

М. Р. Ткач
С. О. Моргун
А. С. Познанський

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.
АНАЛІТИЧНЕ ТА
КОМП'ЮТЕРИЗОВАНЕ РІШЕННЯ**
Частина 1. Статика. Кінематика

СТАТИКА

Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил
Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів
Рівновага зчленованої системи тіл
Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду
Рівновага просторової системи довільно розташованих сил
Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури

КІНЕМАТИКА

Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями
Дослідження параметрів поступального та обертального рухів твердого тіла
Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму

Частина 1

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

М. Р. Ткач
С. О. Моргун
А. С. Познанський

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.
АНАЛІТИЧНЕ ТА
КОМП'ЮТЕРИЗОВАНЕ РІШЕННЯ**

Частина 1. Статика. Кінематика



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

М. Р. ТКАЧ, С. О. МОРГУН, А. С. ПОЗНАНСЬКИЙ

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.
АНАЛІТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРИЗОВАНЕ РІШЕННЯ
Частина 1. Статика. Кінематика**

*Рекомендовано Вченою радою НУК
як навчальний посібник*

МИКОЛАЇВ НУК 2019

УДК 531.2(076)
Т48

Укладачі:

М. Р. Ткач, д-р техн. наук, професор
С. О. Моргун, канд. техн. наук, викладач
А. С. Познанський, канд. техн. наук, ст. викладач

Рецензенти:

В. Д. Будак, ректор МНУ ім. В.О. Сухомлинського, дійсний член (академік)
НАПН України, заслужений діяч науки і техніки України, д-р техн. наук,
професор
А. Я. Казарезов, завідувач кафедри морської логістики НУК імені адмірала
Макарова, д-р техн. наук, професор
Л. І. Коростильов, професор кафедри конструкції та механіки судна НУК
імені адмірала Макарова, д-р техн. наук, професор

Ткач М. Р.

Т 48 Розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки. Аналітичне та комп'ютеризоване рішення. Частина 1. Статика. Кінематика / М. Р. Ткач, С. О. Моргун, А. С. Познанський. – Миколаїв : НУК, 2019. – 201 с.

Уміщено розрахунково-графічні роботи з розділів «Статика» та «Кінематика» курсу теоретичної механіки. Наведено ілюстровані приклади їх розв'язання за допомогою інформаційних технологій – систем AutoCAD та MathCAD. Призначено для студентів вищих навчальних закладів. Також можуть бути використані для самостійного вивчення методів і принципів розрахунку типових завдань з розділів «Статика» та «Кінематика» курсу теоретичної механіки.

УДК 531.2(076)

Навчальне видання

ТКАЧ Михайло Романович

МОРГУН Сергій Олександрович

ПОЗНАНСЬКИЙ Андрій Станіславович

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ.
АНАЛІТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРИЗОВАНЕ РІШЕННЯ
Частина 1. Статика. Кінематика**

Комп'ютерне макетування *Т. М. Чередніченко*

© Ткач М. Р., Моргун С.О., Познанський А.С., 2019

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2019

ПЕРЕДМОВА

Збірник призначений для забезпечення студентів інструментами полегшення опанування курсу «Теоретичної механіки» для інженерних спеціальностей ВНЗ, який є базовим для подальшого вивчення всіх інженерних дисциплін. Результативне вивчення методів теоретичної механіки можливо лише шляхом самостійного рішення конкретних задач, максимально наближених до потреб інженерної діяльності. При цьому необхідно використовувати знання та навички, що отримано протягом вивчення учбових курсів фізики, математичного аналізу та нарисної геометрії.

В теперішній час неможливо ігнорувати всебічне розповсюдження комп'ютерної техніки у всіх прошарках суспільства. Це принципово змінило світогляд та можливості людини у порівнянні з «докомп'ютерною» ерою. Можливості проведення розрахунків у студента молодших курсів в теперішній час суттєво вище ніж у спеціалізованого наукового інституту у досить недавньому минулому.

Рішення будь якого інженерного завдання потребує перетворення технічної задачі у її модель, аналізу цієї моделі, математичної формалізації моделі, отримання математичного рішення та інженерної інтерпретації результатів. Принциповим моментом в роботі інженера доведення правильності отриманих рішень, що досягається вирішенням кожного завдання декількома методами.

Збірник містить в собі дев'ять розрахунково-графічних завдань (РГЗ) з розділів курсу теоретичної механіки Статика та Кінематика. У першій главі для кожного РГЗ дано 30 варіантів завдань. Приклади рішення РГЗ з використанням аналітичного способу рішення дано в другій главі. У кожному РГЗ проведено графічну інтерпретацію та аналіз рішень, що отримано, з використанням системи комп'ютерної графіки *AutoCAD*. Третю главу присвячено прикладам чисельного рішення всіх РГЗ з використанням системи комп'ютерної математики *MathCAD*. Особливості графічної інтерпретації рішень с системі *MathCAD* дано у відповідних методичних вказівках із списку рекомендованої літератури.

Долучення *CAD* систем до рішення задач теоретичної механіки дозволяє уникнути рутинної частини рішення, зосередитися на змістовній частині завдання, та знаходженні найбільш ефективних методів її розв'язання та перевірки. Не менш важливі наочні ілюстрації умови завдання та результатів його рішення у вигляді векторних побудов, діаграм та

графіків залежностей. Слід особливо підкреслити, що в умовах використання *CAD (computer aided design)* систем точність графічних методів рішення та чисельних розрахунків практично однакові, а наочність графічних результатів – незрівнянно вище.

Вибір *CAD* систем *MathCAD* та *AutoCAD* з низки аналогічних за можливостями для рішення РГЗ обумовлений їх розповсюдженістю, гарною забезпеченістю доступними учбовими матеріалами та наявністю у розробників безкоштовних студентських (*education license Autodesk*) або вільних (*PTS Mathcad express*) версій програмного забезпечення.

Для глибокого у розуміння аргументації, підходів та методів отримання розрахункових залежностей необхідно використати конспект лекції та учбову літературу, стислий перелік якої наведено у переліку посилань.

Варіанти завдань до РГЗ створено як наслідок багаторічної праці авторів та колег з Національного університету кораблебудування (раніше Миколаївський кораблебудівний інститут) ім. адмірала С.Й. Макарова: доцентів Фролова В.П., Грешнова Ю.К., Вещало В.А., Влялько О.М., старших викладачів Золотого Ю.Г., Кузнецової Л.Г., Степанова П.О.

Великий обсяг роботи з дизайну даного посібника виконано Т.М. Чердніченко.

Всі програми рішення РГЗ, створені в системі *MathCAD* можливо отримати по персональному запиту електронною поштою, за адресою, що наведено нижче.

Автори посібника щиро вдячні поважним рецензентам д-ру техн. наук В.Д. Будаку, д-ру техн. наук А.Я. Казарезову і д-ру техн. наук Л. І. Коростильову за конструктивні зауваження та рекомендації, що сприяли поліпшенню якості даного навчального посібника.

Січень 2019

Ткач М.Р.
Mykhaylo.Tkach@nuos.edu.ua

ГЛАВА ПЕРША

РОЗРАХУНКОВО ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

Розділ 1. СТАТИКА

Завдання С-1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил

Знайти реакції опор заданої конструкції. Значення величин навантажень наведено в табл. 1.1, схеми конструкцій зображено на рис. 1.1–1.3. Сили P задаються в кН, моменти сил M – кН·м, максимальна інтенсивність розподіленого навантаження q – в кН/м. Розмір $a = 1$ м. Розподілене навантаження діє перпендикулярно по відношенню до відповідного елемента конструкції.

Таблиця 1.1

Варіант	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Варіант	P , кН	M , кН·м	q , кН/м
1	16	25	10	16	18	11	10
2	35	46	12	17	25	23	15
3	8	35	2	18	4	36	18
4	15	30	14	19	6	55	24
5	12	27	8	20	17	28	32
6	14	45	5	21	9	30	16
7	20	10	17	22	5	15	18
8	38	60	20	23	39	65	28
9	27	48	22	24	42	70	36
10	31	52	30	25	40	72	42
11	29	44	24	26	37	25	44
12	34	15	26	27	46	68	15
13	32	27	41	28	10	30	25
14	40	39	6	29	2	18	40
15	48	32	8	30	50	20	10

Розрахунково-графічні завдання

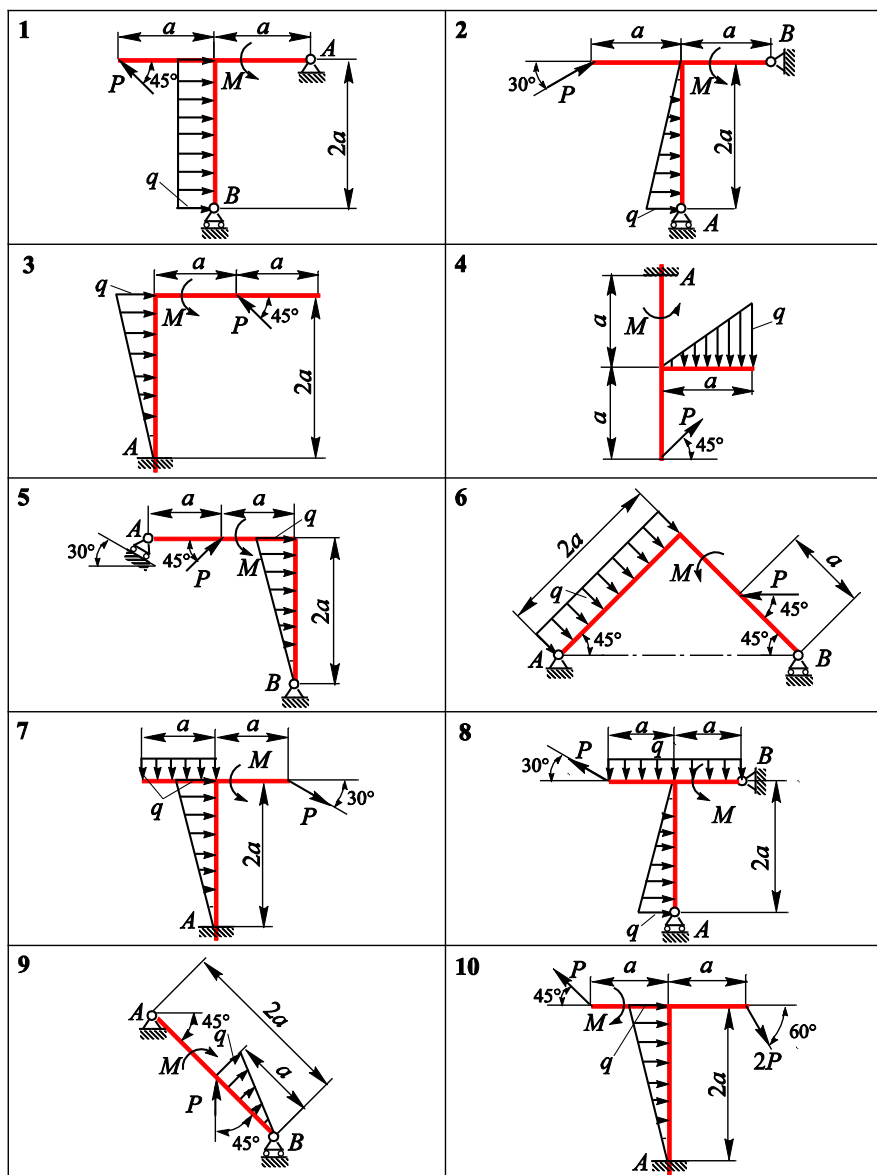


Рис. 1.1

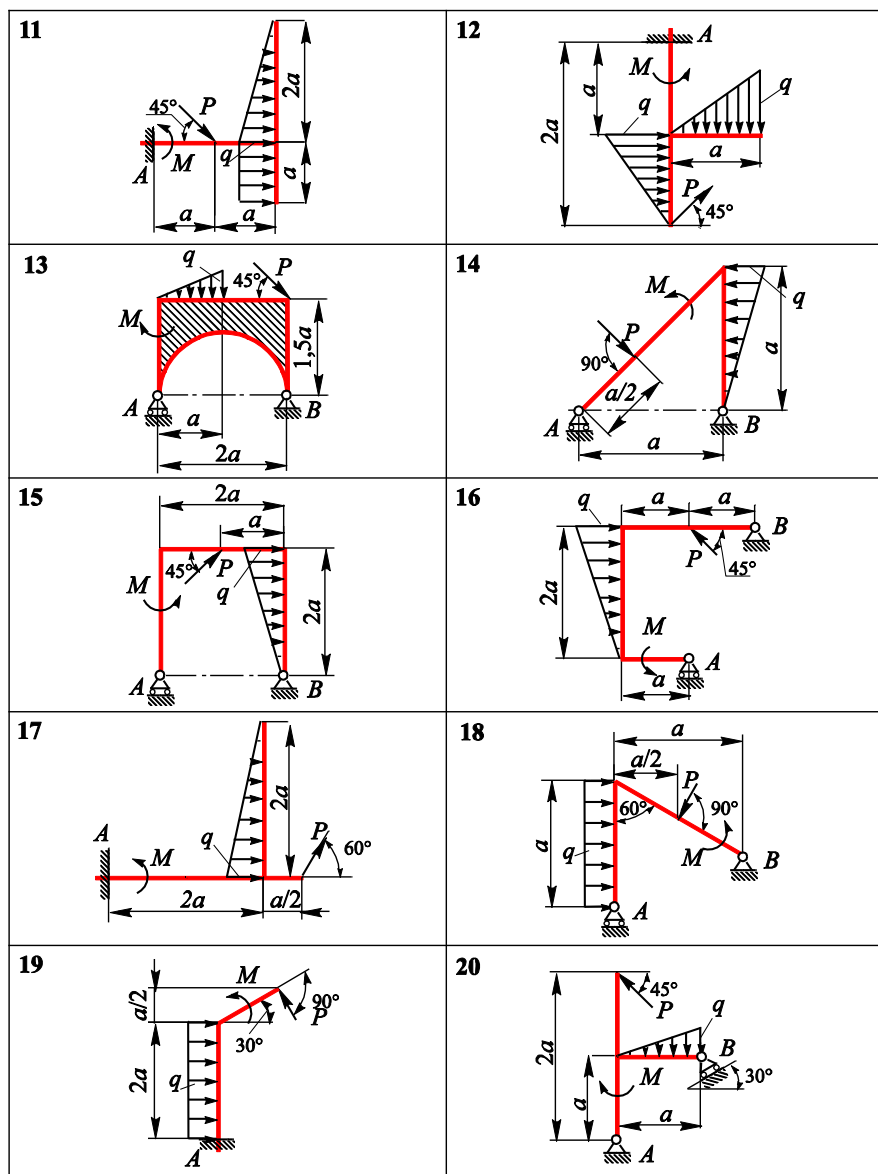


Рис. 1.2

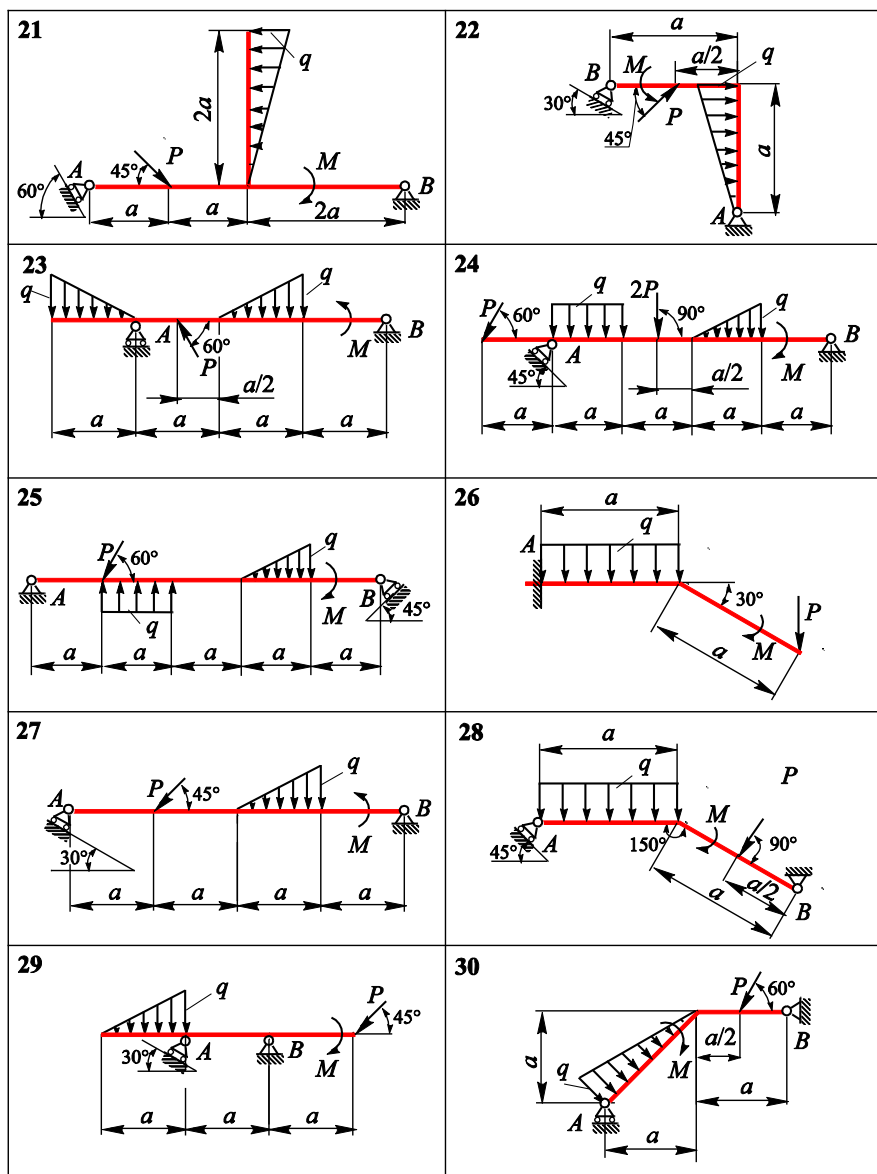


Рис. 1.3

Завдання С-2. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів

Знайти реакції опор та сили в стрижнях заданої конструкції методом вирізання вузлів.

Значення модулів сил наведено в табл. 1.2, схеми конструкцій зображено на рис. 1.4 – 1.5. Сили P задаються в кН.

Таблиця 1.2

Варіант	P , кН	Варіант	P , кН
1	16	16	36
2	30	17	38
3	8	18	40
4	32	19	42
5	14	20	44
6	20	21	46
7	22	22	48
8	24	23	50
9	26	24	52
10	28	25	54
11	10	26	56
12	12	27	58
13	14	28	60
14	32	29	62
15	34	30	64

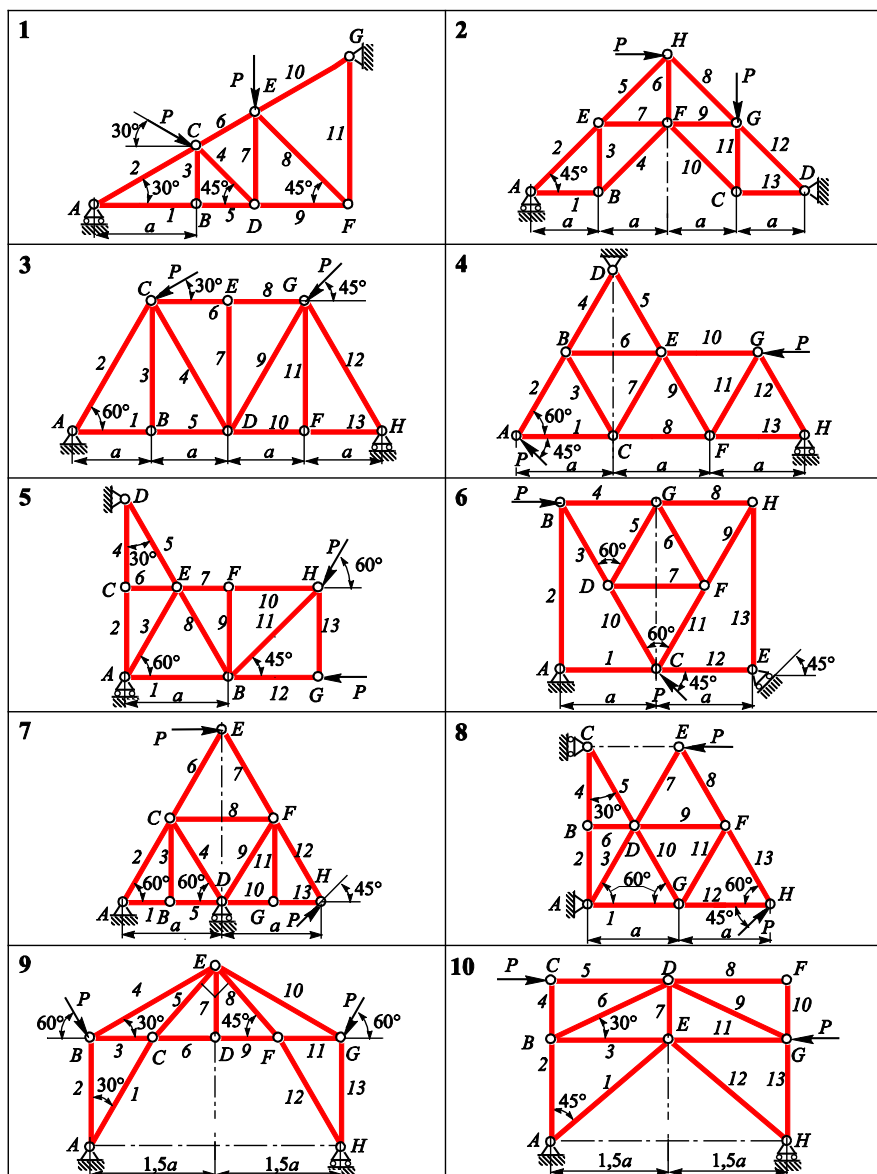


Рис. 1.4

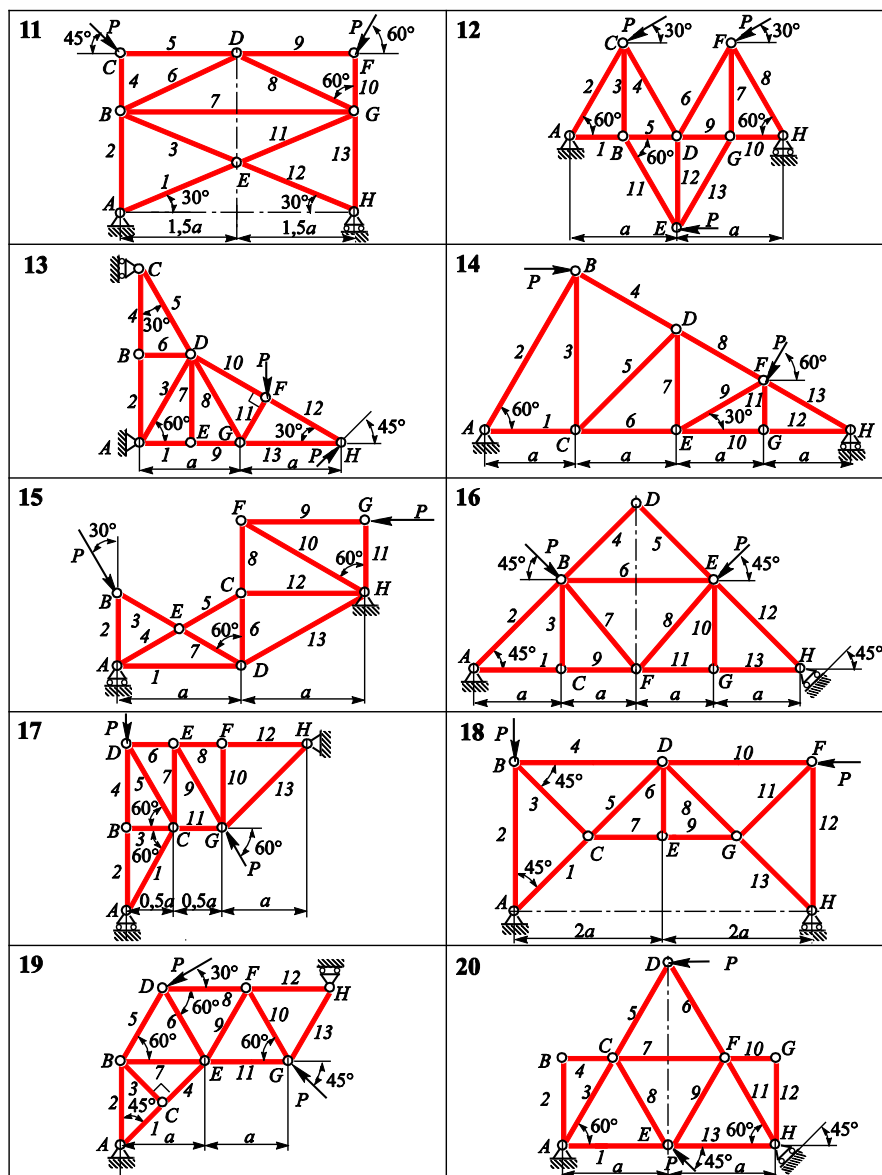


Рис. 1.5

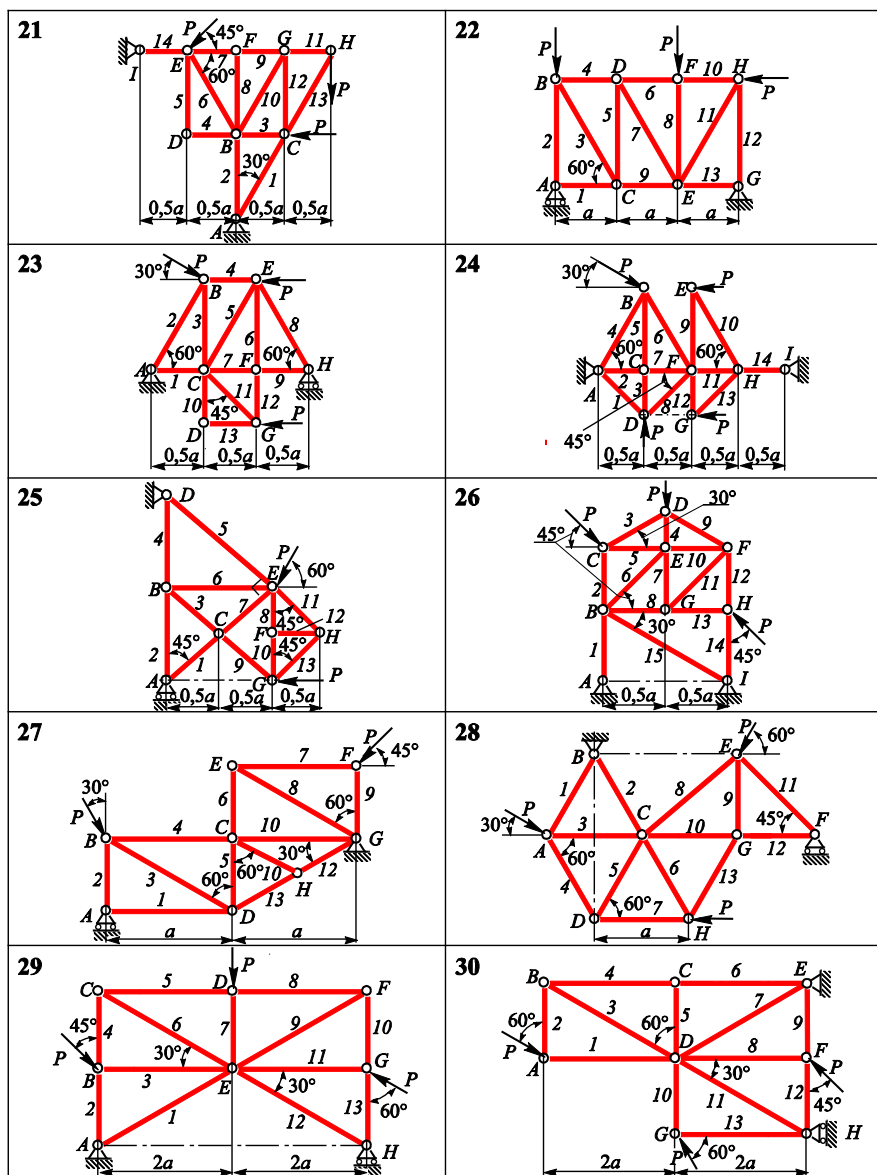


Рис. 1.6

Завдання С-3. Рівновага зчленованої системи тіл

Знайти реакції опор і тиск в проміжних шарнірах заданої конструкції, складеної з двох частин. Значення величин навантажень наведено в табл. 1.3, схеми конструкцій зображено на рис. 1.7 – 1.9. Сили задаються в кН, моменти сил – кН·м, інтенсивність розподіленого навантаження q – в кН/м, а розміри – в метрах.

Таблиця 1.3

Варі- ант	P_1	P_2	M_1	M_2	q	Варі- ант	P_1	P_2	M_1	M_2	q
1	0,6	–	2,5	1,0	1,00	16	1,0	1,5	3,5	1,5	0,10
2	0,5	0,8	2,6	–	–	17	1,5	2,0	2,0	1,5	0,15
3	0,8	1,0	3,5	2,0	0,20	18	0,8	1,5	3,0	–	0,10
4	1,5	3,0	3,0	–	0,40	19	0,6	1,8	3,5	–	0,14
5	1,2	2,7	2,7	–	0,10	20	0,7	1,6	3,2	–	0,12
6	1,4	1,2	2,5	–	0,15	21	0,8	1,8	3,0	2,5	0,14
7	1,6	1,0	2,0	0,8	0,20	22	0,5	0,6	3,5	–	0,15
8	1,5	0,6	3,0	–	0,10	23	1,4	1,2	3,6	–	0,12
9	2,0	–	2,5	0,5	0,20	24	1,2	1,4	2,8	1,6	0,18
10	0,8	–	3,0	–	0,10	25	1,6	1,5	3,3	–	0,14
11	1,5	1,0	2,5	–	0,10	26	1,5	1,6	1,8	–	0,18
12	2,0	0,8	3,5	1,5	0,20	27	1,4	1,8	3,5	0,6	0,16
13	1,0	0,6	1,5	2,0	0,15	28	1,2	1,4	3,0	–	0,13
14	0,5	–	4,0	–	0,10	29	1,5	2,0	2,5	–	0,20
15	0,6	2,0	2,5	–	0,20	30	1,5	2,0	2,5	0,5	0,20

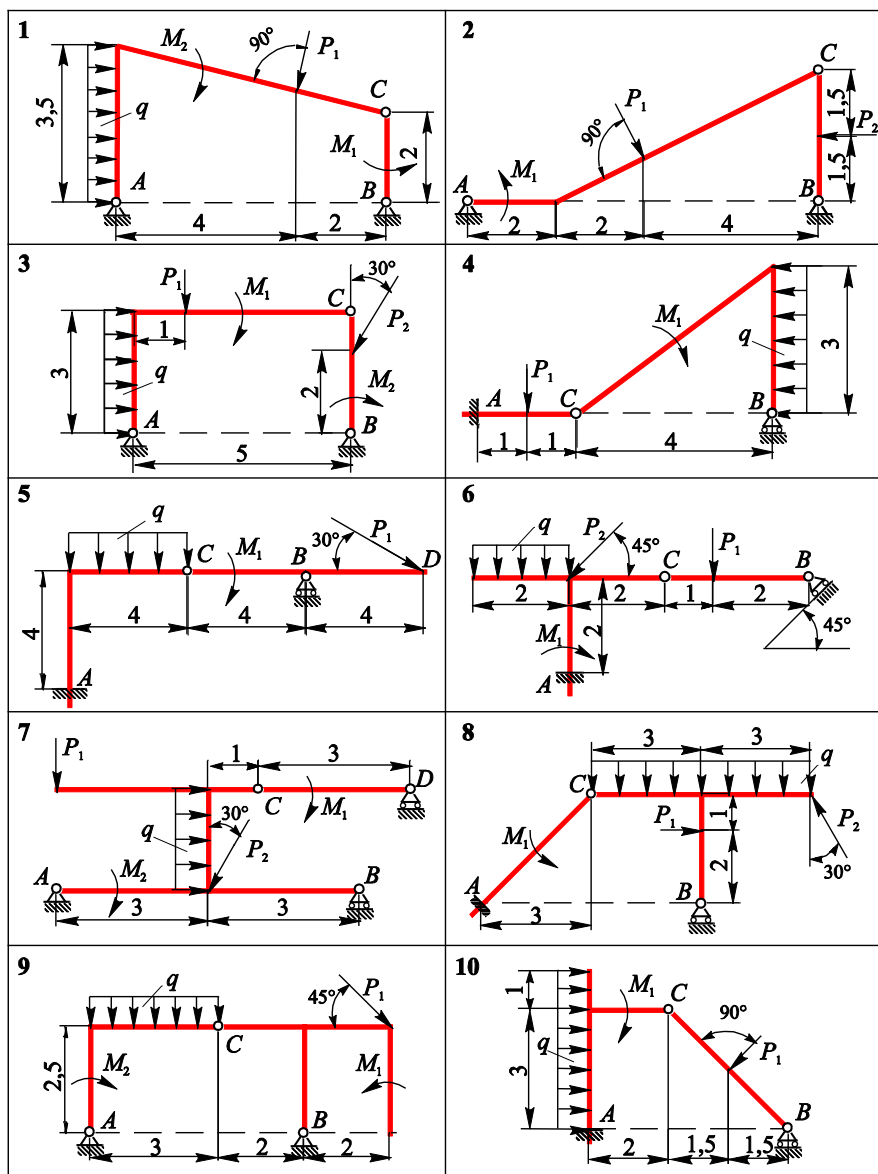


Рис. 1.7

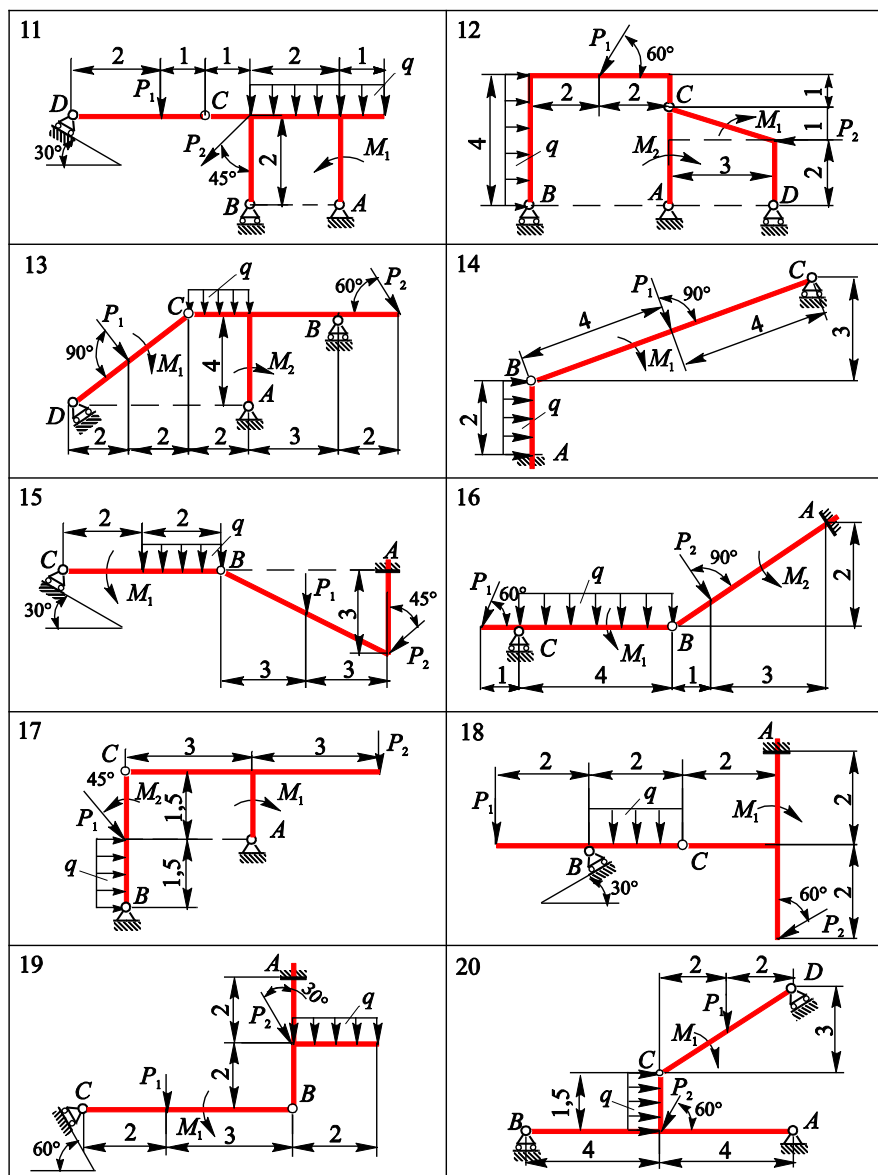


Рис. 1.8

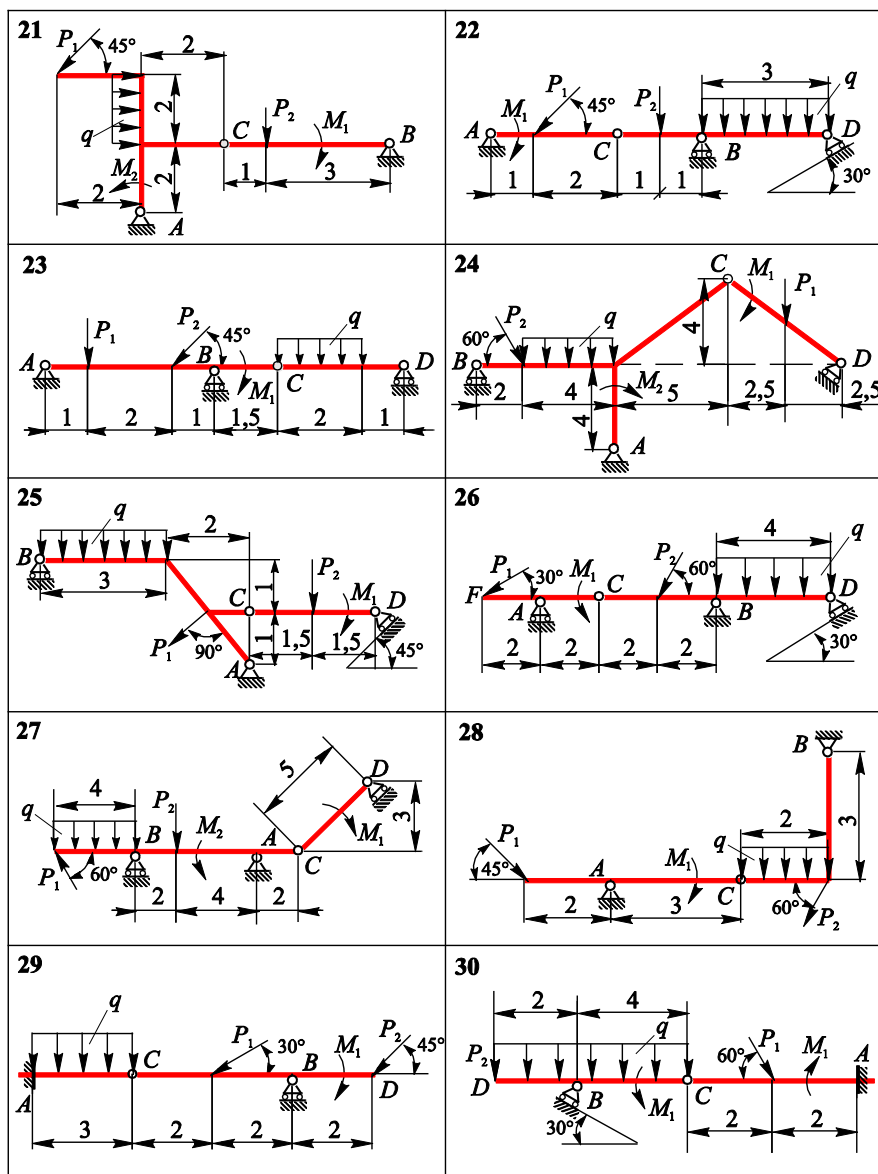


Рис. 1.9

Завдання С-4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду

Привести систему сил до простішого виду. Задані системі сил зображено на рис. 1.10 – 1.12. Модулі сил та відповідні відстані дано в табл. 1.4. Сили задано в Н, моменти сил в кН·м, а розміри – в метрах.

Таблиця 1.4

Варіант	P_1	P_2	P_3	P_4	M	a	b	c
1	15	25	35	20	100	5,0	5,0	5,0
2	35	25	15	10	200	3,0	3,0	3,0
3	12	16	14	–	50	1,5	5,0	2,5
4	14	12	16	–	25	5,0	2,5	1,5
5	4	6	8	10	100	0,6	0,3	0,2
6	20	24	10	20	200	0,3	0,4	0,4
7	4	2	8	30	50	2,0	1,0	1,0
8	15	20	30	–	100	3,0	4,0	2,0
9	18	11	13	15	50	9,0	8,0	7,0
10	15	25	35	20	100	2,0	3,0	4,0
11	8	10	8	10	150	2,0	2,0	2,0
12	8	4	6	20	75	3,0	4,0	2,0
13	12	16	14	–	50	1,5	5,0	2,5
14	14	12	16	–	500	4,5	6,0	3,5
15	10	16	20	30	200	3,0	4,0	4,0
16	10	10	10	20	100	3,0	4,0	4,0

Розрахунково-графічні завдання

Варіант	P_1	P_2	P_3	P_4	M	a	b	c
17	20	30	10	40	200	3,5	4,5	6,0
18	16	12	14	18	400	8,0	7,0	9,0
19	18	11	13	20	200	9,0	8,0	7,0
20	15	25	35	40	100	4,0	4,0	4,0
21	35	15	25	–	200	4,0	2,0	3,0
22	25	35	15	–	100	3,0	4,0	2,0
23	10	20	30	–	50	3,0	4,0	3,0
24	20	30	20	30	100	1,0	1,0	2,0
25	8	12	20	26	200	1,0	4,0	3,0
26	6	20	10	8	250	4,0	8,0	6,0
27	20	30	10	–	150	4,5	6,0	3,0
28	16	14	12	20	100	8,0	7,0	9,0
29	18	11	13	15	50	9,0	8,0	7,0
30	10	20	30	20	150	4,5	6,0	3,5

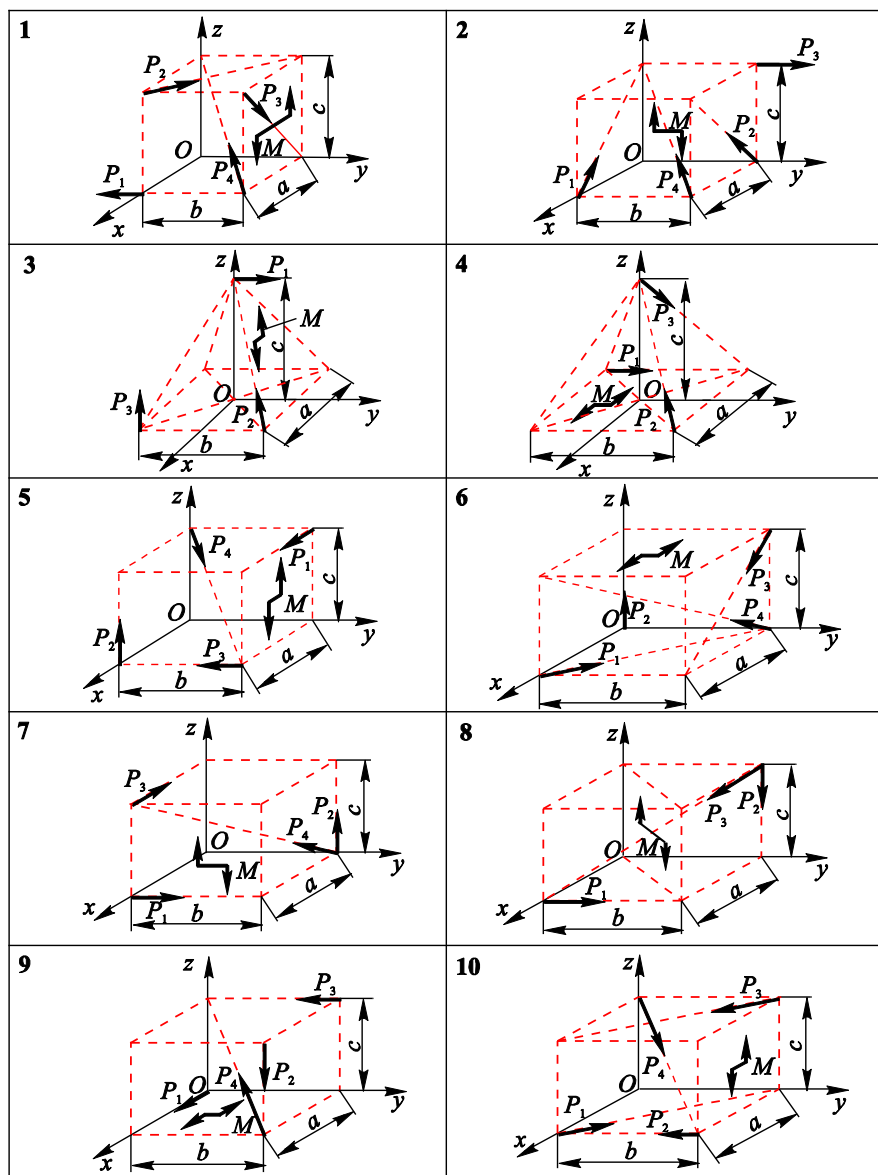


Рис. 1.10

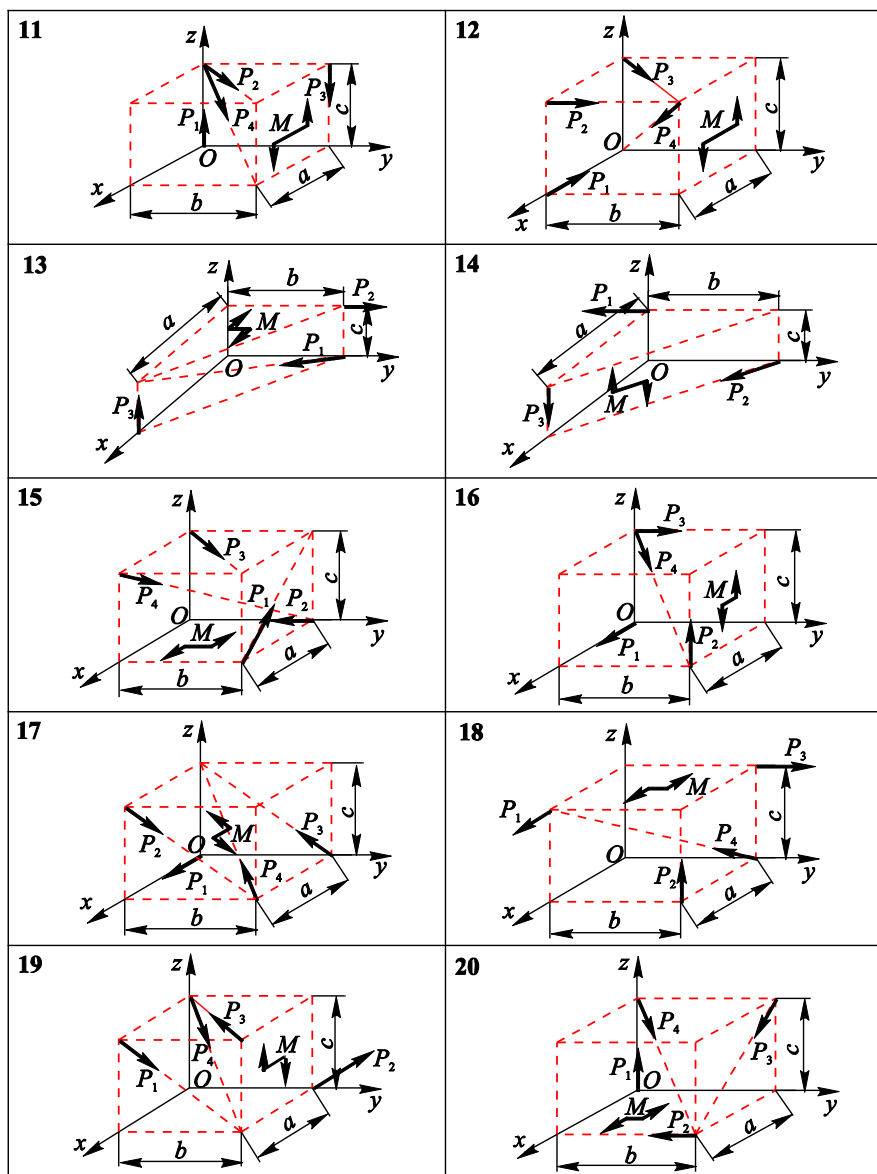


Рис. 1.11

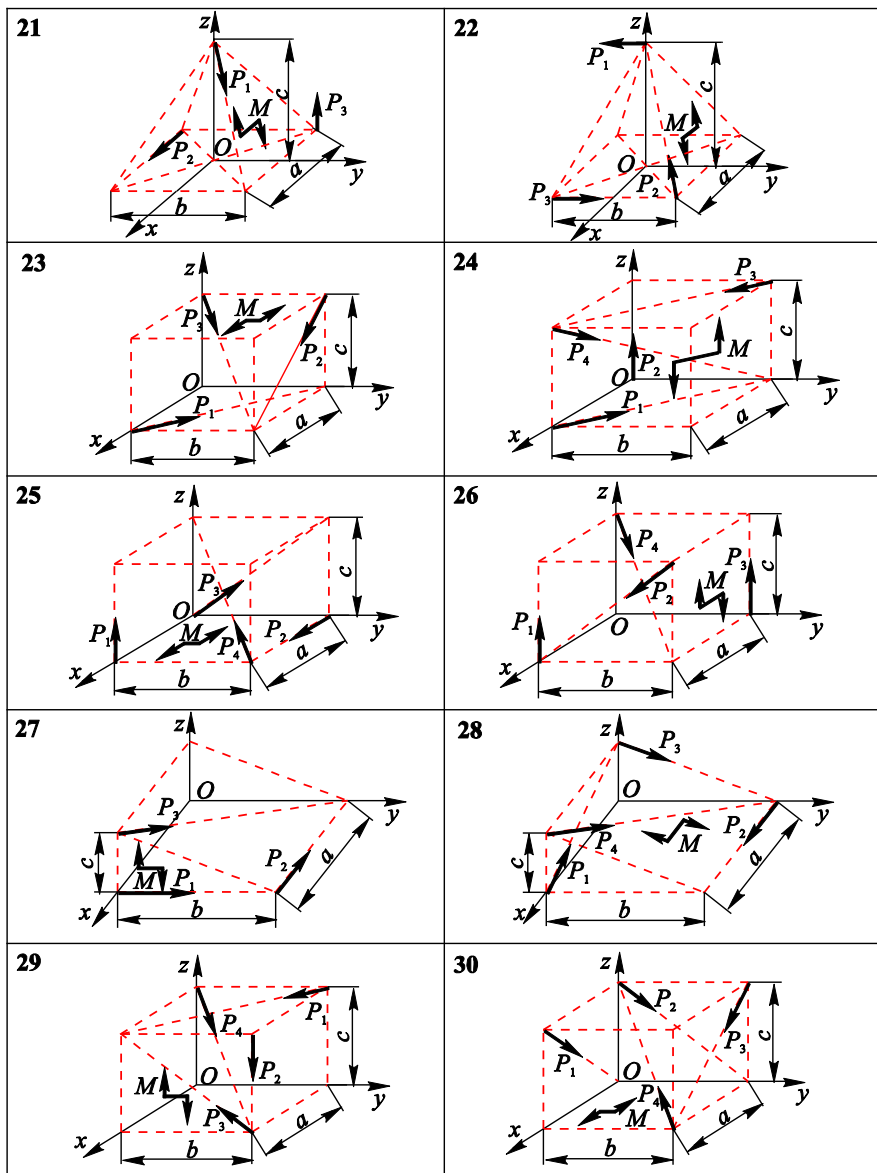


Рис. 1.12

Завдання С-5. Рівновага просторової системи довільно розташованих сил

Знайти силу P , що забезпечує рівновагу заданої просторової конструкції, а також реакції опор. Схеми конструкцій зображено на рис. 1.13 – 1.15. Модулі сил та необхідні розміри наведено в табл. 1.5. Сили задаються в кН, моменти сил – в кН·м, а відстані – в метрах. Сила G розташована паралельно вісі Az . Модуль сили T удвічі більше модулю сили t , а значення $\delta=5 \cdot 10^{-3}R$.

