

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**А. М. КУЗНЕЦОВ, Н. О. РОМАНЧУК,
А. В. ВАРШАМОВ, О. Л. ЧОРНИЙ**

**ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв • НУК • 2018

УДК 517(075.8)

О-54

Автори:

А. М. Кузнецов, кандидат фізико-математичних наук, професор Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова;

Н. О. Романчук, кандидат педагогічних наук, доцент;

А. В. Варшамов, старший викладач;

О. Л. Чорний, викладач

Рецензент Є. Ю. Нєдєлько, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано Методичною радою НУК

Олімпіадні задачі з вищої математики : навчальний посібник /
О-54 А. М. Кузнецов, Н. О. Романчук, А. В. Варшамов, О. Л. Чорний. –
Миколаїв : НУК, 2018. – 208 с.

Посібник містить більше ніж 180 задач, які пропонувалися на математичних олімпіадах НУК ім. адм. Макарова впродовж останніх 40 років, а також деякі задачі всеукраїнських студентських математичних олімпіад. До всіх задач даються розв'язки або вказівки до розв'язування.

Призначено для студентів технічних вузів.

УДК 517(075.8)

© Кузнецов А. М., Романчук Н. О.,

Варшамов А. В., Чорний О. Л., 2018

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2018

ПЕРЕДМОВА

У Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова протягом більш як 40 років щорічно проводяться математичні олімпіади для студентів I–III курсів. Задачі, що пропонуються на цих олімпіадах, носять нестандартний характер і часто вимагають від студентів не тільки знання програмного матеріалу, але і творчого підходу.

Даний посібник містить більше ніж 180 задач, що пропонувалися на математичних олімпіадах нашого університету впродовж вказаного періоду, а також деякі задачі всеукраїнських студентських математичних олімпіад. Для всіх задач наведено розв'язки або вказівки до розв'язування.

Посібник допоможе студентам навчитися розв'язувати задачі проблемного характеру, дасть можливість оцінити свої здібності та підготуватися до участі в подібних заходах.

I. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

Умови задач

1.1. Довести, що матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задовольняє рівняння $X^2 - (a + d)X + (ad - bc)E = O$, де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. Знайти матрицю $B = A^{2015} - A^{2000}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3. Обчислити $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2015}$.

1.4. Обчислити $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2015}$.

1.5. Квадратна матриця A задовольняє рівняння $A^2 - 3A + E = O$. Довести, що $A^{-1} = 3E - A$, якщо E – одинична матриця, а O – нульова матриця.

1.6. Нехай A і B – квадратні матриці однакового порядку, такі, що $AB + A + B = O$, де O – нульова матриця. Довести, що $AB = BA$.

1.7. Довести, що $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.8. Нехай α, β, γ – корені рівняння $x^3 + px + q = 0$. Обчис-

лити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$.

1.9. В матриці $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ з дійсними елементами

виконується рівність $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Показати, що $|\det M| \leq 1$.

1.10. Матриця, що складається лише з нулів та одиниць, називається бінарною. Яку найбільшу кількість одиниць може містити невироджена бінарна матриця порядку n ?

Розв'язки задач

1.1. Підставимо матрицю A в задане матричне рівняння:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O. \end{aligned}$$

1.2. Для виявлення закономірності знайдемо значення виразу A_n (піднесення матриці A в степінь n) при $n = 1, 2, \dots$:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ і т. д.}$$

На основі даних обчислень можна зробити висновок, що

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тоді}$$

$$B = A^{2015} - A^{2000} = \begin{pmatrix} 1 & 2015 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Нехай $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, тоді за умовою задачі необхідно

знайти значення матриці A^{2015} . Для виявлення закономірності знайдемо значення виразів $A^2, A^3, A^4, \dots$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Оскільки $A^4 = E$, то в результаті подальшого підвищення степеня значення виразу A^n почнуть повторюватися ($A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot E = A$, $A^6 = A^2 \cdot A^4 = A^2 \cdot E = A^2$ і т. д.). Таким чином,

$$A^{2015} = A^{4 \cdot 503 + 3} = (A^4)^{503} \cdot A^3 = E^{503} \cdot A^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4. Уведемо позначення $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді за умовою

задачі необхідно знайти значення матриці A^{2015} . Аналогічно попередньому прикладу знайдемо значення $A^2, A^3, A^4, \dots$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Оскільки $A^4 = E$, то в результаті подальшого підвищення степеня значення виразу A^n будуть повторюватися. Таким чином,

$$A^{2015} = A^{4 \cdot 503 + 3} = (A^4)^{503} \cdot A^3 = E^{503} \cdot A^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5. Обидві частини рівності $A^2 - 3A + E = O$ помножимо на матрицю A^{-1} зліва $\underbrace{A^{-1}A}_E \cdot A - 3\underbrace{A^{-1}A}_E + A^{-1}E = A^{-1}O$, звідки $A - 3E + A^{-1} = O$. З останньої рівності отримуємо $A^{-1} = 3E - A$.

1.6. 1-й спосіб

До лівої і правої частин рівності $AB + A + B = O$ додамо одиничну матрицю E того ж порядку, що і матриці A та B :

$$AB + A + B + E = E.$$

Рівняння, що отримали в результаті, перетворимо наступним чином:

$$A(B + E) + B + E = E,$$

$$(A + E)(B + E) = E.$$

З останньої рівності випливає, що матриці $A + E$ і $B + E$ – взаємно обернені, а отже $(B + E)(A + E) = E$. Тоді $BA + EA + BE + E^2 = E$ або $BA + A + B = O$.

Порівнявши рівняння $AB + A + B = O$ і $BA + A + B = O$, робимо висновок, що $AB = BA$.

2-й спосіб

З рівності $AB + A + B = O$ маємо $AB = -A - B$. Припустимо, що рівність $AB = BA$ виконується, тоді $BA + A + B = O$. Останню рівність помножимо зліва на A :

$$A \cdot BA + A \cdot A + A \cdot B = O.$$

Тоді $AB \cdot A + AA + AB = O$, $(-A - B)A + AA - A - B = O$, $-AA - BA + AA - A - B = O$, звідки $BA + A + B = O$, тобто зроблене припущення правильне.

3-й спосіб

Ліву і праву частини рівності $AB + A + B = O$ помножимо на A^{-1} зліва:

$$A^{-1} \cdot AB + A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot O \Rightarrow B + E + A^{-1}B = O.$$

Останню рівність помножимо на матрицю B^{-1} справа:

$$B \cdot B^{-1} + E \cdot B^{-1} + A^{-1}B \cdot B^{-1} = O \cdot B^{-1} \Rightarrow E + B^{-1} + A^{-1} = O.$$

Рівняння $E + B^{-1} + A^{-1} = O$ помножимо на матрицю A справа:

$$E \cdot A + B^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot A = O \cdot A \Rightarrow A + B^{-1}A + E = O.$$

Отримане рівняння помножимо на матрицю B зліва:

$$B \cdot A + B \cdot B^{-1}A + B \cdot E = B \cdot O \Rightarrow BA + A + B = O.$$

З рівнянь $AB + A + B = O$ і $BA + A + B = O$ випливає, що $AB = BA$.

1.7. Рівність $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ помножимо справа на AB :

$$(AB)^{-1} \cdot AB = (B^{-1}A^{-1}) \cdot AB.$$

Обчислимо значення виразів у лівій та правій частині даної рівності:

$$(AB)^{-1} \cdot AB = E,$$

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1}B = E.$$

Оскільки рівність $(AB)^{-1} \cdot AB = (B^{-1}A^{-1}) \cdot AB$ є правильною, то правильною буде і рівність $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.8. Обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma.$$

Оскільки α , β і γ є коренями рівняння $x^3 + px + q = 0$, будуть справедливими наступні рівності:

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0, \quad \beta^3 + p\beta + q = 0, \quad \gamma^3 + p\gamma + q = 0,$$

звідки

$$\alpha^3 = -p\alpha - q, \quad \beta^3 = -p\beta - q, \quad \gamma^3 = -p\gamma - q.$$

Тоді значення визначника

$$\begin{aligned}\Delta &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \\ &= -p\alpha - q - p\beta - q - p\gamma - q - 3\alpha\beta\gamma = \\ &= -p(\alpha + \beta + \gamma) - 3q - 3\alpha\beta\gamma.\end{aligned}$$

За теоремою Вієта для коренів рівняння $x^3 + px + q = 0$ справедливі наступні співвідношення:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p, \quad \alpha\beta\gamma = -q.$$

Таким чином, значення визначника

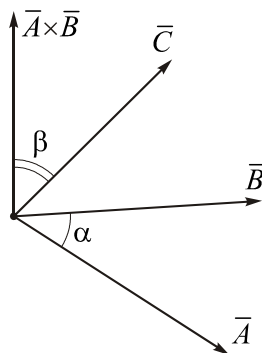
$$\Delta = -p(\alpha + \beta + \gamma) - 3q - 3\alpha\beta\gamma = -p \cdot 0 - 3q + 3q = 0.$$

1.9. Розглянемо три вектори: $\vec{A} = (a, b, c)$, $\vec{B} = (c, a, b)$, $\vec{C} = (b, c, a)$, їх модулі: $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$.

Модуль мішаного добутку цих векторів чисельно дорівнює модулю визначника матриці M :

$$|\vec{A}\vec{B}\vec{C}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = |\det M|.$$

Оскільки мішаний добуток векторів можна подати як скалярний добуток вектора $\vec{C}$ на результат векторного добутку векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$,



маємо

$$\begin{aligned} |\det M| &= |\overline{A}\overline{B}\overline{C}| = |(\overline{A} \times \overline{B}) \cdot \overline{C}| = \\ &= |\overline{A}| |\overline{B}| \sin \alpha \cdot |\overline{C}| \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta \leq 1. \end{aligned}$$

1.10. Шукана матриця, з одного боку, повинна містити якомога більше одиниць, а з іншого – мати визначник, відмінний від нуля. Друга умова не буде виконуватися, якщо матриця буде містити однакові рядки або стовпці. Враховуючи дані умови, розглянемо матрицю, в якій всі елементи рівні одиниці, крім тих, в яких номер рядка на одиницю менший від номера стовпця, тобто

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Обчислимо визначник даної матриці, розклавши його за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} + \\
 &+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} + \dots + 1 \cdot (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

У даній сумі всі доданки, крім першого, дорівнюють нулю (у другому доданку визначник множиться на нуль, у всіх наступних визначники дорівнюють нулю, оскільки перші два рядки в них однакові). Визначник, що залишився, має таку ж структуру, як і початковий, однак його порядок на одиницю менший. Поступово понижаючи порядок, доходимо до визначника першого порядку, рівного одиниці, отже

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

тобто матриця (1.1) є невинродженою.

Оскільки заміна будь-якого нуля на одиницю призведе до появи однакових рядків у матриці (тобто перетворить її у вироджену), то кількість одиниць у матриці (1.1) є найбільшою для невивроджених бінарних матриць порядку n . Дана кількість $k = n \cdot n - (n - 1)$, або $k = n(n - 1) + 1$.



II. ВЕКТОРИ

Умови задач

2.1. Показати, що вектори $\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{c})$ і $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні.

2.2. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два довільних вектори. Довести, що

$$(\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{b}) \leq (\vec{a}\vec{a})(\vec{b}\vec{b}),$$

де $(\vec{a}\vec{b})$ – скалярний добуток векторів (нерівність Гаусса-Шварца).

2.3. Тіло обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω навколо осі, яка проходить через початок координат і складає з координатними осями кути α , β і γ . Знайти швидкість точки тіла $P(x, y, z)$.

2.4. Довести, що віддаль h між паралельними прямими можна знайти за формулою

$$h = \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_2|},$$

де $\vec{r}_1$ – вектор, який іде з точки на одній прямій до точки на другій, а $\vec{r}_2$ – вектор, паралельний даній прямій.

2.5. Знаючи, що між радіусами-векторами трьох точок A_1 , A_2 і A_3 існує лінійна залежність $2\vec{r}_1 - 5\vec{r}_2 + 3\vec{r}_3 = 0$, показати, що ці точки лежать на одній прямій.

2.6. Виразити площу S трикутника через радіус-вектори $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ і $\vec{r}_3$ його вершин.

2.7. Довести, що якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ зведені до

спільного початку, то останній вектор ділить навпіл кут між двома першими.

2.8. Вершинами піраміди є точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ і $O(0; 0; 0)$. Знайти двогранний кут при ребрі AB .

2.9. Дано три некомпланарних вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Знайти $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, що задовольняють умови: $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$

2.10. Засобами векторної алгебри довести, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

2.11. Засобами векторної алгебри встановити, в якому співвідношенні ділять одна одну медіани трикутника.

2.12. Засобами векторної алгебри довести теорему синусів.

2.13. Показати, що у всякому трикутнику з площею S

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

2.14. Довести, що при довільному розташуванні точок A , B , C , D у просторі має місце рівність

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0.$$

2.15. Три вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$ задовольняють умову

$$\overline{OA} \times \overline{OB} + \overline{OB} \times \overline{OC} + \overline{OC} \times \overline{OA} = 0.$$

Довести наступне:

а) вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{OC}$ компланарні;

б) точки A , B , C лежать на одній прямій.

2.16. Розглянемо три некопланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ у просторі, що зведені до спільного початку. Довести, що площина, яка проходить через кінці цих векторів, перпендикулярна до вектора $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$.

2.17. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ перпендикулярні до граней трикутної піраміди, а їх модулі дорівнюють площам відповідних граней. Довести, що $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$.

2.18. З однієї точки проведено три вектори: $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Знаючи, що відстань між кінцями векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює відстані між кінцями векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, показати, що вектори $\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{c}$ взаємно перпендикулярні.

2.19. Точки $A_1, A_2, \dots, A_6$ розбивають коло діаметром 1 на 6 рівних дуг. Нехай B – довільна точка цього ж кола. Знайти модуль суми векторів

$$\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + \dots + \overline{BA_6}.$$

2.20. До вершини правильного тетраедра з ребром a прикладені три сили, які зображуються вектор-ребрами. Визначити величину рівнодійної.

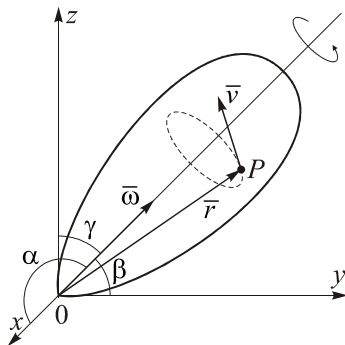
2.21. Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – некопланарні вектори. Довести, що $\bar{a}^* = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}}$, $\bar{b}^* = \frac{\bar{c} \times \bar{a}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}}$, $\bar{c}^* = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}}$ також некопланарні вектори. Знайти коефіцієнти α , β і γ розкладу вектора $\bar{x}$ за базисом $\bar{a}^*$, $\bar{b}^*$ і $\bar{c}^*$ (формула Гіббса):

$$\bar{x} = \alpha \cdot \bar{a}^* + \beta \cdot \bar{b}^* + \gamma \cdot \bar{c}^*.$$

Розв'язки задач

2.1. Нехай $\bar{p} = \bar{a}(\bar{b} \bar{c}) - \bar{b}(\bar{a} \bar{c})$. Помножимо цю рівність скалярно на $\bar{c}$: $\bar{c} \cdot \bar{p} = (\bar{c} \bar{a})(\bar{b} \bar{c}) - (\bar{c} \bar{b})(\bar{a} \bar{c}) = 0$, звідки випливає, що $\bar{p} \perp \bar{c}$.

2.2. За означенням скалярного добутку $\bar{a} \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi$, $\bar{a} \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$, $\bar{b} \bar{b} = \bar{b}^2 = |\bar{b}|^2$. Тоді нерівність набуде вигляду $|\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \cos^2 \varphi \leq |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2$. Оскільки $\cos^2 \varphi \leq 1$ для $\forall \varphi \in R$, нерівність $(\bar{a} \bar{b})(\bar{a} \bar{b}) \leq (\bar{a} \bar{a})(\bar{b} \bar{b})$ доведено.

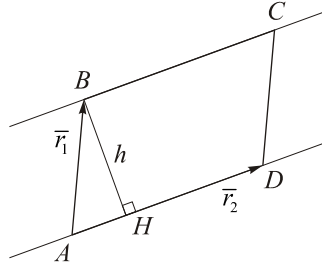


2.3. Нехай кутова швидкість точки P задається вектором $\bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, де $|\bar{\omega}| = \omega$, а положення – радіус-вектором $\bar{r}(x, y, z)$. Тоді лінійну швидкість $\bar{v}$ точки P знаходимо:

$$\begin{aligned}\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega \cos \alpha & \omega \cos \beta & \omega \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= (\omega z \cos \beta - \omega y \cos \gamma) \bar{i} + (\omega x \cos \gamma - \omega z \cos \alpha) \bar{j} + \\ &+ (\omega z \cos \alpha - \omega x \cos \beta) \bar{k}.\end{aligned}$$

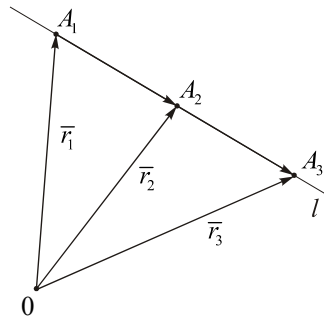
2.4. На векторах $\bar{r}_1$ і $\bar{r}_2$ побудуємо паралелограм $ABCD$. Оскільки сторони AD і BC лежать на паралельних прямих, то довжина висоти BH буде дорівнювати відстані між даними прямими.

За властивостями векторного добутку площа паралелограма $S_{ABCD} = |\overline{AB} \times \overline{AD}| = |\bar{r}_1 \times \bar{r}_2|$. З іншого боку, $S_{ABCD} = BH \cdot |\overline{AD}| = h \cdot |\bar{r}_2|$.
Із цих рівностей випливає, що

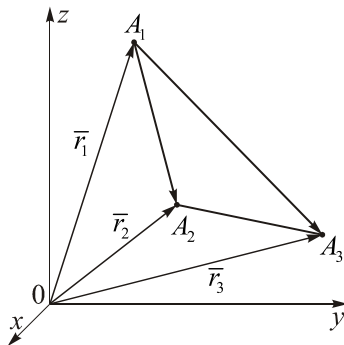


$$h = \frac{|\bar{r}_1 \times \bar{r}_2|}{|\bar{r}_2|}.$$

2.5. Якщо точки A_1 , A_2 і A_3 лежать на одній прямій l , то вектори A_1A_2 і A_2A_3 будуть колінеарними, тобто матиме місце рівність $\overline{A_1A_2} = \lambda \overline{A_2A_3}$. Оскільки $\overline{A_1A_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, а $\overline{A_2A_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$, отримаємо $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_3 - \bar{r}_2)$, звідки

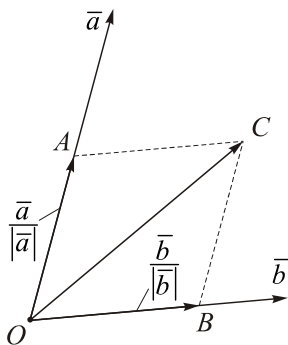


$\bar{r}_1 - (1 + \lambda)\bar{r}_2 + \lambda\bar{r}_3 = 0$ або $2\bar{r}_1 - 2(1 + \lambda)\bar{r}_2 + 2\lambda\bar{r}_3 = 0$. При $\lambda = 1,5$ отримаємо рівняння, наведене в умові задачі, — $2\bar{r}_1 - 5\bar{r}_2 + 3\bar{r}_3 = 0$.



2.6. Нехай точки A_1, A_2, A_3 — вершини деякого трикутника, а $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ — відповідні їм радіус-вектори. У цьому випадку будуть справедливими рівності $\overline{A_1A_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ і $\overline{A_1A_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1$. Тоді площа трикутника $A_1A_2A_3$

$$\begin{aligned} S_{\Delta A_1A_2A_3} &= \frac{1}{2} |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}| = \frac{1}{2} |(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1)| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \bar{r}_2 \times \bar{r}_3 - \bar{r}_2 \times \bar{r}_1 - \bar{r}_1 \times \bar{r}_3 + \underbrace{\bar{r}_1 \times \bar{r}_1}_{=0} \right| = \frac{1}{2} |\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}_2 \times \bar{r}_3 + \bar{r}_3 \times \bar{r}_1|. \end{aligned}$$



2.7. Як спільний початок даних векторів виберемо деяку точку O .

Вектори $\bar{a}$ і $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, $\bar{b}$ і $\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ відповідно колінеарні, тобто кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює куту між векторами $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ і $\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$. На двох останніх

векторах побудуємо паралелограм $OACB$. Оскільки $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ і $\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$

є ортами векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, даний паралелограм є ромбом, а отже його діагональ OC ділить кут AOB навпіл. Як видно,

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} + \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}, \text{ то наведене в умові задачі твердження доведено.}$$

2.8. Двогранний кут при ребрі AB рівний куту між векторами нормалей $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ граней піраміди, які його утворюють. Як вектори нормалей візьмемо результати векторного добутку векторів, розміщених на відповідних ребрах. Координати цих векторів:

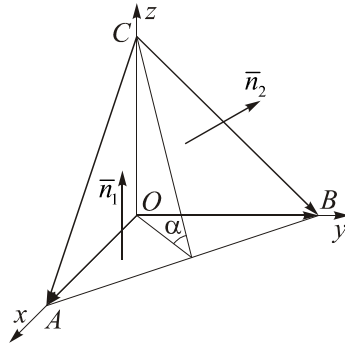
$$\overline{OA}(a; 0; 0), \overline{OB}(0; b; 0), \overline{CA}(a; 0; -c),$$

$$\overline{CB}(0; b; -c).$$

Тоді

$$\bar{n}_1 = \overline{OA} \times \overline{OB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; ab),$$

$$\bar{n}_2 = \overline{CA} \times \overline{CB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & -c \\ 0 & b & -c \end{vmatrix} = (bc; ac; ab).$$



За властивістю скалярного добутку

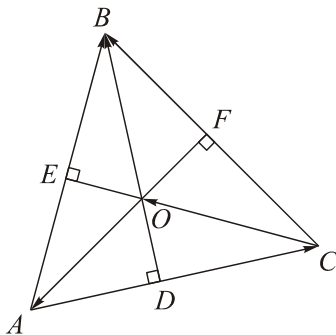
$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \left(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \right) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 b^2} \sqrt{b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2}} = \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}},\end{aligned}$$

$$\text{звідки } \alpha = \arccos \frac{ab}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}.$$

2.9. За умовою задачі вектор $\vec{b}_1$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$, отже його можна подати у вигляді $\vec{b}_1 = k(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$, де k – деяке дійсне число. Оскільки $\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 = 1$,

$$\text{то } k \cdot \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = 1, \text{ звідки } k = \frac{1}{\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3}, \text{ а отже } \vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3}.$$

$$\text{Аналогічно } \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3} \text{ і } \vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3}.$$



2.10. Розглянемо $\triangle ABC$, в якому з відповідних вершин на протилежні сторони опущені висоти AF , CE і BD . Нехай висоти AF і BD перетинаються в точці O . Доведемо, що перпендикуляр CE до сторони AB проходить через точку O , або це усе одно, що скалярний добуток $\vec{CO} \cdot \vec{AB} = 0$.

З рисунка видно, що $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. Оскільки $AF \perp BC$, то $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ або $(-\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$, звідки

$$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}^2. \quad (2.1)$$

Оскільки $BD \perp AC$, то $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ або $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{AC}) \times \overrightarrow{AC} = 0$, звідки

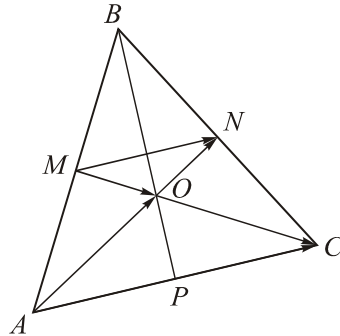
$$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}^2. \quad (2.2)$$

Підставляємо (2.2) в (2.1):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}^2 \Rightarrow \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

З останньої рівності випливає, що $\overrightarrow{CO} \perp \overrightarrow{AB}$, а отже третя висота CE також проходить через точку O .

2.11. Нехай точки P , M і N – середини сторін $\triangle ABC$. Оскільки MN – середня лінія трикутника, то $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$. Оскільки $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$, а $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$, то маємо $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON})$, звідки $\overrightarrow{AO} - 2\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OC}$. Остання рівність можлива тільки у тому випадку, коли вирази зліва і справа від знака рівності будуть рівними нулю, інакше в протилежному разі матимемо рівність двох неколінеарних векторів, що неможливо.

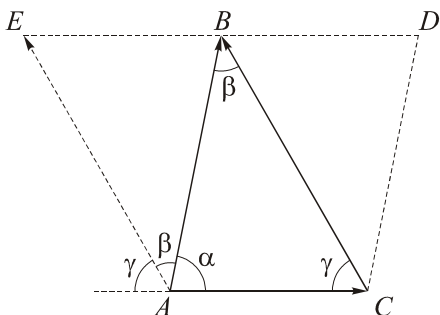


Отже,

$$\overline{AO} = 2\overline{ON} \text{ і } \overline{OC} = 2\overline{MO} \Rightarrow |\overline{AO}| = 2|\overline{ON}| \text{ і } |\overline{OC}| = 2|\overline{MO}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|\overline{AO}|}{|\overline{ON}|} = 2 \text{ і } \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{MO}|} = 2.$$

Аналогічно можна довести, що $\frac{|\overline{BO}|}{|\overline{OP}|} = 2$.



2.12. Через вершини довільного $\triangle ABC$ проведемо прямі ED , EA і CD , паралельні протилежним до цих вершин сторонам. Тоді площу паралелограма $ABDC$ можна знайти як модуль векторного добутку векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$:

$$S_{ABDC} = |\overline{AB} \times \overline{AC}| = |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sin \alpha.$$

Аналогічно площа паралелограма $AEBC$

$$S_{AEBC} = |\overline{AE} \times \overline{AC}| = |\overline{CB} \times \overline{AC}| =$$

$$= |\overline{CB}| |\overline{AC}| \sin(\pi - \gamma) = |\overline{CB}| |\overline{AC}| \sin \gamma.$$

Площі двох указаних паралелограмів рівні, тому

$$|\overline{AB}||\overline{AC}|\sin \alpha = |\overline{CB}||\overline{AC}|\sin \gamma \Rightarrow \frac{|\overline{AB}|}{\sin \gamma} = \frac{|\overline{CB}|}{\sin \alpha}.$$

Таким самим способом доводиться рівність $\frac{|\overline{AB}|}{\sin \gamma} = \frac{|\overline{AC}|}{\sin \beta}$.

