t$.

Частное решение неоднородного уравнения:

$$\bar{x} = At^2, \quad \dot{\bar{x}} = 2At, \quad \ddot{\bar{x}} = 2A \Rightarrow 2Am - (m\omega^2 - k)At^2 = ka_0;$$

$$\begin{cases} t^2 | A(m\omega^2 - k) = 0, \\ t^1 | 0 = 0, \\ t^0 | 2Am = ka_0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{ka_0}{2m}; \quad \bar{x} = \frac{ka_0}{2m} t^2; \quad x = c_1 + c_2 t + \frac{ka_0}{2m} t^2;$$

$$\dot{x} = c_2 + \frac{ka_0}{2m} t^2; \quad \begin{cases} a_0 = c_1, \\ 0 = c_2 \end{cases} \Rightarrow x = a_0 + \frac{ka_0}{2m} t^2 = a_0 \left(1 + \frac{k}{2m} t^2 \right).$$

Случай 3. $\frac{k}{m} - \omega^2 < 0$.

Корни характеристического уравнения действительные и равны:

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}; \quad x_1 = c_1 e^{\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}} t} + c_2 e^{-\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}} t}; \quad \bar{x} = A; \quad A = \frac{a_0 k}{k - m\omega^2};$$

$$x = c_1 e^{\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}} t} + c_2 e^{-\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}} t} + \frac{a_0 k}{k - m\omega^2}; \quad \dot{x} = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}} \left(c_1 e^{\sqrt{\dots} t} - c_2 e^{\sqrt{\dots} t} \right);$$

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 + \frac{a_0 k}{k - m\omega^2}, \\ 0 = (c_1 - c_2) \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}} \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{a_0 m \omega^2}{(m\omega^2 - k)^2};$$

$$x = \frac{a_0}{m\omega^2 - k} \left[m\omega^2 \operatorname{ch} \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}} t - k \right].$$

Уравнения высших порядков

|| В задачах 401 (4301)–411 (4311) найти общие решения уравнений.

401 (4301). $y''' + 9y' = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение: $r^3 + 9r = 0$; $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm 3i$.

Общее решение: $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + c_3$.

402 (4302). $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$.

Решение

$$r^4 - 13r^2 + 36 = 0; r^2 = \pm \sqrt{\frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}}; r_1 = 3, r_2 = -3,$$

$$r_3 = 2, r_4 = -2; \underline{\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}}}.$$

403 (4303). $y^{(IV)} = 8y'' - 16y$.

Решение

$$r^4 - 8r^2 + 16 = 0; r^2 = \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{16 - 16}} \Rightarrow r_{1,2} = 2, r_{3,4} = -2;$$

$$\underline{\underline{y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + (c_3 + c_4 x) e^{-2x}}}.$$

404 (4304). $y^{(IV)} = 16y$.

Решение

$$r^4 = 16; (r^2 - 4)(r^2 + 4) = 0; r_1 = 2, r_2 = -2, r_{3,4} = \pm 2i;$$

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x}}.$$

405 (4305). $y''' - 13y' - 12y = 0$.

Решение

$$r^3 - 13r - 12 = 0; r^3 = 13r - 12 = (r+1)(r^2 - r - 12) = 0; r^2 - r - 12 = 0;$$

$$r+1=0, r_1 = -1, r_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}, r_2 = 4, r_3 = -3;$$

$$\underline{\underline{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} + c_3 e^{-3x}}}.$$

406 (4306). $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Решение

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0; (r^3 - 1) - 3r(r-1) = (r-1)(r^2 + r + 1 - 3r) = 0;$$

$$(r-1)(r^2 - 2r + 1) = 0; r_1 = 1, r_{2,3} = 1; \underline{\underline{y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x}}.$$

407 (4307). $y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 0$.

Решение

$$r^4 + r^3 + 2r^2 = 0; r_{1,2} = 0, r^2 + r + 2 = 0, r_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i;$$

$$\underline{\underline{y = c_1 + c_2 x + e^{-x/2} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_4 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right)}}.$$

408 (4308). $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

Решение

$$r^n - r^{n-2} = 0; \quad r^{n-2}(r^2 - 1) = 0, \quad r_1 = r_2 = \dots = r_{n-2} = 0, \quad r_{n-1} = 1, \quad r_n = -1;$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x^{n-3} + c_4 x^{n-4} + \dots + c_{n-1} x + c_n.$$

409 (4309). $y^{(IV)} + y = 0$.

Решение

$$r^4 + 1 = 0; \quad r = \sqrt[4]{-1}; \quad \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{|-1|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{4} \right), \quad \varphi = \pi;$$

$$k = 0, 1, 2, 3; \quad r_{0,2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}; \quad r_{1,3} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}; \quad y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(c_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(c_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} +$$

$$+ c_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

410 (4310). $64y^{(VIII)} + 48y^{(VI)} + 12y^{(IV)} + y'' = 0$.

Решение

$$64r^8 + 48r^6 + 12r^4 + r^2 = 0; \quad r^2(64r^6 + 48r^4 + 12r^2 + 1) = 0; \quad r_{1,2} = 0,$$

$$r^2 = z. \quad \text{Тогда} \quad 64z^3 + 48z^2 + 12z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{3}{16}z + \frac{1}{64} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что $z = -\frac{1}{4}$ — корень третьей кратности.

Тогда $r = \sqrt{z} = \sqrt{-\frac{1}{4}}$. По формуле Муавра $r_{1,2,3} = \sqrt{\left|-\frac{1}{4}\right|} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{i}{2}$; $r_{4,5,6} = \frac{-i}{2}$; $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos \frac{x}{2} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin \frac{x}{2} + c_7 + c_8 x$.

411 (4311). $y^{(n)} + \frac{n}{1} y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{n}{1} y' + y = 0$.

Решение

$r^n + \frac{n}{1} r^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^{n-2} + \dots + \frac{n}{1} r + 1 = 0$; $r = -1$ – корень кратности n ;

$y = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1})$.

412 (4312). $y''' = -y'$; $y|_{x=0} = 2$; $y'|_{x=0} = 0$; $y''|_{x=0} = -1$.

Решение

$r^3 + r = 0$, $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm i$; $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$, $y' = -c_2 \sin x +$

$+ c_3 \cos x$, $y'' = -c_2 \cos x - c_3 \sin x$; $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2, \\ c_3 = 0, \\ -c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1, c_1 = 1, c_3 = 1$;

$y = 1 + \cos x$.

413 (4313). $y^{(V)} = y'$; $y|_{x=0} = 0$; $y'|_{x=0} = 1$; $y''|_{x=0} = 0$; $y'''|_{x=0} = 1$;

$y^{(IV)}|_{x=0} = 2$.

Решение

$$r^5 - r = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_{2,3} = \pm 1, \quad r_{4,5} = \pm i;$$

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x, \\ y' &= c_2 e^x - c_3 e^{-x} - c_4 \sin x + c_5 \cos x, \\ y'' &= c_2 e^x + c_3 e^{-x} - c_4 \cos x - c_5 \sin x, \\ y''' &= c_2 e^x - c_3 e^{-x} + c_4 \sin x - c_5 \cos x, \\ y'''' &= c_2 e^x + c_3 e^{-x} + c_4 \sin x + c_5 \cos x \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0, & c_1 = -2, \\ c_2 - c_3 + c_5 = 1, & c_2 = 1, \\ c_2 + c_3 - c_4 = 0, & \Rightarrow c_3 = 0, \\ c_2 - c_3 - c_5 = 1, & c_4 = 1, \\ c_2 + c_3 + c_4 = 2 & c_5 = 0; \end{cases}$$

$$\underline{\underline{y = e^x + \cos x - 2.}}$$

В задачах 414(4314)–420 (4320). Составить общие решения неоднородных уравнений, находя их частные решения либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных.

414 (4314). $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$

Решение

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0; \quad (r-1)(r^2 - 3r + 2) = 0; \quad r_1 = 1,$$

$$r_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 1; \quad y^* = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^x,$$

$$\bar{y} = Ax + B, \quad \bar{y}' = A, \quad \bar{y}'' = 0, \quad \bar{y}''' = 0;$$

$$5A - 2(Ax + B) = 2x + 3 \Rightarrow -2A = 2 \Rightarrow A = -1; \quad 5A - 2B = 3 \Rightarrow B = -4;$$

$$\underline{\underline{y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{2x} - x - 4.}}$$

415 (4315). $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10).$

Решение

$$r^3 - 3r + 2 = 0; \quad (r-1)(r^2 + r - 2) = 0; \quad r_1 = 1, \quad r_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}, \quad r_2 = -2,$$

$$r_3 = 1; y^* = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-2x}, \bar{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}, \bar{y}' = (2Ax + B)e^{-x} - (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}, \bar{y}'' = -2(2Ax + B)e^{-x} + 2Ae^{-x} + (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}, \bar{y}''' = 3(2Ax + B)e^{-x} - 6Ae^{-x} - (Ax^2 + Bx + C)e^{-x};$$

$$-6A - Ax^2 - Bx - C - 3Ax^2 + 3Bx + 3C + 2Ax^2 + 2Bx + 2C =$$

$$= 4x^2 + 4x^2 + 4x - 10; \begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2 \cdot 2A = 4, \\ 4B = 4, \\ -6A + 4C = -10 \end{matrix} \right. \Rightarrow A = 1, B = 1, C = -1;$$

$$\bar{y} = x^2 + x - 1; \underline{\underline{y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-2x} + (x^2 + x - 1)e^{-x}}}$$

416 (4316). $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x$.

Решение

$$r^4 + 8r^2 + 16 = 0; r = \pm \sqrt{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}; r_{1,2} = \pm 2i; r_{3,4} = \pm 2i;$$

$$y^* = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x, \bar{y} = A \cos x + B \sin x,$$

$$\bar{y}' = -A \sin x + B \cos x, \bar{y}'' = -A \cos x - B \sin x, \bar{y}''' = A \sin x - B \cos x,$$

$$\bar{y}^{(IV)} = A \cos x + B \sin x; A \cos x + B \sin x - 8A \cos x - 8B \sin x +$$

$$+ 16A \cos x + 16B \sin x = \cos x; \left. \begin{matrix} \cos x \\ \sin x \end{matrix} \right| \begin{matrix} 9A = 1, \\ 9B = 0 \end{matrix} \Rightarrow A = \frac{1}{9};$$

$$\underline{\underline{y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x + \frac{1}{9} \cos x}}$$

417 (4317). $y^{(IV)} + 2a^2 y'' + a^4 y = \cos ax$.

