

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Р. І. Зароський

**ПРАКТИКУМ
З КУРСУ ЕКОНОМЕТРІЇ**

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2007

УДК 519.862
ББК 65.05
3-35

Рекомендовано Методичною радою НУК

Рецензент К.В. Кошкін, доктор технічних наук, професор

Зароський Р.І.

3-35 Практикум з курсу економетрії. – Миколаїв: НУК, 2007.
– 120 с.

Розглянуто основні теоретичні положення економетрії. Вміщено типові задачі економетричного аналізу зі зразками розв'язань і варіанти завдань для використання їх під час практичних занять, у типових розрахунках, контрольних роботах тощо.

Призначений для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Також буде корисним для викладачів економічних дисциплін, магістрантів, аспірантів, слухачів економічних шкіл і курсів з підготовки та перепідготовки фахівців у галузі економіки.

УДК 519.862
ББК 65.05

© Зароський Р.І., 2007

© Видавництво НУК, 2007

Розділ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ З КУРСУ

1.1. Проста лінійна регресія

Інформаційною базою для побудови простої лінійної регресійної моделі є вибіркові дані – спостережувані вектори незалежної (x) і залежної (y) змінних: $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Залежність, яка існує між указаними векторами у припущенні лінійності, можна виразити рівністю

$$\mathbf{y} = b_0 + b_1 \mathbf{x} + \mathbf{e},$$

де $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – вектор залишків (помилки). Ці залишки є випадковими відхиленнями спостережуваних значень змінної y від її регресійних значень

$$\hat{\mathbf{y}} = b_0 + b_1 \mathbf{x}. \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) є моделлю *простої лінійної регресії*, невідомі параметри b_0 і b_1 якої визначають за умови мінімуму наступної функції:

$$F(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2.$$

Інакше кажучи, застосовують метод найменших квадратів (МНК), який дозволяє для вказаних параметрів скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases}$$

З цієї системи, за припущенням $\sigma_x^2 = \text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \neq$

$\neq 0$, маємо

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2}; \quad b_0 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2}, \quad (1.2)$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ та $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ – вибіркові середні значення

змінних x та y .

Проста лінійна регресія має декілька важливих властивостей:

1) регресійна пряма проходить через середню точку $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x};$$

2) середнє значення залишків дорівнює нулю: $\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = 0$;

3) залишки мають нульову коваріацію зі спостережуваними

значеннями x та регресійними значеннями $\hat{y}$:

$$\text{cov}(x, e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(e_i - \bar{e}) = 0;$$

$$\text{cov}(\hat{y}, e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})(e_i - \bar{e}) = 0.$$

Кількісною мірою впливу змінної x на змінну y є так званий *коефіцієнт кореляції*. Він обчислюється за формулою

$$r = b_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad (1.3)$$

або

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)}\sqrt{\text{var}(y)}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\bar{y})^2}},$$

де $\text{cov}(x, y)$ – коваріація змінних x та y ; $\text{var}(x)$ і $\text{var}(y)$ – варіація (дисперсія) змінних x та y ; $\sigma_x = \sqrt{\text{var}(x)}$ і $\sigma_y = \sqrt{\text{var}(y)}$ – середньоквадратичні відхилення цих змінних. Значення коефіцієнта кореляції відображає тісноту зв'язку між незалежною і залежною змінними (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Межі значення $ r $	Зв'язок між змінними
0...0,3	Відсутній
0,3...0,5	Слабкий
0,5...0,7	Середній
0,7...1,0	Сильний

Значення коефіцієнта кореляції задовольняють нерівність $|r| \leq 1$, тобто вони завжди розташовані між -1 та $+1$; при цьому додатне значення коефіцієнта свідчить про прямий зв'язок між показниками x та y , а від'ємне – про обернений.

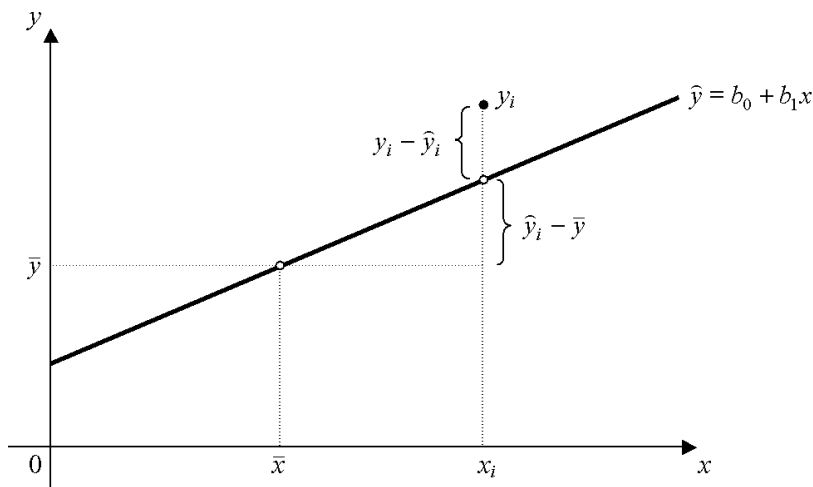


Рис. 1.1

На рис. 1.1 показані відхилення $y_i - \bar{y}$ (загальне), $\hat{y}_i - \bar{y}$ (відхилення, що пояснюється регресією) та $y_i - \hat{y}_i$ (відхилення не пояснюване, або відхилення випадкових помилок, або залишок), які задовольняють співвідношення

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (1.4)$$

З урахуванням прийнятих у літературі позначень

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2; SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2; SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (1.5)$$

співвідношення (1.4) має вигляд $SST = SSR + SSE$. Поділивши обидві частини (1.4) на n , одержуємо наступну залежність між

відповідними варіаціями (дисперсіями):

$$\text{var}(y) = \text{var}(\hat{y}) + \sigma_{\text{зал}}^2.$$

Величина $\sigma_{\text{зал}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ називається *дисперсією залишків*.

Відношення варіації $\text{var}(\hat{y})$, що пояснюється регресією, до загальної варіації $\text{var}(y)$ називається *коефіцієнтом детермінації*, позначається як R^2 і визначається за формулою

$$R^2 = \frac{\text{var}(\hat{y})}{\text{var}(y)} = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}. \quad (1.6)$$

Коефіцієнт детермінації дорівнює квадрату коефіцієнта кореляції:

$$R^2 = r^2.$$

З цієї залежності ясно, що значення коефіцієнта детермінації є завжди невід'ємними і не більшими за одиницю ($0 \leq R^2 \leq 1$).

Кожній із сум SSR і SSE ставлять у відповідність певні числа, які називають ступенями вільності: $k_R = m$ і $k_E = n - m - 1$, де n – число спостережень; m – число факторів. З використанням ступенів вільності визначаються величини, які називають середніми квадратами:

$$MSR = \frac{SSR}{m}; \quad MSE = \frac{SSE}{n - m - 1}.$$

В однофакторному випадку $k_R = 1$ і $k_E = n - 2$, тому для простої регресійної моделі $MSR = SSR / 1$, $MSE = SSE / (n - 2)$.

Зазначимо, що величина MSE є виправленою дисперсією залишків, позначається як σ_e^2 і визначається за формулою

$$\sigma_e^2 = MSE = \frac{1}{n - 2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (1.7)$$

Адекватність побудованої моделі фактичним даним оцінюється за допомогою критерію Фішера, спостережуване значення якого

$$F_{\text{спост}} = \frac{MSR}{MSE} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m} \right) / \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1} \right). \quad (1.8)$$

Значення $F_{\text{спост}}$ порівнюється зі значенням $F_{\text{кр}}$, яке визначається з таблиці F -розподілу (дод. 2) для заданого рівня значимості α та чисел ступенів вільності $k_1 = k_R$ і $k_2 = k_E$, тобто $F_{\text{кр}} = F_{\alpha; k_1; k_2}$. Якщо $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, побудована регресійна модель є адекватною фактичним даним, у протилежному випадку модель неадекватна.

Щоб побудувати довірчу зону фактичних даних, знаходять довірчі інтервали для кожного значення змінної y за наступними формулами:

$$\Delta y_j = t_{\text{кр}} \sigma_e \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_j - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (1.9)$$

де значення $\sigma_e = \sqrt{\sigma_e^2} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$ і $t_{\text{кр}} = t_{\gamma; k}$ вибира-

ють з таблиці критичних точок t -розподілу Стюдента (дод. 3) для даного рівня надійності $\gamma = 1 - \alpha$ та числа ступенів вільності $k = n - 2$;

$$\hat{y}_{j \min} = \hat{y}_j - \Delta y_j; \quad \hat{y}_{j \max} = \hat{y}_j + \Delta y_j. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.1) дозволяє визначити точкову оцінку прогнозу для будь-якого прогнозованого значення x_p : $y_p = b_0 + b_1 x_p$, а для

інтервальної оцінки прогнозу аналогічно до (1.9) і (1.10) обчислюють величини

$$\Delta y_p = t_{кр} \sigma_e \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}; \quad (1.11)$$

$$y_{p \min} = y_p - \Delta y_p, \quad y_{p \max} = y_p + \Delta y_p.$$

При розрахунку коефіцієнта кореляції також доцільно визначити його інтервальну оцінку за такими формулами:

$$\sigma_r = \frac{1-r}{n}; \quad \Delta r = t_{кр} \sigma_r; \quad r_{\min} = r - \Delta r; \quad r_{\max} = r + \Delta r. \quad (1.12)$$

Однією з важливих характеристик, що визначає швидкість відносної зміни залежного показника y при зміні відносної величини незалежного показника x , є *коефіцієнт еластичності*. Значення цього коефіцієнта розраховується за формулою

$$k_{ел} = \frac{x \cdot \hat{y}'}{\hat{y}}. \quad (1.13)$$

Формулою (1.13) послідовно користуються для кожного з даних значень незалежної змінної x , а також її прогнозованого значення.

Після розрахунку параметрів b_0 і b_1 регресійної моделі здійснюють перевірку їхньої статистичної значимості за допомогою t -критерію Стюдента. Для цього спочатку знаходять оцінку дисперсії кожного параметра:

$$\sigma_{b_0}^2 = \sigma_e^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad \sigma_{b_1}^2 = \sigma_e^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.14)$$

де σ_{ε}^2 визначають за формулою (1.7). Потім обчислюють відповідні середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma_{b_0} = \sqrt{\sigma_{b_0}^2}; \quad \sigma_{b_1} = \sqrt{\sigma_{b_1}^2} \quad (1.15)$$

і для кожного параметра визначають t -статистику: $t_i = \frac{b_i - \beta_i}{\sigma_{b_i}}$.

Далі перевіряють нуль-гіпотезу $H_0: \beta_i = 0$, для чого розраховують значення t_0 та t_1 :

$$t_0 = \frac{b_0}{\sigma_{b_0}}; \quad t_1 = \frac{b_1}{\sigma_{b_1}}. \quad (1.16)$$

Знайдені спостережувані значення t -критерію порівнюють з $t_{кр}$, яке вибирається з таблиці критичних точок t -розподілу Стьюдента (див. дод. 3). Звідси робимо висновок: якщо $|t_i| > t_{кр}$, то нуль-гіпотезу відкидають і параметр b_i визнають статистично значимим, у протилежному випадку гіпотезу приймають і параметр b_i визнають статистично незначимим.

Зауважимо, що величини β_0 і β_1 є параметрами узагальненої регресійної моделі $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$, яка відображає залежність показників x та y в генеральній сукупності даних. Граничні точки довірчих інтервалів для параметрів β_0 і β_1 знаходять за такими формулами:

$$\beta_{i\min} = b_i - t_{кр} \sigma_{b_i}; \quad \beta_{i\max} = b_i + t_{кр} \sigma_{b_i}. \quad (1.17)$$

Зміст методики побудови й аналізу простої лінійної регресійної моделі не обмежується тільки дослідженням лінійних залежностей двох показників. Використовуючи різні математичні перетворення й заміну змінних, до цієї моделі зводять велику кількість нелінійних залежностей. Таке зведення називають *лінеаризацією*. Наведемо деякі приклади.

Для функції $y = \frac{1}{b_0 + b_1 x}$ введемо нову залежну змінну $z = \frac{1}{y}$,

для якої матимемо лінійне співвідношення $z = b_0 + b_1 x$.

Функцію $y = \frac{x}{ax + b}$ лінеаризуємо заміною як залежної

змінної, так і фактора: $z = \frac{1}{y}$, $u = \frac{1}{x}$, $z = b_0 + b_1 u$, де $b_0 = a$;
 $b_1 = b$.

Для лінеаризації функції $y = ax^b$, після логарифмування якої маємо $\ln y = \ln a + b \ln x$, робимо заміни $z = \ln y$ та $u = \ln x$. У результаті цих заміन одержимо лінійну залежність нових змінних $z = b_0 + b_1 u$, де $b_0 = \ln a$; $b_1 = b$.

Квадратичну залежність $y = ax^2 + b$ перетворимо до лінійного виду заміною $u = x^2$: $z = b_0 + b_1 u$, де $b_0 = b$; $b_1 = a$ і т. д.

1.2. Багатофакторна лінійна регресія. Мультиколінеарність та її вилучення

Вибіркові дані для побудови багатофакторної регресійної моделі – це спостережувані вектори m пояснювальних змінних (факторів) $x_1, x_2, \dots, x_m$ і пояснюваної змінної y :

$$\mathbf{x}_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\}, \quad \mathbf{x}_2 = \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\}, \dots,$$

$$\mathbf{x}_m = \{x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}\}, \quad \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

Лінійну залежність, що існує між указаними векторами, можна виразити рівністю

$$\mathbf{y} = b_0 + b_1 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{x}_2 + \dots + b_m \mathbf{x}_m + \mathbf{e},$$

де $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – вектор залишків (помилки), які є випадковими відхиленнями спостережуваних значень змінної y від зна-

чень багатфакторної лінійної регресії $\hat{y}$:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m. \quad (1.18)$$

При створенні багатфакторної регресійної моделі враховують наступну сукупність припущень:

1) випадкова величина e розподілена відповідно до нормального закону з нульовим математичним сподіванням і сталою дисперсією (гомоскедастичність);

2) коваріація компонент випадкової величини e дорівнює нулю: $\text{cov}(e_i, e_j) = 0$, якщо $e_i \neq e_j$;

3) коваріація випадкових величин e_i з кожною пояснювальною змінною дорівнює нулю: $\text{cov}(e_i, x_j) = 0$;

4) пояснювальні змінні повинні бути незалежними між собою (відсутність мультиколінеарності);

5) модель повинна бути правильно специфікованою (відсутність похибки).

Зауважимо, що такі ж припущення, крім четвертого, передбачаються і для моделі простої лінійної регресії.

Важливим підготовчим етапом для побудови багатфакторної регресійної моделі є етап математико-статистичного аналізу. Після вибору всіх можливих факторів, які впливають на показник, що вивчається, будується *матриця коефіцієнтів парної кореляції* між пояснюваною змінною і факторами, а також між всіма парами факторів:

$$M_r = \begin{pmatrix} & y & x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ y & 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_m} \\ x_1 & r_{yx_1} & 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_m} \\ x_2 & r_{yx_2} & r_{x_1 x_2} & 1 & \dots & r_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & r_{yx_m} & r_{x_1 x_m} & r_{x_2 x_m} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти елементи $r_{ij} = r_{x_i x_j}$ даної матриці, послідовно обчислюють наступні величини:

1) дисперсії змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$ та їхні середньоквадратичні відхилення –

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n (x_{is} - \bar{x}_i)^2; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} \quad (i=1, 2, \dots, m); \quad (1.19)$$

2) коефіцієнти коваріації –

$$k_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n (x_{is} - \bar{x}_i)(x_{js} - \bar{x}_j) \quad (i, j=1, 2, \dots, m); \quad (1.20)$$

3) коефіцієнти парної кореляції –

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (i, j=1, 2, \dots, m). \quad (1.21)$$

Обмежуючись на даному етапі тільки кореляцією між факторами, кореляційну матрицю подають у наступному вигляді (пам'ятаючи при цьому про її симетричність):

$$M_{rx} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Кореляційну матрицю можна також збудувати, якщо нормалізувати значення заданих факторів $x_1, x_2, \dots, x_m$ за формулою

$$x_{is}^* = \frac{x_{is} - \bar{x}_i}{\sqrt{n\sigma_{x_i}^2}} \quad (i=1, \dots, m; \quad s=1, \dots, n). \quad (1.23)$$

Після цього, записавши матрицю нормалізованих змінних X^* і транспоновану до неї X^{*T} , визначимо матрицю M_{rx} як їхній

добуток:

$$M_{rx} = X^{*T} X^*.$$

Негативним явищем в економетричному дослідженні є наявність у багатофакторній регресійній моделі двох або декількох факторів, які мають високий ступінь кореляції, – *мультиколінеарність* моделі. При цьому можливе існування досконалої кореляції між деякими факторами (тобто наявність досконалого лінійного зв'язку між ними: $a_{k_1} x_{k_1} + a_{k_2} x_{k_2} + \dots + a_{k_p} x_{k_p} = 0$), або випадку, коли фактори корелюють між собою, але недосконало (виконується залежність $a_{k_1} x_{k_1} + a_{k_2} x_{k_2} + \dots + a_{k_p} x_{k_p} + e = 0$, де e – випадкове відхилення). Наслідком досконалої мультиколінеарності між факторами є те, що параметри регресії та їхні середньоквадратичні відхилення неможливо визначити. Якщо ж існує недосконала мультиколінеарність, параметри регресії визначити можна, але їхні середньоквадратичні відхилення будуть дуже великими.

Найповніше дослідження щодо наявності мультиколінеарності можна зробити за допомогою алгоритму Фаррара–Глобера. За цим алгоритмом, використовуючи три види статистичних критеріїв, перевіряють мультиколінеарність усієї сукупності факторів (χ^2 -критерій), кожного фактора з рештою пояснювальних змінних (F -критерій) і кожної пари факторів (t -критерій).

Для того щоб з'ясувати наявність загальної мультиколінеарності факторів, необхідно визначити спостережуване значення критерію χ^2 :

$$\chi_{\text{спост}}^2 = - \left(n - 1 - \frac{2m + 5}{6} \right) \cdot \ln(\det M_{rx}),$$

де n – число спостережень; m – порядок кореляційної матриці M_{rx} ; $\det M_{rx}$ – визначник цієї матриці. Для заданого рівня надійності γ

та числа ступенів вільності $k = \frac{1}{2} m(m-1)$, скориставшись таблицею критичних точок χ^2 -розподілу (дод. 4), знаходять значення

$\chi_{кр}^2 = \chi_{\gamma; k}^2$. Якщо $\chi_{спост}^2 > \chi_{кр}^2$, роблять висновок про наявність загальної мультиколінеарності заданих факторів; у протилежному випадку мультиколінеарність у сукупності факторів відсутня.

Для того щоб установити, чи існує мультиколінеарність між кожним фактором і рештою пояснювальних змінних, потрібно визначити обернену матрицю $C = M_{rx}^{-1}$. Після цього для кожного фактора x_i підраховують спостережуване значення F -критерію за формулою

$$F_{i \text{ спост}} = (c_{ii} - 1) \frac{n - m}{m - 1}, \quad (1.24)$$

де c_{ii} – діагональні елементи матриці C . Знайдені значення $F_{i \text{ спост}}$ порівнюють зі значенням $F_{кр} = F_{\alpha; n-m; m-1}$, яке береться з таблиці F -розподілу (див. дод. 2) відповідно до даного рівня значимості α та чисел ступенів вільності $(n - m)$ і $(m - 1)$. Якщо $F_{i \text{ спост}} > F_{кр}$, це означає, що i -й фактор мультиколінеарний з усіма іншими пояснювальними змінними; у протилежному випадку вказана мультиколінеарність відсутня.

Для того щоб виявити пари факторів, між якими існує мультиколінеарність, у кожній парі визначають *частинні коефіцієнти кореляції* за формулою

$$r_{ij;s} = \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} \cdot c_{jj}}}, \quad (1.25)$$

де c_{ij} , c_{ii} , c_{jj} – відповідні елементи побудованої раніше матриці $C = M_{rx}^{-1}$. Потім для кожної пари факторів за формулою

$$t_{ij} = r_{ij;s} \cdot \sqrt{\frac{n - m}{1 - (r_{ij;s})^2}} \quad (1.26)$$

обчислюють t -статистику, а за таблицею t -розподілу Стюдента (див. дод. 3) для заданої надійності γ та числа ступенів вільності $k = n - m$ знаходять критичне значення t -критерію $t_{кр} = t_{\gamma; k}$. Якщо

при цьому $|t_{ij}| > t_{кр}$, між факторами x_i та x_j існує тісний кореляційний зв'язок.

При виявленні мультиколінеарності за F - або t -критерієм, аналізуючи рівень обох видів критеріїв, можна зробити обґрунтований висновок щодо позбавлення економетричної моделі від мультиколінеарності. Маючи на увазі фактори мультиколінеарної пари, один з них можна залишити, а інший вилучити з подальшого розгляду. Найчастіше залишають той фактор, який з економічної точки зору більш вагомий для аналізу впливу на пояснювану змінну. Можна також залишити фактор, який має більший коефіцієнт кореляції з пояснюваною змінною y . Вказаний аналіз проводять для кожної пари залежних між собою факторів. Проте зміна сукупності пояснювальних змінних завжди має узгоджуватися з економічною доцільністю, яка впливає з мети дослідження. Вилучення будь-якого фактора не повинне суперечити логіці економічних зв'язків.

Крім вилучення факторів, що корелюють між собою, для позбавлення досліджуваної системи змінних від мультиколінеарності використовують також інші способи: застосування додаткової інформації, перетворення інформації (використання перших різниць), збільшення кількості спостережень і т. д.

Результатом етапу математико-статистичного аналізу є знаходження множини основних незалежних між собою факторів, які складають основу для побудови регресійної моделі.

1.3. Багатофакторна лінійна регресія. Властивості моделі.

Коефіцієнти множинної кореляції та детермінації

Як і у випадку простої лінійної регресії, невідомі параметри $b_0, b_1, \dots, b_m$ регресійної моделі (1.18) знаходять за методом най-

менших квадратів, тобто мінімізуючи суму квадратів $\sum_{i=1}^n e_i^2 =$

1) регресійна гіперплощина проходить через точку $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m, \bar{y})$, яку визначають середні значення факторів і пояснюваної змінної:

$$\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_m \bar{x}_m,$$

де $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji} \quad (j = 1, \dots, m)$ та $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$;

2) середнє регресійне значення пояснюваної змінної дорівнює

її середньому фактичному значенню: $\bar{\hat{y}} = \bar{y} \quad (\bar{\hat{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i)$;

3) середнє значення залишків дорівнює нулю: $\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = 0$;

4) залишки мають нульову коваріацію з фактичними значеннями факторів x_j і регресійними значеннями $\hat{y}$:

$$\text{cov}(x_j, e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_j)(e_i - \bar{e}) = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$\text{cov}(\hat{y}, e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})(e_i - \bar{e}) = 0;$$

5) якщо зберігаються класичні припущення щодо неспостережуваної випадкової величини ε в узагальненій залежності

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \varepsilon$$

(дійсної для всієї генеральної сукупності), то оцінки параметрів $b_0, b_1, \dots, b_m$ регресійної моделі (1.18), що одержані у відповідності до системи (1.27), є так званою *BLUE*-оцінкою (найкращою лінійною оцінкою без відхилень з мінімальною дисперсією).

У дослідженні багатфакторних моделей особливу увагу потрібно приділити випадку, що найчастіше зустрічається в економічній практиці, – двофакторній регресійній моделі $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$. Параметри цієї моделі можна оцінити, дотримуючись (1.27) і розв'язуючи наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} = \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i. \end{cases} \quad (1.28)$$

Якщо, використовуючи перше рівняння (1.28), з двох останніх рівнянь вилучити параметр b_0 і ввести допоміжні величини $x_{1i} - \bar{x}_1 = \tilde{x}_{1i}$, $x_{2i} - \bar{x}_2 = \tilde{x}_{2i}$, $y_i - \bar{y} = \tilde{y}_i$, отримаємо систему

$$\begin{cases} b_1 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}\tilde{x}_{2i} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}\tilde{y}_i, \\ b_1 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}\tilde{x}_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{2i}\tilde{y}_i, \end{cases}$$

з якої можна знайти значення параметрів b_1 і b_2 . Після цього з першого рівняння (1.28) знайдемо значення параметра b_0 :

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_{2i}^2 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}\tilde{y}_i - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}\tilde{x}_{2i} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{2i}\tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}^2 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{2i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}\tilde{x}_{2i} \right)^2};$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}^2 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{2i} \tilde{y}_i - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i} \tilde{x}_{2i} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i} \tilde{y}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i}^2 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{2i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_{1i} \tilde{x}_{2i} \right)^2};$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}.$$

Корисною оцінкою ступеня відповідності даних $\hat{y}_i$, отриманих з регресійної моделі, фактичним даним y_i є *коефіцієнт множинної кореляції* r , який визначається як коефіцієнт кореляції між y та $\hat{y}$:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}}. \quad (1.29)$$

Квадрат коефіцієнта множинної кореляції, як і у випадку простої регресії, називають *коефіцієнтом детермінації* і позначають через R^2 . Можна показати, що вид коефіцієнта детермінації у випадку багатофакторної регресії ідентичний коефіцієнту детермінації простої лінійної регресії. Використовуючи позначення (1.5), для коефіцієнта детермінації багатофакторної моделі залишають незмінною формулу (1.6), тобто

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

або

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (1.30)$$

Після того, як параметри регресійної моделі знайдено, проводиться перевірка моделі на адекватність за допомогою F -критерію Фішера, а також перевірка значимості знайдених параметрів за t -критерієм Стюдента. Спостережуване значення критерію Фішера знаходять за формулою

$$F_{\text{спост}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{k_E}{k_R}, \quad (1.31)$$

де $k_E = n - m - 1$; $k_R = m$ – числа ступенів вільності сум SSE і SSR відповідно. Критичні значення F -критерію визначаються з таблиці (див. дод. 2): $F_{\text{кр}} = F_{\alpha; k_R; k_E}$. Адекватність побудованої моделі фактичним даним установлюється, як і в однофакторному випадку, шляхом порівняння значень $F_{\text{спост}}$ і $F_{\text{кр}}$. Якщо модель неадекватна, необхідно повернутися до етапу її побудови і, можливо, від лінійної моделі перейти до нелінійної, або ввести додаткові фактори.