Таблиця 1.5

Варіант	Q	T	G	a	b	c	R	r	M
1	2	–	20	0,20	0,30	0,10	0,15	0,05	4,0
2	4	–	2	0,20	0,10	0,30	0,10	0,10	–
3	6	–	4	0,15	0,15	0,20	0,20	0,15	–
4	3	–	2	0,30	0,20	0,40	0,15	0,10	5,0
5	5	–	3	0,30	0,40	0,20	0,20	0,15	2,0
6	1	4	2	0,40	0,30	0,20	0,20	0,10	3,0
7	–	3	1	0,30	0,10	0,05	0,18	0,06	2,0
8	4	6	3	0,20	0,40	0,15	0,20	0,10	3,0
9	5	–	3	0,20	0,15	0,10	0,30	0,40	–
10	1	4	2	0,30	0,40	0,20	0,20	0,10	2,0
11	–	2	1	0,20	0,30	0,15	0,15	0,10	4,0
12	–	–	10	–	–	–	–	–	5,0
13	10	–	5	0,40	0,30	0,20	0,25	0,15	3,0
14	–	2	1	0,30	0,90	0,20	0,30	0,10	2,0
15	3	–	2	0,60	0,20	0,40	0,20	0,05	2,5

Розрахунково-графічні завдання

Варіант	Q	T	G	a	b	c	R	r	M
16	4	—	2	0,50	0,30	—	—	—	2,0
17	2	—	1	0,15	0,10	0,20	0,20	0,05	1,0
18	6	—	2	0,60	0,40	0,60	—	—	3,0
19	—	8	2	0,20	0,30	0,40	0,20	0,15	—
20	4	—	—	0,60	0,40	0,20	—	—	—
21	2	4	—	0,40	0,60	0,30	0,20	0,10	1,0
22	—	—	5	0,20	0,50	0,30	—	—	2,0
23	—	—	4	0,40	0,30	0,50	—	—	3,0
24	5	—	2	—	—	—	—	—	1,0
25	2	—	3	0,50	0,50	0,60	—	—	2,0
26	3	—	1	0,20	0,60	0,40	—	—	3,0
27	—	—	1	0,50	0,30	—	—	—	1,0
28	2	—	6	0,30	0,10	0,50	0,10	0,15	0,2
29	—	4	3	0,15	0,20	0,15	0,15	0,10	0,5
30	—	—	4	0,40	0,30	0,10	—	—	1,0

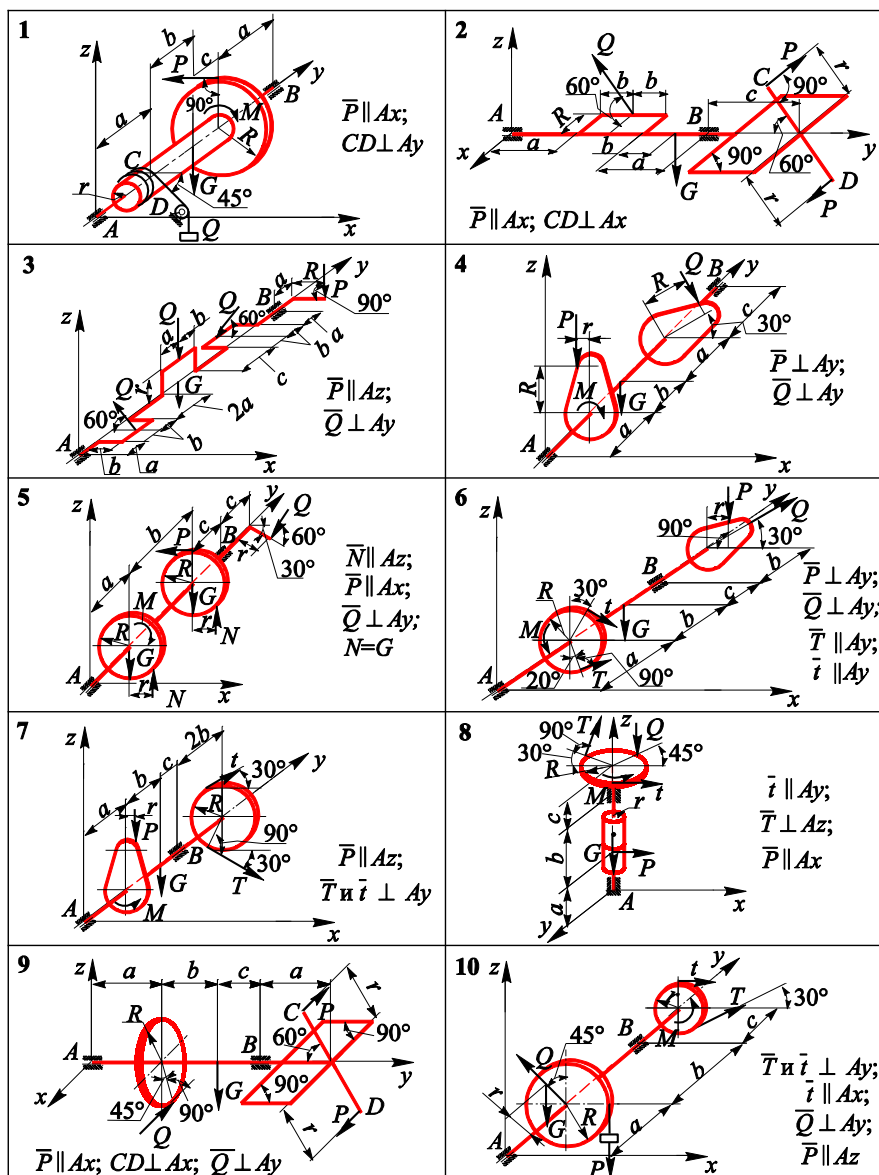


Рис. 1.13

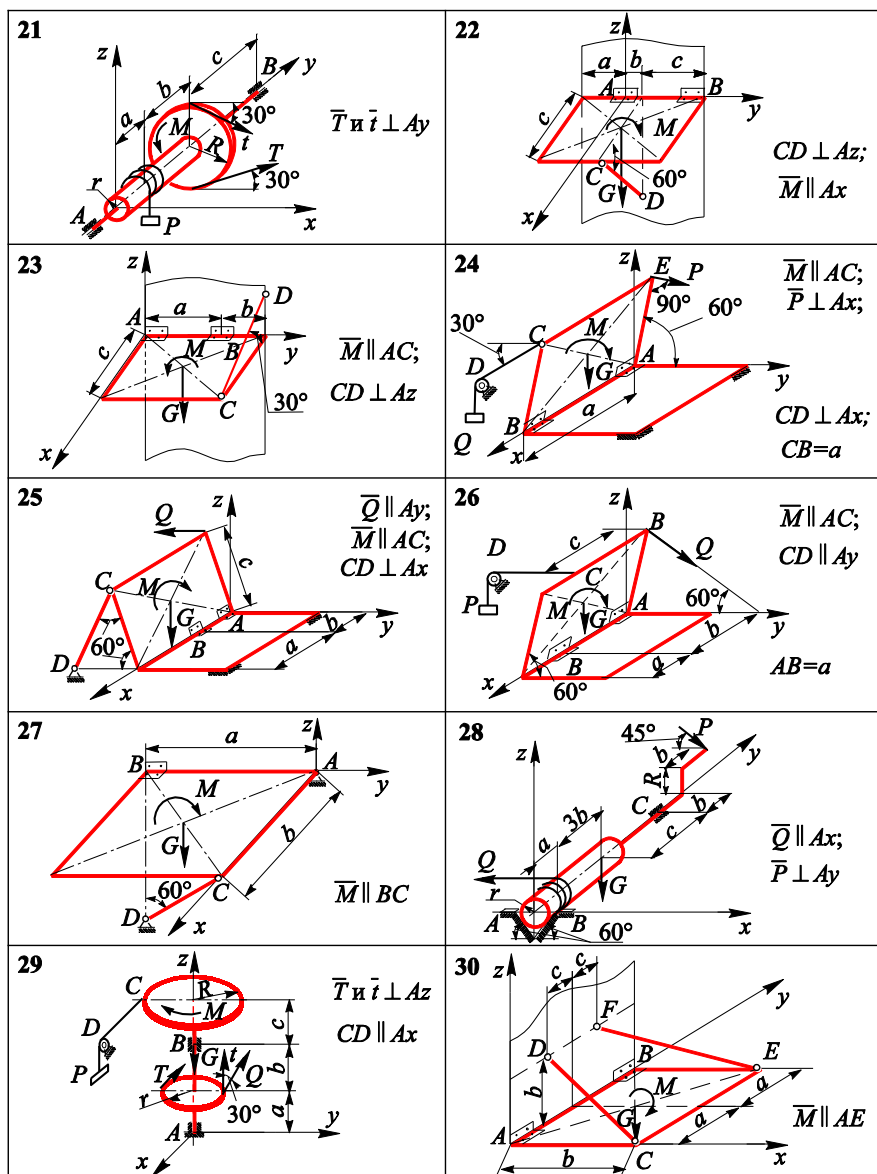


Рис. 1.15

Завдання С-6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури

Знайти координати центра тяжіння фігури, що зображено на рис. 1.16 – 1.18. Розміри фігур задано у міліметрах.

Розрахунково-графічні завдання

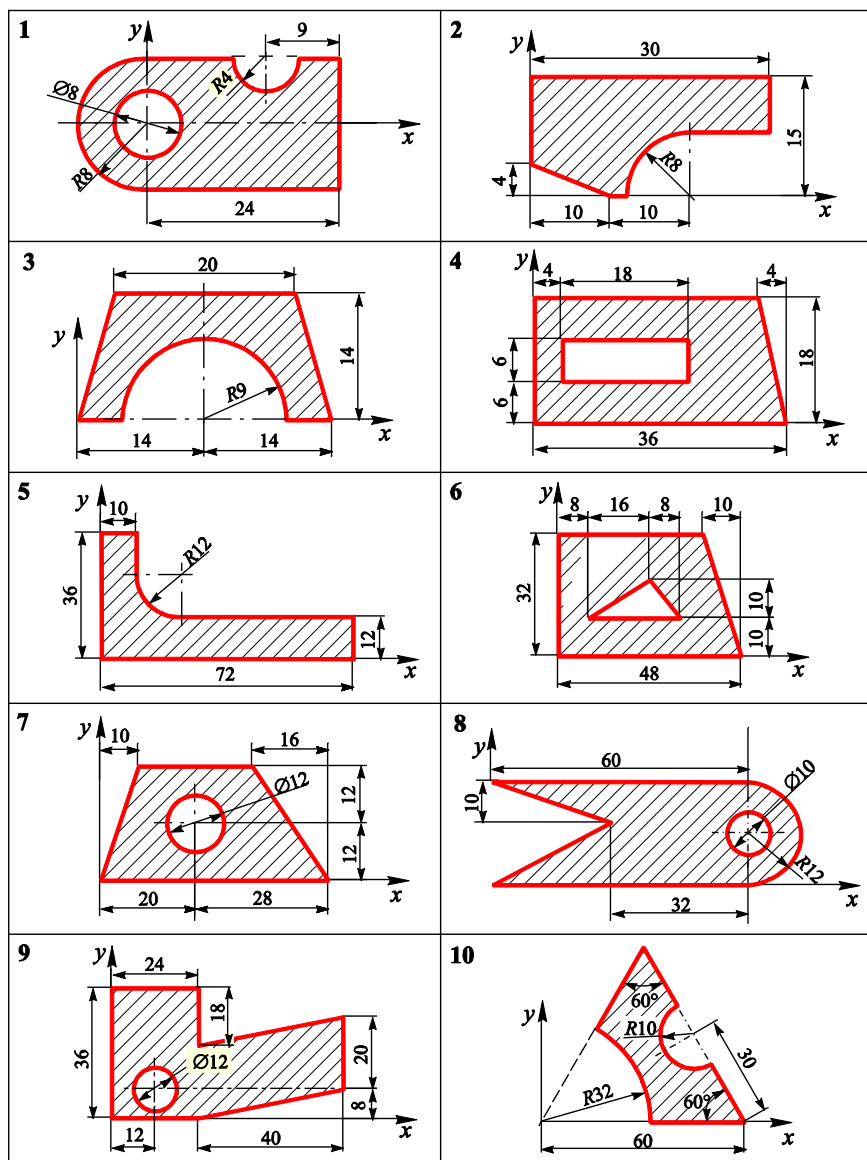


Рис. 1.16

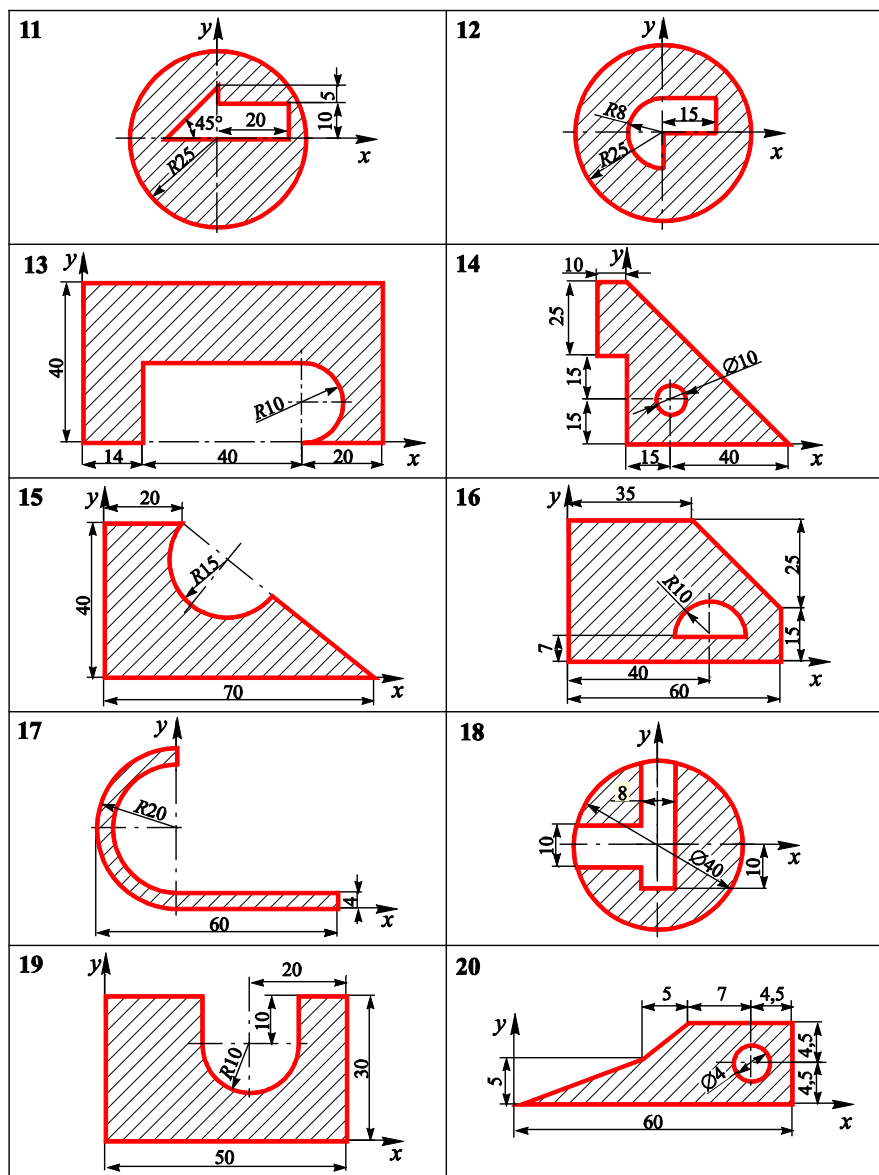


Рис. 1.17

Розділ 2. КІНЕМАТИКА

Завдання К-1. Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями

За заданими рівняннями руху точки встановити та накреслити траєкторію її переміщення. Для моментів часу $t_0 = 0$, $t_1 = t/2$, $t_2 = t$ вказати на кресленні траєкторії положення точки. Відповідно до цих моментів часу визначити значення швидкостей, прискорень (з їх проекціями на вісі), дотичні і нормальні складові прискорень. Розрахувати шлях, що пройдено точкою, в інтервалі часу $0 \dots t$. Визначити радіуси кривизни траєкторії в цих точках. Побудувати на кресленні траєкторії визначені вектори швидкості та прискорення в відповідно вибраних масштабах. Позначити радіуси кривизни траєкторії. За отриманими результатами дати уявлення про характер руху точки по траєкторії.

Варіанти завдань наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Номер варіанту	Рівняння руху, см		t , с
	$x = x(t)$	$y = y(t)$	
1	$4 \cos(t)$	$2 - 2 \sin(t)$	$\pi/4$
2	$2t^2 + 3$	$4t$	1
3	$\cos(2t)$	$4 \sin(t)$	$\pi/3$
4	$2t$	$4t^2$	1
5	$3 \sin(2t)$	$4 \cos(2t)$	$\pi/3$
6	$4 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 3$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
7	$4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	0,6
8	$2t^2$	$-1/3t^3$	$\sqrt{2}$
9	$t^3 - 1$	$2 - t^2$	1
Номер	Рівняння руху, см		t , с

Розрахунково-графічні завдання

варіанту	$x = x(t)$	$y = y(t)$	
10	$\sin(\pi t^2)$	$2 \cos(\pi t^2)$	0,4
11	$2t^2$	$4t^3 - 2$	0,5
12	$4t - 3t^2$	$3t^2$	1
13	t^2	$\sin(\pi t^2)$	1
14	$2e^t$	e^{-t}	0,3
15	$2 \sin(2t)$	$\cos(2t)$	$\pi/6$
16	t^2	e^{t^2}	0,5
17	t^2	$\frac{4}{1+t^2}$	0,5
18	t^2	e^{-t^2}	0,4
19	t^2	$0,5t^2 + 2t + 1$	1
20	$t - \sin(t)$	$1 - \cos(t)$	$0,75\pi$
21	$2 \cos(t) + 2 \sin(2t)$	$2 \sin(t) + 2 \cos(t)$	$0,4\pi$
22	$0,5t^3$	t^2	1
23	$4 \frac{t^2}{1+t^2}$	$4 \frac{t^3}{1+t^2}$	1
24	$-2t^2 - 2$	$\frac{2}{t^2 + 1}$	1
25	$(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t)$	$(1 + \cos(t)) \cdot \sin(t)$	$\pi/2$
26	$\tan(t)$	$\cos^4(t)$	$\pi/4$
27	$\tan(t/2)$	$\sin(0,75t)$	$\pi/2$
28	$2t^2$	$e^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$\pi/2$
29	$4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) - 2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) + 3$	1
30	$4 \cos(t) - 2 \cos(2t)$	$-2 \sin(t) - 2 \sin(2t)$	$\pi/10$

Завдання К-2. Дослідження параметрів поступального та обертального рухів твердого тіла

Механізм, що досліджується, складено з сукупності рухомих твердих тіл – вантажа (1) та декількох коліс (2, 3, 4). Рух вантажу 1 описується рівнянням:

$$x(t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0,$$

де c_1 , c_2 , c_0 – сталі, t – час руху вантажа, с. Вважати, що рух вантажа відбувається в напрямку, що співпадає з додатним напрямком вісі x . Знайти швидкість та прискорення вантажа в момент часу t_1 . Визначити кутову швидкість та кутове прискорення всіх коліс механізму в момент часу t_1 . Відповідно до точок на обох всіх коліс та точки M , розташованої на останньому за порядком колесі механізму, визначити вектори швидкості, повного прискорення, дотичну та нормальну складові прискорення. Побудувати креслення механізму з позначенням його кінематичних характеристик, що визначено.

Варіанти завдань наведено в табл. 2.2. Схеми механізмів – на рис. 2.1 – 2.3.

Таблиця 2.2

Номер варіанту	Сталі рівняння $x(t)$			Діаметри коліс механізму, мм					Час, с
	c_0	c_1	c_2	D_2	d_2	D_3	d_3	D_4	t_1
1	1	4	3	600	360	450	—	—	2
2	4	9	6	1000	600	750	—	—	2
3	8	13	18	800	450	600	—	—	1
4	15	8	6	600	450	580	—	—	1
5	10	21	12	500	300	450	—	—	2
6	2	10	16	450	350	1050	—	—	3
7	4	9	8	250	150	150	—	—	1
8	7	6	13	350	—	200	100	—	1
9	14	10	2	300	—	1000	600	—	2
10	30	4	7	400	—	300	150	—	3
11	15	5	3	400	250	350	—	—	3
12	9	14	20	400	200	250	—	—	2
13	14	5	26	150	100	800	—	—	2
14	2	9	5	500	400	400	—	450	2
15	7	3	12	800	150	150	—	—	1
16	3	6	11	150	100	950	—	—	4
17	2	3	12	150	—	800	200	—	3
18	7	4	12	200	150	230	—	—	1

Розрахунково-графічні завдання

Номер варіанту	Сталі рівняння $x(t)$			Діаметри коліс механізма, мм					Час, с
	c_0	c_1	c_2	D_2	d_2	D_3	d_3	D_4	
19	10	1	1	200	100	200	—	150	3
20	2	16	5	200	100	230	125	—	1
21	3	5	17	300	200	180	—	300	1
22	5	18	3	400	—	320	250	—	1
23	3	20	11	200	—	350	200	300	2
24	2	19	8	200	150	250	—	—	2
25	4	9	6	600	200	200	—	170	1
26	5	3	5	250	—	300	200	—	1
27	1	7	5	550	400	400	—	—	1
28	8	4	3	600	480	430	—	450	1
29	5	8	13	270	—	85	—	100	1
30	3	4	16	200	—	275	—	750	2

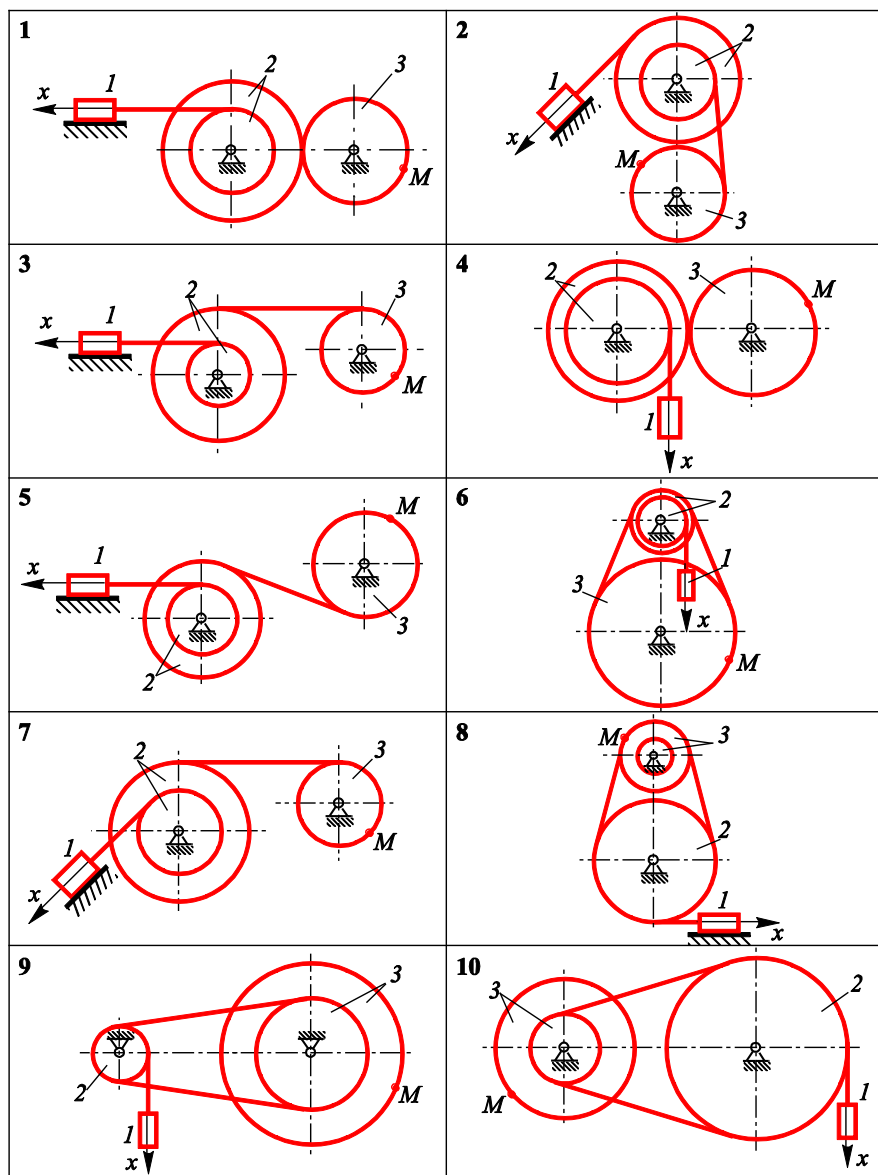


Рис. 2.1

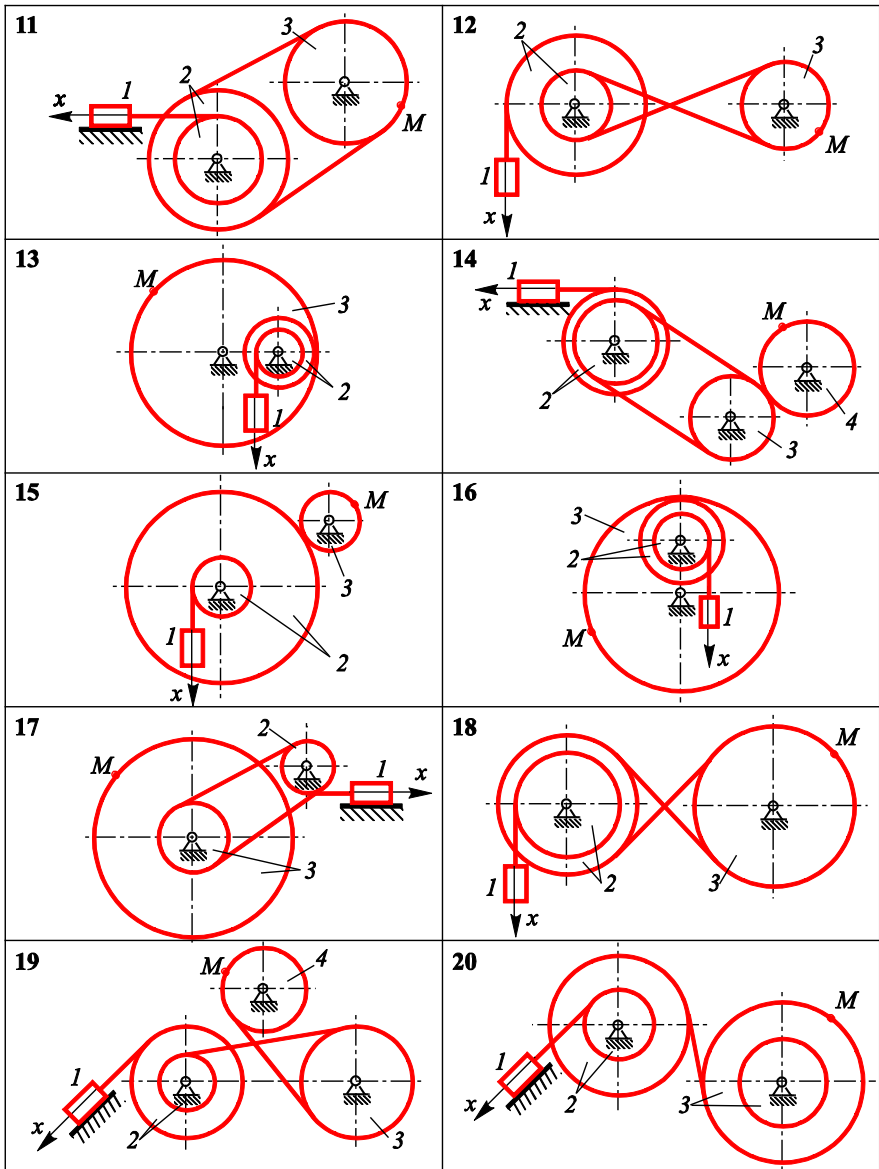


Рис. 2.2

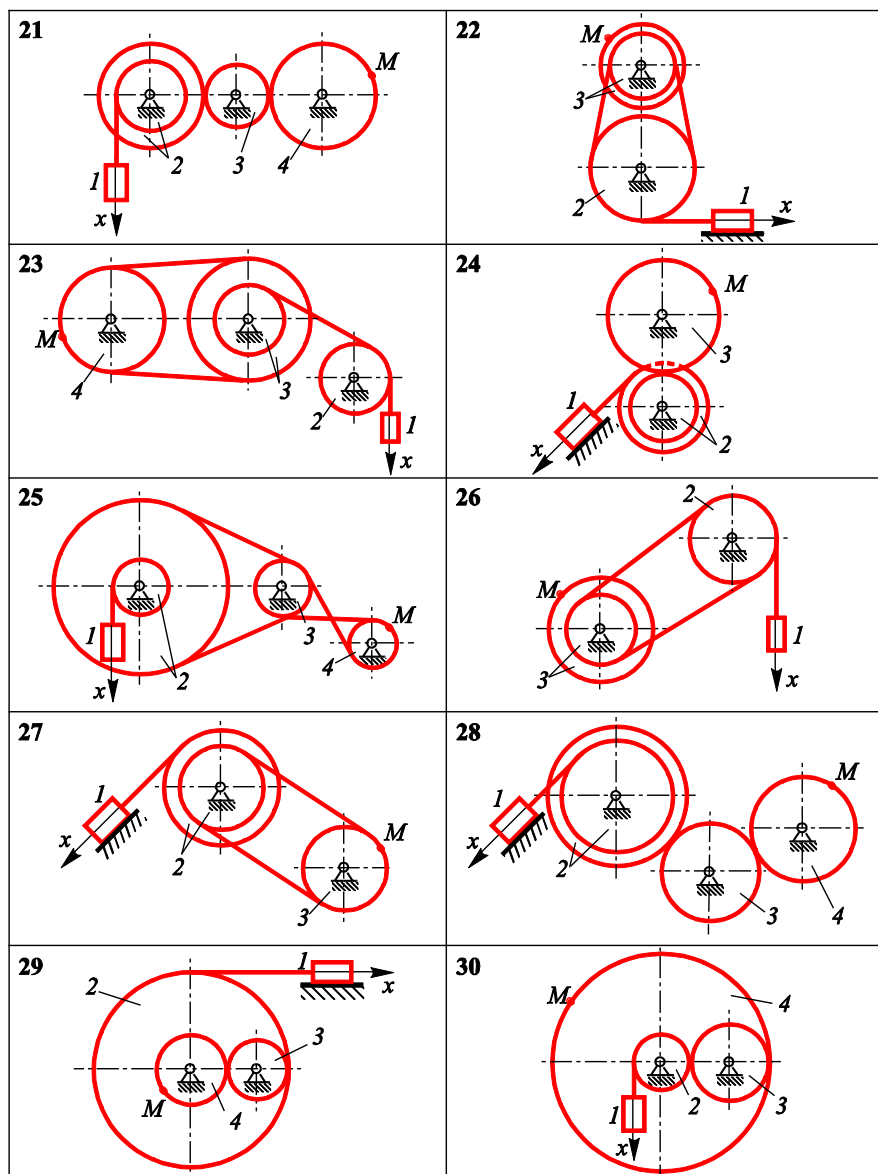


Рис. 2.3

Завдання К-3. Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму

Кривошип O_1A багатоланкового механізму обертається з кутовою швидкістю ω , рад/с та кутовим прискоренням $\varepsilon = 2$ рад/с². Положення механізму в даний момент часу задається величиною кута φ , який є кутом обертання кривошипа. Цей кут відкладається між кривошипом та віссю x в системі координат механізму.

Для заданого положення механізму визначити:

1. Швидкості руху усіх вузлових точок механізму.
2. Кутові швидкості руху усіх ланок механізму.
3. Повне прискорення руху усіх вузлових точок механізму.
4. Кутове прискорення усіх ланок механізму.
5. Побудувати графік залежності кутів обертання ланок механізму в залежності від кута обертання кривошипа φ . Діапазон зміни кута φ від 0° до 360° .

6. Для виконання перевірки обчислити швидкості руху точок механізму за допомогою миттєвого центру швидкостей (МЦШ) та плану швидкостей.

7. Для виконання перевірки обчислити прискорення руху точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень (МЦП) та плану прискорень.

Довжини ланок, необхідні для розрахунку розміри механізму та значення кута φ наведені в табл. 2.3. Схеми механізмів наведено на рис. 2.4 – 2.6.

Таблиця 2.3

Варіант	O_1A , м	AB , м	BC , м	BO_2 , м	CD , м	BD , м	CO_2 , м	a , м	φ , град	ω , с ⁻¹
1	0,06	0,20	—	—	—	—	—	0,25	210	$\pi/2$
2	0,08	0,40	0,40	0,50	—	—	—	1,00	60	$\pi/3$
3	0,08	0,50	—	—	—	—	—	0,50	45	$\pi/4$
4	0,09	—	0,24	—	—	—	—	0,20	60	$\pi/6$
5	0,10	0,40	0,80	—	—	—	—	0,20	60	$\pi/8$
6	0,30	0,10	—	—	—	—	—	0,50	60	$\pi/9$
7	0,50	—	0,25	0,20	—	—	—	0,20	45	$\pi/12$
8	0,20	0,40	—	—	—	—	—	0,10	45	$\pi/36$
9	0,20	—	0,40	—	—	—	—	0,20	30	$\pi/6$
10	0,40	—	0,50	—	—	—	—	0,20	90	$\pi/2$
11	0,40	0,08	—	—	—	0,3	0,50	0,50	60	$\pi/3$
12	0,20	0,30	0,05	—	—	0,2	—	0,20	45	$\pi/4$
13	0,10	—	—	—	—	—	—	0,10	30	$\pi/4$
14	0,10	0,20	—	0,15	0,50	—	0,15	0,20	30	$\pi/6$

Розрахунково-графічні завдання

Варі- ант	O_1A , м	AB , м	BC , м	BO_2 , м	CD , м	BD , м	CO_2 , м	a , м	φ , град	ω , s^{-1}
15	0,20	—	0,10	—	0,25	—	0,50	0,20	60	$\pi/12$
16	—	0,35	0,20	—	—	—	—	0,20	30	$\pi/9$
17	0,40	0,30	—	—	—	0,3	—	0,25	330	$\pi/6$
18	0,40	0,30	—	—	—	—	1,00	0,40	45	$\pi/8$
19	0,06	0,05	0,50	—	—	—	0,40	0,25	120	$\pi/2$
20	0,10	0,70	—	0,40	—	—	0,10	0,20	45	$\pi/12$
21	0,20	1,00	1,60	0,80	—	—	—	0,20	210	$\pi/9$
22	0,20	0,80	—	0,60	—	—	—	0,20	45	$\pi/6$
23	0,30	0,50	—	0,30	—	0,5	—	0,10	60	$\pi/2$
24	0,20	0,20	—	0,20	0,20	0,2	—	0,10	60	$\pi/6$
25	0,40	0,20	0,20	—	—	—	0,40	0,20	345	$\pi/6$
26	0,20	0,50	—	0,30	0,20	—	0,50	0,20	60	$\pi/3$
27	0,40	0,70	0,30	—	0,50	—	—	0,20	150	$\pi/4$
28	0,10	0,25	0,50	—	0,25	—	0,25	0,20	120	$\pi/3$
29	0,10	0,10	0,15	—	—	0,20	—	0,10	120	$\pi/6$
30	0,08	0,08	0,10	—	—	—	0,06	0,10	120	$\pi/3$

Примітка. На схемі механізму № 1 кут $\alpha = 30^\circ$.

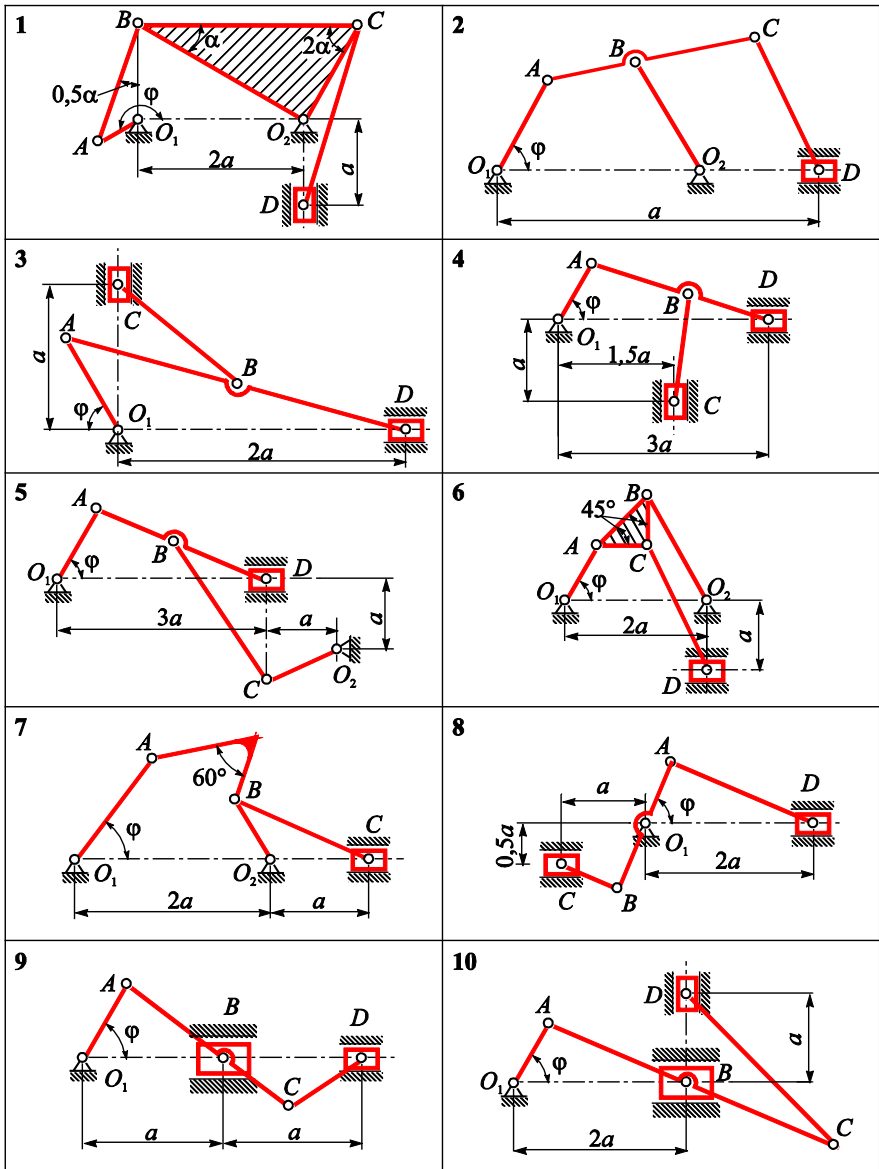


Рис. 2.4

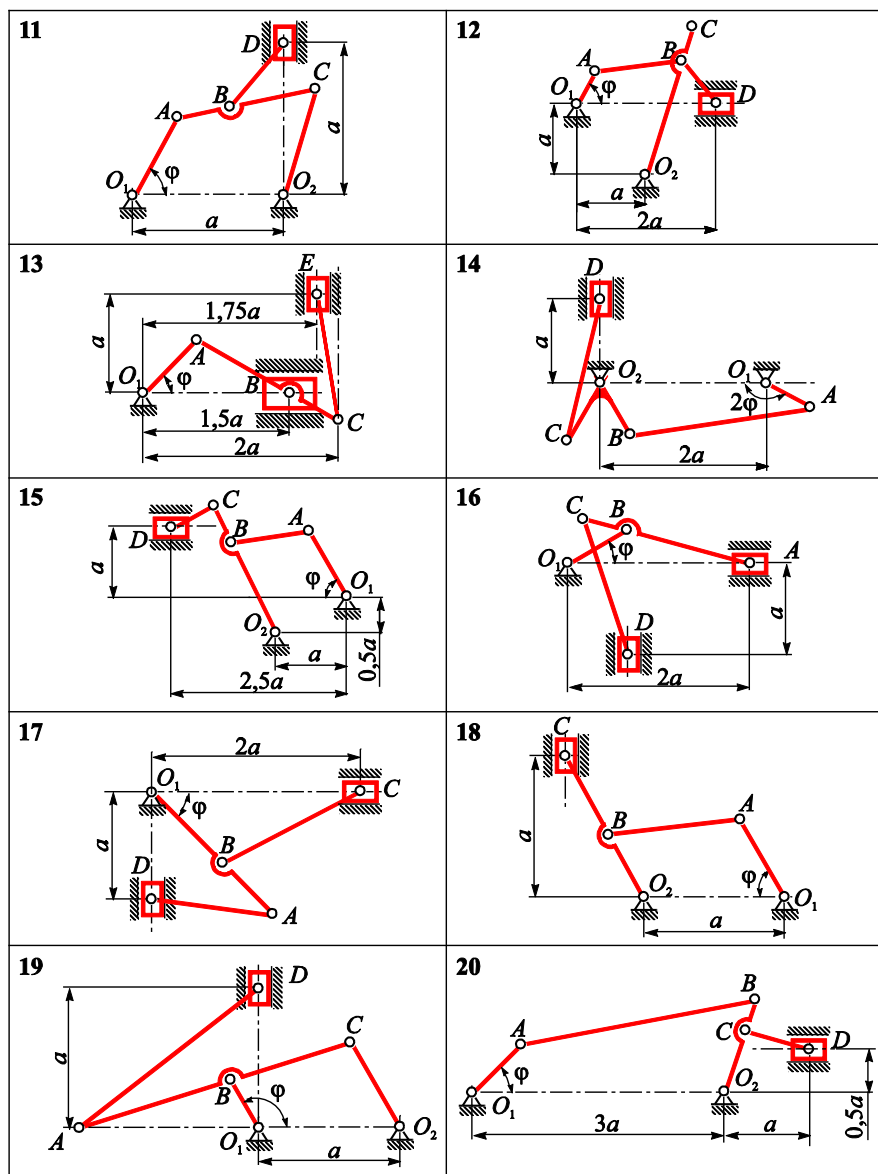


Рис. 2.5

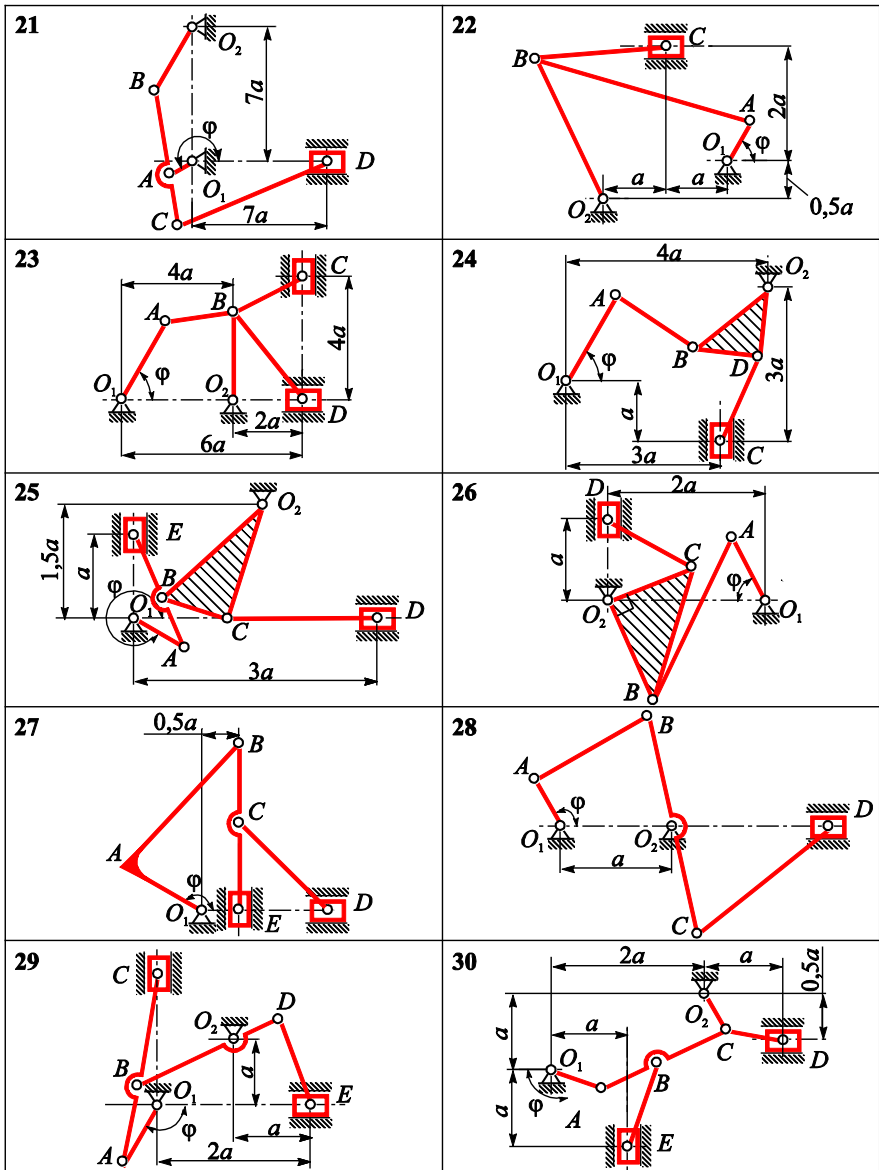


Рис. 2.6

ГЛАВА ДРУГА АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ

Розділ 3. СТАТИКА

Завдання С-1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил

Жорстка конструкція розташована в площині xOy (рис. 3.1). В точці A розташовано рухому опору, а в точці B – нерухому. На конструкцію діє навантаження: $P = 25$ кН; $q = 20$ кН/м; $M = 40$ кН·м; $a = 1$ м; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$. Знайти реакції опор конструкції.

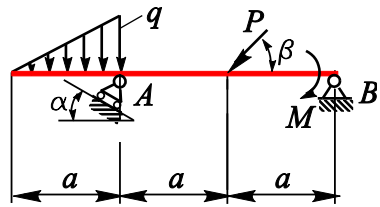


Рис. 3.1. Жорстка конструкція під дією плоскої системи сил

Розв'язання задачі

1. Для конструкції, зображеної на рис. 3.1, зв'язками є шарнірно-нерухома опора, розташована в точці B та шарнірно-рухома опора в точці A . Виходячи з класифікації реакцій для різних типів зв'язків, розташовуємо в точці B дві складові реакції – X_B та Y_B , а в точці A – реакцію R_A , перпендикулярно до площини опори (рис. 3.2). Розподілене по закону трикутника навантаження q замінимо еквівалентною зосередженою силою Q .

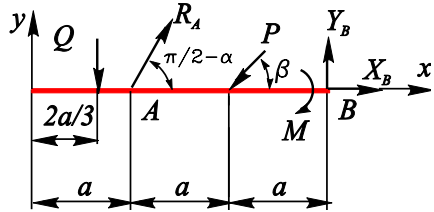


Рис. 3.2. Складові реакції зв'язків та розрахункова схема конструкції

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot a = \frac{1}{2} 20 \cdot 1 = 10 \text{ кН.}$$

2. Невідомими є три складові реакції зв'язків X_B , Y_B , та R_A . Рівнянь рівноваги для даної системи сил також три. Тобто задача є статично визначеною.

3. Запишемо рівняння рівноваги системи:

$$\begin{aligned}
\Sigma X_i &= 0; \\
R_A \cdot \cos 45^0 - P \cdot \cos 60^0 + X_B &= 0; \\
\Sigma Y_i &= 0; \\
-Q + R_A \cdot \cos 45^0 - P \cdot \cos 30^0 + Y_B &= 0; \\
\Sigma M_B &= 0; \\
Q \cdot 2,333 \cdot a - R_A \cdot \cos 45^0 \cdot 2 \cdot a + P \cdot \cos 30^0 \cdot a - M &= 0.
\end{aligned}$$

4. Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$R_A = \frac{Q \cdot 2,333 \cdot a + P \cdot \cos 30^0 \cdot a - M}{2 \cdot a \cdot \cos 45^0} = \frac{10 \cdot 2,333 \cdot 1 + 25 \cdot \cos 30^0 \cdot 1 - 40}{2 \cdot 1 \cdot \cos 45^0} = 3,523 \text{ кН}$$

$$X_B = P \cdot \cos 60^0 - R_A \cdot \cos 45^0 = 25 \cdot \cos 60^0 - 3,523 \cdot \cos 45^0 = 10,009 \text{ кН}$$

$$Y_B = Q - R_A \cdot \cos 45^0 + P \cdot \cos 30^0 = 10 - 3,523 \cdot \cos 45^0 + 25 \cdot \cos 30^0 = 29,16 \text{ кН}.$$

5. Зробимо аналітичну та графічну перевірки отриманих результатів.