Решение

$$r^4 + 2a^2 r^2 + a^4 = 0; r = \pm \sqrt{-a^2 \pm \sqrt{a^4 - a^4}} = \pm ai; r_{1,2} = \pm ai,$$

$$r_{3,4} = \pm ai; y^* = c_1 \cos ax + c_3 \sin ax + x(c_2 \cos ax + c_4 \sin ax) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (c_1 + c_2 x) \cos ax + (c_3 + c_4 x) \sin ax, \quad \bar{y} = x^2 (A \cos ax + B \sin ax), \\
 \bar{y}' &= 2x(A \cos ax + B \sin ax) + xa^2(-A \sin ax + B \cos ax), \quad \bar{y}'' = (2A \cos ax + \\
 &+ 2B \sin ax) + 4xa(-A \sin ax + B \cos ax) + x^2 a(-Aa \cos ax - Ba \sin ax), \\
 \bar{y}''' &= 3 \cdot 2a(-A \sin ax + B \cos ax) + 4xa^2(-A \cos ax - B \sin ax) + \\
 &+ 2xa^2(-A \cos ax - B \sin ax) + 2xa^2(-A \cos ax - B \sin ax) + \\
 &+ x^2 a^2(Aa \sin ax - Ba \cos ax), \quad \bar{y}^{(IV)} = 6a^2(-A \cos ax - B \sin ax) + \\
 &+ 6xa^2(Aa \sin ax - Ba \cos ax) + 2xa^2(Aa \sin ax - Ba \cos ax) + \\
 &+ x^2 a^2(Aa^2 \cos ax - Ba^2 \sin ax) = 12a^2(-A \cos ax - B \sin ax) + \\
 &+ 8a^3 x(A \sin ax - B \cos ax) + 2a^4 x^2(A \cos ax + B \sin ax); \\
 &-12a^2 A \cos ax - 12a^2 B \sin ax + 4a^2 A \cos ax + 4Ba^2 \sin ax = \cos ax; \\
 \left. \begin{aligned} \cos ax & \left| \begin{aligned} -12a^2 A + 4a^2 A &= 1, \\ \sin ax & \left| \begin{aligned} -12a^2 B + 4a^2 B &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{8a^2}, \quad B = 0; \\
 y &= (c_1 + c_2 x) \cos ax + (c_3 + c_4 x) \sin ax - \frac{x^2}{8a^2} \cos ax.
 \end{aligned}$$

418 (4318). $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1$.

Решение

$$\begin{aligned}
 r^5 + r^3 &= 0; \quad r^3(r^2 + 1) = 0; \quad r_{1-3} = 0, \quad r_{4,5} = \pm i; \quad y^* = c_1 + c_2 x + c_2 x^2 + \\
 &+ c_4 \cos x + c_5 \sin x; \quad \bar{y} = x^3(Ax^2 + Bx + C) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3, \\
 \bar{y}' &= 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2, \quad \bar{y}'' = 20x^3 + 12Bx^2 + 6Cx, \quad \bar{y}''' = 60Ax^2 + \\
 &+ 24Bx + 6C, \quad \bar{y}^{(IV)} = Ax + 24B, \quad \bar{y}^{(V)} = 120A; \quad 120A + 60Ax^2 + 24Bx +
 \end{aligned}$$

$$+6C = x^2 - 1; \left. \begin{array}{l} x^2 | 60A = 1, \\ x^1 | 24B = 0, \\ x^0 | 120A + 6C = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{60}, B = 0, C = \frac{1}{6}(-1 - 2) = -\frac{1}{2};$$

$$y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x.$$

419 (4319). $y^{(IV)} - y = xe^x + \cos x.$

Решение

$$\begin{aligned} r^4 - 1 &= 0; \quad r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_{3,4} = \pm i; \quad y^* = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x, \\ \bar{y} &= x(Ax + B)e^x + x(D \cos x + E \sin x) = (Ax^2 + Bx)e^x + x(D \cos x + E \sin x), \\ \bar{y}' &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x + D \cos x + E \sin x + x(-D \sin x + E \cos x), \\ \bar{y}'' &= (4Ax + B)e^x + 2Ae^x + (Ax^2 + Bx)e^x + (-D \sin x + E \cos x)2 + x(-D \cos x - \\ &- E \sin x). \end{aligned}$$

Находя, далее, $\bar{y}'''$, $\bar{y}^{(IV)}$ и подставляя их значения в исходное уравнение, получим $A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{3}{8}$, $D = 0$, $E = -\frac{1}{4}$. Окончательно имеем

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{x^2 - 3x}{8} e^x - \frac{1}{4} x \sin x.$$

420 (4320). $y^{(IV)} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\sin x + \cos x).$

Решение

$$\begin{aligned} r^4 - 2r^2 + 1 &= 0; \quad r = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 1}} = \pm 1, \quad r_{1,2} = \pm 1, \quad r_{3,4} = \pm 1; \quad y^* = (c_1 + \\ &+ c_2 x)e^x + (c_3 + c_4 x)e^{-x}, \quad \bar{y} = (Ae^x + Be^{-x})x^2 + C \sin x + D \cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= (Ae^x - Be^{-x})x^2 + 2(Ae^x + Be^{-x})x + C \cos x - D \sin x, \quad \bar{y}'' = (Ae^x + \\ &+ Be^{-x})x^2 + 4(Ae^x - Be^{-x}) + 2(Ae^x + Be^{-x}) - C \sin x + D \cos x, \\ \bar{y}''' &= (Ae^x - Be^{-x})x^2 + 6(Ae^x - Be^{-x}) + 6(Ae^x + Be^{-x}) - C \cos x + D \sin x.\end{aligned}$$

Аналогично находим $\bar{y}^{(IV)}$:

$$\begin{aligned}\bar{y}^{(IV)} &= (Ae^x + Be^{-x})x^2 + 8(Ae^x - Be^{-x}) + 12(Ae^x + Be^{-x}) + C \sin x + \\ &+ D \cos x - 2(Ae^x + Be^{-x})x^2 - 8(Ae^x - Be^{-x}) + 2C \cos x + 2D \sin x - \\ &- 4(Ae^x + Be^{-x}) + (Ae^x + Be^{-x})x^2 + C \sin x + D \cos x = 8(e^x + e^{-x}) + \\ &+ 4(\sin x + \cos x) \Rightarrow A=1, B=1, C=1, D=1; \quad \underline{\underline{y = y^* + \bar{y} = (c_1 + c_2x + \\ &+ x^2)e^x + (c_3 + c_4x + x^2)e^x + \sin x + \cos x.}}\end{aligned}$$

421 (4321). $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 1$.

Решение

$$\begin{aligned}r^3 + 2r^2 + r &= 0; \quad r(r^2 + 2r + 1) = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_{2,3} = -1; \quad y^* = c_1 + (c_2 + \\ &+ c_3x)e^{-x}, \quad \bar{y} = Ae^{-2x}, \quad \bar{y}' = -2Ae^{-2x}, \quad \bar{y}'' = 4Ae^{-2x}, \quad \bar{y}''' = -8Ae^{-2x}, \\ &- 8A + 8A - 2A = -2 \Rightarrow A = 1; \quad \bar{y} = e^{-2x}, \quad y = y^* + \bar{y}, \quad y = c_1 + (c_2 + \\ &+ c_3)e^{-x} + e^{-2x}, \quad y' = c_3e^{-x} - (c_2 + c_3)e^{-x} - 2e^{-2x}, \quad y'' = -2c_3e^{-x} + (c_2 + \\ &+ c_3)e^{-x} + 4e^{-2x}; \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 0, \\ c_3 - c_2 - 2 = 1, \\ -2c_3 + c_2 + 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ -c_2 + c_3 = 3, \\ c_2 - 2c_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow c_3 = 0, \quad c_2 = -3, \\ c_1 = 4; \quad \underline{\underline{y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}.}}\end{aligned}$$

422 (4322). $y''' - y' = 3(2 - x^2)$; $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 1$.

Решение

$$\begin{aligned}
 r^3 - r = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = -1; \quad y^* = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}; \quad \bar{y} = (Ax^2 + Bx + \\
 + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx, \quad \bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B, \quad \bar{y}''' = 6A; \\
 6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = 6 - 3x^2 \Rightarrow A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0; \quad \bar{y} = x^3, \quad y = c_1 + \\
 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3, \quad y' = c_1 + c_2 e^x - c_3 e^{-x} + 3x^2, \quad y'' = c_2 e^x + c_3 e^{-x} + 6x; \\
 \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ c_2 - c_3 = 1, \\ c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_1 = 0; \quad \underline{\underline{y = e^x + x^3}}.
 \end{aligned}$$

423 (4323). Решить уравнение Эйлера $x^3 y''' + xy' - y = 0$.

Решение

$$\begin{aligned}
 \text{Полагаем } x = e^t \Rightarrow t = \ln|x|, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}; \\
 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right); \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 y}{dt^3} \left(\frac{1}{x} \right)^3 + \frac{d^2 y}{dt^2} \left(-\frac{2}{x^3} \right) - \\
 - \frac{d^2 y}{dt^2} \left(\frac{1}{x^3} \right) + \frac{dy}{dt} \left(\frac{2}{x^3} \right) = \frac{d^3 y}{dt^3} \left(\frac{1}{x^3} \right) - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} \left(\frac{1}{x^3} \right) + 2 \frac{dy}{dt} \left(\frac{1}{x^3} \right).
 \end{aligned}$$

Подставляем y''' , y' и y в исходное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned}
 y_t''' - 3y_t'' + 2y_t' + y_t' - y = 0, \quad y_t''' - 3y_t'' + 3y_t' - y = 0; \quad r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0; \\
 r_1 = 1, \quad r^2 - 2r + 1 = 0; \quad r_1 = 1, \quad r^2 - 2r + 1 = 0, \quad r_{2,3} = 1; \quad \underline{\underline{y = c_1 e^t + c_1 t e^t + \\
 + c_1 t^2 e^t = x(c_1 + c_2 \ln|x| + c_3 \ln^2|x|)}}.
 \end{aligned}$$