Корисним в цьому напрямку є *метод покрокової регресії*, який зводиться до послідовного включення в регресійну модель по одному фактору з усієї сукупності. При цьому послідовність включення відповідає порядку, в якому зменшується вплив фактора на пояснюваний показник. Узявши за основу кореляційну матрицю (1.22), доповнюють її коефіцієнтами кореляції $r_{0i} = r_{yx_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) між пояснюваним показником і кожним з факторів:

$$r_{0i} = \frac{k_{0i}}{\sigma_0 \sigma_i}, \quad (1.32)$$

де $k_{0i} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n (y_s - \bar{y})(x_{is} - \bar{x}_i)$; $\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n (y_s - \bar{y})^2}$. Слід за-

уважити, що формула (1.32), як і формули для обчислення значень k_{0i} та s_0 , є аналогом формул (1.19)–(1.21).

Доповнена кореляційна матриця, як і матриця (1.22), є симетричною; одержані коефіцієнти кореляції між пояснюваним показником і факторами займають у ній перший рядок і перший стовпець:

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} & r_{03} & \dots & r_{0m} \\ r_{10} & 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ r_{20} & r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & 1 & \dots & r_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m0} & r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Зауважимо, що розширену кореляційну матрицю (1.33), як і матрицю (1.22), можна визначити, використовуючи указаний матричний метод після нормалізації розширеної матриці змінних.

У першому рядку матриці M_r вибирають найбільший за абсолютною величиною коефіцієнт кореляції r_{0i} ; це означає, що найбільш тісний зв'язок пояснюваний показник має з фактором x_i . Побудову регресійних моделей починають з моделі $\hat{y} = b_0 + b_i x_i$. Потім беруть наступний за абсолютною величиною кореляційний коефіцієнт r_{0j} , додають у модель фактор x_j і будують її у вигляді $\hat{y} = b_0 + b_i x_i + b_j x_j$.

Далі обчислюють простий та оцінений коефіцієнти детермінації й коефіцієнт множинної кореляції за такими формулами:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2}; \quad \bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1}; \quad r = \sqrt{R^2}, \quad (1.34)$$

де $\bar{R}^2$ – оцінений коефіцієнт детермінації, що враховує числа ступенів вільності сум SSE і SST ($k_E = n - m - 1$; $k_T = n - 1$). Коефіцієнт $\bar{R}^2$ вводять з метою зменшення впливу кількості факторів на його значення. Варто зауважити, що для підрахунку величин r і R^2 можна також застосувати еквівалентні формули (1.29) і (1.30). За отриманими результатами аналізують зміни простого й оціненого коефіцієнтів детермінації і коефіцієнта множинної кореляції, що відбуваються при включенні в модель додаткового фактора.

Поряд з методом покрокової регресії для вибору "найкращого" рівняння регресії використовують також метод виключення. Він діє в зворотному порядку порівняно з методом покрокової регресії. Алгоритм методу виключення складається з наступних етапів:

а) розраховується регресійне рівняння, яке включає всі можливі фактори, що входять до моделі;

б) для кожного з цих факторів обчислюється частинний F -критерій;

в) найменше значення $F_{\min}$ цього критерію порівнюється з його критичним значенням $F_{\text{кр}}$;

г) якщо $F_{\min} < F_{\text{кр}}$, то фактор, що відповідає значенню $F_{\min}$, виключають з моделі. Далі проводять новий розрахунок регресійного рівняння вже без виключеного фактора, після чого знову повертаються до етапу б. Якщо ж $F_{\min} > F_{\text{кр}}$, то регресійне рівняння залишають без змін.

Значення частинного F -критерію для фактора x_i знаходять за наступною схемою. Будуються дві регресійні моделі:

а) з усіма потрібними факторами –

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p,$$

б) при виключеному факторі x_i –

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{i-1} x_{i-1} + b_{i+1} x_{i+1} + \dots + b_p x_p.$$

Послідовно розраховуються регресійні суми квадратів:

а) для першої моделі $S_1 = SSR(b_0, b_1, \dots, b_p)$,

б) для другої моделі $S_2 = SSR(b_0, b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_p)$.

Різницю цих двох сум позначають як

$$S_1 - S_2 = SS(b_i | b_0, b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_p)$$

і називають *додатковою сумою квадратів*. Вона вимірює внесок фактора x_i в регресійну суму квадратів за умови, що всі фактори, крім x_i , вже входять у модель. Кожна додаткова сума квадратів має ступінь вільності, рівний одиниці. Відношення відповідного середнього квадрата, який дорівнює сумі квадратів, поділений на кількість ступенів вільності, до величини $MSE = \sigma_e^2$ називають частинним F -критерієм для фактора x_i .

Як і у випадку простої лінійної регресії, використовуючи t -критерій Стьюдента, можна перевірити статистичну значимість кожного з параметрів b_i рівняння (1.18) і побудувати довірчі інтервали для відповідних параметрів β_i узагальненої регресійної моделі. Для цього підраховується значення t -статистики $t_i = b_i / \sigma_{b_i}$, яке порівнюється з критичним значенням t -критерію $t_{кр} = t_{\gamma, n-m-1}$. За значенням $t_{кр}$ створюється довірчий інтервал:

$$b_i - t_{кр} \sigma_{b_i} < \beta_i < b_i + t_{кр} \sigma_{b_i}.$$

Зауважимо, що замість t -критерію для аналізу параметрів b_i можна застосовувати частинний F -критерій, оскільки він з кількістю ступенів вільності 1 і ν дорівнює t -критерію з ν ступенями вільності, піднесеному до квадрата: $F(1, \nu, \alpha) = (t(\nu, 1 - \alpha))^2$.

1.4. Гетероскедастичність, її тестування та вилучення

Серед основних припущень моделі класичної лінійної регресії є сталість дисперсії залишків: $\text{var}(e) = \sigma_{\text{зал}}^2 = \text{const}$ (*гомоскеда-*

стичність моделі). Якщо це припущення не задовольняється в якомусь окремому випадку (тобто дисперсія залишків нестала): $\text{var}(e) = \sigma_{\text{зал}}^2 \neq \text{const}$, то має місце *гетероскедастичність* моделі. Негативний вплив наявності гетероскедастичності на результати економетричного дослідження змушує тестувати й вилучати вказане явище.

Одним з ефективних методів виявлення гетероскедастичності в економетричній моделі є параметричний тест Голфелда–Квандта, застосування якого розглянемо на прикладі однофакторної моделі. З упорядкованої за зростанням значень x_i ($i = 1, \dots, n$) послідовності спостережуваних точок виключаємо c середніх точок, приймаючи $c \approx 4n/15$. Після цього ділимо послідовність, що залишилася, на дві рівні за обсягом підвибірки по $n_1 = n_2 = \frac{n-c}{2}$

точок у кожній за умови, що значення $n_1 = n_2$ перевищує кількість p оцінюваних параметрів у моделі. Для кожної з отриманих у такий спосіб підвбірок будуємо окрему лінійну економетричну модель $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ і розраховуємо відповідну суму квадратів залишків:

$\sum e_I^2$ – для підвбірки з малими значеннями x і $\sum e_{II}^2$ – для підвбірки з великими значеннями x . Ураховуючи однакову для обох сум кількість ступенів вільності $\left(\frac{n-c}{2} - p \right)$, F -відношення цих сум запишемо як

$$F_{\text{спост}} = \frac{\sum e_{II}^2}{\sum e_I^2}.$$

За таблицею F -розподілу Фішера для даного рівня значимості α та чисел ступенів вільності $k_1 = k_2 = (n-c-2p)/2$ знаходимо критичне значення F -критерію: $F_{\text{кр}} = F_{\alpha; k_1; k_2}$. Порівнявши зна-

чення $F_{\text{спост}}$ і $F_{\text{кр}}$, робимо висновок: якщо $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, вихідні дані задачі гетероскедастичні, в протилежному випадку – гомоскедастичні.

Економетрична модель, в якій наявна гетероскедастичність, має бути розглянута у трансформованому вигляді. За умови

$\sigma_{\text{зал}}^2 = k^2 x^2$ трансформована модель виду $\frac{y}{x} = b_0 \frac{1}{x} + b_1$ стає го-

москедастичною зі сталою залишковою дисперсією k^2 . Тому оцінювати параметри даної моделі необхідно за допомогою *узагальненого методу найменших квадратів* (метод Ейткена). Відповідно до цього методу звичайні параметри лінійної регресії визначають із системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} b_0 \sum \frac{1}{x} + b_1 = \sum \left(\frac{1}{x} \cdot y \right), \\ b_0 n + b_1 \sum x = \sum y. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержують формули для знаходження b_0 і b_1 :

$$b_0 = \frac{\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \cdot y_i \right) - \bar{y}}{\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 1}; \quad b_1 = \frac{\bar{y} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \cdot y_i \right)}{\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 1}.$$

1.5. Автокореляція залишків та її тестування

Одним з припущень класичного регресійного аналізу є незалежність залишків регресійної моделі. Якщо це припущення порушується, має місце взаємозв'язок послідовних значень залишків у часовому або просторовому ряді даних. Цей взаємозв'язок називають *автокореляцією* залишків (автокореляція також може бути

присутня в послідовностях значень інших елементів указаних рядів). Для перевірки економетричної моделі на наявність автокореляції залишків найчастіше застосовується тест Дарбіна–Уотсона, відповідно до якого розраховується спостережуване значення DW -статистики:

$$DW_{\text{спост}} = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}. \quad (1.35)$$

За таблицею критичних точок DW -розподілу, враховуючи заданий рівень значимості α , кількість спостережень n і кількість факторів m у моделі, визначають два критичних значення: нижню межу DW_L і верхню межу DW_U лівої зони невизначеності (рис. 1.2). Відповідні межі, але переставлені справа наліво, має права зона невизначеності: нижня її межа дорівнює $4 - DW_U$, а верхня $4 - DW_L$. Якщо значення $DW_{\text{спост}}$ належить одній із зон невизначеності, тобто

$$DW_L < DW_{\text{спост}} < DW_U \quad \text{або} \quad 4 - DW_U < DW_{\text{спост}} < 4 - DW_L,$$

даний тест не дає можливості зробити жодних конкретних висновків; потрібно продовжити дослідження, взявши більшу сукупність спостережень. Якщо виконуються нерівності

$$0 < DW_{\text{спост}} < DW_L \quad \text{або} \quad 4 - DW_L < DW_{\text{спост}} < 4,$$

це свідчить про наявність автокореляції (в першому випадку додатної, а в другому – від'ємної). Нарешті, якщо має місце співвідношення

$$DW_U < DW_{\text{спост}} < 4 - DW_U,$$

то автокореляція відсутня.

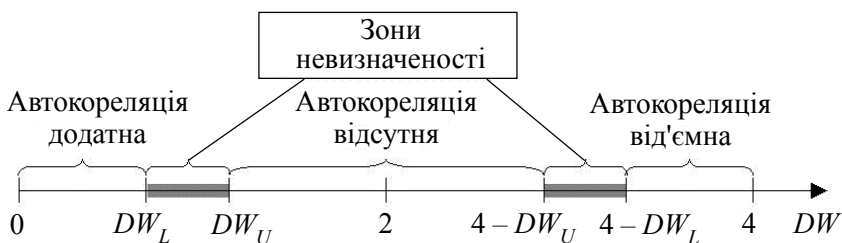


Рис. 1.2

1.6. Контрольні запитання

1. Що є інформаційною базою для побудови моделі простої лінійної регресії?

2. Запишіть рівняння простої лінійної регресії. Поясніть геометричний зміст параметрів цього рівняння.

3. Поясніть застосування МНК для визначення параметрів моделі простої лінійної регресії.

4. Запишіть формули для визначення параметрів b_0 і b_1 моделі простої лінійної регресії.

5. Назвіть основні властивості моделі простої лінійної регресії.

6. Визначення коефіцієнта кореляції та його основні властивості.

7. Опишіть, як здійснюється декомпозиція відхилення $y_i - \bar{y}$. Поясніть природу окремих складових цього відхилення.

8. Що таке коефіцієнт детермінації? Запишіть формулу, за якою він обчислюється.

9. Наведіть формули, за якими для даної вибіркової сукупності розраховуються суми квадратів SSR і SSE та відповідні середні квадрати MSR і MSE .

10. У чому полягає перевірка простої регресійної моделі на адекватність за допомогою F -критерію Фішера?

11. Як створюється інтервальна оцінка базових значень пояснюваної змінної у простій регресійній моделі?

12. Як здійснюється розрахунок точкових та інтервальних оцінок прогнозу в моделі простої лінійної регресії?

13. Дайте визначення коефіцієнта еластичності. Запишіть формулу, за якою він розраховується.

14. Як проводиться перевірка статистичної значимості параметрів простої лінійної регресії?

15. Опишіть алгоритм побудови довірчих інтервалів для параметрів простої регресійної моделі.

16. Наведіть приклади зведення нелінійних залежностей до лінійного виду.

17. Дайте визначення багатофакторної лінійної регресійної моделі. При яких основних припущеннях досліджується ця модель?

18. Запишіть послідовність формул, за якими розраховуються коефіцієнти парної кореляції для пар "фактор–фактор" і "фактор–пояснювана змінна".

19. У чому полягає суть явища мультиколінеарності факторів у багатофакторній регресійній моделі? Поясніть відмінність понять досконалої і недосконалої мультиколінеарності.

20. Як з'ясувати наявність загальної мультиколінеарності у регресійній моделі?

21. Як установити існування мультиколінеарності між одним з факторів і рештою пояснювальних змінних?

22. Що таке частинний коефіцієнт кореляції? Як виявляється пара факторів, в якій існує мультиколінеарність?

23. За яким методом складають систему рівнянь, з якої визначаються параметри багатофакторного регресійного рівняння? Запишіть цю систему.

24. Назвіть основні властивості багатофакторної регресійної моделі.

25. Дайте визначення коефіцієнта множинної кореляції. Запишіть формулу, за якою він розраховується.

26. Наведіть формули для коефіцієнта детермінації багатофакторної регресійної моделі та поясніть його використання для перевірки адекватності моделі.

27. Що таке оцінений коефіцієнт детермінації?

28. Опишіть зміст методу покрокової регресії та методу виключення, які використовуються при дослідженні багатофакторної економетричної моделі.

29. Як застосовують t -критерій та частинний F -критерій при

аналізі статистичної значимості параметрів у рівнянні багатофакторної регресії?

30. Поясніть зміст понять гомосkedастичності та гетеросkedастичності економетричної моделі.

31. Параметричний тест Голфелда–Квандта для виявлення гетеросkedастичності.

32. Запишіть систему рівнянь, з якої визначаються параметри лінійної регресії відповідно до узагальненого методу найменших квадратів.

33. Дайте визначення поняття автокореляції залишків.

34. Як з'ясовується наявність автокореляції залишків за допомогою тесту Дарбіна–Уотсона?

Розділ 2. ТИПОВІ ЗАВДАННЯ З КУРСУ І ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

2.1. Варіанти типових завдань

Для виконання завдання студент одержує від викладача номер варіанта і значення індивідуального параметра N , яке викладач вибирає з наступної послідовності: 1,1; 1,2; 1,3; ...; 9,8; 9,9; 10,0; 10,1; 10,2;

Задача 1. Побудова й аналіз моделі простої лінійної регресії

1.1. Для заданих емпіричних значень незалежного (пояснювального) економічного показника X і відповідних їм значень залежного (пояснюваного) показника Y знайти оцінки параметрів лінійної регресії та записати рівняння регресійної прямої.

1.2. Користуючись F -критерієм Фішера, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити адекватність побудованої моделі фактичним даним.

1.3. Для побудованої регресійної моделі знайти:

а) значення коефіцієнтів кореляції і детермінації (пояснити економічний зміст результатів);

б) довірчу зону базисних значень пояснюваної змінної (з надійністю $\gamma = 1 - \alpha$);

в) значення коефіцієнта еластичності для базисних значень пояснювальної змінної;

г) коефіцієнт кореляції та його інтервальну оцінку.

1.4. Користуючись t -критерієм Стюдента, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити статистичну значимість параметрів у рівнянні регресії; з надійністю $\gamma = 1 - \alpha$ знайти довірчі інтервали для параметрів, що визначають узагальнену лінійну залежність досліджуваних показників у генеральній сукупності даних.

1.5. Побудувати графіки фактичних даних і лінії регресії.

Варіант 0

X	36,5	27,4	33,1	29,0	25,2
Y	$3,5 + N$	$2,4 + N$	$3,5 + N$	$2,0 + N$	$1,6 + N$

Варіант 1

X	11	55	17	40	71	75
Y	$21 - N$	$32 - N$	$33 - N$	$28 - N$	$54 - N$	$63 - N$

Варіант 2

X	$34,2 - N$	$26,9 - N$	$34,6 - N$	$20,6 - N$	$28,3 - N$	$31,7 - N$	$38,2 - N$
Y	66	53	81	42	71	98	89

Варіант 3

X	18	13	34	31	39	71	53	73
Y	$29 + N$	$26 + N$	$32 + N$	$24 + N$	$57 + N$	$64 + N$	$43 + N$	$62 + N$

Варіант 4

X	$30 - N$	$35 - N$	$40 - N$	$50 - N$	$70 - N$	$38 - N$	$42 - N$	$47 - N$	$60 - N$
Y	7	8	11	14	20	9	12	13	17

Варіант 5

X	$1,36 + N$	$0,79 + N$	$0,63 + N$	$1,85 + N$	$2,24 + N$
Y	17,0	15,2	10,2	32,1	50,2

Варіант 6

X	4,0	1,3	2,1	1,8	2,8	2,7
Y	$35,2 - N$	$25,4 - N$	$32,6 - N$	$25,8 - N$	$34,8 - N$	$30,4 - N$

Варіант 7

X	$24,9 + N$	$36,4 + N$	$35,1 + N$	$18,3 + N$	$45,2 + N$	$28,2 + N$	$43,5 + N$
Y	48	57	56	49	71	42	87

Варіант 8

X	$13 - N$	$27 - N$	$19 - N$	$40 - N$	$42 - N$	$71 - N$	$82 - N$	$40 - N$
Y	21	33	25	29	57	63	64	43

Варіант 9

X	12	26	18	39	70	73	81	39	93
Y	$20 + N$	$32 + N$	$24 + N$	$29 + N$	$56 + N$	$49 + N$	$68 + N$	$41 + N$	$75 + N$

Задача 2. Застосування лінійної моделі у нелінійному випадку

2.1. Використовуючи задані (табл. 2.1) емпіричні значення деякого економічного показника Y , відповідні заданим значенням фактора X , знайти оцінки параметрів лінії регресії; вважати при цьому, що стохастична залежність між фактором X і показником Y має вигляд функції $\hat{y} = f(x)$, зазначеної у варіанті табл. 2.1. Записати рівняння лінії регресії.

2.2. Користуючись критерієм Фішера, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити адекватність побудованої моделі фактичним даним.

2.3. Знайти:

а) довірчу зону базисних значень пояснюваної змінної (з надійністю $\gamma = 1 - \alpha$);

б) точкову оцінку прогнозу для значення $x_p = 4,5 + 0,1N$;

в) інтервальну оцінку прогнозу (з надійністю γ);

г) значення коефіцієнта еластичності для базисних значень змінної x ;

д) коефіцієнт кореляції та його інтервальну оцінку.

2.4. Побудувати графіки фактичних даних і лінії регресії.

Задача 3. Лінійний регресійний аналіз квадратичної залежності

У табл. 2.2 наведені дані щодо кількості P_i одиниць товару, проданих за визначений період часу за ціною C_i , грн за одиницю.

Таблиця 2.1

Номер варіанта	$\hat{y} = f(x)$	x_i				
		2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0	$\hat{y} = \frac{1}{ax+b}$	2,26 + 0,1N	1,95 + 0,1N	1,81 + 0,1N	1,62 + 0,1N	1,51 + 0,1N
1	$\hat{y} = \frac{x}{ax+b}$	0,45N	0,48N	0,57N	0,59N	0,68N
2	$\hat{y} = \frac{a}{x} + b$	7,92N	7,41N	7,07N	6,65N	6,48N
3	$\hat{y} = ax^b$	0,91N	1,52N	2,73N	4,21N	6,45N
4	$\hat{y} = ab^x$	1,28N	2,17N	4,36N	8,29N	14,62N
5	$\hat{y} = a10^{bx}$	0,94N	1,83N	3,21N	5,51N	9,82N
6	$\hat{y} = ae^{bx}$	0,96N	2,12N	3,54N	6,70N	11,98N
7	$\hat{y} = a10^{\frac{b}{x}}$	5,72N	2,43N	1,51N	0,97N	0,79N
8	$\hat{y} = ae^{\frac{b}{x}}$	8,87N	3,79N	2,18N	1,21N	0,83N
9	$\hat{y} = \frac{1}{ae^x + b}$	1,65 + 0,1N	1,18 + 0,1N	0,74 + 0,1N	0,49 + 0,1N	0,30 + 0,1N

Таблиця 2.2

C_i	$3 + 0,1N$	$4 + 0,1N$	$5 + 0,1N$	$6 + 0,1N$	$7 + 0,1N$
P_i	$40,8 + N$	$39,7 + N$	$38,1 + N$	$39,0 + N$	$37,5 + N$
C_i	$8 + 0,1N$	$9 + 0,1N$	$10 + 0,1N$	$11 + 0,1N$	$12 + 0,1N$
P_i	$35,8 + N$	$35,1 + N$	$29,7 + N$	$27,7 + N$	$23,1 + N$

3.1. Припускаючи, що регресія попиту на даний товар має вигляд квадратичної функції $\hat{P} = b_0 + b_1C + b_2C^2$, знайти точкові оцінки параметрів цієї регресії.

3.2. Користуючись критерієм Фішера, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити адекватність побудованої моделі фактичним даним.

3.3. Знайти:

а) значення коефіцієнта еластичності для всіх значень C_i ;
 б) ціну товару (C_m), при якій обсяг продажів у грошовому вираженні буде максимальним (P_m);

в) точкові та інтервальні (з надійністю $\gamma = 1 - \alpha$) оцінки значень максимального обсягу продажів P_m і максимального прибутку $S_m = C_m P_m$.

3.4. Побудувати графіки фактичних даних і лінії регресії.

Задача 4. Багатофакторна лінійна регресія

4.1. Використовуючи задані фактичні значення деякого економічного показника Y , що залежить від трьох факторів X_1, X_2, X_3 , побудувати кореляційну матрицю.

4.2. Користуючись критерієм χ^2 , при рівні надійності $\gamma = 0,95$ установити наявність мультиколінеарності між факторами.

4.3. При виявленні загальної мультиколінеарності, за допомогою t -критерію Стюдента визначити наявність пар факторів, між якими існує мультиколінеарність (рівень надійності $\gamma = 0,95$). Якщо такі пари існують, то вказати, який з факторів у цих парах варто виключити з розгляду.

4.4. Для наведених фактичних даних – значень показника Y і факторів X_1, X_2, X_3 – за методом покрокової регресії побудувати лінійні економетричні моделі з одним і двома факторами, послідовно використовуючи фактори, що найбільше впливають на пояснюваний показник Y .

4.5. Для побудованих у п. 4.4 моделей визначити коефіцієнти простої та оціненої детермінації і множинної кореляції, після чого провести їхній порівняльний аналіз.

4.6. Використовуючи одержані коефіцієнти детермінації для обчислення F -відношення Фішера, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити адекватність побудованих у п. 4.4 моделей фактичним даним.

Варіант 0

X_1	6,5	7,6	8,7	9,6	10,5
X_2	9,2	10,1	12,3	18,4	15,8
X_3	2,0N	2,3N	2,6N	2,8N	3,0N
Y	$22 + 0,1N$	$26 + 0,1N$	$33 + 0,1N$	$46 + 0,1N$	$41 + 0,1N$

Варіант 1

X_1	11,6	10,1	12	10,4	12,2
X_2	1,9N	1,4N	2,8N	1,6N	2,5N
X_3	1,5	2,1	4,4	3,1	3,5
Y	$4,2 + 0,1N$	$2,9 + 0,1N$	$5,6 + 0,1N$	$3,4 + 0,1N$	$4,7 + 0,1N$

Варіант 2

X_1	1,8N	1,5N	1,3N	1,5N	1,9N
X_2	14,9	15,1	16,0	16,3	16,6
X_3	4,4	4,5	4,8	4,9	5,1
Y	$47 + 0,1N$	$42 + 0,1N$	$41 + 0,1N$	$44 + 0,1N$	$48 + 0,1N$

Варіант 3

X_1	5,4	6,6	8,6	7,6	9,5
X_2	8,2	9,1	11,3	17,5	14,8
X_3	2,9N	3,3N	3,6N	3,8N	4,0N
Y	$1,8 + 0,1N$	$2,6 + 0,1N$	$2,9 + 0,1N$	$4,2 + 0,1N$	$3,7 + 0,1N$

Варіант 4

X_1	12,6	12,8	14,1	14,2	16,0
X_2	3,0N	1,2N	3,3N	2,2N	2,8N
X_3	4,5	4,6	4,9	5,0	5,4
Y	$54 + 0,1N$	$33 + 0,1N$	$60 + 0,1N$	$38 + 0,1N$	$51 + 0,1N$

Варіант 5

X_1	2,8N	2,6N	2,3N	2,5N	2,9N
X_2	14,9	15,1	16,0	16,3	16,6
X_3	4,6	4,1	3,4	4,3	5,2
Y	6,7 + 0,1N	6,3 + 0,1N	6,1 + 0,1N	6,4 + 0,1N	6,9 + 0,1N

Варіант 6

X_1	1,9	2,3	2,6	2,8	3,1
X_2	0,9N	1,0N	1,2N	1,8N	1,6N
X_3	13,0	15,2	17,3	19,2	20,8
Y	43 + 0,1N	35 + 0,1N	42 + 0,1N	55 + 0,1N	50 + 0,1N

Варіант 7

X_1	13,4	12,2	13,9	11,0	12,7
X_2	7,0N	7,2N	7,8N	8,0N	8,9N
X_3	35	36	39	40	45
Y	5,1 + 0,1N	3,9 + 0,1N	5,4 + 0,1N	3,2 + 0,1N	4,7 + 0,1N

Варіант 8

X_1	4,9N	4,1N	5,6N	5,3N	6,2N
X_2	3,6	4,0	4,8	7,2	10,4
X_3	10,1	12,2	14,3	16,2	17,8
Y	29 + 0,1N	33 + 0,1N	41 + 0,1N	53 + 0,1N	48 + 0,1N

Варіант 9

X_1	7,5	7,6	7,8	7,9	8,0
X_2	15,1	14,0	13,6	14,7	15,8
X_3	5,7N	5,1N	4,9N	5,5N	6,0N
Y	9,7 + 0,1N	9,2 + 0,1N	9,1 + 0,1N	9,4 + 0,1N	9,8 + 0,1N

Задача 5. Проблема гетероскедастичності

5.1. У табл. 2.3 наведені дані, що характеризують залежності загального рівня доходів і відповідного йому рівня заощаджень, грн. За допомогою параметричного тесту Голфелда–Квандта перевірити гіпотезу про наявність гетероскедастичності в економетричній моделі, що описує зазначену залежність (рівень значимості $\alpha = 0,05$).