Остаточно отримуємо:

$$\frac{|\overline{CB}|}{\sin \alpha} = \frac{|\overline{AC}|}{\sin \beta} = \frac{|\overline{AB}|}{\sin \gamma}.$$

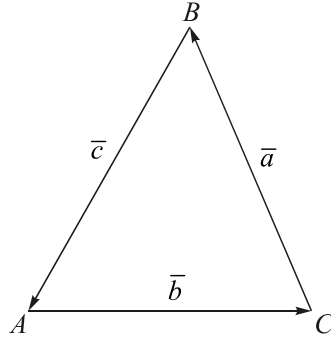
2.13. За властивістю векторного добутку площа трикутника ABC

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} |-\overline{c} \times \overline{b}| =$$

$$= \frac{1}{2} |-\overline{c}||\overline{b}|\sin A = \frac{1}{2} cb \sin A, \text{ звідки}$$

$$\sin A = \frac{2S}{cb}. \text{ Аналогічно } \sin B = \frac{2S}{ca}$$

$$\text{і } \sin C = \frac{2S}{ba}.$$



З іншого боку, за означенням скалярного добутку

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\overline{c} \cdot \overline{b} = |-\overline{c}||\overline{b}|\cos A = cb \cos A, \text{ звідки } \cos A = -\frac{\overline{b} \cdot \overline{c}}{bc}.$$

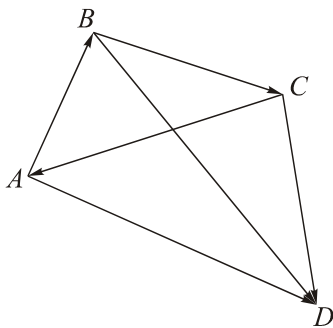
$$\text{Аналогічно } \cos B = -\frac{\overline{a} \cdot \overline{c}}{ac} \text{ і } \cos C = -\frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{ab}.$$

Таким чином, $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = -\frac{\overline{b}\overline{c}}{2S}$, відповідно $\operatorname{ctg} B = -\frac{\overline{a}\overline{c}}{2S}$

і $\operatorname{ctg} C = -\frac{\overline{a}\overline{b}}{2S}$, звідки

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C &= -\frac{2\overline{b}\overline{c} + 2\overline{a}\overline{c} + 2\overline{a}\overline{b}}{4S} = \\ &= -\frac{(\overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c}) + (\overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}) + (\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{c})}{4S} = \\ &= -\frac{\overline{b}(\overline{a} + \overline{c}) + \overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) + \overline{c}(\overline{b} + \overline{a})}{4S} = \frac{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2}{4S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.\end{aligned}$$

2.14. Уведемо нові позначення для векторів $\overline{DA} = \overline{a}$, $\overline{DB} = \overline{b}$, $\overline{DC} = \overline{c}$ і виразимо через них вектори, які входять до рівності:



$$\begin{aligned}1) \quad \overline{BC} + \overline{CD} &= \overline{BD} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{BC} &= \overline{BD} - \overline{CD} = \overline{c} - \overline{b};\end{aligned}$$

$$2) \quad \overline{AD} = -\overline{a};$$

$$\begin{aligned}3) \quad \overline{CA} + \overline{AD} &= \overline{CD} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{CA} &= \overline{CD} - \overline{AD} = \overline{a} - \overline{c};\end{aligned}$$

$$4) \quad \overline{BD} = -\overline{b};$$

$$5) \quad \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BD} = \overline{b} - \overline{a};$$

$$6) \quad \overline{CD} = -\overline{c}.$$

Тоді ліва частина рівності набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \\ & = (\bar{c} - \bar{b})(-\bar{a}) + (\bar{a} - \bar{c})(-\bar{b}) + (\bar{b} - \bar{a})(-\bar{c}) = \\ & = -\bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} - \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c} = 0. \end{aligned}$$

2.15. а) Помноживши дану рівність скалярно на $\overline{OA}$, отримуємо суму трьох мішаних добутків:

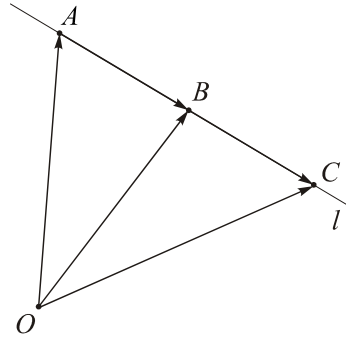
$$(\overline{OA} \times \overline{OB}) \cdot \overline{OA} + (\overline{OB} \times \overline{OC}) \cdot \overline{OA} + (\overline{OC} \times \overline{OA}) \cdot \overline{OA} = 0.$$

За властивостями мішаного добутку $(\overline{OA} \times \overline{OB}) \cdot \overline{OA} = -(\overline{OA} \times \overline{OA}) \cdot \overline{OB} = 0$, $(\overline{OC} \times \overline{OA}) \cdot \overline{OA} = (\overline{OA} \times \overline{OA}) \cdot \overline{OC} = 0$, а отже рівняння набуває вигляду

$$(\overline{OB} \times \overline{OC}) \cdot \overline{OA} = 0.$$

З останньої рівності випливає, що вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ — компланарні.

б) З рисунка видно, що $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}$, тоді ліва частина рівності набуває вигляду



$$\begin{aligned} & \overline{OA} \times \overline{OB} + \overline{OB} \times \overline{OC} + \overline{OC} \times \overline{OA} = \\ & = \overline{OA} \times \overline{OB} - \overline{OA} \times \overline{OC} + \overline{OB} \times (\overline{OB} + \overline{BC}) = \\ & = \overline{OA} \times (\overline{OB} - \overline{OC}) + \overline{OB} \times \overline{OB} + \overline{OB} \times \overline{BC} = 0. \end{aligned}$$

Оскільки $\overline{OA} - \overline{OB} = -\overline{BC}$, а $\overline{OB} \times \overline{OB} = 0$, маємо

$$-\overline{OA} \times \overline{BC} + \overline{OB} \times \overline{BC} = -(\overline{OA} - \overline{OB}) \times \overline{BC} = 0,$$

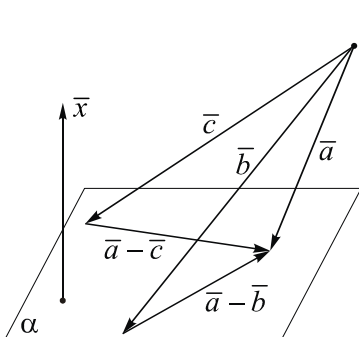
а зважаючи, що $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{AB}$, то $\overline{BA} \times \overline{BC} = 0$.

У даному випадку векторний добуток дорівнює нулю, тому вектори $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$ колінеарні, а оскільки вони мають спільну точку B , то точки A , B і C лежать на одній прямій.

2.16. 1-й спосіб

Якщо площина α проходить через кінці векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то вектори $\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{c}$ будуть належати цій площині. Розглянемо вектор $\vec{x} = (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{c}) = \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=0} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} =$

$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$. За означенням векторного добутку



$\vec{x} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{x} \perp (\vec{a} - \vec{c})$, а отже, вектор $\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ перпендикулярний до площини α .

2-й спосіб

Розглянемо вектор $\vec{x} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$. Щоб довести, що $\vec{x} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{x} \perp (\vec{a} - \vec{c})$, знай-

демо скалярні добутки:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = \\ &= \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}}_{=0} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + \underbrace{(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}}_{=0} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} - \underbrace{(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{c}}_{=0} - \underbrace{(\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{c}}_{=0} = \\
 & = \bar{b} \bar{c} \bar{a} - \bar{a} \bar{b} \bar{c} = \bar{a} \bar{b} \bar{c} - \bar{a} \bar{b} \bar{c} = 0;
 \end{aligned}$$

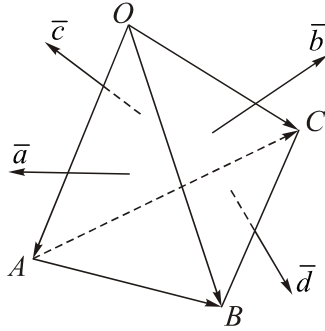
$$\begin{aligned}
 \bar{x} \cdot (\bar{a} - \bar{b}) &= (\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = \\
 &= \underbrace{(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{a}}_{=0} + (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} + \underbrace{(\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{a}}_{=0} - \\
 &- \underbrace{(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{b}}_{=0} - \underbrace{(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{b}}_{=0} - (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b} = \\
 &= \bar{b} \bar{c} \bar{a} - \bar{c} \bar{a} \bar{b} = \bar{c} \bar{a} \bar{b} - \bar{c} \bar{a} \bar{b} = 0.
 \end{aligned}$$

Отже, вектори $\bar{a} - \bar{b}$ і $\bar{a} - \bar{c}$ перпендикулярні до вектора $\bar{x}$, а оскільки вони лежать у площині α , то $\bar{x} \perp \alpha$.

2.17. Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{AB}$, і $\overline{AC}$ на-

правлені, як показано на рисунку, то $\bar{a} = \frac{1}{2} \overline{OA} \times \overline{OB}$, $\bar{b} = \frac{1}{2} \overline{OB} \times \overline{OC}$,

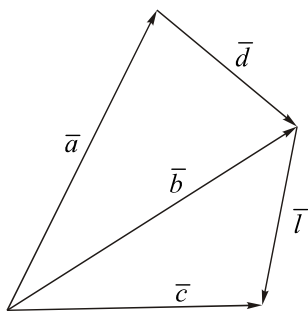
$\bar{c} = \frac{1}{2} \overline{OC} \times \overline{OA}$, $\bar{d} = \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{AB}$. То-



ді сума векторів, перпендикулярних до граней піраміди,

$$\begin{aligned}
 \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} &= \frac{1}{2} (\overline{OA} \times \overline{OB} + \overline{OB} \times \overline{OC} + \overline{OC} \times \overline{OA} + \\
 &+ \overline{OC} \times \overline{OB} - \overline{OA} \times \overline{OB} - \overline{OC} \times \overline{OA} + \overline{OA} \times \overline{OA}) = 0.
 \end{aligned}$$

2.18. Розглянемо вектори $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ та $\vec{l} = \vec{c} - \vec{b}$. За умовою задачі $|\vec{d}| = |\vec{l}|$, а отже $(\vec{b} - \vec{a})^2 = (\vec{c} - \vec{b})^2$, $\vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2 = \vec{c}^2 - 2\vec{c}\vec{b} + \vec{b}^2$, $\vec{c}^2 - \vec{a}^2 = 2\vec{b}(\vec{c} - \vec{a})$. Скалярний добуток

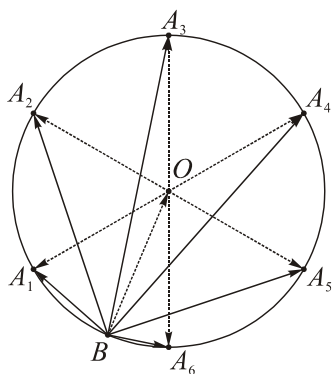


$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{c}) &= \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{c} + \\ &+ \vec{c}\vec{a} - \vec{c}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + 2\vec{b}\vec{c} = \\ &= \vec{a}^2 - \vec{c}^2 - 2\vec{b}(\vec{a} - \vec{c}). \end{aligned}$$

Оскільки $\vec{c}^2 - \vec{a}^2 = 2\vec{b}(\vec{c} - \vec{a})$, то остання рівність набуває вигляду $-2\vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) - 2\vec{b}(\vec{a} - \vec{c}) = 0$, а отже

вектори $\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{c}$ перпендикулярні.

2.19. Кожен із векторів $\vec{BA}_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ виразимо через суму вектора $\vec{BO}$ та вектора, що сполучає центр кола з відповідною точкою на колі:



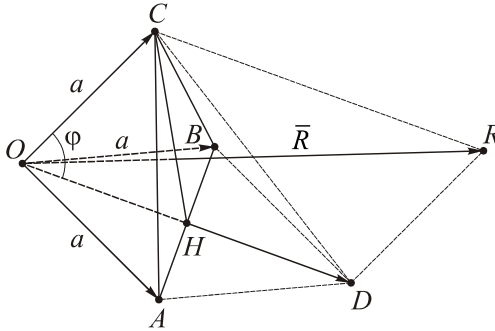
$$\begin{aligned} \vec{BA}_1 &= \vec{BO} + \vec{OA}_1, \\ \vec{BA}_2 &= \vec{BO} + \vec{OA}_2, \\ &\dots \\ \vec{BA}_6 &= \vec{BO} + \vec{OA}_6. \end{aligned}$$

Ураховуючи, що $|\vec{BO}| = \frac{1}{2}$, знайдемо модулі сум лівої і правої частин даних рівностей:

$$\left| \overline{BA_1} + \overline{BA_2} + \dots + \overline{BA_6} \right| = \left| 6\overline{BO} + \underbrace{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_6}}_{=0} \right| = 6|\overline{BO}| = 3.$$

2.20. Нехай $OABC$ – правильний тетраедр, тоді сили, прикладені до його вершини O , будуть зображені вектор-ребрами $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, причому $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = a$. Рівнодійна сила $\overline{R}$ буде дорівнювати векторній сумі трьох початкових сил і може бути представлена графічно у вигляді діагоналі паралелепіпеда, побудованого на трьох указаних векторах:

$$\overline{R} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$



З прямокутного $\triangle OHA$ маємо $|\overline{OH}| = |\overline{OA}| \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

а оскільки $OADB$ – ромб, то $|\overline{OD}| = 2|\overline{OH}| = a\sqrt{3}$.

Тетраедр $OABC$ правильний, отже апофема OH і CH рівні і їх довжина $|\overline{OD}| = 2|\overline{OH}| = a\sqrt{3}$. Тоді з $\triangle OHC$ за теоремою косинусів $CH^2 = OC^2 + OH^2 - 2OC \cdot OH \cos \varphi$, звідки косинус

кута нахилу сторони OC до площини основи тетраедра

$$\cos \varphi = \frac{CH^2 - OC^2 - OH^2}{-2OC \cdot OH} = \frac{\frac{3a^2}{4} - a^2 - \frac{3a^2}{4}}{-2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ А з } \triangle OCD$$

за теоремою косинусів $CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cos \varphi =$
 $= a^2 + 3a^2 - 2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2a^2$. З паралелограма $ODRC$ за вла-

стивістю його діагоналей $CD^2 + OR^2 = 2(OD^2 + OC^2)$, звідки $2a^2 + \bar{R}^2 = 2(3a^2 + a^2)$, а отже $|\bar{R}| = a\sqrt{6}$.

2.21. Мішаний добуток векторів $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$, оскільки за умовою ці вектори некомпланарні. Знайдемо мішаний добуток:

$$a^* \cdot b^* \cdot c^* = \frac{(\bar{b} \times \bar{c})(\bar{c} \times \bar{a})(\bar{a} \times \bar{b})}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})^3} = \frac{(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot ((\bar{c} \times \bar{a}) \times (\bar{a} \times \bar{b}))}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})^3}.$$

Як відомо, подвійний векторний добуток можна записати так:

$$\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} (\bar{c} \times \bar{a}) \times (\bar{a} \times \bar{b}) &= \bar{c} \times \bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \\ &= \bar{a}(\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})) - (\bar{a} \times \bar{b})(\bar{c}\bar{a}) = \bar{a}(\bar{c}\bar{a}\bar{b}) - \bar{b}(\underbrace{\bar{a}\bar{a}\bar{c}}_{=0}) = \bar{a}(\bar{a}\bar{b}\bar{c}), \end{aligned}$$

а отже

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot ((\bar{c} \times \bar{a}) \times (\bar{a} \times \bar{b})) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} \cdot (\bar{a} \bar{b} \bar{c}) = (\bar{a} \bar{b} \bar{c})^2.$$

Таким чином, $a^* \cdot b^* \cdot c^* = \frac{1}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}} \neq 0$, звідки випливає, що вектори a^* , b^* і c^* – некопланарні.

Помножимо рівність $\bar{x} = \alpha \cdot \bar{a}^* + \beta \cdot \bar{b}^* + \gamma \cdot \bar{c}^*$ скалярно на $\bar{a}$:

$$\bar{x} \bar{a} = \alpha \frac{(\bar{b} \times \bar{c}) \bar{a}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}} + \beta \frac{\overbrace{(\bar{c} \times \bar{a}) \bar{a}}^{=0}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}} + \gamma \frac{\overbrace{(\bar{a} \times \bar{b}) \bar{a}}^{=0}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}} \Rightarrow \bar{x} \bar{a} = \alpha.$$

Аналогічно можна показати, що $\bar{x} \bar{b} = \beta$ і $\bar{x} \bar{c} = \gamma$.

III. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Умови задач

3.1. За якої умови точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ будуть симетричні відносно прямої $Ax + By + C = 0$?

3.2. Задано точки $A(2; 1)$, $B(8; 1)$ і коло $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 33 = 0$. Знайти найбільше і найменше значення площі трикутника ABC , якщо точка C належить заданому колу.

3.3. За якої умови точка $M_0(x_0; y_0)$ лежить всередині паралельних прямих $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ і $l_2: Ax + By + C_2 = 0$?

3.4. Для заданої гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ показати, що добуток відстаней від довільної точки до її асимптот є величиною сталою, рівною $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

3.5. Скласти рівняння дотичної до параболи $y = x^2$ у точці, яка є найближчою до точки $M_0\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

3.6. Відрізок BC довжиною l рухається своїми кінцями по сторонах прямого кута BOC . Яку лінію описує точка A , що належить відрізку BC і поділяє його у відношенні λ ?

3.7. Обчислити найкоротшу відстань між прямими

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{і} \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

3.8. Довести, що довжина відрізка, який з'єднує центр еліпса з довільною точкою на ньому, розташована між великою і малою півосями еліпса.

3.9. Довести, що середини паралельних хорд еліпса лежать на одній прямій, яка проходить через центр еліпса (хордою еліпса називається відрізок прямої, який з'єднує дві довільні точки еліпса).

3.10. Парабола $y^2 = 2px$ проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, які розташовані на одній прямій з її фокусом. Довести, що $y_1 y_2 = -p^2$.

3.11. Дано параболи $y = x^2$ і $y = x^2 + 1$. Довести, що хорда першої параболи, яка дотикається до другої параболи, ділиться точкою дотику навпіл.

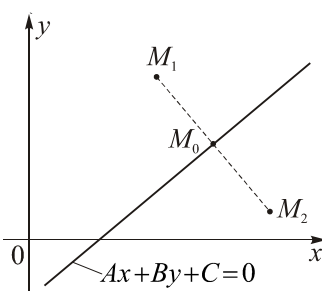
3.12. У воронку в формі параболоїда $z = x^2 + y^2$ кинули кулю радіусом R . Знайти координати центра кулі після падіння та закінчення коливань.

Розв'язки задач

3.1. Середина відрізка $M_1 M_2$ – точка $M_0(x_0; y_0)$, яка належить даній прямій. Отже, $Ax_0 + By_0 + C = 0$,

але $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ і $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, то-

му умовою симетричності двох точок $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ відносно



прямої $Ax + By + C = 0$ є рівність

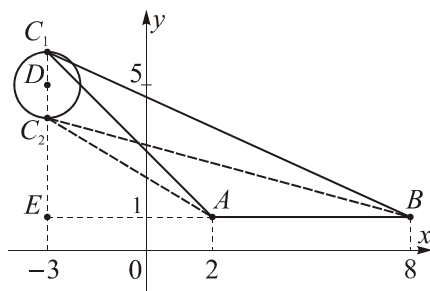
$$A(x_1 + x_2) + B(y_1 + y_2) + 2C = 0.$$

3.2. Приведемо рівняння даного кола до канонічного вигляду:

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 10y) + 33 = 0;$$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) + 33 - 34 = 0;$$

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 1.$$



Це коло із центром у точці $D(-3; 5)$ і радіусом $R = 1$.

Оскільки площа трикутника дорівнює половині добутку основи на висоту, а довжина основи в даному випадку залишається незмінною, отримаємо

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot h = 3h$. Тоді $h_{\max} = EC_1 = 5$ і $h_{\min} = EC_2 = 3$, а отже шукані площі

$$S_{\max} = S_{\Delta ABC_1} = 15, \quad S_{\min} = S_{\Delta ABC_2} = 9.$$

3.3. Відстань від точки M_0 до прямої l_1

$$d_1 = d(M_0; l_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Аналогічно відстань до прямої l_2

$$d_2 = d(M_0; l_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

У той же час відстань між двома прямими

$$d = d(l_1; l_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Якщо точка M_0 лежить між прямими l_1 і l_2 , то буде справедливою рівність

$$d_1 + d_2 = d.$$

Таким чином,

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{|Ax_0 + By_0 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

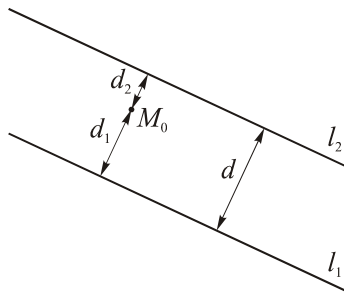
звідки

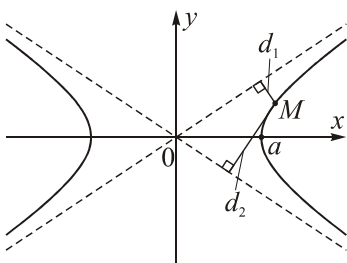
$$|Ax_0 + By_0 + C_1| + |Ax_0 + By_0 + C_2| = |C_2 - C_1|.$$

3.4. З рівняння гіперболи випливає, що $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Рівняння асимптот або $y = \pm \frac{b}{a}x$, або $\pm bx - ay = 0$. Тоді відстані від деякої точки $M(x; y)$, що лежить на гіперболі, до асимптот

$$d_1 = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \quad i \quad d_2 = \frac{|-bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}}.$$

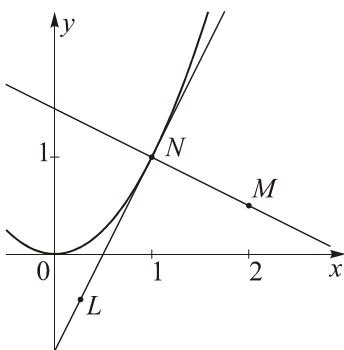




Таким чином, добуток

$$d_1 d_2 = \frac{|bx - ay| \cdot |-bx - ay|}{b^2 + a^2} = \frac{|-b^2 x^2 + a^2 y^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

що і треба було довести.



3.5. Нехай $N(x_0; y_0)$ – точка параболі $y = x^2$, яка є найближчою до точки $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$. Очевидно, що точка N повинна належати нормалі, проведеній з точки M до даної параболі, а її рівняння

$$y - y_0 = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0). \quad (3.1)$$

З іншого боку, ця точка належить дотичній NL до даної параболі і її рівняння

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0). \quad (3.2)$$

Координати точки $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$ задовольняють рівняння (3.1),

тому

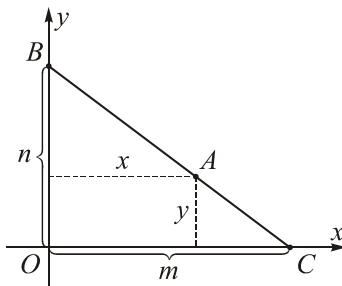
$$\frac{1}{2} - y_0 = -\frac{1}{2x_0}(2 - x_0), \quad \frac{1}{2} - x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}(2 - x_0),$$

$$x_0 - 2x_0^3 = x_0 - 2, \quad x_0^3 = 1,$$

звідки отримуємо $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Підставивши дані координати в рівняння (3.2), одержимо рівняння дотичної: $y - 1 = 2(x - 1)$ або $2x - y - 1 = 0$.

3.6. Уведемо систему координат таким чином, щоб вершина прямого кута знаходилася в початку координат O , а сторони лежали на координатних осях. Позначимо $BO = n$ і $CO = m$, оскільки $BC = l$, то під час руху буде зберігатися рівність $m^2 + n^2 = l^2$. Нехай $A(x; y)$ – довільна точка BC ,



$B(0; n), C(m; 0)$. За умовою $\lambda = \frac{BA}{AC}$, тоді координати x і y точки A :

$$x = \frac{0 + \lambda m}{1 + \lambda} = \frac{\lambda m}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{n + \lambda \cdot 0}{1 + \lambda} = \frac{n}{1 + \lambda},$$

звідки $m = \frac{x(1 + \lambda)}{\lambda}$, $n = y(1 + \lambda)$, а отже

$$m^2 + n^2 = \frac{x^2(1 + \lambda)^2}{\lambda^2} + y^2(1 + \lambda)^2 = l^2.$$

Таким чином, маємо рівняння

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\lambda l}{1 + \lambda}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l}{1 + \lambda}\right)^2} = 1,$$

тобто шуканим геометричним місцем точок є еліпс з півосями

$$\text{ми } a = \frac{\lambda l}{1+\lambda} \text{ і } b = \frac{l}{1+\lambda}.$$

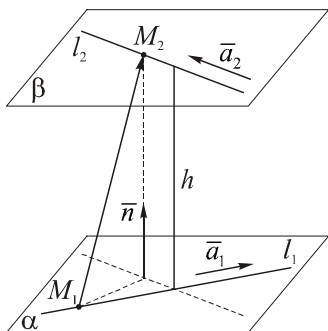
3.7. Позначимо

$$l_1 \text{ як } \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}, \text{ а } l_2 \text{ — як } \frac{x-2}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Перш ніж шукати відстань між прямими, необхідно переконатися, що вони не лежать в одній площині. Проаналізувавши рівняння прямих, відмітимо, що $M_1(-7; -4; -3)$ і $M_2(21; -5; -2)$ — точки на прямих, а $\vec{a}_1(3; 4; -2)$ і $\vec{a}_2(6; -4; -1)$ — їх напрямні вектори. Мішаний добуток векторів $\overline{M_1M_2}(28; -1; 5)$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$

$$\overline{M_1M_2} \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -507 \neq 0,$$

отже дані вектори некомпланарні, а відповідно прямі мимобіжні. Відстань між даними прямими, очевидно, дорівнює відстані між паралельними площинами α і β , проведеними через дані прямі. Розглянемо два способи знаходження даної відстані.



1-й спосіб

Візьмемо за нормаль $\vec{n}$ до двох площин α і β векторний добуток векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$:

$$\bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 9\bar{j} - 36\bar{k}.$$

Тоді відстань між прямими

$$h = \text{Пр}_{\bar{n}} \overline{M_1 M_2} = \frac{|\overline{M_1 M_2} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{|-12 \cdot 28 + 9 \cdot 5 \cdot 36|}{\sqrt{144 + 81 + 1296}} = \frac{507}{39} = 13.$$

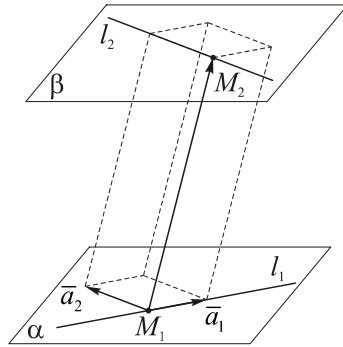
2-й спосіб

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{M_1 M_2}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, дорівнює модулю їх мішаного добутку:

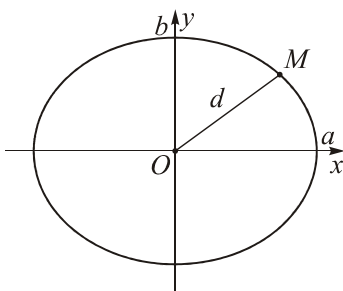
$$V = |\overline{M_1 M_2} \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2| = 507.$$

З іншого боку, $V = S_{\text{парал}} h$, звідки

$$h = \frac{|\overline{M_1 M_2} \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2|}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|} = \frac{507}{39} = 13.$$



3.8. Відрізок, що з'єднує центр еліпса, розміщений на початку координат $O(0; 0)$, з довільною точкою $M(x; y)$, яка належить цьому еліпсу і має довжину $MO = d = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Якщо еліпс задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{де } a > b > 0), \text{ то для}$$

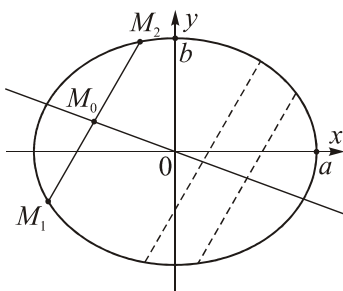
доведення твердження, поданого в умові задачі, необхідно довести, що $b < d < a$. Оскільки всі числа a , b , d додатні, то остання нерівність

еквівалентна нерівності $b^2 < d^2 < a^2$.