§ 5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$424.1 \text{ (4324.1). } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - 7\frac{dx}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y; \end{cases} \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -2x - 5y - 7\frac{dx}{dt}, \\ y = \frac{dx}{dt} + 7x \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} =$$

$$= -2x - 5\frac{dx}{dt} - 35x - 7\frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0; \quad r^2 + 12r + 37 = 0,$$

$$r_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 37} = -6 \pm i; \quad \underline{\underline{x = e^{-6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)}};$$

$$\frac{dx}{dt} = -6e^{-6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + e^{-6t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t);$$

$$y = e^{-6t}(-6c_1 \cos t - 6c_2 \sin t - c_1 \sin t + c_2 \cos t + 7c_1 \cos t + 7c_2 \sin t) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y = e^{-6t}[(c_2 + c_1) \cos t + (c_2 - c_1) \sin t]}}.$$

$$424.2 \text{ (4324.2). } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4\frac{dx}{dt} - 8x;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 5x = 0; \quad r^2 - 6r + 5 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 5; \quad \underline{\underline{x = c_1 e^t + c_2 e^{5t}}};$$

$$\frac{dx}{dt} = c_1 e^t + 5c_2 e^{5t}; \quad y = \frac{dx}{dt} - 2x = c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} - 2c_1 e^t - 2c_2 e^{5t};$$

$$\underline{\underline{y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}}}$$

$$424.3 \text{ (4324.3). } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - 9x - 3y = \frac{dx}{dt} - 9x + \frac{dx}{dt} - x;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0; \quad r^2 - 2r + 10 = 0, \quad r_{1,2} = \pm 3i; \quad \underline{\underline{x = e^t (c_1 \cos 3t +$$

$$+ c_2 \sin 3t)}; \quad \frac{dx}{dt} = e^t (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) + e^t (-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t);$$

$$y = \frac{1}{3} \left(x - \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{3} e^t (3c_1 \sin 3t - 3c_2 \cos 3t); \quad \underline{\underline{y = e^t (c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t)}}.$$

$$424.4 \text{ (4324.4). } \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} &= 2x - y. \end{aligned} \right\}$$

Решение

Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Составляем для нее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 2 & -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0 \text{ или } (k-1)(k+1)(k-2) = 0;$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 2.$$

Частные решения данной системы ищем в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 e^{k_1 t}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{k_2 t}, \quad x_3 = \alpha_3 e^{k_3 t}; \\ y_1 &= \beta_1 e^{k_1 t}, \quad y_2 = \beta_2 e^{k_2 t}, \quad y_3 = \beta_3 e^{k_3 t}; \\ z_1 &= \gamma_1 e^{k_1 t}, \quad z_2 = \gamma_2 e^{k_2 t}, \quad z_3 = \gamma_3 e^{k_3 t}. \end{aligned} \quad (1)$$

а) $k_1 = 1$:

Система уравнений для определения α_1 , β_1 и γ_1 имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} -\beta_1 + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1 - \gamma_1 &= 0, \\ 2\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1.$$

Пусть $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$. Тогда $\underline{x_1 = e^t}$, $\underline{y_1 = e^t}$, $\underline{z_1 = e^t}$.

б) $k_2 = -1$:

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2 + 2\beta_2 - \gamma_2 &= 0, \\ 2\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta_2 = -3\alpha_2; \quad \gamma_2 = -5\alpha_2.$$

Пусть $\alpha_2 = 1$. Тогда $\beta_2 = -3$, $\gamma_2 = -5$ и $x_2 = e^t$, $y_2 = -3e^t$, $z_2 = -5e^t$.

в) $k_3 = 2$:

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3 &= 0, \\ \alpha_3 - \beta_3 - \gamma_3 &= 0, \\ 2\alpha_3 - \beta_3 - 2\gamma_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_3 = \gamma_3; \beta_3 = 0.$$

Пусть $\alpha_3 = \gamma_3 = 1$. Тогда $x_3 = e^{2t}$, $y_3 = 0$, $z_3 = e^{2t}$. Окончательно имеем

$$\underline{\underline{x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}}}, \quad \underline{\underline{y(t) = c_1 e^t - 3c_2 e^{-t}}}, \quad \underline{\underline{z(t) = c_1 e^t - 5c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}}}.$$

$$424.5 \text{ (4324.5). } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-k & -2 & -1 \\ -1 & 1-k & 1 \\ 1 & 0 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^3 - k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k_1 = 0,$$

$$k_2 = -1, k_3 = 2.$$

Частные решения ищем в виде (1) задачи 424.4 (4324.4).

а) $k_1 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - 2\beta_1 - \gamma_1 &= 0, \\ -\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1 - \gamma_1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Пусть $\alpha_1 = \gamma_1 = 1, \beta_1 = 0$. Тогда $\underline{x_1 = e^0 = 1}, \underline{y_1 = 0}, \underline{z_1 = e^0}$.

б) $k_2 = -1$:

$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha_2 - 2\beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ -\alpha_2 + 2\beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_2 = 0.$$

Пусть $\beta_2 = 1, \gamma_2 = -2$. Тогда $\underline{x_2 = 0}, \underline{y_2 = e^{-t}}, \underline{z_3 = -2e^{-t}}$.

в) $k_3 = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} -\alpha_3 - 2\beta_3 - \gamma_3 = 0, \\ -\alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 - 3\gamma_3 = 0. \end{array} \right\}$$

Пусть $\alpha_3 = 3, \beta_3 = -2, \gamma_3 = 1$. Тогда $\underline{x_3 = 3e^{2t}}, \underline{y_3 = 2e^{2t}}, \underline{z_3 = e^{2t}}$.

$$\underline{\underline{x(t) = c_1 + 3c_3e^{2t}}}; \underline{\underline{y(t) = c_2e^{-t} - 2c_3e^{2t}}}; \underline{\underline{z(t) = c_1 - 2c_2e^{-t} + c_3e^{2t}}}.$$

$$424.6 \ (4324.6). \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{array} \right\}$$

Решение

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} 3-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 4 & -1 & 4-k \end{array} \right| = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 5.$$

Частные решения ищем в виде (1) задачи 424.4 (4324.4).

а) $k_1 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1 + \gamma_1 &= 0, \\ 4\alpha_1 - \beta_1 + 3\gamma_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = -\gamma_1.$$

Пусть $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1, \gamma_1 = -1$. Тогда $\underline{x_1 = e^t}, \underline{y_1 = e^t}, \underline{z_1 = -e^t}$.

б) $k_2 = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 &= 0, \\ 4\alpha_2 - \beta_2 + 2\gamma_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma_2 = 3\alpha_2.$$

Пусть $\alpha_2 = 1, \beta_2 = -2, \gamma_2 = -3$. Тогда $\underline{x_2 = e^{2t}}, \underline{y_2 = -2e^{2t}}, \underline{z_2 = -3e^{2t}}$.

в) $k_3 = 5$:

$$\left. \begin{aligned} -2\alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3 &= 0, \\ \alpha_3 - 4\beta_3 + \gamma_3 &= 0, \\ 4\alpha_3 - \beta_3 - \gamma_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_3 = \beta_3, \gamma_3 = 3\alpha_3.$$

Пусть $\alpha_3 = 1, \beta_3 = 1, \gamma_3 = 3$. Тогда $\underline{x_3 = e^{5t}}, \underline{y_3 = e^{5t}}, \underline{z_3 = 3e^{5t}}$.

$$\underline{x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}}, \underline{y(t) = c_1 e^t - 2c_2 e^{2t} - 3c_3 e^{5t}};$$

$$\underline{z(t) = -c_1 e^t - 3c_2 e^{2t} + 3c_3 e^{5t}}.$$

$$424.7 \text{ (4324.7). } \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} &= 2y + 3z - x \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} & \text{(корни характеристического уравнения} \\ & r_1 = 2, r_{2,3} = 3 \pm i). \end{aligned}$$

Решение

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-k & 1 & 0 \\ 1 & 3-k & -1 \\ -1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_{2,3} = 3 \pm i.$$

Частные решения ищем в виде (1) задачи 424.4 (4324.4).

а) $k_1 = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta_1 = 0, \alpha_1 = \gamma_1.$$

Пусть $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$. Тогда $\underline{x_1 = e^{2t}}, \underline{y_1 = 0}, \underline{z_1 = e^{2t}}$.

б) $k_2 = 3 + i$:

$$\left. \begin{aligned} (-1+i)\alpha_2 + \beta_2 &= 0, \\ \alpha_2 + i\beta_2 - \gamma_2 &= 0, \\ -\alpha_2 + 2\beta_2 - i\gamma_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta_2 = (1+i)\alpha_2, \gamma_2 = \alpha_2 - i\beta_2 = \alpha_2 - i(1+i)\alpha_2 =$$

$$= (2-i)\alpha_2.$$

Пусть $\alpha_2 = 1$. Тогда $\beta_2 = 1 + i, \gamma_2 = 2 - i; \underline{x_2 = e^{(3+i)t}},$

$$\underline{y_2 = (1+i)e^{(3+i)t}}, \underline{z_2 = (2-i)e^{(3+i)t}}$$

Применяя формулы Эйлера, получим:

$$x_2 = e^{3t}(\cos t + i \sin t), y_2 = (1+i)e^{3t}(\cos t + i \sin t), z_2 = (2-i)e^{3t}(\cos t + i \sin t) \text{ или } x_2 = e^{3t} \cos t + i e^{3t} \sin t; y_2 = e^{3t}(\cos t + \sin t) + i e^{3t}(\cos t + \sin t); z_2 = e^{3t}(2\cos t + \sin t) - i e^{3t}(\cos t - 2\sin t).$$

в) $k_2 = 3 - i$:

$$\left. \begin{aligned} (-1+i)\alpha_3 + \beta_3 &= 0, \\ \alpha_3 + i\beta_3 - \gamma_3 &= 0, \\ -\alpha_3 + 2\beta_3 + i\gamma_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta_3 = (1-i)\alpha_3, \gamma_3 = \alpha_3 + i\beta_3 = \alpha_3 + i\alpha_3 + \alpha_3 =$$

$$= (2+i)\alpha_3.$$

Пусть $\alpha_3 = 1$. Тогда $\beta_3 = 1 - i$; $\gamma_3 = 2 + i$; $x_3 = e^{(3-i)t}$;

$$y_3 = (1-i)e^{(3-i)t}; \quad z_3 = (2+i)e^{(3-i)t} \quad \text{или} \quad x_3 = e^{3t}(\cos t - i \sin t);$$

$$y_3 = (1-i)e^{3t}(\cos t - i \sin t); \quad z_3 = (2+i)e^{3t}(\cos t - i \sin t), \quad \text{или}$$

$$x_3 = e^{3t} \cos t - ie^{3t} \sin t; \quad y_3 = e^{3t}(\cos t - \sin t) - ie^{3t}(\cos t + \sin t);$$

$$z_3 = e^{3t}(2 \cos t + \sin t) + ie^{3t}(\cos t - 2 \sin t).$$

За системы частных решений в случаях б) и в) можно отдельно взять действительные части и отдельно мнимые части, а именно:

$$x_2 = e^{3t} \cos t, \quad x_3 = e^{3t} \sin t;$$

$$y_2 = e^{3t}(\cos t - \sin t), \quad y_3 = e^{3t}(\cos t + \sin t);$$

$$z_2 = e^{3t}(2 \cos t + \sin t), \quad z_3 = e^{3t}(\cos t - 2 \sin t).$$

Тогда

$$\underline{x(t) = c_1 e^{2t} + e^{3t}(c_2 \cos t + c_3 \sin t); \quad y(t) = e^{3t}[(c_2 + c_3) \cos t + (c_3 - c_2) \sin t];}$$

$$\underline{z(t) = c_1 e^{2t} + e^{3t}[(2c_2 - c_3) \cos t + (c_2 - 2c_3) \sin t]}.$$

$$425 \quad (4325). \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} - x = e^t + e^{-t}. \quad (1)$$

Соответствующее однородное уравнение: $\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0$. Характери-

стическое уравнение: $k^2 - 1 = 0$, $k_{1,2} = \pm 1$. Общее решение однородного уравнения: $x^* = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.