Таблиця 2.3

Місяць	Доход	Заощадження	Місяць	Доход	Заощадження
1	$21 + 0,1N$	$0,28N$	10	$28 + 0,1N$	$0,30N$
2	$21 + 0,1N$	$0,27N$	11	$70 + 0,1N$	$0,36N$
3	$22 + 0,1N$	$0,26N$	12	$74 + 0,1N$	$0,30N$
4	$23 + 0,1N$	$0,27N$	13	$78 + 0,1N$	$0,33N$
5	$23 + 0,1N$	$0,26N$	14	$86 + 0,1N$	$0,35N$
6	$24 + 0,1N$	$0,28N$	15	$91 + 0,1N$	$0,32N$
7	$25 + 0,1N$	$0,29N$	16	$96 + 0,1N$	$0,44N$
8	$26 + 0,1N$	$0,30N$	17	$101 + 0,1N$	$0,36N$
9	$26 + 0,1N$	$0,27N$	18	$106 + 0,1N$	$0,45N$

5.2. При наявності гетероскедастичності знайти оцінку параметрів економетричної моделі $\hat{y} = b_0 + b_1x$ за методом Ейткена.

5.3. Зробити економіко-математичний аналіз побудованої у п. 5.2 економетричної моделі.

Задача 6. Автокореляція в економетричній моделі

6.1. Задано динамічний ряд (див. с. 38–39), в якому для певних часових періодів I наведені значення двох економічних показників: фактора X і пояснюваного показника Y (вважати $K = 0,1N$). За методом найменших квадратів побудувати для зазначених даних лінійну економетричну модель.

6.2. Користуючись тестом Дарбіна–Уотсона, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ виявити наявність або відсутність автокореляції в побудованій моделі; при наявності автокореляції вказати її тип.

Задача 7. Проста лінійна регресія (завдання для контрольної, атестаційної або залікової роботи)

Для наведених вибірових емпіричних значень пояснювального економічного показника X і відповідних їм значень пояснюваного показника Y (див. с. 40–43) необхідно:

- 1) знайти оцінки параметрів b_1 і b_0 лінійної регресії та записати рівняння регресійної прямої;
- 2) розрахувати значення коефіцієнтів кореляції та детермінації;
- 3) користуючись F -критерієм Фішера, перевірити адекватність побудованої моделі фактичним даним (при рівні значимості $\alpha = 0,05$);

Варіант 0

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	5	7	6	4	7	8	9	7	6	5
Y	$7,0 + K$	$11,8 + K$	$13,1 + K$	$8,2 + K$	$18,6 + K$	$20,5 + K$	$22,4 + K$	$19,2 + K$	$22,0 + K$	$24,5 + K$

Варіант 1

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	8	7	6	4	7	8	9	7	6
Y	$21,8 + K$	$17,4 + K$	$18,1 + K$	$9,3 + K$	$19,1 + K$	$20,5 + K$	$24,8 + K$	$18,9 + K$	$16,2 + K$

Варіант 2

I	1	2	3	4	5	6	7	8
X	12	15	13	10	16	18	21	18
Y	$11,4 + K$	$14,3 + K$	$11,8 + K$	$10,8 + K$	$14,9 + K$	$19,1 + K$	$22,4 + K$	$13,4 + K$

Варіант 3

I	1	2	3	4	5	6	7
X	8	12	11	9	12	13	9
Y	$16,2 + K$	$18,7 + K$	$17,4 + K$	$16,3 + K$	$19,1 + K$	$20,7 + K$	$18,6 + K$

Варіант 4

I	1	2	3	4	5	6
X	8	12	9	7	10	11
Y	$16,2 + K$	$19,5 + K$	$20,6 + K$	$10,4 + K$	$19,2 + K$	$20,9 + K$

Варіант 5

<i>I</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>X</i>	5	7	6	4	7	8	11	7	6	10
<i>Y</i>	11,6 + <i>K</i>	18,7 + <i>K</i>	17,4 + <i>K</i>	16,3 + <i>K</i>	19,1 + <i>K</i>	20,5 + <i>K</i>	22,4 + <i>K</i>	21,3 + <i>K</i>	18,0 + <i>K</i>	24,5 + <i>K</i>

Варіант 6

<i>I</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>X</i>	4	7	6	5	7	8	6	11	9
<i>Y</i>	8,7 + <i>K</i>	16,3 + <i>K</i>	15,1 + <i>K</i>	12,7 + <i>K</i>	15,4 + <i>K</i>	19,5 + <i>K</i>	14,8 + <i>K</i>	27,2 + <i>K</i>	20,9 + <i>K</i>

Варіант 7

<i>I</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>X</i>	12	14	13	10	16	21	22	18
<i>Y</i>	10,6 + <i>K</i>	11,9 + <i>K</i>	12,0 + <i>K</i>	8,1 + <i>K</i>	16,3 + <i>K</i>	14,8 + <i>K</i>	22,9 + <i>K</i>	14,0 + <i>K</i>

Варіант 8

<i>I</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>X</i>	7	11	8	6	9	10	12
<i>Y</i>	13,9 + <i>K</i>	18,3 + <i>K</i>	16,8 + <i>K</i>	16,3 + <i>K</i>	19,7 + <i>K</i>	20,8 + <i>K</i>	22,0 + <i>K</i>

Варіант 9

<i>I</i>	1	2	3	4	5	6
<i>X</i>	5	7	6	4	7	8
<i>Y</i>	16,2 + <i>K</i>	18,7 + <i>K</i>	17,4 + <i>K</i>	16,3 + <i>K</i>	19,1 + <i>K</i>	20,5 + <i>K</i>

4) користуючись t -критерієм Стьюдента, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити статистичну значимість параметрів b_1 і b_0 рівняння регресії;

5) з надійністю $\gamma = 1 - \alpha$ знайти довірчі інтервали для параметрів b_1 і b_0 узагальненого рівняння регресії;

6) побудувати графіки фактичних даних і лінії регресії.

Варіант 1

X	36,5	27,4	33,1	29,0	25,2
Y	3,5	2,4	3,5	2,0	1,6

Варіант 2

X	11	55	17	40	71	75
Y	21	32	33	28	54	63

Варіант 3

X	34,2	26,9	34,6	20,6	28,3	31,7	38,2
Y	66	53	81	42	71	98	89

Варіант 4

X	18	13	34	31	39	71	53	73
Y	29	26	32	24	57	64	43	62

Варіант 5

X	30	35	40	50	70	38	42	47	60
Y	7	8	11	14	20	9	12	13	17

Варіант 6

X	1,36	0,79	0,63	1,85	2,24
Y	17,0	15,2	10,2	32,1	50,2

Варіант 7

X	4,0	1,3	2,1	1,8	2,8	2,7
Y	35,2	25,4	32,6	25,8	34,8	30,4

Варіант 8

X	24,9	36,4	35,1	18,3	45,2	28,2	43,5
Y	48	57	56	49	71	42	87

Варіант 9

<i>X</i>	13	27	19	40	42	71	82	40
<i>Y</i>	21	33	25	29	57	63	64	43

Варіант 10

<i>X</i>	12	26	18	39	70	73	81	39	93
<i>Y</i>	20	32	24	29	56	49	68	41	75

Варіант 11

<i>X</i>	24,9	36,4	35,1	26,3	45,2
<i>Y</i>	48	57	56	49	97

Варіант 12

<i>X</i>	30	35	40	50	70	38
<i>Y</i>	7	8	11	14	20	9

Варіант 13

<i>X</i>	2,20	1,85	1,50	1,21	0,99	0,79	0,68
<i>Y</i>	17,0	15,2	10,2	21,3	32,1	50,2	41,0

Варіант 14

<i>X</i>	78	81	92	85	80	57	84	52
<i>Y</i>	69	73	75	66	60	48	58	45

Варіант 15

<i>X</i>	23,4	30,7	31,5	24,3	38,2	24,6	37,9	23,6	27,7
<i>Y</i>	57	65	74	59	81	51	87	48	63

Варіант 16

<i>X</i>	33,2	24,7	28,9	17,5	38,4
<i>Y</i>	67	52	62	40	70

Варіант 17

<i>X</i>	35,2	25,4	22,6	15,8	25,8	30,4
<i>Y</i>	4,0	3,1	2,1	1,6	2,8	2,7

Варіант 18

<i>X</i>	9	20	40	34	73	84	79
<i>Y</i>	18	24	39	25	58	65	63

Варіант 19

<i>X</i>	23,3	30,1	31,0	24,0	36,9	24,1	36,8	21,2
<i>Y</i>	55	64	73	58	79	49	85	46

Варіант 20

<i>X</i>	12	18	29	33	65	74	83	41	84
<i>Y</i>	25	33	35	29	55	63	67	46	68

Варіант 21

<i>X</i>	29,2	26,9	27,6	14,3	11,4
<i>Y</i>	4,1	3,0	3,8	1,7	0,8

Варіант 22

<i>X</i>	15	18	25	33	71	72
<i>Y</i>	21	35	33	22	52	60

Варіант 23

<i>X</i>	35,0	27,5	35,1	26,5	38,6	52,6	48,6
<i>Y</i>	68	54	84	41	72	92	90

Варіант 24

<i>X</i>	14	20	28	23	16	38	21	25
<i>Y</i>	75	85	92	88	72	99	87	89

Варіант 25

<i>X</i>	11	21	28	31	71	71	77	82	91
<i>Y</i>	19	29	31	20	50	58	65	61	71

Варіант 26

<i>X</i>	11	24	33	27	14
<i>Y</i>	75	85	92	88	72

Варіант 27

<i>X</i>	28,2	25,0	12,6	22,8	27,8	14,8
<i>Y</i>	4,0	3,7	1,8	1,8	3,9	1,3

Варіант 28

<i>X</i>	33,0	24,9	35,2	30,0	28,6	31,0	19,6
<i>Y</i>	67	52	80	71	56	84	43

Варіант 29

<i>X</i>	20	27	38	25	16	41	32	35
<i>Y</i>	75	85	92	88	72	99	87	89

Варіант 30

<i>X</i>	30	36	50	66	58	74	61	42	13
<i>Y</i>	42	70	66	44	71	90	94	56	18

Варіант 31

<i>X</i>	5,8	10,3	4,1	1,2	8,5
<i>Y</i>	20,5	41,7	19,4	11,8	39,4

Варіант 32

<i>X</i>	38	25	16	41	32	35
<i>Y</i>	92	88	72	99	87	89

Варіант 33

<i>X</i>	24,5	31,1	15,3	31,0	36,0	18,7	34,2
<i>Y</i>	1,2	3,0	1,0	2,9	4,3	1,0	3,6

Варіант 34

<i>X</i>	7	13	9	20	22	35	41	20
<i>Y</i>	10	16	12	15	27	30	32	22

Варіант 35

<i>X</i>	3,5	5,2	12,7	2,9	9,6	5,8	10,3	4,1	1,2
<i>Y</i>	16,4	25,3	48,7	11,8	34,9	20,5	41,7	19,4	6,8

2.2. Зразки розв'язання задач

Задача 1 (проста лінійна регресія). Працівники відділу маркетингу кондитерської фабрики, оцінюючи ефективність рекламної діяльності свого підприємства, зафіксували в 10 регіонах протягом однакового періоду часу витрати на рекламу *X*, тис. грн, та обсяг продажів своєї продукції *Y*, млн одиниць. Спостережені при цьому дані наведені в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

<i>X</i>	10	21	26	33	72	81	57	84	93	98
<i>Y</i>	20	27	32	22	50	57	42	64	71	75

1.1. У припущенні, що регресійна залежність змінної *y* від *x* має лінійний вид, знайти оцінки параметрів лінії регресії й записати рівняння цієї лінії.

Розв'язання. Шукані оцінки вказаних параметрів знайдемо за формулами (1.2); результати всіх потрібних розрахунків зведемо до стовпців 2–6 табл. 2.5.

Таблиця 2.5

<i>i</i>	<i>x_i</i>	<i>y_i</i>	<i>x_i²</i>	<i>x_iy_i</i>	<i>y_i²</i>	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	20	100	200	400	17,067	8,6047	837,1404
2	21	27	441	567	729	23,767	10,4524	494,3071
3	26	32	676	832	1024	26,813	26,9091	368,1563
4	33	22	1089	726	484	31,076	82,3823	222,7118
5	72	50	5184	3600	2500	54,832	23,3511	78,0094
6	81	57	6561	4617	3249	60,314	10,9853	204,9023
7	57	42	3249	2394	1764	45,695	13,6563	0,0928
8	84	64	7056	5376	4096	62,142	3,4530	260,5571
9	93	71	8649	6603	5041	67,624	11,3981	467,5928
10	98	75	9604	7350	5625	70,670	18,7531	608,5848
Σ	575	460	42609	32265	24912	460,000	209,9453	3542,0547
$\frac{1}{n} \sum$	57,5	46,0	4260,9	3226,5	2491,2	—	—	—

Підставивши розраховані дані у формули (1.2), отримаємо

$$b_1 = \frac{3226,5 - 57,5 \cdot 46}{4260,9 - (57,5)^2} = 0,609;$$

$$b_0 = \frac{4260,9 \cdot 46 - 3226,5 \cdot 57,5}{4260,9 - (57,5)^2} = 10,975.$$

Перевіримо, чи правильним є знайдене значення b_0 :

$$b_0 = 46 - 0,609 \cdot 57,5 = 10,975.$$

Рівняння регресії набуває вигляду $\hat{y} = 10,975 + 0,609x$.

Після цього в табл. 2.5 заповнюємо стовпці 7, 8 і 9. Зауважимо, що дані стовпців 6, 8 і 9 будуть потрібні при розгляді пп. 1.3 і 1.4.

1.2. Побудувати графіки сукупності фактичних даних і лінії регресії (рис. 2.1).

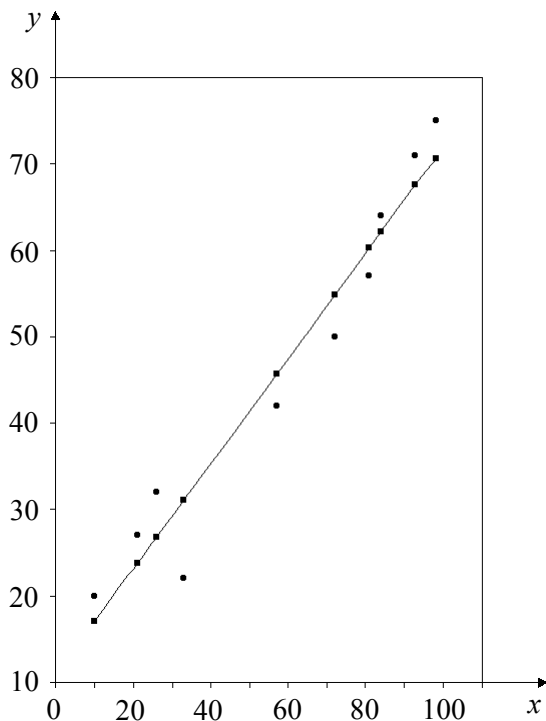


Рис. 2.1. Лінійна регресія $\hat{y}_x = b_0 + b_1x$:

■ — лінія регресії; • • • — фактичні дані

1.3. Для побудованої регресійної моделі знайти коефіцієнти кореляції та детермінації; пояснити їх економічний зміст.

Розв'язання. Визначимо спочатку середньоквадратичні відхилення змінних x та y :

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{4260,9}{10} - 57,5^2 = 954,65;$$

$$\text{var}(y) = \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\bar{y})^2 = \frac{2491,2}{10} - 46^2 = 375,2 ;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{954,65} = 30,90 ; \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{375,2} = 19,37 .$$

Тоді відповідно до формули (1.3)

$$r = 0,609 \cdot \frac{30,90}{19,37} = 0,972 .$$

Знайдене значення за табл. 1.1 свідчить про тісний (сильний) кореляційний зв'язок змінних x та y , тобто про значну лінійну регресійну залежність обсягу продажів від витрат на рекламу.

За формулою $R^2 = r^2$ знаходимо коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = (0,972)^2 = 0,944 .$$

Зміст одержаного значення полягає в тому, що 94,4 % загальної варіації змінної y пояснюється регресією (залежністю обсягу продажів від витрат на рекламу), а інша частина (5,6 %) указаной варіації є непояснюваною частиною, яка обумовлена неврахованими в даній задачі випадковими факторами.

1.4. Користуючись F -критерієм Фішера, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити адекватність регресійної моделі фактичним даним.

Розв'язання. Спостережуване значення F -критерію обчислимо відповідно до формули (1.8), де $n = 10$ і $m = 1$:

$$F_{\text{спост}} = \left(\frac{3542,0547}{1} \right) / \left(\frac{209,9453}{8} \right) = 134,97 .$$

З таблиці критичних значень F -розподілу для даних значень $\alpha = 0,05$, $k_1 = m = 1$ і $k_2 = n - m - 1 = 8$ знайдемо $F_{\text{кр}} = F_{0,05; 1; 8} = 5,32$. Ураховуючи нерівність $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, відзначимо, що побудована модель адекватна фактичним даним.

1.5. З надійністю $\gamma = 1 - \alpha$ визначити довірчу зону для базисних значень пояснюваної змінної y .

Розв'язання. З таблиці критичних значень t -розподілу для $\gamma = 0,95$ і $k = n - 2 = 8$ отримаємо $t_{кр} = 2,306$. Знайшовши за форму-

лою (1.7) виправлену дисперсію залишків $\sigma_e^2 = \frac{209,9453}{8} = 26,2432$, відхилення базисних значень змінної y визначимо за формулою (1.9):

$$\sigma_e = \sqrt{26,2432} = 5,12 ;$$

$$\Delta y_1 = 2,306 \cdot 5,12 \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{2256,25}{9546,5}} = 6,851$$

і т. д. (див. стовпець 5 табл. 2.6). Після цього за формулами (1.10) знайдемо межі довірчих інтервалів для кожного з базисних значень змінної y :

$$\hat{y}_{1\min} = 17,067 - 6,851 = 10,216, \quad \hat{y}_{1\max} = 17,067 + 6,851 = 23,918$$

і т. д. (див. стовпці 6 і 7 табл. 2.6).

Таблиця 2.6

i	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	Δy_i	$y_{\min}$	$y_{\max}$	$k_{\text{ел}}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	20	17,067	6,851	10,216	23,918	0,36	2256,25
2	21	27	23,767	5,782	17,985	29,549	0,54	1332,25
3	26	32	26,813	5,335	21,478	32,147	0,59	992,25
4	33	22	31,076	4,768	26,309	35,844	0,65	600,25
5	72	50	54,832	4,127	50,706	58,959	0,80	210,25
6	81	57	60,314	4,693	55,621	65,008	0,82	552,25
7	57	42	45,695	3,736	41,959	49,432	0,76	0,25
8	84	64	62,142	4,921	57,220	67,063	0,82	702,25
9	93	71	67,624	5,690	61,934	73,314	0,84	1260,25
10	98	75	70,670	6,159	64,511	76,828	0,84	1640,25
Σ	575	460	460,000	—	—	—	—	9546,50

1.6. Для базисних значень змінної x розрахувати значення коефіцієнта еластичності $k_{\text{ел}}$.

Розв'язання. У формулу (1.13) підставимо похідну $\hat{y}' = b_1$ і одержимо $k_{\text{ел}} = \frac{b_1 x}{\hat{y}}$. Користуючись цим виразом, для всіх x_i послідовно маємо:

$$k_{\text{ел},1} = \frac{0,609 \cdot 10}{17,067} = 0,36$$

і т. д. (див. стовпець 8 табл. 2.6).

1.7. Користуючись t -критерієм Стьюдента, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити статистичну значимість параметрів b_1 і b_0 рівняння регресії і знайти з надійністю $\gamma = 1 - \alpha$ довірчі інтервали для параметрів β_1 і β_0 , що визначають узагальнену лінійну залежність змінних x та y в генеральній сукупності даних.

Розв'язання. Знайшовши за формулами (1.14) дисперсії $\sigma_{b_1}^2$ і $\sigma_{b_0}^2$, відповідно до формул (1.15) обчислимо середньоквадратичні відхилення параметрів b_1 і b_0 (значення $\sigma_e^2 = 26,2432$, потрібне для формул (1.14), розраховане в п. 1.5):

$$\sigma_{b_1}^2 = 26,2432 \cdot \frac{1}{9546,5} = 0,0027; \quad \sigma_{b_1} = \sqrt{0,0027} = 0,05;$$

$$\sigma_{b_0}^2 = 26,2432 \cdot \frac{42609}{10 \cdot 9546,5} = 11,7131; \quad \sigma_{b_0} = \sqrt{11,7131} = 3,42.$$

Потім за формулами (1.16) знайдемо спостережувані значення t -статистики:

$$t_1 = \frac{0,609}{0,05} = 11,618; \quad t_0 = \frac{10,975}{3,42} = 3,207.$$

Як і в п. 1.5, критичне значення t -критерію $t_{\text{кр}} = t_{0,95;8} = 2,306$.

Порівнюючи t_0 і t_1 зі значенням $t_{кр}$, бачимо, що значення t_0 і t_1 перевищують $t_{кр}$. Тому робимо висновок про статистичну значимість обох параметрів рівняння регресії.

Обчислюємо величини граничних відхилень:

$$\delta_1 = t_{кр} \sigma_{b_1} = 2,306 \cdot 0,05 = 0,121;$$

$$\delta_0 = t_{кр} \sigma_{b_0} = 2,306 \cdot 3,42 = 7,892.$$

За формулами (1.17) знаходимо межі довірчих інтервалів для параметрів β_1 і β_0 :

$$\beta_{1\min} = 0,609 - 0,121 = 0,488; \quad \beta_{1\max} = 0,609 + 0,121 = 0,730;$$

$$\beta_{0\min} = 10,975 - 7,892 = 3,083; \quad \beta_{0\max} = 10,975 + 7,892 = 18,867.$$

Таким чином, з надійністю $\gamma = 0,95$ можна стверджувати, що значення параметрів β_1 і β_0 узагальненої регресійної моделі належать наступним довірчим інтервалам:

$$0,488 < \beta_1 < 0,730; \quad 3,083 < \beta_0 < 18,867.$$

Задача 2 (лінійна регресія для нелінійного зв'язку змінних).

Задано сукупність пар емпіричних значень двох економічних показників: незалежного (пояснювального) X і залежного (пояснюваного) Y (табл. 2.7). Для показника X задане прогнозоване значення x_p . Припускається, що залежність між фактором X і показником Y має вигляд функції $\hat{y} = f(x)$.

Таблиця 2.7

$\hat{y} = \frac{1}{ax^2 + b}$	x_i	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	$x_p = 4,71$
	y_i	1,40	0,86	0,69	0,47	0,38	

2.1. Використовуючи допоміжні змінні для зведення запропонованої нелінійної регресійної моделі до лінійного виду, знайти оцінки параметрів лінії регресії.

Розв'язання. Введемо допоміжні змінні $u = x^2$, $z = 1/y$ і за-

пишемо модель простої лінійної регресії у вигляді $\hat{z} = b_0 + b_1 u$, де $b_0 = b$, $b_1 = a$. Знайдемо параметри цієї моделі за методом найменших квадратів, який дозволяє визначити вказані параметри за наступними формулами, що є аналогами формул (1.2):

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i z_i - \bar{u} \cdot \bar{z}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 - (\bar{u})^2}; \quad b_0 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 \cdot \bar{z} - \bar{u} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i z_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 - (\bar{u})^2}. \quad (2.1)$$

Перед використанням формул (2.1) варто обчислити середні значення $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$, $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$, а після розрахунку параметрів регресії перевірити знайдене значення b_0 за формулою $b_0 = \bar{z} - b_1 \bar{u}$.

Основні результати розрахунків запишемо у табл. 2.8.

Таблиця 2.8

i	x	y	$u = x^2$	$z = 1/y$	u^2	uz	$\hat{z}$	$(z - \hat{z})^2$	$(\hat{z} - \bar{z})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,0	1,40	4,00	0,7143	16,0000	2,8571	0,7381	0,00057	0,7727
2	2,5	0,86	6,25	1,1628	39,0625	7,2674	1,0977	0,00424	0,2698
3	3,0	0,69	9,00	1,4493	81,0000	13,0435	1,5372	0,00773	0,0064
4	3,5	0,47	12,25	2,1277	150,0625	26,0638	2,0566	0,00504	0,1932
5	4,0	0,38	16,00	2,6316	256,0000	42,1053	2,6560	0,00060	1,0792
Σ	15,0	3,80	47,50	8,0856	542,1250	91,3372	8,0856	0,01818	2,3213
$\frac{1}{n} \Sigma$	3,0	0,76	9,50	1,6171	108,4250	18,2674	1,6171	—	—

Стовпці 8–10 табл. 2.8 заповнюємо після визначення за формулами (2.1) значень b_1 і b_0 і запису на основі цих значень рівняння регресії:

$$b_1 = \frac{18,267 - 9,5 \cdot 1,617}{108,425 - (9,5)^2} = 0,1598;$$

$$b_0 = \frac{108,425 \cdot 1,617 - 18,267 \cdot 9,5}{108,425 - (9,5)^2} = 0,0988;$$

$$\hat{z} = 0,0988 + 0,1598 u.$$

Перевіримо правильність знайденого значення b_0 :

$$b_0 = 1,6171 - 0,1598 \cdot 9,5 = 0,0988.$$

Повертаючись до вихідних змінних, рівняння регресії запишемо наступним чином:

$$\hat{y} = \frac{1}{0,0221 x^2 + 0,3466}. \quad (2.2)$$

2.2. Користуючись F -критерієм Фішера, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити адекватність побудованої моделі фактичним даним.

Розв'язання. Визначаємо спостережуване і критичне значення F -критерію:

$$F_{\text{спост}} = \frac{MSR}{MSE} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - \bar{z})^2}{m} \right) / \left(\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2}{n - m - 1} \right) =$$

$$= \frac{2,3213}{1} \cdot \frac{0,01818}{3} = 383,13;$$

$$F_{\text{кр}} = F_{0,95; 1; 3} = 10,13.$$

Оскільки $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, можна зробити висновок про адекватність побудованої моделі фактичним даним.