5.1. Для проведення аналітичної перевірки запишемо рівняння моментів для будь-якого вузла конструкції (наприклад, для точки A). Якщо невідомі реакції знайдені вірно, то сума моментів усіх сил відносно точки A повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned}
\Sigma M_A &= 0; \\
Q \cdot \frac{1}{3} \cdot a - P \cdot \cos 30^0 \cdot a - M + Y_B \cdot 2 \cdot a &= \\
= 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - 25 \cdot \cos 30^0 \cdot 1 - 40 + 29,16 \cdot 2 \cdot 1 &= 0,002 \approx 0.
\end{aligned}$$

Величина відносної похибки складає 0,2 %, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа.

Результат рішення даного рівняння не перевищує відносну похибку, отже невідомі реакції знайдені вірно.

5.2. *Графічна перевірка.* Для цього в системі *Autocad* побудуємо головний вектор – геометричну суму – системи сил, що діє на жорстку конструкцію. Задаємо, наприклад, масштаб сили: 1 кН = 10 мм. Тоді довжина вектора сили X_B дорівнюватиме: $\frac{10,009 \text{ кН}}{1 \text{ кН}} \cdot 10 \text{ мм} = 100,09 \text{ мм}$. Тобто в системі

Autocad будемо відрізок довжини 100,09 мм, який у силовому багатокутнику позначатиме вектор сили X_B . Так, як при розрахунку ми отримали до-

датне значення сили, то і її вектор буде направлено в додатному напрямку осі x , тобто праворуч. Аналогічно будуємо вектори інших сил, а саме: Y_B, Q, P, R_A . Отриманий результат побудови у вигляді силового багатокутника наведено на рис. 3.3.

Силовий багатокутник замкнений, отже головний вектор системи дорівнює нулю. Як наслідок і його проекції на осі координат також дорівнюють нулю.

Аналогічно побудові головного вектора системи сил в системі *Autocad* виконаємо побудову моментів усіх сил відносно лівої опори (точки A), тобто, в точці прикладання кожної сили побудуємо величину її моменту, відносно вказаної опори. Момент пари сил зобразимо як добуток модуля однієї сили пари на плече пари. Задаємо, наприклад, масштаб моменту сили: $1 \text{ кН}\cdot\text{м} = 2 \text{ мм}$.

Розташування моменту пари сил може бути довільним в межах конструкції. Умовно його побудовано там, де наведено у завданні (див. рис. 3.1.) Модулі моментів сил і пари сил зі знаком «+» зобразимо направленими таким чином, щоб жорстка конструкція «оберталась» у напрямку проти руху годинникової стрілки, зі знаком «-» – у напрямку руху годинникової стрілки. Отриманий результат наведено на рис. 3.4.

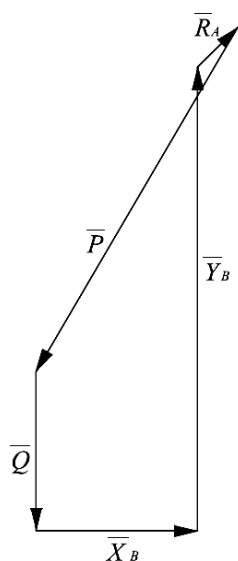


Рис. 3.3. Силовий багатокутник плоскої системи сил для конструкції, що розглядається

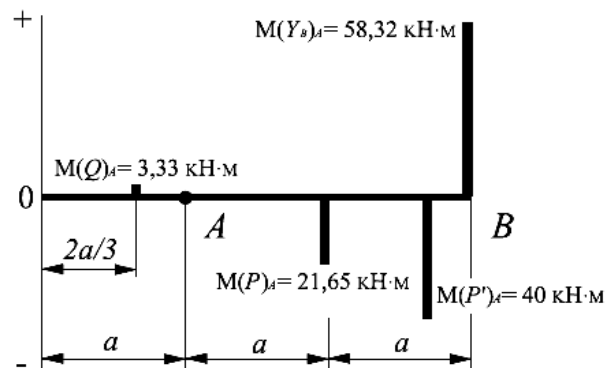
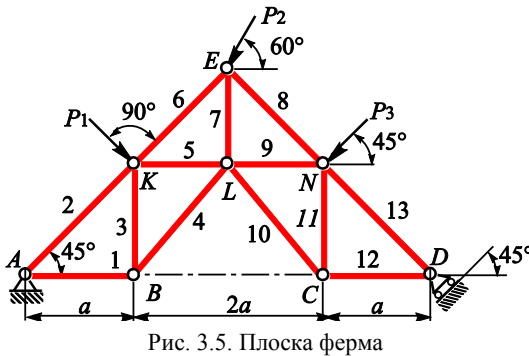


Рис. 3.4. Модулі моментів сил відносно точки A і пари сил, що діють на жорстку конструкцію

Як витікає з побудови, алгебраїчна сума моментів усіх сил конструкції відносно точки A дорівнює нулю – можна зробити висновок, що задача розв’язана правильно.

Завдання С-2. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів



На конструкцію діє навантаження: $P_1 = 18$ кН; $P_2 = 15$ кН; $P_3 = 5$ кН. Знайти реакції опор та зусилля в стержнях плоскої ферми (рис. 3.5) методом вирізання вузлів.

Розв’язання задачі

1. *Визначення реакції опор.* Покажемо зовнішні сили, прикладені до ферми:

ми: активні (задані) сили P_1 , P_2 , P_3 та реакції опор. Для плоскої ферми, зображеної на рис. 3.5, зв’язками є шарнірно-нерухома опора, розташована в точці A та шарнірно-рухома опора в точці D . Виходячи з класифікації реакцій для різних типів зв’язків, розташовуємо в точці A дві складові реакції – X_A та Y_A , а в точці D – реакцію R_D , перпендикулярно до площини опори (рис. 3.6).

Запишемо рівняння рівноваги сил, прикладених до ферми:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; & X_A + P_1 \cdot \cos 45^\circ - P_2 \cdot \cos 60^\circ - P_3 \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & Y_A - P_1 \cdot \cos 45^\circ - P_2 \cdot \cos 30^\circ - P_3 \cdot \cos 45^\circ + R_D \cdot \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum M_A &= 0; & -P_1 \cdot \sqrt{2} \cdot a - P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a + P_3 \cdot \cos 45^\circ \cdot a - \\ & & - P_3 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3a + R_D \cdot \cos 45^\circ \cdot 4a &= 0.\end{aligned}$$

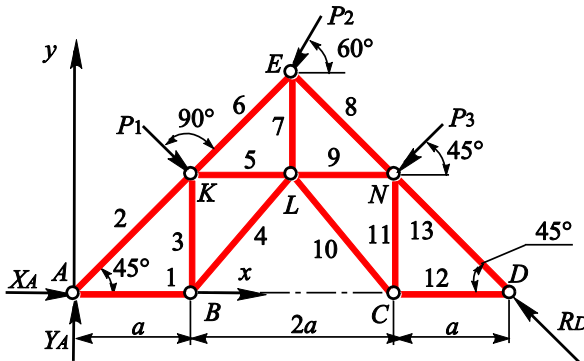


Рис. 3.6. Розрахункова схема плоскої ферми

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$R_D = \frac{(P_1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot P_2 \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot P_2 \cdot \cos 60^\circ - P_3 \cdot \cos 45^\circ + 3 \cdot P_3 \cdot \cos 45^\circ) \cdot a}{4 \cdot a \cdot \cos 45^\circ} =$$

$$= \frac{(18 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 15 \cdot \cos 30^\circ - 2 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ - 5 \cdot \cos 45^\circ + 3 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ)}{4 \cdot \cos 45^\circ} = 15,385 \text{ кН};$$

$$X_A = -P_1 \cdot \cos 45^\circ + P_2 \cdot \cos 60^\circ + P_3 \cdot \cos 45^\circ + R_D \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= -18 \cdot \cos 45^\circ + 15 \cdot \cos 60^\circ + 5 \cdot \cos 45^\circ + 15,385 \cdot \cos 45^\circ = 9,187 \text{ кН};$$

$$Y_A = P_1 \cdot \cos 45^\circ + P_2 \cdot \cos 30^\circ + P_3 \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= 18 \cdot \cos 45^\circ + 15 \cdot \cos 30^\circ + 5 \cdot \cos 45^\circ - 15,385 \cdot \cos 45^\circ = 18,375 \text{ кН}.$$

Для перевірки результатів рішення побудуємо, в системі *Autocad*, головний вектор – геометричну суму системи сил, що діє на плоску ферму (рис. 3.7). Особливості побудови детально наведено в завданні С–1.

Силовий багатокутник замкнений, отже головний вектор системи дорівнює нулю. Як наслідок, його проекції на осі координат також дорівнюють нулю.

Аналогічно побудові головного вектора системи сил, виконаємо побудову моментів активних сил та реакцій опор відносно правої опори (точки *D*), тобто, в точці прикладання кожної сили побудуємо величину її моменту, відносно вказаної опори (рис. 3.8).

Якщо невідомі реакції знайдені вірно, то сума моментів усіх сил відносно точки *D* повинна тотожно дорівнювати нулю:

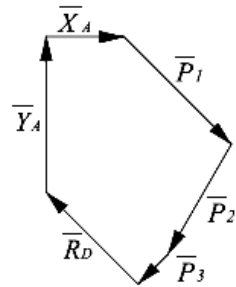


Рис. 3.7. Силовий багатокутник плоскої ферми

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0; \\ -Y_A \cdot 4a - P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot a + P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3a + P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a + P_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + \\ + P_3 \cdot \sqrt{2} \cdot a = -18,375 \cdot 4a - 18 \cdot \cos 45^\circ \cdot a + 18 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3a + 15 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a + \\ + 15 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot a = 0,008 \cdot a, \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

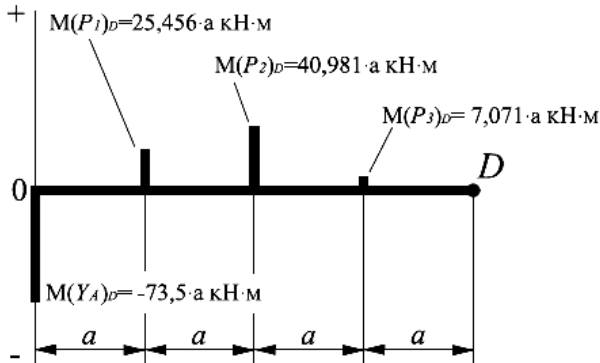


Рис. 3.8. Моменти активних сил та реакцій опор плоскої ферми відносно точки D

Оскільки розмір a не може дорівнювати нулю, значить лише коефіцієнт у цьому рівнянні може бути рівним нулю.

$$\Sigma M_D = 0,008 \approx 0.$$

Величина відносної похибки складає 1%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа. Результат рішення рівняння моментів не перевищує відносну похибку, отже невідомі реакції знайдено вірно.

Головний момент сил та реакцій опор плоскої ферми відносно точки D дорівнює нулю.

Висновок: Так, як головний вектор та головний момент системи сил, прикладених до плоскої ферми дорівнюють нулю, то реакції її опор визначені правильно.

2. *Визначення зусиль в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів.* Стержні, що сходяться в вузлі ферми, являються для вузлового з'єднання зв'язками. Відкинемо уявно зв'язки, та замінимо їх дію на вузли реакціями. На рис. 3.9 зображено вузли ферми з прикладеними до них активними та реактивними силами.

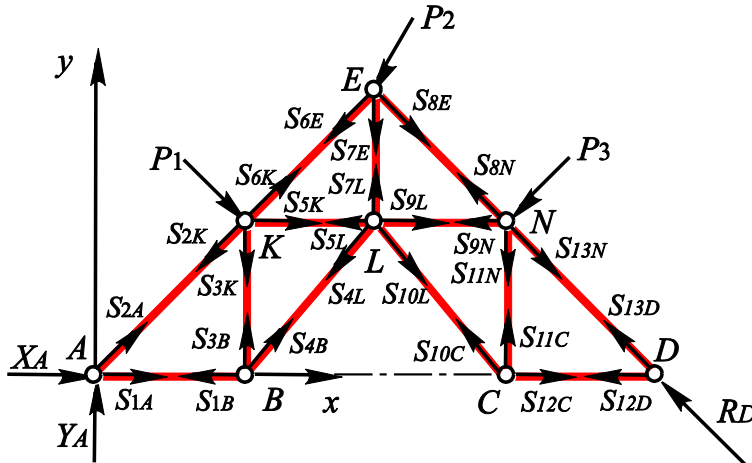


Рис. 3.9. Розрахункова схема плоскої ферми з прикладеними до вузлів активними та реактивними силами

Зусилля в стержні з номером i позначимо S_i . Реакцію стержня з номером i , прикладену до вузла L , позначимо S_{iL} . Для стержня, що з'єднує вузли L та N :

$$\bar{S}_{iL} = -\bar{S}_{iN}, \text{ але } S_{iL} = S_{iN} = S_i.$$

Напрямок реакцій усіх стержнів показано від вузла всередину стержня в припущенні, що стержні розтягнуті. Якщо в результаті рішення отримаємо відємну реакцію, це буде означати, що відповідний стержень стиснутий.

Для кожного вузла складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \text{ та } \sum Y_i = 0.$$

Рекомендується розглядати вузли в такій послідовності, щоб кожний раз в рівняння рівноваги входило не більше двох невідомих.

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла A та стержнів $1, 2$ (рис. 3.10). Невідомими є зусилля в стержнях S_{1A} , S_{2A} . Відомими є реакції опори A – X_A та Y_A .

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + S_{1A} + S_{2A} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + S_{2A} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначимо:

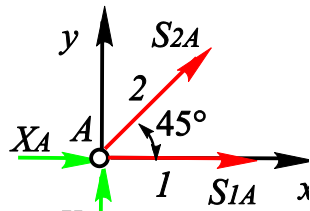


Рис. 3.10. Розрахункова схема вузла A

$$S_{2A} = S_2 = -\frac{Y_A}{\cos 45^\circ} = -\frac{18,375}{\cos 45^\circ} = -25,986 \text{ kH}$$

(стержень 2 – стиснутий),

$$S_{1A} = S_1 = -X_A - S_{2A} \cdot \cos 45^\circ = -9,187 + 25,986 \cdot \cos 45^\circ = 9,188 \text{ kH}.$$

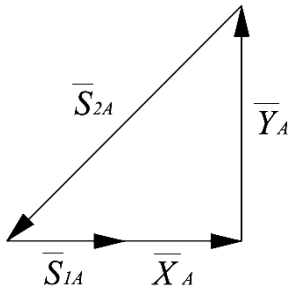


Рис. 3.11. Силевий багатокутник вузла A

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла A силевий багатокутник (рис. 3.11).

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла B та стержнів 1, 3, 4 (рис. 3.12). Невідомими є зусилля стержнів S_{3B} , S_{4B} . Відомим є складова зусилля стержня S_{1B} .

$$\sum X_i = 0; \quad -S_{1B} + S_{4B} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S_{3B} + S_{4B} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

звідки визначаємо:

$$S_{4B} = S_4 = \frac{S_{1B}}{\cos 45^\circ} = \frac{9,188}{\cos 45^\circ} = 12,994 \text{ kH}$$

$$S_{3B} = S_3 = -S_{4B} \cdot \cos 45^\circ = -12,994 \cdot \cos 45^\circ = -9,188 \text{ kH},$$

(стержень 3 – стиснутий).

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла B силевий багатокутник (рис. 3.13).

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла K та стержнів 2, 3, 5, 6 та активної сили P_1 (рис. 3.14). Невідомими є зусилля стержнів S_{6K} , S_{5K} . Відомими є зусилля стержнів S_{2K} , S_{3K} та активна сила P_1 .

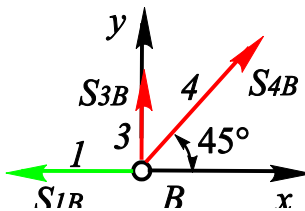


Рис. 3.12. Розрахункова схема вузла B

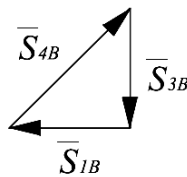


Рис. 3.13. Силевий багатокутник вузла B

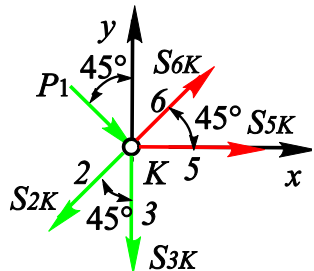


Рис. 3.14. Розрахункова схема вузла K

СТАТИКА

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \quad S_{5K} + S_{6K} \cdot \cos 45^\circ + P_1 \cdot \cos 45^\circ - \\ &- S_{2K} \cdot \cos 45^\circ = 0; \\ \sum Y_i &= 0; \quad S_{6K} \cdot \cos 45^\circ - S_{3K} - P_1 \cdot \cos 45^\circ - \\ &- S_{2K} \cdot \cos 45^\circ = 0,\end{aligned}$$

звідки визначаємо

$$\begin{aligned}S_{6K} = S_6 &= \frac{S_{3K} + P_1 \cdot \cos 45^\circ + S_{2K} \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \\ &= \frac{-9,188 + 18 \cdot \cos 45^\circ - 25,986 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = -20,980 \text{ kH}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{5K} = S_5 &= S_{2K} \cdot \cos 45^\circ - P_1 \cdot \cos 45^\circ - S_{6K} \cdot \cos 45^\circ = \\ &= -25,986 \cdot \cos 45^\circ - 18 \cdot \cos 45^\circ + 20,980 \cdot \cos 45^\circ = \\ &= -16,268 \text{ kH},\end{aligned}$$

(стержні 5, 6 – стиснуті).

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла K силовий багатокутник (рис. 3.15).

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла E та стержнів 6, 7, 8 та активної сили P_2 (рис. 3.16). Невідомими є зусилля стержнів S_{7E} , S_{8E} . Відомими є зусилля стержня S_{6E} та активна сила P_2 :

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; \quad S_{8E} \cdot \cos 45^\circ - S_{6E} \cdot \cos 45^\circ - \\ &- P_2 \cdot \cos 60^\circ = 0; \\ \sum Y_i &= 0; \quad -P_2 \cdot \cos 30^\circ - S_{7E} - S_{6E} \cdot \cos 45^\circ - \\ &- S_{8E} \cdot \cos 45^\circ = 0,\end{aligned}$$

звідки визначаємо

$$\begin{aligned}S_{8E} = S_8 &= \frac{S_{6E} \cdot \cos 45^\circ + P_2 \cdot \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \\ &= \frac{-20,980 \cdot \cos 45^\circ + 15 \cdot \cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = -10,373 \text{ kH}\end{aligned}$$

(стержень 8 – стиснутий),

$$\begin{aligned}S_{7E} = S_7 &= -P_2 \cdot \cos 30^\circ - S_{6E} \cdot \cos 45^\circ - S_{8E} \cdot \cos 45^\circ = -15 \cdot \cos 30^\circ + 20,980 \cdot \cos 45^\circ + \\ &+ 10,373 \cdot \cos 45^\circ = 9,18 \text{ kH}.\end{aligned}$$

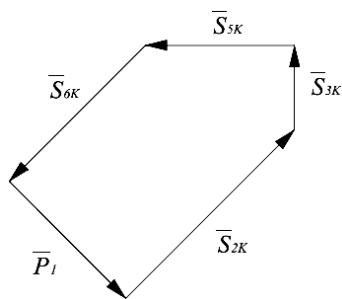


Рис. 3.15. Силовий багатокутник вузла K

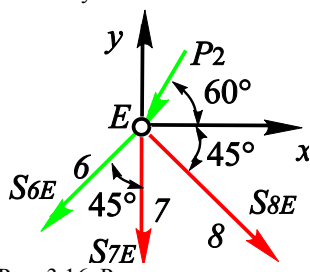


Рис. 3.16. Розрахункова схема вузла E

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла E силовий багатокутник (рис. 3.17).

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла L та стержнів 4, 5, 7, 9, 10 (рис. 3.18). Невідомими є зусилля стержнів S_{9L} , S_{10L} . Відомими є зусилля стержнів S_{4L} , S_{5L} , S_{7L} .

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; S_{9L} - S_{5L} + S_{10L} \cdot \cos 45^\circ - \\ &- S_{4L} \cdot \cos 45^\circ = 0; \\ \sum Y_i &= 0; S_{7L} - S_{10L} \cdot \cos 45^\circ - S_{4L} \cdot \cos 45^\circ = 0,\end{aligned}$$

Звідки визначаємо:

$$\begin{aligned}S_{10L} = S_{10} &= \frac{S_{7L} - S_{4L} \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \\ &= \frac{9,18 - 12,994 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 0 \\ S_{9L} = S_9 = S_{5L} - S_{10L} \cdot \cos 45^\circ + S_{4L} \cdot \cos 45^\circ &= \\ &= -16,268 + 12,994 \cdot \cos 45^\circ = -7,074 \text{ кН},\end{aligned}$$

(стержень 9 – стиснутий).

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла L силовий багатокутник (рис. 3.19).

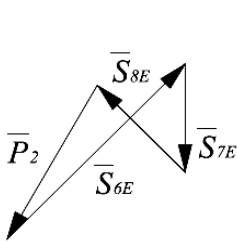


Рис. 3.17. Силовий багатокутник вузла E

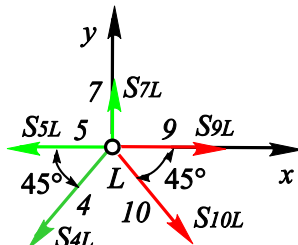


Рис. 3.18. Розрахункова схема вузла L

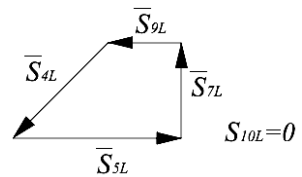


Рис. 3.19. Силовий багатокутник вузла L

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла N та стержнів 8, 9, 11, 13 та активної сили P_3 (рис. 3.20). Невідомими є зусилля стержнів S_{11N} , S_{13N} . Відомими є зусилля стержнів S_{8N} , S_{9N} та активна сила P_3 :

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; -P_3 \cdot \cos 45^0 - S_{9N} - S_{8N} \cdot \cos 45^0 + \\ &+ S_{13N} \cdot \cos 45^0 = 0; \\ \sum Y_i &= 0; -P_3 \cdot \cos 45^0 + S_{8N} \cdot \cos 45^0 - S_{11N} - \\ &- S_{13N} \cdot \cos 45^0 = 0,\end{aligned}$$

звідки визначаємо

$$\begin{aligned}S_{13N} = S_{13} &= \frac{P_3 \cdot \cos 45^0 + S_{9N} + S_{8N} \cdot \cos 45^0}{\cos 45^0} = \\ &= \frac{5 \cdot \cos 45^0 - 7,074 - 10,373 \cdot \cos 45^0}{\cos 45^0} = -15,377 \text{ kH},\end{aligned}$$

(стержень 13 – стиснутий),

$$\begin{aligned}S_{11N} = S_{11} &= -P_3 \cdot \cos 45^0 + S_{8N} \cdot \cos 45^0 - S_{13N} \cdot \cos 45^0 = -5 \cdot \cos 45^0 - 10,373 \cdot \cos 45^0 + \\ &+ 15,377 \cdot \cos 45^0 = 0.\end{aligned}$$

Для перевірки розрахунку побудуємо для вузла N силовий багатокутник (рис. 3.21).

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла C та стержнів 10, 11, 12 (рис. 3.22). Невідомими є зусилля стержнів S_{10C} , S_{12C} . Відомим є зусилля стержня S_{11C} .

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; S_{12C} - S_{10C} \cdot \cos 45^0 = 0; \\ \sum Y_i &= 0; S_{11C} + S_{10C} \cdot \cos 45^0 = 0,\end{aligned}$$

звідки визначаємо

$$\begin{aligned}S_{12C} = S_{12} &= S_{10C} \cdot \cos 45^0 = 0; \\ S_{10C} = S_{10} &= -\frac{S_{11C}}{\cos 45^0} = 0.\end{aligned}$$

Зусилля в стержнях 10, 11, 12 дорівнює нулю. Силовий багатокутник будувати не потрібно – система рівноважена.

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла D та стержнів 12, 13 (рис. 3.23). Невідомим є зусилля стержня S_{13D} . Відомими є зусилля стержня S_{12D} та реакція опори $D - R_D$.

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; -S_{13D} \cdot \cos 45^0 - R_D \cdot \cos 45^0 - S_{12D} = 0; \\ \sum Y_i &= 0; S_{13D} \cdot \cos 45^0 + R_D \cdot \cos 45^0 = 0,\end{aligned}$$

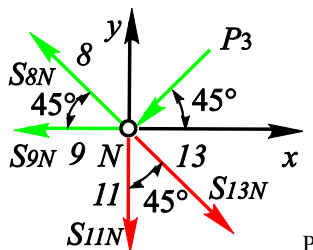


Рис. 3.20. Розрахункова схема вузла N

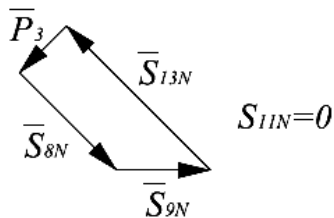


Рис. 3.21. Силовий багатокутник вузла N

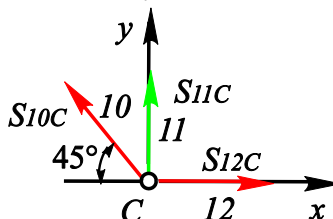


Рис. 3.22. Розрахункова схема вузла C

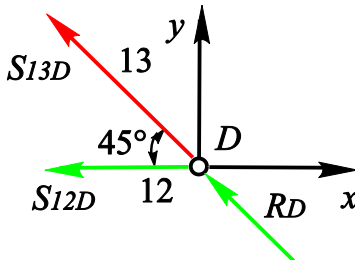


Рис. 3.23. Розрахункова схема вузла D

звідки визначаємо:

$$S_{13D} = -R_D = -15,385 \text{ кН}.$$

В усіх вузлах сили багатокутники замкнуті, що підтверджує правильність розрахунку.

Визначимо розтягнуті та стиснуті стержні ферми. Якщо зусилля S в стержні додатне, то стержень вважається розтягнутим. Якщо від'ємне – стержень стиснутий. Якщо зусилля S в стержні

дорівнює нулю, то він – недеформований.

Тоді стержні 1, 4 та 7 – розтягнуті; стержні 2, 3, 5, 6, 8, 9 та 13 – стиснуті; стержні 10, 11 та 12 – недеформовані.

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак зусилля S в кожному стержні (рис. 3.24).

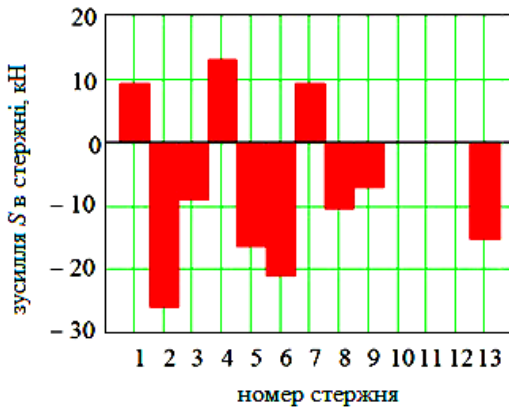


Рис. 3.24. Зусилля в стержнях плоскої ферми

Завдання С-3. Рівновага зчленованої системи тіл

Знайти реакції опор і тиск в проміжних шарнірах заданої конструкції, складеної з двох частин (рис. 3.25). На конструкцію діє навантаження: $P = 1,5 \text{ кН}$; $q_1 = q_2 = 0,2 \text{ кН/м}$; $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $a = 1 \text{ м}$; $\alpha = \beta = 30^\circ$.

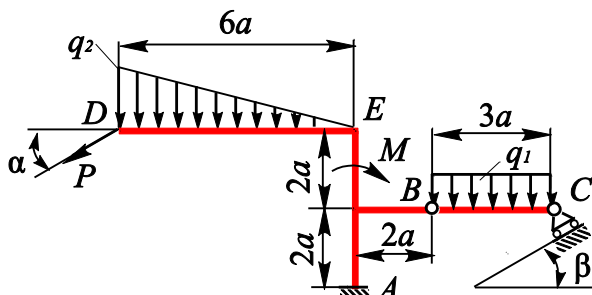


Рис. 3.25. Плоска зчленована конструкція

Для конструкції, зображеної на рис. 3.25, опорами є жорстке закріплення, розташоване в точці A та шарнірно-рухома опора в точці C . Виходячи з класифікації реакцій для типів зв'язків, розташовуємо в точці A три складові реакції – X_A , Y_A та M_A , а в точці C – реакцію R_C , перпендикулярно до площини опори (рис. 3.26). Рівномірно розподілене навантаження q_1 замінимо еквівалентною зосередженою силою Q_1 , а нерівномірно розподілене навантаження q_2 (розподілене по закону трикутника) замінимо еквівалентною зосередженою силою Q_2 .

$$Q_1 = q_1 \cdot 3a = 0,2 \cdot 3 = 0,6 \text{ кН}; \quad Q_2 = \frac{q_2 \cdot 6a}{2} = \frac{0,2 \cdot 6}{2} = 0,6 \text{ кН}.$$

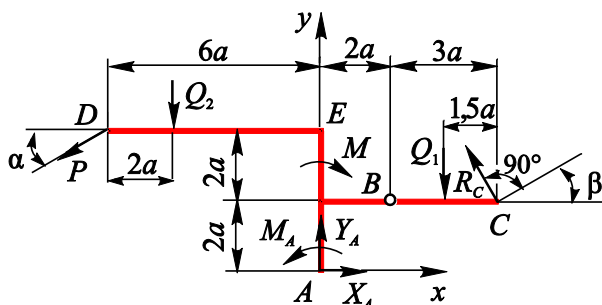


Рис. 3.26. Розрахункова схема конструкції

Розєднаємо конструкцію на частини (по внутрішньому шарніру B) і розглянемо рівновагу кожної частини окремо. При цьому, сили взаємодії між

частинами повинні бути рівними по величині та протилежні за напрямком. Для кожної частини конструкції складемо по три рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum M_i = 0.$$

Розглянемо ліву частину конструкції $DEAB$ (рис. 3.27).

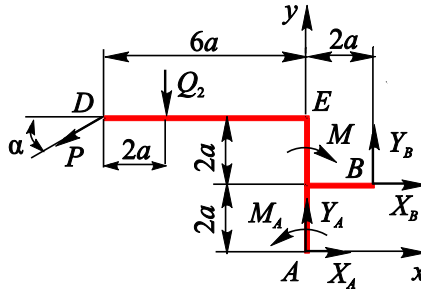


Рис. 3.27. Розрахункова схема частини конструкції $DEAB$

Складемо рівняння рівноваги для лівої частини конструкції:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - P \cdot \cos 30^\circ + X_B = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - Q_2 - P \cdot \cos 60^\circ + Y_B = 0;$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$X_A \cdot 2a - Y_A \cdot 2a - M + M_A + Q_2 \cdot 6a + P \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + P \cdot \cos 60^\circ \cdot 8a = 0.$$

Розглянемо праву частину конструкції BC (рис. 3.28).

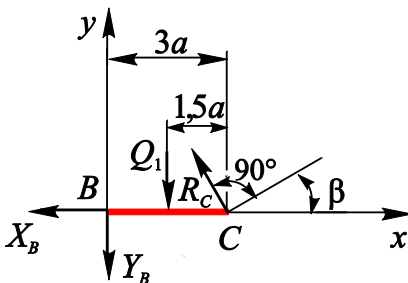


Рис. 3.28. Розрахункова схема частини конструкції BC

Складемо рівняння рівноваги для правої частини конструкції:

$$\sum X_i = 0; \quad -X_B - R_C \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_C \cdot \cos 30^\circ - Q_1 - Y_B = 0;$$

$$\sum M_C = 0; \quad Q_1 \cdot 1,5a + Y_B \cdot 3a = 0.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги знайдемо всі невідомі реакції. З другого рівняння визначаємо складову реакції внутрішнього шарніру Y_B :

$$Y_B = -\frac{Q_1 \cdot 1,5a}{3a} = -\frac{0,6 \cdot 1,5}{3} = -0,3 \text{ kH}.$$

Визначаємо складову невідомої реакції жорсткого закріплення Y_A :

$$Y_A = Q_2 + P \cdot \cos 60^\circ - Y_B = 0,6 + 1,5 \cdot \cos 60^\circ + 0,3 = 1,65 \text{ kH}.$$

СТАТИКА

Визначаємо реакцію шарнірно-рухомої опори R_C :

$$R_C = \frac{Y_B + Q_1}{\cos 30^\circ} = \frac{-0,3 + 0,6}{\cos 30^\circ} = 0,346 \text{ кН}.$$

Визначимо другу складову реакції внутрішнього шарніру X_B :

$$X_B = -R_C \cdot \cos 60^\circ = -0,346 \cdot \cos 60^\circ = -0,173 \text{ кН}.$$

Визначаємо складові невідомої реакції жорсткого закріплення X_A та M_A відповідно:

$$X_A = P \cdot \cos 30^\circ - X_B = 1,5 \cdot \cos 30^\circ + 0,173 = 1,472 \text{ кН};$$

$$M_A = -X_A \cdot 2a + Y_A \cdot 2a + M - Q_2 \cdot 6a - P \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a - P \cdot \cos 60^\circ \cdot 8a = \\ = -1,472 \cdot 2 + 1,65 \cdot 2 + 4 - 0,6 \cdot 6 - 1,5 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 - 1,5 \cdot \cos 60^\circ \cdot 8 = -7,842 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для перевірки результатів рішення побудуємо силові багатокутники для обох частин конструкції $DEAB$ (рис. 3.29) та BC (рис. 3.30).

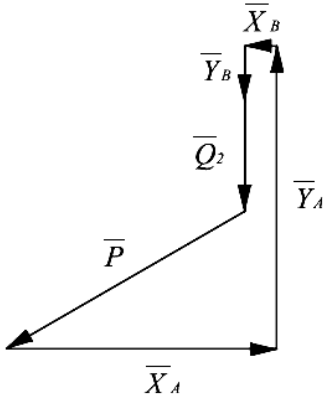


Рис. 3.29. Силовий багатокутник частини конструкції $DEAB$

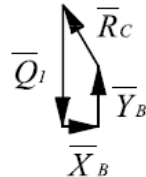


Рис. 3.30. Силовий багатокутник частини конструкції BC

Особливості побудови векторів сил, в системі *Autocad*, детально наведено в завданні С-1.

Силові багатокутники для обох частин конструкції замкнені, отже головні вектори підсистем дорівнюють нулю. Як наслідок, проекції головних векторів на осі координат також дорівнюють нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Для додаткової перевірки правильності розрахунків, виконаємо побудову моментів активних сил та реакцій опор для обох частин конструкції.

Для частини конструкції *DEAB*, виконаємо перевірку відносно лівої опори (точки *A*), тобто, в точці прикладання кожної сили побудуємо величину її моменту, відносно вказаної опори (рис. 3.31).

Якщо невідомі реакції знайдено вірно, то сума моментів усіх сил відносно точки *A* повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0; \\ -M + M_A + Q_2 \cdot 4a - X_B \cdot 2a + Y_B \cdot 2a + P \cdot \cos 60^\circ \cdot 6a + P \cdot \cos 30^\circ \cdot 4a &= \\ = -4 - 7,842 + 0,6 \cdot 4 + 0,173 \cdot 2 - 0,3 \cdot 2 + 1,5 \cdot \cos 60^\circ \cdot 6 + 1,5 \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 &= 0.\end{aligned}$$

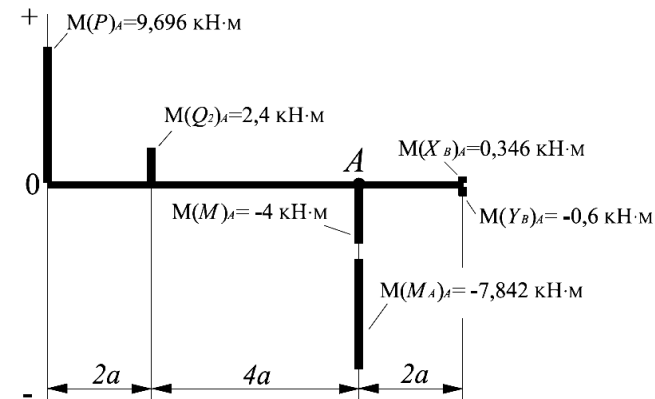


Рис. 3.31. Моменти активних сил та реакцій опор частини *DEAB* відносно точки *A*

Для частини конструкції *BC*, виконаємо перевірку відносно лівої опори (точки *B*), тобто, в точці прикладання кожної сили побудуємо величину її моменту, відносно зазначеної опори (рис. 3.32).

Якщо невідомі реакції знайдено вірно, то сума моментів усіх сил відносно точки *B* повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0; \\ -Q_1 \cdot 1,5a + R_C \cdot \cos 30^\circ \cdot 3a &= -0,6 \cdot 1,5 + 0,346 \cdot \cos 30^\circ \cdot 3 = -0,001 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Величина відносної похибки складає 0,11%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа. Результат рішення рівняння моментів не перевищує відносну похибку, отже невідомі реакції знайдено вірно.

Моменти активних сил та реакцій опор для обох частин конструкції відносно зазначених точок дорівнюють нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

СТАТИКА

Для контрольної перевірки розрахунків побудуємо силовий багатокутник для всієї конструкції, вважаючи її суцільною (рис. 3.33).

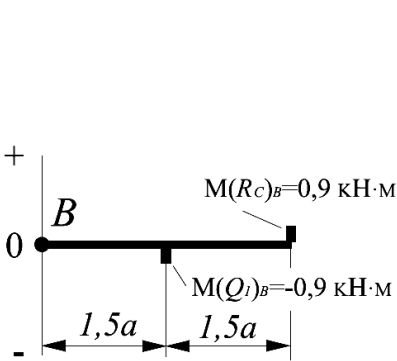


Рис. 3.32. Моменти активних сил та реакцій опор частини BC відносно точки B

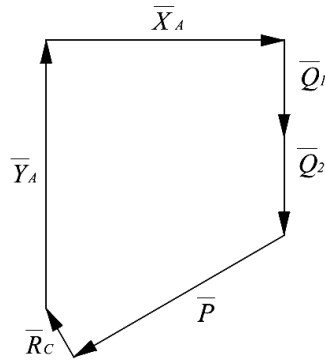


Рис. 3.33. Силовий багатокутник суцільної конструкції

Силовий багатокутник замкнений, отже головний вектор системи сил, прикладеної до суцільної конструкції дорівнює нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Також для суцільної конструкції, виконаємо побудову моментів активних сил та реакцій опор відносно точки D (рис. 3.34).

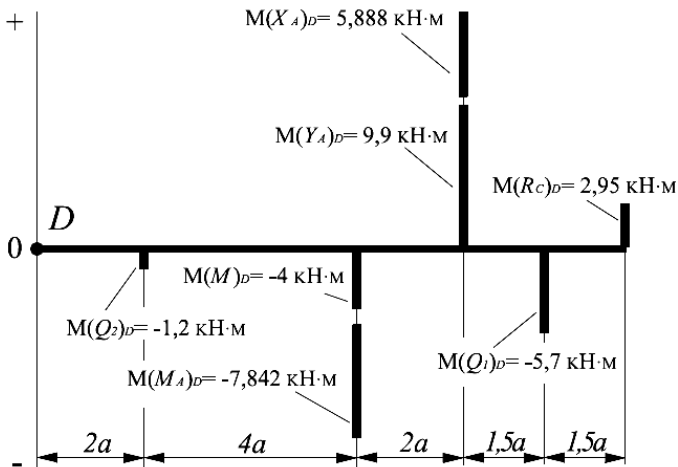


Рис. 3.34. Моменти активних сил та реакцій опор суцільної конструкції відносно точки D

Якщо невідомі реакції знайдено правильно, то сума моментів усіх сил відносно точки D повинна тотожно дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= 0; \\ -Q_2 \cdot 2a - M + Y_A \cdot 6a + X_A \cdot 4a + M_A - Q_1 \cdot 9,5a + R_C \cdot \cos 30^\circ \cdot 11a - \\ - R_C \cdot \cos 60^\circ \cdot 2a &= -0,6 \cdot 2 - 4 + 1,65 \cdot 6 + 1,472 \cdot 4 - 7,842 - \\ - 0,6 \cdot 9,5 + 0,346 \cdot \cos 30^\circ \cdot 11 - 0,346 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 &= -0,004 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Величина відносної похибки складає 0,04%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа. Результат рішення рівняння моментів не перевищує відносну похибку, отже невідомі реакції знайдено вірно.

Алгебраїчна сума моментів усіх активних сил та реакцій опор для суцільної конструкції відносно точки D дорівнює нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Завдання С-4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду

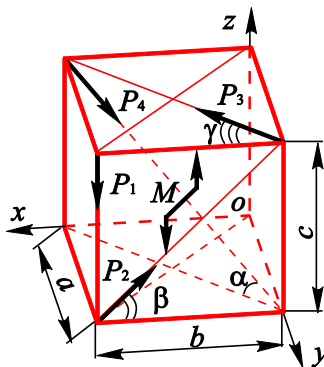


Рис. 3.35. Просторова система довільно розташованих сил з центром O

До вершин прямокутного паралелепіпеда (рис. 3.35) прикладене навантаження: $P_1 = 100$ кН; $P_2 = 50$ кН; $P_3 = 80$ кН; $P_4 = 10$ кН; $M = 50$ кН·м; $a = 0,3$ м; $b = 0,4$ м; $c = 0,5$ м. Привести просторову систему довільно розташованих сил до простішого виду.

Попередньо визначимо кути нахилу діагоналей граней паралелепіпеда – α , β та γ . Кут α – це кут нахилу діагоналі паралелепіпеда до його основи. Кут β – це кут нахилу діагоналі бічної грані до осі x . Кут γ – це кут нахилу діагоналі основи паралелепіпеда до осі x :

СТАТИКА

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{0,3^2 + 0,4^2}} = 1; \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ; \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{c}{b} = \frac{0,5}{0,4} = 1,25; \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}(1,25) = 51,34^\circ; \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{a}{b} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75; \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg}(0,75) = 36,87^\circ. \end{aligned}$$

Проекція вектора моменту M на горизонтальну площину (основу паралелепіпеда) представлена на рис. 3.36.

Визначаємо проекції головного вектора R^* заданої системи сил на осі координат:

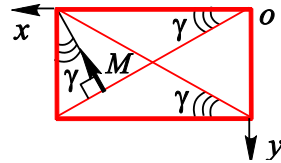


Рис. 3.36. Проекція вектора моменту M на горизонтальну площину

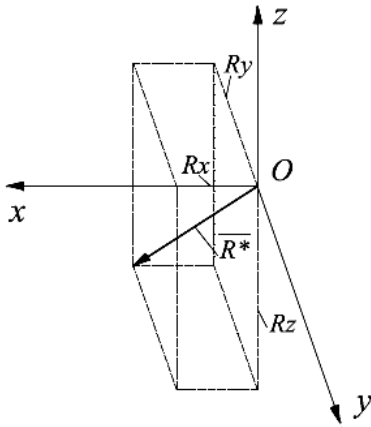
$$\begin{aligned} R_x &= P_3 \cdot \cos \gamma - P_2 \cdot \cos \beta - P_4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma = \\ &= 80 \cdot \cos \gamma - 50 \cdot \cos \beta - 10 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma = 27,108 \text{ kH}; \\ R_y &= -P_3 \cdot \sin \gamma + P_4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma = -80 \cdot \sin \gamma + 10 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma = -43,757 \text{ kH}; \\ R_z &= -P_1 + P_2 \cdot \sin \beta - P_4 \cdot \sin \alpha = -100 + 50 \cdot \sin \beta - 10 \cdot \sin \alpha = -68,028 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Модуль головного вектора R^* :

$$R^* = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{27,108^2 + (-43,757)^2 + (-68,028)^2} = 85,307 \text{ kH}.$$

Визначимо кути нахилу головного вектора системи R^* до координатних вісей x, y, z (направляючі косинуси):

$$\begin{aligned} \cos(R^*, i) &= \frac{R_x}{R^*} = \frac{27,108}{85,307} = 0,3178; \\ \cos(R^*, j) &= \frac{R_y}{R^*} = \frac{-43,757}{85,307} = -0,5129; \\ \cos(R^*, k) &= \frac{R_z}{R^*} = \frac{-68,028}{85,307} = -0,7974 \end{aligned}$$

Рис. 3.37. Головний вектор R^* заданної системи сил

Виконаємо побудову головного вектора R^* заданної системи сил. Для цього, вибираємо систему координатних вісей $Oxyz$. Відкладаємо, в довільно вибраному масштабі, відрізки проєкцій головного вектора R^* вздовж координатних вісей (з урахуванням знаку проєкції), будуюмо прямокутний паралелепіпед. Направлена діагональ, проведена з початку координат в протилежну вершину паралелепіпеда, визначає головний вектор R^* заданної системи сил (рис. 3.37).

Обчислимо головні моменти заданної системи сил відносно координатних вісей:

$$\begin{aligned} M_x &= -P_1 \cdot a + P_2 \cdot \sin \beta \cdot a + P_3 \cdot \sin \gamma \cdot c - P_4 \cdot \sin \alpha \cdot a + M \cdot \sin \gamma = \\ &= -100 \cdot 0,3 + 50 \cdot \sin \beta \cdot 0,3 + 80 \cdot \sin \gamma \cdot 0,5 - 10 \cdot \sin \alpha \cdot 0,3 + 50 \cdot \sin \gamma = 33,594 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_y &= P_1 \cdot b - P_2 \cdot \sin \beta \cdot b + P_3 \cdot \cos \gamma \cdot c - M \cdot \cos \gamma = \\ &= 100 \cdot 0,4 - 50 \cdot \sin \beta \cdot 0,4 + 80 \cdot \cos \gamma \cdot 0,5 - 50 \cdot \cos \gamma = 16,38 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_z &= P_2 \cdot \cos \beta \cdot a - P_3 \cdot \cos \gamma \cdot a + P_4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot b = \\ &= 50 \cdot \cos \beta \cdot 0,3 - 80 \cdot \cos \gamma \cdot 0,3 + 10 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot 0,4 = -8,128 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Модуль головного моменту системи сил відносно центру O :

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{33,594^2 + 16,38^2 + (-8,128)^2} = 38,248 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначимо кути нахилу головного моменту системи сил M_o до координатних вісей x, y, z (направляючі косинуси):

$$\begin{aligned} \cos(M_o, i) &= \frac{M_x}{M_o} = \frac{33,594}{38,248} = 0,878; \\ \cos(M_o, j) &= \frac{M_y}{M_o} = \frac{16,38}{38,248} = 0,428; \\ \cos(M_o, k) &= \frac{M_z}{M_o} = \frac{-8,128}{38,248} = -0,213. \end{aligned}$$

Виконаємо побудову головного моменту системи сил M_o відносно центру O аналогічно побудові головного вектора R^* заданної системи сил (рис. 3.38).

Обчислимо найменший головний момент M^* заданної системи сил:

$$\begin{aligned} M^* &= (R_x \cdot M_x + R_y \cdot M_y + R_z \cdot M_z) / R^* = \\ &= \frac{(27,108 \cdot 33,594 - 43,757 \cdot 16,38 + 68,028 \cdot 8,128)}{85,307} = 8,755 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

СТАТИКА

Так як $R^* \neq 0$, то $M^* \neq 0$, то задана система сил приводиться до простішого виду – динами (силового гвинта) (рис. 3.39).

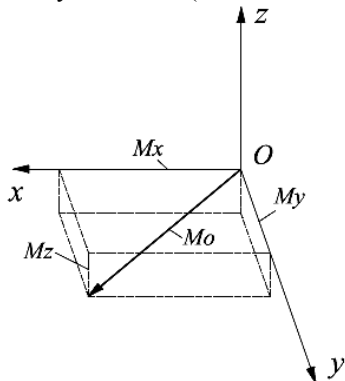


Рис. 3.38. Головний момент системи сил M_o відносно центру O

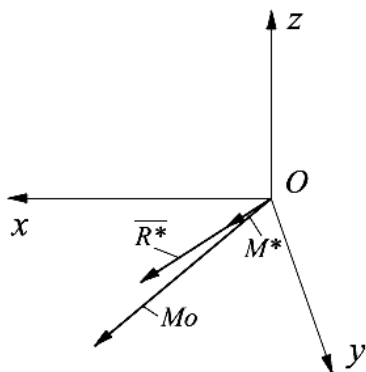


Рис. 3.39. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду – динами (силового гвинта)

Для виконання перевірки правильності розрахунків необхідно визначити розташування центральної вісі системи. Рівняння центральної вісі системи має наступний вигляд:

$$\frac{M_x - (y \cdot R_z - z \cdot R_y)}{R_x} = \frac{M_y - (z \cdot R_x - x \cdot R_z)}{R_y} = \frac{M_z - (x \cdot R_y - y \cdot R_x)}{R_z} = \frac{M^*}{R^*}.$$

З цих трьох рівнянь незалежними є тільки два рівняння. Підставляючи в будь-які два з цих рівнянь знайдені величини, отримаємо спрощені рівняння центральної вісі системи:

$$\begin{aligned} \frac{M_x - (y \cdot R_z - z \cdot R_y)}{R_x} &= \frac{M^*}{R^*}; & 2,51 \cdot y - 1,614 \cdot z &= -1,136; \\ \frac{M_y - (z \cdot R_x - x \cdot R_z)}{R_y} &= \frac{M^*}{R^*}; & 0,62 \cdot z + 1,555 \cdot x &= 0,477. \end{aligned}$$

Знайдемо точки перетину центральної вісі з координатними площинами.