Ищем частное решение в виде:

$$\bar{x} = Ate^t + Bte^{-t}; \quad \bar{x}' = (Ae^t - Be^{-t})t + Ae^t + Be^{-t}; \quad \bar{x}'' = (Ae^t + Be^{-t})t + 2(Ae^t - Be^{-t}).$$

Подставляем $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ в (1):

$$t Ae^t + t Be^{-t} + 2 Ae^t - 2 Be^{-t} - A te^t + B te^{-t} = e^t + e^{-t} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Общее решение: } \underline{\underline{x = x^* + \bar{x} = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + t \operatorname{sh} t;}} \quad \underline{\underline{y = \frac{dx}{dt} = c_1 e^t -$$

$$- c_2 e^{-t} + \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t.}}$$

$$426 \text{ (4326). } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2y' - 5x' + e^t \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = 2x - 12y + 2e^{-2t} - 5x' + e^t.$$

$$\text{Подставим в него } y = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} + 5x - e^t \right):$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2x - 6 \frac{dx}{dt} - 30x + 6e^t + 2e^{-2t} - 5x' + e^t \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} + 28x = \\ &= 2e^{-2t} + 7e^t. \end{aligned}$$

$$\text{Соответствующее однородное уравнение: } \frac{d^2 x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} + 28x = 0.$$

$$\text{Характеристическое уравнение: } k_2 + 11k + 28 = 0; \quad k_1 = -4; \quad k_2 = -7; \\ x^* = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t}.$$

Для $f_1(x) = 2e^{-2t}$ ищем частное решение в виде

$$\bar{x}_1 = Ae^{-2t}, \quad \bar{x}_1' = -2Ae^{-2t}, \quad \bar{x}_1'' = 4Ae^{-2t} \Rightarrow 4A - 22A + 28A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{5}.$$

Для $f_2(x) = 7e^t$ ищем частное решение в виде $\bar{x}_1 = Be^t, \quad \bar{x}_2 = Be^t,$

$$\bar{x}_1'' = Be^t; \quad B + 11B + 28B = 7 \Rightarrow B = \frac{7}{40}; \quad x = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t} + \frac{1}{5} e^{-2t} + \frac{7}{40} e^t.$$

$$\text{Тогда } \frac{dx}{dt} = -4c_1 e^{-4t} + 7c_2 e^{-7t} - \frac{2}{5} e^{-2t} + \frac{7}{40} e^t; \quad y = \frac{1}{2} \left(-4c_1 e^{-4t} - 7c_2 e^{-7t} - \frac{2}{5} e^{-2t} + \frac{7}{40} e^t + 5c_1 e^{-4t} + 5c_2 e^{-7t} + e^{-2t} + \frac{7}{8} e^t - e^t \right);$$

$$y = \frac{1}{2} c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-7t} + \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{1}{40} e^t.$$

$$427 \text{ (4327). } \begin{cases} yzy' = x & \left(y' = \frac{dy}{dx} \right) \\ y^2 z' = x & \left(z' = \frac{dz}{dx} \right) \end{cases}$$

Решение

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{zy'}{yz'} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx \cdot y} = \frac{dz}{dx \cdot z} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \text{ и } \ln|c_1 y| = \ln|z| \Rightarrow z = c_1 y.$$

Подставляем в первое уравнение $z = c_1 y$:

$$c_1 y^2 y' = x \Rightarrow c_1 y^2 dy = x dx, \quad c_1 \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c_2, \text{ но } c_1 y = z, \text{ тогда}$$

$$\underline{\underline{zy^2 - \frac{3}{2}x^2 = c_2}}.$$

$$428 \text{ (4328). } \begin{cases} y' = \frac{x+y}{z}, \\ z' = \frac{x-y}{y}. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{z}, \\ z' = \frac{x-y}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'z = x+y, \\ z'y = x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'z + z'y = 2x, \\ z' = \frac{x-y}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (zy)' = 2x, \\ z' = \frac{x-y}{y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} zy = x^2 + c_1, \\ z' = \frac{x}{y} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + c_1}{z}, \\ z' = \frac{xz}{x^2 + c_1} - 1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы есть линейное дифференциальное уравнение: $z = uv$, $z' = u'v + uv'$. Тогда

$$\begin{cases} u'v + uv' - \frac{uvx}{x^2 + c_1} = -1, \\ u'v + u \left(v' - \frac{vx}{x^2 + c_1} \right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v' - \frac{vx}{x^2 + c_1} = 0, \\ u'v = -1; \end{cases} \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{x dx}{x^2 + c_1} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{x^2 + c_1}; \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + c_1}} \Rightarrow u = -\ln|x + \sqrt{x^2 + c_1}| + c_2;$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + c_1}}{c_2 - \ln|x + \sqrt{x^2 + c_1}|}; \quad z = \sqrt{x^2 + c_1} \left(c_2 - \ln|x + \sqrt{x^2 + c_1}| \right).$$

$$429 \text{ (4329). } \begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение

$x \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = c_1 x$. Подставляем y во второе уравнение системы:

$$xz \frac{dz}{dx} = -x^2(1 + c_1^2) \Rightarrow z dz = -x(1 + c_1^2) dx, \quad \frac{z^2}{2} = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 c_1^2}{2}\right) + \frac{c_2}{2} \Rightarrow dx; \quad \underline{\underline{x^2 + y^2 + z^2 = c_2}}. \text{ (Здесь учли, что } xc_1 = y.)$$

$$430 \text{ (4330). } \begin{cases} y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ z' = \frac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$$

Решение

Разделим второе уравнение системы на первое: $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z = c_1 y}}.$$

Из первого уравнения системы имеем (делим правую часть почленно на x^2) $y' = \frac{2u}{1 - u^2(1 + c_1^2)}$, где $u = \frac{y}{x}$. Заменим $z = c_1 y$, $ux = y$,

$$y' = u'x + u, \quad u'x + u = \frac{2u}{1 - u^2(1 + c_1^2)} \Rightarrow u'x + u - u^2 u'x(1 + c_1^2) -$$

$$- u^3(1 + c_1^2) = 2u; \quad u'x[1 - u^2(1 + c_1^2)] = u[1 + u^2(1 + c_1^2)]; \quad \frac{[1 - u^2(1 + c_1^2)] du}{[1 + u^2(1 + c_1^2)] u} =$$

$$= \frac{dx}{x}; \frac{1-u^2(1+c_1^2)}{[1+u^2(1+c_1^2)]u} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2(1+c_1^2)}; 1-u^2(1+c_1^2) = A +$$

$$+ A(1+c_1^2)u^2 + Bu^2 + Cu; \left. \begin{array}{l} u^2 \left\{ A(1+c_1^2) + B = -(1+c_1^2) \right\} \\ u^1 \left\{ C = 0 \right\} \\ u^0 \left\{ A = 1 \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow A=1, B=$$

$$= -2(1+c_1^2), C=0; \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{d[1+u^2(1+c_1^2)]}{1+u^2(1+c_1^2)}; \ln|x| = \ln \frac{|uc_2|}{1+u(1+c_1^2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{uc_2}{1+u^2(1+c_1^2)}; x = \frac{yc_2}{x \left(1 + \frac{y^2}{x^2} (1+c_1^2) \right)}; \underline{\underline{x^2 + y^2 + z^2 = c_2 y.}}$$

$$431 \text{ (4331). } \begin{cases} z = y'(z-y)^2, \\ y = z'(z-y)^2. \end{cases}$$

Решение

$$\frac{z}{y} = \frac{dy}{dz} \Rightarrow z dz = y dy; \underline{\underline{y^2 - z^2 = c_1}} \text{ или } y = \sqrt{c_1 + z^2}.$$

Из второго уравнения системы имеем $\sqrt{c_1 + z^2} = \frac{dz}{dx} \left(z - \sqrt{c_1 + z^2} \right)^2$. Разделяем переменные:

$$dx = \frac{\left(z - \sqrt{c_1 + z^2} \right)^2}{\sqrt{c_1 + z^2}} dz; \int dx = \int \left(\frac{z^2}{\sqrt{c_1 + z^2}} - 2z + \sqrt{c_1 + z^2} \right) dz;$$

$$x = \left[\left(\frac{z\sqrt{c_1 + z^2}}{2} - \frac{c_1}{2} \ln|x + \sqrt{c_1 + z^2}| \right) - z^2 + \left(\frac{z\sqrt{c_1 + z^2}}{2} + \right. \right.$$

$$+ \frac{c_1}{2} \ln \left| x + \sqrt{c_1 + z^2} \right| \Bigg] + c_2^0 \Rightarrow x = z\sqrt{c_1 + z^2} - z^2 + c_2, \quad x = yz - y^2 + \underbrace{c_1 + c_2^0}_{-c_2};$$

$$\underline{\underline{yz - y^2 - x = c_2 .}}$$

$$432 \text{ (4332). } \begin{cases} 4 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$$