2.3. З надійністю $\gamma = 0,95$ знайти довірчу зону фактичних даних.

Розв'язання. У таблиці критичних точок t -розподілу Стюдента для числа ступенів вільності виберемо критичне значення $t_{\text{кр}} = t_{0,95;3} = 3,182$. Починаючи з побудови довірчих інтервалів для значень допоміжної змінної z_i і враховуючи формули (1.9), обчислимо значення σ_e :

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{0,01818}{3}} = 0,078.$$

За формулою $\Delta z_j = t_{\text{кр}} \sigma_e \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(u_j - \bar{u})^2}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}}$ послідовно роз-

раховуємо значення Δz_i ($\Delta z_1 = 3,182 \cdot 0,078 \cdot \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{30,250}{90,875}} = 0,181$

і т. д.) та межі довірчих інтервалів для значень z_i ($\hat{z}_{i \min} = \bar{z}_i - \Delta z_i$; $\hat{z}_{i \max} = \bar{z}_i + \Delta z_i$). Після цього повертаємось до початкової змінної y і знаходимо значення $\hat{y}_{i \min}$ та $\hat{y}_{i \max}$:

$$\hat{y}_{i \min} = \frac{1}{\bar{z}_i + \Delta z_i}; \quad \hat{y}_{i \max} = \frac{1}{\bar{z}_i - \Delta z_i}.$$

Таким чином одержуємо відповідний довірчий інтервал

$$\hat{y}_{i \min} < y_i < \hat{y}_{i \max}.$$

Результати розрахунків, у тому числі значення $\hat{y}$, обчислені відповідно до рівняння (2.2), заносимо до стовпців 4–9 табл. 2.9.

Таблиця 2.9

x	$(u - \bar{u})^2$	$\hat{z}$	Δz	$\hat{z} - \Delta z$	$\hat{z} + \Delta z$	$\hat{y}$	$\hat{y}_{\min}$	$\hat{y}_{\max}$	$k_{\text{ел}}$	$(z - \bar{z})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2,0	30,2500	0,7381	0,181	0,557	0,919	1,35	1,088	1,794	-1,73	0,8151
2,5	10,5625	1,0977	0,139	0,958	1,237	0,91	0,808	1,043	-1,82	0,2064
3,0	0,2500	1,5372	0,112	1,426	1,649	0,65	0,607	0,701	-1,87	0,0282
3,5	7,5625	2,0566	0,132	1,925	2,188	0,49	0,457	0,520	-1,90	0,2607
4,0	42,2500	2,6560	0,202	2,454	2,858	0,38	0,350	0,407	-1,93	1,0291
Σ	90,8750	—	—	—	—	—	—	—	—	2,3395

2.4. 3 надійністю $\gamma = 0,95$ знайти точкову та інтервальну оцінки прогнозу для заданого значення x_p .

Розв'язання. Визначення точкової оцінки прогнозу ґрунтується на прогнозованому значенні

$$z_p = b_0 + b_1 x_p^2 = 0,0988 + 0,1598 \cdot (4,71)^2 = 3,644.$$

Для інтервальної оцінки прогнозу за аналогічною з (1.11) формулою обчислюємо величину Δz_p :

$$\begin{aligned} \Delta z_p &= t_{\text{кр}} \sigma_e \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(u_p - \bar{u})^2}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}} = \\ &= 3,182 \cdot 0,078 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{5} + \frac{160,89}{90,88}} = 0,427. \end{aligned}$$

Це дозволяє записати довірчий інтервал для z_p : $3,217 < z_p < 4,071$. Тепер знаходимо прогнозоване значення $y_p = \frac{1}{3,644} = 0,274$ і межі довірчого інтервалу для y_p :

$$y_{p\min} = \frac{1}{4,071} = 0,246; \quad y_{p\max} = \frac{1}{3,217} = 0,311.$$

Шуканий довірчий інтервал $0,246 < y_p < 0,311$.

2.5. Для наведених фактичних даних і прогнозованого значення x_p знайти відповідні значення коефіцієнта еластичності.

Розв'язання. Підставимо похідну функції $\hat{y}$ у формулу (1.13)

і отримаємо для $k_{\text{ел}}$ наступний вираз: $k_{\text{ел}} = \frac{-2ax^2}{ax^2 + b} = -2ax^2\hat{y}$. Те-

пер визначимо величину коефіцієнта еластичності для всіх значень x_i і значення x_p :

$$k_{\text{ел},1} = -2 \cdot 0,1598 \cdot 2^2 \cdot 1,35 = -1,73$$

і т. д. (див. табл. 2.9, стовпець 10);

$$k_{\text{ел},p} = -2 \cdot 0,1598 \cdot (4,71)^2 \cdot 0,274 = -1,95.$$

2.6. Для побудованої регресійної моделі знайти коефіцієнт кореляції та його інтервальну оцінку.

Розв'язання. Коефіцієнт кореляції та його інтервальна оцінка визначаються за формулами (1.6) і (1.12):

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{1 - \frac{0,01818}{2,3395}} = 0,9961;$$

$$\sigma_r = \frac{1 - 0,9961}{5} = 0,0008;$$

$$\Delta r = 3,182 \cdot 0,0008 = 0,0025;$$

$$0,9936 < r < 0,9986.$$

2.7. Побудувати графіки сукупності фактичних даних і лінії регресії (рис. 2.2).

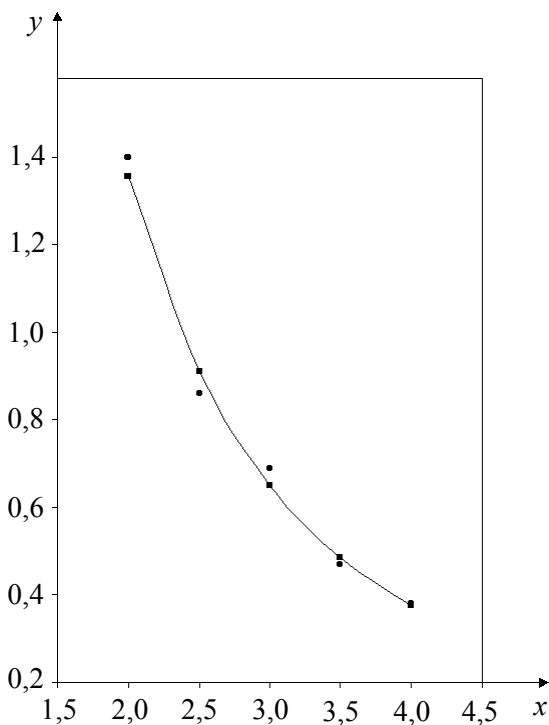


Рис. 2.2. Нелінійна регресія $\hat{y}_x = \frac{1}{b_1 x^2 + b_0}$:

■ — ■ — ■ — лінія регресії; • • • — фактичні дані

Задача 3 (регресійний аналіз виробничої функції). Спостереження за розвитком певної галузі промисловості протягом десяти років виявили залежність обсягу виробленої продукції y , тис. грн, від обсягу витраченого основного капіталу C , тис. грн, та обсягу витрат праці L , тис. грн. Відповідні дані наведені у табл. 2.10.

Таблиця 2.10

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_i	9,242	14,131	17,772	19,511	20,562	18,032	18,870	21,143	20,318	19,145
L_i	3,410	3,795	3,525	3,860	3,620	3,955	3,740	4,015	3,835	4,130
y_i	7,840	8,984	8,879	9,943	10,447	9,531	9,654	11,030	10,458	10,115

3.1. Ураховуючи дані табл. 2.10, визначити регресійні числові параметри виробничої функції Кобба–Дугласа $\hat{y} = \gamma C^\alpha L^\beta$ за припущеннями $\gamma > 0$; $\alpha, \beta \geq 0$; $\alpha + \beta = 1$.

Розв'язання. Взнявши до уваги співвідношення $\alpha + \beta = 1$, виконуємо наступне перетворення вказаної функції:

$$\hat{y} = \gamma C^\alpha L^{1-\alpha} = \gamma \left(\frac{C}{L} \right)^\alpha L; \quad \frac{\hat{y}}{L} = \gamma \left(\frac{C}{L} \right)^\alpha.$$

Якщо ввести допоміжні змінні $\frac{\hat{y}}{L} = \hat{w}$, $\frac{C}{L} = x$, одержимо показникову функцію $\hat{w} = \gamma x^\alpha$, яка після логарифмування і ще однієї заміни змінних зводиться до простої лінійної регресії, що пояснює залежність допоміжних змінних u та z :

$$\ln \hat{w} = \ln \gamma + \alpha \ln x,$$

$$\hat{z} = b_0 + b_1 u \quad (\hat{z} = \ln \hat{w}, \quad u = \ln x, \quad b_0 = \ln \gamma, \quad b_1 = \alpha).$$

Після заповнення стовпців 2–8 табл. 2.11 параметри цієї регресії знайдемо за формулами (2.1):

$$b_1 = \frac{1,443 - 1,528 \cdot 0,936}{2,380 - (1,528)^2} = 0,2708;$$

$$b_0 = \frac{2,38 \cdot 0,936 - 1,443 \cdot 1,528}{2,380 - (1,528)^2} = 0,5223.$$

Таким чином, узказана регресійна залежність набуває вигляду

$$\hat{z} = 0,5223 + 0,2708 u.$$

Ураховуючи зроблені заміни, зауважимо, що наведене співвідношення пояснює залежність величин $\ln \frac{\hat{y}}{L}$ і $\ln \frac{C}{L}$. Далі зна-

Таблица 2.11

i	L	C	γ	$u = \ln \frac{C}{L}$	$z = \ln \frac{\gamma}{L}$	u^2	uz	$\hat{z}$	$(z - \bar{z})^2$	$(\hat{z} - \bar{z})^2$	$\bar{\gamma}$	$(\gamma - \bar{\gamma})^2$	$(\hat{\gamma} - \bar{\gamma})^2$	$(\gamma - \bar{\gamma})^2$	$(u - \bar{u})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3,410	9,242	7,840	0,9970	0,8325	0,9941	0,8301	0,7922	0,00162	0,02071	7,530	0,0958	4,6529	3,4155	0,2824
2	3,795	14,131	8,984	1,3147	0,8618	1,7284	1,1329	0,8783	0,00027	0,00335	9,133	0,0223	0,3070	0,4958	0,0457
3	3,525	17,772	8,879	1,6177	0,9238	2,6171	1,4945	0,9603	0,00133	0,00058	9,209	0,1090	0,2288	0,6546	0,0080
4	3,860	19,511	9,943	1,6203	0,9462	2,6254	1,5331	0,9610	0,00022	0,00062	10,091	0,0220	0,1631	0,0650	0,0084
5	3,620	20,562	10,447	1,7370	1,0598	3,0171	1,8409	0,9926	0,00452	0,00319	9,768	0,4614	0,0064	0,5759	0,0435
6	3,955	18,032	9,531	1,5172	0,8796	2,3018	1,3345	0,9331	0,00286	0,00001	10,055	0,2746	0,1350	0,0247	0,0001
7	3,740	18,870	9,654	1,6185	0,9483	2,6195	1,5348	0,9605	0,00015	0,00059	9,773	0,0141	0,0073	0,0012	0,0081
8	4,015	21,143	11,030	1,6613	1,0106	2,7598	1,6789	0,9721	0,00148	0,00129	10,614	0,1733	0,8578	1,8007	0,0176
9	3,835	20,318	10,458	1,6673	1,0032	2,7800	1,6727	0,9738	0,00087	0,00141	10,155	0,0921	0,2181	0,5927	0,0193
10	4,130	19,145	10,115	1,5338	0,8957	2,3524	1,3739	0,9376	0,00175	0,00000	10,547	0,1868	0,7390	0,1822	0,0000
Σ	—	—	96,881	15,2848	9,3615	23,7956	14,4262	9,3615	0,01508	0,03176	96,876	1,4515	7,3154	7,8083	0,4332
$\frac{1}{n} \Sigma$	—	—	—	1,5285	0,9362	2,3796	1,4426	—	—	—	—	—	—	—	—

ходимо значення $\gamma = e^{0,522} = 1,686$; $\alpha = 0,271$; $\beta = 1 - 0,271 = 0,729$ і, повертаючись до початкових змінних, записуємо відповідне двофакторне регресійне рівняння:

$$\hat{y} = 1,686 \cdot C^{0,271} L^{0,729}.$$

Після цього у табл. 2.11 заповнюємо стовпці 9–15; підраховані в них результати будуть потрібні у пп. 3.2–3.4 цієї задачі.

3.2. Для побудованих у п. 3.1 моделей простої і двофакторної регресій знайти простий та оцінений коефіцієнти детермінації й відповідні коефіцієнти кореляції.

Розв'язання. Для визначення вказаних коефіцієнтів скористаємося формулами (1.6), (1.30) і (1.34). Для моделі $\hat{z} = \varphi(u)$

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - \bar{z})^2}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} = \frac{0,03176}{0,04684} = 0,6781;$$

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,6781} = 0,82;$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0,6781) \frac{9}{8} = 0,6378.$$

Для моделі $\hat{y} = f(C, L)$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{1,4515}{7,8083} = 0,8141;$$

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,8141} = 0,90;$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0,8141) \frac{9}{7} = 0,7610.$$

Підкреслимо при цьому, що знайдене для вказаної двофакторної моделі значення r є величиною множинного коефіцієнта кореляції, який служить мірою кореляційного зв'язку між фактичними y і регресійними $\hat{y}$ значеннями пояснюваної змінної.

3.3. Здійснити перевірку адекватності одержаних регресійних моделей фактичним даним, користуючись критерієм Фішера при рівні значимості $\alpha = 0,05$.

Розв'язання. Враховуючи число спостережуваних точок $n = 10$ і число факторів $m = 1$, для моделі $\hat{z} = \varphi(u)$ одержимо

$$MSR = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - \bar{z})^2}{m} = 0,0318;$$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2}{n-m-1} = \frac{0,0151}{10-2} = 0,0019;$$

$$F_{\text{спост}} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{0,0318}{0,0019} = 16,85.$$

Те ж саме значення можна розрахувати за формулою (1.31):

$$F_{\text{спост}} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,6781}{1-0,6781} \cdot \frac{8}{1} = 16,85.$$

За таблицею F -розподілу для рівня значимості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів вільності $k_1 = m = 1$ і $k_2 = n - m - 1 = 8$ знаходимо значення $F_{кр} = F_{0,95;1;8} = 5,32$. Оскільки $F_{спост} > F_{кр}$, робимо висновок про те, що побудована модель є адекватною фактичним даним.

Для моделі $\hat{y} = f(C, L)$ при $m = 2$

$$MSR = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\bar{y}})^2}{m} = \frac{7,3154}{2} = 3,658;$$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1} = \frac{1,4515}{10 - 3} = 0,207;$$

$$F_{спост} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{3,658}{0,207} = 17,64.$$

Дещо інше спостережуване значення F -критерію одержуємо за формулою (1.31):

$$F_{спост} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,8141}{1 - 0,8141} \cdot \frac{7}{2} = 15,33.$$

Порівнюючи $F_{спост}$ з критичним значенням F -критерію (для рівня значимості $\alpha = 0,05$; числа ступенів вільності $k_1 = m = 2$ та $k_2 = n - m - 1 = 7$) $F_{кр} = F_{0,95;2;7} = 4,74$, з'ясовуємо наступне: незалежно від способу розрахунку спостережуваного значення $F_{спост}$ перевищує значення $F_{кр}$, що свідчить про адекватність зазначеної моделі фактичним даним.

3.4. Спрогнозувати річний обсяг виробленої продукції, якщо запланований обсяг витрат основного капіталу $C_p = 25$ тис. грн,

а обсяг витрат праці $L_p = 4,5$ тис. грн. Визначити також інтервальну оцінку цього прогнозу при рівні надійності $\gamma = 0,95$.

Розв'язання. Підставивши дані C_p і L_p у рівняння регресії, отримуємо точковий прогноз: $y_p = 1,686 \cdot 25^{0,271} 4,5^{0,729} = 12,069$.

Знайдемо довірчий інтервал для цього прогнозу. Визначивши ве-

личини $u_p = \ln \frac{C_p}{L_p} = 1,7148$; $z_p = 0,5223 + 0,2708 u_p = 0,987$ і вико-

ристовуючи значення $t_{кр} = t_{0,95;8} = 2,306$ та $\sigma_e = \sqrt{MSE} = \sqrt{0,0019} = 0,0434$, за формулою, наведеною у п. 2.4 задачі 2, знаходимо Δz_p :

$$\begin{aligned} \Delta z_p &= t_{кр} \sigma_e \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(u_p - \bar{u})^2}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}} = \\ &= 2,306 \cdot 0,0434 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{0,0347}{0,0433}} = 0,109. \end{aligned}$$

Тепер послідовно визначаємо межі довірчих інтервалів для z_p та y_p :

$$z_{p \min} = 0,987 - 0,109 = 0,878; \quad z_{p \max} = 0,987 + 0,109 = 1,096;$$

$$y_{p \min} = e^{z_{p \min}} L_p = e^{0,878} \cdot 4,5 = 10,826;$$

$$y_{p \max} = e^{z_{p \max}} L_p = e^{1,096} \cdot 4,5 = 13,456.$$

Таким чином, шуканою інтервальною оцінкою визначеного прогнозу y_p є довірчий інтервал $10,826 \leq y_p \leq 13,456$.

3.5. Побудувати графік лінії регресії для логарифмічного представлення функції Кобба–Дугласа (рис. 2.3).

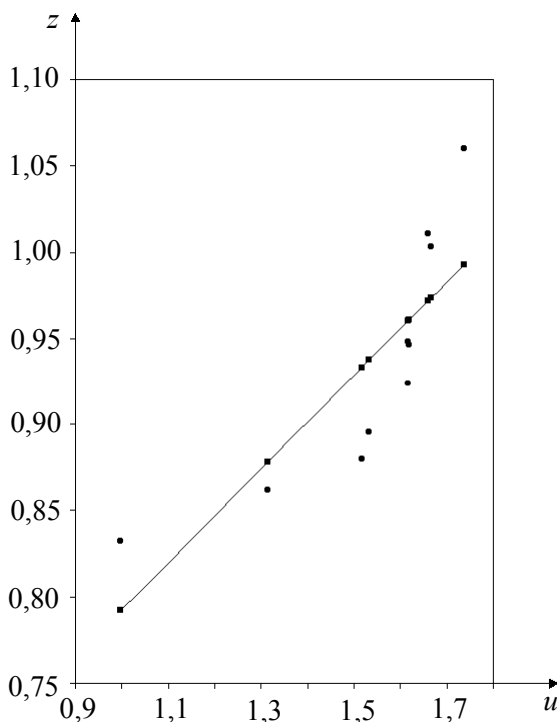


Рис. 2.3. Лінійна регресія $\bar{z} = b_0 + b_1 u$ ($\bar{z} = \ln \frac{y}{L}$; $u = \ln \frac{C}{L}$):

■ — ■ — ■ — лінія регресії; • • • — фактичні дані

Задача 4 (лінійна регресія у випадку квадратичної залежності). У табл. 2.12 наведені дані про кількість P_i одиниць товару, проданих протягом певного часу за ціною C_i грн за одиницю.

Таблиця 2.12

C_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
P_i	48,3	47,2	45,5	43,1	37,9	34,8	30,6	26,4	21,2	17,3

4.1. У припущенні, що регресія попиту на даний товар має вид квадратичної функції $\hat{P} = b_0 + b_1 C + b_2 C^2$, знайти точкові оцінки параметрів цієї регресії.

Розв'язання. Якщо ввести допоміжні змінні $C = x_1$; $C^2 = x_2$, запропонована квадратична регресійна залежність перетвориться на двофакторну лінійну модель $\hat{P} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$, параметри якої за методом найменших квадратів і системою (1.27) визначаються з наступної системи лінійних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n P_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} P_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} P_i. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Результати основних розрахунків зводимо у табл. 2.13. Після заповнення перших дев'яти стовпців цієї таблиці отримуємо систему рівнянь (2.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} 10b_0 + 165b_1 + 2805b_2 = 352,3, \\ 165b_0 + 2805b_1 + 49005b_2 = 5514,4, \\ 2805b_0 + 49005b_1 + 877173b_2 = 88861,2. \end{array} \right.$$

У результаті розв'язання цієї системи знайдемо параметри шуканої функції $\hat{P}$: $b_0 = 41,54$; $b_1 = 3,056$; $b_2 = -0,202$. Після цього запишемо рівняння регресії в наступному вигляді:

$$\hat{P} = 41,54 + 3,056 x_1 - 0,202 x_2$$

або

$$\hat{P} = 41,54 + 3,056 C - 0,202 C^2.$$

Таблица 2.13

i	x_1	x_2	P	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1P	x_2P	$\bar{P}$	$(P - \bar{P})^2$	$(\bar{P} - \bar{P})^2$	$(x_1 - \bar{x}_1)^2$	$k_{\text{с.п.}}$
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	12	144	48,3	144	20736	1728	579,6	6955,2	49,7	1,9881	108,78	20,25	0,31
2	13	169	50,2	169	28561	2197	652,6	8483,8	50,4	0,0444	123,89	12,25	0,03
3	14	196	52,1	196	38416	2744	729,4	10211,6	50,0	4,4952	114,49	6,25	-0,28
4	15	225	49,4	225	50625	3375	741,0	11115,0	48,4	0,9663	83,48	2,25	-0,66
5	16	256	46,3	256	65536	4096	740,8	11852,8	45,7	0,3336	41,50	0,25	-1,14
6	17	289	41,8	289	83521	4913	710,6	12080,2	41,9	0,0092	6,84	0,25	-1,78
7	18	324	35,0	324	104976	5832	630,0	11340,0	36,9	3,7551	5,49	2,25	-2,69
8	19	361	28,7	361	130321	6859	545,3	10360,7	30,8	4,6130	71,10	6,25	-4,10
9	20	400	24,8	400	160000	8000	496,0	9920,0	23,6	1,3783	245,05	12,25	-6,59
10	21	441	16,2	441	194481	9261	340,2	7144,2	15,3	0,8604	576,36	20,25	-12,26
Σ	165	2805	392,8	2805	877173	49005	6165,5	99463,5	392,8	18,4437	1377,00	82,50	—
$\frac{1}{n} \Sigma$	16,5	—	39,28	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

4.2. Користуючись критерієм Фішера, при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити адекватність побудованої моделі фактичним даним.

Розв'язання. Взявши до уваги число спостережуваних точок $n = 10$ і число факторів $m = 2$, одержимо

$$MSR = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{P}_i - \bar{P})^2}{m} = \frac{1101,99}{2} = 551,0;$$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - \hat{P}_i)^2}{n - m - 1} = \frac{4,569}{10 - 3} = 0,653;$$

$$F_{\text{спост}} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{551,0}{0,653} = 844,13.$$

За таблицею F -розподілу для рівня значимості $\alpha = 0,05$ і числа ступенів вільності $k_1 = m = 2$ та $k_2 = n - m - 1 = 7$ знаходимо $F_{\text{кр}} = F_{0,95;2;7} = 4,74$. Оскільки $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, робимо висновок про адекватність побудованої моделі фактичним даним.

4.3. Знайти значення коефіцієнта еластичності для всіх заданих значень C_i .

Розв'язання. Коефіцієнт еластичності для побудованої квадратичної функції визначимо за формулою $k_{\text{ел}} = \frac{C \cdot \hat{P}'}{\hat{P}} = \frac{b_1 C + 2b_2 C^2}{\hat{P}}$.

$$k_{\text{ел}} = \frac{C \cdot \hat{P}'}{\hat{P}} = \frac{b_1 C + 2b_2 C^2}{\hat{P}}.$$

$$\text{Відповідно до цієї формули } k_{\text{ел},1} = \frac{14,848 \cdot 12 - 2 \cdot 0,566 \cdot 12^2}{49,7} =$$

$= 0,31$ і т. д. (див. табл. 2.13, стовпець 14).

4.4. Знайти ціну товару (C_m), при якій обсяг продажів у грошовому вираженні буде максимальним (P_m).

Розв'язання. Прибуток від продажу P одиниць товару за ці-

ною C , грн за одиницю, виражається функцією

$$S = CP = b_0C + b_1C^2 + b_2C^3.$$

Ціну товару, при якій прибуток S буде максимальним, визначаємо з рівняння $S' = b_0 + 2b_1C + 3b_2C^2 = 0$. Таким чином, розв'язуючи рівняння $3 \cdot (-0,566)C^2 + 2 \cdot 14,848C - 46,98 = 0$, одержимо $C_m = 15,73$.

4.5. Знайти точкові та інтервальні (з надійністю $\gamma = 1 - \alpha$) оцінки значень максимального обсягу продажів P_m і максимального прибутку $S_m = C_m P_m$.

Розв'язання. Розраховане значення C дозволяє знайти точкову оцінку кількості проданого за цією ціною товару, тобто

$$\begin{aligned}\tilde{P}_m &= b_0 + b_1C_m + b_2C_m^2 = \\ &= -46,98 + 14,848 \cdot 15,73 - 0,566 \cdot (15,73)^2 = 46,55;\end{aligned}$$

і очікуваний при цьому максимальний прибуток

$$\tilde{S}_m = C_m \tilde{P}_m = 15,73 \cdot 46,55 = 732,39.$$

Щоб отримати інтервальні оцінки цих величин, обчислимо

$$\Delta P = t_{\text{кр}} \sigma_e \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(C_m - \bar{C})^2}{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{C})^2}},$$

$$\text{де } \sigma_e = \sqrt{\frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n (P_i - \hat{P}_i)^2} = \sqrt{\frac{18,4437}{7}} = 1,6232; t_{\text{кр}} = t_{0,95;7} =$$

$= 2,365$ – критичне значення t -критерію Стюдента, визначене за відповідною таблицею. Тоді

$$\Delta P = 2,365 \cdot 1,6232 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(15,73 - 16,5)^2}{82,5}} = 4,04,$$

а інтервальні оцінки кількості проданого товару P_m і максимального прибутку S_m будуть такими:

$$46,55 - 4,04 < P_m < 46,55 + 4,04, \text{ або } 42,51 < P_m < 50,59;$$

$$15,73 \cdot 42,51 < S_m < 15,73 \cdot 50,59, \text{ або } 668,83 < S_m < 795,94.$$

4.6. Побудувати графіки сукупності фактичних даних і лінії регресії (рис. 2.4).