З того, що $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, випливає $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} < 1$, а отже $x^2 + y^2 = d^2 < a^2$.

Також з $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ очевидно, що $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$, тому $x^2 + y^2 = d^2 > b^2$.

Таким чином, нерівність $b^2 < d^2 < a^2$ правильна, а отже правильною є і нерівність $b < d < a$.



3.9. Канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.3)$$

Проведемо паралельні між собою хорди з кутовим коефіцієнтом k . Розглянемо, як розташовані середини проведених хорд. Для довільно вибраної хорди позначимо її кінці через $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, а середину через $M_0(x_0; y_0)$. Координати точок M_1 і M_2 задовольняють рівняння (3.3):

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1.$$

Розглянемо різницю цих рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{b^2} &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки координати середини хорди $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

і $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, а кутовий коефіцієнт $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, рівність

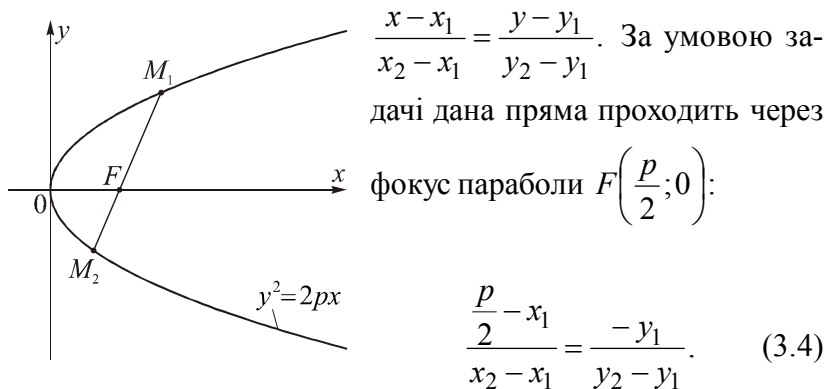
набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{(x_2 - x_1) \cdot 2x_0}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1) \cdot 2y_0}{b^2} &= 0, \\ \frac{(x_2 - x_1)x_0}{a^2} + \frac{k(x_2 - x_1)y_0}{b^2} &= 0 \Rightarrow \frac{x_0}{a^2} + \frac{ky_0}{b^2} = 0 \\ \text{і } y_0 &= -\frac{b^2}{a^2} kx_0. \end{aligned}$$

Таким чином, координати середин паралельних між собою хорд еліпса пов'язані між собою лінійною залежністю

і лежать на прямій $y = -\frac{b^2}{a^2} kx$.

3.10. Рівняння прямої M_1M_2 має такий вигляд:



Точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ належать параболі, тому

$$y_1^2 = 2px_1 \text{ і } y_2^2 = 2px_2. \quad (3.5)$$

Розглянемо різницю рівнянь (3.5):

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1),$$

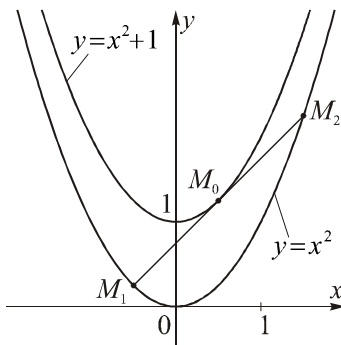
$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1), \quad y_2 - y_1 = \frac{2p(x_2 - x_1)}{y_2 + y_1}.$$

Останню рівність підставимо у рівняння (3.4):

$$\frac{\frac{p}{2} - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-y_1(y_2 + y_1)}{2p(x_2 - x_1)},$$

$$p^2 - \underbrace{2px_1}_{y_1^2} = -y_1y_2 - y_1^2 \Rightarrow y_1y_2 = -p^2.$$

3.11. Нехай точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ є точками перетину довільної дотичної до параболи $y = x^2 + 1$ з параболою $y = x^2$. У точці дотику $M_0(x_0; y_0)$ рівняння дотичної M_1M_2 можна записати як $y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$. Оскільки точки M_1 і M_2 лежать на цій дотичній, мають місце такі рівності:



$$y_1 - y_0 = 2x_0(x_1 - x_0) \quad (3.6); \quad y_2 - y_0 = 2x_0(x_2 - x_0) \quad (3.7).$$

З іншого боку, рівняння M_1M_2 : $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, точка M_0 належить цій прямій, отже

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.8)$$

Точки M_1 і M_2 належать параболі $y = x^2$, тому

$$y_1 = x_1^2 \quad \text{і} \quad y_2 = x_2^2. \quad (3.9)$$

Із (3.6) і (3.8) та різниці рівнянь (3.9) складемо систему

$$\begin{cases} y_1 - y_0 = 2x_0(x_1 - x_0), \\ y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2, \\ \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2x_0(x_0 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Сума рівнянь (3.6) і (3.7):

$$y_1 + y_2 - 2y_0 = 2x_0(x_1 + x_2 - 2x_0),$$

оскільки $x_1 + x_2 = 2x_0$, то

$$y_1 + y_2 - 2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Отже, $M_0(x_0; y_0)$ – дійсно середина хорди M_1M_2 .

3.12. 1-й спосіб

У результаті перерізу параболоїда площиною $y = 0$ отримаємо параболу $z = x^2$, кулі – коло радіусом R . Якщо куля застрягне у воронці, то точка дотику кола і параболу $M_0(x_0; z_0)$: $z'_x = 2x$;

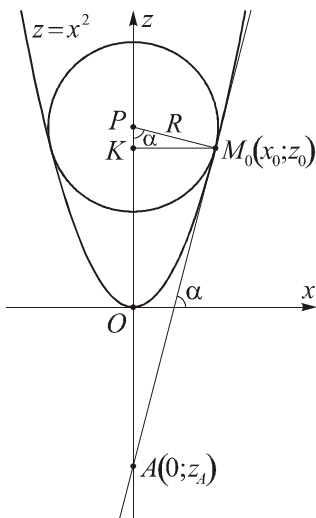
$$z'_x(x_0) = 2x_0.$$

Рівняння дотичної AM_0 :

$$z - z_0 = 2x_0(x - x_0); \quad z_A = z_0 - 2x_0^2,$$

$$M_0A = \sqrt{x_0^2 + 4x_0^4} = x_0\sqrt{1 + 4x_0^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_0A}{R} = \frac{x_0\sqrt{1 + 4x_0^2}}{R},$$



$$x_0 = M_0K = R \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{R \sin \alpha \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2 \alpha}}{R} = \sin \alpha \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2 \alpha},$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2 \alpha}, \quad 1 = \cos \alpha \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= \cos^2 \alpha (1 + 4R^2 \sin^2 \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow 4R^2 \cos^2 \alpha &= 1 \text{ і } \cos \alpha = \frac{1}{2R}. \end{aligned}$$

Центр кулі P знаходиться на віддалі

$$\begin{aligned} OP &= OK + KP = z_0 + KP = x_0^2 + R \cos \alpha = \\ &= R^2 \sin^2 \alpha + R \cos \alpha = R^2 \left(1 - \cos^2 \alpha + \frac{\cos \alpha}{R} \right) = \\ &= R^2 \left(1 - \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{2R^2} \right), \end{aligned}$$

звідки $OP = R^2 + \frac{1}{4}$.

Зауваження. Куля застряє у параболоїді при $OP > R$, тобто

$$R^2 + \frac{1}{4} - R > 0, \quad 4R^2 - 4R + 1 > 0; \quad R_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow R > \frac{1}{2}.$$

2-й спосіб

Позначимо $OP = a$. Тоді

$$\begin{cases} x_0 = R \sin \alpha, \\ z_0 = a - R \cos \alpha, \end{cases} \text{ де } \operatorname{tg} \alpha = z'(x_0) = 2x_0 = 2R \sin \alpha, \text{ звідки}$$

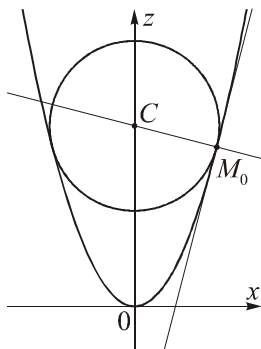
$$\cos \alpha = \frac{1}{2R}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{4R^2}} = \frac{\sqrt{4R^2 - 1}}{2R};$$

$$a = z_0 + R \cos \alpha = x_0^2 + R \cos \alpha = R^2 \sin^2 \alpha + R \cos \alpha =$$

$$= R^2 \cdot \frac{4R^2 - 1}{4R^2} + \frac{1}{2} = R^2 + \frac{1}{4}.$$

3-й спосіб

Позначимо через $M_0(x_0; z_0)$ точку дотику кола і параболи, а через $C(0; z_C)$ – центр кола. Якщо куля застряє у воронці, то коло і парабола в точці дотику матимуть спільну дотичну. Кутові коефіцієнти дотичних до кола і параболи в точці $M_0(x_0; z_0)$:



$$z = x^2, \quad z'_x = 2x, \quad k_{\text{пар}} = z'_x(x_0) = 2x_0;$$

$$x^2 + (z - z_C)^2 = R^2, \quad z = z_C \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

(оскільки точки дотику знаходяться в нижній половині кола, корінь будемо брати зі знаком мінус):

$$z = z_C - \sqrt{R^2 - x^2}, \quad z'_x = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad k_{\text{коло}} = \frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}};$$

$$k_{\text{пар}} = k_{\text{коло}}, \quad 2x_0 = \frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}},$$

$$\text{звідки } x_0 = \pm \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} \left(R \geq \frac{1}{2} \right) \text{ або } x_0 = 0.$$

Розглянемо випадок, коли $x_0 = \pm \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$. Оскільки парабола проходить через точку M_0 , маємо $z_0 = x_0^2 = R^2 - \frac{1}{4}$, звідки $M_0 \left(\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}; R^2 - \frac{1}{4} \right)$. Рівняння нормалі до параболи має вигляд

$$z - z_0 = -\frac{1}{2x_0}(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z - R^2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}} \left(x - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} \right).$$

Оскільки в точці M_0 коло і парабола мають спільну дотичну, то нормаль у даній точці у них теж буде спільною, а до того ж нормаль кола проходить через його центр $C(0; z_C)$. Отже, отримуємо

$$z_C - R^2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}} \left(-\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} \right),$$

звідки $z_C = R^2 + \frac{1}{4}$.

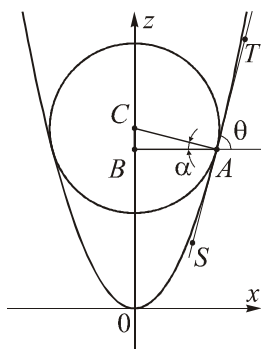
При $x_0 = 0$ кутовий коефіцієнт дотичної рівний нулю. Це означає, що кулька лежить на дні воронки, а отже її центр знаходиться на висоті R .

Координати центра кулі

$$\left(0; 0; R^2 + \frac{1}{4}\right) \left(R \geq \frac{1}{2}\right) \text{ або } (0; 0; R) \left(R < \frac{1}{2}\right).$$

4-й спосіб

Залежно від радіуса кулі вона може або застрягти в параболоїді на певній висоті, або лежати на самому його дні. Розглянемо переріз параболоїда і кулі (після встановлення рівноваги) якоюсь радіальною площиною (наприклад, xOz).



Розглянемо перший випадок. В точці дотику $A(x; x^2)$ параболи $z = x^2$ та кола проведемо дотичну ST , кутовий коефіцієнт $\operatorname{tg} \theta$ якої, очевидно, дорівнює $2x$. Зважаючи на те, що $\angle CAT = 90^\circ$, одержи-

мо $\operatorname{ctg} \alpha = 2x$. Тому $\frac{|AB|}{|BC|} = 2x$ і $|BC| = \frac{1}{2}$.

Таким чином, центр кола точка C має координати $\left(0; x^2 + \frac{1}{2}\right)$.

Для знаходження величини x залишилося застосувати до три-

кутника ABC теорему Піфагора: $x^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Тому точка C

має координати $\left(0; R^2 + \frac{1}{4}\right)$.

При $R = \frac{1}{2}$ виходить $R^2 + \frac{1}{4} = R$. Це свідчить про те, що

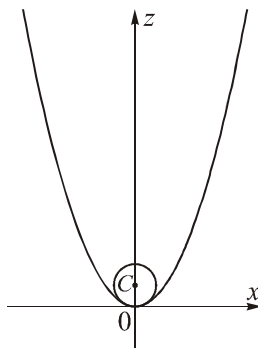
при $R < \frac{1}{2}$ отримаємо другий випадок

розміщення кулі, а отже $C(0; R)$.

Таким чином,

$$x_C = 0, \quad y_C = 0,$$

$$z_C = \begin{cases} R, & R < 1/2, \\ R^2 + 1/4, & R \geq 1/2. \end{cases}$$



IV. ФУНКЦІЇ ТА ГРАФІКИ

Умови задач

4.1. Функція $f(x)$ задовольняє умову $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Знайти вигляд цієї функції.

4.2. Чи визначає співвідношення $y = \arcsin x$, $x = t^2 + 4t + 6$ як функцію від x ?

4.3. Функція $f(x)$ неперервна на $[0; 1]$. Довести, що

$$\exists a \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \text{ таке, що } f\left(a + \frac{1}{2}\right) - f(a) = \frac{1}{2}(f(1) - f(0)).$$

4.4. Функція $f(x)$ визначена у вигляді $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| < 1, \\ 0, & \text{якщо } |x| \geq 1. \end{cases}$

Побудувати графік функції $f(f(x))$.

4.5. Побудувати графік функції $F(t) = f(\cos t, \sin t)$, де

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y \geq x, \\ 0, & \text{якщо } y < x. \end{cases}$$

4.6. Побудувати графік функції $\|x| + |y| - 3| = 2$.

4.7. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \min\left(|x|, \frac{1}{|x|}\right);$ б) $y = \arcsin(3x-1);$

в) $y = \operatorname{ctg} x \sin x;$ г) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 8x + 16};$

д) $y = |\ln|x||;$ е) $y = \cos(2\arccos x);$

є) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$ ж) $y = \arcsin(\sin x);$

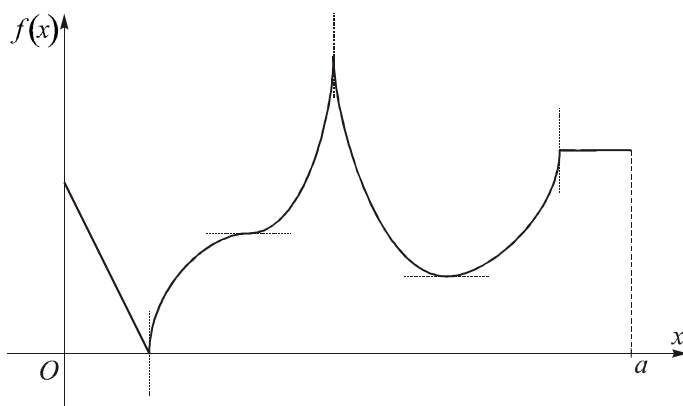
з) $y = \ln \cos x;$ и) $y = e^{ax} \sin bx (a > 0, b > 0);$

і) $y = \frac{\cos 2x}{\cos x}.$

4.8. Скільки дійсних коренів має рівняння

$$\sin x + |\sin x| = 0,12x?$$

4.9. Побудувати графік функції $f'(x)$ за даним графіком функції $f(x)$.



4.10. Побудувати криву, задану рівнянням

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Розв'язки задач

4.1. Виконаємо ряд перетворень:

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \\ &= x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2. \end{aligned}$$

Отже, $f(x) = x^2 - 2$.

4.2. Область визначення функції $y = \arcsin x$, $D: x \in [-1; 1]$.

Множина значень функції $x = t^2 + 4t + 6 = (t + 2)^2 + 2$
 $E: x \in [2; +\infty)$. Таким чином, співвідношення $y = \arcsin x$,
 $x = t^2 + 4t + 6$ не може задавати функцію y від x , оскільки жодне із значень x не потрапляє в область визначення функції y .

4.3. Розглянемо функцію $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$, яка є не-

перервною на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, отже $g(x)$ набуває будь-якого свого зна-

чення на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

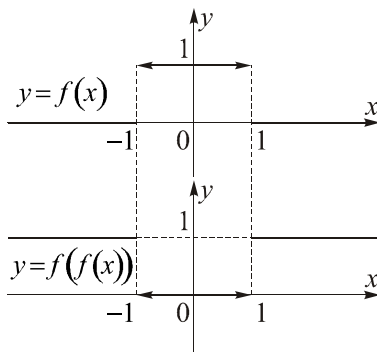
Оскільки $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$ і $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)$, то серединою відрізка, що з'єднує $g(0)$ і $g\left(\frac{1}{2}\right)$, є $\frac{1}{2}(f(1) - f(0))$, тобто $\exists a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, таке, що $g(a) = \frac{1}{2}(f(1) - f(0))$ або $f\left(a + \frac{1}{2}\right) - f(a) = \frac{1}{2}(f(1) - f(0))$.

4.4. Оскільки $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$ то аналітичний запис

функції $f(f(x))$ матиме вигляд $f(f(x)) = \begin{cases} 1, & |f(x)| < 1, \\ 0, & |f(x)| \geq 1. \end{cases}$ Функ-

ція $f(x)$ набуває лише невід'ємних значень, тому в даному випадку буде справедливою рівність $|f(x)| = f(x)$, а отже

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \begin{cases} 1, & |f(x)| < 1, \\ 0, & |f(x)| \geq 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1, & f(x) < 1, \\ 0, & f(x) \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & |x| \geq 1, \\ 0, & |x| < 1. \end{cases} \end{aligned}$$



4.5. Виходячи з означень функцій $f(x, y)$ та $F(t)$, остання матиме вигляд

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \begin{cases} 1, & \sin t \geq \cos t, \\ 0, & \sin t < \cos t. \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність $\sin t \geq \cos t$:

$$\sin t - \cos t \geq 0, \quad \sin t - \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0,$$

$$2 \cos \frac{t + \frac{\pi}{2} + t}{2} \sin \frac{t - \frac{\pi}{2} - t}{2} \geq 0,$$

$$-\sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0, \quad \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0.$$

Таким чином, $t + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, звідки

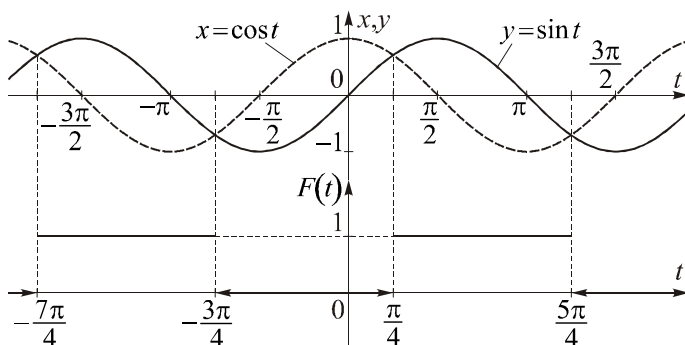
$$t \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right],$$

де $n \in \mathbb{Z}$. Тоді функція $F(t)$ набуває вигляду

$$F(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right], \\ 0, & t \notin \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right], \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Також графік функції $F(t)$ можна побудувати графічним методом. Для цього необхідно побудувати графіки функцій $y = \sin t$ та $y = \cos t$.

На відрізках, де графік синуса буде знаходитися над графіком косинуса, значення функції $F(t)$ дорівнюватиме одиниці.



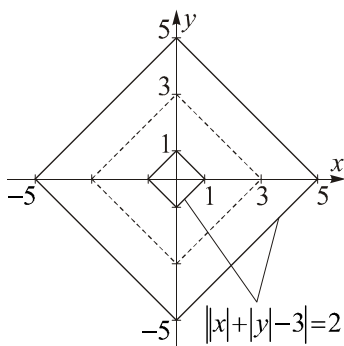
4.6. У залежності від значень змінних x та y вираз $|x| + |y| - 3$ може набувати наступні значення:

$$|x| + |y| - 3 = \begin{cases} x + y - 3, & x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ -x + y - 3, & x < 0, \quad y \geq 0, \\ x - y - 3, & x \geq 0, \quad y < 0, \\ -x - y - 3, & x < 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Тоді функція $F(x, y) = ||x| + |y| - 3| - 2$ матиме такий вигляд:

$$F(x, y) = \begin{cases} x + y - 5, & x \geq 0, & y \geq 0, & x + y - 3 \geq 0, \\ x + y - 1, & x \geq 0, & y \geq 0, & x + y - 3 < 0, \\ -x + y - 5, & x < 0, & y \geq 0, & -x + y - 3 \geq 0, \\ -x + y - 1, & x < 0, & y \geq 0, & -x + y - 3 < 0, \\ x - y - 5, & x \geq 0, & y < 0, & x - y - 3 \geq 0, \\ x - y - 1, & x \geq 0, & y < 0, & x - y - 3 < 0, \\ -x - y - 5, & x < 0, & y < 0, & -x - y - 3 \geq 0, \\ -x - y - 1, & x < 0, & y < 0, & -x - y - 3 < 0. \end{cases}$$

Графік функції $F(x, y) = 0$ зображено на рисунку.



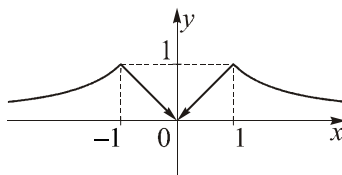
4.7. а) Область визначення функції

$$D : x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Графік симетричний відносно осі Oy , тому розглянемо по-
водження даної функції при $x > 0$. У цьому випадку

$$\min \left(|x|, \frac{1}{|x|} \right) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

З урахуванням симетричності графік даної функції матиме такий вигляд:



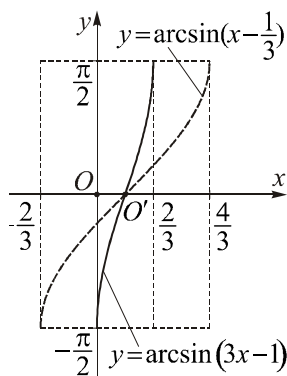
4.7. б) Область визначення функції $y = \arcsin(3x-1)$:

$$-1 \leq 3x-1 \leq 1 \Rightarrow D : x \in \left[0; \frac{2}{3}\right].$$

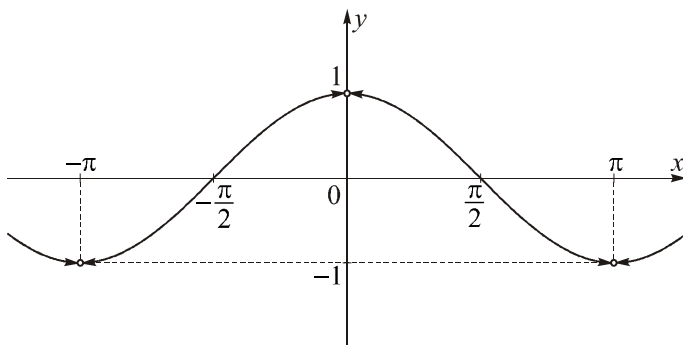
Оскільки

$$y = \arcsin(3x-1) = \arcsin 3\left(x - \frac{1}{3}\right),$$

то графіком даної функції буде втричі стиснутий графік функції $y = \arcsin x$, центр симетрії якого знаходиться в точці $O'\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.



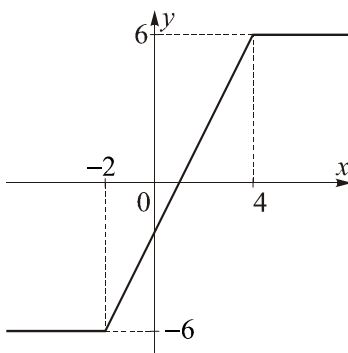
4.7. в) Дана функція не визначена в точках $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Ураховавши, що $y = \operatorname{ctg} x \sin x = \cos x$, будемо графік даної функції.



4.7. г) Перетворимо даний аналітичний вираз:

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 8x + 16} \\
 &= \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-4)^2} = |x+2| - |x-4| = \\
 &= \begin{cases} -6, & x < -2, \\ 2x-2, & -2 \leq x < 4, \\ 6, & x \geq 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Графік даної функції матиме наступний вигляд:



4.7. д) Функцію $y = \ln|x|$ можна записати у вигляді

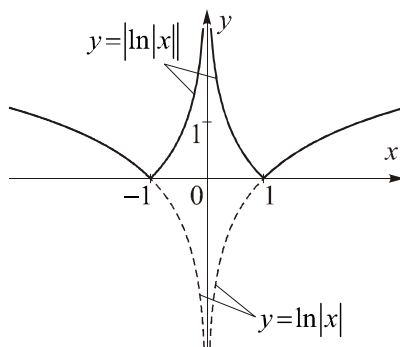
$$y = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ \ln(-x), & x < 0, \end{cases} \text{ тобто її графік буде складатися з графіка}$$

функції $y = \ln x$ та його симетричного відображення відносно осі Oy . У свою чергу,

$$y = |\ln|x|| = \begin{cases} \ln|x|, & \ln|x| \geq 0, \\ -\ln|x|, & \ln|x| < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \ln|x|, & |x| \geq 1, \\ -\ln|x|, & 0 < |x| < 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ \ln(-x), & x \leq -1, \\ -\ln x, & 0 < x < 1, \\ -\ln(-x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

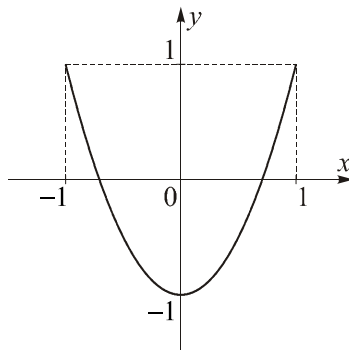
Таким чином, графік $y = |\ln|x||$ буде являти собою графік функції $y = \ln|x|$, в якій частина, що знаходиться під віссю Ox , симетрично відображена відносно цієї осі.



4.7. е) Область визначення даної функції $D : x \in [-1; 1]$. Виконаємо ряд перетворень над аналітичним виразом:

$$\begin{aligned} y &= \cos(2 \arccos x) = \\ &= 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

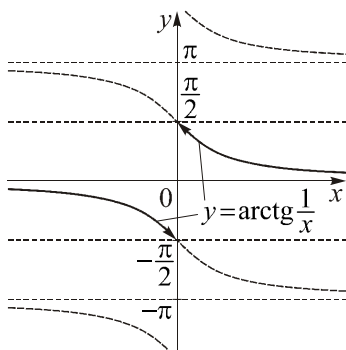
Таким чином, графік функції $y = \cos(2 \arccos x)$ являє собою частину графіка параболи $y = 2x^2 - 1$ на відрізку $[-1; 1]$.



4.7. є) Область визначення даної функції

$$D : x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \text{ множина значень } E : y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

З рівняння $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ маємо:



$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} y} = x,$$

$$\operatorname{ctg} y = x \Rightarrow y = \operatorname{arctg} x,$$

$$\text{де } y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ураховуючи, що в точці $x = 0$ функція невизначена, будуємо графік функції.