Решение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = 4 \frac{dx}{dt} + 3x - \sin t; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 3x = 0;$$

$$r^2 + 4r + 3 = 0, \quad r_1 = -3, \quad r_2 = -1; \quad x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}; \quad y = \cos t - \frac{dx}{dt}$$

$$\underline{\underline{= \cos t + 3c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} .}}$$

$$433 \text{ (4333). } \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = y. \end{cases}$$

Решение

$$\frac{d^4x}{dt^4} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^4y}{dt^4} = x \Rightarrow \frac{d^4x}{dt^4} - x = 0; \quad r^4 - 1 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_{3,4} = \pm i;$$

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t; \quad \frac{dx}{dt} = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - c_3 \sin t + c_4 \cos t;$$

$$\underline{\underline{\frac{d^2x}{dt^2} = y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t .}}$$

$$434 \text{ (4334). } \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 1. \end{cases}$$

Решение

Продифференцируем первое уравнение системы по t :

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = e^t.$$

Подставим в полученное уравнение $\frac{dx}{dt}$ из второго уравнения системы: $\frac{d^3x}{dt^3} = e^t - 1 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = e^t - t + c_1^0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t - \frac{t^2}{2} + c_1^0 t + c_2 \Rightarrow$

$$x = e^t - \frac{t^3}{6} + c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \quad \left(c_1 = \frac{c_1^0}{2} \right).$$

Из первого уравнения системы имеем: $\frac{dy}{dt} = e^t - x$, $\frac{d^2x}{dt^2} = e^t - e^t +$

$$+ \frac{t^3}{6} - c_1 t^2 - c_2 t - c_3 - e^t + t - 2c_1 = \frac{t^3}{6} - c_1 t^2 - (c_2 - 1)t - (c_3 + 2c_1) - e^t \Rightarrow$$

$$y = \frac{t^4}{24} - \frac{c_1}{3} t^3 - (c_2 - 1) \frac{t^2}{2} - (c_3 + 2c_1)t - e^t + c_4.$$

$$435 \text{ (4335). } \frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

Решение

Приравнявая первое и третье соотношения, по правилу производных пропорций имеем

$$\frac{dx + dz}{z - x} = \frac{dy}{x - z} \Rightarrow d(x + z) = -dy \text{ и } x + y + z = c_1.$$

Вторую интегрируемую комбинацию образовываем так:

$$\frac{dx - dy - dz}{2(z - y)} = \frac{dx}{z - y} \quad \text{или} \quad d(x - y - z) = dx^2 \Rightarrow x - y - z = x^2 + c'.$$

Третья комбинация:

$$\frac{dy - dz - dx}{2(x - y)} = \frac{dy}{dz} \quad \text{или} \quad d(y - z - x) = dy^2 \Rightarrow y - z - x = y^2 + c''.$$

Четвертая комбинация:

$$\frac{dz - dx - dy}{2(x - y)} = \frac{dz}{y - x} \quad \text{или} \quad d(z - x - y) = dz^2 \Rightarrow z - x - y = z^2 + c'''.$$

Итак,

$$\begin{cases} x - y - z = x^2 + c', \\ y - z - x = y^2 + c'', \\ z - x - y = z^2 + c''' \end{cases} \Rightarrow -\underbrace{(x + y + z)}_{c_1} = x^2 + y^2 + z^2 + c.$$

Окончательно: $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$ ($c_2 = -c - c_1$); $x + y + z = c_1$;

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 + z^2 = c_2}}.$$

В задачах 436 (4336)–439 (4339) найти частные решения систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

$$436 \text{ (4336). } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - yz}{x^2 - yz}, & y|_{x=0} = 1; \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z(x + y)}{x^2 - yz}, & z|_{x=0} = -1. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} \frac{dy}{y(y-z)} = \frac{dx}{x^2-yz}, \\ \frac{dz}{z(x+y)} = \frac{dx}{x^2-yz} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{x^2-yz} = \frac{dy}{y^2-yz} = \frac{dz}{z(x+y)}.$$

Составляем производную пропорцию:

$$\frac{dx-dy}{x^2-y^2} = \frac{dz}{z(x+y)} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{dz}{z(x+y)}, \quad \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z}.$$

Интегрируем: $\ln|x-y| = \ln|z| + \ln|c| \Rightarrow x-y = cz$.

Используем начальное условие: $0-1=-1c$, $c=1$. Поэтому $z=x-y$.
Подставляем z в первое уравнение системы:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-(x-y)y}{x^2-y(x-y)} = \frac{y^2-xy+y^2}{x^2-xy+y^2} = \frac{2y^2-xy}{x^2+y^2-xy} \left(: x^2 \right) = 2 \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}.$$

Обозначим $\frac{y}{x} = U$, $y = Ux$, $y' = U'x + U$. Тогда $U'x + U =$

$$= \frac{2U^2 - U}{1 + U^2 - U} \Rightarrow U'x + U + U'xU^2 + U^3 - U'xU - U^2 = 2U^2 - U;$$

$$U'x(1+U^2-U) = 3U^2 - 2U - U^3; \quad \frac{dU}{dx}x(U^2-U+1) = -U(U^2-3U+2);$$

$$\frac{dU(U^2-U+1)}{-U(U^2-3U+2)} = \frac{dx}{x}; \quad \frac{U^2-U-1}{-U(U-1)(U-2)} = \frac{A}{U} + \frac{B}{U-1} + \frac{C}{U-2};$$

$$-U+U-1 = A(U-1)(U-2) + BU(U-2) + C(U-1)U;$$

$$\left. \begin{array}{l} U=0: \quad -1=2A \\ U=1: \quad -1=-B \\ U=2: \quad -3=2C \end{array} \right\} \Rightarrow A=-\frac{1}{2}, \quad B=1, \quad C=-\frac{3}{2}; \quad x = \frac{U-1}{\sqrt{U(U-2)^3}};$$

$$x^2 U(U-2)^3 = (U-1)^2; \quad x^2 \frac{y}{x} \cdot \frac{(y-2x)^3}{x^3} = \frac{(y-x)^2}{x^2} \Rightarrow \underline{\underline{y(y-2x)^3 = (y-x)^2}}.$$

$$437 \text{ (4337). } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{2x}{t}, & x|_{t=1} = \frac{1}{3}; \\ \frac{dy}{dt} = x + y - 1 + \frac{2x}{t}, & y|_{t=1} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение

Ищем решения в виде: $x = At$; $y = Bt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = A$; $\frac{dy}{dt} = B$;

$$\begin{cases} A = 1 - 2A, \\ B = At + Bt - 1 + 2A \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}t + y - 1 + \frac{2}{3}.$$

$$\text{При } t=1 \quad y = -\frac{1}{3} \Rightarrow B = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow B = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{3}t; \quad y = -\frac{1}{3}t}}.$$

$$438 \text{ (4338). } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \frac{dy}{dt} = z + x - y, & x|_{t=0} = 1, \quad y|_{t=0} = z|_{t=0} = 0. \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$$

Решение

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 & 1 \\ 1 & -1-k & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + 2k + k^2 - k - 2k^2 - k^3 + 1 + 1 + 1 + k +$$

$$+ 1 + k - 1 + k = 0; \quad k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0; \quad (k-2)(k+2)(k+1) = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = -2, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 2.$$

Частные решения данной системы ищем в виде (первой) задачи 424.4 (4324.4):

а) $k_1 = -2$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \Rightarrow \gamma_1 = 0, \alpha_1 = -\beta_1. \text{ Если } \alpha_1 = 1, \text{ то } \beta_1 = -1. \text{ Тогда} \\ \alpha_1 + \beta_1 + 3\gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = e^{-2t}, y_1 = -e^{-2t}, z_1 = 0.$$

б) $k_2 = -1$:

$$\begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 + \beta_2 + 2\gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ \beta_2 = -\gamma_2. \end{cases}$$

Пусть $\beta_2 = 1$, тогда $\gamma_2 = -1$, $\alpha_2 = 1$; $x_2 = e^{-t}$, $y_2 = e^{-t}$, $z_2 = -e^{-t}$.

в) $k_3 = 2$:

$$\begin{cases} -3\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 - 3\beta_3 + \gamma_3 = 0, \Rightarrow 4\beta_3 = 2\gamma_3. \text{ Если } \beta_3 = 1, \text{ то } \gamma_3 = 2, \alpha_3 = 1. \text{ Тогда} \\ \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_3 = e^{2t}, y_3 = e^{2t}, z_3 = 2e^{2t}; x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}, y(t) = -c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}, z(t) = -c_2 e^{-t} + 2c_3 e^{2t}.$$

Используем начальные условия:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ -c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ -c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_2 + 2c_3 = 1, \\ -c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{3}, c_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Частное решение: } \underline{\underline{x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}}}; \underline{\underline{y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} +$$

$$\underline{\underline{+ \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}}}; \underline{\underline{z(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}}}.$$

$$439 \text{ (4339). } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, & x|_{t=0} = -1; \\ \frac{dy}{dt} = z + x, & y|_{t=0} = 1; \\ \frac{dz}{dt} = x + y, & z|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Решение

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^3 - 3k - 2 = 0 \text{ или } (k-2)(k+1)^2 = 0;$$

$$k_1 = 2, k_{2,3} = -1.$$

а) $k_1 = 2$:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 - 2\beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 - 2\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$. Отсюда получаем первую систему решений:

$$x_1 = e^{2t}, y_1 = e^{2t}, z_1 = e^{2t}.$$

б) $k_{2,3} = -1$:

Три уравнения системы сводятся фактически к одному: $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0$ или $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0$.

Полученное уравнение имеет два линейно независимых решения, например: $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = -1$ и $\alpha_3 = 0, \beta_3 = -1, \gamma_3 = 1$. Каждому из них соответствует единственное решение: $x_2 = e^{-t}, y_2 = 0, z_2 = -e^{-t}$ и $x_3 = 0, y_3 = -e^{-t}, z_3 = e^{-t}$.

$$\text{Поскольку } \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & -e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \text{ то решение}$$

образует фундаментальную систему. Общее решение имеет вид:

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}, \quad y(t) = c_1 e^{2t} - c_3 e^{-t}, \quad z(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} + c_3 e^{-t}.$$

Используем начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= -1, \\ c_1 - c_3 &= 1, \\ c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3c_1 = 0 \text{ и } c_1 = 0, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = -1.$$

Частное решение: $x(t) = -e^{-t}, \quad y(t) = e^{-t}, \quad z(t) = 0.$

440 (4340). Найти пару линий, обладающих следующими свойствами:

а) касательные, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси ординат; б) нормали, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси абсцисс; в) одна из линий проходит через точку (1; 1), другая через точку (1; 2).