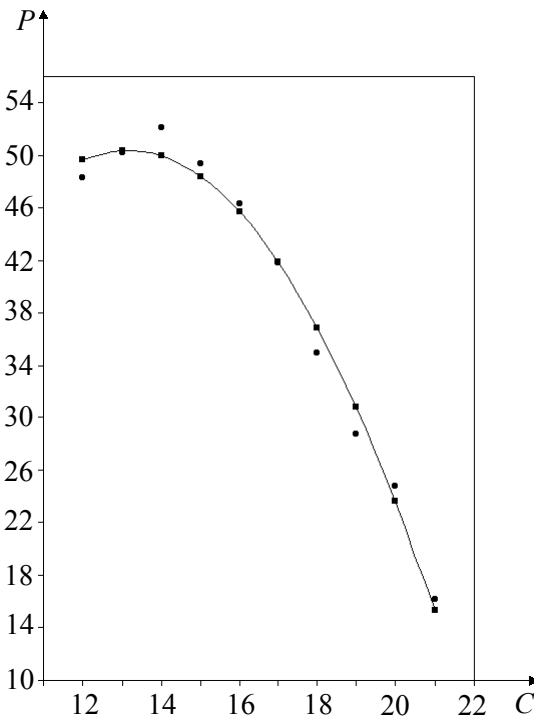


Рис. 2.4. Лінійна двофакторна регресія

$$\bar{P} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad (x_1 = C, \quad x_2 = C^2):$$

■ — лінія регресії; • • • — фактичні дані

Задача 5 (багатофакторна лінійна регресія). Вибіркові вихідні дані наведені у табл. 2.14, яка містить відповідні одне одному значення трьох факторів x_1, x_2, x_3 і залежного від них показника y .

Таблиця 2.14

x_1	10,46	11,55	11,84	13,05	13,14
x_2	15,78	20,20	9,56	22,56	12,36
x_3	30,38	35,07	36,21	39,16	40,01
y	41,15	51,46	38,67	55,76	34,11

5.1. Для наведених даних (див. табл. 2.14): а) розрахувати вибіркові коефіцієнти парної кореляції r_{ij} між факторами x_i та x_j для кожної пари факторів; б) розрахувати коефіцієнти кореляції r_{0i} між пояснюваною змінною y і кожним фактором x_i ; в) записати відповідну кореляційну матрицю.

Розв'язання. Відповідно до формул (1.19)–(1.21) і (1.32) послідовно обчислюємо наступні величини:

1) вибіркові дисперсії змінних x_1, x_2, x_3 та y –

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{5} \sum_{s=1}^5 (x_{is} - \bar{x}_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma_0^2 = \frac{1}{5} \sum_{s=1}^5 (y_s - \bar{y})^2;$$

2) середньоквадратичні відхилення змінних y та x_1, x_2, x_3 –

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} \quad (i = 0, 1, 2, 3);$$

3) вибіркові коефіцієнти коваріації –

$$k_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{s=1}^5 (x_{is} - \bar{x}_i)(x_{js} - \bar{x}_j),$$

$$k_{0i} = \frac{1}{5} \sum_{s=1}^5 (y_s - \bar{y})(x_{is} - \bar{x}_i) \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

4) вибірові коефіцієнти парної кореляції –

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad r_{0i} = \frac{k_{0i}}{\sigma_0 \sigma_i} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.4)$$

Розраховані проміжні дані заносимо до табл. 2.15. За формулами (2.4) маємо:

$$r_{12} = \frac{k_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{0,4428}{1,0001 \cdot 4,8042} = 0,0922;$$

$$r_{13} = \frac{k_{13}}{\sigma_1 \sigma_3} = \frac{3,3845}{1,0001 \cdot 3,4182} = 0,9900;$$

$$r_{23} = \frac{k_{23}}{\sigma_2 \sigma_3} = \frac{0,4070}{4,8042 \cdot 3,4182} = 0,0248;$$

$$r_{01} = \frac{k_{01}}{\sigma_0 \sigma_1} = \frac{0,5898}{8,0997 \cdot 1,0001} = 0,0728;$$

$$r_{02} = \frac{k_{02}}{\sigma_0 \sigma_2} = \frac{35,8647}{8,0997 \cdot 4,8042} = 0,9217;$$

$$r_{03} = \frac{k_{03}}{\sigma_0 \sigma_3} = \frac{1,0543}{8,0997 \cdot 3,4182} = 0,0381.$$

Кореляційну матрицю, з урахуванням її симетричності, запишемо в наступному вигляді:

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 0,0728 & 0,9217 & 0,0381 \\ 0,0728 & 1 & 0,0922 & 0,9900 \\ 0,9217 & 0,0922 & 1 & 0,0248 \\ 0,0381 & 0,9900 & 0,0248 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 2.15

s	x_1	x_2	x_3	$x_1 - \bar{x}_1$	$x_2 - \bar{x}_2$	$x_3 - \bar{x}_3$
l	2	3	4	5	6	7
1	10,46	15,78	30,38	-1,548	-0,312	-5,786
2	11,55	20,20	35,07	-0,458	4,108	-1,096
3	11,84	9,56	36,21	-0,168	-6,532	0,044
4	13,05	22,56	39,16	1,042	6,468	2,994
5	13,14	12,36	40,01	1,132	-3,732	3,844
Σ	60,04	80,46	180,83	—	—	—
$\frac{1}{n} \sum$	12,008	16,092	36,166	—	—	—

Горизонтальне продовження таблиці 2.15

s	$(x_1 - \bar{x}_1)^2$	$(x_2 - \bar{x}_2)^2$	$(x_3 - \bar{x}_3)^2$	$(x_1 - \bar{x}_1) \cdot (x_2 - \bar{x}_2)$	$(x_1 - \bar{x}_1) \cdot (x_3 - \bar{x}_3)$	$(x_2 - \bar{x}_2) \cdot (x_3 - \bar{x}_3)$
l	8	9	10	11	12	13
1	2,3963	0,0973	33,4778	0,4830	8,9567	1,8052
2	0,2098	16,8757	1,2012	-1,8815	0,5020	-4,5024
3	0,0282	42,6670	0,0019	1,0974	-0,0074	-0,2874
4	1,0858	41,8350	8,9640	6,7397	3,1197	19,3652
5	1,2814	13,9278	14,7763	-4,2246	4,3514	-14,3458
Σ	5,0015	115,4029	58,4213	2,2139	16,9225	2,0348
$\frac{1}{n} \sum$	$\sigma_1^2 = 1,0003$	$\sigma_2^2 = 23,0806$	$\sigma_3^2 = 11,6843$	$k_{12} = 0,4428$	$k_{13} = 3,3845$	$k_{23} = 0,4070$
	$\sigma_1 = 1,0001$	$\sigma_2 = 4,8042$	$\sigma_3 = 3,4182$	—	—	—

Горизонтальне продовження таблиці 2.15

s	y	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	$(y - \bar{y}) \cdot (x_1 - \bar{x}_1)$	$(y - \bar{y}) \cdot (x_2 - \bar{x}_2)$	$(y - \bar{y}) \cdot (x_3 - \bar{x}_3)$
I	$I4$	$I5$	$I6$	$I7$	$I8$	$I9$
1	41,15	-3,08	9,4864	4,7678	0,9610	17,8209
2	51,46	7,23	52,2729	-3,3113	29,7008	-7,9241
3	38,67	-5,56	30,9136	0,9341	36,3179	-0,2446
4	55,76	11,53	132,9409	12,0143	74,5760	34,5208
5	34,11	-10,12	102,4144	-11,4558	37,7678	-38,9013
Σ	221,15	—	328,0282	2,9490	179,3236	5,2717
$\frac{1}{n} \sum$	44,230	—	$\sigma_0^2 = 65,6056$	$k_{01} = 0,5898$	$k_{02} = 35,8647$	$k_{03} = 1,0543$
	—	—	$\sigma_0 = 8,0997$	—	—	—

5.2. Користуючись критерієм χ^2 , при рівні надійності $\gamma = 0,95$ установити наявність загальної мультиколінеарності між даними факторами.

Розв'язання. З кореляційної матриці M_r вилучимо перший рядок і перший стовпець, виділивши таким чином матрицю M_{rx} , тобто ту частину матриці M_r , що містить кореляційні коефіцієнти для кожної пари факторів:

$$M_{rx} = \begin{pmatrix} 1 & 0,0922 & 0,9900 \\ 0,0922 & 1 & 0,0248 \\ 0,9900 & 0,0248 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначимо спостережуване значення χ^2 -критерію:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{спост}}^2 &= -\left(n - 1 - \frac{2m + 5}{6}\right) \cdot \ln(\det M_{rx}) = \\ &= -\left(5 - 1 - \frac{2 \cdot 3 + 5}{6}\right) \cdot \ln(0,01535) = 9,1, \end{aligned}$$

де $n = 5$ – число спостережень; $m = 3$ – порядок кореляційної матриці; $\det M_{rx} = 0,01535$ – визначник цієї матриці. Для заданого рівня надійності $\gamma = 0,95$ і числа ступенів вільності $k = \frac{1}{2}m(m-1) = 3$ за таблицею критичних точок χ^2 -розподілу знайдемо значення $\chi_{\text{кр}}^2 = \chi_{0,95; 3}^2 = 7,8$. Оскільки $\chi_{\text{спост}}^2 > \chi_{\text{кр}}^2$, то одержимо висновок про наявність загальної мультиколінеарності заданих факторів.

5.3. За допомогою F -критерію Фішера, враховуючи рівень значимості $\alpha = 0,05$, установити наявність мультиколінеарності між кожним фактором і рештою пояснювальних змінних.

Розв'язання. Спочатку визначаємо обернену матрицю $C = M_{rx}^{-1}$. Для цього розраховуємо алгебраїчні доповнення елементів матриці M_{rx} :

$$R_{11} = 0,9994; \quad R_{22} = 0,0199; \quad R_{33} = 0,9915;$$

$$R_{12} = R_{21} = -0,0676; \quad R_{13} = R_{31} = -0,9877; \quad R_{23} = R_{32} = 0,0664;$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\det M_{rx}} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{0,01535} \cdot \begin{pmatrix} 0,9994 & -0,0676 & -0,9877 \\ -0,0676 & 0,0199 & 0,0664 \\ -0,9877 & 0,0664 & 0,9915 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 65,13 & -4,41 & -64,36 \\ -4,41 & 1,30 & 4,33 \\ -64,36 & 4,33 & 64,61 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Використовуючи діагональні елементи цієї матриці, за формулою (1.24) для кожного фактора знайдемо спостережуване значення критерію Фішера:

$$F_{1\text{спост}} = (c_{11} - 1) \frac{n - m}{m - 1} = (65,13 - 1) \frac{2}{2} = 64,13;$$

$$F_{2\text{спост}} = (c_{22} - 1) \frac{n - m}{m - 1} = (1,30 - 1) \frac{2}{2} = 0,30;$$

$$F_{3\text{спост}} = (c_{33} - 1) \frac{n - m}{m - 1} = (64,61 - 1) \frac{2}{2} = 63,61.$$

З таблиці критичних значень критерію Фішера (див. дод. 2) при рівні значимості $\alpha = 0,05$ і ступенях вільності $k_1 = n - m = 2$ та $k_2 = m - 1 = 2$ одержимо $F_{\text{кр}} = F_{0,05; 2; 2} = 19,00$. Оскільки $F_{2\text{спост}} < F_{\text{кр}}$, мультиколінеарність між фактором x_2 і двома іншими факторами відсутня. Оскільки $F_{1\text{спост}} > F_{\text{кр}}$ і $F_{3\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, кожний з факторів x_1 і x_3 мультиколінеарний з двома іншими факторами.

5.4. За допомогою t -критерію Стюдента з рівнем надійності

$\gamma = 0,95$ визначити пари факторів, між якими існує мультиколінеарність, а також надати рекомендації щодо виключення з розгляду певного фактора визначених пар.

Розв'язання. Використовуючи одержану в п. 5.3 матрицю C , відповідно до формули (1.25) визначимо частинні коефіцієнти кореляції для кожної пари факторів:

$$r_{12;3} = \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}} = \frac{-4,41}{\sqrt{65,13 \cdot 1,3}} = -0,48;$$

$$r_{13;2} = \frac{c_{13}}{\sqrt{c_{11}c_{33}}} = \frac{-64,36}{\sqrt{1,3 \cdot 64,61}} = -0,99;$$

$$r_{23;1} = \frac{c_{23}}{\sqrt{c_{22}c_{33}}} = \frac{4,33}{\sqrt{1,3 \cdot 64,61}} = 0,47.$$

Потім, користуючись формулою (1.26), для кожної пари факторів обчислимо t -статистику:

$$t_{12} = r_{12;3} \cdot \sqrt{\frac{n-m}{1-(r_{12;3})^2}} = -0,48 \cdot \sqrt{\frac{5-3}{1-(-0,48)^2}} = -0,772;$$

$$t_{13} = r_{13;2} \cdot \sqrt{\frac{n-m}{1-(r_{13;2})^2}} = -0,99 \cdot \sqrt{\frac{5-3}{1-(-0,99)^2}} = -11,276;$$

$$t_{23} = r_{23;1} \cdot \sqrt{\frac{n-m}{1-(r_{23;1})^2}} = 0,47 \cdot \sqrt{\frac{5-3}{1-(0,47)^2}} = 0,759.$$

За таблицею t -розподілу Стьюдента (дод. 3) для рівня надійності $\gamma = 0,95$ і числа ступенів вільності $k = n - m = 2$ знайдемо критичне значення t -критерію: $t_{кр} = t_{0,95; 2} = 4,303$. Оскільки $|t_{13}| > t_{кр}$, між факторами x_1 і x_3 існує тісний кореляційний зв'язок. Виключити з розгляду можна кожний з цих факторів, наприклад фактор x_1 , оскільки його зв'язок з фактором x_2 дещо тісніший,

ніж у фактора x_3 . Подібний висновок буде носити суто теоретичний характер – на практиці зазначене виключення повинне бути узгоджене з економічною доцільністю.

5.5. Для наведених вихідних даних (див. табл. 2.14) визначити розширену кореляційну матрицю, використовуючи при цьому матрицю нормалізованих значень заданих змінних.

Розв'язання. Для нормалізації значень факторів x_1, x_2, x_3 і пояснюваної змінної у застосуємо формулу (1.23), вважаючи при цьому у нульовою змінною і використовуючи записані в табл. 2.15 значення дисперсій $\sigma_0^2 = 65,6056$; $\sigma_1^2 = 1,0003$; $\sigma_2^2 = 23,0806$ і $\sigma_3^2 = 11,6843$. Результати розрахунків зведемо до табл. 2.16.

Таблиця 2.16

s	$x_{0s} = y_s$	x_{1s}	x_{2s}	x_{3s}	$x_{0s} - \bar{x}_0$	$x_{1s} - \bar{x}_1$	$x_{2s} - \bar{x}_2$	$x_{3s} - \bar{x}_3$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	41,15	10,46	15,78	30,38	-3,08	-1,548	-0,312	-5,786
2	51,46	11,55	20,20	35,07	7,23	-0,458	4,108	-1,096
3	38,67	11,84	9,56	36,21	-5,56	-0,168	-6,532	0,044
4	55,76	13,05	22,56	39,16	11,53	1,042	6,468	2,994
5	34,11	13,14	12,36	40,01	-10,12	1,132	-3,732	3,844
Σ	221,15	60,04	80,46	180,83	—	—	—	—
$\frac{1}{n} \Sigma$	44,230	12,008	16,092	36,166	—	—	—	—

Горизонтальне продовження таблиці 2.16

s	$x_{0s}^* = \frac{x_{0s} - \bar{x}_0}{\sqrt{5\sigma_0^2}}$	$x_{1s}^* = \frac{x_{1s} - \bar{x}_1}{\sqrt{5\sigma_1^2}}$	$x_{2s}^* = \frac{x_{2s} - \bar{x}_2}{\sqrt{5\sigma_2^2}}$	$x_{3s}^* = \frac{x_{3s} - \bar{x}_3}{\sqrt{5\sigma_3^2}}$
1	10	11	12	13
1	-0,1701	-0,6922	-0,0290	-0,7570
2	0,3992	-0,2048	0,3824	-0,1434
3	-0,3070	-0,0751	-0,6080	0,0058
4	0,6366	0,4659	0,6021	0,3917
5	-0,5588	0,5062	-0,3474	0,5029

Запишемо матрицю X^{*T} , транспоновану до X^* , і помножимо її на X^* :

$$M_r = \begin{pmatrix} -0,1701 & 0,3992 & -0,3070 & 0,6366 & -0,5588 \\ -0,6922 & -0,2048 & -0,0751 & 0,4659 & 0,5062 \\ -0,0290 & 0,3824 & -0,6080 & 0,6021 & -0,3474 \\ -0,7570 & -0,1434 & 0,0058 & 0,3917 & 0,5029 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -0,1701 & -0,6922 & -0,0290 & -0,7570 \\ 0,3992 & -0,2048 & 0,3824 & -0,1434 \\ -0,3070 & -0,0751 & -0,6080 & 0,0058 \\ 0,6366 & 0,4659 & 0,6021 & 0,3917 \\ -0,5588 & 0,5062 & -0,3474 & 0,5029 \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо таку саму кореляційну матрицю, яку було визначено при розв'язуванні задачі 5.1:

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 0,0728 & 0,9217 & 0,0381 \\ 0,0728 & 1 & 0,0922 & 0,9900 \\ 0,9217 & 0,0922 & 1 & 0,0248 \\ 0,0381 & 0,9900 & 0,0248 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6. Для наведених вихідних даних (див. табл. 2.14), дотримуючись методу покрокової регресії, послідовно збудувати одну і двофакторну регресійні моделі. Розрахувати для цих моделей прості й оцінені коефіцієнти детермінації та коефіцієнт множинної кореляції. За допомогою критерію Фішера при рівні значимості $\alpha = 0,05$ перевірити адекватність моделей фактичним даним.

Розв'язання. Метод покрокової регресії полягає в послідовному включенні в регресійну модель по одному фактору з їх сукупності. При цьому послідовність включення відповідає порядку, в якому зменшується вплив фактора на пояснюваний показник. Скористаємося розширеною кореляційною матрицею M_r , отриманою у п. 5.1. Коефіцієнти кореляції між пояснюваним показником і факторами займають у цій матриці перший рядок і перший стовець. Дані коефіцієнти показують, що найбільш тісний зв'язок пояснюваний показник має з фактором x_2 . Тому побудову регресійних моделей починаємо з моделі $\hat{y} = b_0 + b_2x_2$.

За результатами відповідних розрахунків (табл. 2.17) і за формулами (1.2) знаходимо b_2 і b_0 :

$$b_2 = \frac{747,61 - 16,09 \cdot 44,23}{282,03 - (16,09)^2} = 1,55;$$

$$b_0 = \frac{282,03 \cdot 44,23 - 16,09 \cdot 747,61}{282,03 - (16,09)^2} = 19,23.$$

Таблиця 2.17

i	y	x_2	x_2^2	$x_2 y$	$\hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	41,15	15,78	249,0084	649,3470	43,75	6,7350	9,4864
2	51,46	20,20	408,0400	1039,4920	50,61	0,7168	52,2729
3	38,67	9,56	91,3936	369,6852	34,08	21,0683	30,9136
4	55,76	22,56	508,9536	1257,9456	54,28	2,1887	132,9409
5	34,11	12,36	152,7696	421,5996	38,43	18,6700	102,4144
Σ	221,15	80,46	1410,1652	3738,0694	221,15	49,3787	328,0282
$\frac{1}{n} \Sigma$	44,23	16,09	282,0330	747,6139	—	—	—

Таким чином, однофакторна регресійна модель набуває вигляду $\hat{y} = 19,225 + 1,554x_2$.

Наступним за величиною кореляційним коефіцієнтом є r_{01} . Тому додаємо в модель фактор x_1 та будуємо модель у вигляді $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$.

Таблиця 2.18

i	x_1	x_2	y	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y	$\hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10,46	15,78	41,15	109,41	249,01	165,06	430,43	649,35	43,90	7,55
2	11,55	20,20	51,46	133,40	408,04	233,31	594,36	1039,49	50,67	0,63
3	11,84	9,56	38,67	140,19	91,39	113,19	457,85	369,69	34,08	21,03
4	13,05	22,56	55,76	170,30	508,95	294,41	727,67	1257,95	54,19	2,47
5	13,14	12,36	34,11	172,66	152,77	162,41	448,21	421,60	38,31	17,65
Σ	60,04	80,46	221,15	725,96	1410,17	968,38	2658,52	3738,07	221,15	49,33
$\frac{1}{n} \Sigma$	12,01	16,09	44,23	145,19	282,03	193,68	531,70	747,61	—	—

За даними табл. 2.18 запишемо систему рівнянь (1.28) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} 5b_0 + 60,04b_1 + 80,46b_2 = 221,15, \\ 60,04b_0 + 725,96b_1 + 968,38b_2 = 2658,52, \\ 80,46b_0 + 968,38b_1 + 1410,17b_2 = 3738,07. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо значення $b_0 = 20,384$; $b_1 = -0,099$; $b_2 = 1,556$. Після цього запишемо рівняння двофакторної регресії: $\hat{y} = 20,384 - 0,099x_1 + 1,556x_2$.

Далі обчислимо прості й оцінені коефіцієнти детермінації та коефіцієнти множинної кореляції за наступними формулами:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2}; \quad \bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1}; \quad r = \sqrt{R^2}.$$

Для однофакторної моделі одержимо такі величини:

$$R^2 = 1 - \frac{49,3787}{328,0282} = 0,8495;$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - (0,8495)^2) \frac{5-1}{5-1-1} = 0,6288;$$

$$r = \sqrt{0,8495} = 0,92;$$

для двофакторної –

$$R^2 = 1 - \frac{49,3301}{328,0282} = 0,8496;$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - (0,8496)^2) \frac{5-1}{5-2-1} = 0,4437;$$

$$r = \sqrt{0,8496} = 0,92.$$

Аналізуючи наведені результати, зауважимо, що при включенні в модель додаткового фактора простий коефіцієнт детермінації і коефіцієнт множинної кореляції майже не змінюються, а оцінений коефіцієнт детермінації, що враховує числа ступенів вільності сум SSE і SST ($k_E = n - m - 1$; $k_T = n - 1$), суттєво зменшується.

Спостережуване значення критерію Фішера визначимо за формулою

$F_{\text{спост}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{k_E}{k_R}$, де $k_E = n - m - 1$ і $k_R = m$ – числа ступенів вільності сум SSE і SSR . Тоді для однофакторної моделі

$$F_{\text{спост}} = \frac{0,8495}{1 - 0,8495} \cdot \frac{3}{1} = 16,93 \text{ при критичному значенні критерію}$$

$F_{\text{кр}} = F_{0,95;1;3} = 10,13$. Таким чином $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, що означає адекватність моделі фактичним даним. Для двофакторної моделі

$$F_{\text{спост}} = \frac{0,8496}{1 - 0,8496} \cdot \frac{2}{2} = 5,65 \text{ при критичному значенні } F_{\text{кр}} =$$

$= F_{0,95;2;2} = 19,00$. Оскільки $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$, модель неадекватна фактичним даним.

Задача 6 (гетероскедастичність та її наслідки). За даними табл. 2.19 можна визначити залежність між рівнем доходів (сотні гривень) і відповідним рівнем заощаджень (грн).

Таблиця 2.19

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Доход	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,8	1,9	2,0	2,0
Заощадження	2,36	2,20	2,08	2,20	2,10	2,12	2,41	2,50	2,43
Місяць	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Доход	2,2	6,4	6,8	7,2	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
Заощадження	2,59	2,90	2,95	2,82	3,04	3,53	3,44	3,75	3,99

6.1. Користуючись параметричним тестом Голфелда–Квандта, перевірити гіпотезу про наявність або відсутність гетероскедастичності вихідних даних табл. 2.19.

Розв'язання. Розглядаючи рівень доходів як фактор X і рівень заощаджень як пояснювану змінну Y , з упорядкованої за значеннями x_i ($i = 1, \dots, n$) послідовності спостережуваних точок виключаємо c середніх точок $\left(c = \frac{4n}{15} = \frac{4 \cdot 18}{15} \approx 4 \right)$. Після цього ділимо по-

слідовність, що залишилася, на дві рівні частини (по сім точок у кожній). Для кожної з отриманих сукупностей точок будуємо відповідну лінійну економетричну модель $\hat{y} = b_0 + b_1x$.

Виконуємо для обох сукупностей точок необхідні розрахунки і результати зводимо до табл. 2.20 та 2.21.

Таблиця 2.20

i	y	x	x^2	xy	$\bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7
1	2,18	1,5	2,25	3,270	2,151	0,0008
2	2,20	1,5	2,25	3,300	2,151	0,0024
3	2,08	1,6	2,56	3,328	2,156	0,0057
4	2,20	1,7	2,89	3,740	2,160	0,0016
5	2,10	1,7	2,89	3,570	2,160	0,0036
6	2,12	1,8	3,24	3,816	2,164	0,0019
7	2,23	1,9	3,61	4,237	2,168	0,0038
Σ	15,11	11,7	19,69	25,261	15,110	0,0198
$\frac{1}{n} \Sigma$	2,16	1,67	2,81	3,609	2,16	—

Таблиця 2.21

i	y	x	x^2	xy	$\bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7
1	2,95	6,8	46,24	20,060	2,784	0,0276
2	2,82	7,2	51,84	20,304	2,925	0,0111
3	3,04	8,0	64,00	24,320	3,208	0,0284
4	3,53	8,5	72,25	30,005	3,385	0,0209
5	3,44	9,0	81,00	30,960	3,562	0,0149
6	3,75	9,5	90,25	35,625	3,739	0,0001
7	3,99	10,0	100,00	39,900	3,916	0,0055
Σ	23,52	59,0	505,58	201,174	23,520	0,1085
$\frac{1}{n} \Sigma$	3,36	8,43	72,23	28,739	3,36	—

Для першої сукупності відповідно до формул (1.2) знаходимо b_1 і b_0 :

$$b_1 = \frac{3,609 - 1,67 \cdot 2,16}{2,81 - (1,67)^2} = 0,004 ;$$

$$b_0 = \frac{2,81 \cdot 2,16 - 1,67 \cdot 3,609}{2,81 - (1,67)^2} = 2,087.$$

Економетрична модель для цієї сукупності точок має вигляд

$$\hat{y} = 2,087 + 0,004 x.$$

Для другої сукупності точок

$$b_1 = \frac{28,739 - 8,43 \cdot 3,36}{72,23 - (8,43)^2} = 0,035 ;$$

$$b_0 = \frac{72,23 \cdot 3,36 - 8,43 \cdot 28,739}{72,23 - (8,43)^2} = 0,378,$$

і економетрична модель набуває вигляду $\hat{y} = 0,378 + 0,035 x$.