4.7. ж) Множина значень даної функції $E : y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

З рівності $y = \arcsin(\sin x)$ маємо:

$$\sin y = \sin x, \quad \sin y - \sin x = 0, \quad 2 \cos \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2} = 0,$$

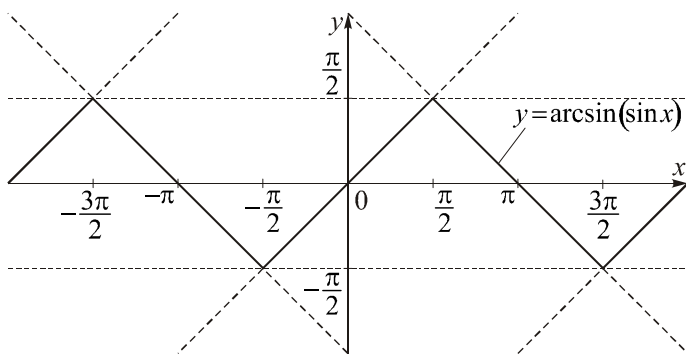
$$\begin{cases} \cos \frac{y+x}{2} = 0, \\ \sin \frac{y-x}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y+x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{y-x}{2} = \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x=(2n+1)\pi, \\ y-x=2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x+(2n+1)\pi, \\ y=x+2\pi n, \end{cases}$$

де $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, графік функції $\sin y = \sin x$ являє собою сітку, утворену перетином двох сімейств прямих $y = -x + (2n+1)\pi$ та $y = x + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Частина цього графіка, що лежить між прямими $y = -\frac{\pi}{2}$ та $y = \frac{\pi}{2}$, і буде графіком функції

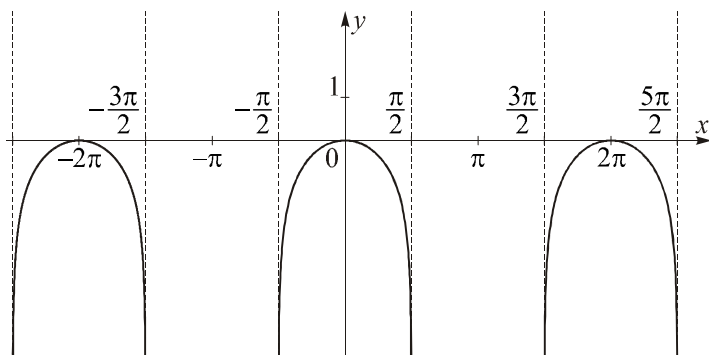
$$y = \arcsin(\sin x).$$



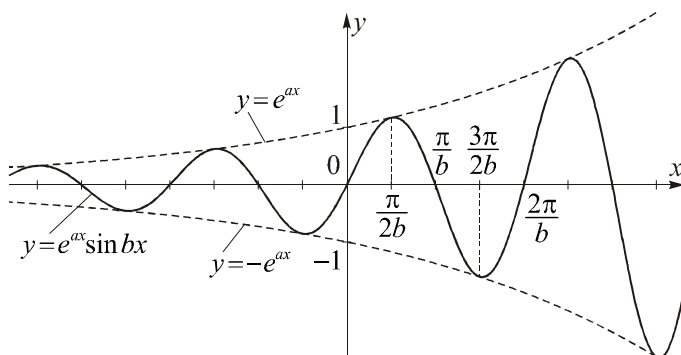
4.7. з) Оскільки $\ln \cos(x+2\pi) = \ln \cos x$, то дана функція періодична з періодом 2π . Вираз $\ln \cos x$ існує при $\cos x > 0$, тобто область визначення

$$D : x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Прямі $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ є вертикальними асимптотами функції і при $x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n + 0$ та $x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi n - 0$ $\ln \cos x \rightarrow -\infty$. На інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right)$ функція зростає, у точках $x = 2\pi n$ набуває свого найбільшого значення $\ln \cos 2\pi n = \ln 1 = 0$, а на інтервалах $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ – спадає.



4.7. и) Оскільки $-1 \leq \sin bx \leq 1$, то графік функції $y = e^{ax} \sin bx$ буде нагадувати синусоїду $y = \sin bx$, розтягнуту між кривими $y = e^{ax}$ та $y = -e^{ax}$. При цьому точки перетину з віссю Ox у кривих $y = \sin bx$ та $y = e^{ax} \sin bx$ будуть спільними. Варто також зазначити, що точки перетину графіка функції $y = e^{ax} \sin bx$ з кривою $y = e^{ax}$ будуть знаходитися в точках максимуму функції $y = \sin bx$, а з кривою $y = -e^{ax}$ – в точках мінімуму.



4.7. і) Виходячи з аналітичного виразу функції, відмітимо, що вона визначена на всій числовій осі за винятком точок $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Виконаємо перетворення

$$y = \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = 2 \cos x - \frac{1}{\cos x}.$$

Графік функції $y = 2 \cos x$ являє собою розтягнутий у 2 рази вздовж осі Oy графік $y = \cos x$.

Функція $y = \frac{1}{\cos x}$ — періодична з періодом 2π . Виходячи з поведінки функції $y = \cos x$ на відрізку $[0; 2\pi]$, побудуємо графік функції $y = \frac{1}{\cos x}$ на даному відрізку, а потім, в силу періодичності, продовжимо його на всю числову вісь. На інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ дана функція зростає, оскільки $y = \cos x$ на

цьому інтервалі спадає. Пряма $x = \frac{\pi}{2}$ буде вертикальною

асимптотою, при наближенні до неї зліва $\frac{1}{\cos x} \rightarrow +\infty$, спра-

ва $-\frac{1}{\cos x} \rightarrow -\infty$. На інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ зростання продов-

жується і точка $x = \pi$ є точкою максимуму даної функції

$\left(y(\pi) = \frac{1}{\cos \pi} = -1\right)$. На інтервалі $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ функція $y = \frac{1}{\cos x}$

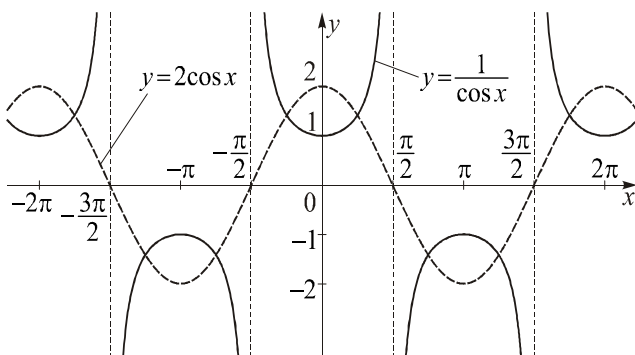
спадає і пряма $x = \frac{3\pi}{2}$ буде ще одною вертикальною асимп-

тотою, причому зліва від неї $\frac{1}{\cos x} \rightarrow -\infty$, справа $-\frac{1}{\cos x} \rightarrow +\infty$.

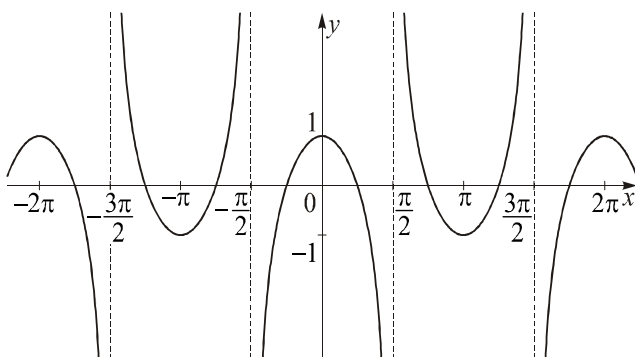
На відрізку $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ функція продовжує спадати і точка $x = 2\pi$

буде точкою мінімуму даної функції $\left(y(2\pi) = \frac{1}{\cos 2\pi} = 1\right)$.

Графіки функцій $y = 2\cos x$ та $y = \frac{1}{\cos x}$ зображено на рисунку.



Графік функції $y = 2 \cos x - \frac{1}{\cos x}$ побудуємо за допомогою методу графічного додавання.



4.8. Проаналізувавши дане рівняння, можна відмітити, що

$$\begin{cases} \sin x + \sin x = 0,12x, & \sin x \geq 0, \\ \sin x - \sin x = 0,12x, & \sin x < 0 \end{cases}$$

$$\text{або} \begin{cases} \sin x = 0,06x, & \sin x \geq 0, \\ 0 = 0,12x, & \sin x < 0. \end{cases}$$

Друге рівняння враховувати не будемо, оскільки його розв'язок $x = 0$ не задовольняє нерівність $\sin x < 0$. Таким чином, кількість розв'язків рівняння $\sin x + |\sin x| = 0,12x$ буде дорівнювати кількості розв'язків рівняння $\sin x = 0,06x$ за умови $\sin x \geq 0$.

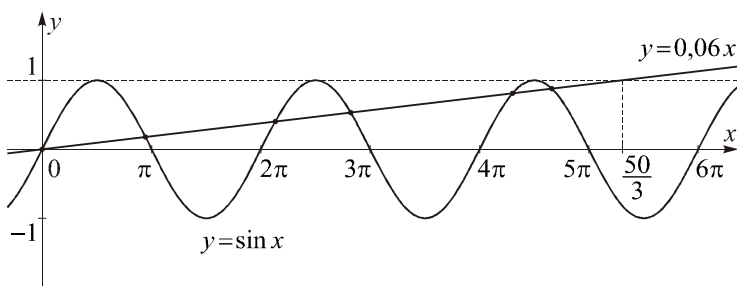
Виділимо інтервал, на якому розміщені корені рівняння $\sin x = 0,06x$. З одного боку, $\sin x \geq 0$, звідки $0,06x \geq 0$ або $x \geq 0$; з іншого – $\sin x \leq 1$, звідки $0,06x \leq 1$ або $x \leq \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$.

Таким чином, усі корені розміщені на відрізку $\left[0; \frac{50}{3}\right]$.

Нерівність $\sin x \geq 0$ буде виконуватися при $x \in [2n\pi; (2n+1)\pi]$,

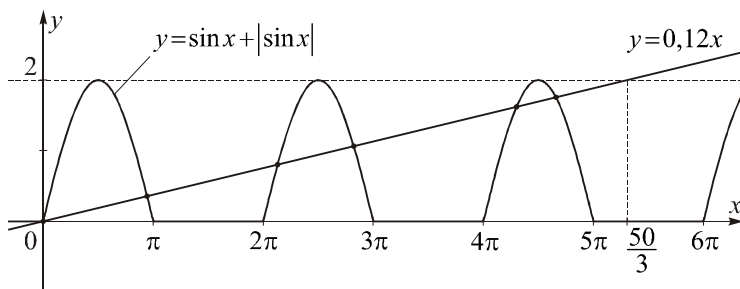
$n \in \mathbb{Z}$, причому з даної множини всередину відрізка $\left[0; \frac{50}{3}\right]$

потрапляють три відрізки: $[0; \pi]$, $[2\pi; 3\pi]$, $[4\pi; 5\pi]$. Оскільки на кожному із цих відрізків пряма $y = 0,06x$ буде перетинатися із синусоїдою $y = \sin x$ по 2 рази, то кількість дійсних коренів рівняння $\sin x + |\sin x| = 0,12x$ дорівнює шести.

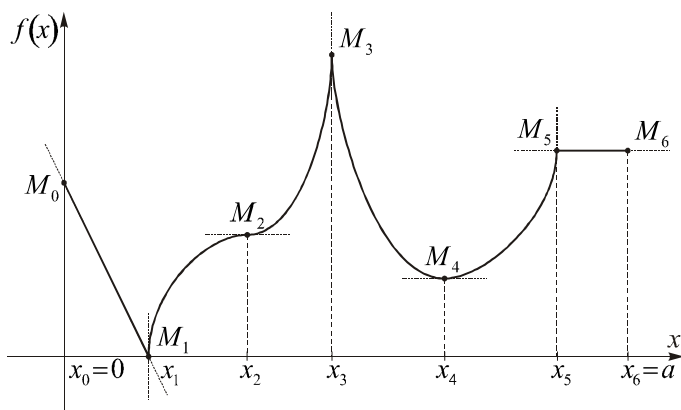


Слід відмітити, що на останньому відрізку з коренями пряма $y = kx$ може мати одну точку перетину із синусоїдою, це можливо, якщо пряма є дотичною. Однак на відрізках, де $\sin x > 0$, графік функції $y = \sin x$ буде проходити під дотичною, а отже ордината дотичної набуде значення, рівного одиниці, раніше за функцію $y = \sin x$. Тобто з припущення, що пряма $y = 0,06x$ є дотичною до графіка $y = \sin x$, випливає, що права границя розміщення коренів рівняння $\sin x = 0,06x$ повинна потрапляти в інтервал $\left(4\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$, чого в даному випадку не відбувається $\left(5\pi < \frac{50}{3} < 6\pi\right)$.

Цю задачу можна розв'язати також графічним способом, побудувавши графіки функцій $y = |\sin x| + \sin x$, $y = 0,12x$ та підрахувавши кількість точок їх перетину.



4.9. Для побудови графіка похідної розіб'ємо область визначення функції $f(x)$ на відрізки $[x_{i-1}; x_i]$ $i = 1, 2, \dots, 6$ за критичними точками. Аналізуючи поведінку графіка функції на цих відрізках, зробимо висновок про вигляд графіка похідної функції.



На відрізку $[x_0; x_1]$ графік функції зображений прямою лінією, кутовий коефіцієнт дотичної залишається сталим і меншим нуля. Графіком $f'(x)$ на цьому відрізку буде пряма, паралельна осі Ox і розміщена під нею.

У точці M_1 відрізняються лівостороння та правосторонні дотичні, при цьому

$$\lim_{x \rightarrow x_1-0} f'(x) = \alpha = \text{const}, \quad \lim_{x \rightarrow x_1+0} f'(x) = +\infty,$$

тобто M_1 – точка розриву другого роду.

На відрізку $[x_1; x_2]$ $f(x)$ зростає, тому $f'(x) > 0$. Графік функції опуклий, тобто $f''(x) = (f'(x))' < 0$, а отже графік похідної буде спадати.

У точці M_2 дотична паралельна осі Ox , отже $f'(x) = 0$.

На відрізку $[x_2; x_3]$ $f(x)$ зростає – $f'(x) > 0$, графік опуклий $f''(x) = (f'(x))' > 0$, отже графік похідної зростає.

У точці $M_3 \lim_{x \rightarrow x_3-0} f'(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_3+0} f'(x) = -\infty$, отже M_3 – точка розриву другого роду.

На відрізку $[x_3; x_4]$ $f(x)$ спадає – $f'(x) < 0$, графік опуклий $f''(x) = (f'(x))' > 0$, отже графік похідної зростає.

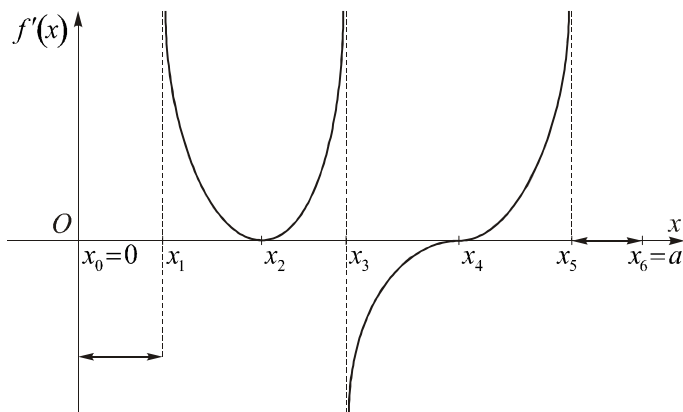
У точці M_4 дотична паралельна осі Ox , отже $f'(x) = 0$.

На відрізку $[x_4; x_5]$ $f(x)$ зростає – $f'(x) > 0$, графік опуклий – $f''(x) = (f'(x))' > 0$, отже графік похідної зростає.

У точці $M_5 \lim_{x \rightarrow x_5-0} f'(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_5+0} f'(x) = 0$, отже M_5 – точка розриву другого роду.

На відрізку $[x_5; x_6]$ графік функції паралельний осі Ox , тому графік похідної на даному відрізку буде збігатися з вказаною віссю.

На основі проведених міркувань будуємо графік функції $f'(x) = 0$.



4.10. Розділимо обидві частини рівняння на x^3 :

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\frac{y}{x}\frac{1}{x} = 0.$$

Зробимо заміну $\frac{y}{x} = t$, отримаємо $1 + t^3 - 3t\frac{1}{x} = 0$, звідки $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^2}$. У результаті даних операцій отримано параметричне рівняння кривої.

Похідні $x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$ та $y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$ будуть одночасно

рівними нулю тільки при $t \rightarrow \pm\infty$. Отже, початок координат є особливою точкою.

Похідна функції по змінній x — $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t}$. Вона

буде рівною нулю при $t = 0$ і $t = \sqrt[3]{2}$, відповідно у точках $(0; 0)$ і $(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$ дотичні будуть паралельними осі Ox .

У точці $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$ при $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ дотична паралельна осі Oy .

Другі похідні $y''_{xx} = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3}$; $x''_{yy} = \frac{-2(1-t^3)(1+t^3)^2}{3t^3(2-t^3)^3}$. Та-

ким чином, крива опукла при $t > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ і вгнута при $t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

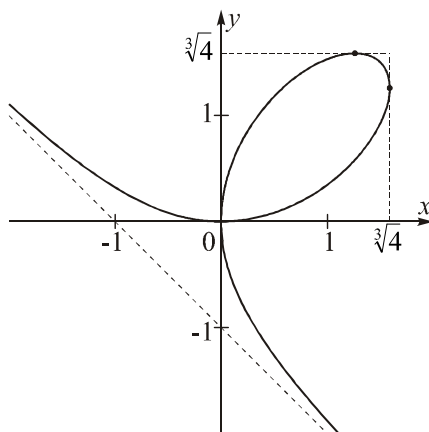
Точка $(0; 0)$ є точкою перегину.

При $t \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, $\frac{y}{x} \rightarrow -1$ і $\lim_{t \rightarrow -1} (y+x) = -1$.

Таким чином, крива має асимптоту $x+y-1=0$.

Поклавши $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, видно, що $F(x, y) = F(y, x)$, а отже дана крива симетрична відносно прямої $y = x$.

Проаналізувавши результати дослідження, будуємо графік даної функції.



V. ГРАНИЦІ

Умови задач

5.1. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2} \right)$.

5.2. Знайти границю послідовності:

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a\sqrt{a}}, \quad \dots, \quad x_n = \underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}\dots}}}_n.$$

5.3. Знайти x , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2015}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2016}$.

5.4. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}$, $f'(0) = a \neq 0$.

5.5. Довести рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

5.6. Довести рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{6} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \right) = \frac{1}{3}.$$

5.7. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \dots + \left(x + \frac{n-1}{n} a \right) \right)$.

5.8. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} \right)$.

5.9. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$.

5.10. Довести, що при $a > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \infty$.

5.11. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$.

5.12. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

5.13. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right)$.

5.14. Довести, що функції $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x$ і $\varphi(x) = \frac{1}{x}$

є еквівалентними нескінченно малими при $x \rightarrow +\infty$.

5.15. Довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{a}{n^2} + \sin \frac{3a}{n^2} + \dots + \sin \frac{(2n-1)a}{n^2} \right) = a.$$

5.16. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right)$.

5.17. Побудувати графік функції $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \arctg x^n$.

5.18. Побудувати графік функції $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{\frac{x}{n}} \right)^n$.

5.19. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}$.

5.20. Довести, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$.

5.21. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \left(1 + \frac{3}{n^2} \right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2} \right)$.

5.22. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos \sqrt[3]{1+x^2} e^x$.

5.23. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

5.24. Знайти $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m} \right)^m$.

5.25. Знайти $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{\sqrt{m}} \right)^m$.

5.26. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$, $a > 0$, $b > 0$.

5.27. Обчислити $\max_{0 \leq y \leq +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^{2xy}$.

5.28. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} x\sqrt{x}(\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})$.

5.29. Знайти такі числа λ та μ , що має місце рівність

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu \right) = 0.$$

5.30. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^2}$.

5.31. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$.

5.32. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$, де

$m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$.

Вказівка. Скористатися теоремою Штольца: якщо

а) $y_{n+1} > y_n$ ($n = 1, 2, \dots$); б) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$; в) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

5.33. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m}{n^m} - \frac{n}{m+1} \right) = \frac{1}{2}$,

де $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$.

Розв'язки задач

$$\begin{aligned}
 5.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}} = \\
 &= 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)} = 2^{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = 2.
 \end{aligned}$$

$$5.2. \text{ Оскільки } x_n = \underbrace{\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \dots}}}}_n = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}}, \text{ то границя}$$

послідовності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)} = a^{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = a.$$

$$\begin{aligned}
 5.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2015}}{n^x - (n-1)^x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2015}}{x \cdot n^{x-1} + \dots + (-1)^x} = \\
 &= \left[: n^{x-1} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2015-x+1}}{x + \dots + \frac{(-1)^x}{n^{x-1}}} = \frac{1}{2016},
 \end{aligned}$$

звідки $x = 2016$.

$$\begin{aligned}
 5.4. \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(e^x - 1) + f(x) - f(0)}{f(x)(\cos x - 1) + f(x) - f(0)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \frac{e^x - 1}{x} + \frac{f(x) - f(0)}{x}}{f(x) \cdot \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{f(x) - f(0)}{x}} = \\
 & = \frac{f(0) \cdot 1 + f'(0)}{0 + f'(0)} = \frac{f(0) + a}{a}.
 \end{aligned}$$

5.5. Кожен із множників під знаком границі є різницею квадратів, тому

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n+1)}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

5.6. Перетворимо вираз, який визначає вигляд загально-го множника:

$$1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = 1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5.7. Під знаком границі розкриємо дужки та згрупуємо подібні доданки:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(x + \frac{a}{n}\right) + \left(x + \frac{2a}{n}\right) + \dots + \left(x + \frac{n-1}{n}a\right) \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(nx + \frac{a}{n} (1 + 2 + \dots + (n-1)) \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(nx + \frac{a}{n} \cdot \frac{1 + (n-1)}{2} (n-1) \right) = \\ & = x + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n-1)}{2n} = x + \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

5.8. Перетворимо вираз під знаком границі:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right) + \\
 & + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^n} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^n} \right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^n} = \\
 & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.
 \end{aligned}$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \right) = 2.$

5.9. Розкладемо загальний доданок на елементарні дробби:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \\
 &= \frac{A(n^2 + 3n + 2) + B(n^2 + 2n) + C(n^2 + n)}{n(n+1)(n+2)},
 \end{aligned}$$

$$(A + B + C)n^2 + (3A + 2B + C)n + 2A = 1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} n^2 & A + B + C = 0, \\ n^1 & 3A + 2B + C = 0, \\ n^0 & 2A = 1 \end{array} \right. \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = \frac{1}{2},$$

тобто

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right).$$

Таким чином,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4}.$$

5.10. Оскільки $a > 1$, то $a = 1 + \alpha$, де $\alpha > 0$. Тоді

$$a^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^2 + \dots + \alpha^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{n} = \frac{1}{n} + \alpha + \frac{n-1}{2!} \alpha^2 + \dots + \frac{\alpha^n}{n} > \frac{n-1}{2} \alpha^2.$$

При $n \rightarrow \infty$ $\frac{n-1}{2} \alpha^2 \rightarrow \infty$, а значить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \infty$.

Також дану границю можна знайти використавши правило Лопітала – при

$$a > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a^n)'}{n'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n \ln a}{1} = \infty.$$

$$5.11. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin n!}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \sin n!. \quad \text{Вираз під знаком}$$

границі при $n \rightarrow \infty$ являє собою добуток нескінченно малої

величини $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$ на обмежену $\sin n!$, а отже

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin n!}{n+1} = 0.$$

5.12. Перетворимо вираз під знаком границі:

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} &= 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, при $x \rightarrow \infty$ даний вираз являє собою добуток нескінченно малої величини $\left(\sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right)$ на обмежену $\left(\cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right)$, а отже

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$$

5.13. Оскільки при $n \in \mathbb{N}$ $\sin \pi n = 0$, то можна замінити вираз під знаком границі на різницю:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) - \sin \pi n\right) = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{2} \sin \frac{\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}{2} = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{2} \sin \frac{\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{2\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\cos \frac{\pi\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{2}}_{\text{обмежена величина}} \underbrace{\sin \frac{\pi}{2\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}}_{\text{нескінченно мала}} = 0.
 \end{aligned}$$

5.14.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \operatorname{arccotg} x = y, \quad \frac{1}{x} = \operatorname{tg} y, \\ x \rightarrow +\infty, \quad y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \sim \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow +\infty$.