Перетин з площиною yOz ($x_1=0$) – точка A_1 :

$$\begin{aligned} 0,62 \cdot z_1 &= 0,477; & z_1 &= \frac{0,477}{0,62} = 0,769 \text{ м}; \\ 2,51 \cdot y_1 - 1,614 \cdot z_1 &= -1,136; & y_1 &= \frac{-1,136 + 1,614 \cdot z_1}{2,51} = 0,0419 \text{ м}. \end{aligned}$$

Перетин з площиною zOx ($y_2=0$) – точка A_2 :

$$\begin{aligned} -1,614 \cdot z_2 &= -1,136; & z_2 &= \frac{-1,136}{-1,614} = 0,704 \text{ м}; \\ 0,62 \cdot z_2 + 1,555 \cdot x_2 &= 0,477; & x_2 &= \frac{0,477 - 0,62 \cdot z_2}{1,555} = 0,026 \text{ м}. \end{aligned}$$

Перетин з площиною xOy ($z_3=0$) – точка A_3 :

$$\begin{aligned} 1,555 \cdot x_3 &= 0,477; & x_3 &= \frac{0,477}{1,555} = 0,307 \text{ м}; \\ 2,51 \cdot y_3 &= -1,136; & y_3 &= \frac{-1,136}{2,51} = -0,453 \text{ м}. \end{aligned}$$

Отже, центральна вісь буде перетинатися з координатними площинами в наступних точках – $A_1(0; 0,0419; 0,769)$, $A_2(0,026; 0; 0,704)$ та $A_3(0,307; -0,453; 0)$. Побудову центральної вісі системи представлено на рис. 3.40).

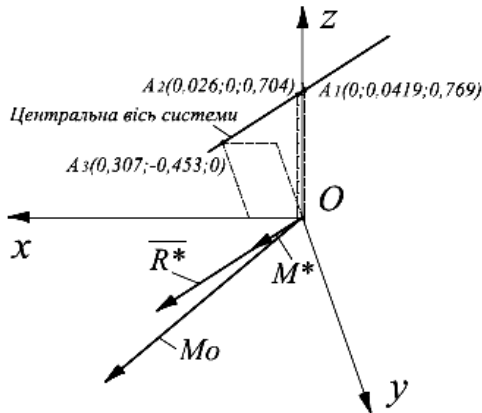


Рис. 3.40. Побудова центральної вісі системи

Так як головний вектор паралельний центральній вісі системи, отже отриманий розв'язок є вірним.

Завдання С-5. Рівновага просторової системи довільно розташованих сил

До просторової конструкції (рис. 3.41) прикладене навантаження: $G = 8$ кН; $P = 2$ кН; $M = 10$ кН·м. Розміри складають: $AB = DC = 1,8$ м; $AD = BC = 1$ м; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$. $\vec{P} \parallel Ay$; $\vec{G} \parallel Az$; $\vec{M} \parallel AC$. Визначити реакції в опорах конструкції.

До рами $ABCD$ прикладені сила тяжіння G , сила P , реакція S стержня CE та реакції опор в точках A та B . Реакція шарніру A визначається трьома складовими: X_A, Y_A, Z_A , а реакція петлі B двома: X_B, Z_B (рис. 3.42).

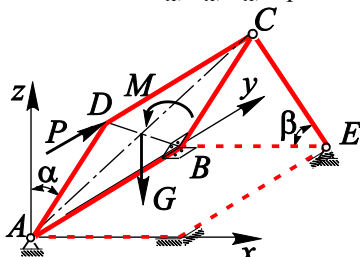


Рис. 3.41. Схема просторової конструкції

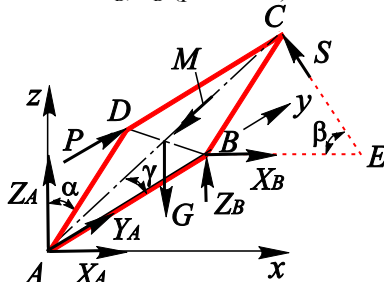


Рис. 3.42. Розрахункова схема просторової конструкції

Попередньо визначимо кут γ — кут нахилу діагоналі AC до основи рами.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1,8} = 0,556; \Rightarrow \gamma = \arctg(0,556) = 29,07^\circ.$$

З перерахованих сил — шість є невідомими. Для їх визначення можна скласти шість рівнянь рівноваги.

Рівняння моментів сил відносно координатних вісей:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -P \cdot AD \cdot \cos \alpha - G \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB + S \cdot AB \cdot \sin \beta = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad G \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin \alpha - S \cdot BC \cdot \sin \beta - M \cdot \cos \gamma = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_{iz} = 0; \quad P \cdot AD \cdot \sin \alpha + S \cdot AB \cdot \cos \beta - X_B \cdot AB - M \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Рівняння проекцій сил на осі координат:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cdot \cos \beta = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A + Z_B - G + S \cdot \sin \beta = 0. \quad (6)$$

Кількість невідомих, не перевищує число можливих рівнянь рівноваги, отже задача є статично вирішуваною.

З рівняння (2) визначимо реакцію S стержня CE :

$$S = \frac{G \cdot BC/2 \cdot \sin \alpha - M \cdot \cos \gamma}{BC \cdot \sin \beta} = \frac{8 \cdot 1/2 \cdot \sin 30^0 - 10 \cdot \cos 29,07^0}{1 \cdot \sin 60^0} = -7,783 \text{ кН}.$$

Розв'язуючи рівняння (1) знайдемо складову реакції петлі Z_B :

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{P \cdot AD \cdot \cos \alpha + G \cdot AB/2 - S \cdot AB \cdot \sin \beta}{AB} = \\ &= \frac{2 \cdot 1 \cdot \cos 30^0 + 8 \cdot 1,8/2 + 7,783 \cdot 1,8 \cdot \sin 60^0}{1,8} = 11,702 \text{ кН}. \end{aligned}$$

З рівняння (3) визначимо складову реакції петлі X_B :

$$\begin{aligned} X_B &= \frac{P \cdot AD \cdot \sin \alpha + S \cdot AB \cdot \cos \beta - M \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha}{AB} = \\ &= \frac{2 \cdot 1 \cdot \sin 30^0 - 7,783 \cdot 1,8 \cdot \cos 60^0 - 10 \cdot \sin 29,07^0 \cdot \cos 30^0}{1,8} = -5,673 \text{ кН}. \end{aligned}$$

З рівняння (4) визначимо складову реакції шарніру X_A :

$$X_A = S \cdot \cos \beta - X_B = -7,783 \cdot \cos 60^0 + 5,673 = 1,782 \text{ кН}.$$

Розв'язуючи рівняння (5) знайдемо складову реакції шарніру Y_A

$$Y_A = -P = -2 \text{ кН}.$$

З рівняння (6) визначимо складову реакції шарніру Z_A :

$$Z_A = -Z_B + G - S \cdot \sin \beta = -11,702 + 8 + 7,783 \cdot \sin 60^0 = 3,038 \text{ кН}.$$

Для перевірки правильності рішення побудуємо, в системі *Autocad*, головний вектор – геометричну суму системи сил, що діє на просторову конструкцію. Особливості побудови детально наведено в завданні С–1. Однак, з огляду на те, що поточна задача задана у просторі, потрібно побудувати два головних вектори сил. Наприклад, побудуємо проєкції головного вектору сил в площині zAx (рис. 3.43, *a*) та в площині zAy (рис. 3.43, *б*).

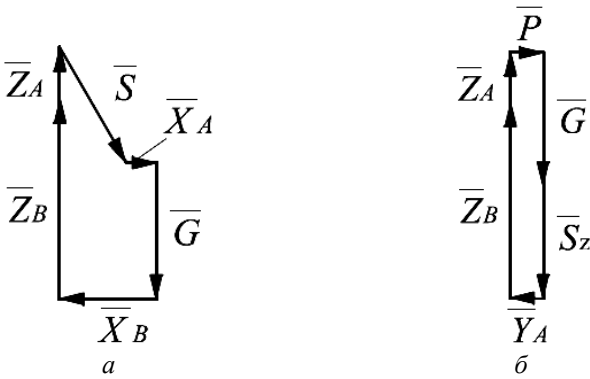


Рис. 3.43. Силловий багатокутник просторової конструкції:
а – площина zAx ; б – площина zAy

Силловий багатокутник обох отриманих результатів замкнений, отже їх вектор системи дорівнює нулю. Як наслідок і його проекції на вісі координат також дорівнюють нулю.

Для додаткової перевірки правильності розрахунків, виконаємо побудову моментів активних сил та реакцій опор просторової конструкції відносно координатних вісей, перпендикулярних площині zAx (рис. 3.44) та площині zAy (рис. 3.45).

$$\begin{aligned}\Sigma M_{Ay} &= G \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin \alpha - S \cdot BC \cdot \sin \beta - M \cdot \cos \gamma = \\ &= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 30^\circ + 7,783 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ - 10 \cdot \cos 29,07^\circ = 2 + 6,74 - 8,74 = 0; \\ \Sigma M_{Ax} &= -P \cdot AD \cdot \cos \alpha - G \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB + S \cdot AB \cdot \sin \beta = \\ &= -2 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ - 8 \cdot \frac{1,8}{2} + 11,702 \cdot 1,8 - 7,783 \cdot 1,8 \cdot \sin \beta = -1,732 - 7,2 + 21,064 - 12,132 = 0.\end{aligned}$$

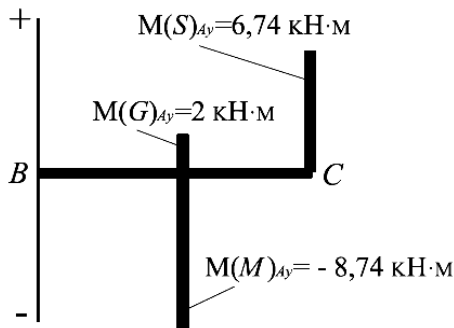


Рис. 3.44. Моменти активних сил та реакцій опор просторової конструкції відносно координатної вісі Ay

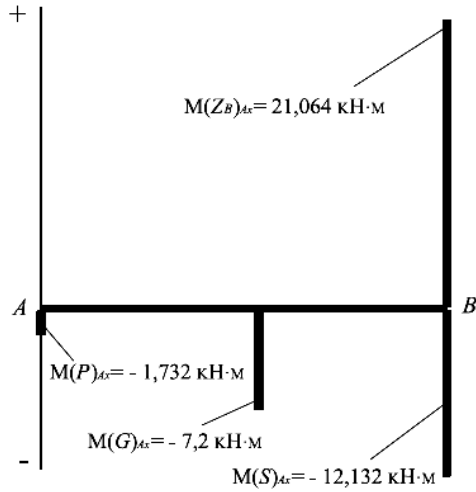


Рис. 3.45. Моменти активних сил та реакцій опор просторової конструкції відносно координатної вісі Ax

Алгебраїчна сума моментів усіх активних сил та реакцій опор просторової конструкції відносно координатних вісей Ay (рис. 3.44) та Ax (рис. 3.45) дорівнює нулю, що підтверджує правильність розрахунків.

Завдання С-6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури

Визначити положення центра тяжіння плоскої фігури (рис. 3.46). Розміри вказані на рис. в міліметрах.

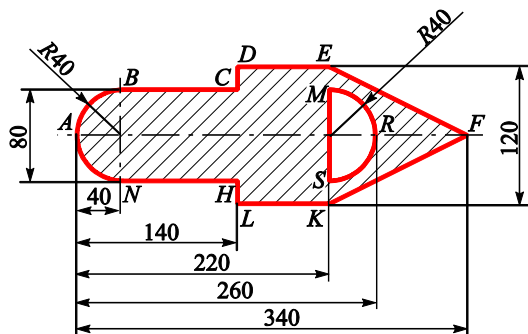


Рис. 3.46. Плоска фігура

Координати центру тяжіння плоскої фігури визначаються за наступними формулами:

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F},$$

де $S_x = \sum F_i y_i$, $S_y = \sum F_i x_i$ – статичні моменти фігури відносно координатних вісей x та y , F_i – площа фігури.

Дана фігура має вісь симетрії – вісь Ox . Отже, її центр тяжіння знаходиться на цій осі, тобто координату центра тяжіння по осі y знаходити не потрібно.

Для того, щоб скористатися формулами визначення положення центру тяжіння, розбиваємо плоску фігуру на частини, для яких відомі, або легко визначаються площі F_i та координати центрів тяжіння x_i та y_i .

В даному випадку в якості таких частин приймаємо півколо ABN , прямокутник $BCHN$, прямокутник $DEKL$, трикутник EFK та півколо MRS (рис. 3.47). Площу півкола MRS будемо вважати відємною, так як це півколо вирізане з заданої плоскої фігури.

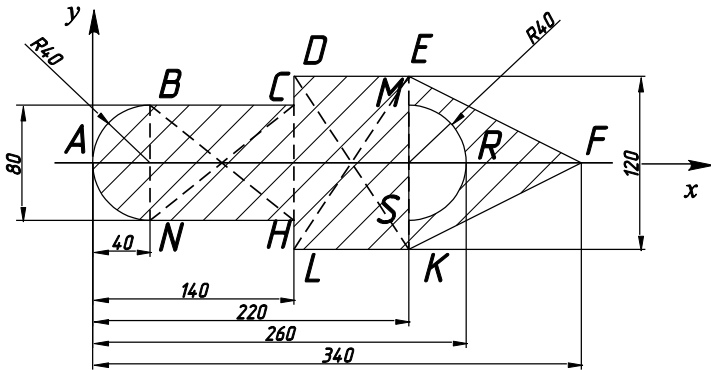


Рис. 3.47. Площа фігури, що складається з простих фігур

Визначимо положення центру тяжіння кожної частини фігури. Відстань центрів тяжіння однакових площ півкіл ABN та MRS від їх геометричних центрів знайдемо за формулою:

$$x_{C_{ABN}} = x_{C_{MRS}} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = 1,6985 \text{ см.}$$

Координата центру тяжіння прямокутника знаходиться в точці перетину його діагоналей.

Центр тяжіння площі трикутника EFK знаходиться в точці перетину його медіан, – на відстані однієї третьої сторони EK .

Визначимо відстань від початку координат до координати центру тяжіння кожної з простих фігур:

$$x_{ABN} = R40 - x_{C_{ABN}} = 40 - 1,6985 = 38,3015 \text{ см;}$$

$$x_{BCHN} = R40 + \frac{BC}{2} = 40 + \frac{10}{2} = 45 \text{ см;}$$

$$x_{DEKL} = R40 + BC + \frac{DE}{2} = 40 + 10 + \frac{8}{2} = 58 \text{ см;}$$

$$x_{EFK} = R40 + BC + DE + \frac{1}{3} \cdot EF \cos 30^\circ = 40 + 10 + 8 + \frac{12}{3} = 60 \text{ см;}$$

$$x_{MRS} = R40 + BC + DE + x_{C_{ABN}} = 40 + 10 + 8 + 1,6985 = 59,6985 \text{ см;}$$

Визначимо площі всіх частин фігури:

СТАТИКА

$$F_{ABN} = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 25,12 \text{ см}^2;$$

$$F_{BCHN} = BC \cdot CH = 10 \cdot 8 = 80 \text{ см}^2;$$

$$F_{DEKL} = DE \cdot KL = 8 \cdot 12 = 96 \text{ см}^2;$$

$$F_{EFK} = \frac{1}{2} \cdot EK \cdot EF \cdot \cos 30^0 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 \text{ см}^2;$$

$$F_{MRS} = -\frac{\pi \cdot R^2}{2} = -\frac{\pi \cdot 4^2}{2} = -25,12 \text{ см}^2.$$

Площа всієї фігури :

$$F = F_{ABN} + F_{BCHN} + F_{DEKL} + F_{EFK} + F_{MRS} = 25,12 + 80 + 96 + 72 - 25,12 = 248 \text{ см}^2.$$

Визначимо статичний момент фігури відносно осі Oy :

$$S_y = F_{ABN} \cdot x_{ABN} + F_{BCHN} \cdot x_{BCHN} + F_{DEKL} \cdot x_{DEKL} + F_{EFK} \cdot x_{EFK} + F_{MRS} \cdot x_{MRS} = 25,12 \cdot 2,3015 + 80 \cdot 9 + 96 \cdot 18 + 72 \cdot 26 - 25,12 \cdot 23,6985 = 3782,5508 \text{ см}^3.$$

Тоді шукана координата центру тяжіння:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{3782,5508}{248} = 15,252 \text{ см}.$$

Перевірку розрахунків виконаємо у системі «Autocad». Будуємо плоску фігуру, та в властивостях елемента визначаємо координати центру тяжіння фігури. Результати побудови фігури в системі «Autocad» наведено на рис. 3.48.

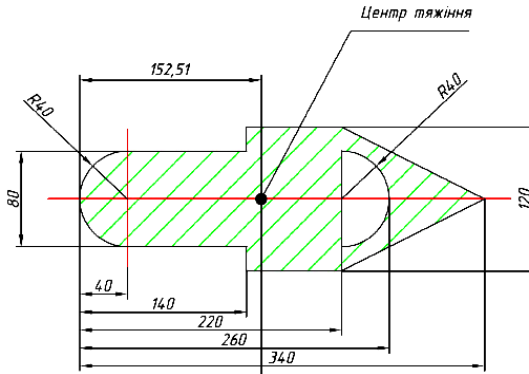


Рис. 3.48. Побудова плоскої фігури в системі «Autocad»

Так як координати центру тяжіння співпадають з розрахунковими – розв'язок є правильним.

Розділ 4. КІНЕМАТИКА

Завдання К-1. Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями

За заданим рівнянням руху точки M встановити вид її траєкторії і для моменту часу t_0 , t_1 і t_2 визначити її швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривини траєкторії. Визначити шлях, пройдений точкою за проміжок часу $0 \dots t_2$.

Вихідні данні

$$\begin{aligned}x &= 10t; \quad y = 12t^2 - 2; \\t_0 &= 0; \quad t_1 = 0,5; \quad t_2 = 1 \\(x \text{ і } y - y \text{ см, } t, t_0, t_1 \text{ і } t_2 - y \text{ с}).\end{aligned}$$

Рівняння руху можна розглядати як параметричні рівняння траєкторії точки. Підставимо в рівняння руху значення параметра t в діапазоні $0 \dots t_2$ з обраним кроком, наприклад $0,5$ с і отримаємо координати положення точки при її русі:

$$\begin{aligned}t_0 = 0 \text{ с: } x_0 &= 0 \text{ см, } y_0 = -2 \text{ см;} \\t_1 = 0,5 \text{ с: } x_1 &= 5 \text{ см, } y_1 = 1 \text{ см;} \\t_2 = 1 \text{ с: } x_2 &= 10 \text{ см, } y_2 = 10 \text{ см.}\end{aligned}$$

За отриманими значеннями координат точки накреслимо та встановимо траєкторію її переміщення.

Траєкторією точки є парабола (рис. 4.1).

Знайдемо координати положення точки на траєкторії при заданих моментах часу t_0 , t_1 та t_2 для точок:

$$\begin{aligned}M_0 \text{ при } t_0 = 0 \text{ с, } x_0 &= 0 \text{ см, } y_0 = -2 \text{ см;} \\M_1 \text{ при } t_1 = 0,5 \text{ с, } x_1 &= 5 \text{ см, } y_1 = 1 \text{ см;} \\M_2 \text{ при } t_2 = 1 \text{ с, } x_2 &= 10 \text{ см, } y_2 = 10 \text{ см.}\end{aligned}$$

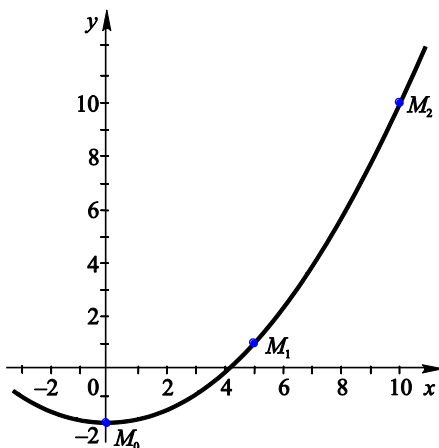


Рис. 4.1. Траєкторія руху точки

КІНЕМАТИКА

M_2 при $t_2 = 1$ с, $x_2 = 10$ см, $y_0 = 10$ см.

Знайдемо швидкість точки:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}.$$

та її прискорення:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Тут $\vec{i}, \vec{j}$ – орти осей x та y ; v_x, v_y, a_x, a_y – проекції швидкості та прискорення точки на вісі координат.

Спочатку визначимо проекції швидкості на осі координат

$$v_x = \dot{x} = 10; \quad v_y = \dot{y} = 12t.$$

Для заданих моментів часу в обраних точках буде:

M_0 при $t_0 = 0$ с, $v_{0x} = 10$ см/с, $v_{0y} = 0$ см/с;

M_1 при $t_1 = 0,5$ с, $v_{1x} = 10$ см/с, $v_{1y} = 12$ см/с;

M_2 при $t_2 = 1$ с, $v_{2x} = 10$ см/с, $v_{2y} = 24$ см/с.

Модуль швидкості визначимо за проекціями швидкості на осі координат:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 10 \text{ см/с}; \quad v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 15,6 \text{ см/с};$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 26 \text{ см/с}.$$

Складові швидкості v_x, v_y зобразимо на рис. 4.2. Виберемо масштаб швидкостей $M_v = 0,4$ (см/с)/мм.

Складові швидкості $v_{0x}, v_{0y}, v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}$ у масштабі швидкостей відкладаємо з точок M_0, M_1 та M_2 відповідно зі знаками проекцій та напрямком відліку координат. Вектор швидкості $\vec{v}$ будуємо за складовими v_{0x} та v_{0y} , v_{1x} та v_{1y} і v_{2x} та v_{2y} . Він повинен по напрямку співпадати з дотичною до траєкторії.

Знайдемо прискорення точки. Для цього використовуємо аналогічну до визначення і побудови вектора швидкості послідовність.

Визначаємо спочатку для заданих моментів часу проекції прискорення на осі координат:

$$a_x = \ddot{x} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_y = \ddot{y} = 12 \text{ см/с}^2.$$

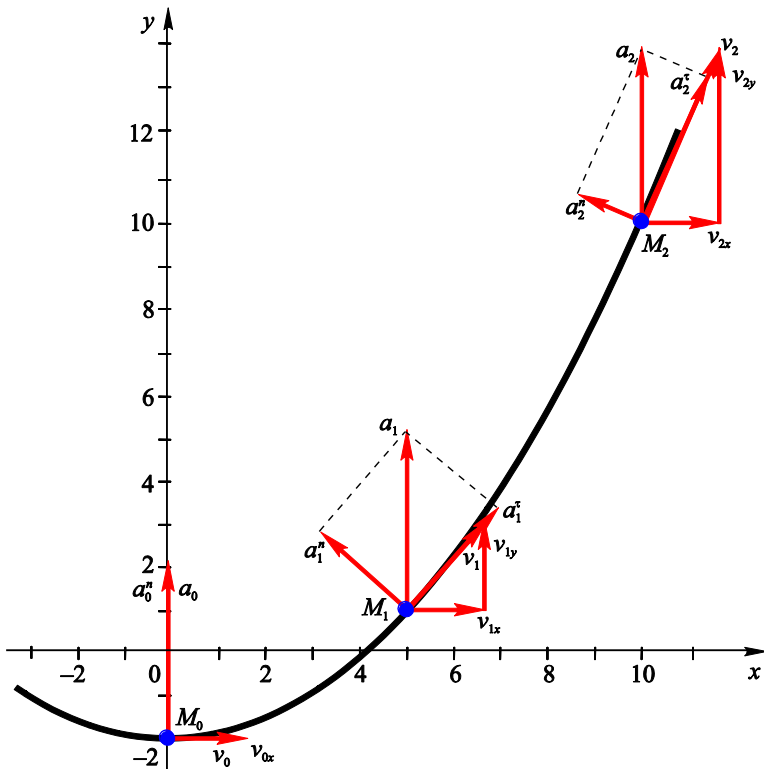


Рис. 4.2. Положення точки M на траєкторії, її швидкість та прискорення в задані моменти часу

Для точок:

$$M_0 \text{ при } t_0 = 0 \text{ с, } a_{0x} = \dot{v}_{0x} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_{0y} = \dot{v}_{0y} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$M_1 \text{ при } t_1 = 0,5 \text{ с, } a_{1x} = \dot{v}_{1x} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_{1y} = \dot{v}_{1y} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$M_2 \text{ при } t_2 = 10 \text{ с, } a_{2x} = \dot{v}_{2x} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_{2y} = \dot{v}_{2y} = 24 \text{ см/с}^2.$$

За знайденими проекціями прискорення визначаємо модуль прискорення:

$$a_0 = \sqrt{a_{0x}^2 + a_{0y}^2} = 24 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = 24 \text{ см/с}^2.$$

КІНЕМАТИКА

Вибираємо масштаб прискорення $M_a = 0,6 \text{ (см/с}^2\text{)/мм}$.

Будуємо складові та сам вектор прискорення для точок M_0 , M_1 та M_2 у масштабі прискорень (див. рис 4.2).

У даному прикладі вектор прискорення збігається з однією з складових $a_0 = a_{0y}$; $a_1 = a_{1y}$; $a_2 = a_{2y}$.

Згідно з завданням знаходимо дотичне прискорення:

$$a_\tau = |v_x a_x + v_y a_y| / v;$$

Похідна швидкості (dv/dt) виражає проекцію прискорення точки на напрямок її швидкості. Знак «+» при dv/dt означає, що точка рухається прискорено, напрямки $\vec{a}_\tau$ та $\vec{v}$ співпадають; знак «-» що рух сповільнений.

Модуль нормального прискорення точки:

$$a_n = |(v_x a_y + v_y a_x) / v|.$$

Повне прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Знаходимо a , a_τ та a_n для точок:

$$M_0 \text{ при } t_0 = 0 \text{ с, } a_0^\tau = \left| \frac{0 \cdot 10 + 24 \cdot 0}{10} \right| = 0 \text{ см/с}^2;$$

$$a_0^n = \left| \frac{24 \cdot 10 + 0 \cdot 0}{10} \right| = 24 \text{ см/с}^2; \quad a_0 = \sqrt{0^2 + 24^2} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$M_1 \text{ при } t_1 = 0,5 \text{ с, } a_1^\tau = \left| \frac{0 \cdot 10 + 24 \cdot 12}{15,6} \right| = 18,46 \text{ см/с}^2;$$

$$a_1^n = \left| \frac{24 \cdot 10 + 0 \cdot 12}{15,6} \right| = 15,4 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = \sqrt{18,46^2 + 15,4^2} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$M_2 \text{ при } t_2 = 1 \text{ с, } a_2^\tau = \left| \frac{0 \cdot 10 + 24 \cdot 24}{26} \right| = 22,15 \text{ см/с}^2;$$

$$a_2^n = \left| \frac{24 \cdot 10 + 0 \cdot 24}{26} \right| = 9,23 \text{ см/с}^2; \quad a_2 = \sqrt{22,15^2 + 9,23^2} = 24 \text{ см/с}^2.$$

Радіус кривини траєкторії знаходимо знаючи, що $a_n = v^2/\rho$, звідси $\rho = v^2/a_n$. Тоді для точок:

$$M_0 \quad \rho_0 = 10^2/24 = 4,2 \text{ см};$$

$$M_1 \quad \rho_1 = 15,6^2/15,4 = 15,8 \text{ см};$$

$$M_2 \quad \rho_2 = 26^2/9,23 = 73,2 \text{ см}.$$

Модуль нормального прискорення також можна визначити іншим чином:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Знайдені результати заносимо до табл. 4.1.

Таблиця 4.1

$t, \text{ c}$	x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a_τ	a_n	a	ρ, cm
	cm		cm/c			cm/c ²					
0	0	−2	10	0	10,0	0	24	0	24	24	4,2
0,5	5	1	10	12	15,6	0	24	18,46	15,40	24	15,8
1,0	10	10	10	24	26,0	0	24	22,15	9,23	24	73,2

Знайдемо шлях пройдений точкою в проміжку часу 0 ... t_2 , знаючи, що $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, використовуючи знання з математики*:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{t_1} v(t) dt = \int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{X} + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{X} + a^2 \ln(x + \sqrt{X}) \right] + C_1, \end{aligned}$$

де $\sqrt{X} = \sqrt{x^2 + a^2}$.

У нашому випадку:

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y.$$

Тоді:

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt \rightarrow \frac{25 \ln \left(12t + \sqrt{144t^2 + 25} \right)}{12} - \frac{25 \ln(5)}{12} + t\sqrt{144t^2 + 25}.$$

Шлях пройдений точкою за час t_2 :

$$s(t_2) = 6,022 \text{ см}.$$

* Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

КІНЕМАТИКА

Шлях пройдений точкою за час t_1 :

$$s(t_1) = 16,353 \text{ см.}$$

Уявлення про характер руху точки по траєкторії дає аналіз за допомогою приведених даних (табл. 4.1) про вектори швидкостей та прискорень та їх зображення на графіку руху точки (див. рис. 4.2).

Точка M рухається по параболі проти годинникової стрілки на що вказує напрямки векторів швидкості та прискорення. В початковий момент руху точка M знаходиться в положенні M_0 в точці перегину траєкторії, швидкість рухомої точки напрямлена паралельно вісі Ox .

З часом кут вектора швидкості точки з віссю Oy зменшується, а сам вектор швидкості за напрямком наближається до напрямку траєкторії. За величиною швидкість точки нелінійно зростає.

Завдання К-2. Дослідження параметрів поступального та обертального рухів твердого тіла

Для механізму (рис. 4.3), в якому ступеневі шківів 2 і 3 зв'язані пасовою передачею, знайти швидкість та прискорення точок на обох краях всіх коліс та точки M (в момент часу $t = 1$ с), якщо тіло I (вантаж) рухається за законом $x = 36t^2 + 5t + 16$. Пас по ободу шківів (колеса) не ковзає. Радіуси ободів шківів складають – $R_2 = 80$ см, $r_2 = 50$ см, $R_3 = 80$ см, $r_3 = 40$ см.

Завдання полягає у дослідженні перетворень найпростіших рухів твердого тіла.

Знаходимо швидкість руху та прискорення вантажу I в момент часу t :

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = 72 \cdot t + 5 \text{ см/с}; \quad v_1(t) = 72 \cdot 1 + 5 = 77 \text{ см/с};$$

$$a_1 = a_1(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 72 \text{ см/с}^2.$$

Рухаючись поступально, вантаж I набуває швидкості v_1 , величину якої ми визначили. Вектор швидкості v_1 направляємо у напрямку руху вантажу (рис. 4.4). В точці A відбувається пере-

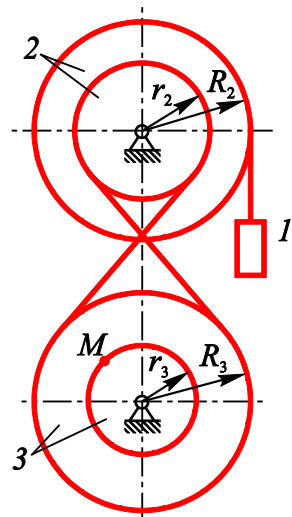


Рис. 4.3. Схема передаточного механізму

творення руху. Поступальний рух вантажу 1 спричиняє обертання колеса 2 за годинниковою стрілкою. При цьому точка A , одночасно належить мотузці, яка з'єднана з вантажем 1 ($v_A = v_1$) і колесу 2 ($v_A = \omega_2 R_2$). Звідси маємо:

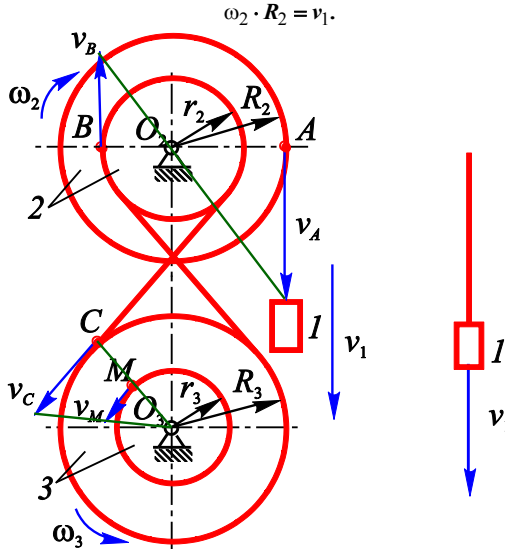


Рис. 4.4. Розрахункова схема механізму

Знаходимо кутову швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{72 \cdot t + 5}{80} = 0,9 \cdot t + 0,063 \text{ рад/с}; \quad \omega_2(t) = 0,9 \cdot 1 + 0,063 = 0,963 \text{ рад/с}.$$

Кутове прискорення колеса 2 визначаємо як похідну від кутової швидкості ω_2 за часом:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 0,9 \text{ рад/с}^2.$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки A в момент часу t .

Доцентрове прискорення точки A :

$$a_A^{доц} = \omega_2(t)^2 \cdot R_2 = 0,963^2 \cdot 80 = 74,19 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки A :

$$a_A^{об} = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 0,9 \cdot 80 = 72 \text{ см/с}^2.$$

КІНЕМАТИКА

Повне прискорення точки A знаходимо як рівнодіючу доцентрового та обертального прискорень точки:

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\text{доц}})^2 + (a_A^{\text{об}})^2} = \sqrt{74,19^2 + 72^2} = 103,38 \text{ см/с}^2.$$

Точка B належить внутрішньому ободу колеса 2. Знаходимо швидкість точки B :

$$v_B = \omega_2(t) \cdot r_2 = 0,963 \cdot 50 = 48,15 \text{ см/с}.$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки B в момент часу t .

Доцентрове прискорення точки B :

$$a_B^{\text{доц}} = \omega_2(t)^2 \cdot r_2 = 0,963^2 \cdot 50 = 46,37 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки B :

$$a_B^{\text{об}} = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 0,9 \cdot 50 = 45 \text{ см/с}^2.$$

Повне прискорення точки B :

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\text{доц}})^2 + (a_B^{\text{об}})^2} = \sqrt{46,37^2 + 45^2} = 64,62 \text{ см/с}^2.$$

Точка C розташована на ободі колеса 3, її швидкість визначається як:

$$v_C = \omega_3(t) \cdot R_3.$$

Точки B і C належать тросу, який з'єднує колеса 2 та 3, тому їх швидкості рівні. Враховуючи, що $V_B = V_C$, складаємо рівняння:

$$\omega_2 \cdot r_2 = \omega_3 \cdot R_3.$$

Знаходимо кутову швидкість колеса 3:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{(0,9 \cdot t + 0,063) \cdot r_2}{R_3} = \frac{(0,9 \cdot t + 0,063) \cdot 50}{80} = 0,563 \cdot t + 0,039 \text{ рад/с};$$
$$\omega_3(t) = 0,563 \cdot 1 + 0,039 = 0,602 \text{ рад/с};$$

Кутове прискорення колеса 3 визначаємо як похідну від кутової швидкості ω_3 за часом:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 0,563 \text{ рад/с}^2.$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки C в момент часу t .

Доцентрове прискорення точки C :

$$a_C^{\text{доц}} = \omega_3(t)^2 \cdot R_3 = 0,602^2 \cdot 80 = 28,99 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки C:

$$a_C^{\text{об}} = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 0,563 \cdot 80 = 45,04 \text{ см/с}^2.$$

Повне прискорення точки C:

$$a_C = \sqrt{(a_C^{\text{доц}})^2 + (a_C^{\text{об}})^2} = \sqrt{28,99^2 + 45,04^2} = 53,56 \text{ см/с}^2.$$

Оскільки точка M належить колесу 3 і віддалена від осі обертання на відстань r_3 , то її швидкість визначаємо за формулою:

$$v_M = \omega_3(t) \cdot r_3 = 0,602 \cdot 40 = 24,08 \text{ см/с}.$$

Величина і напрямлення векторів швидкостей усіх точок представлено на розрахунковій схемі механізму (див. рис. 4.4).

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки M в момент часу t .

Доцентрове прискорення точки M:

$$a_M^{\text{доц}} = \omega_3(t)^2 \cdot r_3 = 0,602^2 \cdot 40 = 14,5 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки M:

$$a_M^{\text{об}} = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 0,563 \cdot 40 = 22,52 \text{ см/с}^2.$$

Повне прискорення точки M:

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\text{доц}})^2 + (a_M^{\text{об}})^2} = \sqrt{14,5^2 + 22,52^2} = 26,78 \text{ см/с}^2.$$

Будуємо вектори знайдених відповідних складових (обертального та доцентрового) прискорень точок A, B, C та M (рис. 4.5).

Вектор повного прискорення точок визначаємо як векторну суму векторів обертального та доцентрового прискорень. Цей вектор направляємо по діагоналі прямокутника, побудованого на його складових прискорень.

Кінці векторів прискорень точок плоскої фігури, що лежать на одній прямій, також лежать на одній прямій і ділять її на відрізки, пропорційні відс-

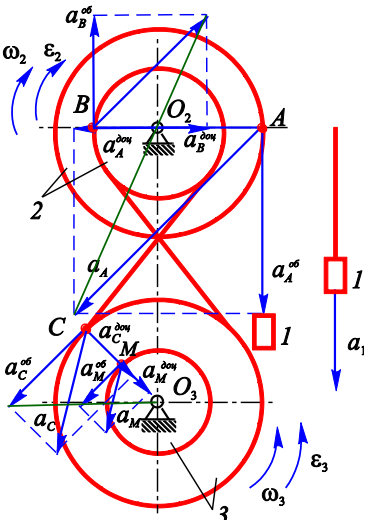


Рис. 4.5. Побудова прискорень усіх точок механізму

КІНЕМАТИКА

таням між точками, що підтверджує правильність розрахунків.

Результати розрахунків приведено в табл. 4.2.

Таблиця 4. 2

Точка	R , см	r , см	v , см/с	a , см/с ²	$a^{\text{доп}}$, см/с ²	$a^{\text{об}}$, см/с ²	ω , рад/с	ε , рад/с ²
I	–	–	77	72	–	–	–	–
A	80	–	77	103,38	74,19	72	0,963	0,9
B	–	50	48,15	64,62	46,37	45	0,963	0,9
C	80	–	48,15	53,56	28,99	45,04	0,602	0,563
M	–	40	24,08	26,78	14,5	22,52	0,602	0,563

Будуємо діаграми кутових швидкостей (рис. 4.6, *а*) та кутових прискорень (рис. 4.6, *б*) коліс механізму.

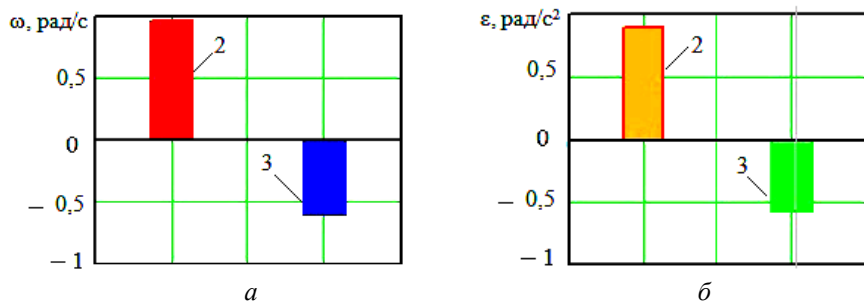


Рис. 4.6. Діаграми параметрів обертального руху коліс механізму:

а – кутова швидкість; *б* – кутове прискорення

Висновок: Виходячи з аналізу даних, наведених на рис. 4.4, 4.5, зрозуміло, що швидкості та повні прискорення точок механізму зменшуються із збільшенням відстані точки від вантажу, який приводить механізм до руху. Аналіз рис. 4.6 дає змогу зрозуміти, що колесо 2 прискорюється під час руху, а колесо 3 – навпаки, сповільнюється.

Завдання К-3. Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму

Кривошип O_1A багатоланкового механізму (рис. 4.7) обертається з кутовою швидкістю $\omega_0 = 3\pi$ рад/с та кутовим прискоренням $\varepsilon_0 = 10$ рад/с². Розміри ланок механізму складають: $O_1A = 300$ мм; $AB = 900$ мм; $CD = 400$ мм;

$O_2D = 600$ мм; $O_1O_2 = 1000$ мм; $e = 150$ мм; $\alpha = 30^\circ$; $\varphi = 60^\circ$. Для заданого положення механізму визначити:

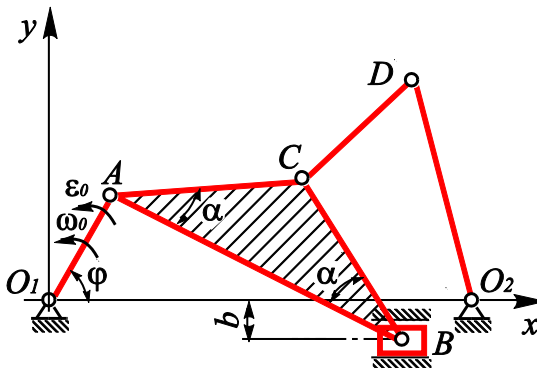


Рис. 4.7. Схема багатоланкового механізму

- швидкості руху усіх вузлових точок механізму;
- кутові швидкості руху усіх ланок механізму;
- повне прискорення руху усіх вузлових точок механізму;
- кутове прискорення усіх ланок механізму;
- для виконання перевірки обчислити швидкості руху точок механізму;

зму за допомогою миттєвого центру швидкостей (МЦШ) та плану швидкостей;

- для виконання перевірки обчислити прискорення руху точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень (МЦП) та плану прискорень.

Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму виконуємо за допомогою методу планів швидкостей і прискорень механізму, який відноситься до графоаналітичних методів.

Планом швидкостей (прискорень) механізму називають креслення, на якому швидкості (прискорення) різних точок зображені у вигляді векторів, що показують напрямки і величини (в масштабі) цих швидкостей (прискорень) в даний момент часу. Для забезпечення точності розрахунків усі креслення виконуємо в системі комп'ютерної підтримки проектування *AutoCAD*.

Для визначення швидкостей точок плоского механізму, будуюмо схему механізму у вибраному масштабі ($\mu_l = 10$ см/см). Положення механізму в даний момент часу задається величиною кута φ , який є кутом повороту кривошипа. Цей кут відкладається між кривошипом та віссю x в системі координат механізму.

1. *Визначення швидкостей точок та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плану швидкостей.*

Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою плану швидкостей базується на теоремі про швидкості точок плоскої фігури (швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса та обертальної швидкості цієї точки навколо полюса).

Щоб визначити швидкість точки механізму, насамперед необхідно визначити якій ланці належить точка і який рух здійснює ця ланка.

КІНЕМАТИКА

Ланка O_1A здійснює обертальний рух навколо вісі, що перпендикулярна площині механізму та проходить крізь точку O_1 . Оскільки кутова швидкість ω_0 кривошипа O_1A направлена проти годинникової стрілки, відповідно і ланка O_1A рухається навколо шарніру O_1 проти годинникової стрілки.

Визначаємо модуль швидкості точки A кривошипа O_1A :

$$v_A = \omega_0 \cdot O_1A = 3\pi \cdot 0,3 = 2,827 \text{ м/с.}$$

Розглянемо ланку ACB , що здійснює плоский рух. За полюс виберемо точку A . Точка B рухається по горизонтальній прямій, напрям вектору швидкості якої співпадає з напрямом руху точки.

Швидкість точки B буде виражена геометричною рівністю:

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{BA}},$$

де v_{BA} – обертальна швидкість точки B навколо точки A , направлена перпендикулярно радіусу обертання BA .

Для побудови плану швидкостей, вибираємо масштаб швидкостей точок ланок при відкладанні їх на схемі механізму ($\mu_v = 1 \text{ м/с} / \text{см}$).

Для геометричного визначення v_B , з довільної точки p площини креслення проводимо відрізок pa , який паралельний v_A , та в вибраному масштабі відображає v_A . З кінця цього відрізка, проводимо пряму ab перпендикулярно ланці AB , яка співпадає з напрямом v_{BA} . З точки p будуємо пряму, паралельну v_B , до перетину з прямою ab (рис. 4.8).

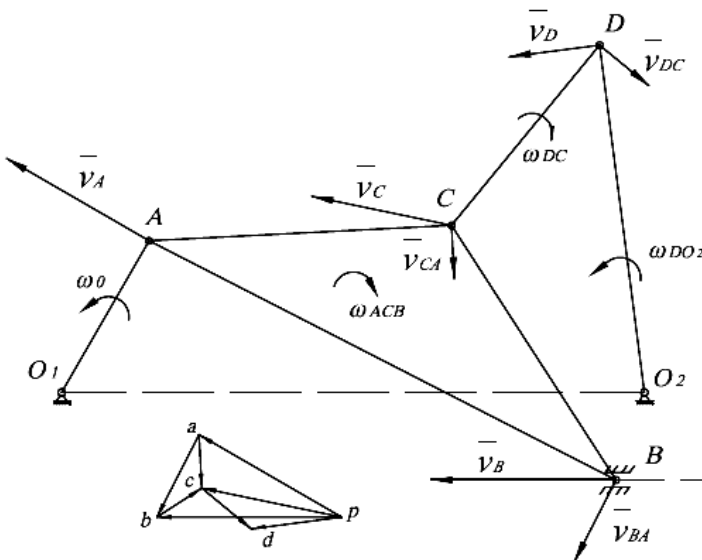


Рис. 4.8. План швидкостей багатоланкового механізму

Отримуємо трикутник швидкостей Δpab , сторони якого пропорційні швидкостям ланки ACB : pa – швидкість точки A (полюса); ab – обертальна швидкість точки B навколо полюса; pb – шукана швидкість точки B .

Для визначення швидкості точки C візьмемо за полюс точку A , тоді:

$$\overline{v_C} = \overline{v_A} + \overline{v_{CA}},$$

де v_{CA} – обертальна швидкість точки C навколо точки A , направлена перпендикулярно радіусу обертання AC .

Але в цій рівності невідомий напрямок v_C . Тому візьмемо за полюс точку B та запишемо інше рівняння:

$$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}},$$

де v_{CB} – обертальна швидкість точки C навколо точки B , направлена перпендикулярно радіусу обертання BC .

Подальша побудова ґрунтується на цих двох рівностях.

З точки a проводимо пряму, перпендикулярну ланці AC ($v_{CA} \perp AC$), а з точки b – пряму, перпендикулярну ланці BC ($v_{CB} \perp BC$). Перетин цих двох прямих утворює точку C . З'єднаємо її з точкою p , отримавши відрізок pc , який являється швидкістю точки C . Відрізок ac – обертальна швидкість точки C навколо точки A , bc – обертальна швидкість точки C навколо точки B .

Розглянемо ланку CD . Для визначення швидкості точки D візьмемо за полюс точку C , зв'язану з точкою D ланкою CD , тоді:

$$\overline{v_D} = \overline{v_C} + \overline{v_{DC}}.$$

Напрямок v_C є відомим, оскільки швидкість v_D направлена перпендикулярно DO_2 – кривошип DO_2 здійснює тільки обертальний рух навколо центру O_2 . З точки p проводимо пряму паралельно цій швидкості, а з точки c – пряму перпендикулярну CD до перетину з щойно проведеною прямою. Отримаємо точку d , яку з'єднаємо з точкою p . Відстань pd виражає величину і напрямок швидкості точки D .

Отримана діаграма – план швидкостей для заданого механізму. По ній можна визначити швидкість будь-якої точки даного механізму.

Вимірюючи відрізки pb , pc , pd , ba , cd на плані швидкостей відповідно обраному масштабу, отримаємо швидкості точок B , C , D , BA , CD :

$$v_B = 3,171 \text{ м/с}, \quad v_C = 2,453 \text{ м/с}, \quad v_D = 1,566 \text{ м/с}, \\ v_{BA} = 1,588 \text{ м/с}, \quad v_{CD} = 1,099 \text{ м/с}.$$

Обертальна швидкість точки плоскої фігури дорівнює добутку кутової швидкості фігури на відстань цієї точки до полюса, тоді:

$$v_{BA} = \omega_{ACB} \cdot BA, \quad v_{DC} = \omega_{DC} \cdot DC, \quad v_D = \omega_{DO_2} \cdot DO_2.$$

КІНЕМАТИКА

Визначаємо значення кутових швидкостей ланок механізму:

$$\omega_{ACB} = \frac{v_{BA}}{BA} = \frac{1,588}{0,9} = 1,764 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{DC} = \frac{v_{DC}}{DC} = \frac{1,099}{0,4} = 2,748 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{DO_2} = \frac{v_D}{DO_2} = \frac{1,566}{0,6} = 2,61 \text{ рад/с}.$$

Напрям кутових швидкостей ланок механізму визначаємо відповідно до обертальних швидкостей точок (див. рис. 4.8).

Діаграма кутових швидкостей ланок механізму представлена на рис. 4.9.

2. *Визначення швидкостей точок та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою миттєвих центрів швидкостей (МЦШ).*

Кривошип O_1A має МЦШ в точці O_1 , оскільки $v_{O_1}=0$ (нерухома точка).

Для знаходження МЦШ ΔACB проводимо перпендикуляри до векторів швидкостей точок A та B . Швидкість $v_A \perp O_1A$, оскільки точка A обертається навколо O_1 . Тому перпендикуляр до v_A буде продовженням кривошипу. Швидкість v_B спрямована по горизонталі, так як точка B повзуна рухається по горизонтальній прямій. Перетин перпендикулярів до швидкостей v_A та v_B утворює точку P_{AB} , яка і являється МЦШ ΔACB . Побудову МЦШ представлено на рис. 4.10.

Так як швидкість точки P_{AB} дорівнює нулю, то всі інші точки ΔACB здійснюють миттєвий поворот навколо неї. Тому їх швидкості перпендикулярні відповідним прямим, проведеним в точки з точки P_{AB} , а їх модулі прямо пропорційні відстаням від точки P_{AB} до цих точок.