Решение

Уравнения касательных к 1-й и 2-й кривой соответственно:

$$Y = Y_1(x_0) + Y_1'(x_0)(x - x_0); \quad (1)$$

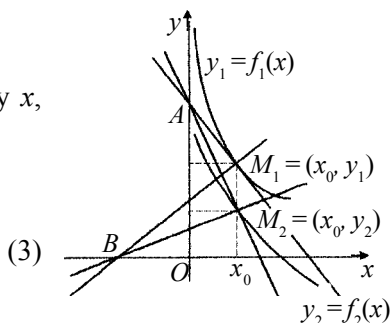
$$Y = Y_2(x_0) + Y_2'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

По условию при $x = 0$ левые части (1) и (2) равны:

$$[Y_2'(x_0) - Y_1'(x_0)]x_0 = Y_2(x_0) - Y_1(x_0).$$

Заменяя x_0 на произвольную точку x , имеем:

$$\frac{d[Y_2(x) - Y_1(x)]}{Y_2(x) - Y_1(x)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow Y_2(x) - Y_1(x) = c_1 x.$$



Уравнения нормалей к кривым в точке x_0 :

$$Y = Y_1(x_0) - \frac{1}{Y_1'(x_0)}(x - x_0), \quad \Rightarrow \begin{cases} (Y - Y_1(x_0))Y_1'(x_0) = x_0 - x; \\ (Y - Y_2(x_0))Y_2'(x_0) = x_0 - x. \end{cases}$$

$$Y = Y_2(x_0) - \frac{1}{Y_2'(x_0)}(x - x_0)$$

В точке B $Y = 0$:

$$\begin{cases} -Y_1(x_0) Y_1'(x_0) = x_0 - x, \\ -Y_2(x_0) Y_2'(x_0) = x_0 - x \end{cases} \Rightarrow \frac{Y_1'(x_0)}{Y_2'(x_0)} = \frac{Y_2(x_0)}{Y_1(x_0)}.$$

Заменяем x_0 на x : $\frac{Y_1'(x)}{Y_2'(x)} = \frac{Y_2(x)}{Y_1(x)} \Rightarrow Y_1(x) dY_1(x) = Y_2(x) dY_2(x),$

$$Y_2^z(x) - Y_1^z(x) = c_2. \quad (4)$$

Используем начальные условия для (3) и (4):

$$\left. \begin{aligned} Y_2(1) - Y_1(1) &= c_1 \cdot 1, \\ Y_2^z(1) - Y_1^z(1) &= c_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2 - 1 &= c_1, \\ 4 - 1 &= c_2 \end{aligned} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 3; \quad \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= X, \\ Y_2^z - Y_1^z &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= X, \\ (Y_2 - Y_1)(Y_2 + Y_1) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} Y_2 - Y_1 &= X, \\ Y_2 + Y_1 &= \frac{3}{X} \end{aligned} \Rightarrow Y_1 = \frac{3 - X^2}{2X}; Y_2 = \frac{3 + X^2}{2X} \right.$$

441 (4341). Даны две линии: $y = f(x)$, проходящая через точку $(0; 1)$,

и $y = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, проходящая через точку $(0; \frac{1}{2})$. Касательные, проведен-

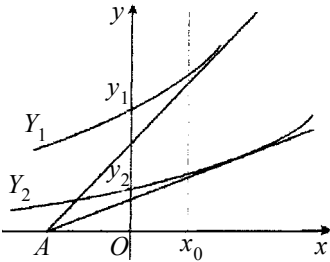
ные к обеим линиям в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси абсцисс. Найти линию $y = f(x)$.

Решение

Пусть уравнение первой кривой $Y_1 = f(x)$, а второй – $Y_2 = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Тогда $\frac{dY_2}{dx} = f(x) = Y_1$.

Уравнения касательных в точке x_0 :

$$Y_1 - Y_1(x_0) = Y_1'(x_0)(x - x_0), \quad Y_2 - \int_{-\infty}^{x_0} f(t)dt =$$


$$= Y_1(x_0)(x - x_0).$$

$$\text{В точке } A \quad Y_1 = Y_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = -\frac{Y_1(x_0)}{Y_1'(x_0)}, \\ x - x_0 = -\frac{Y_2(x_0)}{Y_1(x_0)}. \end{cases}$$

Заменяя в правых частях x_0 на x , имеем: $\frac{Y_1}{Y_1'} = \frac{Y_2}{Y_1}$.

Приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Y_1 = f(x), \\ \frac{dY_2}{dx} = f(x), \\ \frac{Y_1}{Y_1'} = \frac{Y_2}{Y_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{dY_2}{dx}, \\ \frac{Y_1}{Y_1'} = \frac{Y_2}{Y_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{dY_1}{Y_1} = \frac{dY_2}{Y_2}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим $Y_1 = Y_2 C$. При $Y_1 = 1$

и $Y_2 = \frac{1}{2}$ имеем $C = 2$. Итак, $Y_1 = 2Y_2$ и $Y_2 = \frac{1}{2}Y_1$. Подставляем Y_2

в первое дифференциальное уравнение: $Y_1 = \frac{1}{2} \frac{dY_1}{dx}$ или $\frac{dY_1}{Y_1} = 2dx$. Ин-

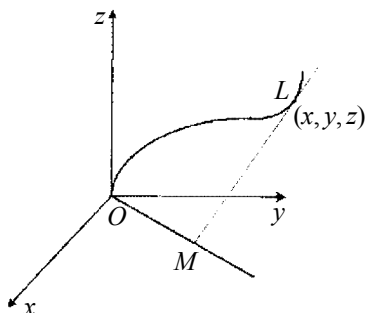
тегрируем его: $\ln|Y_1| = 2x + C_1$; $Y_1 = e^{2x+C_1}$; $Y_1|_{x=0} = 1:1 = e^{C_1} \Rightarrow C_1 = 0$;

$$\underline{\underline{Y_1 = e^{2x}}}, \quad \underline{\underline{Y_2 = \frac{1}{2}e^{2x}}}.$$

442 (4342). Найти линию в пространстве, проходящую через точку $(0; 1; 1)$ и обладающую свойствами: а) след касательной на плоскости Oxy при перемещении точки касания вдоль линии описывает биссектрису угла между положительными направлениями осей Ox и Oy ; б) расстояние этого следа от начала координат равно координате z точке касания.

Решение

Параметрические уравнения кривой:
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$



Уравнение касательной к кривой L в точке $(x; y; z)$:

$$\frac{\bar{x} - x}{x'_t} = \frac{\bar{y} - y}{y'_t} = \frac{\bar{z} - z}{z'_t}. \quad (1)$$

При $\bar{z} = 0$ $\bar{x} = \bar{y}$, $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{z}^2$ (по условию $OM = z$) $\Rightarrow$

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\pm z}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Подставляем (2) в уравнения (1):
$$\frac{\frac{\pm z}{\sqrt{2}} - x}{x'} = \frac{\frac{\pm z}{\sqrt{2}} - y}{y'} = \frac{-z}{z'} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\pm z}{\sqrt{2}} - x \right) z' = -zx', \\ \left(\frac{\pm z}{\sqrt{2}} - y \right) z' = -zy'; \end{cases} \quad (3)$$

$$x' - \frac{z'}{z}x = \pm \frac{z}{\sqrt{2}}; \quad x = UV, \quad x' = U'V + UV'; \quad U'V + UV' - \frac{z'}{z}UV = \pm \frac{z}{\sqrt{2}};$$

$$UV + U \left(V' - \frac{z'}{z}V \right) = \pm \frac{z}{\sqrt{2}}; \quad V' - \frac{z'}{z}V = 0, \quad \frac{V'}{V} = \frac{z'}{z} \Rightarrow V = z. \text{ Тогда}$$

$$U'z = \pm \frac{z}{\sqrt{2}}; \quad U = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|z| + C_1; \quad x(t) = \pm \frac{z}{\sqrt{2}} \ln|z| + C_1z.$$

Из второго уравнения системы (3) имеем: $y = \pm \frac{z}{\sqrt{2}} \ln|z| + C_1z$, где

$z(t)$ – свободная координата.

$$\text{Итак, } \begin{cases} x = \pm \frac{z}{\sqrt{2}} \ln|z| + C_1z, \\ y = \pm \frac{z}{\sqrt{2}} \ln|z| + C_2z. \end{cases}$$

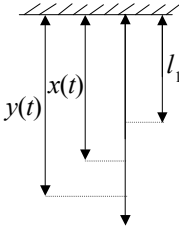
Используем начальные условия (0; 1; 1):

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{cases} x = \pm \frac{z \ln|z|}{\sqrt{2}}, \\ x - y + z = 0. \end{cases}}}$$

443 (4343). Два шарика, масса каждого из которых m , соединены очень легкой пружиной (удлинение ее пропорционально растягивающей силе). Длина нерастянутой пружины l_0 . Пружина растянута до длины l_1 , а затем в момент $t = 0$ оба шарика, расположенные вертикально один над

другим, начинают падать (сопротивлением среды пренебрегаем). Через время T длина нити сокращается до l_0 . Найти закон движения каждого из шариков.

Решение



Начальные условия:

$$y(0) = l_1, \quad y'(0) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \quad (1)$$

Для состояния равновесия

$$k(l - l_0) = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{l - l_0}.$$

Дифференциальные уравнения движения шариков:

$$\begin{cases} m(y - x - l_0)'' = -k(y - x - l_0), \\ m(y + x)'' = 2mg. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для первого дифференциального уравнения: $mr^2 = -k$, $r^2 = -\frac{k}{m}$, $r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$. Тогда $y - x - l_0 = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$.

Из второго дифференциального уравнения получаем: $y + x = gt^2 + C_3 t + C_4$.