5.15. Використаємо першу чудову границю:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{a}{n^2} + \sin \frac{3a}{n^2} + \dots + \sin \frac{(2n-1)a}{n^2} \right) = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{n^2} \left(\underbrace{\frac{\sin \frac{a}{n^2}}{\frac{a}{n^2}}}_{=1} + 3 \underbrace{\frac{\sin \frac{3a}{n^2}}{\frac{3a}{n^2}}}_{=1} + \dots + (2n-1) \underbrace{\frac{\sin \frac{2n-1}{n^2}}{\frac{2n-1}{n^2}}}_{=1} \right) \right) = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n^2} (1 + 3 + \dots + (2n-1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n^2} \cdot \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = a.
 \end{aligned}$$

5.16. Помножимо і розділимо вираз у дужках на $2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}$:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \right) = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{x}{2^n} \cdot \sin \frac{x}{2^n} \cdot 2 \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin \frac{x}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} =
 \end{aligned}$$

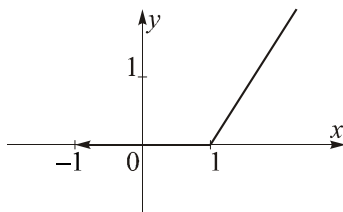
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^{n-2}} \cdot \sin \frac{x}{2^{n-2}} \cdot 2^{n-2}}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} = \dots =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}}}_{=1} = \frac{\sin x}{x}.$$

5.17. Ураховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ +\infty, & x > 1, \end{cases}$ маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg}(x^n) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 1, \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & x > 1. \end{cases}$$

Графік даної функції зображено на рисунку:

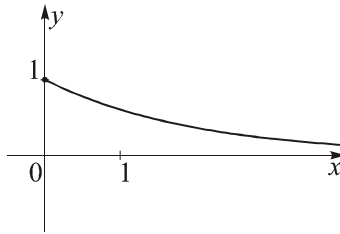


5.18. Знайдемо дану границю:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\cos \sqrt{\frac{x}{n}} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \sin^2 \sqrt{\frac{x}{n}} \right)^{-\frac{1}{\sin^2 \sqrt{\frac{x}{n}}}} \right)^{-\sin^2 \sqrt{\frac{x}{n}} \frac{n}{2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{x \cdot n}{n \cdot 2} \right)} = e^{-\frac{x}{2}}.$$

Ураховуючи область визначення початкової функції ($x \geq 0$), будемо графік $y(x)$.



$$5.19. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[m]{1+ax} - 1)(\sqrt[n]{1+bx} - 1) + \sqrt[m]{1+ax} + \sqrt[n]{1+bx} - 2}{x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[m]{1+ax} - 1)(\sqrt[n]{1+bx} - 1)}{x}}_{=0} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} + \sqrt[n]{1+bx} - 2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+bx} - 1}{x} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}.$$

$$\begin{aligned}
 5.20. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2xe^x} = \\
 &= [e^{2x} - 1 \sim 2x] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.21. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right)^{\frac{1}{n^2}} \cdot \left(\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \right)^{\frac{2}{n^2}} \times \\
 &\times \left(\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3}} \right)^{\frac{3}{n^2}} \cdot \dots \cdot \left(\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} \right)^{\frac{n}{n^2}} = \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.22. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[1 - \cos x]{1 + x^2 e^x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^2 e^x\right)^{\frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + x^2 e^x\right)^{\frac{1}{x^2 e^x}} \right)^{\frac{x^2 e^x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{\sin^2(x/2)}{x^2/4}}} = e^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.23. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \underbrace{\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)}_{\text{нескінченно мала при } x \rightarrow \infty} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}}} = \\
 & = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{x} - 2 \sin^2 \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x}} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} \cdot \sin \frac{1}{2x} \right)} = e.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.24. \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m} \right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\cos \frac{x}{m} - 1 \right) \right)^m = \\
 & = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2m} \right)^m = \\
 & = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2m} \right)^{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2m}}} \right)^{-2m \sin^2 \frac{x}{2m}} = \\
 & = e^{-\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{2m}}{\frac{x}{2m}} \right)^2 \cdot \frac{x^2}{2m}} = e^0 = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.25. \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{\sqrt{m}} \right)^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\cos \frac{x}{\sqrt{m}} - 1 \right) \right)^m = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2\sqrt{m}} \right)^m = \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2\sqrt{m}} \right)^{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2\sqrt{m}}}} \right)^{-2m \sin^2 \frac{x}{2\sqrt{m}}} = \\
 &= e^{-\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{2\sqrt{m}}}{\frac{x}{2\sqrt{m}}} \right)^2 \cdot \frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.26. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \underbrace{\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)}_{\text{нескінченно мала}} \right)^{\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) n} = \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) n} = e^{\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\frac{1}{n}} \right)}.
 \end{aligned}$$

Розглянемо границю

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} &= \left[t = \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\ln a^t} - 1}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{t \ln a} - 1}{t \ln a}}_{\rightarrow 1} \cdot \ln a = \ln a.\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n &= e^{\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\frac{1}{n}} \right)} = \\ &= e^{\frac{1}{2} (\ln a + \ln b)} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

5.27. Знайдемо значення границі, а потім вкажемо найбільше значення одержаної функції на відрізку $0 \leq y \leq +\infty$:

$$\begin{aligned}\max_{0 \leq y \leq +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{y}{x} \right)^{xy} &= \max_{0 \leq y \leq +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{y}{2x} \right)^{xy} = \\ &= \max_{0 \leq y \leq +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - 2 \sin^2 \frac{y}{2x} \right)^{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{y}{2x}}} \right)^{-2 \sin^2 \frac{y}{2x} \cdot xy} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{y}{2x} \cdot \frac{y^3}{4x}}{\frac{y^2}{4x^2}} \\
 & = \max_{0 \leq y \leq +\infty} e^{\frac{y^3}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \\
 & = \max_{0 \leq y \leq +\infty} \frac{1}{e^{\frac{y^3}{2}}} = 1.
 \end{aligned}$$

5.28. Перетворимо вираз під знаком границі:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(\frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} \right) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} \right) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})} \right) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})} = \\
 & = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right)} = -2 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

5.29. 1-й спосіб

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} - \sqrt[3]{(\lambda x + \mu)^3} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3} - \sqrt[3]{(\lambda x + \mu)^3} \right) \left(\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + \sqrt[3]{(1-x^3)(\lambda x + \mu)^3} + \sqrt[3]{(\lambda x + \mu)^6} \right)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + \sqrt[3]{(1-x^3)(\lambda x + \mu)^3} + \sqrt[3]{(\lambda x + \mu)^6}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3 - \lambda^3 x^3 - 3\lambda^2 \mu x^2 - 3\lambda \mu^2 x - \mu^3}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + \sqrt[3]{(1-x^3)(\lambda x + \mu)^3} + \sqrt[3]{(\lambda x + \mu)^6}} \left(: x^2 \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - x(1 + \lambda^3) - 3\lambda^2 \mu - \frac{3\lambda \mu^2}{x} - \frac{\mu^3}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{(1-x^3)^2}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{(1-x^3)(\lambda x + \mu)^3}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{(\lambda x + \mu)^6}{x^6}}}.
 \end{aligned}$$

У даному випадку чисельник прямує до нуля при $x \rightarrow \infty$, якщо $\lambda = -1$, $\mu = 0$, а у знаменнику доданки прямують до суми: $-1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$.

Перевірка:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x \right) &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3} + x \right) \left(\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - x \sqrt[3]{1-x^3} + x^2 \right)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - x \sqrt[3]{1-x^3} + x^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2} - x \sqrt[3]{1 - x^3} + x^2} \left(: x^2 \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^3} + 1} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + 1} = 0.
 \end{aligned}$$

2-й спосіб

За означенням пряма $y = \lambda x + \mu$ буде асимптотою функції $f(x)$, якщо $\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, а $\mu = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \lambda x)$. Перетворивши останню рівність, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \lambda x - \mu) = 0,$$

тобто для визначення коефіцієнтів λ та μ достатньо знайти відповідні коефіцієнти в рівнянні асимптоти функції $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1; \\
 \mu &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 - x^3} + x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1 - x^3} + x \right) \left(\sqrt[3]{(1 - x^3)^2} - x \sqrt[3]{1 - x^3} + x^2 \right)}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2} - x \sqrt[3]{1 - x^3} + x^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2} - x \sqrt[3]{1 - x^3} + x^2} \left(: x^2 \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^3} + 1} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + 1} = 0.
 \end{aligned}$$

5.30. Перетворимо вираз під знаком границі:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln((1 + x + x^2)(1 - x + x^2))}{x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2 + x^4)}{x^2} = \left[\ln(1 + x^2 + x^4) \sim x^2 + x^4 \text{ при } x \rightarrow 0 \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1.
 \end{aligned}$$

Дану границю можна також обчислити, використавши правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{2x-1}{1-x+x^2}}{2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 2x}{2x(1+x+x^2)(1-x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 1}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)} = 1.
 \end{aligned}$$

5.31. Використаємо правило Лопітала:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^x - 1)'}{(\ln x - x + 1)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{x+1} (\ln x + 1)}{1 - x}.
 \end{aligned}$$

Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^{x+1} (\ln x + 1)}{1 - x} = +\infty, \text{ а } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^{x+1} (\ln x + 1)}{1 - x} = -\infty,$$

то границя $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$ не існує.

5.32. Оскільки послідовності $x_n = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m$ і $y_n = n^{m+1}$ при $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ задовольняють теорему Штольца, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m - (1^m + 2^m + 3^m + \dots + (n-1)^m)}{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{n^{m+1} \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^{m+1} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{m+1} \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(1 - \left(1 - \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)m}{2!} \frac{1}{n^2} - \dots + (-1)^{m+1} \frac{1}{n^{m+1}} \right) \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(m+1) - \frac{(m+1)m}{2!} \cdot \frac{1}{n} - \dots + (-1)^{m+1} \frac{1}{n^m}} = \frac{1}{m+1}.
 \end{aligned}$$

5.33. Скористаємося теоремою Штольца (див. 5.32): покладемо

$$x_n = (m+1)(1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m) - n^{m+1},$$

$$y_n = (m+1)n^m,$$

тоді

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m+1)n^m - n^{m+1} + (n-1)^{m+1}}{(m+1)(n^m - (n-1)^m)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m+1)n^m - n^{m+1} + n^{m+1} - (m+1)n^m + \frac{(m+1)m}{2!}n^{m-1} - \dots + (-1)^{m+1}}{(m+1)\left(n^m - n^m + mn^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2!}n^{m-2} - \dots + (-1)^m\right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m+1)\left(n^{m-1} \cdot \frac{m}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}\right)}{(m+1)\left(m \cdot n^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2!}n^{m-2} - \dots + (-1)^m\right)} = \left[: n^{m-1} \right] = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

VI. ПОХІДНІ

Умови задач

6.1. Навести приклади функцій, для яких на відрізку $[\alpha; \beta]$ виконуються вказані умови (C – константа):

а) $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \infty$ і $\lim_{x \rightarrow \beta} f'(x) = \infty$;

б) $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = C$ і $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.

6.2. Знайти $y^{(39)}$ та $y^{(40)}$, якщо

$$y = (4x + 1)^7 \cdot (x^2 + 6x - 3)^{10} \cdot (x + 5)^{12}.$$

6.3. Знайти $y'(0)$, якщо $y(x) = x(x - 1)(x - 2) \dots (x - 2015)$.

6.4. Нехай функція $f(x)$ диференційована в інтервалі $(x_0; \infty)$ та існує $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Чи впливає із цього, що існує

$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$? Розглянути приклад $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

6.5. Нехай обмежена функція $f(x)$ диференційована в інтервалі $(x_0; \infty)$ та існує $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$. Чи впливає із цього,

що границя $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ скінчена чи нескінченна? Розглянути приклад $f(x) = \cos(\ln x)$.

6.6. При n вимірах фізичної величини x одержали значення $x_1, x_2, \dots, x_n$. Знайти, при якому значенні x сума квадратів $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ буде найменшою.

6.7. При якому a крива $y = a^x$ дотикається до прямої $y = x$? Знайти точку дотику.

6.8. Нехай

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^3-1 & 7x^3-1 \end{vmatrix}.$$

Довести, що знайдеться точка c ($0 < c < 1$) така, що $f'(c) = 0$.

6.9. Довести, що при будь-яких a і b справедлива нерівність

$$|\arctg b - \arctg a| \leq |b - a|.$$

6.10. Довести справедливості нерівності

$$|\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|,$$

де x_1, x_2 — довільні дійсні числа.

6.11. Довести теорему: якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані на $[a; b]$ і $f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (a; b)$, а $f(a) = g(a)$, то $f(x) > g(x)$ для $\forall x \in (a; b]$.

6.12. Довести, що $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ для $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

6.13. Нехай x_0 – абсциса точки перегину кривої $y = f(x)$. Чи буде точка x_0 точкою екстремуму для функції $y = f'(x)$?

6.14. Знайти найбільший член послідовності

$$v_n = \frac{n^2}{n^3 + 200} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

6.15. Довести нерівність $\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$ за умови

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

6.16. Довести, що функція $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ зростає в інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(0; +\infty)$.

6.17. Чи збігаються точки екстремуму функцій $y_1 = f(x) \geq 0$ і $y_2 = \sqrt{f(x)}$?

6.18. Довести, що всякий многочлен з додатними коефіцієнтами, який є парною функцією, повсюди вгнутий і має єдину точку мінімуму.

6.19. Знайти $\frac{d^2 y}{dx^2}$, якщо $f(x, y) = 0$.

Розв'язки задач

6.1. Покладемо відрізок $[\alpha; \beta]$ рівним, наприклад, відрізку $[0; 1]$.

а) Нехай $f(x) = \frac{1}{x-1}$, тоді $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Таким чином

$$\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \beta} f'(x) = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty.$$

б) Нехай $f(x) = \sin x$, тоді $f'(x) = \cos x$.

Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sin x = \sin 1, \quad \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x.$$

6.2. Після розкриття дужок отримаємо многочлен 39 степеня зі старшим членом $4^7 x^{39}$. Таким чином, шукані похідні:

$$y^{(39)} = 4^7 \cdot 39!; \quad y^{(40)} = 0.$$

6.3. Оскільки $y(x)$ являє собою добуток функцій, доцільно виконати логарифмічне диференціювання:

$$\ln y = \ln x + \ln(x-1) + \dots + \ln(x-2015),$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-2015},$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-2015} \right) \cdot x(x-1)(x-2) \dots (x-2015) = \\ &= (x-1)(x-2) \dots (x-2015) + \\ &+ x(x-2) \dots (x-2015) + \dots + x(x-1) \dots (x-2014). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } y'(0) = (-1)(-2) \dots (-2015) = -2015!.$$

6.4. Не впливає. Розглянемо, наприклад, функцію

$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, диференційовану на інтервалі $(0; +\infty)$. При

$x \rightarrow \infty$ дана функція має границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0,$$

у той час як її похідна границі не має:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \right) \text{ не існує,}$$

оскільки $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x^2)$.

6.5. Не впливає. Розглянемо, наприклад, функцію

$f(x) = \cos(\ln x)$, диференційовану на інтервалі $(0; +\infty)$. При $x \rightarrow +\infty$ похідна даної функції має границю

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sin(\ln x)}{x} = 0,$$

у той час як сама функція границі не має:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\ln x) \text{ не існує.}$$

6.6. Розглянемо функцію

$$y = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$$

та знайдемо її точки екстремуму. Критична точка

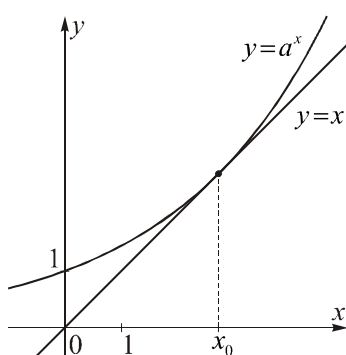
$$y'_x = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \dots + 2(x - x_n) = 2 \left(nx - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$y'_x = 0 \text{ при } x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Оскільки $y'' = 2n > 0$, то точка $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ є точкою міні-

муму вказаної функції.

6.7. У точці дотику ординати і кутові коефіцієнти обох ліній будуть збігатися. Нехай абсциса точки дотику рівна x_0 , тоді будуть справедливими наступні рівності:



$$\begin{cases} x_0 = a^{x_0}, \\ a^{x_0} \ln a = 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 \ln a = 1.$$

Злогарифмувавши перше рівняння системи, отримаємо $\ln x_0 = x_0 \ln a = 1$, звідки $x_0 = e$. З іншого боку, $x_0 \ln a = e \ln a = 1$, а отже $a = e^{1/e}$.

6.8. Функція

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^3-1 & 7x^3-1 \end{vmatrix}$$

після обчислення визначника являтиме собою многочлен шостого степеня, а отже є неперервною і диференційованою на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Також

$$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{і} \quad f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином функція $f(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля на відрізку $[0; 1]$, а отже існує така точка $c \in (0; 1)$, що $f'(c) = 0$.

6.9. За теоремою Лагранжа для функції $f(x) = \arctg x$ і $x \in [a; b]$

$$\arctg b - \arctg a = f'(\xi)(b - a) = \frac{1}{1 + \xi^2}(b - a),$$

де $\xi \in (a; b)$. Таким чином,

$$|\arctg b - \arctg a| = \frac{|b - a|}{1 + \xi^2} \leq |b - a|.$$

6.10. За формулою Лагранжа для функції $f(x) = \sin x$ і $x \in [x_1; x_2]$

$$\sin x_2 - \sin x_1 = \cos \xi \cdot (x_2 - x_1),$$

де $\xi \in (x_1; x_2)$. Тоді

$$|\sin x_2 - \sin x_1| = |\cos \xi| |x_2 - x_1| \leq |x_2 - x_1|.$$

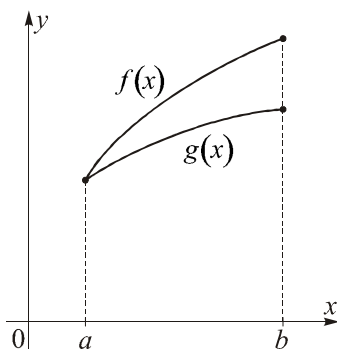
6.11. Покладемо $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. В силу того, що $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані на $[a; b]$ і $f'(x) > g'(x) \quad \forall x \in (a; b)$, то $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Отже, $\varphi(x)$ монотонно зростає на $(a; b)$. На відрізку $[a; b]$, де $x \in (a; b]$, за теоремою Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(a) = f'(\xi)(x - a) \quad (a < \xi < x) \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(a) > 0$$

або

$$f(x) - g(x) - \underbrace{(f(a) - g(a))}_{=0} > 0 \Rightarrow f(x) > g(x) \quad \forall x \in (a; b].$$

Геометрична ілюстрація цього факту показана на рисунку.



6.12. Нехай $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = x + \frac{x^3}{3}$, тоді

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad g'(x) = 1 + x^2.$$

$$f(0)=g(0) \text{ і очевидно, що } f'(x)>g'(x) \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Згідно з доведеним у задачі 6.11 } \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

6.13. Якщо x_0 – точка перегину функції $y = f(x)$, то при переході через неї друга похідна змінює знак. Оскільки $f''(x) = (f'(x))'$, то функція $y = f'(x)$ матиме в точці x_0 екстремум, якщо вона в даній точці визначена.

Наприклад, для функції $f(x) = \sin x$ $x_0 = \pi$ – точка перегину, а для $f'(x) = \cos x$ $x_0 = \pi$ – точка мінімуму. В той же час, для функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x_0 = 0$ – точка перегину, однак $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ в даній точці не визначена, а отже екстремуму в ній немає.

$$6.14. \text{ Розглянемо функцію } v(x) = \frac{x^2}{x^3 + 200}, \text{ тоді}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x(400 - x^3)}{(x^3 + 200)^2}.$$

Критичні точки: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{400}$, $x_3 = -\sqrt[3]{200}$. Оскільки розглядаємо лише невід'ємні значення, точку x_3 не враховуємо. При переході через точку x_1 зліва направо похідна змінює знак з мінуса на плюс, а отже $x_1 = 0$ є точкою мінімуму функції $v(x)$. При переході через точку x_2 похідна змінює

знак з плюса на мінус, а отже $x_3 = \sqrt[3]{400} \approx 7,37$ є точкою максимуму функції $v(x)$. Найближчими натуральними числами до точки максимуму є $n_1 = 7$ і $n_2 = 8$, причому

$$v(7) = \frac{49}{543} \approx 0,0902, \quad v(8) = \frac{64}{712} \approx 0,0899.$$

Отже, найбільшим членом послідовності $v_n = \frac{n^2}{n^3 + 200}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ є її восьмий член $v_7 = \frac{49}{543}$.

6.15. Розглянемо функцію $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Її похідна

$$y' = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x}.$$

Як бачимо, $y' > 0$, якщо $2x > \sin 2x$. Остання нерівність справедлива для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, значить на вказаному інтер-

валі функція $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ зростає і для $x_1 < x_2$ виконується нерів-

$$\text{ність } \frac{\operatorname{tg} x_1}{x_1} < \frac{\operatorname{tg} x_2}{x_2} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

6.16. Спочатку доведемо, що для $0 < a < b$ справедлива нерівність

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

За теоремою Лагранжа до функції $y = \ln x$ на відрізку $[a; b]$ маємо: $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c}$, $c \in (a; b)$. Тоді $\ln \frac{b}{a} = \frac{1}{c}(b - a)$, а оскільки $a < c < b$, то

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}. \quad (6.1)$$

Обчислимо похідну функції $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$:

$$\begin{aligned} \ln y &= x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}\right). \end{aligned}$$

Із властивостей показникової функції випливає, що $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$. З іншого боку, згідно з (6.1) для $\forall x \in (0; +\infty)$

$$\frac{1}{1+x} < \ln \frac{1+x}{x} < \frac{1}{x},$$

тобто $\ln \frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x} > 0$. Значить на відрізку $(0; +\infty)$ $y' > 0$,

а отже функція y на вказаному інтервалі зростає.

$$\text{Для } \forall x \in (-\infty; -1) \ln \frac{1+x}{x} = \ln \frac{|1+x|}{|x|} = -\ln \frac{|x|}{|1+x|}, |x| > |1+x|.$$

Тому згідно з виразом (6.1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|} < \ln \frac{|x|}{|1+x|} < \frac{1}{|1+x|} &\Rightarrow -\frac{1}{|x|} > -\ln \frac{|x|}{|1+x|} > -\frac{-1}{|1+x|} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \frac{1+x}{x} > \frac{1}{1+x}, \end{aligned}$$

тобто $\ln \frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x} > 0$ і $y' > 0$, отже на інтервалі $(-\infty; -1)$

функція $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ теж зростає.

6.17. Екстремуми функції $y_1 = f(x) \geq 0$ можуть знаходитися в точках, де $f'(x) = 0$ або $\exists f'(x)$. Екстремуми функції $y_2 = \sqrt{f(x)}$ можуть знаходитися в точках, де $(\sqrt{f(x)})' = 0$ або $\exists (\sqrt{f(x)})'$. Оскільки $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, то критичними є точки, в яких $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ та $\exists f'(x)$.

Як бачимо, критичні точки функцій $y_2 = \sqrt{f(x)}$ збігаються з критичними точками функції $y_1 = f(x)$, за виключенням точок, де $f(x) = 0$. Однак, якщо в деякій точці $x = x_0$ виконується рівність $f(x_0) = 0$, то в силу того, що $f(x) \geq 0$, в ε -околі даної

точки будуть виконуватися нерівності $f(x_0 \pm \varepsilon) \geq f(x_0)$. Отже, x_0 буде точкою мінімуму, звідки випливає, що $f'(x_0) = 0$ або $\exists f'(x_0)$, тобто критичні точки у функцій y_1 та y_2 спільні.

За умовою $f(x) \geq 0$, тому $\sqrt{f(x)} \geq 0$, а отже знаки виразів $f'(x)$ та $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ будуть збігатися і змінюватимуться одночасно при переході через точки екстремуму. Таким чином, точки екстремуму функцій $y_1 = f(x) \geq 0$ і $y_2 = \sqrt{f(x)}$ повинні збігатися.

6.18. Запишемо функцію, що відповідає зазначеним умовам:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i} = a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2n-2} + \dots + a_1 x^2 + a_0,$$

де $a_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, а $a_n > 0$.

Тоді перша похідна

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n 2ia_i x^{2i-1} = 2na_n x^{2n-1} + 2(n-1)a_{n-1} x^{2n-3} + \dots + 2a_1 x$$

або

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \sum_{i=1}^n 2ia_i x^{2i-2} = \\ &= x(2na_n x^{2n-2} + 2(n-1)a_{n-1} x^{2n-4} + \dots + 2a_1) \end{aligned}$$

Оскільки $f'(x)$ є многочленом, то він визначений на всій числовій осі, тому серед критичних точок функції $f(x)$ будуть лише ті, в яких $f'(x) = 0$. В силу того, що коефіцієнти

многочлена $\sum_{i=1}^n 2ia_i x^{2i-2}$ невід'ємні, а всі степені парні, буде справедливою нерівність $\sum_{i=1}^n 2ia_i x^{2i-2} \geq 0$ (рівність буде виконуватися в точці $x_0 = 0$, якщо $a_1 = 0$). Отже, рівняння $f'(x) = 0$ матиме єдиний розв'язок $x_0 = 0$. Із зазначеної нерівності також випливає, що похідна $f'(x) = x \sum_{i=1}^n 2ia_i x^{2i-2}$ на відрізку $(-\infty; 0)$ буде від'ємною, а на відрізку $(0; +\infty)$ – додатною. Отже $x_0 = 0$ – єдина точка мінімуму функції $f(x)$.

Друга похідна

$$f''(x) = \sum_{i=1}^n 2i(2i-1)a_i x^{2i-2} = 2n(2n-1)a_n x^{2n-2} + 2(n-1)(2n-3)a_{n-1} x^{2n-4} + \dots + 2a_1,$$

визначена на відрізку $(-\infty; +\infty)$, причому $f''(x) > 0$ всюди крім, можливо, точки $x_0 = 0$ (якщо $a_1 = 0$, то $f''(x_0) = 0$). Однак точка $x_0 = 0$ не може бути точкою перегину, оскільки при переході через неї $f''(x)$ зберігає знак, а отже функція $f(x)$ всюди вгнута.

6.19. За формулою повної похідної, вважаючи $y = y(x)$, маємо:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

З останнього рівняння в силу того $\frac{df}{dx} = 0$, випливає

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Повторно застосувавши формулу повної похідної, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right) \cdot \left(- \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right) = \\ &= - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \cdot \left(- \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right) = \\ &= - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^3}. \end{aligned}$$

VII. ІНТЕГРАЛИ

Умови задач

7.1. Знайти $\int \frac{x \sin x + \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$.

7.2. Знайти $\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$.

7.3. Знайти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2016} - 1}}$.

7.4. Знайти $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

7.5. Знайти $\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$.

7.6. Знайти $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$.

7.7. Дано $\varphi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2} dt$. Обчислити $\varphi'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

7.8. Нехай $0 < a < b$. Довести, що

$$\int_a^b (x^2 + 1)e^{-x^2} dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

7.9. Довести, що $\frac{20\sqrt{2}}{21} \leq \int_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Вказівка. Скористатися нерівністю $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, $x \geq 0$.

7.10. Функції $f \in C'[a, b]$ і $g \in C[a, b]$ задовольняють такі умови: $f'(x) \geq g(x)(f^2(x) + 1)$, $f(a) = -1$, $f(b) = 1$. Довести, що $\int_a^b g(t) dt \leq \frac{\pi}{2}$.

7.11. Функція $f(x)$ визначена на $[0; 1]$ і монотонно не зростає (тобто $f(x_2) \leq f(x_1)$ при $x_2 > x_1$). Довести, що

$$\forall \alpha \in (0; 1) \int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx.$$

7.12. Довести нерівність

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x)dx,$$

якщо $f(x)$ – функція неперервна на $[a; b]$.

Вказівка. Використати нерівність Коші–Буняковського:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

7.13. Нехай $f(x)$ – неперервна на $[0;1]$ функція. Довести, що $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$.

7.14. Нехай $f(x)$ – неперервна функція, причому $f(a) > a$, і $\int_a^b f(x) dx < \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Довести, що рівняння $f(x) = x$ має корінь на $(a; b)$.

7.15. Довести, що $\int_0^1 \frac{f(x) dx}{f(x) + f(1-x)} = \frac{1}{2}$ для додатної неперервної функції $f(x)$.

7.16. Нехай $f(x)$ – парна і неперервна функція. Довести, що $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx$.

7.17. Обчислити довжину дуги лінії

$$x = \int_1^t \frac{\cos z}{z} dz, \quad y = \int_1^t \frac{\sin z}{z} dz$$

від початку координат до найближчої точки з вертикальною дотичною.

7.18. Обчислити $\int_0^{2015\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

7.19. Обчислити $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2015x}{\sin x} dx$.

7.20. Обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

7.21. Обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx$.

7.22. У судновій цистерні, виготовленій у формі параболоїда обертання і розміщеній вище від ватерлінії, у найнижній точці утворилася пробоїна діаметром 2 см. За який час вода повністю витече із цистерни, якщо її висота 4 м, а діаметр верхньої кришки 2 м? Який об'єм даної цистерни? Вважати, що швидкість витікання рідини змінюється за законом Торрічеллі.

7.23. Обчислити масу земної атмосфери (Землю вважати кулею радіусом R_0), якщо густина її речовини змінюється за законом $\gamma(h) = \gamma_0 e^{-kh}$, де h – відстань від поверхні Землі.

7.24. Зобразити тіло, об'єм якого виражається інтегралом $V = \int_0^2 (4 - x^2) dx \int_0^{4-x} dy$.

7.25. Обчислити $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, де L – замкнутий контур, який обмежує довільну область, що містить у собі початок координат.

7.26. Довести рівність $\int_a^b dx \int_a^x f(t) dt = \int_a^b (b-x)f(x) dx$.

7.27. Довести, що
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} dx dy < \pi.$$

7.28. Оцінити величину подвійного інтеграла

$$I = \iint_D (x^2 - y^2) dx dy,$$

де D – область, обмежена лінією $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

7.29. Оцінити інтеграл

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

якщо $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$.

7.30. Довести формулу

$$\oint_S \varphi \bar{a} \bar{n}^\circ dS = \iiint_V (\varphi \operatorname{div} \bar{a} + \bar{a} \operatorname{grad} \varphi) dV,$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$; $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$; S – поверхня, що обмежує об'єм V ; $\bar{n}^\circ$ – орт зовнішньої нормалі до поверхні S . Встановити умови застосування формули.