Для визначення v_C з'єднуємо точку C з МЦШ, точкою P_{AB} . Визначимо модуль швидкості точки A :

$$v_A = \omega_0 \cdot O_1A = 3\pi \cdot 0,3 = 2,827 \text{ м/с}.$$

Кутова швидкість усіх точок ланки ACB однакова, тому модулі швидкостей точок визначимо з пропорції:

$$\frac{v_B}{BP_{AB}} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_C}{CP_{AB}}.$$

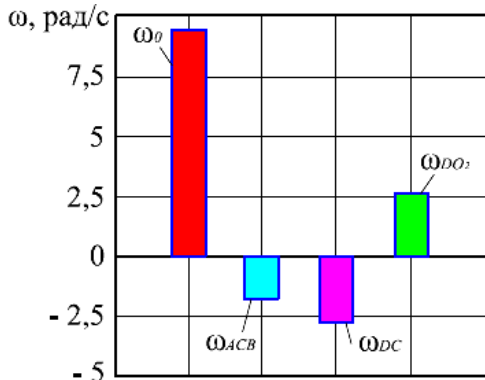


Рис. 4.9. Діаграма кутових швидкостей ланок механізму

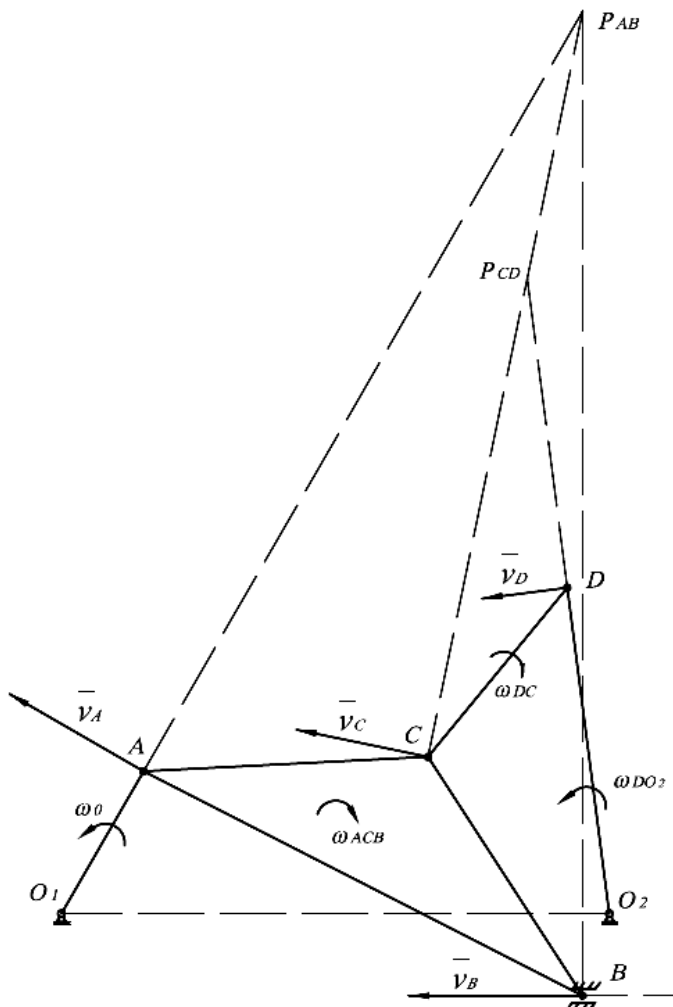


Рис. 4.10. Визначення миттєвого центру швидкостей багатоланкового механізму

Визначаємо відстань точок до МЦШ (рис. 4.10):

$$AP_{AB} = 1,603 \text{ м}; \quad BP_{AB} = 1,798 \text{ м}; \quad CP_{AB} = 1,390 \text{ м}.$$

Визначаємо швидкості точок B та C :

КІНЕМАТИКА

$$v_B = \frac{v_A \cdot BP_{AB}}{AP_{AB}} = \frac{2,827 \cdot 1,798}{1,603} = 3,171 \text{ м/с},$$

$$v_C = \frac{v_A \cdot CP_{AB}}{AP_{AB}} = \frac{2,827 \cdot 1,390}{1,603} = 2,451 \text{ м/с}.$$

Для визначення швидкості точки D знаходимо МЦШ ланки CD , для чого продовжуємо кривошип DO_2 ($DO_2 \perp v_D$) до перетину з перпендикуляром до $v_C - CP_{AB}$. Отримуємо точку P_{CD} , яка являється МЦШ ланки CD .

Визначаємо відстань точок до МЦШ ланки CD (рис. 4.10):

$$DP_{CD} = 0,570 \text{ м}; \quad CP_{CD} = 0,892 \text{ м}.$$

Тоді з пропорції:

$$\frac{v_D}{DP_{CD}} = \frac{v_C}{CP_{CD}},$$

знаходимо швидкість точки D :

$$v_D = \frac{v_C \cdot DP_{CD}}{CP_{CD}} = \frac{2,451 \cdot 0,570}{0,892} = 1,566 \text{ м/с}.$$

Знаючи, що МЦШ відповідної ланки плоскої фігури має швидкість, рівну нулю, а всі інші точки плоскої фігури обертаються навколо нього, для визначення кутової швидкості плоскої фігури потрібно швидкість будь-якої її точки розділити на відповідну відстань її до МЦШ:

$$\omega_{ACB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_B}{BP_{AB}} = \frac{v_C}{CP_{AB}} = \frac{2,827}{1,603} = 1,764 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{DC} = \frac{v_C}{CP_{CD}} = \frac{v_D}{DP_{CD}} = \frac{2,451}{0,892} = 2,748 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{DO_2} = \frac{v_D}{DO_2} = \frac{1,566}{0,6} = 2,61 \text{ рад/с}.$$

Порівняння розрахунків визначення швидкостей точок та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плану швидкостей та за допомогою миттєвих центрів швидкостей наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

v , м/с	v_A	v_B	v_C	v_D
по плану швидкостей	2,827	3,171	2,453	1,566
за допомогою МЦШ	2,827	3,171	2,451	1,566
ω , рад/с	ACB	DC	DO_2	
по плану швидкостей	1,764	2,748	2,61	
за допомогою МЦШ	1,764	2,748	2,61	

Проаналізувавши дані табл. 4.3. можна зробити висновок, що результати визначення швидкостей точок та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плану швидкостей та за допомогою миттєвих центрів швидкостей співпадають майже с 100% точністю. Величина відносної похибки складає 0,08%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа.

3. *Визначення повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму та кутових прискорень усіх ланок механізму за допомогою плану прискорень.*

Прискорення точки A складається з двох складових – обертального та доцентрового прискорень:

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^{об}} + \overline{a_A^{доц}}.$$

Обертальне прискорення точки A :

$$a_A^{об} = \varepsilon_0 \cdot O_1A = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Доцентрове прискорення точки A :

$$a_A^{доц} = \omega_0^2 \cdot O_1A = (3\pi)^2 \cdot 0,3 = 26,646 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки A :

$$a_A = \sqrt{(a_A^{об})^2 + (a_A^{доц})^2} = \sqrt{3^2 + 26,646^2} = 26,814 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення прискорень точок B , C , D застосовуємо теорему про прискорення точок плоскої фігури (прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки навколо полюса, яке має дві складові – обертальну та доцентрову).

Напрямок прискорення точки B відомий – направлено по прямій, по якій рухається повзун. Якщо точку B віднести до $\triangle ACB$, який здійснює плоский рух, то її прискорення потрібно визначити відповідно вище вказаної теореми про прискорення точок.

Для визначення прискорення точки B , виберемо точку A за полюс, тоді:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^{об}} + \overline{a_{BA}^{доц}}, \text{ або } \overline{a_B} = \overline{a_A^{об}} + \overline{a_A^{доц}} + \overline{a_{BA}^{об}} + \overline{a_{BA}^{доц}}.$$

Вибираємо масштаб прискорень точок ланок при відкладанні їх на схемі механізму ($\mu_a = 4,5 \text{ м/с}^2 / \text{см}$).

З довільної точки q площини креслення, у вибраному масштабі прискорень, відкладаємо доцентрове прискорення точки A , вектор $a_A^{доц}$, зберігаючи його величину та напрямок (рис. 4.11). Доцентрове прискорення точки A , направлено по лінії O_1A кривошипу, від точки A , до осі обертання O_1 .

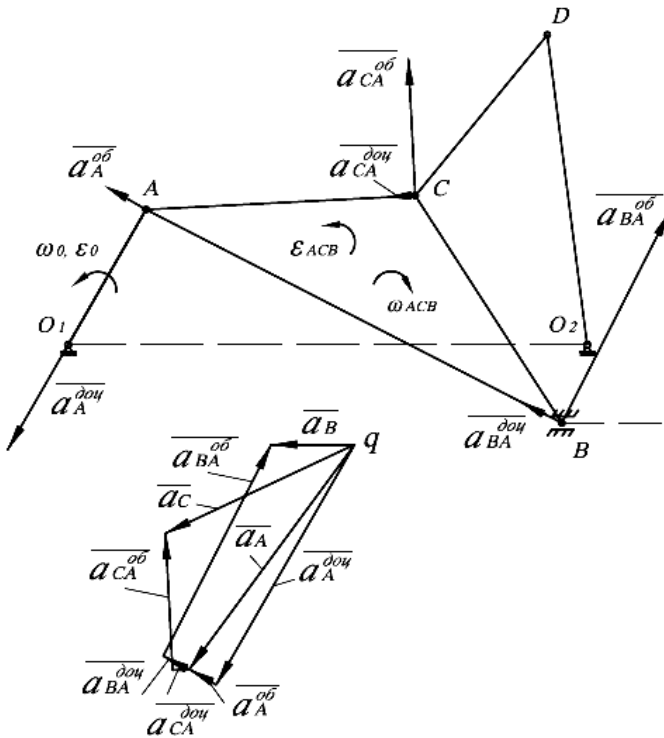


Рис. 4.11. План прискорень багатоланкового механізму (точок A, B, C)

З кінця цього вектору будемо у масштабі обертальне прискорення точки A , вектор $a_A^{об}$, який направлений перпендикулярно кривошину O_1A , в сторону обертання кутового прискорення. Наступним будемо вектор $a_{BA}^{доц}$, величину якого визначаємо за формулою:

$$a_{BA}^{доц} = \omega_{ACB}^2 \cdot BA = 1,764^2 \cdot 0,9 = 2,801 \text{ м/с}^2,$$

напрямок якого буде від точки B до точки A по лінії BA , оскільки точка B обертається навколо полюса, точки A .

З кінця вектора $a_{BA}^{доц}$ перпендикулярно до нього проводимо пряму, паралельну $a_{BA}^{об}$, до перетину з прямою, яка проходить з точки q паралельно a_B . Точка перетину цих прямих буде кінцем векторів $a_{BA}^{об}$ та a_B .

Вимірювши зазначені вектори на плані прискорень (рис. 4.11), відповідно обраному масштабу, визначаємо:

$$\begin{aligned} a_B &= 8,034 \text{ м/с}^2; \\ a_{BA}^{об} &= 22,803 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Кутове прискорення ланки ACB визначаємо за формулою:

$$\varepsilon_{ACB} = \frac{a_{BA}^{об}}{AB} = \frac{22,803}{0,9} = 25,337 \text{ рад/с}^2.$$

Напрямок вектора $a_{BA}^{об}$ вказує, що кутове прискорення ланки ACB направлене проти годинникової стрілки, тобто в сторону протилежну напрямку кутової швидкості ланки. Це означає, що рух ланки ACB , в даний момент часу сповільнений.

Визначимо прискорення точки C , для чого за полюс візьмемо спочатку точку A і запишемо рівність:

$$\overline{a_C} = \overline{a_A} + \overline{a_{CA}^{об}} + \overline{a_{CA}^{доц}}.$$

Доцентрове прискорення точки C навколо полюса (направлене по лінії AC) визначаємо за формулою:

$$a_{CA}^{доц} = \omega_{ACB}^2 \cdot CA = \omega_{ACB}^2 \cdot \frac{AB}{2 \cdot \cos \alpha} = 1,764^2 \cdot \frac{0,9}{2 \cdot \cos 30^\circ} = 1,617 \text{ м/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки C навколо полюса (направлене перпендикулярно $a_{CA}^{доц}$):

$$a_{CA}^{об} = \varepsilon_{ACB} \cdot CA = \varepsilon_{ACB} \cdot \frac{AB}{2 \cdot \cos \alpha} = 25,337 \cdot \frac{0,9}{2 \cdot \cos 30^\circ} = 13,165 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $a_{CA}^{доц}$ направлений від точки C до точки A по лінії AC , а вектор $a_{CA}^{об}$ направлений перпендикулярно ланці AC в сторону кутового прискорення ланки ACB .

Будуємо векторну рівність, для чого з кінця вектора a_A проводимо вектор $a_{CA}^{доц}$. З кінця побудованого вектора $a_{CA}^{доц}$, перпендикулярно йому, будуємо вектор $a_{CA}^{об}$. Зазначена векторна рівність і визначає кінець вектора a_C , початок якого знаходиться в точці q .

Вимірюючи вектор a_C на плані прискорень (рис. 4.11), відповідно обраному масштабу, визначаємо:

$$a_C = 20,099 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо прискорення точки D . Якщо точку D віднести до ланки CD , яка здійснює складний рух, і за полюс прийняти точку C :

$$\overline{a_D} = \overline{a_C} + \overline{a_{DC}^{об}} + \overline{a_{DC}^{доц}}.$$

Доцентрове прискорення точки D навколо полюса (точка C) направлене по ланці CD від точки D до точки C і визначається за формулою:

$$a_{DC}^{доц} = \omega_{DC}^2 \cdot DC = 2,748^2 \cdot 0,4 = 3,021 \text{ м/с}^2.$$

КІНЕМАТИКА

Величина обертального прискорення точки D навколо полюса невідома, вектор прискорення направлений перпендикулярно ланці CD .

З метою отримати більш наглядне креслення і результати відносно побудови плану прискорень, будуємо план прискорення точок C, D окремо (рис. 4.12).

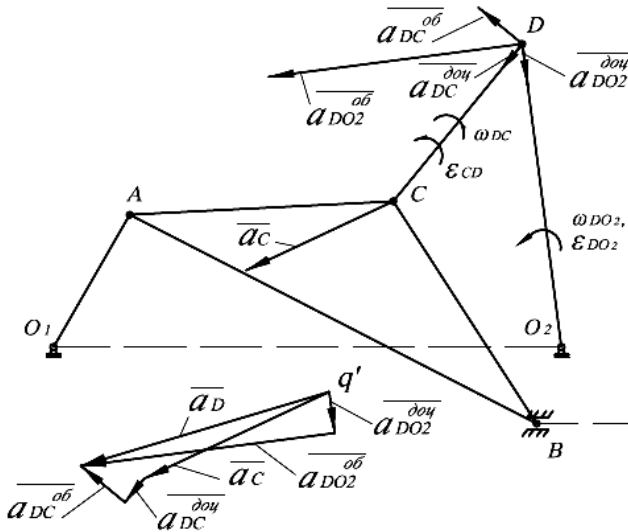


Рис. 4.12. План прискорень багатоланкового механізму (точок C, D)

З довільної точки q' (рис. 4.12) відкладаємо вже відомий вектор a_C . З кінця цього вектора будуємо вектор $a_{DC}^{\text{доц}}$. Далі, з кінця отриманого вектора проводимо пряму, паралельну вектору обертального прискорення точки D навколо полюса C . Кінець цього вектора невідомий, а також невідомо напрямок прискорення точки D .

Розглянемо ланку DO_2 . Віднесемо точку D до ланки DO_2 , яка здійснює тільки поворот навколо точки O_2 . У цьому випадку складаємо рівняння:

$$\overline{a_D} = \overline{a_{DO_2}^{\text{об}}} + \overline{a_{DO_2}^{\text{доц}}}.$$

Доцентрове прискорення точки D навколо полюса (точка O_2) направлено по ланці DO_2 від точки D до точки O_2 і визначається за формулою:

$$a_{DO_2}^{\text{доц}} = \omega_{DO_2}^2 \cdot DO_2 = 2,61^2 \cdot 0,6 = 4,087 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення $a_{DO_2}^{\text{об}}$ невідоме по величині, а за напрямком перпендикулярне ланці DO_2 . Будуємо векторну рівність. З точки q' відкладаємо вектор $a_{DO_2}^{\text{доц}}$, з кінця цього вектора проводимо пряму, паралельну вектору $a_{DO_2}^{\text{об}}$.

Перетин прямих, паралельних відповідно $a_{DO_2}^{об}$ та $a_{DC}^{об}$ утворює кінець вектора a_D , початок якого знаходиться в точці q' . Вимірювши довжини відрізків на плані прискорень (рис. 4.12), відповідно обраному масштабу, визначаємо:

$$\begin{aligned} a_D &= 25,519 \text{ м/с}^2, \\ a_{DC}^{об} &= 5,609 \text{ м/с}^2, \\ a_{DO_2}^{об} &= 25,189 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Кутове прискорення ланки CD визначаємо за формулою:

$$\varepsilon_{DC} = \frac{a_{DC}^{об}}{DC} = \frac{5,609}{0,4} = 14,023 \text{ рад/с}^2.$$

Кутове прискорення ланки DO_2 :

$$\varepsilon_{DO_2} = \frac{a_{DO_2}^{об}}{DO_2} = \frac{25,189}{0,6} = 41,982 \text{ рад/с}^2.$$

Результати розрахунків повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму та кутових прискорень усіх ланок механізму за допомогою плану прискорень приведені в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Точка (ланка)	прискорення, м/с ²			кутове прискорення, рад/с ²
	обертальне	доцентрове	повне	
<i>A</i>	3	26,646	26,814	—
<i>B</i>	—	—	8,034	—
<i>C</i>	—	—	20,099	—
<i>D</i>	—	—	25,519	—
<i>BA</i>	22,803	2,801	—	—
<i>CA</i>	13,165	1,617	—	—
<i>ACB</i>	—	—	—	25,337
<i>DC</i>	5,609	3,021	—	14,023
<i>DO₂</i>	25,189	4,087	—	41,982

Діаграма кутових прискорень ланок механізму представлена на рис. 4.13.

КІНЕМАТИКА

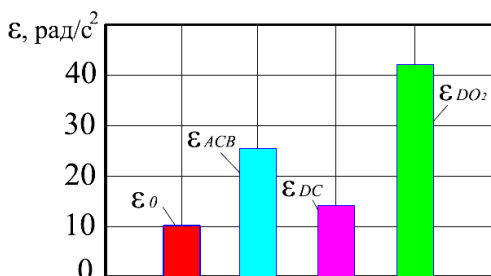


Рис. 4.13. Діаграма кутових прискорень ланок механізму

4. Визначення повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень (МЦП).

Миттєвий центр прискорень (МЦП) – точка, прискорення якої в даний момент дорівнює нулю. МЦП повинен знаходитися на прямій, що становить кут β до вектору прискорення полюса, проведеної в сторону кутового прискорення, на відстані Q .

Кут β визначається за формулою:

$$\beta = \arctg \frac{\epsilon}{\omega^2}.$$

Оскільки точки A, B, C належать ланці ACB , кутову швидкість та кутове прискорення якої знайдено в пп.1-3 розв'язку задачі, кут β визначимо за формулою:

$$\beta = \arctg \frac{\epsilon_{ACB}}{\omega_{ACB}^2} = \arctg \frac{25,337}{1,764^2} = 82,998^\circ.$$

Відстань від точки A до МЦП визначаємо за формулою:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon_{ACB}^2 + \omega_{ACB}^4}} = \frac{26,814}{\sqrt{25,337^2 + 1,764^4}} = 1,0504 \text{ м.}$$

Положення МЦП ланки ACB зображено на рис. 4.14.

З урахуванням вибраного масштабу для схеми багатоланкового механізму ($\mu_l = 10 \text{ см/см}$) визначаємо відстань точок до МЦП:

$$\begin{aligned} AQ &= 1,0504 \text{ м;} \\ CQ &= 0,7872 \text{ м;} \\ BQ &= 0,3146 \text{ м.} \end{aligned}$$

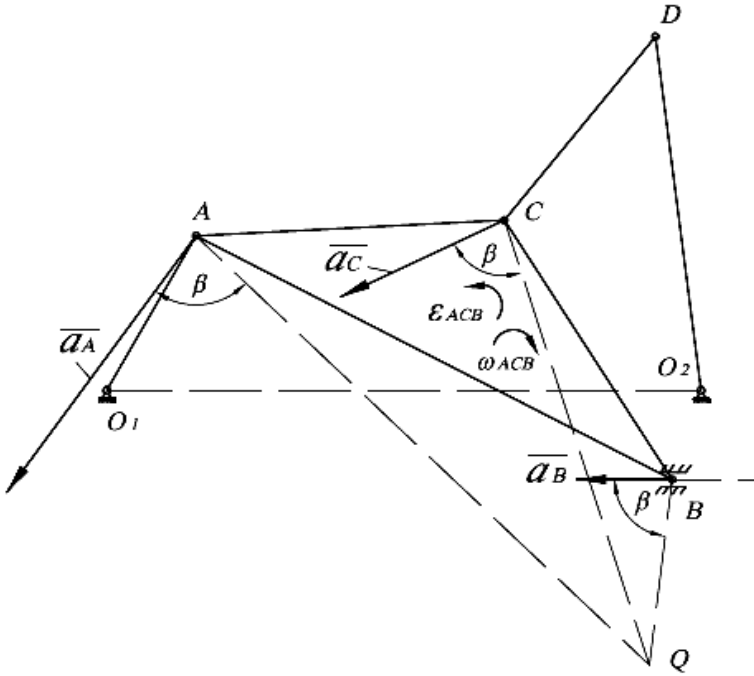


Рис. 4.14. Миттєвий центр прискорень ланки ACB

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури може бути визначено за допомогою вибору полюса в МЦП. Тоді:

$$\begin{aligned} a_A &= AQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{ACB}^2 + \omega_{ACB}^4} = 1,0504 \cdot \sqrt{25,337^2 + 1,764^4} = 26,814 \text{ м/с}^2; \\ a_C &= CQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{ACB}^2 + \omega_{ACB}^4} = 0,7872 \cdot \sqrt{25,337^2 + 1,764^4} = 20,095 \text{ м/с}^2; \\ a_B &= BQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{ACB}^2 + \omega_{ACB}^4} = 0,3146 \cdot \sqrt{25,337^2 + 1,764^4} = 8,031 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Аналогічно визначимо положення МЦП ланки CD. Оскільки точки C, D належать ланці CD, кутову швидкість та кутове прискорення якої знайдено в пп.1-3 розв'язку задачі, кут β_{DC} визначимо за формулою:

$$\beta_{DC} = \arctg \frac{\varepsilon_{DC}}{\omega_{DC}^2} = \arctg \frac{14,023}{2,748^2} = 61,697^\circ.$$

Оскільки повне прискорення точки C знайдено, відстань точки C до МЦП для ланки CD визначаємо за формулою:

$$CQ_{CD} = \frac{a_C}{\sqrt{\varepsilon_{CD}^2 + \omega_{CD}^4}} = \frac{20,095}{\sqrt{14,023^2 + 2,748^4}} = 1,262 \text{ м.}$$

КІНЕМАТИКА

Положення МЦП ланки CD багатоланкового механізму приведено на рис. 4.15 (для компактності рисунка, лінії CQ_{DC} та DQ_{DC} зображені розірваними).

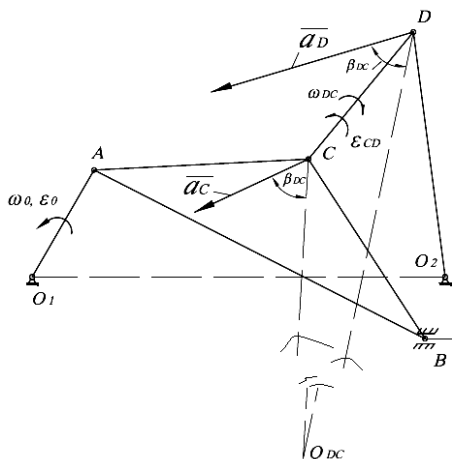


Рис. 4.15. Миттєвий центр прискорень ланки CD

З урахуванням вибраного масштабу для схеми багатоланкового механізму ($\mu_l = 10 \text{ см/см}$) визначаємо відстань точки D до МЦП ланки CD :

$$DQ_{DC} = 1,6023 \text{ м.}$$

Так як положення МЦП ланки CD знайдено, визначаємо прискорення точки D :

$$a_D = DQ_{CD} \cdot \sqrt{\varepsilon_{CD}^2 + \omega_{CD}^4} = 1,6023 \cdot \sqrt{14,023^2 + 2,748^4} = 25,520 \text{ м/с}^2.$$

Результати розрахунків повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень приведені в табл. 2.5.

Таблиця 4.5

Точка	повне прискорення, м/с^2
A	26,814
B	8,031
C	20,095
D	25,520

Проаналізувавши дані табл. 4.4, 4.5, можна зробити висновок, що результати визначення повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму за допомогою плану прискорень та миттєвого центру прискорень співпадають майже с 100 % точністю. Величина відносної похибки не перевищує 0,04 %, що пов'язано з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа.

Оскільки результати розрахунків швидкостей руху точок механізму за допомогою миттєвого центру швидкостей та плану швидкостей, а також прискорення руху точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень та плану прискорень достатньо добре збігаються, то можна зробити висновок, що кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму виконано правильно.

ГЛАВА ТРЕТЯ

КОМП'ЮТЕРИЗОВАНЕ РІШЕННЯ

Розділ 5. СТАТИКА

Завдання С-1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил

Знайти реакції опор заданої конструкції (рис. 5.1). Зовнішні сили P задано у кН, моменти M – у кН·м, рівномірно розподілене навантаження q – у кН/м, а розміри конструкції – в метрах.

(Find the unknown reactions attached to the supports of given construction (fig 5.1).

There are several dimensions used: external forces P are measured in kN; moments – in kNm; distributed forces - in kN/m; all sizes of construction - in metres)

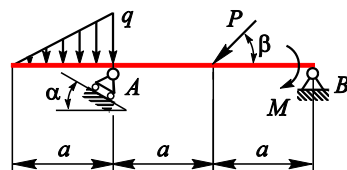


Рис 5.1. Плоска конструкція

Вихідні данні (Put the incoming data)

$P := 25 \text{ kN}$	$a := 1 \text{ m}$
$q := 20 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$	$\alpha := 45^\circ$
$M := 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$\beta := 60^\circ$

Замінімо розподілене по закону трикутника навантаження q еквівалентною зосередженою силою Q .

(Change the distributed force q by the equivalent concentrated force Q)

$$Q := \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$$

Довжина прольоту, до якого прикладено розподілене навантаження дорівнює a . Тоді:

(The length of the distributed force q frame application is equal to a . Then:)

Рішення в системі Mathcad

$$\begin{aligned}x1 &:= 0 & x2 &:= a \\ q(x) &:= q \cdot \frac{x}{a} \\ Q &:= \int_{x1}^{x2} q(x) dx = 5 \times 10^3 \text{ N}\end{aligned}$$

Зосереджену силу Q завжди прикладено у центрі тяжіння епюри навантаження q . Визначимо центр тяжіння епюри навантаження.

(The concentrated force Q is applied at the distributed load diagram centre of gravity. Let's find this centre of gravity location)

$$x_C := \frac{\int_{x1}^{x2} q(x) \cdot x dx}{Q} = 0.667 \text{ m}$$

Розрахункова схема (Design scheme)

Наведемо рівняння рівноваги системи (рис. 5.2).

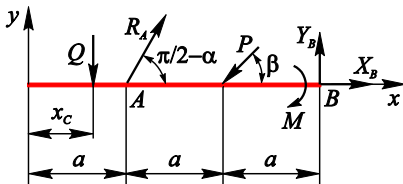


Рис 5.2. Розрахункова схема конструкції
ceive the next scalar equation)

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional structure (fig. 5.2))

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь x . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the x axes. We will re-

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 : \\ R_A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - P \cdot \cos(\beta) + X_B &= 0\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0 : \\ -Q + R_A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - P \cdot \sin(\beta) + Y_B &= 0\end{aligned}$$

СТАТИКА

Запишемо рівняння моментів сил та реакцій опор відносно точки B .
(*Satisfy the equation of moments about the point B*)

$$\sum M_B = 0:$$

$$Q \cdot (3 \cdot a - X_C) - RA \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot 2 \cdot a + P \cdot \sin(\beta) \cdot a - M = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

(*Change the equation thereby all its elements will have dimension used for forces*)

$$Q \cdot \left(\frac{3 \cdot a - X_C}{a}\right) - RA \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot 2 + P \cdot \sin(\beta) \cdot a - \frac{M}{a} = 0$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.
(*Write down the system of equations used for the construction equilibrium description*)

$$RA \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - P \cdot \cos(\beta) + XB = 0$$

$$-Q + RA \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - P \cdot \sin(\beta) + YB = 0$$

$$Q \cdot \frac{3 \cdot a - X_C}{a} - RA \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot 2 + P \cdot \sin(\beta) \cdot a - \frac{M}{a} = 0$$

Використовуємо матричний метод вирішення системи рівнянь, що отримано.

(*Use the matrix method for solution*)

$$XB + 0 \cdot YB + RA \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = P \cdot \cos(\beta)$$

$$0 \cdot XB + YB + RA \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Q + P \cdot \sin(\beta)$$

$$0 \cdot XB + 0 \cdot YB - RA \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot 2 = -Q \cdot \frac{3 \cdot a - X_C}{a} - P \cdot \sin(\beta) \cdot a + \frac{M}{a}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів – A та вектор-столбець правих частин – B .

(*Form the ratio matrix A and the matrix of results B*)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ 0 & 1 & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ 0 & 0 & -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.866 \\ 0 & 0 & -1.732 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} P \cdot \cos(\beta) \\ Q + P \cdot \sin(\beta) \\ -Q \cdot \frac{3 \cdot a - X_C}{a} - P \cdot \sin(\beta) + \frac{M}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \times 10^4 \\ 2.665 \times 10^4 \\ 1.668 \times 10^4 \end{pmatrix} N$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Isolve**.

(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the **Isolve** function usage)

$$Reaction := Isolve(A, B) = \begin{pmatrix} 1.732 \times 10^4 \\ 3.499 \times 10^4 \\ -9.632 \times 10^3 \end{pmatrix} N$$

Значення реакцій опор
(The support reactions value)

$$XB := Reaction_{0,0} = 1.001 \times 10^4 N$$

$$YB := Reaction_{1,0} = 2.916 \times 10^4 N$$

$$RA := Reaction_{2,0} = 3.524 \times 10^3 N$$

Перевірка результатів рішення
(Check the results)

Для перевірки результатів рішення побудуємо силовий багатокутник (рис. 5.3). Особливості побудови векторів сил в системі Mathcad наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина I. Статика. с. 89 – 94).

(To check the obtained results let's build the system's resultant in a way of polygon (fig. 5.3)).

СТАТИКА

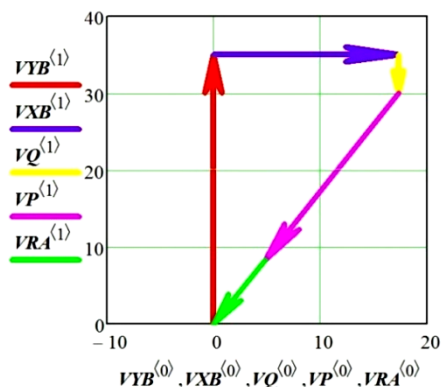


Рис 5.3. Силувий багатокутник плоскої конструкції

Силувий багатокутник замкнений, отже головний вектор плоскої збіжної системи сил, прикладеної до твердотільної конструкції, дорівнює нулю.

(The polygon is closed, then the system's resultant is equal to zero).

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил та пар сил, що діють на задану твердотільну конструкцію, та моменти реакцій її опор (рис. 5.4). По осі абсцис відкладаємо відстань від початку координат до точки прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

(Set the bar chart, on which the value and sign of the active forces, couple of forces and reactions moments are shown (fig. 5.4). By the X axes the distance between the starting point of the coordinate system and the forces application point is given. The value of this ratio is equal to the quantity of found moments. By the Y axes the value of moments are given).

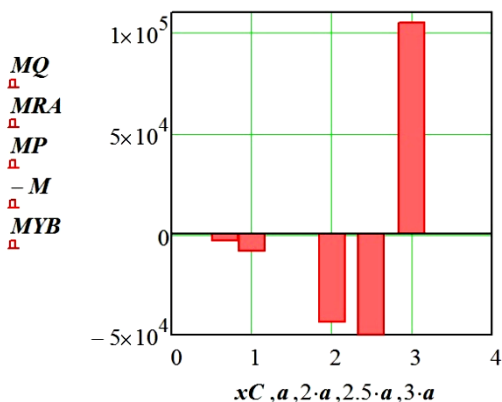


Рис 5.4. Моменти сил та реакцій опор плоскої конструкції відносно точки A

Знайдемо величини моментів усіх активних сил та реакцій.
(Find the value of all active forces and reactions moments)

$$\begin{aligned}
 MQ &:= -Q \cdot X_C = -3.333 \times 10^3 \text{ J} \\
 MRA &:= RA \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot a = -8.341 \times 10^3 \text{ J} \\
 MP &:= -P \cdot \sin(\beta) \cdot 2 \cdot a = -4.33 \times 10^4 \text{ J} \\
 MYB &:= YB \cdot 3 \cdot a = 1.05 \times 10^5 \text{ J}
 \end{aligned}$$

Головний момент сил та реакцій опор плоскої конструкції відносно точки A дорівнює нулю.

(The resultant couple of the system of forces and reaction attached to the solid construction is equal to zero).

Висновок: Так як головний вектор та головний момент плоскої збіжної системи сил, прикладеної до твердотільної конструкції дорівнюють нулю, то рішення вірне

(Conclusion: As the resultant and the resultant couple of the convergent system of forces applied to the solid flat construction are equal to zero, then the solution is correct).

Завдання С-2.1. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів

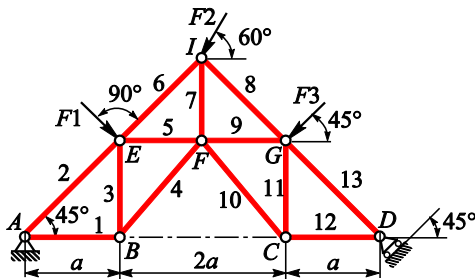


Рис 5.5. Плоска ферма

Знайти реакції опор та сили в стержнях плоскої ферми (рис.5.5). Зовнішні сили F , прикладені у вузлах конструкції задано у кН.

(Find the unknown reactions attached to the supports of flat framework (fig. 5.5). Also find all reactions in the rods of given construction. There are such dimensions used – all external forces F are measured in kN).

СТАТИКА

Вихідні данні (Put the incoming data)

$F1 := 18kN$	$\alpha := 45^0$	$a := 4m$
$F2 := 15kN$	$\beta := 60^0$	
$F3 := 5kN$	$\gamma := 45^0$	

Розрахункова схема (Design scheme)

Спочатку визначимо реакції опор конструкції (рис. 5.6), а саме X_a , Y_a та R_d . Для цього запишемо рівняння рівноваги, спроектувавши усі зовнішні сили та реакції в опорах конструкції на вісь X і Y , а також запишемо рівняння моментів відносно точки D .

(First find the reactions in the construction supports (fig. 5.6), such as X_a , Y_a and R_d . So we need to project all active forces and reactions on the X and Y axes, and satisfy the equation of moments according to the point D).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0: \\ X_a + F1 \cdot \cos(\alpha) - F2 \cdot \cos(\beta) - F3 \cdot \cos(\gamma) - R_d \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ X_a - R_d \cdot \cos(\alpha) &= -F1 \cdot \cos(\alpha) + F2 \cdot \cos(\beta) + F3 \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= 0: \\ Y_a - F1 \cdot \sin(\alpha) - F2 \cdot \sin(\beta) - F3 \cdot \sin(\gamma) + R_d \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ Y_a + R_d \cdot \sin(\alpha) &= F1 \cdot \sin(\alpha) + F2 \cdot \sin(\beta) + F3 \cdot \sin(\gamma) \end{aligned}$$

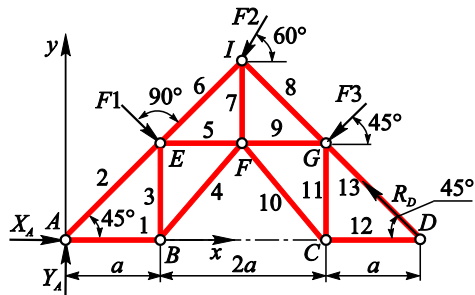


Рис 5.6. Розрахункова схема плоскої ферми

Запишемо рівняння моментів відносно точки D .
(Satisfy the equation of moments about the point D)

$$\begin{aligned}\sum MD &= 0 : \\ F3 \cdot \cos(\gamma) \cdot a + F3 \cdot \sin(\gamma) \cdot a + F2 \cdot \cos(\beta) \cdot 2 \cdot a + F2 \cdot \sin(\beta) \cdot 2 \cdot a - \\ - F1 \cdot \cos(\alpha) \cdot a + F1 \cdot \sin(\alpha) \cdot 3 \cdot a - Ya \cdot 4 \cdot a &= 0 \\ Ya \cdot 4 &= F3 \cdot \cos(\gamma) + F3 \cdot \sin(\gamma) + F2 \cdot \cos(\gamma) \cdot 2 + F2 \cdot \sin(\beta) \cdot 2 - \\ - F1 \cdot \cos(\alpha) + F1 \cdot \sin(\alpha) \cdot 3\end{aligned}$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.
(Write down the system of equations used for the construction equilibrium description)

$$\begin{aligned}Xa + 0 \cdot Ya - Rd \cdot \cos(\alpha) &= -F1 \cdot \cos(\alpha) + F2 \cdot \cos(\beta) + F3 \cdot \cos(\gamma) \\ 0 \cdot Xa + Ya + Rd \cdot \sin(\alpha) &= F1 \cdot \sin(\alpha) + F2 \cdot \sin(\beta) + F3 \cdot \sin(\gamma) \\ 0 \cdot Xa + Ya \cdot 4 + 0 \cdot Rd &= F3 \cdot \cos(\gamma) + F3 \cdot \sin(\gamma) + F2 \cdot \cos(\gamma) \cdot 2 + \\ + F2 \cdot \sin(\beta) \cdot 2 - F1 \cdot \cos(\alpha) + F1 \cdot \sin(\alpha) \cdot 3\end{aligned}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів – A та вектор-столбець правих частин – B .

(Form the ratio matrix A and the matrix of results B)

$$\begin{aligned}A &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cos(\alpha) \\ 0 & 1 & \sin(\alpha) \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.707 \\ 0 & 1 & 0.707 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ B &:= \begin{pmatrix} -F1 \cdot \cos(\alpha) + F2 \cdot \cos(\beta) + F3 \cdot \cos(\gamma) \\ F1 \cdot \sin(\alpha) + F2 \cdot \sin(\beta) + F3 \cdot \sin(\gamma) \\ F3 \cdot \cos(\gamma) + F3 \cdot \sin(\gamma) + F2 \cdot \cos(\gamma) \cdot 2 + \\ + F2 \cdot \sin(\beta) \cdot 2 - F1 \cdot \cos(\alpha) + F1 \cdot \sin(\alpha) \cdot 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Isolve**.

(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the **Isolve** function usage)

$$\text{reaction} := \text{Isolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 9.185 \times 10^3 \\ 1.838 \times 10^4 \\ 1.538 \times 10^4 \end{pmatrix} N$$

Значення реакцій опор
(*The support reactions value*)

$$Xa := reaction_{0,0} = 9.185 \times 10^3 \text{ N}$$

$$Ya := Reaction_{1,0} = 1.838 \times 10^4 \text{ N}$$

$$Rd := Reaction_{2,0} = 1.538 \times 10^4 \text{ N}$$

Для перевірки результатів рішення побудуємо силовий багатокутник (рис. 5.7). Особливості побудови векторів сил в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина I. Статика. с. 95 – 102).

(To check the obtained results let's build the system's resultant in a way of polygon (fig. 5.7). If this polygon is closed, then the solution is correct).

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил, що діють на задану ферму, та моменти реакцій її опор (рис. 5.8). По осі абсцис відкладаємо відстань від точки *E* до точок прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

(Set the bar chart, on which the value and sign of the active forces and reactions moments are shown (fig. 5.8). By the X axes the distance between the starting point *E* and the forces application point is given. The value of this ratio is equal to the quantity of found moments. By the Y axes the value of moments are given).

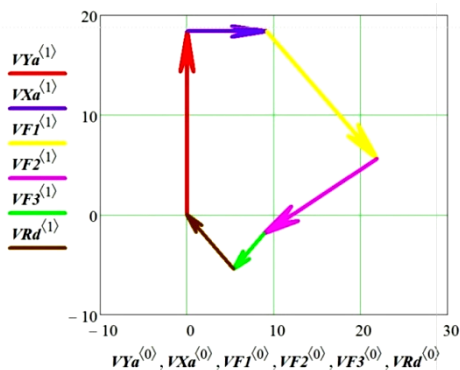


Рис 5.7. Силовий багатокутник плоскої конструкції

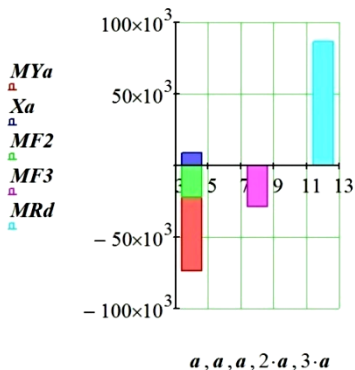


Рис 5.8. Моменти сил та реакцій опор плоскої ферми відносно точки *E*

Знайдемо величини моментів усіх активних сил та реакцій опор ферми.
(Find the value of all active forces and reactions moments)

$$MYa := -Ya \cdot a = -7.351 \times 10^4 J$$

$$MXa := Xa \cdot a = 3.674 \times 10^4 J$$

$$MF2 := F2 \cdot \cos(\beta) \cdot a - F2 \cdot \sin(\beta) \cdot a = -2.196 \times 10^4 J$$

$$MF3 := -F3 \cdot \sin(\gamma) \cdot 2 \cdot a = -2.828 \times 10^4 J$$

$$MRd := -Rd \cdot \cos(45^\circ) \cdot a + Rd \cdot \sin(45^\circ) \cdot 3 \cdot a = 8.702 \times 10^4 J$$

Головний момент сил та реакцій опор плоскої ферми відносно точки E дорівнює нулю.

(The resultant couple of the system of forces and reaction attached to the solid construction is equal to zero).

Висновок: Так як головний вектор та головний момент плоскої збіжної системи сил, прикладеної до плоскої ферми дорівнюють нулю, то реакції її опор визначені вірно.

(Conclusion: As the resultant and the resultant couple of the convergent system of forces applied to the solid flat framework are equal to zero, then the solution is correct).

Скористаємося методом вирізання вузлів. Для цього розіб'ємо систему на ряд підсистем, кожна з яких складається з вузла та **лише двох стержнів**, що з нього виходять, та реакції в яких не відомі. При розрахунках вважаємо, що напрям усіх реакцій в стержнях є додатним, тобто вони спрямовані в напрямку від вузла вздовж стержня.

(Use the method of joints. Firstly cut the framework structure into several substructures. Each one of substructures consists of a node and **only two rods**, stretching from it, and reactions in which are unknown. For calculation the reactions' direction in all rods should be considered positive as they are directed from the node and along the rod).

Спочатку потрібно визначити вузол, в якому збігається не більше двох стержнів, реакції в яких є невідомими. Це робиться для того, щоб у двох рівняннях рівноваги, які можна записати для плоскої системи було не більше двох невідомих.

(Firstly find out the nod with **only two rods**, stretching from it, and reactions in which are unknown. The purpose of this operation is to form the equations of flat system equilibrium with only two unknown units. Thus such system could be solved).

СТАТИКА

Тому спочатку наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла D та стержнів 12, 13 (рис. 5.9). Невідоми є реакції стержнів S_{12} , S_{13} . Відомою є реакція опори R_d .

(So first give the design scheme for the substructure, which consists of a joint D and rods 12, 13 (fig. 5.9). The reactions S_{12} and S_{13} are unknown, the reaction R_d was found).

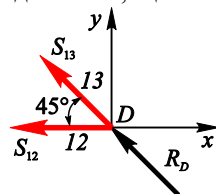


Рис 5.9. Розрахункова схема для вузла D

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ -S_{12}D - Rd \cdot \cos(\alpha) - S_{13}D \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ -S_{12} - Rd \cdot \cos(\alpha) - S_{13} \cdot \cos(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0: \\ Rd \cdot \sin(\alpha) + S_{13}D \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ S_{13} &= -Rd\end{aligned}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_{13} та S_{12} .

(From these two equations find reactions S_{13} and S_{12})

$$\begin{aligned}S_{13} &:= -Rd = -1,538 \times 10^4 \text{ N} \\ S_{12} &:= -Rd \cdot \cos(\alpha) - S_{13} \cdot \cos(\alpha) = 0 \text{ N}\end{aligned}$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла C та стержнів 10, 11, 12 (рис. 5.10). Невідомими є реакції стержнів S_{10} , S_{11} . Відомою є реакція стержня S_{12} .

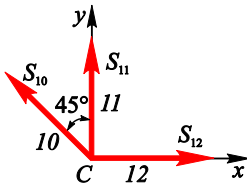


Рис 5.10. Розрахункова
схема для вузла C

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint C and rods 10, 11, 12 (fig. 5.10). The reactions S_{10} and S_{11} are unknown, the reaction S_{12} was found).

Вважаємо, що реакції у стержнях, які поєднують сусідні вузли дорівнюють за абсолютною величиною та протилежні за знаком. Наприклад:

(The reactions in the rods, connecting neighbouring nodes should be equal by absolute value and opposite by their mathematical sign. For example:)

$$S_{12} = |S_{12C}| = -|S_{12D}|$$

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_{12}C - S_{10}C \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ S_{10} &= \frac{S_{12}}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0: \\ S_{10}C \cdot \sin(\alpha) + S_{11}C &= 0 \\ S_{11} &= -S_{10} \cdot \sin(\alpha)\end{aligned}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_{10} та S_{11} .

(From these two equations find reactions S_{10} and S_{11})

$$\begin{aligned}S_{10} &:= \frac{S_{12}}{\cos(\alpha)} = 0\text{ N} \\ S_{11} &:= -S_{10} \cdot \sin(\alpha) = 0\text{ N}\end{aligned}$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла G та стержнів 8, 9, 11, 13 (рис.5.11). Невідомими є реакції стержнів S_8, S_9 . Відомими є реакції стержнів S_{11} та S_{13} .

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint G and rods 8, 9, 11, 13 (fig. 5.11). The reactions S_8 and S_9 are unknown, the reactions S_{11} and S_{13} were found).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0: \\ S_{13}G \cdot \cos(\alpha) - F_3 \cdot \cos(\gamma) - S_8G \cdot \cos(\alpha) - S_9G &= 0 \\ S_9 &= S_{13} \cdot \cos(\alpha) - F_3 \cdot \cos(\gamma) - S_8 \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= 0: \\ -S_{13}G \cdot \sin(\alpha) - F_3 \cdot \sin(\gamma) + S_8G \cdot \sin(\alpha) - S_{11}G &= 0 \\ S_8 &= \frac{S_{13} \cdot \sin(\alpha) + F_3 \cdot \sin(\gamma) + S_{11}}{\sin(\alpha)} \end{aligned}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_8 та S_9 .

(From these two equations find reactions S_8 and S_9).

$$S_8 := \frac{S_{13} \cdot \sin(\alpha) + F_3 \cdot \sin(\gamma) + S_{11}}{\sin(\alpha)} = -1.038 \times 10^4 \text{ N}$$

$$S_9 := S_{13} \cdot \cos(\alpha) - F_3 \cdot \cos(\gamma) - S_8 \cdot \cos(\alpha) = -7.071 \times 10^3 \text{ N}$$

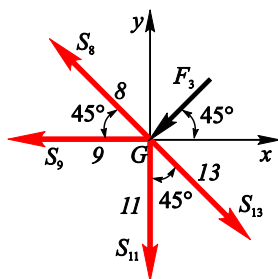


Рис 5.11. Розрахункова схема для вузла G

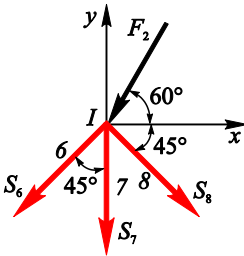


Рис 5.12. Розрахункова
схема для вузла I

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла I та стержнів 6, 7, 8 (рис. 5.12). Невідомими є реакції стержнів S_6 , S_7 . Відомою є реакція стержня S_8 .

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint I and rods 6, 7, 8 (fig. 5.12). The reactions S_6 and S_7 are unknown, the reaction S_8 was found).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_8 I \cdot \cos(\alpha) - F_2 \cdot \cos(\beta) - S_6 I \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ S_6 &= \frac{S_8 \cdot \cos(\alpha) - F_2 \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0: \\ -S_8 I \cdot \sin(\alpha) - F_2 \cdot \sin(\beta) - S_7 I - S_6 I \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ S_7 &= -S_8 \cdot \sin(\alpha) - F_2 \cdot \sin(\beta) - S_6 \cdot \sin(\alpha)\end{aligned}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_7 та S_6 .

(From these two equations find reactions S_7 and S_6)

$$\begin{aligned}S_7 &:= -S_8 \cdot \sin(\alpha) - F_2 \cdot \sin(\beta) - S_6 \cdot \sin(\alpha) = 9.192 \times 10^3 \text{ N} \\ S_6 &:= \frac{S_8 \cdot \cos(\alpha) - F_2 \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = -2.099 \times 10^4 \text{ N}\end{aligned}$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла F та стержнів 4, 5, 7, 9, 10 (рис. 5.13). Невідомими є реакції стержнів S_4 , S_5 . Відомими є реакції стержнів S_7 , S_9 , S_{10} .

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint F and rods 4, 5, 7, 9, 10 (fig. 5.13). The reactions S_4 and S_5 are unknown, the reactions S_7 , S_9 , S_{10} were found).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_{10}F \cdot \cos(\alpha) + S_9F - S_5F - S_4F \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ S_5 &= S_{10} \cdot \cos(\alpha) + S_9 - S_4 \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0: \\ -S_{10}F \cdot \sin(\alpha) + S_7F - S_4F \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ S_4 &= \frac{-S_{10} \cdot \sin(\alpha) + S_7}{\sin(\alpha)}\end{aligned}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_4 та S_5 .

(From these two equations find reactions S_4 and S_5).

$$\begin{aligned}S_4 &:= \frac{-S_{10} \cdot \sin(\alpha) + S_7}{\sin(\alpha)} = 1.3 \times 10^4 \text{ N} \\ S_5 &:= S_{10} \cdot \cos(\alpha) + S_9 - S_4 \cdot \cos(\alpha) = -1.626 \times 10^4 \text{ N}\end{aligned}$$

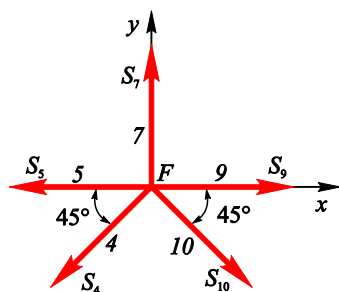


Рис 5.13. Розрахункова схема для вузла F

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла E та стержнів 2, 3, 5, 6 (рис. 5.14). Невідомими є реакції стержнів S_2 , S_3 . Відомими є реакції стержнів S_5 , S_6 .