Используя начальные условия (1), имеем:

$$(y - x - l_0)_{t=0} = l_1 - l_0 = C_2; \quad (y - x - l_0)'_{t=0} = (y' - x')_{t=0} = 0 = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$C_1 = 0. \quad \text{Тогда } y - x - l_0 = (l_1 - l_0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны, } (y + x)_{t=0} &= l_1 = C_4, \quad (y' + x')_{t=0} = (2gt + C_3)_{t=0} = \\ &= C_3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y(t) - x(t) - l_0 = (l_1 - l_0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \\ y(t) + x(t) = gt^2 + l_1 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \left[gt^2 + (l_1 + l_0) + \right. \\ \left. + (l_1 - l_0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right]; \quad x(t) = \frac{1}{2} \left[gt^2 + (l_1 - l_0) \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right].$$

Учитывая, что шарики совершают колебательное движение и четверть периода колебания $T = \frac{2\pi}{4\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\pi}{2T}$, получаем:

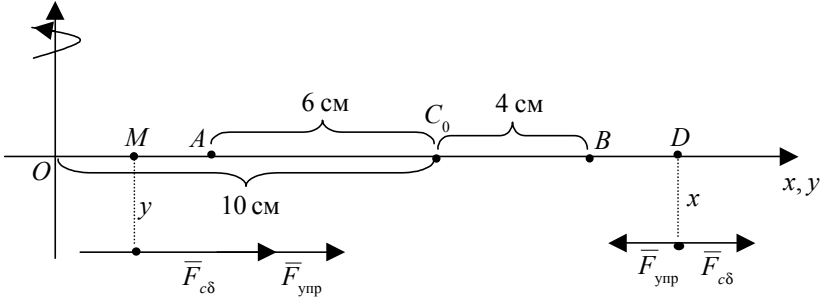
$$\underline{\underline{x(t) = \frac{1}{2} \left[gt^2 + (l_1 - l_0) \left(1 - \cos \frac{\pi t}{2T} \right) \right]}; \quad \underline{\underline{y(t) = \frac{1}{2} \left[gt^2 + (l_1 + l_0) + \right.}} \\ \left. \left. + (l_1 - l_0) \cos \frac{\pi t}{2T} \right] \right.}}$$

444 (4344). Горизонтальная труба вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью 2 радиана в секунду. В трубке находятся два шарика с массами 300 и 200 г, соединенные невесомой упругой нерастянутой пружиной длиной 10 см, причем более тяжелый шарик дальше от оси вращения. Сила 0,24 Н растягивает пружину на 1 см, а центр масс системы шариков удален от оси вращения на 10 см. Шарик удерживаются в указанном положении некоторым механизмом. В момент, который считаем началом отсчета времени, действие механизма прекращается, и шарики приходят в движение. Найти закон движения каждого шарика относительно трубки. (Трением пренебрегаем).

Решение

Пусть x – координата более тяжелого шарика; y – более легкого; $F_{\text{упр}} = c\delta$ – сила упругости пружины; $c = 0,24 \text{ Н/см} = 24 \text{ Н/м}$; δ – смещение пружины.

По условию $m_1 = 300 \text{ г} = 0,3 \text{ кг}$; $m_2 = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг}$; $\omega = 2 \text{ рад/с}$. На рисунке показаны силы, действующие только вдоль трубки; $AB = 10 \text{ см}$ – первоначальная длина пружины; AM и BD – соответственно смещение крайних точек пружины при вращении трубки; C_0 – центр масс системы.



Дифференциальное уравнение относительного движения каждого из шариков (расстояния в метрах) имеет вид

$$\begin{cases} m_1 x'' = m_1 \omega^2 x - C(x - y - 0,1), \\ m_1 y'' = m_2 \omega^2 y + C(x - y - 0,1). \end{cases} \quad (1)$$

Смещение $\delta = BD + AM = (x - 0,14) + (0,01 - y) = x - y - 0,1$. Тогда

$$\begin{cases} 0,3x'' = 4 \cdot 0,3x - C(x - y - 0,1), \\ 0,2y'' = 4 \cdot 0,2y + C(x - y - 0,1). \end{cases} \quad (1')$$

Складывая почленно уравнения системы (1') получаем

$$0,3x'' + 0,2y'' = 4(0,3x + 0,2y). \quad (2)$$

Обозначим $0,3x + 0,2y = U$. Тогда $0,3x'' + 0,2y'' = U''$, $U'' - 4U = 0$.

Характеристическое уравнение: $r^2 - 4 = 0$, $r_{1,2} = \pm 2$; $U = C_1^0 e^{2t} +$

$$+ C_2^0 e^{-2t} = \frac{C_1 + C_2}{2} e^{2t} + \frac{C_1 - C_2}{2} e^{-2t} = C_1 \operatorname{ch} 2t + C_2 \operatorname{sh} 2t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0,3x + 0,2y = C_1 \operatorname{ch} 2t + C_2 \operatorname{sh} 2t, \\ 0,3x' + 0,2y' = 2(C_1 \operatorname{sh} 2t + C_2 \operatorname{ch} 2t). \end{cases} \quad (3)$$

Используем начальные условия: $t = 0$ $x = 0,14$ (м), $x' = 0$; $y = 0,04$ (м); $y' = 0$. Подставляем их в (3):

$$\left. \begin{aligned} 0,042 + 0,008 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 0 &= 2C_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 = 0,05; C_2 = 0.$$

Значит, $0,3x + 0,2y = 0,05 \operatorname{ch} 2t \Rightarrow y = 0,25 \operatorname{ch} 2t - 1,5x$.

Подставляем y в первое уравнение системы (1'), разделив предварительно обе части его на 0,03:

$$x'' = 4x - 80(x - 0,25 \operatorname{ch} 2t + 1,5x - 0,1) \Rightarrow x'' + 196x' = 20 \operatorname{ch} 2t + 8. \quad (4)$$

Характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения: $r^2 + 196 = 0$, $r_{1,2} = \pm 14i$.

Общее решение однородного уравнения: $x^* = D_1 \cos 14t + D_2 \sin 14t$.

Частные решения ищем в виде $\bar{x} = A \operatorname{ch} 2t + B$, $\bar{x}' = 2A \operatorname{sh} 2t$,

$$\bar{x}'' = 4A \operatorname{ch} 2t.$$

Подставляем эти решения в (4):

$$\begin{aligned} 4A \operatorname{ch} 2t + 196A \operatorname{ch} 2t + 196B &= 20 \operatorname{ch} 2t + 8 \Rightarrow A \frac{1}{10}; B = \frac{2}{49}; x = x^* + \bar{x} = \\ &= D_1 \cos 14t + D_2 \sin 14t + \frac{1}{10} \operatorname{ch} 2t + \frac{2}{49}; x' = 14(-D_1 \sin 14t + D_2 \cos 14t) + \\ &+ \frac{1}{5} \operatorname{sh} 2t. \end{aligned}$$

Используем начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} 0,14 &= D_1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{49}, \\ 0 &= 14D_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_2 = 0, D_1 = -\frac{0,04}{49};$$

$$x = \frac{1}{10} \operatorname{ch} 2t - \frac{0,04}{49} \cos 14t + \frac{2}{49} \text{ (м)} = 10 \operatorname{ch} 2t - \frac{4}{49} \cos 14t + \frac{200}{49} \text{ (см)};$$

$$y = 0,25 \operatorname{ch} 2t - 1,5 \left(0,1 \operatorname{ch} 2t - \frac{0,04}{49} \cos 14t + \frac{2}{49} \right) = 0,1 \operatorname{ch} 2t + \frac{0,06}{49} \cos 14t - \\ - \frac{3}{49} \text{ (м)} = 10 \operatorname{ch} 2t + \frac{6}{49} \cos 14t - \frac{300}{49} \text{ (см)} .$$

445 (4345). Скорость роста культуры микроорганизмов пропорциональна их количеству и количеству питательных веществ (коэффициент пропорциональности равен k). Скорость убывания питательных веществ пропорциональна наличному количеству микроорганизмов (коэффициент пропорциональности равен k_1). В начале опыта в сосуде имелось A_0 микроорганизмов и B_0 питательных веществ. Найти зависимость количества A микроорганизмов и количества B питательных веществ от времени ($k > 0$, $k_1 > 0$).

Решение

Составляем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = k(A \cdot B), \\ \frac{dB}{dt} = -k_1 A. \end{cases}$$

Начальные условия: $A|_{t=0} = A_0$; $B|_{t=0} = B_0$.

После деления почленно первого уравнения системы на второе получим:

$$\frac{dA}{dB} = -\frac{k}{k_1} B \Rightarrow dA = -\frac{k}{k_1} B dB; \quad A = -\frac{k}{k_1} \cdot \frac{B^2}{2} + C_1.$$

Используем начальные условия:

$$A_0 = -\frac{k}{k_1} \cdot \frac{B_0^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = A_0 + \frac{k}{k_1} B_0^2.$$

Итак,

$$A = A_0 + \frac{k}{2k_1} (B_0^2 - B^2) = \frac{k}{2k_1} \left[\left(B_0^2 + \frac{2k_1}{k} A_0 \right) - B^2 \right].$$

Обозначим $\alpha = \sqrt{B_0^2 + \frac{2k_1}{k} A_0}$. Тогда

$$A = \frac{k}{2k_1} (\alpha^2 - B^2). \quad (1)$$

Подставляя значение A во второе уравнение системы и разделив переменные, получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} \int_{B_0}^B \frac{dB}{B^2 - d^2} &= \int_0^t dt \Rightarrow t = \frac{1}{k\alpha} \ln \left| \frac{B - \alpha}{\frac{B + \alpha}{\frac{B_0 - \alpha}{B_0 + \alpha}}} \right| \Rightarrow \frac{\alpha - B}{\alpha + B} = \frac{\alpha - B_0}{\alpha + B_0} e^{\alpha k t} \Rightarrow \\ B &= \alpha \frac{1 - \beta e^{\alpha k t}}{1 + \beta e^{\alpha k t}}. \end{aligned}$$

Подставим это значение B в (1):

$$A = \frac{k\alpha^2}{2k_1} \left[1 - \left(\frac{1 - \beta e^{\alpha k t}}{1 + \beta e^{\alpha k t}} \right)^2 \right].$$

446 (4346). Допустим, что бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их наличному количеству (коэффициент пропорциональности равен a), но в то же время вырабатывают яд, истребляющий их со скоростью, пропорциональной количеству яда и количеству бактерий (коэффициент пропорциональности равен b). Далее, допустим, что скорость выработки яда пропорциональна наличному количеству бактерий (коэффициент пропорциональности равен c). Число бактерий сначала возрастает до некоторого наибольшего значения, а значит, убывает, стремясь к нулю. Показать, что для любого момента t число N бактерий дается формулой

$$N = \frac{4M}{(e^{kt} + e^{-kt})^2},$$

где M – наибольшее число бактерий и время t измеряется от того момента, когда $N = M$; k – некоторая постоянная.