Розв'язки задач

7.1. Нехай $t = \frac{x}{\cos x}$, $dt = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} dx$, звідки

$$(\cos x + x \sin x) dx = \cos^2 x dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x + x \sin x}{x^2 + \cos^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 t \, dt}{t^2 \cos^2 t + \cos^2 t} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \frac{x}{\cos x} + C. \end{aligned}$$

7.2. 1-й спосіб

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x + (\cos x - \sin x) + \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \right) dx = \frac{1}{2} \left(x + \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\ln |\cos x + \sin x| + x) + C. \end{aligned}$$

2-й спосіб

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \left[\begin{array}{l} x = t - \frac{\pi}{4}, \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{\cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos t \cos \frac{\pi}{4} + \sin t \sin \frac{\pi}{4}}{\sin t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t + \sin t}{\sin t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{d(\sin t)}{\sin t} + \int dt \right) = \frac{1}{2} (\ln |\sin t| + t + C_1) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| + x + \frac{\pi}{4} + C_1 \right) = \frac{1}{2} (\ln |\cos x + \sin x| + x) + C.
 \end{aligned}$$

3-й способ

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \\
 &= \int \frac{\cos^2 x - \cos x \sin x}{\cos 2x} dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos 2x} dx - \int \frac{\sin 2x}{2 \cos 2x} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{\cos 2x} + \int dx - \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 2x} dx + x + \frac{1}{2} \int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int \frac{d(\sin 2x)}{1 - \sin^2 2x} + x + \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| \right) + C = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} \right| + x + \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| \right) + C =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right| + \frac{1}{2} \ln |\cos^2 x - \sin^2 x| + x \right) + C = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x - \sin x} \right| + x \right) + C = \\
 &= \frac{1}{2} (\ln |\cos x + \sin x| + x) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.3. \quad & \int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2016}-1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x^{1008})^2-1}} = \\
 &= \int \frac{dx}{x\sqrt{(x^{1008})^2\left(1-\frac{1}{(x^{1008})^2}\right)}} = \int \frac{dx}{x^{1009}\sqrt{1-\frac{1}{(x^{1008})^2}}} = \\
 &= -\frac{1}{1008} \int \frac{d\left(\frac{1}{x^{1008}}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{(x^{1008})^2}}} = -\frac{1}{1008} \arcsin \frac{1}{x^{1008}} + C.
 \end{aligned}$$

$$7.4. \quad \int \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = t, \\ \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 2}} = \\
 &= \left[\begin{array}{l} t = \frac{\sqrt{2}}{\cos z}, \quad dt = \frac{\sqrt{2} \sin z \, dz}{\cos^2 z}, \\ \sqrt{t^2 - 2} = \frac{\sqrt{2} \sin z}{\cos z} \end{array} \right] = \\
 &= \int \frac{\sqrt{2} \sin z \, dz}{\cos^2 z \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos z} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos z} \cdot \sin z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dz = \frac{1}{\sqrt{2}} z + C = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2}}{t} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{\sqrt{2}x}{x^2 + 1} + C.
 \end{aligned}$$

7.5. Перетворимо знаменник підінтегрального виразу:

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \\
 &= \int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x)} = \\
 &= \int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x)}.
 \end{aligned}$$

Ураховуючи, що

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x)} = \\ & = \frac{2}{3} \cdot \int \frac{dx}{\cos x + \sin x} + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x \cos x} dx = \frac{2}{3} I_1 + \frac{1}{3} I_2, \end{aligned}$$

одержуємо:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x} =$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|;$$

$$I_2 = \int \frac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x \cos x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x} =$$

$$= 2 \int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{1 + (\sin x - \cos x)^2} = 2 \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{1 + (\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg}(\sin x - \cos x).$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg}(\sin x - \cos x).$$

7.6. Нехай функція $F(x)$ є первісною даного інтеграла, тоді

$$F'(x) = \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}. \quad (7.1)$$

Функцію $F(x)$ будемо шукати у вигляді

$$F(x) = \frac{(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x}{x \sin x + \cos x},$$

де A, B, C, D – невизначені коефіцієнти.

Знайшовши похідну даного виразу, прирівняємо її до (7.1). Оскільки знаменники обох виразів однакові, рівняння зводиться до рівності чисельників

$$\begin{aligned} & -Ax^2(\sin^2 x + \cos^2 x) - Bx(\sin^2 x + \cos^2 x) + \\ & + Cx(\sin^2 x + \cos^2 x) + (A + D)\cos^2 x + (C - B)\sin x \cos x = x^2. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{cases} x^2 \\ x \\ \cos^2 x \\ \sin x \cos x \end{cases} \begin{vmatrix} -A = 1, \\ -B + C = 0, \\ A + D = 0, \\ C - B = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A = -1, D = 1, B = C.$$

Коефіцієнти B і C одночасно можуть набувати будь-яких значень, тому поклавши $B = C = C_0$, первісну $F(x)$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(-x + C_0)\cos x + (C_0x + 1)\sin x}{x \sin x + \cos x} = \\ &= \frac{\sin x - x \cos x + C_0(x \sin x + \cos x)}{x \sin x + \cos x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C_0. \end{aligned}$$

7.7. За властивостями визначеного інтеграла

$$\Phi(x) = \int_0^{\cos x} e^{t^2} dt - \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt,$$

звідки

$$\Phi'(x) = e^{\cos^2 x} (\cos x)' - e^{\sin^2 x} (\sin x)' = -\left(e^{\cos^2 x} \sin x + e^{\sin^2 x} \cos x\right),$$

а отже

$$\Phi\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\left(e^{3/4} \cdot \frac{1}{2} + e^{1/4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{e^{1/4}}{2} (e^{1/2} + \sqrt{3}).$$

7.8. Відомо, що якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на відрітку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Нерівність $x^2 + 1 \geq 2x$ справедлива для всіх $x \in R$, оскільки $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$. В силу того, що

$$(x^2 + 1)e^{-x^2} \geq 2xe^{-x^2},$$

на будь-якому відрізку $[a; b]$ буде вірною нерівність

$$\int_a^b (x^2 + 1)e^{-x^2} dx \geq \int_a^b 2xe^{-x^2} dx = -e^{-x^2} \Big|_a^b = e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

7.9. Оскільки $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ при $x \geq 0$, то на півінтервалі $(0; 2]$ буде справедливою нерівність

$$\sqrt{x} - \frac{x^2\sqrt{x}}{6} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \sqrt{x}.$$

Тоді в силу властивостей визначеного інтеграла на півінтервалі $(0; 2]$ повинні виконуватися нерівності

$$\int_0^2 \sqrt{x} - \frac{x^2\sqrt{x}}{6} dx \leq \int_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^2 \sqrt{x} dx,$$

звідки

$$\frac{20\sqrt{2}}{21} \leq \int_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

7.10. З умови $f'(x) \geq g(x)(f^2(x)+1)$ випливає, що

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)+1} \geq g(x) \quad \text{або} \quad (\operatorname{arctg} f(x))' \geq g(x).$$

Тоді

$$\int_a^b (\operatorname{arctg} f(x))' dx \geq \int_a^b g(x) dx, \quad \operatorname{arctg} f(x) \Big|_a^b \geq \int_a^b g(x) dx,$$

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) \geq \int_a^b g(x) dx,$$

звідки

$$\int_a^b g(x) dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

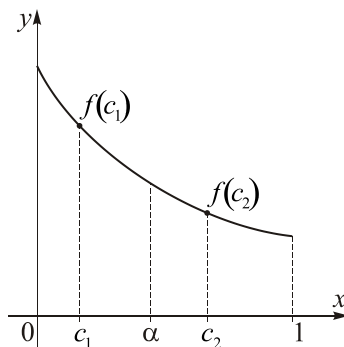
7.11. За теоремою про середнє значення функції на відрізку маємо:

$$\int_0^\alpha f(x) dx = f(c_1) \cdot \alpha,$$

де $c_1 \in (0; \alpha)$;

$$\int_\alpha^1 f(x) dx = f(c_2)(1 - \alpha),$$

$c_2 \in (\alpha; 1)$.



За умовою $f(c_2) \leq f(c_1)$, отже

$$\frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 f(x) dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(x) dx, \quad \alpha \int_{\alpha}^1 f(x) dx \leq (1-\alpha) \int_0^{\alpha} f(x) dx,$$

$$\alpha \left(\int_0^1 f(x) dx - \int_0^{\alpha} f(x) dx \right) \leq (1-\alpha) \int_0^{\alpha} f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha} f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx.$$

7.12. Ця нерівність випливає з нерівності Коші–Буняковського (доведення можна знайти в [4], с. 115).

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx,$$

якщо покласти $g(x) = 1$.

$$7.13. \text{ Рівність } \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \text{ еквівалентна}$$

$$\text{рівності } \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 0, \text{ покажемо, що остан-}$$

ня рівність вірна:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx &= \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) f(\sin x) dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{2} = t, \quad dx = dt, \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \cdot f(\cos t) dt. \end{aligned}$$

Останній інтеграл рівний нулю, оскільки є інтегралом від непарної функції в симетричних межах, а значить

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

7.14. Розглянемо функцію $F(x) = f(x) - x$, тоді

$$F(a) = f(a) - a > 0.$$

Зінтегрувавши її на відрізку $[a; b]$, маємо:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b (f(x) - x) dx = \int_a^b f(x) dx - \frac{b^2 - a^2}{2} < 0.$$

За теоремою про середнє значення існує така точка $c \in [a; b]$, що

$$\int_a^b F(x) dx = F(c)(b - a) < 0.$$

Отже, $F(c) < 0$, але $F(a) > 0$, оскільки функція $F(x)$ неперервна, то існує таке $\xi \in (a; c)$, що $F(\xi) = 0$ або $f(\xi) = \xi$.

7.15. Нехай $I = \int_0^1 \frac{f(x)dx}{f(x) + f(1-x)}$, зробимо заміну

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{f(x)dx}{f(x) + f(1-x)} = \left[\begin{array}{l} 1-x=t, \\ x=1-t, \\ dx=-dt \end{array} \right] = \\ &= -\int_1^0 \frac{f(1-t)dt}{f(1-t) + f(t)} = \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x) + f(x)} dx = J. \end{aligned}$$

Знайдемо суму

$$I + J = \int_0^1 \frac{f(x)dx}{f(x) + f(1-x)} + \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x) + f(x)} dx = \int_0^1 dx = 1,$$

оскільки $I = J$, то $I = \frac{1}{2}$.

7.16. Розглянемо функцію $g(x) = \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2}$. Дана функція непарна:

$$g(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2e^x - e^x - 1}{2(1+e^x)} =$$

$$= \frac{e^x - 1}{2(1 + e^x)} = \frac{e^x + 1 - 2}{2(e^x + 1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x + 1} = -g(x).$$

Оскільки, $f(x)$ – функція парна, то добуток $f(x)g(x)$ є функцією непарною, тобто

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = \int_{-a}^a f(x)\left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{2}\right)dx = 0.$$

Отже,

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

7.17. Знайдемо y'_x :

$$x'_t = \frac{\cos t}{t}, \quad y'_t = \frac{\sin t}{t}, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t.$$

Дотична буде вертикальною в точках, де похідна $y'_x = \infty$.

Ця умова буде виконуватися при $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. У початок координат графік функції потрапляє при $t = 1$, тому найближчою точкою з вертикальною дотичною буде точка, в якій $t = \frac{\pi}{2}$.

Таким чином, довжина дуги

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = \int_1^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2} + \frac{\sin^2 t}{t^2}} dt = \int_1^{\pi/2} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^{\pi/2} = \ln \frac{\pi}{2}.$$

7.18. Перетворимо підінтегральний вираз

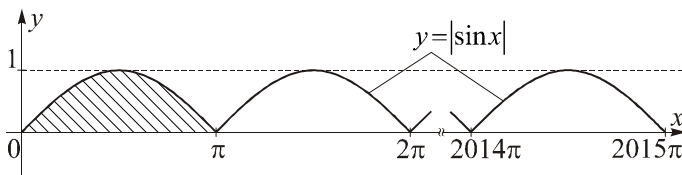
$$\int_0^{2015\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx = \int_0^{2015\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} \, dx = \sqrt{2} \int_0^{2015\pi} |\sin x| \, dx.$$

Оскільки функція $|\sin x|$ є періодичною з періодом $T = \pi$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = |\sin x|$ на відрізку $[0; 2015\pi]$ буде дорівнювати 2015 площам криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = |\sin x|$ на відрізку $[0; \pi]$ (заштрихована фігура на рисунку), а отже

$$\begin{aligned} \int_0^{2015\pi} |\sin x| \, dx &= 2015 \int_0^{\pi} |\sin x| \, dx = \\ &= 2015 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2015 \cdot \left(-\cos x \right) \Big|_0^{\pi} = 4030. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\int_0^{2015\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx = 4030\sqrt{2} = 2015 \cdot 2\sqrt{2}.$$



7.19. Виконаємо ряд перетворень:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \frac{\sin 2015x}{\sin x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin 2015x - \sin 2013x + \sin 2013x}{\sin x} dx = \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos 2014x \cdot \sin x}{\sin x} dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin 2013x}{\sin x} dx = \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \cos 2014x dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin 2013x}{\sin x} dx = \\
 &= \frac{2}{2014} \sin 2014x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin 2013x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2013x}{\sin x} dx.
 \end{aligned}$$

У свою чергу,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \frac{\sin 2013x}{\sin x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin 2013x - \sin 2011x + \sin 2011x}{\sin x} dx = \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \cos 2012x dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin 2011x}{\sin x} dx = \\
 &= \frac{2}{2012} \sin 2012x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin 2011x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2011x}{\sin x} dx.
 \end{aligned}$$

Продовжуючи таким чином понижати коефіцієнт в аргументі синуса, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2015x}{\sin x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin 2013x}{\sin x} dx = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin 2011x}{\sin x} dx = \dots = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi} dx = \pi. \end{aligned}$$

7.20. Розглянемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \left[u = \frac{1}{(1+x^2)^n}, \quad du = -\frac{n(1+x^2)^{n-1} 2x}{(1+x^2)^{2n}}, \quad dv = dx, \quad v = x \right] = \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx - \\ &- 2n \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - 2n \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Отже, позначивши $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, де $n = 1, 2, 3, \dots$, маємо

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}, \text{ звідки } I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

або

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}. \quad (7.2)$$

Таким чином, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2n-3}{2n-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = 0$, то дана рів-

ність набуває вигляду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Послідовно понижаючи степінь знаменника інтеграла за допомогою рекурентної формули (7.2), доходимо до рівності

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \frac{2n-7}{2n-6} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{(2n-2)(2n-3)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{(2n-4)(2n-5)}{(2n-4)^2} \cdot \frac{(2n-6)(2n-7)}{(2n-6)^2} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 1}{2^2} \times \\ &\times \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{(2n-2)! \cdot \pi}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.21. \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 + 1} dx = \\
 & = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \right) = \frac{1}{2} (I_1 - I_2); \\
 & I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.
 \end{aligned}$$

Для знаходження другого інтеграла скористаємося формулами теорії функцій комплексної змінної:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}[F(z); z_i],$$

особливі точки z_i лежать у верхній півплощині. Нехай

$$F(x) = f(x)e^{imx},$$

тоді

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx} dx &= 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}[F(z); z_i]; \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx} dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)e^{imx} dx + \int_0^{+\infty} f(x)e^{imx} dx.
 \end{aligned}$$

Замінімо у першому інтегралі x на $(-x)$, тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx} dx &= -\int_{\infty}^0 f(-x)e^{-imx} dx + \int_0^{\infty} f(x)e^{imx} dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(-x)e^{-imx} dx + \int_0^{\infty} f(x)e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}[F(z); z_i]. \end{aligned}$$

Якщо $f(x)$ – парна функція, то $f(-x) = f(x)$ і тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx} dx = \int_0^{\infty} f(x) \underbrace{(e^{-imx} + e^{imx})}_{2 \cos mx} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}[F(z); z_i].$$

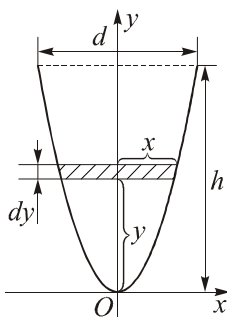
Отже, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ і тоді

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)e^{-2}}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2}}{2i} = \pi e^{-2},$$

$F(z) = \frac{e^{imz}}{1+z^2}$, $m=2$, i – особлива точка. Таким чином

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2}).$$

7.22. Введемо систему координат таким чином, щоб її



початок знаходився в найнижчій точці цистерни, а вісь Oy була спрямована вздовж осі симетрії. У цьому випадку перерізом цистерни по центральній осі є парабола $y = kx^2$. Оскільки висота цистерни $h = 4$ м, а діаметр верхньої кришки $d = 2$ м,

то $h = k\left(\frac{d}{2}\right)^2$ або $4 = k \cdot 1^2$, звідки $k = 4$,

а отже рівняння параболи $y = 4x^2$.

Об'єм цистерни як тіла обертання

$$V = \pi \int_a^b (\varphi(y))^2 dy = \pi \int_0^4 \frac{y}{4} dy = \frac{\pi y^2}{8} \Big|_0^4 = 2\pi \text{ куб. од.}$$

Площа пробоїни, через яку витікає вода,

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 0,01^2.$$

Нехай об'єм води, що витече із цистерни за проміжок часу dt , рівний dV . За законом Торрічеллі даний об'єм

$dV = \sqrt{2gy} \cdot S dt$, з іншого боку, $dV = \pi x^2 dy$, таким чином

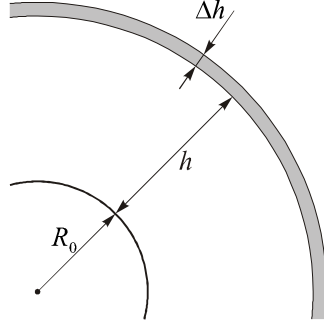
$$-\sqrt{2gy} S dt = \pi x^2 dy, \text{ звідки } dt = \frac{-\pi x^2 dy}{\sqrt{2gy} S} = \frac{-\pi y dy}{4\sqrt{2gy} S}.$$

Отже, час повного витікання рідини

$$T = \frac{-\pi}{4\sqrt{2g}S} \int_4^0 y^{1/2} dy = \frac{2\pi y^{3/2}}{3\sqrt{2g}S} \Big|_0^4 = \frac{2\pi \cdot 4^{3/2}}{3\sqrt{2 \cdot 9,8} \cdot \pi \cdot 0,01^2} =$$

$$= \frac{16}{3\sqrt{2 \cdot 9,8}} \cdot 10^4 \approx 12046 \text{ с} \approx 201 \text{ хв.}$$

7.23. Розглянемо шар атмосфери V товщиною Δh , що знаходиться на висоті h над поверхнею Землі. Якщо покласти Δh достатньо малим, то можна вважати атмосферу в його межах однорідною, а її густину рівною $\gamma(h)$.



Об'єм вказаного шару

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_{R_0+h+\Delta h} - V_{R_0+h} = \frac{4}{3} \pi \left((R_0 + h + \Delta h)^3 - (R_0 + h)^3 \right) = \\ &= \frac{4}{3} \pi \left(3(R_0 + h)^2 \Delta h + 3(R_0 + h) \Delta h^2 + \Delta h^3 \right) \end{aligned}$$

Оскільки при $\Delta h \rightarrow 0$ другий і третій доданки в дужках є нескінченно малими, більш високого порядку, ніж перший, — $\Delta V = 4\pi(R_0 + h)^2 \Delta h$.

Таким чином, маса шару атмосфери на висоті h буде дорівнювати $\Delta m = \gamma(h) \Delta V = \gamma_0 e^{-kh} 4\pi(R_0 + h)^2 \Delta h$, а маса всієї атмосфери

$$M = \int_0^{+\infty} \gamma_0 e^{-kh} 4\pi(R_0 + h)^2 dh = 4\pi\gamma_0 \int_0^{+\infty} (R_0 + h)^2 e^{-kh} dh =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\begin{array}{l} u = (R_0 + h)^2, \quad du = 2(R_0 + h)dh, \\ dv = e^{-kh}dh, \quad v = -\frac{1}{k}e^{-kh} \end{array} \right] = \\
 &= 4\pi\gamma_0 \left(-\frac{(R_0 + h)^2}{ke^{kh}} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{k} \int_0^{+\infty} (R_0 + h)e^{-kh}dh \right) = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = R_0 + h, \quad du = dh, \\ dv = e^{-kh}dh, \quad v = -\frac{1}{k}e^{-kh} \end{array} \right] = \\
 &= 4\pi\gamma_0 \left(-\frac{(R_0 + h)^2}{ke^{kh}} \Big|_0^{+\infty} - \frac{2(R_0 + h)}{k^2 e^{kh}} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{k^2} \int_0^{+\infty} e^{-kh}dh \right) = \\
 &= -4\pi\gamma_0 \left(\frac{1}{k} \frac{(R_0 + h)^2}{e^{kh}} + \frac{2}{k^2} \frac{R_0 + h}{e^{kh}} + \frac{2}{k^3} \frac{1}{e^{kh}} \right) \Big|_0^{+\infty}.
 \end{aligned}$$

Оскільки

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{kh}} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{R_0 + h}{e^{kh}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{k} \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{kh}} = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{(R_0 + h)^2}{e^{kh}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{2}{k} \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{R_0 + h}{e^{kh}} = 0.$$

$$\text{то } M = 4\pi\gamma_0 \left(\frac{R_0^2}{k} + \frac{2R_0}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right).$$

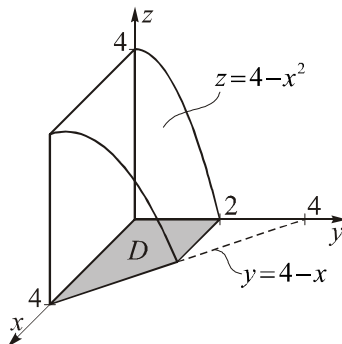
7.24. Виразимо даний інтеграл через подвійний

$$V = \int_0^2 (4 - x^2) dx \int_0^{4-x} dy = \iint_D (4 - x^2) dx dy,$$

де

$$D = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x\}$$

Згідно з геометричним змістом подвійного інтеграла, V є об'ємом вертикального циліндричного тіла, побудованого на основі D , та обмеженого зверху відповідною частиною поверхні $z = 4 - x^2$.



7.25. Нехай замкнута крива L задається функцією $\rho = \rho(\varphi)$. Перейшовши в криволінійному інтегралі до полярних координат, отримаємо:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad dx = -\rho \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi d\rho,$$

$$dy = \rho \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi d\rho.$$

Отже,

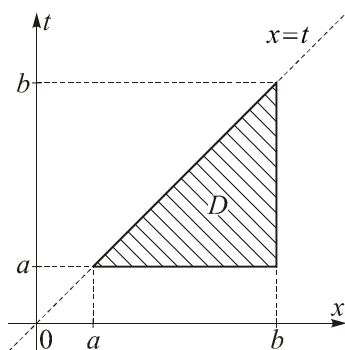
$$\begin{aligned} \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \\ \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi d\varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi d\rho + \rho^2 \sin^2 \varphi d\varphi - \rho \sin \varphi \cos \varphi d\rho}{\rho^2} &= \\ = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^2} d\varphi &= \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

7.26. 1-й спосіб.

Позначимо $I(x) = \int_a^x f(t) dt$, тоді

$$\begin{aligned} \int_a^b I(x) dx &= \left[\begin{array}{ll} u = I(x), & du = I'(x) dx = f(x) dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right] = \\ &= xI(x) \Big|_a^b - \int_a^b xf(x) dx = bI(b) - \underbrace{aI(a)}_{=0} - \int_a^b xf(x) dx = \\ &= b \int_a^b f(x) dx - \int_a^b xf(x) dx = \int_a^b (b-x)f(x) dx. \end{aligned}$$

2-й спосіб



Розглянемо подвійний інтеграл

$$\iint_D f(t) dt dx = \int_a^b dx \int_a^x f(t) dt,$$

де

$$D \in \{(x; y) \mid a \leq x \leq b, a \leq t \leq x\}.$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримаємо, що $D \in \{(x; y) \mid a \leq t \leq b, t \leq x \leq b\}$, а отже

$$\begin{aligned}\iint_D f(t) dt dx &= \int_a^b dt \int_t^b f(t) dx = \int_a^b dt f(t) \cdot x \Big|_t^b = \\ &= \int_a^b f(t)(b-t) dt = \int_a^b f(x)(b-x) dx.\end{aligned}$$

7.27. Виконаємо перехід у полярну систему координат:
 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тоді $D = \{(\rho; \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$,
а сам інтеграл набуває вигляду

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} dx dy &= \iint_D \rho e^{-1/\rho^2} d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho e^{-1/\rho^2} d\rho = \\ &= \pi \int_0^1 e^{-1/\rho^2} d\rho^2 = \pi \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 e^{-1/\rho^2} d\rho^2.\end{aligned}$$

Оскільки $\rho^2 \leq 1$, то $\frac{1}{\rho^2} \geq 1$, а отже $e^{-1/\rho^2} \leq 1$. Маємо

$$\iint_D e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} dx dy = \pi \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 e^{-1/\rho^2} d\rho^2 \leq \pi \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 d\rho^2 = \pi.$$

Отже, $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} dx dy \leq \pi$.

7.28. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D , площею S , то

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS,$$

де m , M — відповідно найменше та найбільше значення підінтегральної функції в області D .

Відмітимо, що

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

тобто границею області D є коло одиничного радіуса із центром у точці $(1; 0)$, а отже площа даної області $S = \pi R^2 = \pi$.

Поверхня $z = x^2 - y^2$ являє собою "сідло" (гіперболічний параболоїд). Частинні похідні: $z'_x = 0$ при $x = 0$, $z'_y = 0$ при $y = 0$; значення функції $z(0; 0) = 0$.

Уздовж лінії $y^2 = 2x - x^2$ функція набуває вигляду $z = 2x^2 - 2x$. Таким чином, $z'_x = 4x - 2$, а $z'_x = 0$ при $x = \frac{1}{2}$,

звідки $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значення функції в критичних точках та на краях області

$$z\left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; \quad z(2; 0) = 4; \quad m = -\frac{1}{2}; \quad M = 4.$$

Отже

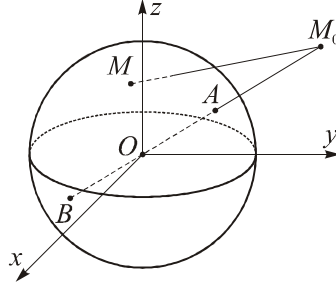
$$-\frac{\pi}{2} \leq \iint_D (x^2 - y^2) dx dy \leq 4\pi.$$

7.29. Область інтегрування являє собою сферу радіуса R із центром у початку координат $O(0;0;0)$. Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, виходячи з нерівності $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$, знаходиться поза межами даної сфери. Тоді для довільної точки $M(x; y; z)$ з області інтегрування будуть справедли-
вими нерівності:

$$|OM_0| - R \leq |MM_0| \leq |OM_0| + R,$$

причому рівність буде досягатися тільки в точках перетину прямої OM_0 з границею області інтегрування (точки A і B на рисунку).

Таким чином,



$$\begin{aligned} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} - R &\leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} + R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} + R} &\leq \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} - R}, \end{aligned}$$

а отже

$$\frac{4\pi R^3}{3\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} + R\right)} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \leq \\ &\leq \frac{4\pi R^3}{3\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} - R\right)}. \end{aligned}$$

7.30. За формулою Остроградського–Гаусса

$$\oiint_S \bar{F} \cdot \bar{n}^\circ dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dV. \quad (7.3)$$

За умовою задачі $\bar{F} = \varphi \bar{a}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{F} = \operatorname{div}(\varphi \bar{a}) &= \underbrace{\nabla(\varphi \bar{a})}_{\text{Скалярний добуток}} = \underbrace{(\nabla \varphi) \cdot \bar{a}}_{\text{Скалярний добуток}} + \underbrace{\varphi \cdot (\nabla \bar{a})}_{\text{Скалярний добуток}} = \\ &= \bar{a} \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \bar{a}. \end{aligned}$$

Підставивши останню рівність у (7.3), одержимо:

$$\oiint_S \varphi \bar{a} \bar{n}^\circ dS = \iiint_V (\varphi \operatorname{div} \bar{a} + \bar{a} \operatorname{grad} \varphi) dV.$$

Умовами застосування останньої формули є диференціюваність функції $\varphi = \varphi(x, y, z)$ і векторної функції $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$ в області V і на її границі S .