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint E and rods 2, 3, 5, 6 (fig.5.14). The reactions S_2 and S_3 are unknown, the reactions S_5 , S_6 were found).

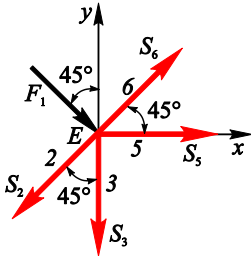


Рис 5.14. Розрахункова схема для вузла E

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_5 E + S_6 E \cdot \cos(\alpha) + F_1 \cdot \cos(\alpha) - S_2 E \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ S_2 &= \frac{S_5 + S_6 \cdot \cos(\alpha) - F_1 \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0: \\ -S_3 E + S_6 E \cdot \sin(\alpha) - F_1 \cdot \sin(\alpha) - S_2 E \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ S_3 &= S_6 \cdot \sin(\alpha) - F_1 \cdot \sin(\alpha) - S_2 \cdot \sin(\alpha)\end{aligned}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції S_2 та S_3 .

(From these two equations find reactions S_2 and S_3)

$$\begin{aligned}S_2 &:= \frac{S_5 + S_6 \cdot \cos(\alpha) - F_1 \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -2.599 \times 10^4 \text{ N} \\ S_3 &:= S_6 \cdot \sin(\alpha) - F_1 \cdot \sin(\alpha) - S_2 \cdot \sin(\alpha) = -9.192 \times 10^3 \text{ N}\end{aligned}$$

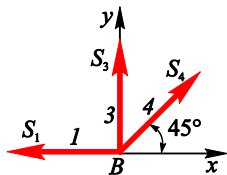


Рис 5.15. Розрахункова схема для вузла B

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла B та стержнів 1, 3, 4 (рис. 5.15). Невідомою є реакція стержня S_1 . Відомими є реакції стержнів S_3 , S_4 .

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint B and rods 1, 3, 4 (fig.5.15). The reaction S_1 is unknown, the reactions S_3 , S_4 were found).

СТАТИКА

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_4 B \cdot \cos(\alpha) - S_1 B &= 0 \\ S_1 &= S_4 \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$

З цього рівняння знаходимо реакцію S_1 .

(From this equation find reaction S_1)

$$S_1 := S_4 \cdot \cos(\alpha) = 9.192 \times 10^3 \text{ N}$$

Перевірка результатів рішення (Check the results)

Для перевірки результатів визначимо реакції X_a та Y_a в опорі A .

(For checking the results we should find the reactions X_a and Y_a in the support A).

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла A та стержнів 1, 2 (рис. 5.16). Невідомими є реакції стержнів в опорі A – X_a та Y_a . Відомими є реакції стержнів S_1 , S_2 .

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint A and rods 1, 2 (fig. 5.16). The reactions X_a and Y_a in the support A are unknown, the reactions S_1 , S_2 are found).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ X_a + S_1 A + S_2 A \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ X_a &= -S_1 - S_2 \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$

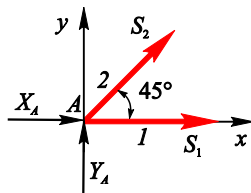


Рис 5.16. Розрахункова схема для вузла A

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0 : \\ Y_a + S_2 \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ Y_a &= -S_2 \cdot \sin(\alpha)\end{aligned}$$

З цих двох рівнянь знаходимо реакції X_a та Y_a .

(From these two equations find reactions X_a and Y_a)

$$\begin{aligned}X_a &:= -S_1 - S_2 \cdot \cos(\alpha) = 9.185 \times 10^3 \text{ N} \\ Y_a &:= -S_2 \cdot \sin(\alpha) = 1.838 \times 10^4 \text{ N}\end{aligned}$$

Висновок: рішення вірне

(Conclusion: the solution is correct)

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак сили S в кожному стержні (рис. 5.17). По осі абсцис відкладаємо діапазон $j:=1...13$, який дорівнює кількості визначених сил S . По осі ординат задаємо значення функції S_j

(Build the bar chart, on which the value and sign of the force S in each rod is shown (fig. 5.17). By the X axes the value of ratio $j:=1....13$ is given. The value of this ratio is equal to the quantity of found forces S . By the Y axes the value of function S_j is given).

$$j := 1.....13$$

СТАТИКА

$$S_j =$$

$9.192 \cdot 10^3$
$-2.599 \cdot 10^4$
$-9.192 \cdot 10^3$
$1.3 \cdot 10^4$
$-1.626 \cdot 10^4$
$-2.099 \cdot 10^4$
$9.192 \cdot 10^3$
$-1.038 \cdot 10^4$
$-7.071 \cdot 10^3$
0
0
0
$-1.538 \cdot 10^4$

N

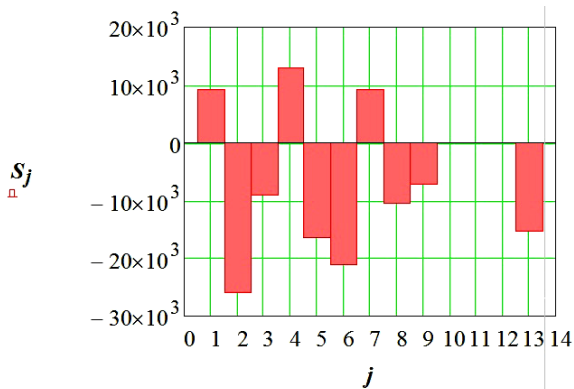


Рис 5.17. Зусилля в стержнях плоскої ферми

Завдання С-2.2. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми матричним методом

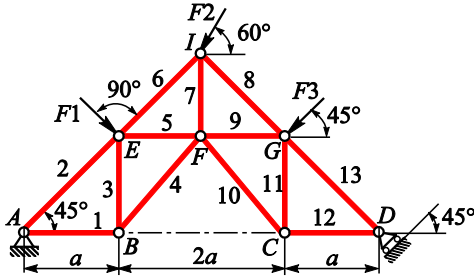


Рис 5.18. Плоска ферма

Знайти реакції опор та сили в стержнях плоскої ферми (рис.5.18). Зовнішні сили F , прикладені у вузлах конструкції задано у кН.

(Find the unknown reactions attached to the supports of flat framework (fig. 5.18). Also find all reactions in the rods of given construction. There are such dimensions used – all external

forces F are measured in kN).

Вихідні данні (Put the incoming data)

$$\begin{aligned} F1 &:= 18 \text{ kN} & \alpha &:= 45^\circ & a &:= 4 \text{ m} \\ F2 &:= 15 \text{ kN} & \beta &:= 60^\circ \\ F3 &:= 5 \text{ kN} & \gamma &:= 45^\circ \end{aligned}$$

Розрахункова схема (Design scheme)

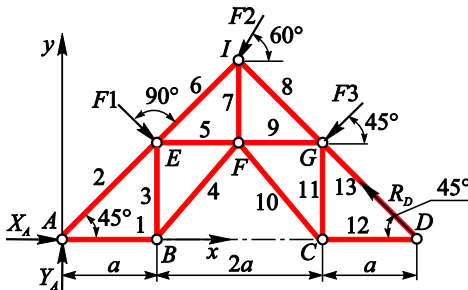


Рис 5.19. Розрахункова схема плоскої ферми

Скористаємося матричним методом. Для цього наведену на рис. 5.19 розрахункову схему плоскої ферми розіб'ємо на ряд підсистем, кожна з яких складається з вузла та стержнів, що з нього виходять. При розрахунках вважаємо, що напрям усіх реакцій в стержнях є додатним, тобто вони спрямовані в напрямку від вузла вздовж стержня.

(Use the matrix method. Firstly cut the framework structure (fig. 5.19) into several substructures. Each one of substructures consists of a node and rods,

stretching from it. For calculation the reactions' direction in all rods should be considered positive as they are directed from the nod and along the rod).

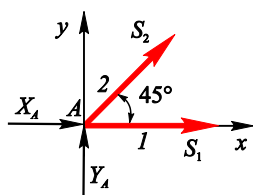


Рис 5.20. Розрахункова схема для вузла A

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складається з вузла A та стержнів 1, 2 (рис. 5.20).

(Give the design scheme for the substructure, which consists of a joint A and rods 1, 2 (fig. 5.20)).

Вважаємо, що реакції у стержнях, які поєднують сусідні вузли дорівнюють за абсолютною величиною та протилежні за знаком. Наприклад:

(The reactions in the rods, connecting neighbouring joints should be equal by absolute value and opposite by their mathematical sign. For example:)

$$S_2 = |S_2 A| = -|S_2 E|$$

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0: \\ X_A + S_1 A + S_2 A \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ X_A + S_1 + S_2 \cdot \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= 0: \\ Y_A + S_2 A \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ Y_A + S_2 \cdot \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла B та стержнів 1, 3, 4 (рис. 5.21).

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint B and rods 1, 3, 4 (fig. 5.21)).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

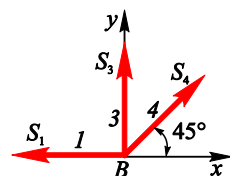


Рис 5.21. Розрахункова схема для вузла B

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ -S_1 B + S_4 B \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ -S_1 + S_4 \cdot \cos(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0: \\ S_3 B + S_4 B \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ S_3 + S_4 \cdot \sin(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла C та стержнів 10, 11, 12 (рис. 5.22).

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint C and rods 10, 11, 12 (fig. 5.22)).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ -S_{10} C \cdot \cos(\alpha) + S_{12} C &= 0 \\ -S_{10} \cdot \cos(\alpha) + S_{12} &= 0\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

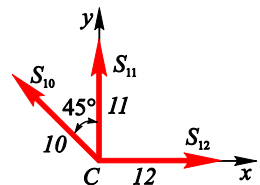


Рис 5.22. Розрахункова схема для вузла C

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0 : \\ S_{10}C \cdot \sin(\alpha) + S_{11}C &= 0 \\ S_{10} \cdot \sin(\alpha) + S_{11} &= 0\end{aligned}$$

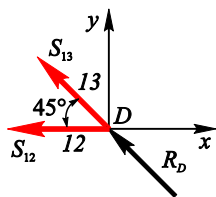


Рис 5.23. Розрахункова схема для вузла D

Наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла D та стержнів 12, 13 (рис.5.23).

(First give the design scheme for the substructure, which consists of a joint D and rods 12, 13 (fig.5.23)).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 : \\ -S_{12}D - RD \cdot \cos(\alpha) - S_{13}D \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ -S_{12} - RD \cdot \cos(\alpha) - S_{13} \cdot \cos(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0 : \\ RD \cdot \sin(\alpha) + S_{13}D \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ RD \cdot \sin(\alpha) + S_{13}D \cdot \sin(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла E та стержнів 2, 3, 5, 6 (рис 5.24).

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint E and rods 2, 3, 5, 6 (fig. 5.24)).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

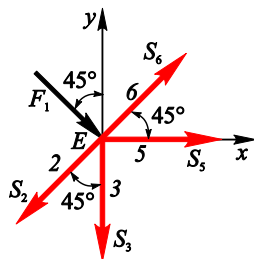


Рис 5.24. Розрахункова схема для вузла E

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_5 E + S_6 E \cdot \cos(\alpha) + F_1 \cdot \cos(\alpha) - S_2 E \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ S_5 + S_6 \cdot \cos(\alpha) - S_2 \cdot \cos(\alpha) &= -F_1 \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0: \\ -S_3 E + S_6 E \cdot \sin(\alpha) - F_1 \cdot \sin(\alpha) - S_2 E \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ -S_3 E + S_6 E \cdot \sin(\alpha) - S_2 E \cdot \sin(\alpha) &= F_1 \cdot \sin(\alpha)\end{aligned}$$

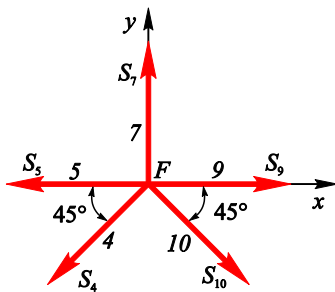


Рис 5.25. Розрахункова схема для вузла F

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла F та стержнів 4, 5, 7, 9, 10 (рис.5.25).

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint F and rods 4, 5, 7, 9, 10 (fig.5.25)).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне ска-

лярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_{10} F \cdot \cos(\alpha) + S_9 F - S_5 F - S_4 F \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ S_{10} \cdot \cos(\alpha) + S_9 - S_5 - S_4 \cdot \cos(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0 : \\ -S_{10}F \cdot \sin(\alpha) + S_7F - S_4F \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ -S_{10} \cdot \sin(\alpha) + S_7 - S_4 \cdot \sin(\alpha) &= 0\end{aligned}$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла G та стержнів 8, 9, 11, 13 (рис.5.26).

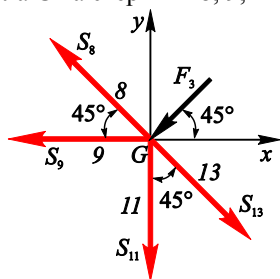


Рис 5.26. Розрахункова схема для вузла G

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint G and rods 8, 9, 11, 13 (fig.5.26)).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_{13}G \cdot \cos(\alpha) - F3 \cdot \cos(\gamma) - S_8G \cdot \cos(\alpha) - S_9G &= 0 \\ S_{13} \cdot \cos(\alpha) - S_8 \cdot \cos(\alpha) - S_9 &= F3 \cdot \cos(\gamma)\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0 : \\ -S_{13}G \cdot \sin(\alpha) - F3 \cdot \sin(\gamma) + S_8G \cdot \sin(\alpha) - S_{11}G &= 0 \\ -S_{13} \cdot \sin(\alpha) + S_8 \cdot \sin(\alpha) - S_{11} &= F3 \cdot \sin(\gamma)\end{aligned}$$

Далі наведемо розрахункову схему для підсистеми, що складеться з вузла I та стержнів 6, 7, 8 (рис. 5.27).

(Then give the design scheme for the substructure, which consists of a joint I and rods 6, 7, 8 (fig. 5.27)).

Наведемо рівняння рівноваги для даної підсистеми.

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure).

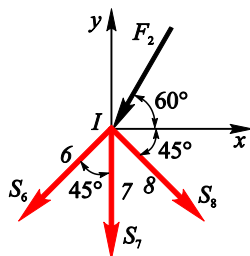


Рис 5.27. Розрахункова схема для вузла I

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0: \\ S_8 I \cdot \cos(\alpha) - F_2 \cdot \cos(\beta) - S_6 I \cdot \cos(\alpha) &= 0 \\ S_8 \cdot \cos(\alpha) - S_6 \cdot \cos(\alpha) &= F_2 \cdot \cos(\beta)\end{aligned}$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0: \\ -S_8 I \cdot \sin(\alpha) - F_2 \cdot \sin(\beta) - S_7 I - S_6 I \cdot \sin(\alpha) &= 0 \\ -S_8 \cdot \sin(\alpha) - S_7 - S_6 \cdot \sin(\alpha) &= F_2 \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.

(Write down the system of equations used for the construction equilibrium description)

$$\begin{aligned}
& S_1+S_2 \cdot \cos (\phi)+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+0 . Y_4+0 . R D=0 \\
& -0 . S_1+S_2 \cdot \sin (\phi)+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=0 \\
& -S_1+0 . S_2+0 . S_3+S_4 \cdot \cos (\phi)+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+0 . Y_4+0 . R D=0 \\
& 0 . S_1+0 . S_2+S_3+S_4 \cdot \sin (\phi)+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=0 \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=0 \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+S_10 \cdot \sin (\phi)+S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=0 \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+S_10 \cdot \sin (\phi)+S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=0 \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+S_{11}+0 . S_{12}-S_{13} \cdot \cos (\phi)+0 . X_4+Y_4 \cdot R D \cos (\phi)=0 \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+S_{13} \cdot \sin (\phi)+0 . X_4+Y_4 \cdot R D \sin (\phi)=0 \\
& 0 . S_1-S_2 \cdot \cos (\phi)+0 . S_3+0 . S_4+S_5+S_6 \cdot \cos (\phi)+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=-F_1 \cdot \cos (\phi) \\
& 0 . S_1-S_2 \cdot \sin (\phi)-S_3+0 . S_4+S_5+S_6 \cdot \sin (\phi)+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=-F_1 \cdot \sin (\phi) \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3-S_4 \cdot \cos (\phi)-S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+S_9+S_{10} \cdot \cos (\phi)+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=0 \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3-S_4 \cdot \sin (\phi)+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+0 . S_8+0 . S_9-S_{10} \cdot \sin (\phi)+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=0 \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7-S_8 \cdot \cos (\phi)-S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+S_{13} \cdot \cos (\phi)+0 . X_4+Y_4+0 . R D=-F_3 \cdot \cos (\phi) \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5+0 . S_6+0 . S_7+S_8 \cdot \sin (\phi)+0 . S_9+0 . S_{10}-S_{11}+0 . S_{12}-S_{13} \cdot \sin (\phi)+0 . X_4+Y_4+0 . R D=-F_3 \cdot \sin (\phi) \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5-S_6 \cdot \cos (\phi)+0 . S_7+S_8 \cdot \cos (\phi)+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=F_2 \cdot \cos (\phi) \\
& 0 . S_1+0 . S_2+0 . S_3+0 . S_4+0 . S_5-S_6 \cdot \sin (\phi)-S_7-S_8 \cdot \sin (\phi)+0 . S_9+0 . S_{10}+0 . S_{11}+0 . S_{12}+0 . S_{13}+X_4+Y_4+0 . R D=F_2 \cdot \sin (\phi)
\end{aligned}$$

Використовуємо матричний метод вирішення системи рівнянь, що отримано.

(Use the matrix method for sollution).

Формуємо матрицю коефіцієнтів – C та вектор-столбець правих частин – D . При формуванні матриці C перший стовбець складатимуть коефіцієнти при реакції S_1 , другий – $S_2, \dots$, чотирнадцятий – при реакції XA , п'ятнадцятий – YA , шістнадцятий – RD .

(Form the ratio matrix C and the matrix of results D . In the structure of matrix C the first column will take into consideration the ratios belonging to reaction S_1 , the second column – to the reaction $S_2, \dots$, the fourteenth column – to the reaction XA , the fifteenth column – to the YA , the sixteenth column – to the RD)

$$C := \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & 1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & -1 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & -1 & 0 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & -1 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

СТАТИКА

$$D := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F1 \cdot \cos(45^\circ) \\ F1 \cdot \sin(45^\circ) \\ 0 \\ 0 \\ F3 \cdot \cos(\gamma) \\ F3 \cdot \sin(\gamma) \\ F2 \cdot \cos(\beta) \\ F2 \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції ***Isolve***.

(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the ***Isolve*** function usage)

$$Reaction := Isolve(C, D) =$$

	0
0	9.192·10 ³
1	-2.599·10 ⁴
2	-9.192·10 ³
3	1.3·10 ⁴
4	-1.626·10 ⁴
5	-2.099·10 ⁴
6	9.192·10 ³
7	-1.038·10 ⁴
8	-7.071·10 ³
9	0
10	-4.547·10 ⁻¹³
11	0
12	-1.538·10 ⁴
13	9.185·10 ³
14	1.838·10 ⁴
15	1.538·10 ⁴

N

Значення реакцій опор
(The support reactions value)

$$\begin{aligned}S_1 &:= \text{Reaction}_{0,0} = 9.192 \times 10^3 \text{ N} \\S_2 &:= \text{Reaction}_{1,0} = -2.599 \times 10^4 \text{ N} \\S_3 &:= \text{Reaction}_{2,0} = -9.192 \times 10^3 \text{ N} \\S_4 &:= \text{Reaction}_{3,0} = 1.3 \times 10^4 \text{ N} \\S_5 &:= \text{Reaction}_{4,0} = -1.626 \times 10^4 \text{ N} \\S_6 &:= \text{Reaction}_{5,0} = -2.099 \times 10^4 \text{ N} \\S_7 &:= \text{Reaction}_{6,0} = 9.192 \times 10^3 \text{ N} \\S_8 &:= \text{Reaction}_{7,0} = -1.038 \times 10^4 \text{ N} \\S_9 &:= \text{Reaction}_{8,0} = -7.071 \times 10^3 \text{ N} \\S_{10} &:= \text{Reaction}_{9,0} = 0 \text{ N} \\S_{11} &:= \text{Reaction}_{10,0} = -4.547 \times 10^{-13} \text{ N} \\S_{12} &:= \text{Reaction}_{11,0} = 0 \text{ N} \\S_{13} &:= \text{Reaction}_{12,0} = -1.538 \times 10^4 \text{ N} \\XA &:= \text{Reaction}_{13,0} = 9.185 \times 10^3 \text{ N} \\YA &:= \text{Reaction}_{14,0} = 1.838 \times 10^4 \text{ N} \\RD &:= \text{Reaction}_{15,0} = 1.538 \times 10^4 \text{ N}\end{aligned}$$

Перевірка результатів рішення
(Check the results)

Для перевірки результатів спроектуємо усі зовнішні сили та реакції в опорах конструкції на вісі X і Y , а також запишемо рівняння моментів відносно точки A .

(For checking the results we should project all active forces and reactions on the X and Y axes, and satisfy the equation of moments about the point A)

$$\sum X_i = 0:$$

$$XA + F1 \cdot \cos(\alpha) - F2 \cdot \cos(\beta) - F3 \cdot \cos(\gamma) - RD \cdot \cos(\alpha) = 1.819 \times 10^{-12} \text{ N}$$

$$\sum Y_i = 0:$$

$$YA - F1 \cdot \sin(\alpha) - F2 \cdot \sin(\beta) - F3 \cdot \sin(\gamma) + RD \cdot \sin(\alpha) = -5.457 \times 10^{-12} \text{ N}$$

$$\sum MA = 0:$$

$$-F1 \cdot \cos(\alpha) \cdot a - F1 \cdot \sin(\alpha) \cdot a + F2 \cdot \cos(\beta) \cdot 2 \cdot a - F2 \cdot \sin(\beta) \cdot 2 \cdot a + \\ + F3 \cdot \cos(\gamma) \cdot a - F3 \cdot \sin(\gamma) \cdot 3 \cdot a + RD \cdot \sin(\alpha) \cdot 4 \cdot a = -2.91 \times 10^{-11} \text{ J}$$

Висновок: рішення вірне
(Conclusion: the solution is correct)

Визначимо розтягнуті та стиснуті стержні. Якщо сила S в стержні додатна, то стержень вважається розтягнутим. Якщо від'ємна – стержень стиснутий. Якщо сила S в стержні дорівнює нулю, то він – недеформований.

Тоді стержні №1, 4 та 7 – розтягнуті; стержні № 2, 3, 5, 6, 8, 9 та 13 – стиснуті; стержні № 10, 11 та 12 – недеформовані.

(Find the stretched and stressed rods. If the reaction S is positive, then the rod is stretched. Or if the reaction is negative – the rod is compressed.)

So rods № 1, 4 and 7 are stretched; rods № 2, 3, 5, 6, 8, 9 and 13 are compressed; rods № 10, 11 and 12 are undeformed.)

Побудуємо стовпчасту діаграму, на якій наочно позначено величину та знак сили S в кожному стержні (рис. 5.28). По осі абсцис відкладаємо діапазон $i:=0...12$, який дорівнює кількості визначених сил S . По осі ординат

задаємо значення функції $\text{Reaction}_{i,0}$

(Build the bar chart, on which the value and sign of the force S in each rod is shown (fig. 5.28). By the X axes the value of ratio $i:=0....12$ is given. The value of this ratio is equal to the quantity of found forces S . By the Y axes the value of function $\text{Reaction}_{i,0}$ is given)

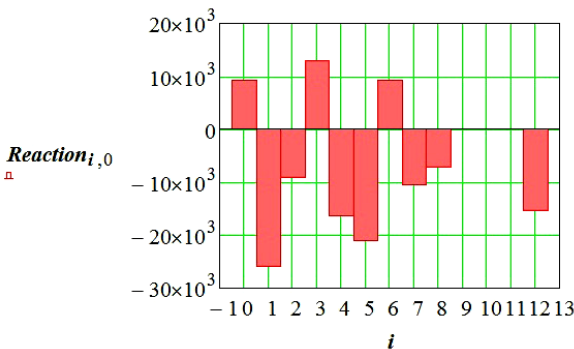


Рис 5.28. Зусилля в стержнях плоскої ферми

$$i := 0.....12$$

Завдання С-3. Рівновага зчленованої системи тіл

Знайти реакції опор і тиск в проміжних шарнірах заданої плоскої складеної конструкції (рис. 5.29). Зовнішні сили P задано у кН, моменти – M у кН*м, рівномірно розподілене навантаження – q – у кН/м, а розміри конструкції – в метрах.

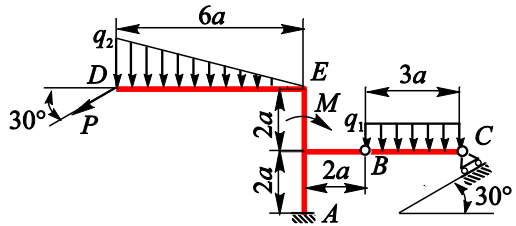


Рис 5.29. Плоска складена конструкція

(Find the unknown reactions attached to the supports of given construction. Also find the pressure in the intermediate hinge (fig. 5/29). There are several dimensions used: external forces P are measured in kN; moments – in kN*m; distributed forces – in kN/m; all sizes of construction – in metres).

Вихідні данні
(Put the incoming data)

$$\begin{aligned}
 P &:= 1.5 \text{ kN} & a &:= 1 \text{ m} \\
 q1 &:= 0.2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & \alpha &:= 30^\circ \\
 q2 &:= 0.2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & \beta &:= 30^\circ \\
 M &:= 4 \text{ kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Замінімо розподілене по закону прямокутника навантаження $q1$ еквівалентною зосередженою силою $Q1$.

(Change the distributed force $q1$ by the equivalent concentrated force $Q1$)

$$Q1 := \int_{x_1}^{x_2} q1(x) dx$$

Довжина прольоту, до якого прикладено розподілене навантаження $q1$ дорівнює $3a$. Тоді:

(The length of the distributed force $q1$ frame application is equal to $3a$. Then:)

СТАТИКА

$$\begin{aligned}x_1 &:= 2 \cdot a & x_4 &:= 5 \cdot a \\q_1(x) &:= q_1 \\Q_1 &:= \int_{x_1}^{x_2} q_1(x) dx = 600 N\end{aligned}$$

Зосереджену силу Q_1 прикладено у центрі тяжіння епюри навантаження q_1 . Визначимо центр тяжіння епюри навантаження.

(The concentrated force Q_1 is applied at the distributed load q_1 diagram centre of gravity. Let's find this centre of gravity location)

$$x_{C1} := \frac{\int_{x_1}^{x_2} q_1(x) \cdot x dx}{Q_1} = 3.5 m$$

Замінімо розподілене по закону трикутника навантаження q_2 еквівалентною зосередженою силою Q_2 .

(Change the distributed force q_2 by the equivalent concentrated force Q_2)

$$Q_2 := \int_{x_3}^{x_4} q_2(x) dx$$

Довжина прольоту, до якого прикладено розподілене навантаження q_2 дорівнює $6a$. Тоді:

(The length of the distributed force q_2 frame application is equal to $6a$. Then:)

$$\begin{aligned}x_3 &:= 0 & x_4 &:= -6 \cdot a \\q_2(x) &:= q_2 \cdot \frac{x}{6 \cdot a} \\Q_2 &:= \int_{x_3}^{x_4} q_2(x) dx = 600 N\end{aligned}$$

Зосереджену силу Q_2 прикладено у центрі тяжіння епюри навантаження q_2 . Визначимо центр тяжіння епюри навантаження.

(The concentrated force Q_2 is applied at the distributed load q_2 diagram centre of gravity. Let's find this centre of gravity location)

$$x_{C2} := \frac{\int_{x_3}^{x_4} q_2(x) \cdot x dx}{Q_2} = -4 m$$

Розрахункова схема (Design scheme)

Розчленовуємо конструкцію по внутрішньому шарніру B (рис. 5.30), приклавши до кожного з двох отриманих тіл реакції внутрішніх зв'язків. Вони рівні за абсолютною величиною та протилежні за напрямком.

(Separate the construction into two parts by the internal hinge B (fig. 5.30).

For each separate subconstructions we should attach reactions. These reactions are equal by absolute value, but opposite by their direction).

Розглянемо підконструкцію $DEAB$. Наведемо рівняння рівноваги системи (рис. 5.31).

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure $DEAB$ (fig.5.31)).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь x . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the x axes. We will receive the next scalar equation)

$$\sum X_i = 0:$$

$$-P \cdot \cos(\alpha) + X_A - X_B = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\sum Y_i = 0:$$

$$-P \cdot \sin(\alpha) - Q_2 + Y_A + Y_B = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно точки A .

(Satisfy the equation of moments about the point A).

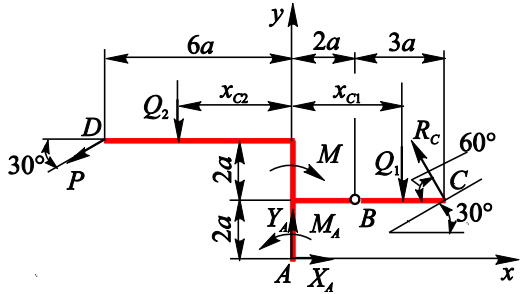


Рис 5.30. Розрахункова схема конструкції

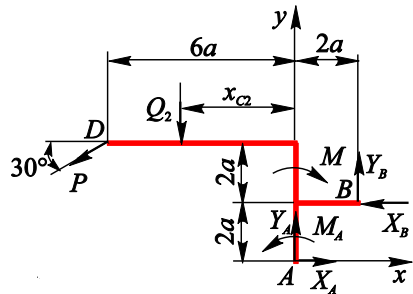


Рис 5.31. Підконструкція $DEAB$

$$\sum M_A = 0 :$$

$$P \cdot \cos(\alpha) \cdot 4 \cdot a + P \cdot \sin(\alpha) \cdot 6 \cdot a + Q_2 \cdot (6 \cdot a - |x_{C2}|) - M + MA + YB \cdot 2 \cdot a + XB \cdot 2 \cdot a = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

(Change the equation thereby all its elements will have dimension used for forces)

$$P \cdot \cos(\alpha) \cdot 4 + P \cdot \sin(\alpha) \cdot 6 + Q_2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} - \frac{M}{a} + \frac{MA}{a} + YB \cdot 2 + XB \cdot 2 = 0$$

Введемо у рівняння нову змінну $M1$, яка дорівнюватиме MA/a .

(Put in the equation a new variable $M1$. It is equal to MA/a)

$$M1 := \frac{MA}{a}$$

Тоді рівняння моментів матиме наступний вигляд.

(Then the equation of moments can be changed next way)

$$P \cdot \cos(\alpha) \cdot 4 + P \cdot \sin(\alpha) \cdot 6 + Q_2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} - \frac{M}{a} + M1 + YB \cdot 2 + XB \cdot a = 0$$

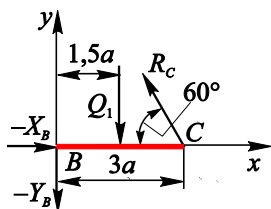


Рис 5.32. Підконструкція BC

Наведемо рівняння рівноваги системи. Розглянемо підконструкцію BC (рис.5.32).

(Write down the equations of equilibrium for a two-dimensional substructure BC (fig.5.32)).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь x . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the x axes. We will receive the next scalar equation)

$$\sum X_i = 0:$$

$$XB - RC \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь y . Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0 : \\ -YB - Q1 + RC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) &= 0\end{aligned}$$

Запишемо рівняння моментів відносно точки B.
(Satisfy the equation of moments about the point B)

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 : \\ -Q1 \cdot x_{C1} + RC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 \cdot a &= 0\end{aligned}$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

(Change the equation thereby all its elements will have dimension used for forces)

$$-Q1 \cdot \frac{x_{C1}}{a} + RC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 = 0$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.

(Write the system of equations used for the construction equilibrium description)

$$\begin{aligned}XA - XB &= P \cdot \cos(\alpha) \\ YA + YB &= P \cdot \sin(\alpha) + Q2 \\ M1 + YB \cdot 2 + XB \cdot 2 &= -P \cdot \cos(\alpha) \cdot 4 - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 6 - Q2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} + \frac{M}{a} \\ XB - RC \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) &= 0 \\ -YB + RC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) &= Q1 \\ RC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 &= Q1 \cdot \frac{x_{C1}}{a}\end{aligned}$$

Використовуємо матричний метод вирішення системи рівнянь, що отримано.

(Use the matrix method for sollution)

СТАТИКА

$$\begin{aligned}
 &XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot M1 - XB + 0 \cdot YB + 0 \cdot RC = P \cdot \cos(\alpha) \\
 &0 \cdot XA + YA + 0 \cdot M1 + 0 \cdot XB + YB + 0 \cdot RC = P \cdot \sin(\alpha) + Q2 \\
 &0 \cdot XA + 0 \cdot YA + M1 + XB \cdot 2 + YB \cdot 2 + 0 \cdot RC = -P \cdot \cos(\alpha) \cdot 4 - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 6 - \\
 &-Q2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} + \frac{M}{a} \\
 &0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot M1 + XB + 0 \cdot YB - RC \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0 \\
 &0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot M1 + 0 \cdot XB - YB + RC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = Q1 \\
 &0 \cdot XA + YA + 0 \cdot M1 + 0 \cdot XB + 0 \cdot YB + RC \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 = Q1 \cdot \frac{x_{C1}}{a}
 \end{aligned}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів – A та вектор-столбець правих частин – B .

(Form the ratio matrix A and the matrix of results B)

$$\begin{aligned}
 \underline{A} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.598 \end{pmatrix} \\
 B &:= \begin{pmatrix} P \cdot \cos(\alpha) \\ P \cdot \sin(\alpha) + Q2 \\ -P \cdot \cos(\alpha) \cdot 4 - P \cdot \sin(\alpha) \cdot 6 - Q2 \cdot \frac{(6 \cdot a - |x_{C2}|)}{a} + \frac{M}{a} \\ 0 \\ Q1 \\ Q1 \cdot \frac{x_{C1}}{a} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Solve**.

(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the **Solve** function usage)

$$\text{Reaction} := \text{Solve}(A, B) = \begin{pmatrix} 1.126 \times 10^3 \\ 1.65 \times 10^3 \\ -7.81 \times 10^3 \\ -173.205 \\ -300 \\ 346.41 \end{pmatrix} N$$

Значення реакцій опор
(The support reactions value)

$$XA := \text{Reaction}_{0,0} = 1.126 \times 10^3 N$$

$$YA := \text{Reaction}_{1,0} = 1.65 \times 10^3 N$$

$$M1 := \text{Reaction}_{2,0} = -7.81 \times 10^3 N$$

$$XB := \text{Reaction}_{3,0} = -173.205 N$$

$$YB := \text{Reaction}_{4,0} = -300 N$$

$$RC := \text{Reaction}_{5,0} = 346.41 N$$

$$MA := M1 \cdot a = -7.15 \times 10^3 J$$

Перевірка результатів рішення
(Check the results)

Для перевірки результатів рішення побудуємо силові багатокутники для обох підконструкцій: *DEAB* (рис. 5.33) та *BC* (рис. 5.34).

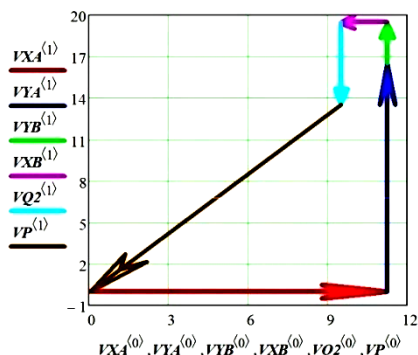


Рис. 5.33. Силовий багатокутник плоскої підконструкції *DEAB*

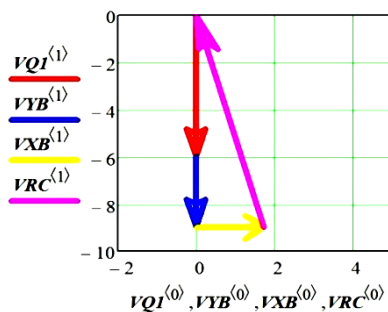


Рис. 5.34. Силовий багатокутник плоскої підконструкції *BC*

Особливості побудови векторів сил в системі Mathcad наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина I. Статика. с. 102 – 111).

(To check the obtained results let's build the system's resultant in a way of polygon for two subconstructions: DEAB (fig. 5.33) and BC (fig. 5.34)).

Силіві багатокутники для обох підконструкцій замкнені, отже їх головні вектори довільних плоских систем сил, прикладених до твердо тільних підконструкцій, дорівнюють нулю.

(The polygons are closed, then the system's resultant for two subconstructions are equal to zero).

Знайдемо величини моментів відносно точки D , усіх активних сил та реакцій для під конструкції $DEAB$.

(Find the value of all active forces and reactions moments for the subconstruction DEAB)

$$MQ2 := -Q2 \cdot 2 \cdot a = -1.2 \times 10^3 \text{ J}$$

$$MYA := YA \cdot 6 \cdot a = 9.9 \times 10^3 \text{ J}$$

$$MXA := XA \cdot 4 \cdot a = 4.503 \times 10^3 \text{ J}$$

$$MXB := -XB \cdot 2 \cdot a = 346.41 \text{ J}$$

$$M1YB := YB \cdot 8 \cdot a = -2.4 \times 10^3 \text{ J}$$

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил та пар сил, що діють на задану твердотільну конструкцію, та моменти реакцій її опор (рис. 5.35). По осі абсцис відкладаємо відстань від точки D до точки прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

(Set the bar chart, on which the value and sign of the active forces, couple of forces and reactions moments are shown (fig. 5.35). By the X axes the distance between the point D and the forces application point is given. The value of this ratio is equal to the quantity of found moments. By the Y axes the value of moments are given).

Знайдемо величини моментів відносно точки C , усіх активних сил та реакцій для підконструкції BC .

(Find the value of all active forces and reactions moments for the subconstruction BC)

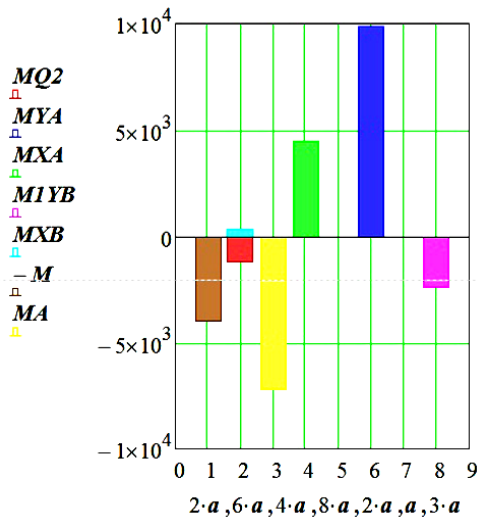


Рис 5.35. Моменти сил та реакцій опор плоскої підконструкції DEAB відносно точки D

$$MQ1 := Q1 \cdot 1.5 \cdot a = 900J$$

$$M2YB := YB \cdot 3 \cdot a = -900J$$

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил, що діють на задану плоску складену конструкцію, та моменти реакцій її опор (рис. 5.36). По осі абсцис відкладаємо відстань від точки C до точки прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

(Set the bar chart, on which the value and sign of the active forces, couple of forces and reactions moments are shown (fig. 5.36). By the x axes

the distance between the point C and the forces application point is given. The value of this ratio is equal to the quantity of found moments. By the y axes the value of moments are given).

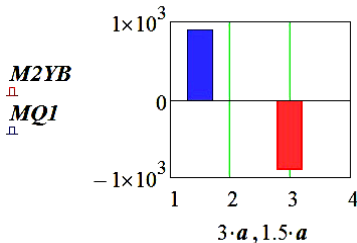


Рис 5.36. Моменти сил та реакцій опор плоскої підконструкції BC відносно точки C

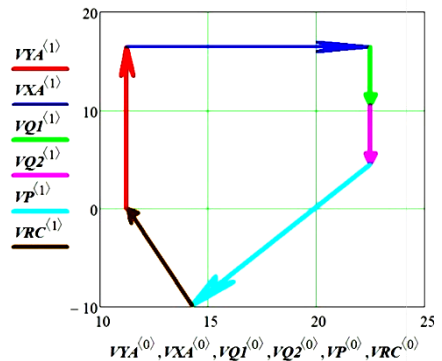


Рис. 5.37. Загальний силовий багатокутник для всієї плоскої конструкції DEAB

Також побудуємо загальний силовий багатокутник для усієї плоскої коснструкції DEABC (рис. 5.37).

(To check the obtained results let's build the whole system's DEABC resultant in a way of polygon (fig. 5.37).

СТАТИКА

Силовий багатокутник замкнений, отже головний вектор плоскої довільної системи сил, прикладеної до плоскої складеної конструкції $DEABC$, дорівнює нулю.

(The polygon is closed, then the system's $DEAABC$ resultant is equal to zero).

Побудуємо діаграму, на якій наочно позначено величину та знак моментів активних сил та пар сил, що діють на задану плоску складену конструкцію $DEABC$, та моменти реакцій її опор (рис. 5.38). По осі абсцис відкладаємо відстань від початку координат до точки прикладення сил та реакцій. По осі ординат задаємо величини моментів сил та реакцій.

(Set the bar chart, on which the value and sign of the active forces, couple of forces and reactions moments are shown (fig. 5.38). By the x axes the distance between the starting point of the coordinate system and the forces application point is given. The value of this ratio is equal to the quantity of found moments. By the y axes the value of moments are given).

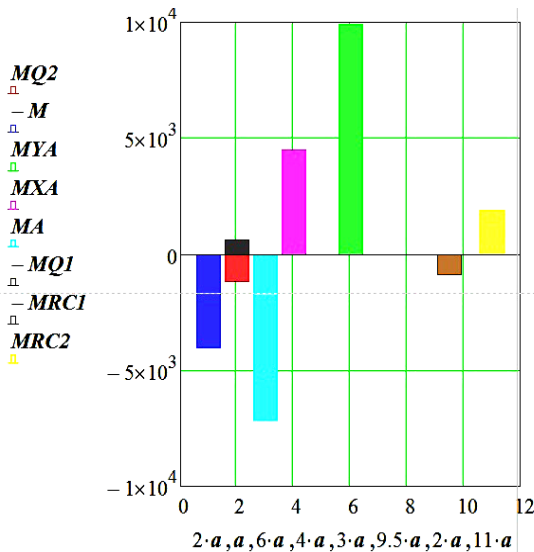


Рис 5.38. Моменти сил та реакцій опор плоскої конструкції відносно точки D

Завдання С-4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду

Привести задану просторову систему довільно розташованих сил до простішого вигляду (рис. 5.39). Зовнішні сили P задано у кН, моменти – M у кН·м, а відстані між точками прикладення сил – в метрах.

(Reduce the space system of forces to the equivalent force-couple system. Find the resultant and the resultant couple of the system (fig. 5.39). There are several dimensions used: external forces P are measured in kN; moments – in N·m; all distances between the forces application points – in metres).

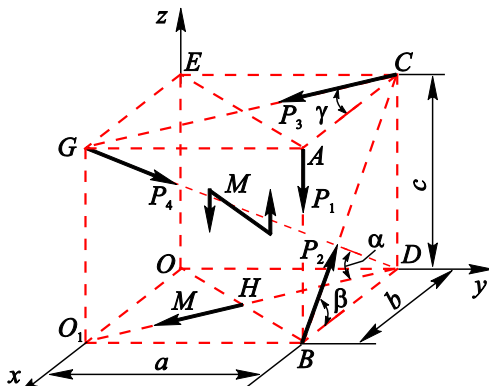


Рис 5.39. Довільна система сил, розташована у просторі з центром O

Вихідні данні (Put the incoming data)

$$P1 := 100 \text{ kN}$$

$$P2 := 50 \text{ kN}$$

$$P3 := 80 \text{ kN}$$

$$P4 := 10 \text{ kN}$$

$$a := 0.3 \text{ m}$$

$$b := 0.4 \text{ m}$$

$$c := 0.5 \text{ m}$$

$$M := 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Визначимо кути нахилу діагоналей граней паралелепіпеда до координатної вісі x . Кут β – це кут нахилу діагоналі бічної грані до осі x . Кут γ – це кут нахилу діагоналі основи паралелепіпеда до осі x .

(Find the tilt angles between the parallelepipedal face diagonals and the x axis. β – is an angle between the parallelepipedal side face diagonal and the x axis. γ – is an angle between the parallelepipedal base diagonal and the x axis)

$$\beta := a \tan \left(\frac{c}{b} \right) = 0.896$$

$$\gamma := a \tan \left(\frac{b}{a} \right) = 0.927$$

$$\alpha := 45^0$$

СТАТИКА

Визначимо проекції векторів сил $P1$, $P2$, $P3$ та $P4$ на вісі x , y , z системи координат.

(Find the projections of forces $P1$, $P2$, $P3$ and $P4$ on the x , y , z coordinate axis).

Проекції вектора сили $P1$ на вісі x , y , z .

(Projections of the force $P1$ on the x , y , z coordinate axis)

$$P1X := 0 \text{ kN}$$

$$P1Y := 0 \text{ kN}$$

$$P1Z := -P1 = -1 \times 10^5 \text{ N}$$

Позначимо вектор сили $P1$ як $F1$. Він матиме наступний вигляд.

(Mark the vector of force $P1$ as $F1$. Its structure is given)

$$F1 := \begin{pmatrix} P1X \\ P1Y \\ P1Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \times 10^5 \end{pmatrix} \text{ N}$$

$$|F1| := 1 \times 10^5 \text{ N}$$

Проекції вектора сили $P2$ на вісі x , y , z .

(Projections of the force $P2$ on the x , y , z coordinate axis)

$$P2X := -P2 \cdot \cos(\beta) = -3.123 \times 10^4 \text{ N}$$

$$P2Y := 0 \text{ kN}$$

$$P2Z := P2 \times \sin(\beta) = 3.904 \times 10^4 \text{ N}$$

Позначимо вектор сили $P2$ як $F2$. Він матиме наступний вигляд.

(Mark the vector of force $P2$ as $F2$. Its structure is given)

$$F2 := \begin{pmatrix} P2X \\ P2Y \\ P2Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.123 \times 10^4 \\ 0 \\ 3.904 \times 10^4 \end{pmatrix} \text{ N}$$

$$|F2| := 5 \times 10^4 \text{ N}$$

Проекції вектора сили $P3$ на вісі x , y , z .

(Projections of the force $P3$ on the x , y , z coordinate axis)

$$P3X := P3 \cdot \cos(\gamma) = 6.4 \times 10^4 \text{ N}$$

$$P3Y := -P3 \cdot \sin(\gamma) = -4.8 \times 10^4 \text{ N}$$

$$P3Z := 0$$

Позначимо вектор сили $P3$ як $F3$. Він матиме наступний вигляд.
(Mark the vector of force $P3$ as $F3$. Its structure is given)

$$F3 := \begin{pmatrix} P3X \\ P3Y \\ P3Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.4 \times 10^4 \\ -4.8 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

$$|F3| := 8 \times 10^4 N$$

Проекції вектора сили $P4$ на вісі x, y, z .
(Projections of the force $P4$ on the x, y, z coordinate axis)

$$P4X := -P4 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) = -5.657 \times 10^3 N$$

$$P4Y := P4 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) = 4.243 \times 10^3 N$$

$$P4Z := -P4 \cdot \sin(\alpha) = -7.071 \times 10^3 N$$

Позначимо вектор сили $P4$ як $F4$. Він матиме наступний вигляд.
(Mark the vector of force $P4$ as $F4$. Its structure is given)

$$F4 := \begin{pmatrix} P4X \\ P4Y \\ P4Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.657 \times 10^3 \\ 4.243 \times 10^3 \\ -7.071 \times 10^3 \end{pmatrix} N$$

$$|F4| := 1 \times 10^4 N$$

Визначимо головний вектор посторової системи сил R . задамо його як суму векторів $F1.....F4$.
(Find the system resultant R . It could be set as a sum of vectors $F1....F4$)

$$R := F1 + F2 + F3 + F4$$

$$R = \begin{pmatrix} 2.711 \times 10^4 \\ -4.376 \times 10^4 \\ -6.803 \times 10^4 \end{pmatrix} N$$

$$|R| := 8.531 \times 10^4 N$$

$$RX := R_0 = 2.711 \times 10^4 N$$

$$RY := R_1 = -4.376 \times 10^4 N$$

$$RZ := R_2 = -6.803 \times 10^4 N$$

Визначимо кути нахилу головного вектора системи R до координатних осей x, y, z . Позначимо їх ϕ, ψ та ζ відповідно.

(Find the tilt angles between the system's resultant R and the coordinate axis. Mark them as φ , ψ and ξ)

$$\varphi := a \cos \left(\frac{RX}{|R|} \right) = 1.247$$

$$\psi := a \cos \left(\frac{RY}{|R|} \right) = 2.109$$

$$\xi := a \cos \left(\frac{RZ}{|R|} \right) = 2.494$$

Обчислимо моменти сил $P1...P4$ та пари сил M відносно центру системи O .

(Find the moments of forces $P1...P4$ and the couple forces M about the system's center O).

Спочатку задамо координати точок прикладення сил $P1...P4$ відносно центру системи O в якості векторів.

(First specify the forces $P1...P4$ points of application coordinates as a vector according to the system's center O).

Для сили $P1$ точкою прикладення є точка A ; для сили $P2$ – точка B ; для сили $P3$ – точка C ; для сили $P4$ – точка G .

(For the force $P1$ the application point is the point A ; for the force $P2$ – point B ; for the force $P3$ – point C ; for the force $P3$ – point G)

$$A := \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ c \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Для обчислення моменту $M1$ сили $P1$ відносно центру системи O визначимо векторний добуток векторів $F1$ та A .

(To find the moment $M1$ of force $P1$ about the system's center O we need to calculate the vector product of vectors $F1$ and A)

$$M1 := F1 \times A = \begin{pmatrix} 3 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} J$$

$$|M1| = 5 \times 10^4 J$$

Для обчислення моменту $M2$ сили $P2$ відносно центру системи O визначимо векторний добуток векторів $F2$ та B .