Решение

Пусть N – количество бактерий в момент времени t . Условию задачи соответствует следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNT, \\ \frac{dT}{dt} = cN. \end{cases} \quad (1)$$

Разделив обе части первого уравнения системы (1) на соответствующие части второго, получим дифференциальное уравнение $\frac{dN}{dT} = \frac{a}{c} -$

$$-\frac{b}{c}T \Rightarrow N = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \cdot \frac{T^2}{2} + C_1$$

Учитывая, что при $N = 0$ величина $T = 0$, получим $C_1 = 0$. Итак,

$$N = \frac{a}{c}T - \frac{b}{c} \cdot \frac{T^2}{2}.$$

Если обозначить $\frac{a}{c} = m$, $\frac{b}{2c} = n$, то

$$N = mT - nT^2. \quad (2)$$

Преобразовав (2) к виду $N = \frac{m^2}{4n} - n \left(T - \frac{m}{2n} \right)^2$, имеем

$$N_{\max} = M = \frac{m^2}{4n} = \frac{a^2}{2bc}. \quad (3)$$

Запишем (2) иначе: $T^2 - \frac{m}{n}T + \frac{N}{n} = 0$. Тогда

$$T = \frac{m}{2n} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4n^2} - \frac{N}{n}}.$$

Подставляя это значение T в первое уравнение системы (1), получим

$$\frac{dN}{dt} = aN - \frac{bm}{2n}N \mp bN \sqrt{\frac{m^2}{4n^2} - \frac{N}{n}}. \quad (4)$$

После подстановки в (4) значения m и n учетом (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \mp aN \sqrt{1 - \frac{N}{M}} \left(aN = \frac{bm}{2n} N; bN \sqrt{\frac{m^2}{4n^2} - \frac{N}{n}} = bN \sqrt{\frac{M}{n}} \sqrt{1 - \frac{N}{M}} = \right. \\ &= \left. 2c\cancel{n}N \frac{m}{2\cancel{n}} \sqrt{1 - \frac{N}{M}} = \cancel{c} \cdot \frac{a}{\cancel{c}} \sqrt{1 - \frac{N}{M}} = a \sqrt{1 - \frac{N}{M}} \right). \end{aligned}$$

Разделим переменные в последнем дифференциальном уравнении:

$$\frac{dN}{N \sqrt{1 - \frac{N}{M}}} = \mp a dt; \quad (5)$$

$$\int \frac{dN}{N \sqrt{1 - \frac{N}{M}}} = \left[\sqrt{1 - \frac{N}{M}} = t, dN = -2Mt dt, \right] = \int \frac{2\cancel{M}t dt}{\cancel{M}(1-t^2)t} = \ln \frac{1-t}{1+t}.$$

Итак, $\ln \frac{1-t}{1+t} = \mp at + C_2.$

Учитывая, что при $t = 0$ $N = M$, получаем, что при $t = 0$ и $C_2 = 0$.

Тогда $\ln \frac{1-t}{1+t} = \mp at \Rightarrow \frac{1-t}{1+t} = e^{\mp at} \Rightarrow t = \frac{e^{\pm at/2} - e^{\mp at}}{e^{\pm at/2} + e^{\mp at/2}} = \pm \operatorname{th} \frac{at}{2};$

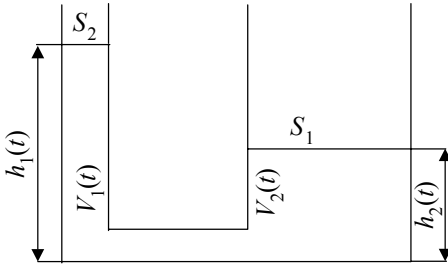
$$\sqrt{1 - \frac{N}{M}} = \pm \operatorname{th} \frac{at}{2} \Rightarrow N = M \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{at}{2} \right) \text{ или } N = \frac{M}{\operatorname{ch}^2 \frac{at}{2}} = \frac{4M}{\left(e^{at/2} + e^{-at/2} \right)^2}.$$

Обозначив $\frac{a}{2} = k$, окончательно имеем $N = \frac{4M}{\left(e^{kt} + e^{-kt} \right)^2}.$

447 (4347). Два цилиндра, основания которых лежат в одной плоскости, соединены внизу капиллярной трубкой, наполнены жидкостью до разной

высоты (H_1 и H_2). Через трубку в единицу времени протекает объем жидкости, пропорциональный разности высот, т. е. равный $\alpha(h_1 - h_2)$, где α – коэффициент пропорциональности. Найти закон изменения высоты жидкости в сосудах над капиллярной трубкой. Поперечное сечение сосудов S_1 и S_2 .

Решение



Обозначим $h_1(t)$ и $h_2(t)$ – переменные высоты жидкостей в сообщающихся сосудах; $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – скорости протекания по первому и второму цилиндрам. Тогда

$$h_1(0) = H_1; \quad h_2(0) = H_2. \quad (1)$$

Система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -\alpha(h_1 - h_2) = S_1 \dot{h}_1, \\ \alpha(h_1 - h_2) = S_2 \dot{h}_2 \end{cases}, \quad \left(\dot{h}_1 = \frac{dh_1}{dt}; \quad \dot{h}_2 = \frac{dh_2}{dt} \right). \quad (2)$$

Решение системы:

$$h_2 = \frac{S_1 \dot{h}_1}{\alpha} + h_1, \quad \dot{h}_2 = \frac{S_1 \ddot{h}_1}{\alpha} + \dot{h}_1; \quad \frac{S_1 S_2}{\alpha} \ddot{h}_1 + S_2 \dot{h}_1 = \cancel{\alpha \dot{h}_1} - S_1 \dot{h}_1 - \cancel{\alpha \dot{h}_1} \Rightarrow$$

$$\ddot{h}_1 + \alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \dot{h}_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + \alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} r = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = -\alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2};$$

$$h_1(t) = C_1 + C_2 e^{-\alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} t}; \quad (3)$$

$$\dot{h}_1(t) = -\alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} e^{-\alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} t} C_2. \quad (4)$$

Из первого уравнения системы (2) имеем

$$\dot{h}_1(t) = -\frac{\alpha(H_1 - H_2)}{S_1}. \quad (5)$$

Подставляем начальные условия (1) и (5) в (3) и (4):

$$\begin{cases} H_1 = C_1 + C_2, \\ -\frac{\alpha(H_1 - H_2)}{S_1} = -\alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \Rightarrow C_2 = \frac{H_1 - H_2}{S_1 + S_2} S_2; \quad C_1 = \frac{H_1 S_1 + H_2 S_2}{S_1 + S_2}. \end{cases}$$

Тогда

$$h_1(t) = \frac{H_1 S_1 + H_2 S_2}{S_1 + S_2} + \frac{H_1 - H_2}{S_1 + S_2} S_2 e^{-\alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} t}.$$

Аналогично

$$h_2(t) = \frac{H_1 S_1 + H_2 S_2}{S_1 S_2} - \frac{H_1 - H_2}{S_1 + S_2} S_1 e^{-\alpha \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} t}.$$

Список литературы

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2002. – 432 с.
2. *Бермант А.Ф.* Курс математического анализа: В 2 т. – М.: ГИФМЛ, 1958. – Т. 2. – 358 с.
3. *Гутер Р.С., Янпольский А.Р.* Дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1976. – 504 с.
4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 2. – 364 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ГИФМЛ, 1981. – 704 с.
6. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике: В 4 ч. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1974. – Ч. 3. – 374 с.
7. *Кузнецов А.Н., Касянчук А.В.* Методические указания к решению задач по дифференциальным уравнениям и их применениям. – Николаев: НКИ, 1988. – 52 с.
8. *Павліщев В.І., Попова Н.І.* Диференціальні рівняння. – Миколаїв: УДМТУ, 2002. – 44 с.
9. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: В 2 т. – М.: Наука, 1972. – Т. 2. – 576 с.
10. *Пономарев К.К.* Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. – М.: Учпедгиз, 1962. – 182 с.
11. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – К.: Вища школа, 1984. – 406 с.
12. *Смолянский Н.Г.* Таблицы неопределенных интегралов. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 112 с.
13. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
§ 1. Уравнения первого порядка	4
Уравнения с разделяющимися переменными (4). Однородные уравнения (20). Линейные уравнения (30). Разные задачи (уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные) (46). Другие примеры уравнений первого порядка (75). Уравнения в полных дифференциалах (88). Интегрирующий множитель (93). Разные задачи (99).	
§ 2. Уравнения первого порядка (продолжение)	116
Поле направлений. Изоклины (116). Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений (118). Особые решения. Уравнения Клеро и Лагранжа (127). Ортогональные и изогенальные траектории и эвольвенты (143).	
§ 3. Уравнения второго и высшего порядка. Частные случаи уравнений второго порядка	158
Частные случаи уравнений более высоких порядков (187). Приближенные решения (192).	
§ 4. Линейные уравнения	201
Уравнения с постоянными коэффициентами (217). Уравнения высших порядков (263).	
§ 5. Системы дифференциальных уравнений	273
Список литературы	308

УДК 517.91 (075.8)
ББК 22.1

Кузнецов А.М.

К 89 Розв'язник задач з теми "Диференціальні рівняння". – Миколаїв:
НУК, 2006. – 312 с.

Наведені розв'язання біля 450 задач з теми "Диференціальні рівняння" відомого "Сборника задач по курсу математического анализа" автора Г.М. Бермана.

Призначений для студентів-іноземців, молодих викладачів і всіх тих, хто цікавиться методами розв'язання задач з диференціальних рівнянь.

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВ Альберт Миколайович

Розв'язник задач з теми "Диференціальні рівняння"

*Навчальний посібник
(російською мовою)*

Редактор *В.М. Крохіна*
Комп'ютерна правка та верстка *В.Г. Мазанко*
Коректор *М.О. Паненко*

Свідectво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 08.12.06. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 18,0. Обл.-вид. арк. 19,3.
Тираж 150 прим. Вид. № 30. Зам. № 131. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5



ВИДАВНИЦТВО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ



Шановні панове!

Запрошуємо Вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого забезпечать оперативне та якісне виконання замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника в повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригіналу-макета, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізку на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублюкатором фірми "Duplo" формату А3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати **підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки**, – ми до Ваших послуг.

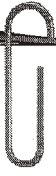
© Національний університет кораблебудування

✉ Україна, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5,

видавництво НУК

☎ 8(0512) 47-83-86; 39-81-42, 39-73-39, fax 8(0512) 42-46-52;

E-mail: publishing@usmtu.edu.ua



ДЛЯ ЗАМЕТОК