VIII. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Умови задач

8.1. Скласти однорідне лінійне диференціальне рівняння, якщо задана фундаментальна система розв'язків: $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-x} \sin x$, $y_3 = e^{-x} \cos x$.

8.2. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y' = \sqrt[3]{(y - 2x)^2} + 2.$$

8.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - xy' - y = 0$, використовуючи при цьому елементарні функції та інтеграли від них.

8.4. Знайти всі дійсно-задані неперервні диференційовані функції $f(x)$, які $\forall x \in R$ задовольняють рівняння

$$(f(x))^2 = \int_0^x ((f(t))^2 + (f'(t))^2) dt + 2015.$$

8.5. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y'' + \frac{y'^2}{y} = x' + \frac{xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1, \end{cases}$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$.

8.6. Розв'язати у квадратурах диференціальне рівняння $y' = xe^{y/x^2}$.

8.7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = \frac{1}{2x - y^2}$.

8.8. Функції x і e^{2x} задовольняють деяке однорідне диференціальне рівняння другого порядку. Впевнитися, що вони утворюють фундаментальну систему, і скласти диференціальне рівняння.

8.9. Довести, що кожна функція $y(x)$, яка є розв'язком рівняння $y' = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$, обмежена на R .

8.10. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = x + \frac{x^3}{y}$.

8.11. Один резервуар об'ємом 100 л наповнений розчином 10 кг солі, а другий резервуар такого ж об'єму наповнений чистою водою. У перший резервуар втікає вода зі швидкістю 3 л/хв, а суміш з такою ж швидкістю перекачується у другий резервуар, з якого надлишок рідини виливається зовні. Яка максимальна кількість солі буде міститися у друго-

му резервуарі? (Концентрація солі у кожному з резервуарів підтримується рівномірною за допомогою перемішування.)

8.12. Знайти частинний розв'язок рівняння при вказаних початкових умовах: $x^4 y'' = (y - xy')^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

Розв'язки задач

8.1. Виходячи з вигляду фундаментальної системи розв'язків, відмітимо, що корені характеристичного рівняння: $r_1 = 0$; $r_{2,3} = -1 \pm i$. Тоді саме характеристичне рівняння:

$$r(r - (-1 + i))(r - (-1 - i)) = 0, \quad r(r^2 + 2r + 2) = 0$$

або

$$r^3 + 2r^2 + 2r = 0.$$

Шукане диференціальне рівняння

$$y''' + 2y'' + 2y' = 0.$$

8.2. Зробимо заміну $y - 2x = z$, тоді $y = z + 2x$. Диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dz}{dx} = z^{2/3}.$$

Поклавши $z \neq 0$, маємо:

$$z^{-2/3} dz = dx, \quad \int z^{-2/3} dz = \int dx, \quad 3z^{1/3} = x + C,$$

звідки $z = \frac{1}{27}(x + C)^3$ або $y = 2x + \frac{1}{27}(x + C)^3$ – загальний розв'язок.

Особливий розв'язок отримаємо з умови $z = 0$. Як видно, рівняння $y = 2x$ неможливо отримати із загального розв'язку, однак воно задовольняє дане диференціальне рівняння.

8.3. З рівняння $y'' = xy' - y$ маємо $y'' = (xy)'$, звідки $y' = xy + C_1$ – лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Зробимо заміну $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$, а отже

$$u'v + uv' = xuv + C_1, \quad u'v + u(v' - xv) = C_1,$$

$$\begin{cases} v' - xv = 0, \\ u'v = C_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dv}{dx} = xv, \\ \frac{du}{dx} = \frac{C_1}{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dv}{v} = x dx, \\ du = \frac{C_1}{v} dx \end{cases} \quad \begin{cases} v = e^{x^2/2}, \\ u = C_1 \int e^{-x^2/2} dx + C_2. \end{cases}$$

$$\text{Таким чином, } y = uv = C_1 e^{x^2/2} \int e^{-x^2/2} dx + C_2 e^{x^2/2}.$$

8.4. Продиференціюємо дане рівняння по x :

$$2f(x) \cdot f'(x) = f^2(x) + (f'(x))^2,$$

звідки

$$f^2(x) - 2f(x) \cdot f'(x) + (f'(x))^2 = 0, \quad (f(x) - f'(x))^2 = 0,$$

$$f(x) = f'(x), \quad f(x) = \frac{d(f(x))}{dx}, \quad \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int dx,$$

$$\ln f(x) = x + C_0, \quad f(x) = e^x \cdot e^{C_0} = Ce^x.$$

Підставимо отриману функцію в початкове рівняння:

$$\begin{aligned} C^2 e^{2x} &= \int_0^x (C^2 e^{2t} + C^2 e^{2t}) dt + 2015 = \\ &= 2C^2 \int_0^x e^{2t} dt + 2015 = C^2 (e^{2x} - 1) + 2015, \end{aligned}$$

звідки $C = \sqrt{2015}$, а отже $f(x) = \sqrt{2015}e^x$.

8.5. Виконаємо ряд перетворень над рівняннями системи:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{y''y + y'^2}{y} = \frac{x'y + xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y''y + y'^2 = 1, \\ x'y + xy' = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} (yy')' = 1, \\ (xy)' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yy' = t + C_1, \\ xy = t + C_2. \end{cases} \end{aligned}$$

З першого рівняння системи маємо:

$$y \frac{dy}{dt} = t + C_1, \quad \frac{y^2}{2} = \frac{(t + C_1)^2}{2} + \frac{C_3}{2},$$

звідки $y = \pm \sqrt{(t + C_1)^2 + C_3}$.

Тоді з другого рівняння системи $x = \pm \frac{t + C_2}{\sqrt{(t + C_1)^2 + C_3}}$.

8.6. Зробимо заміну $u = \frac{y}{x^2}$, тоді $y = ux^2$, $y' = u'x^2 + 2xu$, а отже

$$u'x^2 + 2xu = xe^u, \quad x \frac{du}{dx} = e^u - 2u, \quad \int \frac{du}{e^u - 2u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{e^u - 2u} + \ln C = \ln x,$$

тобто $x = Ce^{\int \frac{du}{e^u - 2u}}$, де $u = \frac{y}{x^2}$.

8.7. Якщо покласти $x = x(y)$, то дане диференціальне рівняння набуває вигляду $\frac{dx}{dy} = 2x - y^2$, зробимо заміну $x = u(y) \cdot v(y)$, тоді $x' = u'v + uv'$, а отже $u'v + u(v' - 2v) = -y^2$. Якщо $v' - 2v = 0$, то $\frac{dv}{dy} = 2v$, $\ln|v| = 2y$ або $v = e^{2y}$.

Тоді початкове рівняння набуває вигляду

$$\frac{du}{dy} e^{2y} = -y^2, \quad du = -y^2 e^{-2y} dy,$$

звідки

$$u = -\int y^2 e^{-2y} dy = \left[\begin{array}{ll} u_1 = y^2, & du_1 = 2y dy, \\ dv_1 = e^{-2y} dy, & v_1 = -\frac{1}{2} e^{-2y} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} y^2 e^{-2y} - \int y e^{-2y} dy = \left[\begin{array}{ll} u_2 = y, & du_2 = dy, \\ dv_2 = e^{-2y} dy, & v_2 = -\frac{1}{2} e^{-2y} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} y^2 e^{-2y} + \frac{1}{2} y e^{-2y} + \frac{1}{4} e^{-2y} + C.$$

Отже, $x = uv = C e^{2y} + \frac{1}{4} (2y^2 + 2y + 1)$

8.8. За умовою задачі функції $y_1 = x$ та $y_2 = e^{2x}$ є розв'язками деякого однорідного диференціального рівняння другого порядку, оскільки їх відношення

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x}{e^{2x}} \neq \text{const},$$

то y_1 і y_2 є лінійно незалежними функціями, а значить складають фундаментальну систему розв'язків. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння $y = C_1 x + C_2 e^{2x}$, звідки $y' = C_1 + 2C_2 e^{2x}$ та $y'' = 4C_2 e^{2x}$.

Припустимо, що шукане рівняння має вигляд

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

підставивши в нього знайдені значення y , y' і y'' , отримаємо:

$$4C_2 e^{2x} + f(x)(C_1 + 2C_2 e^{2x}) + g(x)(C_1 x + C_2 e^{2x}) = 0$$

або

$$C_1 (f(x) + xg(x)) + C_2 (4 + 2f(x) + g(x))e^{2x} = 0.$$

Для того щоб останнє рівняння не залежало від C_1 і C_2 , необхідно, щоб коефіцієнти при них дорівнювали нулю, тобто

$$\begin{cases} f(x) + xg(x) = 0, \\ 4 + 2f(x) + g(x) = 0, \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{4}{2x-1}, \quad f(x) = \frac{4x}{1-2x}.$$

Отже, шукане диференціальне рівняння

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$

8.9. Задача Коші в даному випадку виглядатиме наступним чином:

$$y' = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Проінтегруємо ліву і праву частини диференціального рівняння на відрізку $[x_0; x]$:

$$\int_{x_0}^x y'(x) dx = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Ураховуючи, що $y(x)$ є однією з первісних функцій $y'(x)$, розв'язок може бути поданий у вигляді

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Тоді маємо

$$|y - y_0| = \left| \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 + y^2 + 1} \right| =$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 + y^2 + 1} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2 + 1} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Таким чином, $|y - y_0| \leq \pi$, або $y_0 - \pi < y < y_0 + \pi$.

8.10. Зробимо заміну $y = ux^2$, де $u = u(x)$. Оскільки $y \neq 0$, то $x \neq 0$ і $u \neq 0$. Тоді $y' = u'x^2 + 2ux$, а диференціальне рівняння набуває вигляду

$$u'x^2 + 2ux = x + \frac{x^3}{x^2u}$$

або

$$x \frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{u} - 2u = \frac{1 + u - 2u^2}{u}, \quad \frac{u du}{1 + u - 2u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Дріб у лівій частині рівності розкладемо на елементарні:

$$\frac{u}{1 + u - 2u^2} = -\frac{u}{(u-1)(2u+1)} = -\left(\frac{A}{u-1} + \frac{B}{2u+1}\right) = -\frac{2Au + A + Bu - B}{(u-1)(2u+1)};$$

$$\begin{cases} u^1 \\ u^0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 2A + B = 1, \\ A - B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow A = B = \frac{1}{3}.$$

Інтегруючи ліву та праву частини диференціального рівняння, маємо:

$$-\frac{1}{3} \int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{3} \int \frac{du}{2u+1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{3}\ln|u-1| - \frac{1}{6}\ln|2u+1| = \ln|C_0x| \quad (C_0 \neq 0),$$

$$\ln\left((u-1)^2|2u+1|\right) = -6\ln|C_0x|.$$

звідки

$$(u-1)^2(2u+1) = \frac{1}{C_0^6 x^6}, \quad x^6(u-1)^2(2u+1) = C,$$

де $C = \frac{1}{C_0^6}$.

Повертаючись до попередніх змінних,

$$x^6\left(\frac{y}{x^2}-1\right)^2\left(\frac{2y}{x^2}+1\right) = C.$$

Таким чином, загальний інтеграл

$$(y-x^2)^2(2y+x^3) = C.$$

При $C = 0$ отримаємо розв'язки $y = x^2$ і $y = -\frac{x^2}{2}$, які відповідають значенням $u = 1$ і $u = -\frac{1}{2}$, що були втрачені під час відокремлення змінних.

8.11. Нехай у момент часу t у першому резервуарі знаходиться x кг солі, тоді її концентрація $-\frac{x}{100} = 0,01x$. Надамо змінній t приріст dt і будемо вважати, що протягом дано-

го часу процес відбувається рівномірно. Швидкість зміни кількості солі дорівнює $0,03x$, де $x = x(t)$, причому кількість солі у першому резервуарі зменшується ($dx < 0$), тому $dx = -0,03x dt$, звідки

$$\int_{10}^x \frac{dx}{x} = -\int_0^t 0,03 dt, \quad \ln|x| \Big|_{10}^x = -0,03t, \quad \ln \frac{x}{10} = -0,03t.$$

Таким чином, кількість солі у першому резервуарі змінюється за законом $x = 10e^{-0,03t}$.

Нехай у момент часу t у другому резервуарі було y кг солі і кожну хвилину в нього потрапляє ще $0,03x = 0,3e^{-0,03t}$ кг. Також щохвилини з другого резервуара з водою витікає $0,03y$ кг солі, причому оскільки концентрація солі в першому резервуарі більша, то її кількість у другому резервуарі до певного моменту буде поступово збільшуватися. Якщо покласти, що за проміжок часу dt кількість солі у другому резервуарі збільшиться на dy , то $(0,3e^{-0,03t} - 0,03y)dt = dy$, звідки

$$0,3e^{-0,03t} - 0,03y = y'.$$

У результаті проведених міркувань отримали лінійне диференціальне рівняння $y + '0,03y = 0,3e^{-0,03t}$, розв'язавши яке, одержуємо закон зміни кількості солі у другому резервуарі протягом часу.

Покладемо $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$, а отже

$$u'v + uv' + 0,03uv = 0,3e^{-0,03t},$$

$$u(v' + 0,03v) + u'v = 0,3e^{-0,03t};$$

$$\begin{cases} v' + 0,03v = 0, \\ u'v = 0,3e^{-0,03t} \end{cases} \begin{cases} \frac{dv}{dt} = -0,03v, \\ \frac{du}{dt} = \frac{0,3e^{-0,03t}}{v} \end{cases} \begin{cases} \frac{dv}{v} = -0,03 dt, \\ du = \frac{0,3e^{-0,03t}}{v} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln|v| = -0,03t, \\ du = \frac{0,3e^{-0,03t}}{v} dt \end{cases} \begin{cases} v = e^{-0,03t}, \\ du = 0,3 dt \end{cases} \begin{cases} v = e^{-0,03t}, \\ u = 0,3t + C. \end{cases}$$

Отже, $y = uv = 0,3te^{-0,03t} + Ce^{-0,03t}$.

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ солі у другому резервуарі не було ($y = 0$), маємо $y(0) = C = 0$, а отже кількість солі у другому резервуарі змінюється за законом $y = 0,3te^{-0,03t}$.

Знайдемо точки екстремуму отриманої функції:

$$\frac{dy}{dt} = 0,3e^{-0,03t}(1 - 0,03t), \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \text{ хв};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -0,03 \cdot 0,3 \cdot e^{-0,03t}(1 + t - 0,03t^2),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \left(\frac{100}{3} \right) = -\frac{0,0009}{e} < 0,$$

тобто $t = \frac{100}{3}$ є точкою максимуму.

Тоді максимальна кількість солі у другому резервуарі

$$y\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{100}{3} e^{-\frac{3}{100} \cdot \frac{100}{3}} = \frac{10}{e} \approx 3,68 \text{ кг}.$$

8.12. Зробимо заміну $\frac{y}{x} = u(x)$, тоді $y = ux$, $y' = u'x + u$ і $y'' = u''x + u' + u' = u''x + 2u'$. Підставивши у початкове рівняння отримані значення, маємо

$$x^4(xu'' + 2u') = (ux - x^2u' - ux)^3, \quad x^5u'' + 2x^4u' = -x^6(u')^3,$$

$$u'' + \frac{2}{x}u' = -x(u')^3.$$

За допомогою заміни $u' = z(x)$ (при цьому $u'' = z'$) останнє рівняння набуває вигляду

$$z' + \frac{2}{x}z = -xz^3.$$

Це рівняння Бернуллі, розв'язок якого можна знайти за допомогою однойменного методу:

$$z = pq, \quad z' = p'q + q'p;$$

$$p'q + q'p + \frac{2}{x}pq = -xp^3q^3, \quad p'q + p\left(q' + \frac{2}{x}q\right) = -xp^3q^3.$$

Поклавши $q' + \frac{2}{x}q = 0$, отримаємо $\frac{dq}{dx} = -2 \cdot \frac{q}{x}$, звідки

$$\frac{dq}{q} = -2 \cdot \frac{dx}{x}, \quad \ln|q| = -2\ln|x|, \quad q = \frac{1}{x^2}.$$

Тоді маємо

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dp}{dx} = -x \cdot p^3 \cdot \frac{1}{x^6}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{p^3}{x^3},$$

$$\frac{dp}{p^3} = -\frac{dx}{x^3}, \quad -\frac{1}{2p^2} = \frac{1}{2x^2} + C,$$

звідки

$$p^2 = -\frac{x^2}{2Cx^2 + 1} \quad \text{або} \quad p = \frac{x}{\sqrt{C_1x^2 - 1}} \quad (C_1 = -2C).$$

Повертаючись до попередніх змінних, отримуємо

$$\frac{du}{dx} = z = pq = \frac{1}{x\sqrt{C_1x^2 - 1}},$$

звідки

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{dx}{x\sqrt{C_1x^2 - 1}} = \left[\frac{\sqrt{C_1x^2 - 1} = t,}{\frac{C_1x dx}{\sqrt{C_1x^2 - 1}} = dt} \right] = \int \frac{dt}{C_1 \cdot \frac{1}{C_1}(t^2 + 1)} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{C_1x^2 - 1} + C_2. \end{aligned}$$

В свою чергу $u = \frac{y}{x}$, тому

$$\frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \sqrt{C_1x^2 - 1} + C_2.$$

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння $x^4 y'' = (y - xy')^3$ може бути записаний у вигляді

$$y = x \left(\operatorname{arctg} \sqrt{C_1x^2 - 1} + C_2 \right).$$

Похідна останнього виразу

$$\begin{aligned} y' &= \operatorname{arctg} \sqrt{C_1 x^2 - 1} + C_2 + x \cdot \frac{1}{1 + C_1 x^2 - 1} \cdot \frac{C_1 x}{\sqrt{C_1 x^2 - 1}} = \\ &= \operatorname{arctg} \sqrt{C_1 x^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{C_1 x^2 - 1}} + C_2. \end{aligned}$$

Тоді, використовуючи початкові умови $y(1) = 1$ та $y'(1) = 1$, складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = \operatorname{arctg} \sqrt{C_1 - 1} + C_2, \\ 1 = \operatorname{arctg} \sqrt{C_1 - 1} + \frac{1}{\sqrt{C_1 - 1}} + C_2. \end{cases}$$

З даної системи випливає, що $\frac{1}{\sqrt{C_1 - 1}} = 0$, остання рівність не виконується при будь-яких дійсних значеннях C_1 , однак $\frac{1}{\sqrt{C_1 - 1}} \rightarrow 0$, якщо $C_1 \rightarrow +\infty$. В цьому випадку

$$\operatorname{arctg} \sqrt{C_1 - 1} \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

а отже $C_2 \rightarrow 1 - \frac{\pi}{2}$.

Повертаючись до загального розв'язку диференціального рівняння, бачимо, що при $C_1 \rightarrow +\infty$ $\operatorname{arctg} \sqrt{C_1 x^2 - 1} \rightarrow \frac{\pi}{2}$,

а отже частинний розв'язок матиме вигляд

$$y = x \left(\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} \right) = x.$$

Таким чином, $y = x$ – частинний розв'язок диференціального рівняння $x^4 y'' = (y - xy')^3$, що задовольняє початковим умовам $y(1) = 1$ і $y'(1) = 1$.

ІХ. РЯДИ

Умови задач

9.1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n \cdot \sqrt{n+1}}$.

9.2. Чи збігається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!k^n}{(n+1)^n}$ для $k = \frac{19}{7}$?

9.3. Відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, знайти $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

9.4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1}$.

9.5. Додати ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ і обчислити суму одер-

жаного ряду, якщо $a_n = \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{6}}{2^{n-1}}$, $b_n = \frac{\cos \frac{\pi n}{3}}{2^n}$.

9.6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$.

9.7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx \right)^{-1}$.

9.8. Обчислити $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$, якщо відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9.9. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

9.10. Довести, що $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2}$.

9.11. Знайти суму ряду $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$ ($|x| < 1$).

9.12. Знайти суму ряду $x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + \dots$.

9.13. Розкласти функцію за степенями x :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

9.14. Розкласти функцію $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$ у степений ряд.

9.15. Знайти інтервал збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n.$$

9.16. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (x-1)^n}{n^n}$.

9.17. Знайти суму ряду $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$.

9.18. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \sin\left(\arcsin \frac{x}{3}\right)$.

Розв'язки задач

9.1. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$. Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

то за радикальною ознакою Коші даний ряд збігається. З іншого боку, так як

$$\frac{n^n}{(2n+1)^n \sqrt{n+1}} < \frac{n^n}{(2n+1)^n},$$

то згідно ознаки порівняння збігається і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n \sqrt{n+1}}.$$

9.2. Запишемо n -й та $(n+1)$ -й члени даного ряду:

$$u_n = \frac{n! \cdot k^n}{(n+1)^n}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)! \cdot k^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}.$$

Тоді, за ознакою Д'Аламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot k^{n+1} \cdot (n+1)^n}{(n+2)^{n+1} \cdot n! \cdot k^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \cdot (n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} = \\ &= k \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \left(-\frac{1}{n+2} \right) \right)^{-(n+2)} \right)^{-\frac{n+1}{n+2}} = \frac{k}{e}. \end{aligned}$$

Якщо покласти $k = \frac{19}{7}$, отримаємо

$$\frac{k}{e} = \frac{19}{7e} \approx \frac{19}{19,03} < 1,$$

тобто, при цьому значенні k вказаний ряд збігається.

9.3. В силу того, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

9.4. Порівняємо даний ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Якщо

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1},$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1}{\sqrt[3]{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[6]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right) = 1.$$

Ряд з членами a_n розбіжний як узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, де $p = \frac{2}{3} < 1$. Тоді за граничною ознакою порівняння розбіжним буде і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1}.$$

9.5. Виконаємо додавання:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi n}{6}}{2^{n-1}} + \frac{\cos \frac{\pi n}{3}}{2^n} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi n}{6}}{2^{n-1}} + \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\pi n}{6}}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi n}{6}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{6}}{2^{n-1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Отриманий ряд представляє собою суму спадної геометричної прогресії, тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

9.6. Оскільки $n^a - \ln n > n^2 - n$, то

$$\frac{1}{n^2 - \ln n} < \frac{1}{n(n-1)}.$$

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, оскільки функція

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

на відрізку $[2; +\infty)$ є неперервною монотонно спадною функцією, то для дослідження збіжності даного ряду використовуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)} &= \int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1} - \int_2^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{x-1}{x} \Big|_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \left(1 - \frac{1}{b} \right) - \ln \frac{1}{2} \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

Таким чином, в силу збіжності інтеграла ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ теж збігається, звідки в силу ознаки порівняння випливає, що ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$ теж збігається.

9.7. Загальний член даного ряду $a_n = \left(\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx \right)^{-1}$.

Нехай

$$b_n = \left(\int_0^n \sqrt[4]{x^4} dx \right)^{-1} = \left(\int_0^n |x| dx \right)^{-1} = \left(\int_0^n x dx \right)^{-1} = \left(\frac{n^2}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд при $p = 2 > 1$.

В силу того, що

$$\forall x \in [0; n] \quad \sqrt[4]{1+x^4} > \sqrt[4]{x^4},$$

маємо

$$\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx > \int_0^n \sqrt[4]{x^4} dx,$$

звідки

$$\left(\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx \right)^{-1} < \left(\int_0^n \sqrt[4]{x^4} dx \right)^{-1} \text{ або } a_n < b_n.$$

Тоді на основі ознаки порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx \right)^{-1}$$

збігається.

9.8. Зробимо заміну змінної:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \left[\begin{array}{c|c} e^{-x} = t, & \frac{x}{0} \Big| \frac{t}{1} \\ -x = \ln t, & 0 \Big| 1 \\ -dx = \frac{dt}{t}, & +\infty \Big| 0 \end{array} \right] = \int_1^0 \frac{\ln t}{t \left(\frac{1}{t} - 1 \right)} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}.$$

Як відомо, розклад функції $\ln t$ в степеневий ряд має вигляд:

$$\ln(1+x) = \sum_{\substack{n=0 \\ -1 < x \leq 1}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Зробивши заміну $1+x=t$, отримаємо

$$\ln t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (t-1)^n}{n} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-t)^n}{n}.$$

Тоді шуканий інтеграл

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1-t) \cdot n} dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{n} d(1-t) = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t)^{n-1}}{n^2} \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

9.9. Збігається лише при $x = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. В цьому випадку сума ряду дорівнює нулю, так як $\sin nk\pi = 0$. При $x \neq \pi k$ ряд буде розбіжним, оскільки не виконується необхідна умова збіжності числового ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx \neq 0.$$

9.10. 1-й спосіб

Частинна сума даного ряду:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{2}{(2k-1)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{2}{9} + \operatorname{arctg} \frac{2}{25} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{2}{(2n-1)^2}, \end{aligned}$$

де $n = 1, 2, \dots$

Знайдемо декілька перших значень S_n :

$$S_1 = \operatorname{arctg} 2;$$

$$S_2 = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{2}{9} = \operatorname{arctg} \frac{2 + \frac{2}{9}}{1 - 2 \cdot \frac{2}{9}} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{20}{9}}{\frac{5}{9}} = \operatorname{arctg} 4;$$

$$S_3 = \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} \frac{2}{25} = \operatorname{arctg} \frac{4 + \frac{2}{25}}{1 - 4 \cdot \frac{2}{25}} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{102}{25}}{\frac{17}{25}} = \operatorname{arctg} 6.$$

Нехай $S_k = \operatorname{arctg} 2k$, покажемо, що зданої рівності впливає, що $S_{k+1} = \operatorname{arctg} 2(k+1)$:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \operatorname{arctg} \frac{2}{(2(k+1)-1)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} 2k + \operatorname{arctg} \frac{2}{(2k+1)^2} = \operatorname{arctg} \frac{2k + \frac{2}{(2k+1)^2}}{1 - 2k \cdot \frac{2}{(2k+1)^2}} = \\ &= \operatorname{arctg} \left(2 \cdot \frac{\frac{k(2k+1)^2 + 1}{(2k+1)^2}}{\frac{(2k+1)^2 - 4k}{(2k+1)^2}} \right) = \operatorname{arctg} \left(2 \cdot \frac{4k^3 + 4k^2 + k + 1}{4k^2 + 4k + 1 - 4k} \right) = \\ &= \operatorname{arctg} \left(2 \cdot \frac{4k^2(k+1) + (k+1)}{4k^2 + 1} \right) = \operatorname{arctg} 2(k+1). \end{aligned}$$

Таким чином, за методом математичної індукції

$$S_n = \operatorname{arctg} 2n,$$

тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{(2n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} 2n = \frac{\pi}{2}.$$

2-й спосіб.