Створені моделі дозволяють заповнити у табл. 2.20 та 2.21 стовпці значень $\hat{y}_i$ та $e_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$ і потім розрахувати суми

$$\sum_{i=1}^7 e_i^2 = \sum_{i=1}^7 (y_i - \hat{y}_i)^2 ;$$

$$\sum e_I^2 = 0,0198 ; \quad \sum e_{II}^2 = 0,1085 .$$

Визначаємо спостережуване значення критерію Фішера:

$$F_{\text{спост}} = \frac{\sum e_{II}^2}{\sum e_I^2} = \frac{0,1085}{0,0198} = 5,47 .$$

Відповідно до таблиці F -розподілу, для заданого рівня значимості $\alpha = 0,05$, числа ступенів вільності $k_1 = n_1 - m - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$ і $k_2 = n_2 - m - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$ знаходимо $F_{кр} = F_{0,95;5;5} = 5,05$. Таким чином, маємо нерівність $F_{спост} > F_{кр}$, що дозволяє зробити висновок про те, що вихідні дані задачі гетероскедастичні.

6.2. При наявності гетероскедастичності вихідних даних (див. табл. 2.19) оцінити параметри відповідної економетричної моделі за допомогою узагальненого методу найменших квадратів (метод Ейткена). Зробити економіко-математичний аналіз побудованої економетричної моделі.

Розв'язання. За МНК потрібні параметри визначають із наступної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 \sum \frac{1}{x} + b_1 n = \sum \left(\frac{1}{x} \cdot y \right), \\ b_0 n + b_1 \sum x = \sum y. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержують наступні формули для розрахунку b_1 і b_0 :

$$b_1 = \frac{\bar{y} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \cdot y_i \right)}{\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 1};$$

$$b_0 = \frac{\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} \cdot y_i \right) - \bar{y}}{\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 1}.$$

Результати проміжних розрахунків, потрібні для застосування цих формул, зводимо до табл. 2.22.

Таблиця 2.22

i	y	x	$1/x$	$(1/x) y$	$\bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	x^2	y^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2,18	1,5	0,6667	1,4533	2,193	0,0002	2,25	4,752
2	2,20	1,5	0,6667	1,4667	2,193	0,0000	2,25	4,840
3	2,08	1,6	0,6250	1,3000	2,210	0,0170	2,56	4,326
4	2,20	1,7	0,5882	1,2941	2,227	0,0007	2,89	4,840
5	2,10	1,7	0,5882	1,2353	2,227	0,0162	2,89	4,410
6	2,12	1,8	0,5556	1,1778	2,244	0,0154	3,24	4,494
7	2,23	1,9	0,5263	1,1737	2,261	0,0010	3,61	4,973
8	2,50	2,0	0,5000	1,2500	2,278	0,0492	4,00	6,250
9	2,43	2,0	0,5000	1,2150	2,278	0,0230	4,00	5,905
10	2,59	2,2	0,4545	1,1773	2,312	0,0771	4,84	6,708
11	2,90	6,4	0,1563	0,4531	3,026	0,0159	40,96	8,410
12	2,95	6,8	0,1471	0,4338	3,094	0,0208	46,24	8,703
13	2,82	7,2	0,1389	0,3917	3,162	0,1172	51,84	7,952
14	3,04	8,0	0,1250	0,3800	3,298	0,0667	64,00	9,242
15	3,53	8,5	0,1176	0,4153	3,383	0,0215	72,25	12,461
16	3,44	9,0	0,1111	0,3822	3,468	0,0008	81,00	11,834
17	3,75	9,5	0,1053	0,3947	3,553	0,0387	90,25	14,063
18	3,99	10,0	0,1000	0,3990	3,638	0,1237	100,00	15,920
Σ	49,05	83,3	6,6724	15,9930	49,050	0,6052	579,07	140,083
$\frac{1}{n} \Sigma$	2,725	4,628	0,3707	0,8885	2,725	—	32,17	7,782

Використовуючи дані стовпців 2–5 табл. 2.22, знаходимо значення b_1 і b_0 :

$$b_1 = \frac{2,725 \cdot 0,3707 - 0,8885}{4,628 \cdot 0,3707 - 1} = 0,017;$$

$$b_0 = \frac{4,628 \cdot 0,8885 - 2,725}{4,628 \cdot 0,3707 - 1} = 1,938.$$

Тепер запишемо шукану економетричну модель у вигляді

$$\hat{y} = 1,938 + 0,017 x.$$

Далі робимо економіко-математичний аналіз отриманої моделі.

1) Параметр $b_1 = 0,017$ показує, що збільшення загального рівня доходів на одну одиницю викликає зростання середнього рівня заощаджень на 0,017 одиниці.

2) Дисперсії і середньоквадратичні відхилення загального рівня доходів і рівня заощаджень характеризують міру розсіювання вихідних значень змінних X та Y відносно їхніх середніх значень:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum x^2 - \bar{x}^2 = 3217,06 - (46,28)^2 = 1075,42, \quad \sigma_x = 32,79;$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum y^2 - \bar{y}^2 = 7,782 - (2,725)^2 = 0,3567, \quad \sigma_y = 0,5973.$$

$$3) \text{ Коефіцієнт кореляції } r = b_1 \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,017 \cdot \frac{32,79}{0,5973} = 0,93$$

свідчить про тісний зв'язок між загальним рівнем доходів і рівнем заощаджень.

4) Коефіцієнт детермінації $R^2 = r^2 = (0,93)^2 = 0,87$ показує, що варіація рівня заощаджень на 87 % залежить від загального рівня доходів.

$$5) \text{ Залишкова дисперсія } \sigma_e^2 = \frac{1}{n-2} \sum e^2 = \frac{1}{n-2} \sum (y - \hat{y})^2 = \\ = \frac{0,605}{18-2} = 0,038 \text{ свідчить про те, що розрахункові значення рівня}$$

заощаджень близькі до фактичних даних.

Задача 7 (автокореляція). У табл. 2.23 наведені значення двох спостережуваних економічних показників.

Таблиця 2.23

<i>I</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>X</i>	4	7	6	3	9	8	11
<i>Y</i>	16,0	20,1	16,6	16,9	19,4	20,2	21,5

7.1. За методом найменших квадратів створити лінійну економетричну модель відповідно до фактичних даних і перевірити адекватність моделі вказаним даним, використовуючи для цього критерій Фішера (рівень значимості $\alpha = 0,05$).

Розв'язання. Результати попередніх розрахунків зведемо до табл. 2.24. За формулами (1.2) знайдемо значення параметрів лінійної регресії:

$$b_1 = \frac{84,336 - 6,857 \cdot 18,671}{17,488 - (6,857)^2} = 0,672;$$

$$b_0 = \frac{17,488 \cdot 18,671 - 84,336 \cdot 6,857}{17,488 - (6,857)^2} = 14,066.$$

Таблиця 2.24

<i>i</i>	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$
<i>l</i>	2	3	4	5	6	7	8	9
1	16,0	4	16	64	16,752	-0,752	0,566	3,683
2	20,1	7	49	140,7	18,767	1,333	1,776	0,009
3	16,6	6	36	99,6	18,096	-1,496	2,237	0,331
4	16,9	3	9	50,7	16,081	0,819	0,671	6,711
5	19,4	9	81	174,6	20,111	-0,711	0,505	2,071
6	20,2	8	64	161,6	19,439	0,761	0,579	0,589
7	21,5	11	121	236,5	21,454	0,046	0,002	7,743
Σ	130,7	48	376	927,7	130,700	—	6,337	21,138
$\frac{1}{n} \Sigma$	18,671	6,857	17,488	84,336	—	—	—	—

Економетричну модель запишемо у вигляді $\hat{y} = 14,066 + 0,672 x$.

Маємо наступні спостережуване й критичне значення *F*-критерію:

$$F_{\text{спост}} = \frac{MSR}{MSE} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - \bar{z})^2}{m} \right) / \left(\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2}{n - m - 1} \right) =$$

$$= \frac{21,138}{1} \cdot \frac{6,337}{5} = 16,68;$$

$$F_{\text{кр}} = F_{0,95; 1; 3} = 6,61.$$

Оскільки $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$, робимо висновок про адекватність побудованої моделі фактичним даним.

7.2. Користуючись тестом Дарбіна–Уотсона, для рівня значимості $\alpha = 0,05$ з'ясувати наявність або відсутність автокореляції в побудованій моделі; при наявності автокореляції вказати її тип.

Розв'язання. Використовуючи в табл. 2.25 стовпці 2, 3, 6–8 табл. 2.24, доповнимо табл. 2.25 стовпцями значень e_{i-1} та $(e_i - e_{i-1})^2$. Підсумовуємо значення стовпців $(e_i - e_{i-1})^2$ та e_i^2 і за формулою (1.35) знаходимо спостережування значення DW -критерію:

$$DW_{\text{спост}} = \frac{22,723}{6,337} = 3,586.$$

Таблиця 2.25

i	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	e_{i-1}	$(e_i - e_{i-1})^2$	e_i^2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	16,0	16,752	-0,752	—	—	0,566
2	7	20,1	18,767	1,333	-0,752	4,347	1,776
3	6	16,6	18,096	-1,496	1,333	8,000	2,237
4	3	16,9	16,081	0,819	-1,496	5,359	0,671
5	9	19,4	20,111	-0,711	0,819	2,341	0,505
6	8	20,2	19,439	0,761	-0,711	2,166	0,579
7	11	21,5	21,454	0,046	0,761	0,511	0,002
Σ	48	130,7	130,700	—	—	22,723	6,337

Для даного рівня значимості $\alpha = 0,05$, кількості спостережень $n = 7$ і кількості факторів $m = 1$ з таблиці критичних точок DW -розподілу (дод. 5) знаходимо значення $DW_L = 0,7$ і $DW_U = 1,356$. Таким чином установлюємо, що спостережуване значення DW -критерію задовольняє подвійну нерівність $4 - DW_L < DW_{\text{спост}} < 4$ ($3,3 < 3,586 < 4$), яка визначає наявність у побудованій економетричній моделі від'ємної автокореляції залишків.

Розділ 3. ЗАСТОСУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ З ЕКОНОМЕТРІЇ

Побудова економетричних моделей та їхній подальший аналіз звичайно пов'язані з великою кількістю обчислень. Тому економетричні дослідження, особливо у тих випадках, коли потрібно аналізувати значні за об'ємом вибірки, є дуже складною задачею без використання відповідних обчислювальних засобів.

Серед багатьох спеціалізованих математико-статистичних програмних пакетів, які можуть бути рекомендовані при розв'язанні економетричних задач, заслуговують уваги STATGRAPHICS (Statistical Graphics System, STSC corporation, USA), SAS (Statistical Analysis System, SAS Institute Inc., USA) та інші [8].

Використання сучасних комп'ютерних технологій і відповідного програмного забезпечення для розв'язання різноманітних задач економетрії стає майже обов'язковим. Найпростішим у цьому напрямку є застосування офісних програм, що входять до пакету Microsoft Office – MS Excel і MS Word. Зокрема, програма MS Excel дає змогу скласти потрібні для розв'язку тієї чи іншої задачі розрахункові таблиці, в яких усі обчислення здійснюються автоматично за допомогою відповідних формул, уведених до клітинок робочого листа програми. Після закінчення потрібних розрахунків складені в середовищі MS Excel таблиці можуть бути перенесені у відповідний звіт, підготовлений засобами програми MS Word.

Указані програми дозволяють також створювати необхідні графіки й діаграми.

На рис. 3.1,*a* наведено зразок таблиці, яку можна скласти на робочому листі програми MS Excel для виконання пп. 1.1 і 1.4 задачі 1 попереднього розділу. Вихідні дані розміщено у клітинках A2, A4, B2-B11, D2-D11; інші клітинки містять відповідні формули, за допомогою яких здійснюються потрібні розрахунки. На рис 3.1,*a* зображено найбільш важливі формули, які введені у клітинки робочого листа.

Використання можливостей програми MS Excel значною мірою полегшує роботу з таблицею, зображеною на рис. 3.1,*a*. Так, наприклад, щоб ввести відповідні розрахункові формули у стовпці таблиці, достатньо ввести їх тільки в клітинки

C2 ($=B2*B2$) або ($=СТЕПЕНЬ(B2; 2)$),

E2 ($=D2*D2$) або ($=СТЕПЕНЬ(D2; 2)$),

F2 ($=B2*D2$), G2 ($=\$D\$17 + \$D\$16*B2$),

H2 ($=D2 - G2$), I2 ($=СТЕПЕНЬ(H2; 2)$),

J2 ($=СТЕПЕНЬ(G2 - \$D\$13; 2)$),

і скопіювати кожну з них уздовж відповідного стовпця до клітинок C11, E11–J11.

Аналогічно вводять формули ($=СУММ(B2:B11)$) (у клітинку B12) і ($=B12/\$A2$) (у клітинку B13), після чого копіюють кожну з них уздовж відповідного рядка.

На рис. 3.1,*b* показано продовження робочого листа (*a*) програми MS Excel, що використовується для розв'язання пп.1.3, 1.5–1.7 задачі 1. Зокрема, в цій частині таблиці розраховані коефіцієнти кореляції й детермінації (r і R^2) та коефіцієнт еластичності (ke), знайдені довірчі інтервали для базисних значень пояснюваної змінної ($y^{\wedge} - dy$, $y^{\wedge} + dy$), коефіцієнта кореляції ($r - dr$, $r + dr$) і параметрів рівняння регресії ($b1 - db1$, $b1 + db1$) та ($b0 - db0$, $b0 + db0$). При цьому значення $b1$ і $b0$ у клітинках J20 і J21 скопійовані з клітинок D16 і D17.

На рис. 3.2 зображено робочий лист програми MS Excel для

D14 =E13-D13*D13										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n	x	x2	y	y2	xy	y^	y - y^	(y - y^)^2	(y^ - Yср)^2
2	10	10	100	20	400	200	17,07	2,93	8,6047	837,1404
3	N	21	441	27	729	567	23,77	3,23	10,4524	494,3071
4	6,2	26	676	32	1024	832	26,81	5,19	26,9091	368,1563
5		33	1089	22	484	726	31,08	-9,08	82,3823	222,7118
6		72	5184	50	2500	3600	54,83	-4,83	23,3511	78,0094
7		81	6561	57	3249	4617	60,31	-3,31	10,9853	204,9023
8		57	3249	42	1764	2394	45,70	-3,70	13,6563	0,0928
9		84	7056	64	4096	5376	62,14	1,86	3,4530	260,5571
10		93	8649	71	5041	6803	67,62	3,38	11,3981	467,5928
11		98	9604	75	5625	7350	70,67	4,33	18,7531	608,5848
12	Суми :	575	42609	460	24912	32265		0,00	209,9453	3542,055
13	Середні :	57,5	4260,9	46,0	2491,2	3226,5				
14	D :	954,65		375,20			MSR :	3542,055		
15	Sigma :	30,897		19,370			MSE :	26,243	S :	5,1228
16			b1 :	0,609			F :	134,97		
17			b0 :	10,975			Fкр :	5,32		

Готово

Лист1 Лист2 Лист3

NUM

=(C13-D13-F13*D13)/(C13-B13*B13)

=КОРЕНЬ(D14)

=(F13-B13*D13)/(C13-B13*B13)

=D\$17+D\$16*B11

=СТЕПЕНЬ(G11-D\$13;2)

=H15/(A2-2)

=КОРЕНЬ(H15)

a

K21 =J16*K13/L12												
	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	
1	xy	y^	y - y^	(y - y^)^2	(y^ - Yср)^2	(y - Yср)^2	(x - Xср)^2	dy	y^ - dy	y^ + dy	ke	
2	200	17,07	2,93	8,6047	837,1404	676,00	2256,25	6,851	10,216	23,918	0,36	
3	567	23,77	3,23	10,4524	494,3071	361,00	1332,25	5,782	17,985	29,549	0,54	
4	832	26,81	5,19	26,9091	368,1563	196,00	992,25	5,335	21,478	32,147	0,59	
5	726	31,08	-9,08	82,3823	222,7118	576,00	600,25	4,768	26,309	35,844	0,65	
6	3600	54,83	-4,83	23,3511	78,0094	16,00	210,25	4,127	50,706	58,959	0,80	
7	4617	60,31	-3,31	10,9853	204,9023	121,00	552,25	4,693	55,621	65,008	0,82	
8	2394	45,70	-3,70	13,6563	0,0928	16,00	0,25	3,736	41,959	49,432	0,76	
9	5376	62,14	1,86	3,4530	260,5571	324,00	702,25	4,921	57,220	67,063	0,82	
10	6603	67,62	3,38	11,3981	467,5928	625,00	1260,25	5,690	61,934	73,314	0,84	
11	7350	70,67	4,33	18,7531	608,5848	841,00	1640,25	6,159	64,511	76,828	0,84	
12	32265		0,00	209,945	3542,055	3752,00	9546,50					
13	3226,5							r	0,972	Sigma(r)	dr	R2
14		MSR :	3542,055						0,0028		0,007	0,944
15		MSE :	26,243	S :	5,1228							
16		F :	134,97	S2_e :	26,2432				r - dr	r + dr		
17		Fкр :	5,32						0,965			
18												
19		Ткр :	2,306			S2_b	Sigma(b)	t	db	b - db	b + db	
20				b1 :	0,609	0,0027	0,052	11,618	0,121	0,488	0,730	
21				b0 :	10,975	11,7131	3,422	3,207	7,892	3,083	18,867	

Готово

Лист1 Лист2 Лист3

NUM

=H15

=J16/L12

=H\$19*КОРЕНЬ(H\$15*(L11/L\$12+1/A\$2))

=КОРЕНЬ(K21)

=D16*B15/D15

=L21*H\$19

=D\$16*B11/G11

=M14*M14

=N14*H19

=J21/L21

=(1-M14)/A2

б

Рис. 3.1

розв'язання задачі 2 розд. 2. У рядку 9 цього листа записуємо прогнозовані значення змінних x , u , z та y .

Елементи регресійного аналізу виробничої функції Кобба–Дугласа (див. задачу 3 розд. 2) проілюстровані на рис. 3.3. Вихідні

D13	=D8-D11*E8									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n	x	y	z=1/y	u=x^2	u^2	uz	z^	(z - z^)^2	(z^ - Zcp)^2
2	5	2,0	1,40	0,7143	4,00	16,0000	2,8571	0,7381	0,00057	0,7727
3	N	2,5	0,86	1,1628	6,25	39,0625	7,2674	1,0977	0,00424	0,2698
4	6,2	3,0	0,69	1,4493	9,00	81,0000	13,0435	1,5372	0,00773	0,0064
5		3,5	0,47	2,1277	12,25	150,0625	26,0638	2,0566	0,00504	0,1932
6		4,0	0,38	2,6316	16,00	256,0000	42,1053	2,6560	0,00060	1,0792
7	Суми :	15	3,80	8,0856	47,50	542,1250	91,3372	8,0856	0,01818	2,3213
8	Середні :			1,6171	9,50	108,4250	18,2674			
9	Прогноз :	4,71			22,18			3,6443		
10										
11			b1 (a) :	0,1598			MSR :	2,3213		
12			b0 (b) :	0,0988			MSE :	0,0061	S :	0,0778
13			b0 (контроль) :	0,0988			Fспост :	383,13		
14										
15							Fкр :	10,13		
16							ткр :	3,182		
17										

a

L9	=СТЕПЕНЬ(E9-\$E\$8;2)								
	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	(z - Zcp)^2	(u - Ucp)^2	Y^	dz	z^ - dz	z^ + dz	Ymin	Ymax	ke
2	0,8151	30,2500	1,3549	0,181	0,557	0,919	1,088	1,794	-1,73
3	0,2064	10,5625	0,9110	0,139	0,958	1,237	0,808	1,043	-1,82
4	0,0282	0,2500	0,6505	0,112	1,426	1,649	0,607	0,701	-1,87
5	0,2607	7,5625	0,4862	0,132	1,925	2,188	0,457	0,520	-1,90
6	1,0291	42,2500	0,3765	0,202	2,454	2,858	0,350	0,407	-1,93
7	2,3395	90,8750	3,7791						
8									
9		160,8864	0,2744	0,427	3,217	4,071	0,246	0,311	-1,95
10									
11			r	sigma(r)	dr				
12			0,9961	0,0008	0,0025				
13									
14				r - dr	r + dr				
15				0,9936	0,9986				
16									
17									

б

Рис. 3.2

I11 =СТЕПЕНЬ(C11-I11;2)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n	w	z=ln(w)	x	u=ln(x)	u^2	uz	z^u	(z - z^u)2	(z^u - zcp)2
2	10	2,299	0,8325	2,710	0,9970	0,9941	0,8301	0,7922	0,00162	0,02071
3	N	2,367	0,8618	3,724	1,3147	1,7284	1,1329	0,8783	0,00027	0,00335
4	6,2	2,519	0,9238	5,042	1,6177	2,6171	1,4945	0,9603	0,00133	0,00058
5		2,576	0,9462	5,055	1,6203	2,6254	1,5331	0,9610	0,00022	0,00062
6		2,886	1,0598	5,680	1,7370	3,0171	1,8409	0,9926	0,00452	0,00319
7		2,410	0,8796	4,559	1,5172	2,3018	1,3345	0,9331	0,00286	0,00001
8		2,581	0,9483	5,045	1,6185	2,6195	1,5348	0,9605	0,00015	0,00059
9		2,747	1,0106	5,266	1,6613	2,7598	1,6789	0,9721	0,00148	0,00129
10		2,727	1,0032	5,298	1,6673	2,7800	1,6727	0,9738	0,00087	0,00141
11		2,449	0,8957	4,636	1,5338	2,3524	1,3739	0,9376	0,00175	0,00000
12	Суми:	25,562	9,3615	47,015	15,2848	23,7956	14,4262	9,3615	0,01508	0,03176
13	Середні:	2,556	0,9362	4,701	1,5285	2,3796	1,4426	0,9362		
14	Прогноз:			5,556	1,7148			0,9886		
15	Виробнича функція Кобба-Дугласа					MSR:	0,0318			
16		b1 (a):			0,2708	MSE:	0,0019			
17		b0 (ln g):			0,5223	Fпогод:	16,85			
18		b0(контроль):			0,5223	Fкр:	5,32			

a

L14 = \$G\$19*КОРЕНЬ(\$G\$16*(O14/\$O\$12+1/\$A\$2+1))										
	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	(z-Zcp)2	dz	z^u - dz	z^u + dz	(u - Ucp)^2	y^u	(y-y^u)^2	(y^u - Y^cp)2	(y - Ycp)2	
2	0,01074	0,087	0,705	0,879	0,2824	7,530	0,096	4,653	3,415	
3	0,00553	0,045	0,833	0,924	0,0457	9,133	0,022	0,307	0,496	z^u=f(u)
4	0,00015	0,034	0,926	0,995	0,0080	9,209	0,109	0,229	0,655	R2
5	0,00010	0,035	0,926	0,996	0,0084	10,091	0,022	0,163	0,065	r
6	0,01530	0,045	0,948	1,037	0,0435	9,768	0,461	0,006	0,576	Fпогод:
7	0,00320	0,032	0,901	0,965	0,0001	10,055	0,275	0,135	0,025	Fкр:
8	0,00015	0,034	0,926	0,995	0,0081	9,773	0,014	0,007	0,001	
9	0,00554	0,038	0,935	1,010	0,0176	10,814	0,173	0,858	1,801	y^u=f(x)
10	0,00450	0,038	0,936	1,012	0,0193	10,155	0,092	0,218	0,593	R2
11	0,00163	0,032	0,906	0,969	0,0000	10,547	0,187	0,739	0,182	r
12	0,04684				0,4332	96,876	1,452	7,315	7,808	Fпогод:
13					0,0433	9,688				Fкр:
14		0,109	0,878	1,095	0,0347	12,069				
15							MSR:	3,6577		
16							MSE:	0,2074		
17							Fпогод:	17,64		
18							Fкр:	4,74		

б

C41 =СУММ(C31:C40)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
29										
30	L	C	Y		X = C/L	U = ln(X)		W = Y/L	Z = ln(W)	
31	3,410	9,242	7,840		2,7103	0,9970		2,2991	0,8325	
32	3,795	14,131	8,984		3,7236	1,3147		2,3673	0,8618	
33	3,525	17,772	8,879		5,0417	1,6177		2,5189	0,9238	
34	3,860	19,511	9,943		5,0547	1,6203		2,5759	0,9462	
35	3,620	20,562	10,447		5,6801	1,7370		2,8859	1,0598	
36	3,955	18,032	9,531		4,5593	1,5172		2,4099	0,8796	
37	3,740	18,870	9,654		5,0455	1,6185		2,5813	0,9483	
38	4,015	21,143	11,030		5,2660	1,6613		2,7472	1,0106	
39	3,835	20,318	10,458		5,2980	1,6673		2,7270	1,0032	
40	4,130	19,145	10,115		4,6356	1,5338		2,4492	0,8957	
41			96,881							
42			9,6881							
43	4,5	25			5,5556	1,7148				
44										
45										

б

Рис. 3.3

дані задачі з розрахунком відповідних значень допоміжних змінних x, u, w, z (див. рис. 3.3, **б**) краще розташувати на робочому листі нижче основної розрахункової частини таблиці (див. рис. 3.3, **а і б**).

У табличних розрахунках цієї задачі використовуються стандартні функції програми MS Excel, які введені до клітинок

$$F31 ([=LN(E31)]), I31 ([=LN(H31)]), P2 ([=EXP(H2)*A31])$$

і скопійовані з відповідних стовпців до клітинок F40, I40, P11. Значення усіх чотирьох допоміжних змінних $x = C / L$, $u = \ln(x)$, $w = Y / L$ і $z = \ln(w)$, попередньо обчислених у клітинках E31-E40, F31-F40, H31-H40 та I31-I40, скопійовані потім в основну частину таблиці (стовпці D2-D11, E2-E11, B2-B11, C2-C11). Зауважимо, що у рядку 43 (вихідні дані) і рядку 14 наведені прогнозовані значення.