(To find the moment M_2 of force P_2 about the system's center O we need to calculate the vector product of vectors F_2 and B)

$$\mathbf{M}_2 := \mathbf{F}_2 \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1.171 \times 10^4 \\ 1.562 \times 10^4 \\ -9.37 \times 10^3 \end{pmatrix} \mathbf{J}$$

$$|\mathbf{M}_2| = 2.165 \times 10^4 \mathbf{J}$$

Для обчислення моменту M_3 сили P_3 відносно центру системи O визначимо векторний добуток векторів F_3 та C .

(To find the moment M_3 of force P_3 about the system's center O we need to calculate the vector product of vectors F_3 and C)

$$\mathbf{M}_3 := \mathbf{F}_3 \times \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2.4 \times 10^4 \\ -3.2 \times 10^4 \\ 1.92 \times 10^4 \end{pmatrix} \mathbf{J}$$

$$|\mathbf{M}_3| = 4.437 \times 10^4 \mathbf{J}$$

Для обчислення моменту M_4 сили P_4 відносно центру системи O визначимо векторний добуток векторів F_4 та G .

(To find the moment M_4 of force P_4 about the system's center O we need to calculate the vector product of vectors F_4 and G)

$$\mathbf{M}_4 := \mathbf{F}_4 \times \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2.121 \times 10^3 \\ 4.547 \times 10^{-13} \\ 1.697 \times 10^3 \end{pmatrix} \mathbf{J}$$

$$|\mathbf{M}_4| = 2.717 \times 10^3 \mathbf{J}$$

Визначимо моменти пари сил M відносно осей x , y , z .

(Find the moments of the couple of forces M about the x , y , z coordinate axis)

СТАТИКА

$$MX := M \cdot \cos(\gamma) = 4 \times 10^4 \text{ J}$$

$$MY := -M \cdot \sin(\gamma) = -3 \times 10^4 \text{ J}$$

$$MZ := 0$$

$$MM = \begin{pmatrix} MX \\ MY \\ MZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 10^4 \\ -3 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ J}$$

$$|MM| := 5 \times 10^4 \text{ J}$$

Обчислимо головний момент системи MO відносно центру O . Задамо його як суму векторів $M1.....MM$.

(Find the resultant couple of the system MO about the system's center O . Set it as a sum of vectors $M1.....MM$)

$$MO := M1 + M2 + M3 + M4 + MM$$

$$MO = \begin{pmatrix} 3.641 \times 10^4 \\ -8.638 \times 10^4 \\ 8.133 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ J}$$

$$|MO| := 9.409 \times 10^4 \text{ J}$$

$$MOX := MO_0 = 3.641 \times 10^4 \text{ J}$$

$$MOY := MO_1 = -8.638 \times 10^4 \text{ J}$$

$$MOZ := MO_2 = 8.133 \times 10^3 \text{ J}$$

Визначимо кути нахилу головного момента системи MO до координатних осей x, y, z . Позначимо їх $\phi1, \psi1$ та $\xi1$ відповідно.

(Find the tilt angles between the system's resultant MO and the coordinate axis. Mark them as $\phi1, \psi1$ and $\xi1$)

$$\phi1 := a \cos \left(\frac{MOX}{|MO|} \right) = 1.173$$

$$\psi1 := a \cos \left(\frac{MOY}{|MO|} \right) = 2.734$$

$$\xi1 := a \cos \left(\frac{MOZ}{|MO|} \right) = 1.484$$

Обчислимо моменти сил $P1....P4$ та пари сил M відносно центру системи $O1$ (рис. 5.40).

(Find the moments of forces $P_1...P_4$ and the couple forces M about the system's center O_1 (fig. 5.40))

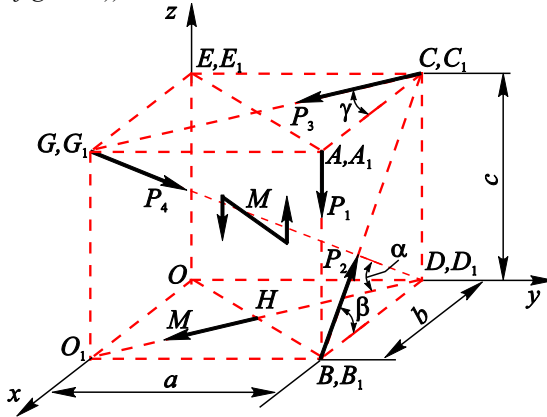


Рис 5.40. Довільна система сил, розташована у просторі з центром O_1

Задамо відстань між точками O та O_1 за допомогою вектора OO_1 .
(Set the distance between the points O and O_1 by means of vector OO_1)

$$OO_1 := \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Спочатку задамо координати точок прикладення сил $P_1...P_4$ відносно центру системи O_1 в якості векторів.

(First specify the forces $P_1...P_4$ points of application coordinates as a vector according to the system's center O_1).

Для сили P_1 точкою прикладення є точка A_1 ; для сили P_2 – точка B_1 ; для сили P_3 – точка C_1 ; для сили P_4 – точка G_1 .

(For the force P_1 the application point is the point A_1 ; for the force P_2 – point B_1 ; for the force P_3 – point C_1 ; for the force P_4 – point G_1)

$$\begin{aligned} A_1 &:= A - OO_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix} m & B_1 &:= B - OO_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix} m \\ C_1 &:= C - OO_1 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix} m & G_1 &:= G - OO_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} m \end{aligned}$$

СТАТИКА

Для обчислення моменту $m1$ сили $P1$ відносно центру системи $O1$ визначимо векторний добуток векторів $F1$ та $A1$.

(To find the moment $m1$ of force $P1$ about the system's center $O1$ we need to calculate the vector product of vectors $F1$ and $A1$)

$$m1 := F1 \times A1 = \begin{pmatrix} 3 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} J$$
$$|m1| = 3 \times 10^4 J$$

Для обчислення моменту $m2$ сили $P2$ відносно центру системи $O1$ визначимо векторний добуток векторів $F2$ та $B1$.

(To find the moment $m2$ of force $P2$ about the system's center $O1$ we need to calculate the vector product of vectors $F2$ and $B1$)

$$m2 := F2 \times B1 = \begin{pmatrix} -1.171 \times 10^4 \\ 0 \\ -9.37 \times 10^3 \end{pmatrix} J$$
$$|m2| = 1.5 \times 10^4 J$$

Для обчислення моменту $m3$ сили $P3$ відносно центру системи $O1$ визначимо векторний добуток векторів $F3$ та $C1$.

(To find the moment $m3$ of force $P3$ about the system's center $O1$ we need to calculate the vector product of vectors $F3$ and $C1$)

$$m3 := F3 \times C1 = \begin{pmatrix} -2.4 \times 10^4 \\ -3.2 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} J$$
$$|m3| = 4 \times 10^4 J$$

Для обчислення моменту $m4$ сили $P4$ відносно центру системи $O1$ визначимо векторний добуток векторів $F4$ та $G1$.

(To find the moment $m4$ of force $P4$ about the system's center $O1$ we need to calculate the vector product of vectors $F4$ and $G1$)

Рішення в системі Mathcad

$$m4 := F4 \times G1 = \begin{pmatrix} 2.121 \times 10^3 \\ 2.828 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} J$$

$$|m4| = 3.536 \times 10^3 J$$

Визначимо моменти пари сил M відносно осей x, y, z .

(Find the moments of the couple of forces M about the x, y, z coordinate axis)

$$mX := M \cdot \cos(\gamma) = 4 \times 10^4 J$$

$$mY := -M \cdot \sin(\gamma) = -3 \times 10^4 J$$

$$mZ := 0$$

$$mM = \begin{pmatrix} mX \\ mY \\ mZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 10^4 \\ -3 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} J$$

$$|mM| := 5 \times 10^4 J$$

Обчислимо головний момент системи $mO1$ відносно центру $O1$. Задамо його як суму векторів $m1.....mM$.

(Find the resultant couple of the system $mO1$ about the system's center $O1$. Set it as a sum of vectors $m1.....mM$)

$$mO1 := m1 + m2 + m3 + m4 + mM$$

$$mO1 = \begin{pmatrix} 3.641 \times 10^4 \\ -5.917 \times 10^4 \\ -9.37 \times 10^3 \end{pmatrix} J$$

$$|mO1| := 7.01 \times 10^4 J$$

$$mO1X := mO1_0 = 3.641 \times 10^4 J$$

$$mO1Y := mO1_1 = -5.917 \times 10^4 J$$

$$mO1Z := mO1_2 = -9.37 \times 10^3 J$$

Для перевірки правильності рішення скористаємося другим інваріантом для просторової системи сил.

(For checking the results of calculation let's use the second invariant for the system of forces).

Спочатку знайдемо скалярний добуток головного вектора R та головного момента системи сил MO відносно центру O .

СТАТИКА

(Firstly we should find the scalar product of resultant R and the resultant couple MO about the system center O)

$$R \cdot MO = 4.214 \times 10^9 \frac{m^3 \cdot kg^2}{s^4}$$

Потім знайдемо скалярний добуток головного вектора R та головного моменту системи сил $mO1$ відносно центру $O1$.

(Firstly we should find the scalar product of resultant R and the resultant couple $mO1$ about the system center $O1$)

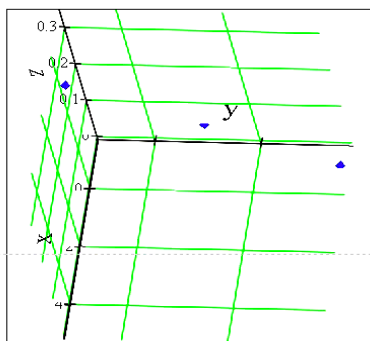
$$R \cdot mO1 = 4.214 \times 10^9 \frac{m^3 \cdot kg^2}{s^4}$$

Результати обчислень збігаються, отже завдання вирішено вірно.

(The obtained results are equal, so all calculations are right).

Приведемо дану систему просторових сил до простого вигляду. Для цього потрібно визначити векторний добуток головного вектора системи R та головного моменту системи MO . Позначимо цей векторний добуток як S .

(Reduce the given space system of forces to the equivalent force-couple system. For this we need to find the vector product of the system resultant R and resultant couple MO . Mark this vector product as S).



T

Рис 5.41. Точки перетину центральної вісі системи сил з координатними площинами

$$S := R \times MO = \begin{pmatrix} -6.232 \times 10^9 \\ -2.697 \times 10^8 \\ -7.486 \times 10^8 \end{pmatrix} \frac{m^3 \cdot kg^2}{s^4}$$

$$|S| := 6.832 \times 10^9 \frac{m^3 \cdot kg^2}{s^4}$$

тема приводиться до силового гвинта.

Так як векторний добуток головного вектора та головного моменту системи S не дорівнює нулю, то система

(As the vector product S of the system resultant and resultant couple isn't equal to zero, then the system can be reduced to the wrench).

Знайдемо точки перетину центральної вісі системи з координатними площинами (рис. 5.41).

(Find the coordinates of the system main axis intersection points with the coordinate plates (fig. 5.41))

Перетин з площиною yOz .

(Intersection with the coordinate plate yOz)

$$\begin{aligned} y1 &:= \frac{MOZ \cdot |R| - |MO| \cdot RZ}{RX \cdot |R|} & z1 &:= \frac{MOY \cdot |R| - |MO| \cdot RY}{RX \cdot |R|} \\ y1 &= 3.068m & z1 &= -1.406m \\ x1 &:= 0 \end{aligned}$$

Перетин з площиною zOx .

(Intersection with the coordinate plate zOx)

$$\begin{aligned} x2 &:= \frac{MOZ \cdot |R| - |MO| \cdot RZ}{RY \cdot |R|} & z2 &:= \frac{MOX \cdot |R| - |MO| \cdot RX}{RY \cdot |R|} \\ x2 &= -1.901m & z2 &= -0.149m \\ y2 &:= 0 \end{aligned}$$

Перетин з площиною xOy .

(Intersection with the coordinate plate xOy)

$$\begin{aligned} y3 &:= \frac{MOX \cdot |R| - |MO| \cdot RX}{RZ \cdot |R|} & x3 &:= \frac{MOY \cdot |R| - |MO| \cdot RY}{RZ \cdot |R|} \\ y3 &= -0.096m & x3 &= 0.56m \\ z3 &:= 0 \end{aligned}$$

Задамо координати точок перетину в якості матриць $T1$, $T2$ та $T3$ відповідно.

(Set the coordinates of intersection points as the matrixes $T1$, $T2$, $T3$)

$$T1 := \begin{pmatrix} 0 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} \quad T2 := \begin{pmatrix} x2 \\ 0 \\ z2 \end{pmatrix} \quad T3 := \begin{pmatrix} x3 \\ y3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

СТАТИКА

Для побудови тривимірного графіка формуємо результуючу матрицю координат T , поєднуючи матриці $T1$, $T2$ та $T3$.

(To build the 3D graph we need to form the resultant coordinate matrix T as the unity of coordinate matrixes $T1$, $T2$, $T3$).

$$T := \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{pmatrix}$$

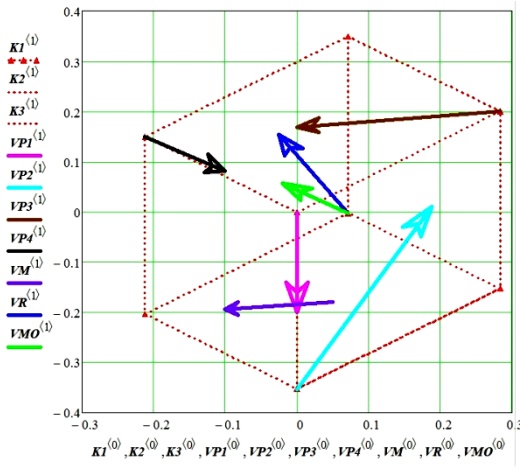


Рис 5.42. Побудова головного вектора та вектора головного моменту системи

MO (fig. 5.42)).

Особливості побудови векторів сил та точок їх прикладення у просторі

в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина I. Статика. с. 111 – 121).

Позначимо також точки центральної вісі системи та побудуємо її (рис. 5.43). Координати цих точок розраховані вище. Також слід враховувати, що кут між вісями x та y дорівнює 135 градусів.

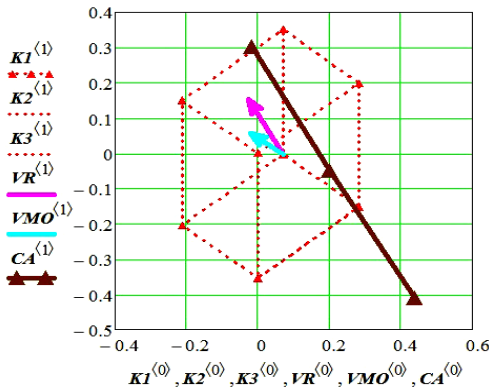


Рис 5.43. Побудова центральної вісі системи

(Mark on the graph the points of the system central axis and set it (fig. 5.43). Coordinates of these points are calculated above. The angle between the axis x and y is 135 degrees).

Будуємо центральну вісь системи. Позначимо її CA (рис. 5.43):

(Design the system central axis. Mark it as CA (fig. 5.43)):

Висновок: Центральна вісь системи паралельна головному вектору системи, тобто рішення вірне

(**Conclusion: The system central axis is parallel to the the system resultant vector ro , then the solution is correct).**

Завдання С-5. Рівновага просторової системи довільно розташованих сил

Визначити реакції в опорах конструкції (рис. 5.44). Зовнішні сили задано у kH , моменти M – у $kH\cdot m$, а розміри конструкції – в метрах.

(Find the unknown reactions attached to the supports of given construction (fig. 5.44) and unknown external forces. There are several dimensions used: external forces are measured in kN ; moments M – in kNm ; all sizes of construction – in metres).

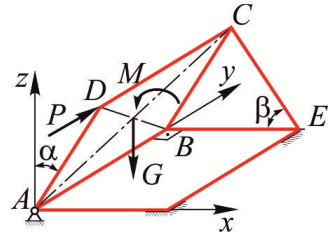


Рис 5.44. Просторова конструкція

Вихідні дані (Put the incoming data)

$$\begin{aligned}
 AD = BC &= a & AB = CD &= b \\
 AO = \frac{AC}{2} &= \frac{c}{2} & \angle DAB &= \gamma \\
 P &:= 2kN & a &:= 1m \\
 G &:= 8kN & b &:= 1.8m \\
 M &:= 10kN \cdot m & \alpha &:= 30^0 \\
 & & \beta &:= 60^0
 \end{aligned}$$

СТАТИКА

$$\gamma := a \tan\left(\frac{a}{b}\right) = 0.507$$

$$c := \frac{b}{\cos(\gamma)} = 2.059m$$

Розрахункова схема (Design scheme)

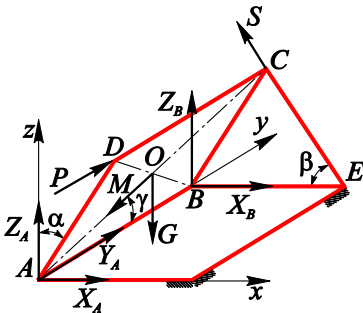


Рис 5.45. Розрахункова схема просторової конструкції

Наведемо рівняння рівноваги системи (рис. 5.45).

(Write down the equations of equilibrium for a space solid construction (fig. 5.45)).

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь X. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the X axes. We will receive the next scalar equation)

$$\sum X_i = 0: \\ X_A + X_B - S \cdot \cos(\beta) = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Y. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Y axes. We will receive the next scalar equation)

$$\sum Y_i = 0: \\ Y_A + P = 0$$

Проектуємо усі зовнішні сили та реакції на вісь Z. Отримуємо наступне скалярне рівняння.

(Project all active forces and reactions on the Z axes. We will receive the next scalar equation)

$$\sum Z_i = 0: \\ Z_A - G + Z_B + S \cdot \sin(\beta) = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно вісі X.

(Satisfy the equation of moments about the X axis)

$$\sum MX = 0 :$$

$$-P \cdot \cos(\alpha) \cdot a - G \cdot \frac{b}{2} + S \cdot \sin(\beta) \cdot b + ZB \cdot b = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

(Change the equation thereby all its elements will have dimension used for forces)

$$-P \cdot \cos(\alpha) - G \cdot \frac{b}{2 \cdot a} + S \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{b}{a} + ZB \cdot \frac{b}{a} = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно вісі Y.

(Satisfy the equation of moments about the Y axis)

$$\sum MY = 0 :$$

$$G \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{a}{2} - S \cdot \sin(\beta) \cdot a - M \cdot \cos(\gamma) = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

(Change the equation thereby all its elements will have dimension used for forces)

$$\frac{G \cdot \sin(\alpha)}{2} - S \cdot \sin(\beta) - \frac{M \cdot \cos(\gamma)}{a} = 0$$

Запишемо рівняння моментів відносно вісі Z.

(Satisfy the equation of moments about the Z axis)

$$\sum MZ = 0 :$$

$$P \cdot \sin(\alpha) \cdot a + S \cdot \cos(\beta) \cdot b - XB \cdot b - M \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) = 0$$

Перетворимо рівняння таким чином, щоб отримати розмірність сили для його елементів.

(Change the equation thereby all its elements will have dimension used for forces)

$$P \cdot \sin(\alpha) + S \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{b}{a} - XB \cdot \frac{b}{a} - \frac{M \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{a} = 0$$

Запишемо систему рівнянь рівноваги конструкції в кінцевому вигляді.

СТАТИКА

(Write down the system of equations used for the construction equilibrium description)

$$\begin{aligned}XA + XB - S \cdot \cos(\beta) &= 0 \\YA + P &= 0 \\ZA - G + ZB + S \cdot \sin(\beta) &= 0 \\-P \cdot \cos(\alpha) - G \cdot \frac{b}{2 \cdot a} + S \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{b}{a} + ZB \cdot \frac{b}{a} &= 0 \\\frac{G \cdot \sin(\alpha)}{2} - S \cdot \sin(\beta) - \frac{M \cdot \cos(\gamma)}{a} &= 0 \\P \cdot \sin(\alpha) + S \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{b}{a} - XB \cdot \frac{b}{a} - \frac{M \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{a} &= 0\end{aligned}$$

Використовуємо матричний метод вирішення системи рівнянь, що отримано.

(Use the matrix method for sollution)

$$\begin{aligned}XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot ZA + XB + 0 \cdot ZB - S \cdot \cos(\beta) &= 0 \\0 \cdot XA + YA + 0 \cdot ZA + 0 \cdot XB + 0 \cdot ZB + 0 \cdot S &= -P \\0 \cdot XA + 0 \cdot YA + ZA + 0 \cdot XB + ZB + S \cdot \sin(\beta) &= G \\0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot ZA + 0 \cdot XB + ZB \cdot \frac{b}{a} + S \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{b}{a} + 0 \cdot M &= P \cdot \cos(\alpha) + \\+ G \cdot \frac{b}{2 \cdot a} \\0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot ZA + 0 \cdot XB + 0 \cdot ZB - S \cdot \sin(\beta) &= -\frac{G \cdot \sin(\alpha)}{2} + \frac{M \cdot \cos(\gamma)}{a} \\0 \cdot XA + 0 \cdot YA + 0 \cdot ZA - XB \cdot \frac{b}{a} + 0 \cdot ZB + S \cdot \cos(\beta) \cdot \frac{b}{a} &= -P \cdot \sin(\alpha) + \\+ \frac{M \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{a}\end{aligned}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів – K та вектор-столбець правих частин – Q .

(Form the ratio matrix K and the matrix of results Q)

$$K_w := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos(\beta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \sin(\beta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{a} & \sin(\beta) \cdot \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b}{a} & 0 & \cos(\beta) \cdot \frac{b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0.866 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.667 & 1.443 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.866 \\ 0 & 0 & 0 & -1.667 & 0 & 0.833 \end{pmatrix}$$

$$Q := \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ G \\ P \cdot \cos(\alpha) + G \cdot \frac{b}{a} + \frac{M \cdot \cos\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)}{-\frac{G \cdot \sin(\alpha)}{2} + \frac{M \cdot \cos(\gamma)}{2}} \\ -P \cdot \sin(\alpha) + \frac{M \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{a} \end{pmatrix}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Isolve**.

(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the **Isolve** function usage)

$$Reaction := Isolve(K, Q) = \begin{pmatrix} 1.81 \times 10^3 \\ -2 \times 10^3 \\ 3.038 \times 10^3 \\ -5.673 \times 10^3 \\ 1.17 \times 10^4 \\ -7.784 \times 10^3 \end{pmatrix} N$$

Значення реакцій опор та невідомих зовнішніх сил
(The support reactions external active forces value)

$$XA := Reaction_{0,0} = 1.81 \times 10^3 \text{ N}$$

$$YA := Reaction_{1,0} = -2 \times 10^3 \text{ N}$$

$$ZA := Reaction_{2,0} = 3.038 \times 10^3 \text{ N}$$

$$XB := Reaction_{3,0} = -5.673 \times 10^3 \text{ N}$$

$$ZB := Reaction_{4,0} = 1.17 \times 10^4 \text{ N}$$

$$S := Reaction_{5,0} = -7.784 \times 10^3 \text{ N}$$

Побудуємо систему активних сил та реакцій, прикладених до заданої конструкції у просторі (рис. 5.46).

(Let's build the active forces and reactions attached to the aforementioned construction in space (fig. 5.46)).

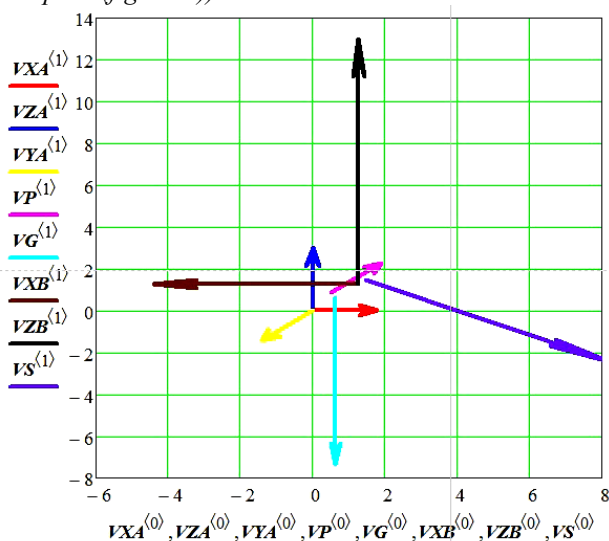


Рис 5.46. Просторова система сил, прикладена до заданої конструкції

Особливості побудови векторів сил у просторі в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина I. Статика. с. 121 – 129).

Перевірка результатів рішення (Check the results)

Для перевірки правильності рішення обчислимо головний вектор та головний момент розглянутої конструкції, взявши за центр зведення точку D .

(To check the obtained results we need to calculate the system's resultant and the resultant couple setting the point D as the system's center).

Визначимо проекції векторів сил XA , YA , ZA , XB , ZB , G , P та S на вісі X , Y , Z системи координат.

(Find the projections of forces XA , YA , ZA , XB , ZB , G , P and S on the X , Y , Z coordinate axis).

Проекції вектора сили XA на вісі x , y , z .

(Projections of the force XA on the x , y , z coordinate axis)

$$XAX := XA = 1.81 \times 10^3 \text{ N}$$

$$XAY := 0 \text{ kN}$$

$$XAZ := 0 \text{ kN}$$

Позначимо вектор сили XA як $F1$. Він матиме наступний вигляд.

(Mark the vector of force XA as $F1$. Its structure is given)

$$F1 := \begin{pmatrix} XAX \\ XAY \\ XAZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.81 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Проекції вектора сили YA на вісі x , y , z .

(Projections of the force YA on the x , y , z coordinate axis)

$$YAX := 0 \text{ N}$$

$$YAY := -2 \times 10^3 \text{ N}$$

$$YAZ := 0 \text{ N}$$

Позначимо вектор сили YA як $F2$. Він матиме наступний вигляд.

(Mark the vector of force YA as $F2$. Its structure is given)

$$F2 := \begin{pmatrix} YAX \\ YAY \\ YAZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Проекції вектора сили ZA на вісі x , y , z .

(Projections of the force ZA on the x , y , z coordinate axis)

СТАТИКА

$$ZAX := 0N$$

$$ZAY := 0N$$

$$ZAZ := ZA = 3.038 \times 10^3 N$$

Позначимо вектор сили ZA як $F3$. Він матиме наступний вигляд.
(Mark the vector of force ZA as $F3$. Its structure is given)

$$F3 := \begin{pmatrix} ZAX \\ ZAY \\ ZAZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.038 \times 10^3 \end{pmatrix} N$$

Проекції вектора сили P на вісі x, y, z .
(Projections of the force P on the x, y, z coordinate axis)

$$PX := 0N$$

$$PY := P = 2 \times 10^3 N$$

$$PZ := 0N$$

Позначимо вектор сили P як $F4$. Він матиме наступний вигляд.
(Mark the vector of force P as $F4$. Its structure is given)

$$F4 := \begin{pmatrix} PX \\ PY \\ PZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

Проекції вектора сили G на вісі x, y, z .
(Projections of the force G on the x, y, z coordinate axis)

$$GX := 0N$$

$$GY := 0N$$

$$GZ := -G = -8 \times 10^3 N$$

Позначимо вектор сили G як $F5$. Він матиме наступний вигляд.
(Mark the vector of force G as $F5$. Its structure is given)

$$F5 := \begin{pmatrix} GX \\ GY \\ GZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \times 10^3 \end{pmatrix} N$$

Проекції вектора сили XB на вісі x, y, z .
(Projections of the force XB on the x, y, z coordinate axis)

$$XB_X := XB = -5.673 \times 10^3 \text{ N}$$

$$XB_Y := 0 \text{ N}$$

$$XB_Z := 0 \text{ N}$$

Позначимо вектор сили XB як $F6$. Він матиме наступний вигляд.
(Mark the vector of force XB as $F6$. Its structure is given)

$$F6 := \begin{pmatrix} XB_X \\ XB_Y \\ XB_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.673 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Проекції вектора сили ZB на вісі x, y, z .
(Projections of the force ZB on the x, y, z coordinate axis)

$$ZB_X := 0 \text{ N}$$

$$ZB_Y := 0 \text{ N}$$

$$ZB_Z := ZB = 1.17 \times 10^4 \text{ N}$$

Позначимо вектор сили ZB як $F7$. Він матиме наступний вигляд.
(Mark the vector of force ZB as $F7$. Its structure is given)

$$F7 := \begin{pmatrix} ZB_X \\ ZB_Y \\ ZB_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.17 \times 10^4 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Проекції вектора сили S на вісі x, y, z .
(Projections of the force S on the x, y, z coordinate axis)

$$SX := -S \cdot \cos(\beta) = 3.892 \times 10^3 \text{ N}$$

$$SY := 0 \text{ N}$$

$$SZ := S \cdot \sin(\beta) = -6.742 \times 10^3 \text{ N}$$

Позначимо вектор сили S як $F8$. Він матиме наступний вигляд.
(Mark the vector of force S as $F8$. Its structure is given)

$$F8 := \begin{pmatrix} SX \\ SY \\ SZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.892 \times 10^3 \\ 0 \\ -6.742 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ N}$$

СТАТИКА

Визначимо головний вектор посторової системи сил R . задамо його як суму векторів $F1.....F8$.

(Find the system resultant R . It could be set as a sum of vectors $F1....F8$)

$$\mathbf{R} := \mathbf{F1} + \mathbf{F2} + \mathbf{F3} + \mathbf{F4} + \mathbf{F5} + \mathbf{F6} + \mathbf{F7} + \mathbf{F8}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

$$|\mathbf{R}| := 0 N$$

Головний вектор системи R дорівнює нулю.

(The system's resultant R is equal to zero).

Обчислимо моменти сил XA , YA , ZA , P , G , XB , ZB , S пари сил M відносно центру системи D .

(Find the moments of forces XA , YA , ZA , P , G , XB , ZB S and the couple of forces M about the system's center D).

Спочатку задамо координати точок прикладення сил XA , YA , ZA , P , G , XB , ZB та S відносно центру системи A в якості векторів.

(First specify the forces XA , YA , ZA , P , G , XB , ZB , S points of application coordinates as a vector according to the system's center A).

Для сил XA , YA та ZA точкою прикладення є точка A ; для сили P – точка D ; для сил XB та ZB – точка B ; для сили S – точка C ; для сили G – точка O .

(For the forces XA , YA and ZA the application point is the point A ; for the force P – point D ; for the forces XB and ZB – point B ; for the force S – point C , for the force G – point O)

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.8 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \cdot \cos(\beta) \\ \frac{c}{2} \cdot \cos(\gamma) \\ \frac{a}{2} \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.9 \\ 0.433 \end{pmatrix} m$$

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\beta) \\ a \cdot \cos(\gamma) \\ a \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.874 \\ 0.866 \end{pmatrix} m$$

$$\mathbf{O} := \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\beta) \\ c \cdot \cos(\gamma) \\ a \cdot \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.8 \\ 0.866 \end{pmatrix} m$$

Задамо відстань між точками A та D за допомогою вектора AD .

(Set the distance between the points A and D by means of vector AD)

$$AD := \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\beta) \\ a \cdot \cos(\gamma) \\ a \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.874 \\ 0.866 \end{pmatrix} m$$

Відносно нового центру приведення системи точки D координати точок прикладення сил задаємо наступними векторами:

(According to the new system's center - point D all points of forces applications should be set by next vectors:)

$$\begin{aligned} A1 &:= A - AD = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.874 \\ -0.866 \end{pmatrix} m & B1 &:= B - AD = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.926 \\ -0.866 \end{pmatrix} m \\ C1 &:= C - AD = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.926 \\ 0 \end{pmatrix} m & D1 &:= D - AD = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \\ O1 &:= O - AD = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.026 \\ -0.433 \end{pmatrix} m \end{aligned}$$

Для обчислення моменту MXA сили XA відносно центру системи D визначимо векторний добуток векторів $F1$ та $A1$.

(To find the moment MXA of force XA about the system's center D we need to calculate the vector product of vectors $F1$ and $A1$)

$$MXA := F1 \times A1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.542 \times 10^3 \\ -1.577 \times 10^3 \end{pmatrix} J$$

Для обчислення моменту MYA сили YA відносно центру системи D визначимо векторний добуток векторів $F2$ та $A1$.

(To find the moment MYA of force YA about the system's center D we need to calculate the vector product of vectors $F2$ and $A1$)

$$MYA := F2 \times A1 = \begin{pmatrix} 1.732 \times 10^3 \\ 0 \\ -1 \times 10^3 \end{pmatrix} J$$

Для обчислення моменту MZA сили ZA відносно центру системи D визначимо векторний добуток векторів $F3$ та $A1$.

СТАТИКА

(To find the moment MZA of force ZA about the system's center D we need to calculate the vector product of vectors $F3$ and $A1$)

$$MZA := F3 \times A1 = \begin{pmatrix} 2.655 \times 10^3 \\ -1.519 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} J$$

Для обчислення моменту MP сили P відносно центру системи D визначимо векторний добуток векторів $F4$ та $D1$.

(To find the moment MP of force P about the system's center $D1$ we need to calculate the vector product of vectors $F4$ and $D1$)

$$MP := F4 \times D1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} J$$

Для обчислення моменту MG сили G відносно центру системи D визначимо векторний добуток векторів $F5$ та $O1$.

(To find the moment MG of force G about the system's center D we need to calculate the vector product of vectors $F5$ and $O1$)

$$MG := F5 \times O1 = \begin{pmatrix} 206.742 \\ 2 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} J$$

Для обчислення моменту MXB сили XB відносно центру системи D визначимо векторний добуток векторів $F6$ та $B1$.

(To find the moment MXB of force XB about the system's center D we need to calculate the vector product of vectors $F6$ and $B1$)

$$MXB := F6 \times B1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.913 \times 10^3 \\ -5.253 \times 10^3 \end{pmatrix} J$$

Для обчислення моменту MZB сили ZB відносно центру системи D визначимо векторний добуток векторів $F7$ та $B1$.

(To find the moment MZB of force ZB about the system's center D we need to calculate the vector product of vectors $F7$ and $B1$)

$$\mathbf{M}_{ZB} := \mathbf{F}_7 \times \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -1.084 \times 10^4 \\ -5.852 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{J}$$

Для обчислення моменту MS сили S відносно центру системи D визначимо векторний добуток векторів F_8 та C_1 .

(To find the moment MS of force S about the system's center D we need to calculate the vector product of vectors F_8 and S)

$$\mathbf{M}_S := \mathbf{F}_8 \times \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 6.242 \times 10^3 \\ 4.321 \times 10^{-13} \\ 3.604 \times 10^3 \end{pmatrix} \mathbf{J}$$

Для обчислення моменту MM пари сил M задамо проекції вектора пари сил M на вісі координат X, Y, Z .

(To find the moment MM of force couple M we need to project the vector M on the coordinate axes X, Y, Z)

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 0 \\ M \cdot \cos(\gamma) \\ M \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 0 \\ 8.742 \times 10^3 \\ 4.206 \times 10^3 \end{pmatrix} \mathbf{J}$$

Обчислимо головний момент системи MD відносно центру D . Задамо його як суму векторів $MXA, MYA, MZA, MP, MG, MXB, MZB, MS, MM$.

(Find the resultant couple of the system MD about the system's center D . Set it as a sum of vectors $MXA, MYA, MZA, MP, MG, MXB, MZB, MS, MM$)

$$\mathbf{M}_D := \mathbf{M}_{XA} + \mathbf{M}_{YA} + \mathbf{M}_{ZA} + \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_{XB} + \mathbf{M}_{ZB} + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_M$$

$$\mathbf{M}_D = \begin{pmatrix} -6.366 \times 10^{-12} \\ -3.638 \times 10^{-12} \\ -2.728 \times 10^{-12} \end{pmatrix} \mathbf{J}$$

$$|\mathbf{M}_D| := 7.842 \times 10^{-12} \mathbf{J}$$

Висновок: Головний вектор та головний момент системи відносно центру D дорівнюють нулю, отже система знаходиться в рівновазі. Рішення вірне.

(Conclusion: The system's resultant and resultant couple about the system's center D are equal to zero. So the solution is right).

Завдання С-6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури

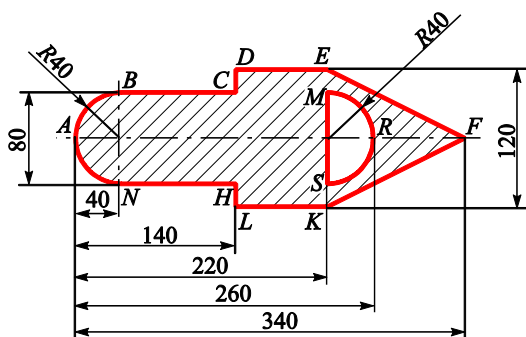


Рис. 5.47. Плоска фігура

Визначити положення центру тяжіння плоскої фігури (рис. 5.47). Всі розміри задані в міліметрах

(Find the flat figure centre of gravity location (fig. 5.47). All dimensions are given in millimeters).

Вихідні данні
(Put the incoming data)

$R := 40mm$	$OR := 220mm$
$DL := 120mm$	$OH := 100mm$
$OF := 300mm$	$EK := 120mm$
$OK := 180mm$	$BN := 80mm$
$OM := OK$	

Дана плоска фігура складається з наступних фігур – сектор ABN , багатокутник $BCDEFLHN$, сектор MRS .

(The aforementioned flat figure consists of several simple flat figures, such as the sector ABN , the polygon $BCDEFLHN$, the sector MRS).

Визначимо площі вищезазначених простих геометричних фігур.

(Find the areas of the aforementioned simple geometric figures).

Площа сектора ABN (рис. 5.48).

(Area of the sector ABN (fig. 5.48))

$$\alpha := 180^0$$

$$F_{ABN} := \frac{R^2 \cdot \alpha \cdot \pi}{360^0} = 2.513 \times 10^{-3} m^2$$

Сектор ABN будемо як **дві чверті кола** (рис. 5.49). Їх рівняння запишемо у параметричному вигляді:

(Sector ABN can be designed as two quarters of a circle (fig. 5.49). Their equations can be given parametrically:)

$$b0 := 0m$$

$$b := b0, b0 - 0.001m \dots - R$$

$$a(b) := \sqrt{R^2 - (b - b0)^2}$$

$$a1(b) := -\sqrt{R^2 - (b - b0)^2}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & -R \end{pmatrix}$$

Визначимо координати x та y центру тяжіння сектора ABN (рис. 5.50).

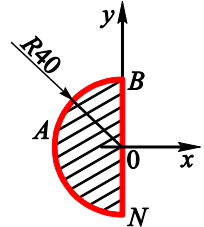


Рис. 5.48. Сектор ABN

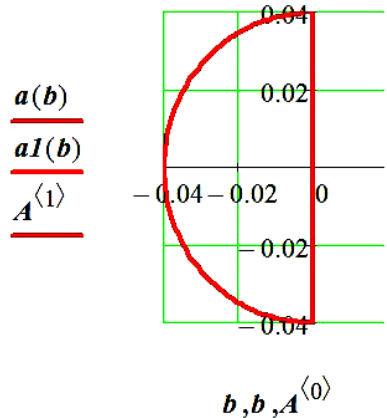


Рис. 5.49. Побудова сектора ABN

(Find the x and y coordinates of the sector ABN centre of gravity (fig.5.50))

Координата x центру тяжіння сектора ABN .

(Coordinate x of the sector ABN centre of gravity).

$$x_{ABN} := - \left(\frac{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cdot \frac{\alpha}{2}} \right) = -0.017m$$

Координата y центру тяжіння сектора ABN .

(Coordinate y of the sector ABN centre of gravity).

$$y_{ABN} := - \left(\frac{2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cdot \frac{\alpha}{2}} \right) = 0m$$

Позначимо на графіку центр тяжіння сектора ABN (CI).
(Mark the sector ABN centre of gravity (CI)).

$$CI := (x_{ABN} \quad y_{ABN}) = (-0.017 \quad 0)m$$

Визначимо статичний момент відносно вісі y для сектора ABN .
(Find the y axis static moment for the sector ABN).

$$Sy_{ABN} := F_{ABN} \cdot X_{ABN} = -0.043L$$

Визначимо статичний момент відносно вісі x для сектора ABN .
(Find the x axis static moment for the sector ABN).

$$Sx_{ABN} := F_{ABN} \cdot Y_{ABN} = 0L$$

Багатокутник $BCDEFKLHN$ має дев'ять вершин. Задамо координати усіх вершин багатокутника $BCDEFKLHN$. Починаємо обхід багатокутника з вершини B , закінчуючи вершиною N за годинниковою стрілкою (рис.5.51).

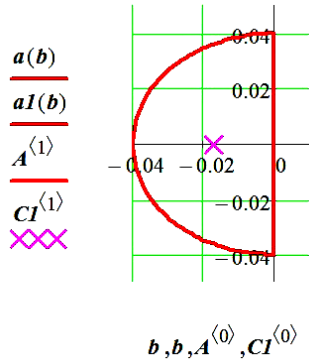


Рис. 5.50. Центр тяжіння сектора ABN

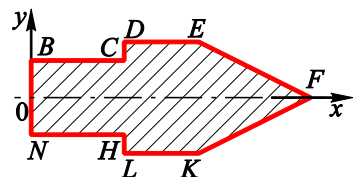


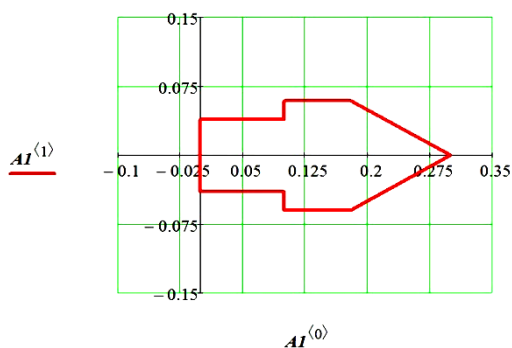
Рис. 5.51. Багатокутник $BCDEFKLHN$

(The polygon *BCDEFKLHN* has nine vertexes. Set the whole polygon *BCDEFKLHN* vertexes coordinates. Let's start from the vertex *B* to vertex *N* clockwise (fig. 5.51))

$$\begin{array}{ll}
 x_0 := 0 & y_0 := \frac{-BN}{2} = -0.04m \\
 xN := x_0 & yN := y_0 \\
 x_1 := OH & y_1 := y_0 = -0.04m \\
 xH := x_1 & yH := y_1 \\
 x_2 := x_1 & y_2 := \frac{-EK}{2} = -0.06m \\
 xL := x_2 & yL := y_2 \\
 x_3 := OK & y_3 := y_2 = -0.06m \\
 xK := x_3 & yK := y_3 \\
 x_4 := OF & y_4 := 0 \\
 xF := x_4 & yF := y_4 \\
 x_5 := x_3 & y_5 := -y_3 = 0.06m \\
 xE := x_5 & yE := y_5 \\
 x_6 := x_2 & y_6 := -y_2 = 0.06m \\
 xD := x_6 & yD := y_6 \\
 x_7 := x_1 & y_7 := -y_1 = 0.04m \\
 xC := x_7 & yC := y_7 \\
 x_8 := x_0 & y_8 := -y_0 = 0.04m \\
 xB := x_8 & yB := y_8
 \end{array}$$

$$AI := \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \\ x_7 & y_7 \\ x_8 & y_8 \\ x_0 & y_0 \end{pmatrix}$$

$$AI = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -0.04 \\ 1 & 0.1 & -0.04 \\ 2 & 0.1 & -0.06 \\ 3 & 0.18 & -0.06 \\ 4 & 0.3 & 0 \\ 5 & 0.18 & 0.06 \\ 6 & 0.1 & 0.06 \\ 7 & 0.1 & 0.04 \\ 8 & 0 & 0.04 \\ 9 & 0 & -0.04 \end{array} m$$



Будемо багатокутник $BCDEFKLHN$ (рис. 5.52).

(Design the polygon $BCDEFKLHN$ (fig. 5.52)).

Площа багатокутника $BCDEFKLHN$.

(Area of the polygon $BCDEFKLHN$)

$$n := 8$$

$$j := 0..n$$

$$x_j :=$$

x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8

$$y_j :=$$

y_0
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
y_7
y_8

Рис. 5.52. Побудова багатокутника $BCDEFKLHN$

$$F_{BCDEFKLHN} := \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} (x_j \cdot y_{j+1} - x_{j+1} \cdot y_j) \right] = 0.025 m^2$$

Визначимо статичний момент відносно вісі y для багатокутника $BCDEFKLHN$.

(Find the y axis static moment for the polygon $BCDEFKLHN$)

$$Sy_{BCDEFKLHN} := \frac{1}{6} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} (x_j \cdot y_{j+1} - x_{j+1} \cdot y_j) \cdot (x_j + x_{j+1}) \right] = -3.328 L$$

Визначимо статичний момент відносно вісі x для багатокутника $BCDEFKLHN$.

(Find the x axis static moment for the polygon $BCDEFKLHN$)

$$Sx_{BCDEFKLHN} := \frac{1}{6} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} (x_j \cdot y_{j+1} - x_{j+1} \cdot y_j) \cdot (y_j + y_{j+1}) \right] = 0 L$$

Визначимо координату x центра тяжіння багатокутника $BCDEFKLHN$ (рис. 5.53).

(Find the x coordinate of the polygon $BCDEFKLHN$ centre of gravity (fig. 5.53))

$$x_{BCDEFKLHN} := \frac{Sy_{BCDEFKLHN}}{F_{BCDEFKLHN}} = 0.134 m$$

Визначимо координату y центра тяжіння багатокутника $BCDEFKLHN$.

(Find the y coordinate of the polygon $BCDEFKLHN$ centre of gravity)

$$y_{BCDEFKLHN} := \frac{Sx_{BCDEFKLHN}}{F_{BCDEFKLHN}} = 0 m$$

Позначимо на графіку (рис. 5.53) центр тяжіння багатокутника $BCDEFKLHN$ ($C2$).

(Mark the polygon $BCDEFKLHN$ centre of gravity ($C2$) (fig. 5.53))

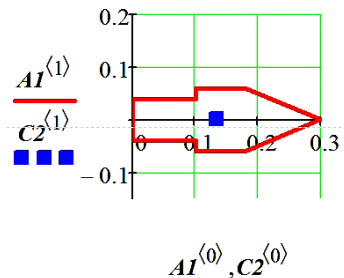


Рис. 5.53. Центр тяжіння багатокутника $BCDEFKLHN$

$$C2 := (x_{BCDEFKLHN} \quad y_{BCDEFKLHN}) = (0.134 \quad 0) m$$

Площа сектора MRS (рис. 5.54).
(Area of the sector MRS (fig. 5.54))

$$F_{MRS} := \frac{\pi \cdot (OR - OM)^2 \cdot \alpha}{360^0} = 2.513 \times 10^{-3} m^2$$

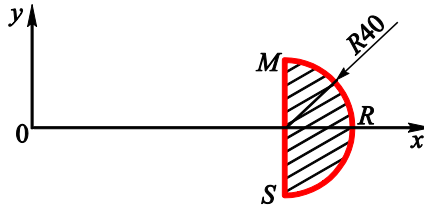
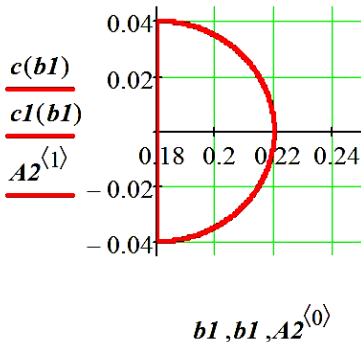


Рис. 5.54. Сектор MRS

Сектор MRS будемо як **дві чверті кола** (рис. 5.55). Їх рівняння запишемо у параметричному вигляді:

(Sector MRS (fig. 5.55) can be designed as two quarters of a circle. Their equations can be given parametrically:)



$$b1 := OM, OM + 0.001m..OR$$

$$c(b) := \sqrt{R^2 - (b1 - OM)^2}$$

$$c1(b) := -\sqrt{R^2 - (b1 - OM)^2}$$

$$A2 := \begin{pmatrix} OM & R \\ OM & -R \end{pmatrix}$$

Рис. 5.55. Побудова сектора MRS

ру тяжіння сектора MRS .

(Find the x and y coordinates of the sector MRS centre of gravity).

Координата x центру тяжіння сектора MRS .

(Coordinate x of the sector MRS centre of gravity)

Визначимо координати x та y центру

$$x_{MRS} := OM + \frac{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cdot \frac{\alpha}{2}} = 0.197m$$

Координата y центру тяжіння сектора MRS .

(Coordinate y of the sector MRS centre of gravity)

$$y_{MRS} := - \left(\frac{2 \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3 \cdot \frac{\alpha}{2}} \right) = 0m$$

Позначимо на графіку центр тяжіння сектора MRS ($C3$) (рис. 5.56).

(Mark the sector MRS centre of gravity ($C3$) (fig. 5.56))

$$C3 := (x_{MRS} \quad y_{MRS}) = (0.197 \quad 0)m$$

Визначимо статичний момент відносно вісі y для сектора MRS .

(Find the y axis static moment for the sector MRS).

$$Sy_{MRS} := F_{MRS} \cdot x_{MRS} = 0.495L$$

Рис. 5.56. Центр тяжіння сектора MRS

Визначимо статичний момент відносно вісі x для сектора MRS .
(Find the x axis static moment for the sector MRS).

$$Sx_{MRS} := F_{MRS} \cdot y_{MRS} = 0L$$

Площа усієї плоскої фігури.
(Area of the whole flat figure).

$$F := F_{ABN} + F_{BCDEFKLHN} - F_{MRS} = -0.025m^2$$

Визначимо загальний статичний момент відносно вісі y для усієї плоскої фігури.

(Find the y axis static moments for the whole flat figure).

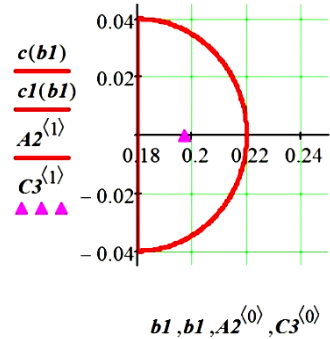
$$Sy := Sy_{ABN} + Sy_{BCDEFKLHN} - Sy_{MRS} = -3.866L$$

Визначимо загальний статичний момент відносно вісі x для усієї плоскої фігури.

(Find the x axis static moments for the whole flat figure).

$$Sx := Sx_{ABN} + Sx_{BCDEFKLHN} - Sx_{MRS} = 0L$$

Визначимо координату XC центра тяжіння усієї плоскої фігури.
(Find the XC coordinate for the whole flat figure).