Якщо $|x| < 1$ і $|y| < 1$, то різниця арктангенсів виражається формулою

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}.$$

Поклавши $x = \frac{1}{2(n-1)}$, $y = \frac{1}{2n}$, отримаємо

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2(n-1)} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n} = \operatorname{arctg} \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{(2n-1)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{2}{(2k-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2(n-1)} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{6} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2(n-1)} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

9.11. Виконаємо ряд перетворень над даним рядом:

$$\begin{aligned} x + 2x^2 + 3x^3 + \dots &= x(1 + 2x + 3x^2 + \dots) = \\ &= x(x + x^2 + x^3 + \dots)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

9.12. Виконаємо ряд перетворень над даним рядом:

$$\begin{aligned} x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + \dots &= x(1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \dots) = \\ &= x(x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots)' = x\left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

Однак слід зауважити, що рівність

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots = \frac{x}{1-x^2}$$

буде справедливою тільки при $|x| < 1$, тому початковий ряд буде збіжним на інтервалі $x \in (-1; 1)$.

9.13. Задану функцію можна виразити через визначений інтеграл

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

При $|x| < 1$ підінтегральну функцію можна представити у вигляді степеневого ряду

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n}.\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} \right) dx = \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1} = \\ &= x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5} x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} x^7 + \dots\end{aligned}$$

9.14. Помноживши чисельник і знаменник заданої функції на $(1-x)$, отримаємо:

$$f(x) = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)} = \frac{1-x}{1+x^8} = \frac{1}{1+x^8} - \frac{x}{1+x^8}.$$

На інтервалі $x \in (-1; 1)$ одержані функції можна розкласти в степеневі ряди:

$$\frac{1}{1+x^8} = (1+x^8)^{-1} = 1 - x^8 + x^{16} - x^{24} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{8n},$$

$$\frac{x}{1+x^8} = x \cdot (1+x^8)^{-1} = x - x^9 + x^{17} - x^{25} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{8n+1}.$$

Тоді

$$\frac{1-x}{1+x^8} = 1 - x - x^8 + x^9 + x^{16} - x^{17} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^{8n} - x^{8n+1}).$$

9.15. Визначимо радіус збіжності даного степеневого ряду:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \right| |x| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \right| = \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{1}{(n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \right|. \end{aligned}$$

В силу того, що при $n \rightarrow \infty$ ряд $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ є розбіжним і його

сума прямує до нескінченності, остання границя буде рівною одиниці.

Отже, степеневий ряд збігається коли, $|x| < 1$, тобто $x \in (-1; 1)$.

Дослідимо поведінку ряду на краях інтервалу збіжності:

$$\text{якщо } x = 1, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right);$$

$$\text{якщо } x = -1, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Наведені числові ряди є розбіжними, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \neq 0.$$

Таким чином, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$$

збігається на інтервалі $(-1; 1)$.

9.16. Визначимо радіус збіжності степеневого ряду:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! (x-1)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n! (x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n |x-1| = \\ &= |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-(n+1)} \right)^{-(n+1)} \right)^{-\frac{n}{n+1}} = |x-1| e^{-1} < 1. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд збігається при

$$|x - 1| < e \text{ або } 1 - e < x < 1 + e.$$

З'ясуємо поведінку ряду на краях інтервалу збіжності:

$$\text{якщо } x = 1 - e, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n! \cdot e^n}{n^n};$$

$$\text{якщо } x = 1 + e, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n}.$$

Наведені числові ряди є розбіжними, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^n}{e^n \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} = \infty \neq 0.$$

Таким чином, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n^n}$$

збігається при $x \in (1 - e; 1 + e)$.

Вказівка: остання границя була знайдена виходячи з того, що при

$n \rightarrow \infty$ функція $f(n) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ є асимптотичним наближенням

функції $g(n) = n!$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Остання рівність у вигляді формули Муавра-Стірлінга

$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ часто використовується для наближеного обчислення факторіалів при великих значеннях n .

9.17. Знайдемо область збіжності даного степеневого ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2} \cdot 2n}{(2n+2) \cdot x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+2} \cdot x^2 = x^2,$$

звідки $x^2 < 1$ або $-1 < x < 1$.

На краях отриманого інтервалу ряд буде розбіжним

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n},$$

тому вказаний степеневий ряд збігається при $x \in (-1; 1)$.

В результаті почленного диференціювання даного степеневому ряду всередині інтервалу збіжності отримаємо

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + \dots = \frac{x}{1-x^2}.$$

Тоді

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) \Big|_0^x = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9.18. Область визначення функції $f(x)$ $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

і на цьому відрізку вона еквівалентна функції $\frac{x}{3}$.

Так як $f(x) = \frac{x}{3}$ є непарною функцією, то її розклад в ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2nx}{3},$$

де

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{4}{9\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} x \sin \frac{2nx}{3} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x, \\ dv = \sin \frac{2nx}{3} dx, \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx, \\ v = -\frac{3}{2n} \cos \frac{2nx}{3} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{4}{9\pi} \left(-\frac{3}{2n} x \cos \frac{2nx}{3} \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{3}{2n} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{2nx}{3} dx \right) =$$

$$= \frac{4}{9\pi} \left(-\frac{9\pi}{4n} \cos n\pi + \frac{9}{4n^2} \sin \frac{2nx}{3} \bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{2nx}{3}.$$

Х. РІЗНІ ЗАДАЧІ

Умови задач

10.1. Довести, що

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2015 \cdot 2015! = 2016! - 1.$$

10.2. Що більше 127^{23} чи 513^{18} ?

10.3. Довести, що при будь-яких натуральних n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться без остачі на 120.

10.4. Довести, що $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

10.5. Довести, що для всіх цілих $n \geq 3$ справедлива нерівність $(n+1)^n < n^{n+1}$.

10.6. Довести, що $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

10.7. Обчислити суму $\sum_{i=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$.

10.8. Довести, що при $x > 0$ і $y > 0$ виконується співвідношення

$$\sqrt[3]{4(x+y)} \geq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}.$$

10.9. На координатній площині xOy зобразити множину розв'язків нерівності

$$(\ln x)^{\frac{\ln x}{\ln \ln x}} + (\ln y)^{\frac{\ln y}{\ln \ln y}} < 6.$$

10.10. Дані числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ де $0 \leq x_i \leq \pi$ ($i = \overline{1, n}$). Довести нерівність

$$|\sin(x_1 + x_2 + \dots + x_n)| \leq \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n.$$

10.11. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2015^n}{n!} = 0$.

10.12. Довести, що

$$\sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{x}{2^k} = \ln \sin x - n \ln 2 - \ln \sin \frac{x}{2^n}.$$

10.13. Вивести формулу для суми

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

10.14. Користуючись тотожністю

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

вивести формулу для суми

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

10.15. Вивести формули для суми

а) $S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$;

б) $T_n = \cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx$. 5

10.16. Нехай $p(x)$ многочлен, такий, що

$$p + p' + p'' = x^2 - 2015x + 1.$$

Обчислити $p(2016)$.

10.17. Числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ задовольняють умові

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Довести, що многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ має хоча б один корінь на $(0; 1)$.

10.18. Порівняти $\int_0^\pi e^{\sin^2 x} dx$ і $\frac{3\pi}{2}$.

10.19. Знайти диференційовану функцію $f(x)$, таку, що

$$f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(xt) dt.$$

Розв'язки задач

10.1. 1-й спосіб

Виконаємо ряд перетворень над лівою частиною рівності:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2015 \cdot 2015! = \\ & = (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + (4-1) \cdot 3! + \dots + (2016-1) \cdot 2015! = \\ & = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + 2016! - 2015! = 2016! - 1. \end{aligned}$$

2-й спосіб.

Методом повної математичної індукції доведемо, що

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1. \quad (10.1)$$

При $n = 1$ рівність виконується

$$1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1.$$

Нехай при $n = k$ рівність (10.1) виконується, тоді для $n = k + 1$ маємо:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = \\ & = (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1+1)(k+1)! - 1 = \\ & = (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Таким чином, рівність (10.1) вірна для будь-якого натурального n , поклавши в ній $n = 2015$, отримаємо вираз, який треба було довести.

$$\begin{aligned} 10.2. \quad 127^{23} & < 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161} < 2^{162} = \\ & = (2^9)^{18} = 512^{18} < 513^{18}. \end{aligned}$$

10.3. Розкладемо число 120 на натуральні множники:

$$120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

В свою чергу, неважко переконатися, що

$$n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Таким чином, при $n = 1$ і $n = 2$ вказаний добуток буде дорівнювати нулю, а отже, ділитиметься на 120. При $n > 2$ добуток буде складатися з п'яти послідовних натуральних чисел, а значить серед них обов'язково будуть числа кратні 2, 3, 4 і 5, тому добуток націло ділитиметься на 120.

10.4. 1-й спосіб

Доведемо цю нерівність методом повної математичної індукції.

Попередньо відмітимо, що послідовність $\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

монотонно зростаюча та обмежена. З того, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

впливає нерівність $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$.

При $n = 1$: $1! > \frac{1}{e}$, тобто нерівність виконується.

Покладемо $n = k$ і будемо вважати, що нерівність виконується, тобто $k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$.

Тоді при $n = k + 1$ нерівність $(k + 1)! > \left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1}$ повинна виконуватись.

Дійсно

$$\begin{aligned} (k + 1)! &= k!(k + 1) > \left(\frac{k}{e}\right)^k (k + 1) = \left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1} \cdot \frac{\left(\frac{k}{e}\right)^k (k + 1)}{\left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1}} = \\ &= \left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1} \cdot \frac{k^k (k + 1) \cdot e^{k+1}}{e^k \cdot (k + 1)^k (k + 1)} = \\ &= \left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1} \cdot \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} > \left(\frac{k + 1}{e}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Таким чином, за методом математичної індукції нерівність $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ вірна.

2-й спосіб

Оскільки $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, то

$$e^n \approx 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!}.$$

Таким чином, маємо нерівність $e^n > \frac{n^n}{n!}$, звідки

$$n! > \frac{n^n}{e^n}.$$

10.5. 1-й спосіб.

Скористаємось методом повної математичної індукції.

При $n = 3$ нерівність очевидна. Нехай при $n = k$ ($k > 3$) нерівність виконується, доведемо, що в цьому випадку вона справедлива і для $n = k + 1$. Тобто необхідно показати, що якщо нерівність

$$(k + 1)^k < k^{k+1} \quad (10.2)$$

справедлива, то справедливою буде і нерівність

$$(k + 2)^{k+1} < (k + 1)^{k+2}. \quad (10.3)$$

Помножимо обидві частини нерівності (10.2) на

$$\frac{(k + 1)^{k+2}}{k^{k+1}},$$

тоді маємо:

$$\frac{(k + 1)^{2k+2}}{k^{k+1}} < (k + 1)^{k+2}. \quad (10.4)$$

З іншого боку, оскільки

$$(k + 1)^{2k+2} = ((k + 1)^2)^{k+1} = (k^2 + 2k + 1)^{k+1} > (k^2 + 2k)^{k+1},$$

то

$$\frac{(k + 1)^{2k+2}}{k^{k+1}} > \frac{(k^2 + 2k)^{k+1}}{k^{k+1}} = (k + 2)^{k+1}. \quad (10.5)$$

Таким чином, із нерівностей (10.4) і (10.5) випливає нерівність (10.3), а отже, згідно методу математичної індукції, справедливою є нерівність

$$(n+1)^n < n^{n+1}, \text{ де } n \geq 3.$$

2-й спосіб

Розділимо ліву і та праву частини нерівності на n^n , маємо

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n \quad \text{або} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

Ліву частину даної нерівності розкладемо за формулою бінома Ньютона:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \\ &\frac{n(n-1) \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Оскільки кожна з дужок

$$\left(1 - \frac{a}{n}\right) < 1 \quad (a = 1, 2, \dots) \text{ і } \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

для всіх $n = 1, 2, \dots$, маємо

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Вираз $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ є сумою спадної геометричної

прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$ і першим членом $b_1 = \frac{1}{2}$, її значення

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Таким чином, для будь-якого натурального n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

а отже для будь-якого $n \geq 3$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$

10.6. 1-й спосіб

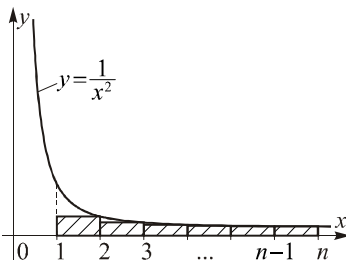
Суму

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

можна трактувати як площу ступінчатої фігури, що складається з прямокутників основами яких є відрізки $[k-1; k]$, а висотами – перпендикуляри, опущені

з графіка функції $y = \frac{1}{x^2}$ на вісь Ox

в точці $x = k$ (заштрихована фігура на рисунку). Тоді площа вказаної ступінчатої фігури повинна бути меншою за площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \frac{1}{x^2}$, віссю Ox та прямими $x = 1$ і $x = n$. Площа даної криволінійної трапеції



$$S = \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^n = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Отже,

$$S_n < S < 1.$$

2-й спосіб

На інтервалі $(-\pi; \pi)$ розклад у ряд Фур'є функції $f(x) = x^2$ виглядає наступним чином

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right).$$

Якщо покласти $x = \pi$, то

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{або} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

звідки

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{і} \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0,645 < 1.$$

Отже, вказана нерівність справедлива.

10.7. Виконаємо ряд перетворень над даною сумою:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \ln \frac{2^2 - 1}{2^2} + \ln \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} = \\ &= \ln \frac{(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot \dots \cdot (n^2 - 1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2} = \\ &= \ln \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1) \cdot \dots \cdot (n-1)(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2} = \\ &= \ln \frac{1 \cdot (n+1)}{2 \cdot n} = \ln \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

10.8. В силу того, що $x > 0$ і $y > 0$ можемо піднести ліву і праву частини нерівності до кубу:

$$4(x+y) \geq x + 3\sqrt[3]{x^2 y} + 3\sqrt[3]{xy^2} + y;$$

$$3(x+y) \geq 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt[3]{xy^2}; \quad x+y \geq \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{yx^2};$$

$$\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right) \geq \sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right),$$

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} \geq \sqrt[3]{xy}; \quad \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^2 \geq 0.$$

Оскільки остання нерівність вірна, то і початкова нерівність теж вірна.

10.9. Знайдемо області допустимих значень змінних:

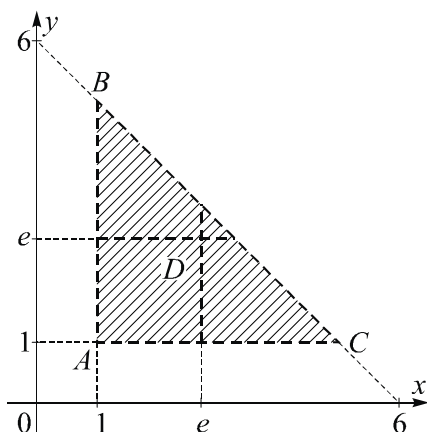
$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \ln x > 0, \\ \ln y > 0, \\ \ln \ln x \neq 0, \\ \ln \ln y \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ y > 1, \\ x \neq e, \\ y \neq e. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (1; e) \cup (e; +\infty), \\ y \in (1; e) \cup (e; +\infty). \end{cases} \quad (10.6)$$

Нехай $a = (\ln x)^{\frac{\ln x}{\ln \ln x}}$, тоді

$$\ln a = \frac{\ln x}{\ln \ln x} \cdot \ln \ln x = \ln x \Rightarrow a = x, \text{ або } (\ln x)^{\frac{\ln x}{\ln \ln x}} = x.$$

Аналогічно $(\ln y)^{\frac{\ln y}{\ln \ln y}} = y$. Отже, початкова нерівність набуває вигляду

$$x + y < 6. \quad (10.7)$$



Враховуючи (10.6) і (10.7),
будуємо область D , яка визна-
чає множину розв'язків нерів-
ності

$$(\ln x)^{\frac{\ln x}{\ln \ln x}} + (\ln y)^{\frac{\ln y}{\ln \ln y}} < 6.$$

10.10. Для $0 \leq x_i \leq \pi$ $0 \leq \sin x_i \leq 1$. Так як

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \text{ а } |a + b| \leq |a| + |b|,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} |\sin(x_1 + x_2 + \dots + x_n)| &= |\sin(x_1 + (x_2 + \dots + x_n))| = \\ &= |\sin x_1| |\cos(x_2 + x_3 + \dots + x_n)| + |\cos x_1| |\sin(x_2 + x_3 + \dots + x_n)| \leq \\ &\leq \sin x_1 + |\sin(x_2 + x_3 + \dots + x_n)| \leq \sin x_1 + \sin x_2 + \\ &+ |\sin(x_3 + x_4 + \dots + x_n)| \leq \dots \leq \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n. \end{aligned}$$

10.11. 1-й спосіб

Розглянемо очевидну нерівність

$$0 < \frac{2015^n}{n!} = \frac{2015}{1} \cdot \frac{2015}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2015}{m} \cdot \frac{2015}{m+1} \cdot \dots \times$$

$$\times \frac{2015}{n} < \frac{2015^m}{m!} \left(\frac{2015}{m+1} \right)^{n-m} < \varepsilon,$$

справедливу при будь-якому $\varepsilon > 0$ і $m+1 > 2015$, якщо n достатньо велике. За означенням границі послідовності вказана рівність справедлива.

2-й спосіб

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2015^n}{n!}$, за ознакою Д'Алам-

бера він збігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2015^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2015^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2015}{n+1} = 0 < 1,$$

а отже виконується необхідна умова збіжності ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2015^n}{n!} = 0.$$

10.12. Користуючись властивостями логарифмічної функції, виконаємо ряд перетворень даної суми:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{x}{2^k} &= \ln \cos \frac{x}{2} + \ln \cos \frac{x}{2^2} + \dots + \ln \cos \frac{x}{2^n} = \\ &= \ln \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n} \cdot 2^n}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \\
 &= \ln \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \sin \frac{x}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \\
 &= \ln \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^{n-2}} \sin \frac{x}{2^{n-2}} \cdot 2^{n-2}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \\
 &= \dots = \ln \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot 2}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \\
 &= \ln \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \ln \sin x - n \ln 2 - \ln \sin \frac{x}{2^n}.
 \end{aligned}$$

10.13. Вважаючи P_n результатом диференціювання суми степеневих функцій, під знаком похідної отримаємо суму членів геометричної прогресії:

$$\begin{aligned}
 P_n &= (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)' = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \right)' = \\
 &= \frac{(1 - (n+1)x^n)(1 - x) + x - x^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}.
 \end{aligned}$$

10.14. В силу того, що

$$\frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\cos \frac{x}{2^n}} = \left(-\ln \left| \cos \frac{x}{2^n} \right| \right)',$$

суму S_n можна представити інакше:

$$\begin{aligned} S_n &= - \left(\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \cos \frac{x}{4} \right| + \dots + \ln \left| \cos \frac{x}{2^n} \right| \right)' = \\ &= - \left(\ln \left| \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \right| \right)' = - \left(\ln \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \right)' = \\ &= - \frac{2^n \sin \frac{x}{2^n} \cdot \cos x \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \sin x}{\sin^2 \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

10.15. а) 1-й спосіб

Знайдемо S_n при декількох перших значеннях n :

$$S_1 = \sin x; \quad S_2 = \sin x + \sin 2x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{3x}{2} \sin x}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$S_3 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \frac{\sin \frac{3x}{2} \sin x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin 3x =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \frac{3x}{2} \sin x}{\sin \frac{x}{2}} + \frac{\sin 3x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \\
 &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\frac{\cos \left(\frac{3x}{2} - x \right) - \cos \left(\frac{3x}{2} + x \right)}{2} + \frac{\cos \left(3x - \frac{x}{2} \right) - \cos \left(3x + \frac{x}{2} \right)}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{7x}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{7x}{2} \right) = \frac{\sin 2x \sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.
 \end{aligned}$$

Як бачимо:

$$S_1 = \frac{\sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) \sin \left(1 \cdot \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}}, \quad S_2 = \frac{\sin \left(3 \cdot \frac{x}{2} \right) \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$S_3 = \frac{\sin \left(4 \cdot \frac{x}{2} \right) \sin \left(3 \cdot \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Нехай при $n = k$ $S_n = S_k = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$, покажемо,

що при $n = k+1$ $S_n = S_{k+1} = \frac{\sin \frac{k+2}{2}x \cdot \sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$:

$$S_{k+1} = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx + \sin(k+1)x =$$

$$= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin(k+1)x =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{k+1}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}x + \sin(k+1) \cdot \sin \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2k+1}{2}x + \cos \frac{2k+1}{2}x - \cos \frac{2k+3}{2}x \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2k+3}{2}x \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(-2 \sin \frac{k+2}{2}x \cdot \sin \frac{k+1}{2}x \right) = \frac{\sin \frac{k+2}{2}x \cdot \sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Тоді, згідно з методом математичної індукції,

$$S_n = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

2-й спосіб

Використовуючи формули Ейлера

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}, \quad \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},$$

маємо:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} (e^{ix} - e^{-ix} + e^{2ix} - e^{-2ix} + \dots + e^{inx} - e^{-inx}) = \\ &= \frac{1}{2} \left((e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{nix}) - (e^{-ix} + e^{-2ix} + \dots + e^{-nix}) \right) \end{aligned}$$

В дужках отримали суми двох геометричних прогресій, перша зі знаменником $q_1 = e^{ix}$, друга $q_2 = e^{-ix}$. Тоді

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ix}(1 - e^{inx})}{1 - e^{ix}} - \frac{e^{-ix}(1 - e^{-inx})}{1 - e^{-ix}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(e^{ix} - e^{-ix}) + (e^{inx} - e^{-inx}) - (e^{i(n+1)x} - e^{i(n+1)x})}{2 - (e^{ix} + e^{-ix})} = \\ &= \frac{(\sin x + \sin nx) - \sin(n+1)x}{2(1 - \cos x)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \cos \frac{n-1}{2} x - 2 \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \cos \frac{n+1}{2} x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \\
 &= \frac{2 \sin \frac{n+1}{2} x \left(\cos \frac{n-1}{2} x - \cos \frac{n+1}{2} x \right)}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \\
 &= \frac{4 \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x \cdot \sin \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.
 \end{aligned}$$

2) Сума T_n представляє собою похідну суми S_n , тому

$$\begin{aligned}
 T_n = (S_n)' &= \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)' = \\
 &= \frac{\left(\frac{n+1}{2} \cos \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x + \frac{n}{2} \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \cos \frac{n}{2} x \right) \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \\
 &= \frac{n \left(\cos \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x + \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \cos \frac{n}{2} x \right) \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{n}{2} x \left(\cos \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{x}{2} - \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \cos \frac{x}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \\
 &= \frac{n \sin \frac{2n+1}{2} x \cdot \sin \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.
 \end{aligned}$$

10.16. Серед многочленів $p(x)$, $p'(x)$ та $p''(x)$ найбільшою буде степінь многочлена $p(x)$, причому вона буде співпадати з найбільшою степеню многочлена $p(x) + p'(x) + p''(x)$. Оскільки степінь многочлена в правій частині рівності дорівнює двом, то $p(x)$ шукаємо у вигляді $p(x) = ax^2 + bx + c$, тоді $p'(x) = 2ax + b$ а $p''(x) = 2a$. Підставивши отримані значення у дане диференціальне рівняння, одержимо

$$ax^2 + (2a + b)x + 2a + b + c = x^2 - 2015x + 1,$$

звідки

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1, \\ 2a + b = -2015, \\ 2a + b + c = 1 \end{array} \Rightarrow a = 1, \quad b = -2017, \quad c = 2016.$$

Отже,

$$p(x) = x^2 - 2017x + 2016 \quad \text{і} \quad p(2016) = 2016^2 - 2017 \cdot 2016 + 2016 = 2016^2 - 2016(2017 - 1) = 0.$$

10.17. Розглянемо функцію $F(x) = \int_0^x P_n(x) dx$, яка неперервна на відрізку $[0;1]$, диференційована в інтервалі $(0;1)$, на краях відрізка $[0;1]$ приймає однакові значення:

$$F(0) = 0,$$

$$F(1) = \int_0^1 P_n(x) dx = \int_0^1 (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) dx =$$

$$= \left(\frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \dots + a_n x \right) \Big|_0^1 = \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0.$$

Таким чином, дана функція на відрізку $[0;1]$ задовольняє всі умови теореми Ролля, а отже існує таке $\alpha \in (0;1)$, що $F'(\alpha) = 0$, так як $F'(x) = P_n(x)$, то $P_n(\alpha) = 0$.

10.18. Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена:

$$e^{\sin^2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{2n} x}{n!} = 1 + \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \dots$$

Тоді

$$\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \int_0^{\pi} (1 + \sin^2 x) dx =$$

$$= \pi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

10.19. Виразимо визначений інтеграл із вказаної рівності

$$\int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{2} (f(x) - x^2)$$

З іншого боку,

$$\int_0^1 f(xt) dt = \left[\begin{array}{l} xt = z, \quad dt = \frac{1}{x} dz, \quad t = \frac{z}{x}, \\ 0 \leq z \leq x \end{array} \right] = \frac{1}{x} \int_0^x f(z) dz.$$

Таким чином

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(z) dz = \frac{1}{2} (f(x) - x^2) \quad \text{або} \quad \int_0^x f(z) dz = \frac{x}{2} (f(x) - x^2).$$

Продиференціюємо останню рівність по x :

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x) - x^2) + \frac{x}{2} (f'(x) - 2x) = \frac{1}{2} (f(x) + xf'(x) - 3x^2).$$

Тоді

$$2f(x) = f(x) + xf'(x) - 3x^2, \quad f(x) = xf'(x) - 3x^2,$$

звідки

$$f'(x) - \frac{1}{x} f(x) = 3x.$$

Остання рівність є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, тому:

$$f(x) = uv, \quad f'(x) = u'v + v'u,$$

$$u'v + v'u - \frac{1}{x} uv = 3x, \quad u'v + u \left(v' - \frac{1}{x} v \right) = 3x;$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \\ \frac{du}{dx} \cdot v = 3x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \\ du = \frac{3x dx}{v} \end{cases} \quad \begin{cases} v = x, \\ du = 3dx \end{cases} \quad \begin{cases} v = x, \\ u = 3x + C. \end{cases}$$

Отже,

$$f(x) = (3x + C)x = 3x^2 + Cx.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кузнецов, А. Н.** Практикум по решению задач повышенной сложности в курсе математического анализа [Текст] / А. Н. Кузнецов, В. Ф. Лебедева. – Николаев : НУК, 2007. – 160 с.
2. **Садовничий, В. А.** Задачи студенческих математических олимпиад [Текст] / В. А. Садовничий, А. А. Григорьян, С. В. Конягин. – М. : Изд-во Московского университета, 1987. – 310 с.
3. **Садовничий, В. А.** Задачи студенческих олимпиад по математике [Текст] / В. А. Садовничий, А. С. Подколзин. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
4. **Смирнов, В. И.** Курс высшей математики [Текст] / В. И. Смирнов. – М. : Наука. 1974. – Т.3. Ч.1. – 324 с.
5. **Рожков, В. И.** Сборник задач математических олимпиад [Текст] / В. И. Рожков, Г. Д. Курдеванидзе, Н. Г. Панфилов. – М. : Изд-во Университета дружбы народов, 1987. – 28 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
I. Матриці та визначники.....	4
II. Вектори	15
III. Аналітична геометрія	34
IV. Функції та графіки	52
V. Границі	74
VI. Похідні	99
VII. Інтеграли	114
VIII. Диференціальні рівняння	147
IX. Ряди	163
X. Різні задачі	182
Список літератури	206

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВ Альберт Миколайович
РОМАНЧУК Наталія Олександрівна
ВАРШАМОВ Армен Варшамович
ЧОРНИЙ Олександр Леонідович

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Редактор *Ю. О. Банкулова*

Комп'ютерне складання та верстання *В. В. Москаленко*

Коректор *М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 12,1. Тираж 100 прим. Вид № 13. Зам. № 148.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.