На рис. 3.4 показані основні елементи аналізу рівняння двофакторної регресії для квадратичної залежності змінних (див. задачу 4 розд. 2). Для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь важливою є команда **Поиск решения** в меню **Сервис**, яка дозволяє визначити параметри b_0, b_1, b_2 рівняння двофакторної регресії. Коефіцієнти цієї системи розміщують у блоці клітинок C19:E21, для чого значення коефіцієнтів копіюють з клітинок рядка 12, розташовуючи їх відповідно до системи (2.3) у клітинки

$$\begin{aligned} C19 ([=A2]), \quad D19 ([=B12]), \quad E19 ([=D12]), \\ C20 ([=B12]), \quad D20 ([=D12]), \quad E20 ([=E12]), \\ C21 ([=D12]), \quad D21 ([=E12]), \quad E21 ([=F12]) \end{aligned}$$

(див. рис. 3.4, **б і в**). Для значень шуканих параметрів відводять клітинки B19 (для b_0), B20 (для b_1) і B21 (для b_2). Вирази лівих частин рівнянь (2.3) вписують у клітинки

$$\begin{aligned} F19 ([=B\$19*C19+B\$20*D19+B\$21*E19]), \\ F20 ([=B\$19*C20+B\$20*D20+B\$21*E20]), \\ F21 ([=B\$19*C21+B\$20*D21+B\$21*E21]). \end{aligned}$$

Після введення команди **Поиск решения** в діалоговому вікні цієї команди в текстовому полі **Изменяя ячейки** вказують діапазон клітинок $\$B\$19:\$B\21 , а в полі попереднього перегляду **Ограничения** – послідовність обмежень у вигляді рівностей $\$F\$19 = \$C\12 , $\$F\$20 = \$G\12 , $\$F\$21 = \$H\12 (клітинки G19, G20 і G21 містять підказку для вказаних обмежень).

Для визначення ціни товару, при якій очікується максимальний у грошовому вираженні обсяг продажів, одержані значення b_0 , b_1 і b_2 копіюють у клітинки C25, D25 і E25 (див. рис. 3.4,з), клітинку B25 залишають для невідомого значення C_m , а в клітинку F25 записують вираз грошового обсягу продажів:

$$= C25*B25+D25*B25*B25+E25*B25*B25*B25].$$

У полі **Установить целевую** вписують адресу клітинки $\$F\25 , перемикач **Равной** установлюють у положення **максимальному значенню** і вказують адресу $\$B\25 у полі **Изменяя ячейки**.

Варіант іншого підходу до визначення оптимальної ціни товару показано в рядку 28 (див. рис. 3.4,д). За цим варіантом, заснованим на знаходженні точки, що дає нульове значення похідній від функції $S = b_0 C + b_1 C^2 + b_2 C^3$ (див. п. 4.4 задачі 4), значення b_0 , b_1 і b_2 копіюють у клітинки C28, D28 і E28, у клітинці B28 передбачають місце для невідомого значення C_m , а в клітинку F25 записують вираз похідної від функції, що визначає грошовий обсяг продажів:

$$= C28+D28*B28*2+E28*B28*B28*3].$$

У полі **Установить целевую** вписують адресу клітинки $\$F\28 , перемикач **Равной** установлюють у положення **значенню** із записом у відповідному текстовому полі значення 0 і вказують адресу $\$B\28 у полі **Изменяя ячейки**.

Корисно звернути увагу на формули, записані у клітинках

$$H25 ([= B19+B20*B25+B21*B25*B25]),$$

$$I25 ([= K18*КОРЕНЬ(J12/(A2-3)*(СТЕПЕНЬ(B25-B13;2)/$$

$$/M12+1/A2+1))]),$$

$$H26 ([= H25*B25]), J26 ([= J25*B25]), K26 ([= K25*B25])$$

(див. п. 4.5 задачі 4).

K11		=СТЕПЕНЬ(И1-С\$13;2)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	x1=Ci	Pi	x2=Ci^2	x1^x2	x2^2	x1*Pi	x2*Pi	Pi^x	(Pi-Pi^2)	(Pi^x-PeP)^2
2	10	12,0	48,3	144,0	1728,0	20736,0	579,6	6955,2	49,7	1,9855	108,77
3	N	13,0	50,2	169,0	2197,0	28561,0	652,6	8483,8	50,4	0,0440	123,87
4	6,2	14,0	52,1	196,0	2744,0	38416,0	729,4	10211,6	50,0	4,5008	114,46
5		15,0	49,4	225,0	3375,0	50625,0	741,0	11115,0	48,4	0,9693	83,46
6		16,0	46,3	256,0	4096,0	66536,0	740,8	11852,8	45,7	0,3367	41,48
7		17,0	41,8	289,0	4913,0	83521,0	710,6	12080,2	41,9	0,0088	6,83
8		18,0	35,0	324,0	5832,0	104976,0	630,0	11340,0	36,9	3,7460	5,50
9		19,0	28,7	361,0	6859,0	130321,0	545,3	10360,7	30,8	4,6017	71,15
10		20,0	24,8	400,0	8000,0	160000,0	496,0	9920,0	23,6	1,3863	245,14
11		21,0	16,2	441,0	9261,0	194481,0	340,2	7144,2	15,3	0,8666	576,52
12	Суми :	165,0	392,8	2805,0	49005,0	877173,0	6165,5	99463,5	392,8	18,4437	1377,17
13	Середні :	16,50	39,28								
14										MSR :	688,586
15										MSE :	2,635
16										Fспост :	261,34
17										Fкр :	4,74

a

F21		=B19*C21+B20*D21+B21*E21									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
14										MSR :	688,586
15										MSE :	2,635
16										Fспост :	261,34
17										Fкр :	4,74
18		b	Коефіцієнти рівнянь				Пр.част.			Ткр :	2,365
19	b0 :	-46,980	10,0	165,0	2805,0	392,8	=c12				
20	b1 :	14,848	165,0	2805,0	49005,0	6165,5	=g12				
21	b2 :	-0,566	2805,0	49005,0	877173,0	99463,5	=h12				
22											
23			S=b0*Pi+b1*Pi^2+b2*Pi^3								
24		b0	b1	b2	Max		Pm	dP	P - dP	P + dP	
25	Сm :	15,73	-46,980	14,848	-0,566	732,39	46,55	4,04	42,51	50,59	
26			S' = b0 + b1*Pi^2 + b2*Pi^2*3 = 0				Sm	Sm_min	Sm_max		
27		b0	b1	b2	0		732,39		668,83	795,94	
28	Сm :	15,73	-46,980	14,848	-0,566	0					
29											
30											

б

320											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
12	Суми	165,0	392,8	2805,0	49005,0	877173,0	6165,5	99463,5	392,8	18,4437	1377,17
13	Средн	16,50	39,28								
14											
15											
16											
17											
18		b	Коефіцієнти рівнянь				Пр.част.				
19	b0 :	-46,980	10,0	165,0	2805,0	392,8	=c12				
20	b1 :	14,848	165,0	2805,0	49005,0	6165,5	=g12				
21	b2 :	-0,566	2805,0	49005,0	877173,0	99463,5	=h12				
22											
23			S=b0*Pi+b1*Pi^2+b2*Pi^3								
24		b0	b1	b2	Max						
25	Сm :	15,73	-46,980	14,848	-0,566	732,39					
26			S' = b0 + b1*Pi^2 + b2*Pi^2*3 = 0								
27		b0	b1	b2	0						
28	Сm :	15,73	-46,980	14,848	-0,566	0					

Поиск решения

Установить целевую

Равной: ☐ Максимальному значению ☒ Минимальному значению

Изменяя ячейки:

\$B\$19:\$B\$21

Ограничения:

\$F\$19 = \$C\$12

\$F\$20 = \$G\$12

\$F\$21 = \$H\$12

6

B25		=C25*B25+D25*B25*B25+E25*B25*B25*B25									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
17										Фкр :	4,74
18		b	Коефіцієнти рівнянь			Пр.част.				Ткр :	2,365
19		b0 :	-46,980	10,0	165,0	2805,0	392,8				
20		b1 :	14,848	165,0	2805,0	49005,0	6165,5				
21		b2 :	-0,566	2805,0	49005,0	877173,0	99463,5				
22											
23			S=b0*Pi+b1*Pi2+b2*Pi3								
24			b0	b1	b2	Max					
25		Cm :	15,73	-46,980	14,848	-0,566	732,39				
26			S'=b0+b1*Pi2+b2*Pi2^3=0								
27			b0	b1	b2	0					
28		Cm :	15,73	-46,980	14,848	-0,566	0				
29											
30											
31											
32											
33											
Лист1 / Лист2 / Лист3 / Лист4 /											
Укажите											

Поиск решения

Установить целевую:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ знач

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

2

B28		=C28+D28*B28^2+E28*B28*B28^3									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
21	b2 :	-0,566	2805,0	49005,0	877173,0	99463,5	=h12				
22											
23			S=b0*Pi+b1*Pi2+b2*Pi3								
24			b0	b1	b2	Max		Pm	dP	P - dP	P + dP
25	Cm :	15,73	-46,980	14,848	-0,566	732,39		46,55	4,04	42,51	50,59
26			S'=b0+b1*Pi2+b2*Pi2^3=0					Sm		Sm_min	Sm_max
27			b0	b1	b2	0		732,39		668,83	795,94
28	Cm :	15,73	-46,980	14,848	-0,566	0					
29											
30											
31											
32											
33											
34											
35											
36											
37											
Лист1 / Лист2											
Укажите											

Поиск решения

Установить целевую:

Равной: ☐ максимальному значению ☒ значению:

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Предположить

Ограничения:

Параметры

д

Рис. 3.4

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

ANOVA-таблиця дисперсійного аналізу – таблиця, яка відповідно до певного джерела варіації містить регресійну, залишкову й загальну суми квадратів, число відповідних ступенів вільності та регресійний і залишковий середні квадрати.

Автокореляція залишків – коваріаційний взаємозв'язок залишків у послідовних елементах динамічного або варіаційного ряду даних.

Варіанта – окремий елемент числової послідовності, яка створює варіаційний ряд.

Варіаційний ряд – упорядкована послідовність числових значень певного показника, який належить кожному об'єкту із заданої сукупності досліджуваних об'єктів.

Варіація – див. *Дисперсія вибірка*.

Вибіркова сукупність, або **вибірка** – сукупність числових значень досліджуваного показника, що характеризують певну кількість об'єктів, відібраних із загальної (генеральної) сукупності за принципом випадкового вибору.

Виробнича функція Кобба–Дугласа – запропонований та досліджений американськими науковцями Коббом і Дугласом параметричний клас функцій виду $\hat{y} = \gamma C^{\alpha} L^{\beta}$ ($\gamma > 0$; $\alpha, \beta \geq 0$; $\alpha + \beta = 1$), що встановлює залежність обсягу виробленої продукції від обсягу витрат основного капіталу й обсягу витрат праці.

Гетероскедастичність залишків – властивість економетричної моделі, яка полягає в тому, що дисперсія залишків не є сталою величиною в області визначення моделі.

Гомоскедастичність залишків – властивість економетричної моделі, яка полягає у незалежності дисперсії залишків від значень факторів.

Динамічний ряд – послідовність числових значень певного показника, що спостерігаються у досліджуваному об'єкті через рівновіддалені проміжки часу за однією й тією ж методикою.

Дисперсія вибіркова – числова характеристика кількісної ознаки x , що належить об'єктам вибіркової сукупності; обчислюється

за формулами $D_x = \sigma_x^2 = \text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ або

$$D_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Дисперсія залишків (помилки) – складова загальної дисперсії пояснюваної змінної регресійної моделі, що обчислюється за формулою

$$\sigma_{\text{зал}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Дисперсія залишкова виправлена (див. також **Середній квадрат залишків**) – значення залишкової дисперсії, що враховує число ступенів вільності суми квадратів залишків і обчислюється за

$$\text{допомогою формули } \sigma_e^2 = \text{MSE} = \frac{1}{n - m - 1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Довірча ймовірність – див. **Рівень надійності**.

Довірчий інтервал – інтервал, до якого із заданою надійністю (довірчою ймовірністю) належить значення досліджуваного параметра, що характеризує генеральну сукупність об'єктів.

Економетрична модель – функція або система функцій, що описує регресійний зв'язок між кількісними економічними показниками.

Економетрія – наука про кількісні закономірності та взаємозв'язки економічних об'єктів і процесів.

Змінна пояснювальна – див. **Фактор**.

Змінна пояснювана – залежна змінна регресійної моделі.

Інтервал довіри – див. **Довірчий інтервал**.

Коефіцієнт детермінації простий – відносне значення регресійної дисперсії як складової загальної дисперсії:

$$R^2 = \frac{\sigma_{\text{перп}}^2}{\sigma_{\text{заг}}^2} = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

або

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_{\text{зал}}^2}{\sigma_{\text{заг}}^2} = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Коефіцієнт детермінації оцінений – значення коефіцієнта детермінації, знайдене з урахуванням числа ступенів вільності суми квадратів залишків і загальної суми квадратів:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1}.$$

Коефіцієнт еластичності – числова характеристика лінії регресії $\hat{y} = f(x)$ у заданій точці, розрахована за формулою

$$k_{\text{ел}} = \hat{y}' \cdot \frac{x}{\hat{y}}; \text{ для простої лінійної регресії } k_{\text{ел}} = b_1 \cdot \frac{x}{\hat{y}}, \text{ де } b_1 - \text{нахил регресійної прямої.}$$

Коефіцієнт коваріації – числова характеристика пари змінних x_i та x_j або x_i та y у регресійної моделі; цю характеристику визначають відповідно за формулою

$$k_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n (x_{is} - \bar{x}_i)(x_{js} - \bar{x}_j) \quad \text{або}$$

$$k_{i0} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n (x_{is} - \bar{x}_i)(y_s - \bar{y}), \text{ де } n - \text{кількість спостережень.}$$

Коефіцієнт кореляції у простій регресійній моделі – кількісна оцінка тісноти зв'язку між залежною та незалежною змінними;

обчислюється за формулою $r = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ або $r = b_1 \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, де k_{xy} – ко-

ефіцієнт коваріації змінних x та y ; σ_x та σ_y – середньоквадратичні відхилення цих змінних; b_1 – нахил регресійної прямої.

Коефіцієнт множинної кореляції – числова характеристика багатofакторної регресійної моделі, яку знаходять за формулою

$r = \sqrt{R^2}$ (R^2 – коефіцієнт детермінації даної моделі) і яка оцінює тісноту зв'язку всіх пояснювальних змінних з пояснюваною.

Коефіцієнт парної кореляції – кількісна оцінка тісноти зв'язку між змінними x_i та x_j (або x_i та y) регресійної моделі; цю харак-

теристику визначають за формулою $r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, де k_{ij} (k_{i0}) – коефі-

цієнти коваріації змінних x_i та x_j (x_i та y), σ_i , σ_j , σ_0 – середньо-квадратичні відхилення змінних x_i , x_j , y .

Криві зростання – нелінійні залежності змінних економетричних моделей, які описують певні взаємозв'язки між різними економічними показниками; найчастіше використовуються такі криві, як квадратична ($y = b_0 + b_1x + b_2x^2$), степенева ($y = \alpha x^\beta$),

показникова ($y = \alpha \beta^x$), зворотна $\left(y = b_0 + b_1 \frac{1}{x} \right)$ тощо.

Критерій згоди – деяка випадкова величина з відомим розподілом, яку використовують для перевірки статистичної гіпотези шляхом порівняння спостережуваного значення цієї величини та її критичного значення, взятого з відповідної таблиці.

Критичне значення критерію – взятє з відповідної таблиці значення $K_{кр}$, що обумовлює одно- ($K > K_{кр}$) або двосторонню ($|K| > K_{кр}$) критичну область; перевіряючи гіпотезу, встановлюють належність спостережуваного значення критерію визначеній критичній області.

Мультиколінеарність змінних у регресійній моделі – існування сильного кореляційного зв'язку між двома або декількома факторами регресійної моделі.

Метод найменших квадратів (МНК) – метод розрахунку невідомих параметрів рівняння регресії $\hat{y} = f(x)$, який засновано

на мінімізації виразу $\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$, створеного на мно-

жині емпіричних вибірових даних $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$.

Метод найменших квадратів узагальнений (УМНК) – застосовується при створенні лінійної регресійної моделі у випадку існування гетероскедастичності залишків; на відміну від звичай-

ного узагальнений МНК заснований на мінімізації виразу $\sum_{i=1}^n \frac{e_i^2}{\sigma_{e_i}^2}$;

в одному з найпростіших випадків, тобто у припущенні, що змінна дисперсія має форму $\sigma_{e_i}^2 = k^2 x_i^2$, звичайна лінійна модель пере-

творюється до такого вигляду: $\frac{\hat{y}}{x} = b_0 \frac{1}{x} + b_1$ (метод Ейткена).

Надійність – див. *Рівень надійності*.

Нахил регресійної прямої – параметр b_1 рівняння лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$, тобто кутовий коефіцієнт указаної регресійної прямої.

Перевірка адекватності регресійної моделі – встановлення міри відповідності регресійної моделі сукупності фактичних даних, за якою побудована вказана модель; найпоширенішим критерієм цієї перевірки є критерій Фішера.

Перетин регресійної прямої – параметр b_0 рівняння лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$, тобто ордината точки перетину вказаної регресійної прямої з віссю Oy .

Регресійна модель – див. *Регресія лінійна проста* і *Регресія лінійна багатфакторна*.

Регресійна модель узагальнена – залежність між пояснюваною й пояснювальними змінними, яка відображає зв'язок між певними кількісними показниками, що характеризують генеральну сукупність відповідних об'єктів; у випадку простої лінійної регресії узагальнена модель має вигляд $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$.

Регресія лінійна багатofакторна – теоретична залежність між системою кількох пояснювальних (незалежних) змінних та пояснюваною (залежною) змінною; ця залежність є результатом аналізу даної вибіркової сукупності значень указаних змінних.

Регресія лінійна проста – теоретична залежність між пояснюваною (незалежною) та пояснюваною (залежною) змінними, яку отримано з аналізу даної вибіркової сукупності значень указаних змінних.

Рівень динамічного ряду – окремий елемент числової послідовності, яка створює динамічний ряд.

Рівень довіри – див. **Рівень надійності**.

Рівень значимості – ймовірність α можливої помилки щодо прийняття або відхилення статистичної гіпотези; $\alpha = 1 - \gamma$, де γ – рівень надійності (довірча ймовірність).

Рівень надійності – ймовірність γ , з якою гарантовано правильність того чи іншого висновку при перевірці статистичної гіпотези; $\gamma = 1 - \alpha$, де α – рівень значимості.

Середній квадрат – сума квадратів (регресійних відхилень або залишків), поділена на відповідне число ступенів вільності: для регресійних відхилень $MSR = SSR/m$; для залишків $MSE = SSE/n - m - 1$.

Середній квадрат залишків – елемент ANOVA-таблиці, який визначається формулою

$$MSE = \frac{SSE}{n - m - 1} = \frac{1}{n - m - 1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Середній квадрат регресійних відхилень – елемент

ANOVA-таблиці, який визначається формулою

$$MSR = \frac{SSR}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

Середньоквадратичне відхилення – числова характеристика кількісної ознаки x , що належить об'єктам вибіркової сукупності; обчислюється за формулою $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Середньоквадратичне відхилення залишків – квадратний корінь з виправленої залишкової дисперсії: $\sigma_e = \sqrt{\sigma_e^2} = \sqrt{MSE}$.

Середня вибірка – числова характеристика кількісної ознаки x , що належить об'єктам вибіркової сукупності; дорівнює середній арифметичній усіх варіант даної вибірки. Для незгрупованої вибірки $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; для згрупованої $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$ (n_i – частота варіанти x_i ; k – число груп однакових варіант).

Середня хронологічна – середня арифметична всіх рівнів даного динамічного ряду.

Степені вільності – див. **Число ступенів вільності**.

Сума квадратів загальна – елемент ANOVA-таблиці, який ви-

значається формулою $SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$; цей елемент є сумою

$SST = SSR + SSE$; якщо цю суму поділити на n , одержимо аналогічне співвідношення для відповідних дисперсій: $\sigma_{\text{заг}}^2 = \sigma_{\text{рег}}^2 + \sigma_{\text{зал}}^2$.

Сума квадратів залишків – елемент ANOVA-таблиці, який

визначається формулою $SSE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$.

Сума квадратів регресійних відхилень – елемент ANOVA-таб-

лиці, який визначається формулою $SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$.

Фактор – незалежна змінна регресійної моделі.

Частота варіанти – ціле число, яке показує, скільки разів повторюється варіанта в даній вибірці.

Число ступенів вільності – ціле число, поставлене у відповідність до кожної суми квадратів і яке показує, скільки незалежних одиниць інформації, взятих із сукупності емпіричних значень $y_1, y_2, \dots, y_n$, потрібно для розрахунку даної суми квадратів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Грубер Й. Эконометрия. – К.: Астарта, 1996. – 400 с.
 2. Джонстон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.
 3. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 402 с.
 4. Катышев П.К., Пересецкий А.А. Сборник задач к начальному курсу эконометрики. – М.: Дело, 1999. – 72 с.
 5. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. – М.: Статистика, 1977. – 254 с.
 6. Корольов О.А. Эконометрия. – К.: КНЕУ, 2000. – 660 с.
 7. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Эконометрика: Підручник. – К.: Знання, 1998. – 494 с.
 8. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Эконометрика: Практикум з використанням комп'ютера. – К.: Знання, 1998. – 286 с.
 9. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. – М.: Дело, 1998. – 248 с.
 10. Медведев М.Г. Эконометричні методи моделювання: Навч. посіб. – К.: ЕУ, 2003. – 140 с.
 11. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Эконометрия. – К.: КНЕУ, 1997. – 352 с.
 12. Ржевський С.В. Вступ до економетрії: Навч. посіб. для студ. екон. спец. – К.: ЕУФІМБ, 1999. – 91 с.
 13. Толбатов Ю.А. Эконометрика. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.
-

Відповіді до типових завдань (задача 7, п. 2.1)

Варіант	b_1	b_0	σ_x	σ_y	r	MSR	$MSE = \sigma_e^2$	$F_{\text{крит}}$	σ_{b_1}	σ_{b_0}	t_1	t_0	δ_1	δ_0
1	0,18	-2,75	4,06	0,78	0,92	2,57	0,15	17,30	0,0425	1,2968	4,16	-2,12	0,14	4,13
2	0,51	15,42	24,63	14,89	0,85	965,10	91,10	10,59	0,1582	8,0919	3,25	1,91	0,44	22,46
3	2,63	-9,29	5,44	18,29	0,78	1435,47	181,25	7,92	0,9360	29,1287	2,81	-0,32	2,41	74,89
4	0,65	15,35	21,01	15,65	0,87	1469,86	81,50	18,03	0,1519	7,0660	4,25	2,17	0,37	17,29
5	0,33	-2,87	11,93	4,00	0,99	141,38	0,37	378,40	0,0171	0,8078	19,45	-3,56	0,04	1,91
6	22,47	-5,93	0,61	14,59	0,94	944,86	39,88	23,69	4,6166	6,9436	4,87	-0,85	14,69	22,09
7	3,80	21,38	0,86	3,93	0,83	64,49	7,09	9,09	1,2618	3,2769	3,02	6,52	3,50	9,10
8	1,29	16,04	9,10	14,39	0,81	958,02	98,34	9,74	0,4119	14,1326	3,12	1,13	1,06	36,33
9	0,65	14,54	22,48	16,32	0,90	1733,79	66,18	26,20	0,1279	6,0664	5,12	2,40	0,31	14,84
10	0,64	11,89	27,94	18,44	0,96	2844,58	30,71	92,63	0,0661	3,7934	9,62	3,13	0,16	8,97
11	2,19	-12,19	7,40	18,16	0,89	1314,08	111,71	11,76	0,6389	21,9702	3,43	-0,55	1,51	51,96
12	0,33	-3,13	13,17	4,43	0,99	116,02	0,37	313,31	0,0189	0,8633	17,70	-3,63	0,05	2,40
13	-21,27	54,73	0,52	13,70	-0,81	859,24	90,88	9,45	6,9177	9,7982	-3,07	5,59	17,79	25,19
14	0,68	9,61	13,15	10,37	0,87	648,85	35,11	18,48	0,1593	12,3089	4,30	0,78	0,39	30,12
15	2,15	2,45	5,54	12,52	0,95	1129,11	18,86	59,86	0,2779	8,2309	7,74	0,30	0,66	19,47
16	1,50	15,40	7,15	10,96	0,98	575,07	8,58	67,06	0,1831	5,3883	8,19	2,86	0,58	17,15
17	0,11	-0,22	6,05	0,76	0,91	2,84	0,15	19,16	0,0259	0,6893	4,38	-0,32	0,07	1,91
18	0,66	9,86	27,89	18,61	0,99	2355,93	13,50	174,51	0,0498	2,7826	13,21	3,54	0,13	7,15
19	2,21	0,68	5,79	13,28	0,97	1058,85	16,18	65,44	0,2737	7,9403	8,09	0,09	0,67	19,43
20	0,59	17,98	26,48	16,02	0,98	2200,28	15,61	140,95	0,0497	2,7603	11,87	6,51	0,12	6,53
21	0,16	-0,89	7,47	1,25	0,97	7,44	0,14	51,93	0,0227	0,5240	7,21	-1,71	0,07	1,67
22	0,54	16,16	23,67	14,46	0,88	975,53	69,83	13,97	0,1441	6,5748	3,74	2,46	0,40	18,25

Продовж. дод. 1

Варіант	b_1	b_0	σ_x	σ_y	r	MSR	$MSE = \sigma_e^2$	$F_{\text{крит}}$	σ_{b_1}	σ_{b_0}	t_1	t_0	δ_1	δ_0
23	1,72	6,85	9,14	17,60	0,89	1724,69	88,60	19,47	0,3891	15,0953	4,41	0,45	1,00	38,81
24	1,08	60,87	7,04	8,19	0,93	464,00	12,15	38,20	0,1749	4,2291	6,18	14,39	0,43	10,35
25	0,64	10,37	28,68	19,09	0,97	3061,87	31,00	98,76	0,0647	3,9380	9,94	2,63	0,15	9,31
26	0,91	62,64	8,18	7,66	0,97	274,94	6,09	45,18	0,1348	3,1392	6,72	19,96	0,43	9,99
27	0,16	-0,79	6,08	1,13	0,87	5,80	0,47	12,28	0,0462	1,0478	3,50	-0,75	0,13	2,91
28	2,48	-6,97	4,85	13,94	0,86	1013,19	69,25	14,63	0,6484	19,0015	3,83	-0,37	1,67	48,85
29	0,94	58,43	8,21	8,19	0,94	475,05	10,30	46,10	0,1382	4,1987	6,79	13,92	0,34	10,27
30	0,92	17,35	18,26	22,75	0,74	2531,35	304,03	8,33	0,3183	16,2788	2,89	1,07	0,75	38,50
31	3,56	5,30	3,21	11,83	0,96	650,23	16,57	39,25	0,5676	3,8515	6,26	1,38	1,81	12,26
32	0,89	60,00	8,43	8,11	0,93	340,39	13,61	25,01	0,1786	5,7659	5,00	10,41	0,44	14,11
33	0,16	-1,99	7,34	1,25	0,95	9,91	0,22	44,98	0,0242	0,6823	6,71	-2,92	0,06	1,75
34	0,66	6,79	11,20	7,91	0,93	432,38	11,27	38,37	0,1060	2,5111	6,19	2,71	0,26	6,14
35	3,58	3,06	3,64	13,21	0,99	1529,56	5,74	266,70	0,2192	1,5657	16,33	1,95	0,52	3,70

Критичні точки F -розподілу Фішера: значення $F(\alpha, k_1, k_2)$ для рівнів значимості
 $\alpha = 0,1; 0,05; 0,01$

k_2	k_1																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	
$\alpha = 0,1$																				
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06	63,33	
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48	9,49	
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,2	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14	5,13	
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78	3,76	
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12	3,10	
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,72	
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49	2,47	
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32	2,29	
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18	2,16	
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08	2,06	
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00	1,97	
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,90	
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85	
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80	
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79	1,76	
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	

k_2	k_1																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	
$\alpha = 0,1$																				
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67	1,63	1,63
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64	1,61	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,57
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59	1,55	1,55
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57	1,53	1,53
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,85	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54	1,50	1,50
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53	1,49	1,49
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52	1,48	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51	1,47	1,47
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50	1,46	1,46
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,65	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42	1,38	1,38
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,65	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35	1,29	1,29
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26	1,19	1,19
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17	1,00	1,00
$\alpha = 0,05$																				
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3	254,3

2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,39	19,41	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,57	2,93
9	5,12	4,26	3,63	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,73	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,83	2,77	2,72	2,64	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,59	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,45	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,72	2,60	2,52	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,36	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,38	2,32	2,28	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,26	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73

k_2	k_1																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	
$\alpha=0,05$																				
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,54	1,47	1,39	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,49	1,43	1,35	1,25	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00	1,00
$\alpha=0,01$																				
1	4052,1	4999,0	5403,5	5625,1	5764,1	5859,4	5928,0	5982,1	6023,0	6056,2	6106,0	6157,0	6209,0	6235,0	6261,0	6287,0	6313,0	6339,0	6366,0	6366,0
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,35	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,67	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,28	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86	4,86

9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,94	5,72	4,81	4,31	3,99	3,75	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

**Таблиця критичних точок t -розподілу Стьюдента
(двостороння/одностороння критична область)**

k	γ						
	0,8/0,9	0,9/0,95	0,95/0,975	0,98/0,99	0,99/0,995	0,998/0,999	0,999/0,9995
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,310	636,60
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,60
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,94
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,17	8,61
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,89	6,86
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	3,21	5,96
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,79	5,40
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,50	5,04
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,30	4,78
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,14	4,59
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,03	4,49
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,93	4,32
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,85	4,22
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,79	4,14
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,73	4,07
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,69	4,02
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,65	3,96
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,61	3,92
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,58	3,88
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,55	3,85
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,53	3,82
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,51	3,79
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,49	3,77
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,47	3,74
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,45	3,72
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,44	3,71
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,42	3,69
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,41	3,67
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,40	3,66
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,39	3,65
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,31	3,55
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,23	3,46
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,16	3,37
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,09	3,29

Таблиця значень $\chi^2 = f(\alpha, k)$
(критичні точки χ^2 -розподілу)

k	α					
	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,001
1	2,71	3,84	5,02	5,41	6,63	10,83
2	4,61	5,99	7,38	7,82	9,21	13,82
3	6,25	7,81	9,35	9,84	11,34	16,27
4	7,78	9,49	11,14	11,67	13,28	18,46
5	9,24	11,07	12,83	13,39	15,09	20,5
6	10,64	12,59	14,45	15,03	16,81	22,5
7	12,02	14,07	16,01	16,62	18,48	24,3
8	13,36	15,51	17,53	18,17	20,1	26,1
9	14,68	16,92	19,02	19,68	21,7	27,9
10	15,99	18,31	20,5	21,2	23,2	29,6
11	17,27	19,68	21,9	22,6	24,7	31,3
12	18,55	21,0	23,3	24,1	26,2	32,9
13	19,81	22,4	24,7	25,5	27,7	34,6
14	21,1	23,7	26,1	26,9	29,1	36,1
15	22,3	25,0	27,5	28,3	30,6	37,7
16	23,5	26,3	28,8	29,6	32,0	39,3
17	24,8	27,6	30,2	31,0	33,4	40,8
18	26,0	28,9	31,5	32,3	34,8	42,3
19	27,2	30,1	32,9	33,7	36,2	43,8
20	28,4	31,4	34,2	35,0	37,6	45,3
21	29,6	32,7	35,5	36,3	38,9	46,8
22	30,8	33,9	36,8	37,7	40,3	48,3
23	32,0	35,2	38,1	39,0	41,6	49,7
24	33,2	36,4	39,4	40,3	43,0	51,2
25	34,4	37,7	40,6	41,7	44,3	52,6
26	35,6	38,9	41,9	42,9	45,6	54,1
27	36,7	40,1	43,2	44,1	47,0	55,5
28	37,9	41,3	44,5	45,4	48,3	56,9
29	39,1	42,6	45,7	46,7	49,6	58,3
30	40,3	43,8	47,0	48,0	50,9	59,7

Критичні точки DW -статистики Дарбіна–Уотсона для рівнів значимості $\alpha = 0,05; 0,01$

n	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$		$m = 6$		$m = 7$		$m = 8$		$m = 9$		$m = 10$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
$\alpha = 0,05$																				
10	0,879	1,320	0,697	1,641	0,525	2,016	0,376	2,414	0,243	2,822	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0,927	1,324	0,658	1,604	0,595	1,928	0,444	2,283	0,316	2,645	0,203	3,005	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0,971	1,311	0,812	1,579	0,658	1,864	0,512	2,177	0,379	2,506	0,268	2,832	0,171	3,149	—	—	—	—	—	—
13	1,010	1,340	0,861	1,562	0,715	1,816	0,574	2,094	0,445	2,390	0,328	2,692	0,230	2,985	0,147	3,266	—	—	—	—
14	1,045	1,350	0,905	1,551	0,767	1,779	0,632	2,030	0,505	2,296	0,389	2,572	0,286	2,848	0,200	3,111	0,127	3,360	—	—
15	1,077	1,361	0,946	1,543	0,814	1,750	0,685	1,977	0,562	2,220	0,447	2,472	0,343	2,727	0,251	2,979	0,175	3,216	0,111	3,438
16	1,106	1,371	0,982	1,539	0,857	1,728	0,734	1,935	0,615	2,157	0,502	2,388	0,398	2,624	0,304	2,860	0,222	3,090	0,155	3,304
17	1,133	1,381	1,015	1,536	0,897	1,710	0,779	1,900	0,664	2,104	0,554	2,318	0,451	2,537	0,356	2,757	0,272	2,975	0,198	3,184
18	1,158	1,391	1,046	1,535	0,933	1,696	0,820	1,872	0,710	2,060	0,603	2,257	0,502	2,461	0,407	2,667	0,321	2,873	0,244	3,073
19	1,180	1,401	1,074	1,536	0,967	1,685	0,859	1,848	0,752	2,023	0,649	2,206	0,459	2,396	0,456	2,589	0,369	2,783	0,290	2,974
20	1,201	1,411	1,100	1,537	0,998	1,676	0,894	1,828	0,792	1,991	0,692	2,162	0,595	2,339	0,502	2,521	0,416	2,704	0,336	2,885
21	1,221	1,420	1,125	1,538	1,026	1,669	0,927	1,812	0,829	1,964	0,732	2,124	0,637	2,290	0,547	2,460	0,461	2,633	0,380	2,806
22	1,239	1,429	1,147	1,541	1,053	1,664	0,958	1,797	0,863	1,940	0,769	2,090	0,677	2,246	0,588	2,407	0,504	2,571	0,424	2,734
23	1,257	1,437	1,168	1,543	1,078	1,660	0,986	1,785	0,895	1,920	0,804	2,061	0,715	2,208	0,628	2,360	0,545	2,514	0,465	2,670
24	1,273	1,446	1,188	1,546	1,101	1,656	1,013	1,775	0,925	1,902	0,837	2,035	0,751	2,174	0,666	2,318	0,584	2,464	0,506	2,613
25	1,288	1,454	1,206	1,550	1,123	1,654	1,038	1,767	0,953	1,886	0,868	2,012	0,784	2,144	0,702	2,280	0,621	2,419	0,544	2,560
26	1,302	1,461	1,224	1,553	1,143	1,652	1,062	1,759	0,979	1,873	0,897	1,992	0,816	2,117	0,735	2,246	0,657	2,379	0,581	2,513
27	1,316	1,469	1,240	1,556	1,162	1,651	1,084	1,753	1,004	1,861	0,925	1,974	0,845	2,093	0,767	2,216	0,691	2,342	0,616	2,470
28	1,328	1,476	1,225	1,560	1,181	1,650	1,104	1,747	1,028	1,850	0,951	1,958	0,874	2,071	0,798	2,188	0,723	2,309	0,650	2,431
29	1,341	1,483	1,270	1,563	1,198	1,650	1,124	1,743	1,050	1,841	0,975	1,944	0,900	2,052	0,826	2,164	0,753	2,278	0,682	2,396
30	1,352	1,489	1,284	1,567	1,214	1,650	1,143	1,739	1,071	1,833	0,998	1,931	0,926	2,034	0,854	2,141	0,782	2,251	0,712	2,363
31	1,363	1,496	1,297	1,570	1,229	1,650	1,160	1,735	1,090	1,825	1,020	1,920	0,950	2,018	0,879	2,120	0,810	2,226	0,741	2,333
32	1,373	1,502	1,309	1,574	1,244	1,650	1,177	1,732	1,109	1,819	1,041	1,909	0,972	2,004	0,904	2,102	0,836	2,203	0,769	2,306

33	1,383	1,508	1,321	1,577	1,258	1,651	1,193	1,730	1,127	1,813	1,061	1,900	0,994	1,991	0,927	2,085	0,861	2,181	0,795	2,281
34	1,393	1,514	1,333	1,580	1,271	1,652	1,208	1,728	1,144	1,808	1,080	1,891	1,015	1,979	0,950	2,069	0,885	2,162	0,821	2,257
35	1,402	1,519	1,343	1,584	1,283	1,653	1,222	1,726	1,160	1,803	1,097	1,884	1,034	1,967	0,971	2,054	0,908	2,144	0,845	2,236
36	1,411	1,525	1,354	1,587	1,295	1,654	1,236	1,724	1,175	1,799	1,114	1,877	1,053	1,957	0,991	2,041	0,930	2,127	0,868	2,216
37	1,419	1,530	1,364	1,590	1,307	1,655	1,249	1,723	1,190	1,795	1,131	1,870	1,071	1,948	1,011	2,029	0,951	2,112	0,891	2,198
38	1,427	1,535	1,373	1,594	1,318	1,656	1,261	1,722	1,204	1,792	1,146	1,064	1,068	1,939	1,029	2,017	0,970	2,096	0,912	2,160
39	1,435	1,540	1,382	1,597	1,328	1,658	1,273	1,722	1,218	1,789	1,161	1,059	1,104	1,932	1,047	2,007	0,999	2,085	0,932	2,164
40	1,442	1,544	1,391	1,600	1,338	1,659	1,285	1,721	1,230	1,786	1,175	1,054	1,120	1,924	1,064	1,997	1,008	2,072	0,945	2,149
45	1,475	1,566	1,430	1,615	1,383	1,666	1,336	1,720	1,287	1,776	1,238	1,035	1,109	1,895	1,139	1,958	1,009	2,002	1,038	2,088
50	1,503	1,585	1,462	1,628	1,421	1,674	1,378	1,721	1,355	1,771	1,291	1,022	1,246	1,875	1,201	1,930	1,156	1,986	1,110	2,044
55	1,528	1,601	1,490	1,641	1,452	1,681	1,414	1,724	1,374	1,768	1,334	1,014	1,294	1,861	1,253	1,909	1,212	1,959	1,170	2,010
60	1,549	1,616	1,514	1,652	1,480	1,689	1,444	1,727	1,408	1,767	1,372	1,008	1,335	1,850	1,290	1,894	1,268	1,939	1,222	1,984
65	1,567	1,629	1,536	1,662	1,503	1,696	1,471	1,731	1,438	1,767	1,404	1,005	1,379	1,843	1,336	1,882	1,301	1,923	1,266	1,964
70	1,583	1,641	1,554	1,672	1,525	1,703	1,494	1,735	1,464	1,768	1,433	1,002	1,401	1,837	1,360	1,873	1,337	1,910	1,305	1,948
75	1,598	1,652	1,571	1,680	1,543	1,709	1,515	1,739	1,487	1,770	1,458	1,001	1,428	1,834	1,399	1,867	1,369	1,901	1,339	1,935
80	1,611	1,662	1,586	1,688	1,560	1,715	1,534	1,743	1,507	1,772	1,480	1,001	1,453	1,831	1,425	1,861	1,397	1,893	1,369	1,925
85	1,624	1,671	1,600	1,696	1,575	1,721	1,550	1,747	1,525	1,774	1,500	1,001	1,474	1,829	1,448	1,857	1,422	1,806	1,396	1,916
90	1,635	1,679	1,612	1,703	1,589	1,726	1,566	1,751	1,542	1,776	1,518	1,001	1,494	1,827	1,469	1,854	1,445	1,801	1,420	1,909
95	1,645	1,687	1,623	1,709	1,602	1,732	1,579	1,755	1,557	1,778	1,535	1,002	1,512	1,827	1,489	1,852	1,465	1,877	1,442	1,903
100	1,654	1,694	1,634	1,715	1,613	1,736	1,592	1,758	1,571	1,780	1,550	1,003	1,520	1,826	1,506	1,850	1,484	1,874	1,462	1,896
150	1,720	1,746	1,706	1,760	1,693	1,774	1,679	1,788	1,665	1,802	1,651	1,017	1,637	1,828	1,622	1,847	1,608	1,862	1,594	1,877
200	1,758	1,778	1,748	1,789	1,738	1,799	1,728	1,810	1,718	1,820	1,707	1,031	1,697	1,841	1,696	1,852	1,675	1,863	1,665	1,874

$\alpha = 0,01$

10	0,604	1,001	0,466	1,333	0,340	1,733	0,230	2,193	0,150	2,690	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0,653	1,010	0,519	1,297	0,396	1,640	0,286	2,030	0,193	2,453	0,124	2,892	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0,697	1,023	0,569	1,274	0,449	1,575	0,339	1,913	0,244	2,280	0,164	2,665	0,105	3,053	—	—	—	—	—	—
13	0,738	1,038	0,616	1,261	0,499	1,526	0,391	1,826	0,294	2,150	0,211	2,490	0,140	2,838	0,090	3,182	—	—	—	—
14	0,776	1,054	0,660	1,254	0,547	1,490	0,441	1,757	0,343	2,049	0,257	2,354	0,183	2,667	0,122	2,981	0,078	3,287	—	—
15	0,811	1,070	0,700	1,252	0,591	1,464	0,488	1,704	0,391	1,967	0,303	2,244	0,226	2,530	0,161	2,817	0,107	3,101	0,068	3,374

Продовж. дод. 5

n	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$		$m = 6$		$m = 7$		$m = 8$		$m = 9$		$m = 10$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
$\alpha = 0,01$																				
16	0,844	1,086	0,737	1,252	0,633	1,446	0,532	1,663	0,437	1,900	0,349	2,153	0,269	2,416	0,200	2,681	0,142	2,944	0,094	3,201
17	0,874	1,102	0,772	1,255	0,672	1,432	0,574	1,630	0,480	1,847	0,393	2,078	0,313	2,319	0,241	2,566	0,179	2,811	0,127	3,053
18	0,902	1,118	0,805	1,259	0,708	1,422	0,613	1,604	0,522	1,803	0,435	2,015	0,355	2,238	0,282	2,467	0,216	2,697	0,160	2,925
19	0,928	1,132	0,835	1,265	0,742	1,415	0,650	1,584	0,561	1,767	0,476	1,963	0,396	2,169	0,322	2,381	0,255	2,597	0,196	2,813
20	0,952	1,147	0,863	1,271	0,773	1,411	0,685	1,567	0,598	1,737	0,515	1,918	0,436	2,110	0,362	2,308	0,294	2,510	0,232	2,714
21	0,975	1,161	0,890	1,277	0,803	1,408	0,718	1,554	0,633	1,712	0,552	1,881	0,474	2,059	0,400	2,244	0,331	2,434	0,268	2,625
22	0,997	1,174	0,914	1,284	0,831	1,407	0,748	1,543	0,667	1,691	0,587	1,849	0,510	2,015	0,437	2,188	0,368	2,367	0,304	2,548
23	1,018	1,187	0,938	1,291	0,858	1,407	0,777	1,534	0,698	1,673	0,620	1,821	0,545	1,977	0,473	2,140	0,404	2,308	0,340	2,479
24	1,037	1,199	0,960	1,298	0,882	1,407	0,805	1,528	0,728	1,658	0,652	1,797	0,578	1,944	0,507	2,097	0,439	2,255	0,375	2,417
25	1,055	1,211	0,981	1,305	0,906	1,409	0,831	1,523	0,756	1,645	0,682	1,766	0,610	1,915	0,540	2,059	0,473	2,209	0,409	2,362
26	1,072	1,222	1,001	1,312	0,928	1,411	0,855	1,518	0,783	1,635	0,711	1,759	0,640	1,889	0,572	2,026	0,505	2,168	0,441	2,313
27	1,089	1,233	1,019	1,319	0,949	1,413	0,878	1,515	0,808	1,626	0,738	1,743	0,669	1,867	0,602	1,997	0,536	2,131	0,473	2,269
28	1,104	1,244	1,037	1,325	0,969	1,415	0,900	1,513	0,832	1,618	0,764	1,729	0,696	1,847	0,630	1,970	0,566	2,098	0,504	2,229
29	1,119	1,254	1,054	1,332	0,988	1,418	0,921	1,512	0,855	1,611	0,788	1,718	0,723	1,830	0,658	1,947	0,595	2,068	0,533	2,193
30	1,133	1,263	1,070	1,339	1,006	1,421	0,941	1,511	0,877	1,606	0,812	1,707	0,748	1,814	0,684	1,925	0,622	2,041	0,562	2,160
31	1,147	1,273	1,085	1,345	1,023	1,425	0,960	1,510	0,897	1,601	0,834	1,698	0,772	1,800	0,710	1,906	0,649	2,017	0,589	2,131
32	1,160	1,282	1,100	1,352	1,040	1,428	0,979	1,510	0,917	1,597	0,856	1,690	0,794	1,788	0,734	1,889	0,674	1,995	0,615	2,104
33	1,172	1,291	1,114	1,358	1,055	1,432	0,996	1,510	0,936	1,594	0,876	1,683	0,816	1,776	0,757	1,874	0,698	1,975	0,641	2,080
34	1,184	1,299	1,128	1,364	1,070	1,435	1,012	1,511	0,954	1,591	0,896	1,677	0,837	1,766	0,779	1,860	0,722	1,957	0,665	2,057
35	1,195	1,307	1,140	1,370	1,085	1,439	1,028	1,512	0,971	1,589	0,914	1,671	0,857	1,757	0,800	1,847	0,744	1,940	0,689	2,037
36	1,206	1,315	1,153	1,376	1,098	1,442	1,043	1,513	0,988	1,588	0,932	1,666	0,877	1,749	0,821	1,836	0,766	1,925	0,711	2,018
37	1,217	1,323	1,165	1,382	1,112	1,446	1,058	1,514	1,004	1,586	0,950	1,662	0,895	1,742	0,841	1,825	0,787	1,911	0,733	2,001
38	1,227	1,330	1,176	1,388	1,124	1,449	1,072	1,515	1,019	1,585	0,966	1,658	0,913	1,735	0,860	1,816	0,807	1,899	0,754	1,985
39	1,237	1,337	1,187	1,393	1,137	1,453	1,085	1,517	1,034	1,584	0,982	1,655	0,930	1,729	0,878	1,807	0,826	1,887	0,774	1,970
40	1,246	1,344	1,198	1,398	1,148	1,457	1,098	1,518	1,048	1,584	0,997	1,652	0,946	1,724	0,895	1,799	0,844	1,876	0,789	1,956

45	1,288	1,376	1,245	1,423	1,201	1,474	1,156	1,528	1,111	1,584	1,065	1,643	1,019	1,704	0,974	1,768	0,927	1,834	0,881	1,902
50	1,324	1,403	1,285	1,446	1,245	1,491	1,205	1,538	1,164	1,587	1,123	1,639	1,081	1,692	1,039	1,748	0,997	1,805	0,955	1,864
55	1,356	1,427	1,320	1,466	1,284	1,506	1,247	1,548	1,209	1,592	1,172	1,638	1,134	1,685	1,095	1,734	1,057	1,785	1,018	1,837
60	1,383	1,449	1,350	1,484	1,317	1,520	1,283	1,558	1,249	1,598	1,214	1,639	1,179	1,682	1,144	1,726	1,108	1,771	1,072	1,817
65	1,407	1,468	1,377	1,500	1,346	1,534	1,315	1,568	1,283	1,604	1,251	1,642	1,218	1,680	1,186	1,720	1,153	1,761	1,120	1,802
70	1,429	1,485	1,400	1,515	1,372	1,546	1,343	1,578	1,313	1,611	1,283	1,645	1,253	1,680	1,223	1,716	1,192	1,754	1,162	1,792
75	1,448	1,501	1,422	1,529	1,395	1,557	1,368	1,587	1,340	1,617	1,313	1,646	1,284	1,682	1,256	1,716	1,227	1,746	1,199	1,785
80	1,466	1,515	1,441	1,541	1,416	1,586	1,390	1,595	1,364	1,624	1,338	1,653	1,312	1,683	1,285	1,714	1,259	1,745	1,232	1,777
85	1,482	1,528	1,458	1,553	1,435	1,578	1,411	1,603	1,386	1,630	1,362	1,657	1,337	1,685	1,312	1,714	1,287	1,743	1,262	1,773
90	1,496	1,540	1,474	1,563	1,452	1,587	1,429	1,611	1,406	1,636	1,383	1,661	1,360	1,687	1,336	1,714	1,312	1,741	1,288	1,769
95	1,410	1,552	1,489	1,573	1,468	1,596	1,446	1,618	1,425	1,642	1,403	1,666	1,381	1,690	1,358	1,715	1,336	1,741	1,313	1,767
100	1,522	1,562	1,503	1,583	1,482	1,604	1,462	1,625	1,441	1,647	1,421	1,670	1,400	1,693	1,378	1,717	1,357	1,741	1,335	1,765
150	1,611	1,637	1,598	1,651	1,584	1,665	1,571	1,679	1,557	1,693	1,543	1,708	1,530	1,722	1,515	1,737	1,501	1,752	1,486	1,767
200	1,664	1,684	1,653	1,693	1,643	1,704	1,633	1,715	1,623	1,725	1,613	1,735	1,603	1,746	1,592	1,575	1,582	1,768	1,571	1,779

Критичні точки *DW*-статистики Дарбіна–Уотсона для малих значень n і m

n	$\alpha = 0,01$								$\alpha = 0,05$							
	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,390	1,142	—	—	—	—	—	—	0,610	1,400	—	—	—	—	—	—
7	0,435	1,036	0,294	1,676	—	—	—	—	0,700	1,356	0,467	1,896	—	—	—	—
8	0,497	1,003	0,345	1,489	0,229	2,102	—	—	0,763	1,332	0,559	1,777	0,368	2,287	—	—
9	0,554	0,998	0,408	1,389	0,279	1,875	0,183	2,433	0,824	1,320	0,629	1,699	0,455	2,128	0,296	2,588

ЗМІСТ

<i>Розділ 1. Основні теоретичні питання з курсу</i>	3
1.1. Проста лінійна регресія	3
1.2. Багатофакторна лінійна регресія. Мультиколінеарність та її вилучення	11
1.3. Багатофакторна лінійна регресія. Властивості моделі. Коефіцієнти множинної кореляції та детермінації	16
1.4. Гетероскедастичність, її тестування та вилучення	24
1.5. Автокореляція залишків та її тестування	26
1.6. Контрольні запитання	28
<i>Розділ 2. Типові завдання з курсу і зразки розв'язання задач</i>	30
2.1. Варіанти типових завдань	30
<i>Задача 1.</i> Побудова й аналіз моделі простої лінійної регресії	30
<i>Задача 2.</i> Застосування лінійної моделі у нелінійному випадку	32
<i>Задача 3.</i> Лінійний регресійний аналіз квадратичної залежності	32
<i>Задача 4.</i> Багатофакторна лінійна регресія	34
<i>Задача 5.</i> Проблема гетероскедастичності	36
<i>Задача 6.</i> Автокореляція в економетричній моделі	37
<i>Задача 7.</i> Проста лінійна регресія (завдання для конт- рольної, атестаційної або залікової роботи)	37

2.2. Зразки розв'язання задач	43
<i>Задача 1</i> (проста лінійна регресія)	43
<i>Задача 2</i> (лінійна регресія для нелінійного зв'язку змінних)	49
<i>Задача 3</i> (регресійний аналіз виробничої функції)	55
<i>Задача 4</i> (лінійна регресія у випадку квадратичної залежності)	62
<i>Задача 5</i> (багатофакторна лінійна регресія)	68
<i>Задача 6</i> (гетероскедастичність та її наслідки)	79
<i>Задача 7</i> (автокореляція)	84
Розділ 3. Застосування комп'ютерних технологій при розв'язанні задач з економетрії	87
Термінологічний словник	96
Список використаної літератури	104
<i>Додаток 1</i>	105
<i>Додаток 2</i>	107
<i>Додаток 3</i>	112
<i>Додаток 4</i>	113
<i>Додаток 5</i>	114

Навчальне видання

ЗАРОСЬКИЙ Ромуальд Іванович

**ПРАКТИКУМ
З КУРСУ ЕКОНОМЕТРІЇ**

(українською мовою)

Редактор О.Є. Вакула
Комп'ютерна правка та верстка Н.В. Ялова
Коректор М.О. Паненко

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 21.12.07. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 7,0. Обл.-вид. арк. 7,4.
Тираж 100 прим. Вид. № 15. Зам. № 331. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5