СТАТИКА

$$x_C := \frac{S_y}{F} = 0.156m$$

Визначимо координату y_C центра тяжіння усієї плоскої фігури.
(Find the y_C coordinate for the whole flat figure).

$$y_C := \frac{S_x}{F} = 0m$$

Будуємо усю плоску фігуру (рис. 5.57). Позначимо на графіку її центр тяжіння (C).

(Design the whole flat figure (fig. 5.57). Mark its centre of gravity (C)).

$$C := (x_C \quad y_C) = (0.156 \quad 0)m$$

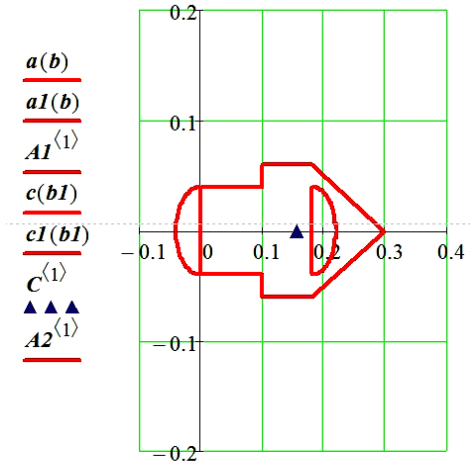


Рис. 5.57. Центр тяжіння усієї плоскої фігури

Висновок: Визначено координати центру тяжіння плоскої фігури – точки C . Координата центру тяжіння по осі абсцис x_C дорівнює 156 мм, а по осі ординат – $y_C = 0$.

(Conclusion: The flat figure centre of gravity coordinates have been found. The x coordinate of point C is equal to 156 mm, the y coordinate is equal to zero).

Розділ 6. КІНЕМАТИКА

Завдання К-1. Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями

За заданими рівняннями руху точки M встановити та накреслити траєкторію її переміщення. Для моментів часу $t_0 = 0$, $t_1 = t$, $t_2 = t/2$, s вказати на кресленні траєкторії положення точки. Відповідно до цих моментів часу визначити значення швидкостей та прискорень точки. Розрахувати шлях, пройдений точкою в інтервалі часу $0 \dots t_1$. Побудувати на кресленні траєкторії визначені вектори швидкостей та прискорень. За отриманими результатами дати уявлення про характер руху точки по траєкторії.

(According to the point's M motion equations find its trajectory and displacement. For the moments of time $t_0 = 0$, $t_1 = t$, $t_2 = t/2$, s show the point's location. At these moments of time find the point's velocity and acceleration and show their vectors on point's trajectory graph. Also find the distance by a point during the time from 0 s to t s. Interpretate the achieved results and on the base of this interpretaion make a decision about the point motion character).

Вихідні данні
(Put the incoming data)

$$\begin{aligned} t0 &:= 0 & t1 &:= 1 \\ x(t) &:= 10 \cdot t \\ y(t) &:= 12 \cdot t^2 - 2 \end{aligned}$$

Визначимо момент часу t_2 руху точки M .
(Find the moment t_2 of the point M motion)

$$t2 := \frac{t1}{2} = 0.5$$

Виходячи з рівнянь руху точки M визначимо координати її положення в моменти часу: t_0 , t_2 , t_1 .

(According to the point M motion equations find the coordinates of its location at the moments of time t_0 , t_2 , t_1 .)

КІНЕМАТИКА

$$\begin{array}{ll} x(t_0) = 0 & y(t_0) = -2 \\ x(t_2) = 5 & y(t_2) = 1 \\ x(t_1) = 10 & y(t_1) = 10 \end{array}$$

Будуємо графік траєкторії руху точки M (рис. 6.1). Для цього задамо інтервал часу руху точки від t_0 до t_1 з кроком зміни часу 0.01с. Позначимо на графіку траєкторії положення точки M в моменти часу t_0, t_2, t_1 .

(Build a graph of the point M trajectory (fig.6.1). For this purpose we need to set the interval of the point M motion time from t_0 до t_1 with the interval step 0.01 s. Mark on the graph the point M location at the moments of time t_0, t_2, t_1)

$$t := t_0 - t_1, t_0 - t_1 + 0.01..t_1$$

Задамо вектор швидкості руху точки M .

(Set the vector of point M velocity)

$$v(t) := \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} x(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Визначимо проекції вектора швидкості руху точки M в задані моменти часу t_0, t_2, t_1 .

(Find the projections of the point M velocity vector on the coordinate axis at the established points of time t_0, t_2, t_1).

Проекція вектору швидкості на вісь X .

(Projection of the velocity vector on the X axis)

$$\begin{array}{l} vx(t) := \frac{d}{dt} x(t) \\ vx(t_0) = 10 \\ vx(t_2) = 10 \\ vx(t_1) = 10 \end{array}$$

Проекція вектору швидкості на вісь Y .

(Projection of the velocity vector on the Y axis)

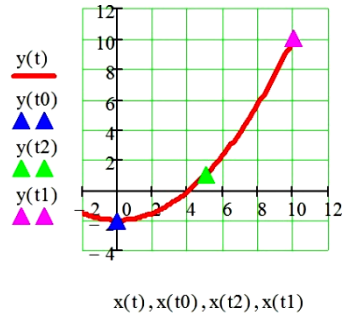
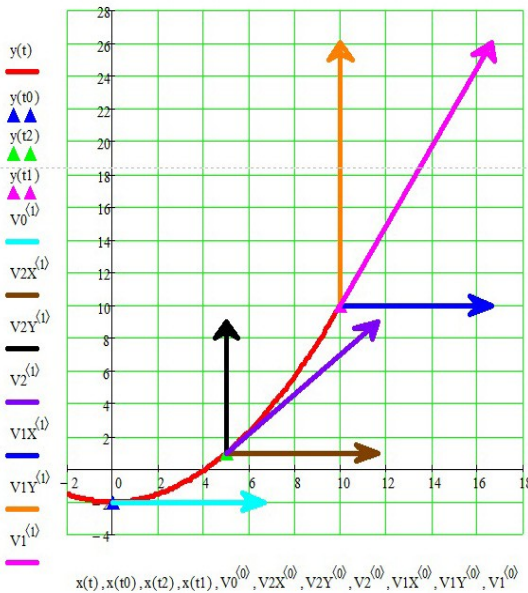


Рис 6.1. Траєкторія руху точки M

$$\begin{aligned}
 v_y(t) &:= \frac{d}{dt} y(t) \\
 v_y(t_0) &= 0 \\
 v_y(t_2) &= 12 \\
 v_y(t_1) &= 24
 \end{aligned}$$

Обчислимо величину вектора швидкості точки M .
(Calculate the value of the point M velocity vector)



$$\begin{aligned}
 |v(t_0)| &= 10 \\
 |v(t_2)| &= 15.62 \\
 |v(t_1)| &= 26
 \end{aligned}$$

Будуємо вектор швидкості руху точки M та його проекції на вісі координат (рис. 6.2). Особливості побудови векторів швидкості в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина II. Кінематика. с. 36 – 49).

Рис 6.2. Вектори швидкості точки M в моменти часу t_0, t_2, t_1
(Set the vector of point M velocity and its projections on the coordinate axis (fig. 6.2)).

Висновок: Виходячи з аналізу графіка, введеного на рис. 6.2, зрозуміло, що швидкість точки M постійно зростає зі збільшенням часу руху вхдовж усієї траєкторії.

(Conclusion: Analysing the graph on the fig. 6.2, we can find out that the point M velocity steadily increases along the whole trajectory due to the increase of the point M time of movement.)

Визначимо шлях, пройдений точкою M в проміжку часу від t_0 до t_1 .

КІНЕМАТИКА

(Find the way, the point M has passed during the interval of time from t_0 to t_1)

$$s(t) := \int_{t_0}^t \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} dt$$

$$s(t_2) = 6.022$$

$$s(t_1) = 16.353$$

Задамо вектор повного прискорення руху точки M .

(Set the vector of point M acceleration)

$$a(t) := \begin{Bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} y(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Визначимо проекції вектора прискорення руху точки M в задані моменти часу t_0, t_2, t_1 .

(Find the projections of the point M acceleration vector on the coordinate axis at the established points of time t_0, t_2, t_1).

Проекція вектору прискорення на вісь X .

(Projection of the acceleration vector on the X axis)

$$ax(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$ax(t_0) = 0$$

$$ax(t_2) = 0$$

$$ax(t_1) = 0$$

Проекція вектору прискорення на вісь Y .

(Projection of the acceleration vector on the Y axis)

$$ay(t) := \frac{d^2}{dt^2} y(t)$$

$$ay(t_0) = 24$$

$$ay(t_2) = 24$$

$$ay(t_1) = 24$$

Обчислимо величину вектора прискорення точки M .
(Calculate the value of the point M acceleration vector)

$$\begin{aligned} |a(t_0)| &= 24 \\ |a(t_2)| &= 24 \\ |a(t_1)| &= 24 \end{aligned}$$

Обчислимо дотичну складову прискорення точки M в задані моменти часу t_0, t_2, t_1 .

(Calculate the tangential component of the point M acceleration at the established moments of time t_0, t_2, t_1)

$$\begin{aligned} a\tau(t) &:= \frac{|ax(t) \cdot vx(t) - ay(t) \cdot vy(t)|}{|v(t)|} \\ |a\tau(t_0)| &= 0 \\ |a\tau(t_2)| &= 18.437 \\ |a\tau(t_1)| &= 22.154 \end{aligned}$$

Обчислимо нормальну складову прискорення точки M в задані моменти часу t_0, t_2, t_1 .

(Calculate the normal component of the point M acceleration at the established moments of time t_0, t_2, t_1)

$$\begin{aligned} an(t) &:= \frac{|ay(t) \cdot vx(t) - ax(t) \cdot vy(t)|}{|v(t)|} \\ |an(t_0)| &= 24 \\ |an(t_2)| &= 15.364 \\ |an(t_1)| &= 9.231 \end{aligned}$$

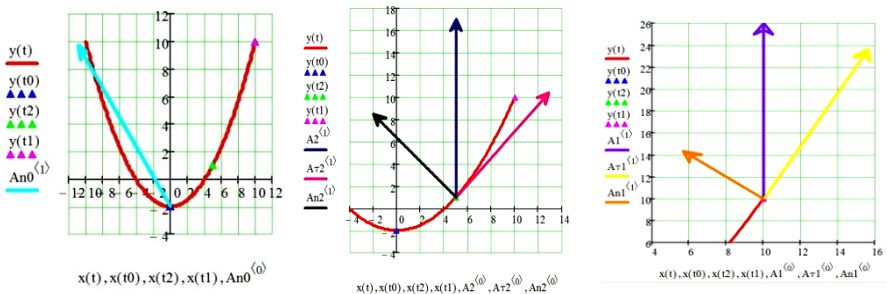


Рис 6.3. Вектори прискорень точки M в моменти часу t_0, t_2, t_1

Будуємо вектор повного прискорення руху точки M та його тангенційної та нормальної складових (рис. 6.3). Особливості побудови векторів прискорень в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина II. Кінематика. с. 36 – 49).

(Set the vector of point M acceleration and its tangential and normal parts (fig. 6.3)).

Висновок: Виходячи з аналізу графіка, наведеного на рис. 6.3, зрозуміло, що тангенційна складова прискорення точки M постійно зростає зі збільшенням часу руху вхдовж усієї траєкторії точки. Тобто рух точки M є прискореним.

(Conclusion: Analysing the graph on the fig. 6.3, we can find out that the tangential component of the point M acceleration steadily increases along the whole trajectory due to the increase of the point M time of movement. So we can tell that the point M is accelerated).

Завдання К-2. Поступальний та обертальний рух твердого тіла

Механізм, що досліджується (рис. 6.4), складається з сукупності рухомих твердих тіл – вантажа (1) та декількох коліс ($2, 3, 4$). Рух вантажа 1 описується рівнянням:

(The mentioned mechanism (fig. 6.4) consists of the unity of solid bodies – the cargo (1) and several pulleys ($2, 3, 4$). The motuon of cargo 1 is described by means of the equation):

$$x(t) := c_2 t^2 + c_1 t + c_0$$

де c_1, c_2, c_0 – сталі, t – час руху вантажа, с. Вважати, що рух вантажа відбувається в напрямку, що співпадає з додатним напрямком вісі x .

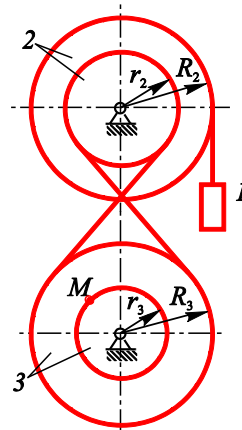


Рис 6.4. Досліджуваний механізм

(in which c_1, c_2, c_0 are constants, t – is the time that the cargo is moving, s . We should also take into consideration, that the direction of cargo's movement is coincide with the positive direction of x axes.)

Знайти швидкість та прискорення вантажа в моменті часу t . Визначити кутову швидкість та кутове прискорення всіх коліс механізму в моменті часу t . Відповідно до точок на ободах всіх коліс та точки M , розташованої на останньому за порядком колесі механізму, визначити вектори швидкості, повного прискорення прискорення, а також його дотичну та нормальну складові.

(Find the velocity and acceleration of cargo movement at the moment t . Also find the angular velocity and angular acceleration of all pulleys at the time moment t . According to the points location on the mechanism's pulleys and the location of the point M on the last pulley, we need to find velocity and acceleration vector and the acceleration tangential and normal components).

Вихідні данні
(Put the incoming data)

$$\begin{array}{lll} c0 := 16 & c1 := 5 & c2 := 36 \\ R2 := 80 & r2 := 50 & r3 := 40 \\ R2 := R3 & t := 1 & \end{array}$$

Рівняння руху вантажа 1:
(The motion equation of cargo 1):

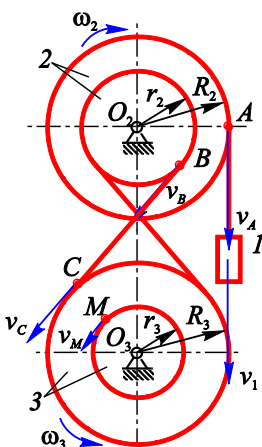


Рис 6.5. Розрахункова
схема механізму

$$x(t) := 36 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 16$$

Знаходимо швидкість руху та прискорення вантажа 1 в момент часу t
(Find the velocity and acceleration of cargo 1 at the moment of time t):

$$\begin{array}{ll} v1(t) := \frac{d}{dt} x(t) & a1(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t) \\ v1(t) := 77 & a1(t) = 72 \end{array}$$

Точка A належить колесу 2 і тросу (рис. 6.5). Знаходимо швидкість точки A .

(Point A lies on the rope and the pulley 2 (fig. 6.5). Find the velocity of the point A)

$$vA := v1(t) = 77$$

КІНЕМАТИКА

Знаходимо кутову швидкість та кутове прискорення колеса 2 в момент часу t .

(Find the angular velocity and angular acceleration of the pulley 2 at the moment of time t)

$$\begin{aligned}\omega_2(t) &:= \frac{v_1(t)}{R_2} & \varepsilon_2(t) &:= \frac{d}{dt}(\omega(t)) \\ \omega_2(t) &:= 0.963 & \varepsilon_2(t) &= 0.9\end{aligned}$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки A в момент часу t .

(Find the point A acceleration (its tangential and normal components) at the moment of time t).

Доцентрове прискорення точки A .

(Normal component of point A acceleration)

$$\begin{aligned}anA &:= \omega_2(t)^2 \cdot R_2 \\ anA &= 74.113\end{aligned}$$

Обертальне прискорення точки A .

(Tangential component of point A acceleration)

$$\begin{aligned}a\tau A &:= \varepsilon_2 \cdot R_2 \\ a\tau A &= 72\end{aligned}$$

Повне прискорення точки A .

(The point A acceleration)

$$\begin{aligned}aA &:= \sqrt{(a\tau A)^2 + (anA)^2} \\ aA &= 103.328\end{aligned}$$

Точка B належить внутрішньому ободу колеса 2. Знаходимо швидкість точки B .

(Point B lies on the internal part of the pulley 2. Find the velocity of the point B)

$$vB := \omega_2(t) \cdot r_2 = 48.125$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки B в момент часу t .

(Find the point B acceleration (its tangential and normal components) at the moment of time t).

Доцентрове прискорення точки B .

(Normal component of point B acceleration)

$$a_{\tau B} := \omega_2(t)^2 \cdot r_2$$

$$a_{\tau B} = 46.32$$

Обертальне прискорення точки B .
(Tangential component of point B acceleration)

$$a_{\tau B} := \varepsilon_2 \cdot r_2$$

$$a_{\tau B} = 45$$

Повне прискорення точки B .
(The point B acceleration)

$$a_B := \sqrt{(a_{\tau B})^2 + (a_{nB})^2}$$

$$a_B = 64.58$$

Точки B і C належать тросу, що поєднує колеса 2 і 3. Тому їх швидкості дорівнюють.

(Points B and C lie on the rope, connecting the pulleys 2 and 3. So their velocities are equal)

$$v_C := v_B$$

$$v_C = 48.125$$

Знаходимо кутову швидкість та кутове прискорення колеса 3 в момент часу t .

(Find the angular velocity and angular acceleration of the pulley 3 at the moment of time t)

$$\omega_3(t) := \omega_2(t) \cdot \frac{r_2}{R_3}$$

$$\omega_3(t) = 0.602$$

$$\varepsilon_3(t) := \frac{d}{dt}(\omega_3(t))$$

$$\varepsilon_3(t) = 0.563$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки C в момент часу t .

(Find the point C acceleration (its tangential and normal components) at the moment of time t).

Доцентрове прискорення точки C .
(Normal component of point C acceleration)

$$a_{nC} := \omega_3(t)^2 \cdot R_3$$

$$a_{nC} = 28.95$$

Обертальне прискорення точки C .

КІНЕМАТИКА

(Tangential component of point C acceleration)

$$a_{\tau C} := \varepsilon_3 \cdot R_3$$

$$a_{\tau C} := 45$$

Повне прискорення точки C.

(The point C acceleration)

$$a_C := \sqrt{(a_{\tau C})^2 + (a_{nC})^2}$$

$$a_C = 53.508$$

Точка M належить внутрішньому ободу колеса 3. Знаходимо швидкість точки M.

(Point M lies on the internal part of the pulley 3. Find the velocity of the point M)

$$v_M := \omega_3(t) \cdot r_3 = 24.063$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки M в момент часу t.

(Find the point M acceleration (its tangential and normal components) at the moment of time t).

Доцентрове прискорення точки M.

(Normal component of point M acceleration)

$$a_{nM} := \omega_3(t)^2 \cdot r_3$$

$$a_{nM} = 14.475$$

Обертальне прискорення точки M.

(Tangential component of point M acceleration)

$$a_{\tau M} := \varepsilon_3 \cdot r_3$$

$$a_{\tau M} := 22.5$$

Повне прискорення точки M.

(The point M acceleration)

$$a_M := \sqrt{(a_{\tau M})^2 + (a_{nM})^2}$$

$$a_M = 26.754$$

Будуємо вектори швидкостей руху точок механізму (рис. 6.6). Особливості побудови векторів в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графі-

чні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина II. Кінематика. с. 50 – 69).

(Set the vector of the mechanism's points velocities (fig. 6.6)).

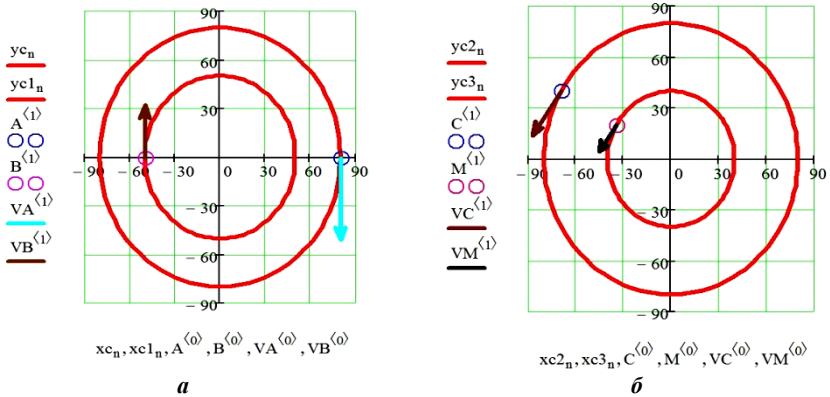


Рис 6.6 Вектори швидкостей точок механізма:

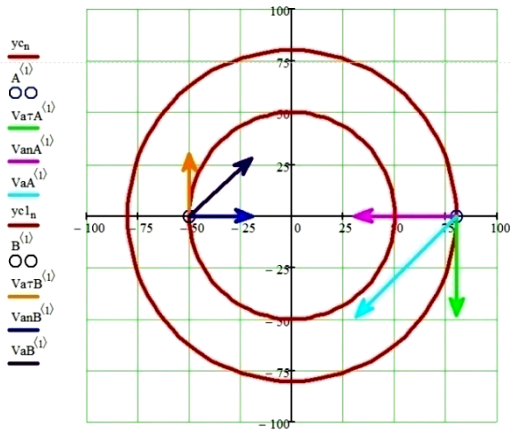
a – точок *A* та *B*, що належать колесу 2;

b – точок *C* и *M*, що належать колесу 3

Будуємо вектори доцентрового, вісенапрямого та повного прискорень руху точок механізма (рис. 6.7). Особливості побудови векторів в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина II. Кінематика. с. 50 – 69).

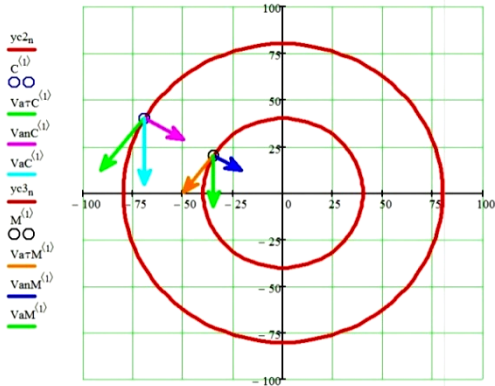
(Set the vector of the mechanism's points acceleration and its tangential and normal parts (fig. 6.7)).

КІНЕМАТИКА



$xc_n, A^{(a)}, Va\tau A^{(a)}, VanA^{(a)}, VaA^{(a)}, xc1_n, B^{(a)}, Va\tau B^{(a)}, VanB^{(a)}, VaB^{(a)}$

a



$xc2_n, C^{(b)}, Va\tau C^{(b)}, VanC^{(b)}, VaC^{(b)}, xc3_n, M^{(b)}, Va\tau M^{(b)}, VanM^{(b)}, VaM^{(b)}$

b

Рис 6.7. Вектори прискорень точок механізму:
a – точок *A* та *B* на колесі 2; **b** – точок *C* та *M* на колесі 3

Будуємо діаграми кутових швидкостей (рис. 6.8, **a**) та кутових прискорень (рис. 6.8, **b**) коліс механізму.

(Set the diagrams of the mechanism's pulleys angular velocities (fig. 6.8, a) and accelerations (fig. 6.8, b).)

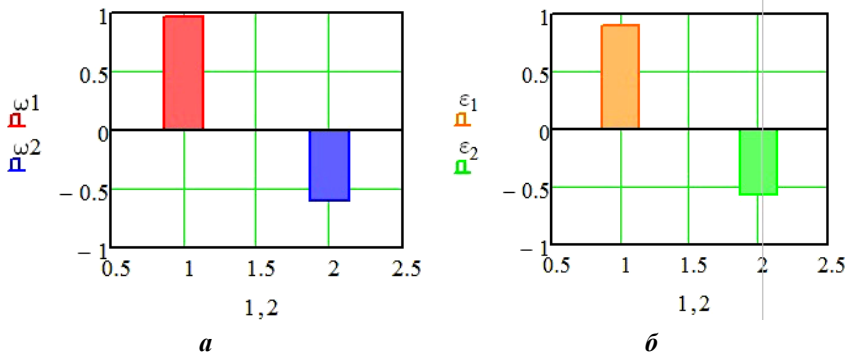


Рис 6.8. Діаграми кутових швидкостей (а) та кутових прискорень (б) механізму

Висновок: Виходячи з аналізу даних та графіків, наведених на рис. 6.5, 6.6, зрозуміло, що швидкості та повні прискорення точок механізму зменшуються зі збільшенням відстані точки від вантажа, який приводить механізм до руху. Аналіз рис. 6.7 дає змогу зрозуміти, що колесо 2 прискорюється під час руху, а колесо 3 – навпаки.

(Conclusion: Analysing the graph on the fig. 6.5, 6.6 we can find out that velocities and accelerations steadily decreases with the increase of the distance from them to the cargo location. Analysis of the fig. 6.7 gives us an opportunity to say that the pulley 2 accelerates and the pulley 3 slows down).

Завдання К-3. Кінематичне дослідження руху багатоланкового механізму

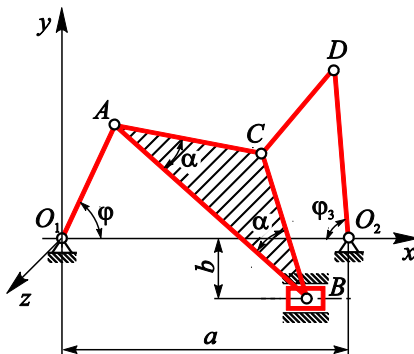


Рис. 6.9. Схема багатоланкового механізму

Кривошип O_1A багатоланкового механізму (рис. 6.9) обертається навколо вісі z з частотою $n = 90$ об/хв та кутовим прискоренням $\varepsilon_0 = 10$ рад/с². Положення механізму в даний момент часу задається величиною кута φ , який є кутом обертання кривошипа. Цей кут відкладається між кривошипом та віссю x в системі координат механізму.

(The crank O_1A of the flat multi-element mechanism (fig. 6.9) is rotated

КІНЕМАТИКА

around z axis with the frequency $n = 90$ rotations per minute and the angular acceleration $\varepsilon_0 = 10 \text{ rad/s}^2$. The mechanism's position is set by the value of the crank rotation φ angle. This angle is measured between the x axis and the crank $O1A$ current position.)

Для заданого положення механізму визначити:

1. Швидкості руху усіх вузлових точок механізму.
2. Кутові швидкості руху усіх ланок механізму.
3. Кутове прискорення усіх ланок механізму.
4. Повне прискорення руху усіх вузлових точок механізму.

(For the current position of crank $O1A$ you need to find:

1. Velocities of all points, located at the mechanism nodes.
2. Angular velocities of all mechanism elements.
3. Angular accelerations of all mechanism elements.
4. Full accelerations of all points, located at the mechanism nodes.)

Вихідні данні (Put the incoming data)

$O1A := 0.3$	$DC := 0.4$	$b := 0.6$	$n := 90$
$AB := 0.9$	$O2D = 0.6$	$\alpha := 30^0$	$\varepsilon := 10$
$AC := 0.52$	$a := 1.0$	$\varphi := 60^0$	$\varphi_3 := 85^0$

Обчислимо кутову швидкість руху кривошипа $O1A$:

(Find the angular velocity of the crank $O1A$):

$$\omega := \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = 9.425$$

Розіб'ємо механізм на групи ланок. До першої групи входять кривошип $O1A$, трикутник ABC та повзун B (рис. 6.10, *a*). До другої групи – кривошип OD та шатун DC (рис. 6.10, *b*).

(Divide the mechanism on two groups of units. First group consists of the crank $O1A$, the connecting rod ABC and the slider B (fig. 6.10, *a*). Second group consists of the crank $O2D$ and the connecting rod DC (fig. 6.10, *b*).)

Задаємо кути нахилу ланок механізму до вісі x : кут φ_1 для трикутника ABC ; φ_3 для кривошипа $O2D$ та φ_4 для шатуна DC . Повзун B рухається поступально вздовж вісі x .

(Set the angles between the mechanism's units and the x axis: φ_1 – the angle between the conrod ABC and the x axis; φ_3 – the angle between the crank $O2D$ and the x axis; φ_4 – the angle between the conrod DC and the x axis. The slider b is moving steadily along the x axis).

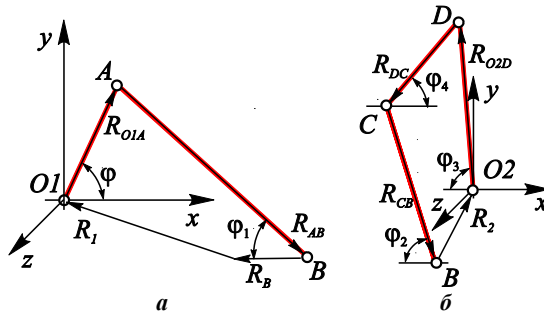


Рис. 6.10. Векторні контури для груп ланок механізму:
 а – для ланок OIA та ABC ; б – для ланок $O2D$ та DC

Для кожної групи ланок будуюмо векторні контури, за допомогою яких можна скласти рівняння геометричних зв'язків для груп ланок механізму (рис. 6.11 а, б):

(For each group of mechanism units we need to create vector contours to set the geometric dependences between the mechanism units (fig. 6.11 a, b)):

– для векторного контура $O1AB$:

– for vector contour $O1AB$:

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_{O1A} + \vec{R}_{AB} + \vec{R}_B$$

– для векторного контура $O2CB$:

– for vector contour $O2CB$:

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_{O2D} + \vec{R}_{DC} + \vec{R}_{CB}$$

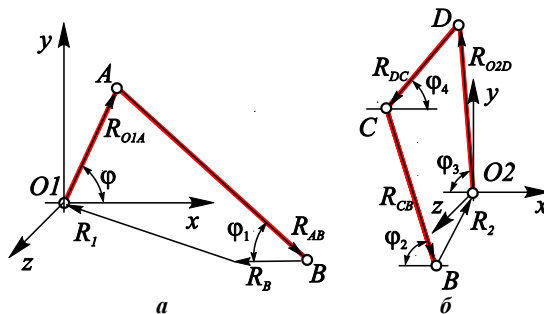


Рис. 6.11. Векторні контури для груп ланок механізму:
 а – для ланок OIA та ABC ; б – для ланок $O2D$ та DC

$$\begin{aligned}
 IO1A &:= \begin{pmatrix} O1A \cdot \cos(\varphi) \\ O1A \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.26 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 IAB &:= \begin{pmatrix} AB \cdot \cos(\varphi_1) \\ -AB \cdot \sin(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.801 \\ -0.41 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 IAC &:= \begin{pmatrix} AC \cdot \cos(\beta) \\ AC \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.519 \\ 0.026 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \beta &:= \alpha - \frac{\varphi_1 \cdot 360^0}{2 \cdot \pi} = 0.051
 \end{aligned}$$

Розглянемо векторний контур $O1AB$. Для нього задамо вектори, що позначають довжини ланок.

(Describe the vector contour $O1AB$. Firstly set the vectors, that are equal to the mechanism units)

Задамо вектор кутової швидкості кривошипа $O1A$.

(Set the vector of the crank $O1A$ angular velocity)

$$\omega O1A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.425 \end{pmatrix}$$

Швидкість точки A визначаємо як векторний добуток векторів довжини кривошипа $O1A$ та його кутової швидкості.

(Find the point A velocity as the vector production of the crank $O1A$ length and angular velocity vectors)

$$\begin{aligned}
 vA &:= \omega O1A \times IO1A = \begin{pmatrix} -2.449 \\ 1.414 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 |vA| &= 2.827
 \end{aligned}$$

Задамо вектор кутового прискорення кривошипа $O1A$.

(Set the vector of the crank $O1A$ angular acceleration)

$$\varepsilon O1A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Визначимо доцентрове, вісенапрямне та повне прискорення точки A .

(Find the point A acceleration (its tangential and normal components)).

Доцентрове прискорення точки A .

(Normal component of point A acceleration)

$$a_{An} := \omega_{O1A} \times v_A = \begin{pmatrix} -13.324 \\ -23.078 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|a_{An}| = 26.648$$

Обертальне прискорення точки A .

(Tangential component of point A acceleration)

$$a_{A\tau} := \varepsilon_{O1A} \times l_{O1A} = \begin{pmatrix} -2.598 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|a_{A\tau}| := 3.0$$

Повне прискорення точки A .

(The point A acceleration)

$$a_A := a_{A\tau} + a_{An} = \begin{pmatrix} -15.922 \\ -21.578 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|a_A| = 26.816$$

Проектуємо векторне рівняння для контуру $O1AB$ на вісі координат. Таким чином отримуємо систему рівнянь, яка описує геометричні зв'язки між ланками механізму:

(Project the vector equation for the contour O1AB on the coordinate axis. Thus we receive the system of equations, describing geometric relations between the mechanism's units)

$$O1A \cdot \cos(\varphi) + AB \cdot \cos(\varphi_1) - x_B = 0$$

$$O1A \cdot \sin(\varphi) - AB \cdot \sin(\varphi_1) = 0$$

З першого рівняння системи визначаємо переміщення повзуна B .

(From the first equation of the system we can find the slider B movement)

$$x_B := O1A \cdot \cos(\varphi) + AB \cdot \cos(\varphi_1) = 0.951$$

Для визначення кутових швидкостей руху ланок механізму та швидкості поступального руху повзуна B продиференціюємо рівняння проєкцій векторного контура $O1AB$.

КІНЕМАТИКА

(To find the angular velocities of the mechanism units and the slider B velocity we need to differentiate the equations of vector contour OIAB projections)

$$\begin{aligned} -OI A \cdot \sin(\varphi) \cdot \omega - AB \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \omega_1 - vB &= 0 \\ OI A \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega - AB \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

Перенесемо відомі складові з лівої частини рівняння в праву.
(Transfer the known parts of the equation from its left part to right)

$$\begin{aligned} -AB \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \omega_1 - vB &= OI A \cdot \sin(\varphi) \cdot \omega \\ -AB \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \omega_1 &= OI A \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega \end{aligned}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів – A та вектор-столбець правих частин – B .

(Form the ratio matrix A and the matrix of results B)

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} -AB \cdot \sin(\varphi_1) & -1 \\ -AB \cdot \cos(\varphi_1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.41 & -1 \\ -0.801 & 0 \end{pmatrix} \\ B &:= \begin{pmatrix} OI A \cdot \sin(\varphi) \cdot \omega \\ -OI A \cdot \cos(\varphi) \cdot \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.449 \\ -1.414 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Isolve**.

*(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the **Isolve** function usage)*

$$\begin{aligned} C &:= \text{Isolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 1.764 \\ 3.172 \end{pmatrix} \\ \omega_1 &:= C_0 = 1.764 \\ vB &:= C_1 = 3.172 \end{aligned}$$

Визначимо кутову швидкість ланки ABC .

(Find the angular velocity of the unit ABC)

$$\begin{aligned} \omega_{ABC} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.764 \end{pmatrix} \\ |\omega_{ABC}| &= 1.764 \end{aligned}$$

Визначимо прискорення точки B та кутове прискорення ланки ABC . Для цього продиференціюємо двічі рівняння проекцій векторного контура $OIAB$

(Find the point B acceleration and the unit ABC angular acceleration. For this we need to double differentiate the equations of vector contour O1AB projections)

$$\begin{aligned} -O1A \cdot \cos(\varphi) \cdot \varepsilon - AB \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \varepsilon_1 - aB &= 0 \\ -O1A \cdot \sin(\varphi) \cdot \varepsilon + AB \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \varepsilon_1 &= 0 \end{aligned}$$

Перенесемо відомі складові з лівої частини рівняння в праву.
(Transfer the known parts of the equation from its left part to right)

$$\begin{aligned} -AB \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \varepsilon_1 - aB &= O1A \cdot \cos(\varphi) \cdot \varepsilon \\ AB \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \varepsilon_1 &= O1A \cdot \sin(\varphi) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів – A1 та вектор-столбець правих частин – B1.

(Form the ratio matrix A1 and the matrix of results B1)

$$\begin{aligned} A1 &:= \begin{pmatrix} -AB \cdot \cos(\varphi_1) & -1 \\ AB \cdot \sin(\varphi_1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.801 & -1 \\ 0.41 & 0 \end{pmatrix} \\ B1 &:= \begin{pmatrix} O1A \cdot \cos(\varphi) \cdot \varepsilon \\ O1A \cdot \sin(\varphi) \cdot \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.598 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Solve**.

(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the **Solve** function usage)

$$\begin{aligned} C1 &:= \text{Solve}(A1, B1) = \begin{pmatrix} 1.764 \\ 3.172 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_1 &:= C1_0 = 6.58 \\ aB &:= C1_1 = 8.034 \end{aligned}$$

Визначимо кутове прискорення ланки ABC.

(Find the angular acceleration of the unit ABC)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ABC} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.58 \end{pmatrix} \\ |\varepsilon_{ABC}| &= 6.58 \end{aligned}$$

Визначимо швидкість руху точки C, що належить ланці ABC. Полосом, навколо якого відбувається обертання ланки ABC є точка A.

КІНЕМАТИКА

(Find velocity of the point C, that belongs to the unit ABC. The pole of rotation for this unit is the point A)

$$\mathbf{vC} := \mathbf{vA} + \omega_{ABC} \times \mathbf{IAC} = \begin{pmatrix} -2.402 \\ 0.498 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{vC}| = 2.453$$

Визначимо доцентрове, вісенапрямне та повне прискорення точки C.
(Find the point C acceleration (its tangential and normal components)).
 Доцентрове прискорення точки C.
(Normal component of point C acceleration)

$$\mathbf{aCn} := \omega_{ABC} \times \mathbf{vC} = \begin{pmatrix} -0.879 \\ -1.015 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{aCn}| = 1.618$$

Обертальне прискорення точки C.
(Tangential component of point C acceleration)

$$\mathbf{aC\tau} := \mathbf{aA\tau} + \varepsilon_{ABC} \times \mathbf{IAC} = \begin{pmatrix} -19.298 \\ 4.195 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{aC\tau}| = 19.765$$

Повне прискорення точки C.
(The point C acceleration)

$$\mathbf{aC} := \mathbf{aC\tau} + \mathbf{aCn} = \begin{pmatrix} -19.922 \\ -5.578 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{aC}| = 20.099$$

Розглянемо векторний контур O2DC. Для нього задамо вектори, що позначають довжини ланок.

(Describe the vector contour O2DC. Firstly set the vectors, that are equal to the mechanism units)

$$\begin{aligned} -O2D \cdot \cos(\varphi_3) - DC \cdot \cos(\varphi_4) + CB \cdot \cos(\varphi_2) &= 0 \\ O2D \cdot \sin(\varphi_3) - DC \cdot \sin(\varphi_4) - CB \cdot \sin(\varphi_2) &= 0 \end{aligned}$$

Визначимо кути φ_2 та φ_4 .
(Find the angles φ_2 and φ_4)

$$\varphi_2 := \alpha + \frac{\varphi_1 \cdot 360^0}{2 \cdot \pi} = 0.996$$

Кут φ_4 знаходимо з першого рівняння проекцій векторного контуру $O2DC$ на вісі координат.

(The angle φ_4 could be found from the first equation of the vector contour $O2DC$ projections on the coordinate axis)

$$\varphi_4 := a \cos \left(\frac{-O2D \cdot \cos(\varphi_3) + CO2 \cdot \cos(\varphi_2)}{DC} \right) = 0.962$$

Для визначення кутових швидкостей руху ланок механізму продиференціюємо рівняння проекцій векторного контура $O2DC$.

(To find the angular velocities of the mechanism units we need to differentiate the equations of vector contour $O2DC$ projections)

$$\begin{aligned} O2D \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \omega_2 + DC \cdot \sin(\varphi_4) \cdot \omega_3 - CB \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \omega_1 &= 0 \\ O2D \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \omega_2 - DC \cdot \cos(\varphi_4) \cdot \omega_3 - CB \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

Перенесемо відомі складові з лівої частини рівняння в праву.
(Transfer the known parts of the equation from its left part to right)

$$\begin{aligned} O2D \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \omega_2 + DC \cdot \sin(\varphi_4) \cdot \omega_3 &= CB \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \omega_1 \\ O2D \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \omega_2 - DC \cdot \cos(\varphi_4) \cdot \omega_3 &= CB \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \omega_1 \end{aligned}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів – $A2$ та вектор-столбець правих частин – $B1$.

(Form the ratio matrix $A2$ and the matrix of results $B2$)

$$\begin{aligned} A2 &:= \begin{pmatrix} O2D \cdot \sin(\varphi_3) & DC \cdot \sin(\varphi_4) \\ O2D \cdot \cos(\varphi_3) & DC \cdot \cos(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.598 & 0.328 \\ 0.052 & -0.229 \end{pmatrix} \\ B2 &:= \begin{pmatrix} CB \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \omega_1 \\ CB \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.77 \\ 0.498 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Isolve**.

*(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the **Isolve** function usage).*

КІНЕМАТИКА

$$C2 := \text{Solve}(A2, B2) = \begin{pmatrix} 2.611 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

$$\omega2 := C2_0 = 2.611$$

$$\omega3 := C2_1 = 2.75$$

Визначимо кутові швидкості ланок $O2D$ та DC .

(Find the angular velocities of the units $O2D$ and DC)

$$\omega_{DC} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.75 \end{pmatrix} \quad \omega_{O2D} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.611 \end{pmatrix}$$

$$|\omega_{DC}| = 2.75 \quad |\omega_{O2D}| = 2.611$$

Задамо вектор, що позначає довжину ланки $O2D$.

(Set the vector, that is equal to the mechanism unit $O2D$ length)

$$IO2D := \begin{pmatrix} -O2D \cdot \cos(\varphi3) \\ O2D \cdot \sin(\varphi3) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.052 \\ 0.598 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Швидкість точки D визначаємо як векторний добуток векторів довжини кривошипа $O2D$ та його кутової швидкості.

(Find the point D velocity as the vector production of the crank $O2D$ length and angular velocity vectors)

$$vD := \omega_{O2D} \times IO2D = \begin{pmatrix} 1.318 \\ 0.914 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|vD| = 1.567$$

Визначимо кутові прискорення ланок $O2D$ та DC . Для цього продиференціюємо двічі рівняння проєкцій векторного контура $O2DC$.

(Find the units $O2D$ and DC angular accelerations. For these we need to double differentiate the equations of vector contour $O2DC$ projections)

$$O2D \cdot \sin(\varphi3) \cdot \varepsilon2 + DC \cdot \sin(\varphi4) \cdot \varepsilon3 - CB \cdot \sin(\varphi2) \cdot \varepsilon1 = 0$$

$$O2D \cdot \cos(\varphi3) \cdot \varepsilon2 - DC \cdot \cos(\varphi4) \cdot \varepsilon3 - CB \cdot \cos(\varphi2) \cdot \varepsilon1 = 0$$

Перенесемо відомі складові з лівої частини рівняння в праву.

(Transfer the known parts of the equation from its left part to right.)

$$\begin{aligned} O2D \cdot \sin(\varphi_3) \cdot \varepsilon_2 + DC \cdot \sin(\varphi_4) \cdot \varepsilon_3 &= CB \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \varepsilon_1 \\ O2D \cdot \cos(\varphi_3) \cdot \varepsilon_2 - DC \cdot \cos(\varphi_4) \cdot \varepsilon_3 &= CB \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Формуємо матрицю коефіцієнтів – $A3$ та вектор-столбець правих частин – $B3$.

(Form the ratio matrix $A3$ and the matrix of results $B3$)

$$\begin{aligned} A3 &:= \begin{pmatrix} O2D \cdot \sin(\varphi_3) & DC \cdot \sin(\varphi_4) \\ O2D \cdot \cos(\varphi_3) & DC \cdot \cos(\varphi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.598 & 9.328 \\ 7.052 & 8.229 \end{pmatrix} \\ B3 &:= \begin{pmatrix} CB \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \varepsilon_1 \\ CB \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.72 \\ 2.598 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Вектор-столбець рішень отримано рішенням матричного рівняння з використанням функції **Solve**.

(Results of the equation system solution are given in a vector form and can be obtained by the **Solve** function usage).

$$\begin{aligned} C3 &:= \text{Solve}(A3, B3) = \begin{pmatrix} 41.981 \\ 12.67 \end{pmatrix} \\ \varepsilon_2 &:= C3_0 = 41.981 \\ \varepsilon_3 &:= C3_1 = 12.67 \end{aligned}$$

Визначимо кутові прискорення ланок $O2D$ та DC .

(Find the angular accelerations of the units $O2D$ and DC)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{O2D} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 41.981 \end{pmatrix} & \varepsilon_{DC} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.67 \end{pmatrix} \\ |\varepsilon_{O2D}| &= 41.981 & |\varepsilon_{DC}| &= 12.67 \end{aligned}$$

Визначимо доцентрове, вісенаправне та повне прискорення точки D .

(Find the point D acceleration (its tangential and normal components)).

Доцентрове прискорення точки D .

(Normal component of point D acceleration)

$$\begin{aligned} a_{Dn} &:= \omega_{DC} \times v_D = \begin{pmatrix} 0.193 \\ -2.925 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |a_{Dn}| &= 3.023 \end{aligned}$$

Обертальне прискорення точки D .

(Tangential component of point D acceleration)

КІНЕМАТИКА

$$aD\tau := aC\tau + \varepsilon DC \times IDC = \begin{pmatrix} -5.105 \\ 0.752 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|aD\tau| := 5.069$$

Повне прискорення точки D .
(The point D acceleration)

$$aD := aD\tau + aDn = \begin{pmatrix} -5.1 \\ 1.78 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|aD| = 5.902$$

Побудуємо схему плоского механізму при заданному куті обертання φ ведучого кривошипа OIA (рис. 6.12). Особливості побудови ланок плоского механізму в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина II. Кінематика. с. 70 – 91).

(Let's build the flat mechanism scheme according to the given rotation angle φ of the leading crank OIA (fig. 6.12)).

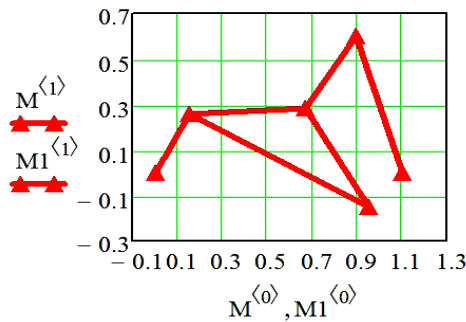


Рис. 6.12. Схема багатоланкового плоского механізму

Побудуємо плани швидкостей (рис. 6.13) та прискорень (рис. 6.14, 6.15) точок, що належать ланкам плоского механізму. Особливості побудови ланок плоского механізму в системі **Mathcad** наведено в методичних вказівках (М.Р. Ткач, С.О. Моргун, А.С. Познанський «Розрахунково графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad». Частина II. Кінематика. с. 70 – 91).

(Set the vectordiagrams of the mechanism's points velocities (fig. 6.13) and accelerations (fig. 6.14. 6.15).

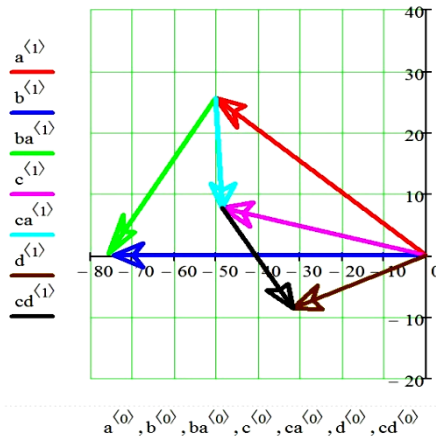


Рис. 6.13. План швидкостей багатоланкового плоского механізма

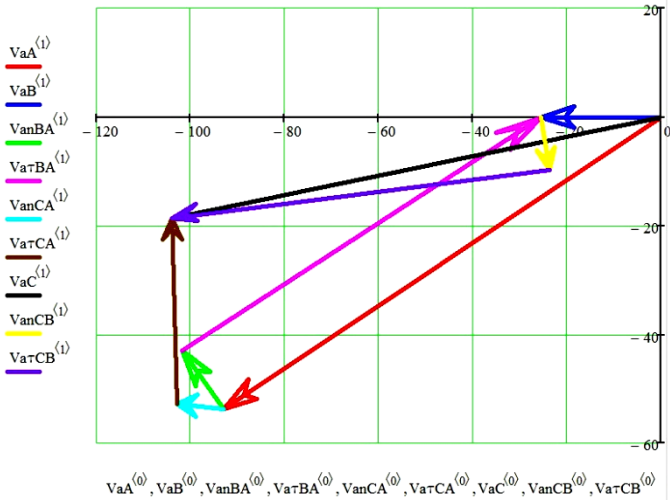


Рис. 6.14. План прискорень точок A, B, C групи ланок OIABC механізма

КІНЕМАТИКА

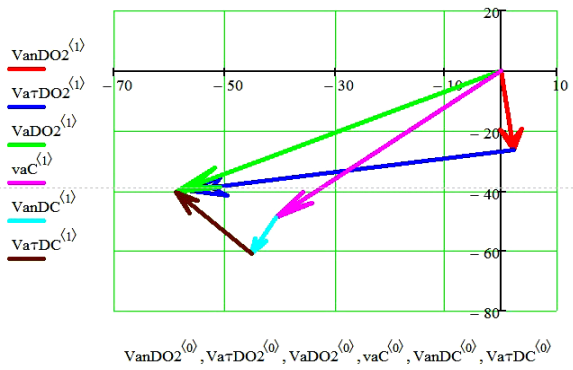


Рис. 6.15. План прискорень точок D , C групи ланок $O2DC$ механізму

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики : в 2 т. [Текст] / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Лань, 2009. – 736 с.
2. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики. Статика и кинематика [Текст] / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – СПб. : Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.
3. **Павловський, М. А.** Теоретична механіка [Текст] / М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2002.
4. **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для вузов по дисциплине "Теоретическая механика" [Текст] / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – СПб. : Лань, 2008. – 448 с.
5. **Яблонский, А. А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / А. А. Яблонский. – М. : КноРус, 2010. – 400 с.
6. **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики [Текст] / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2010. – 416 с.
7. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика. [Текст] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – СПб. : Лань, 2010. – 672 с.
8. **Бертяев, В. Д.** Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум [Текст] / В. Д. Бертяев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
9. **Макаров, Е. А.** Инженерные расчёты в Mathcad 15. Учебный курс. [Текст] / Е. А. Макаров. – СПб. : Питер, 2011. – 400 с.
10. **Фролов, В. П.** Короткий довідник з теоретичної механіки (статика): методичні вказівки / В. П. Фролов, М. Р. Ткач. – Миколаїв : НУК, 2012. – 50 с.
11. **Фролов, В. П.** Короткий довідник з теоретичної механіки (кінематика): методичні вказівки / В. П. Фролов, М. Р. Ткач. – Миколаїв : НУК, 2012. – 50 с.
12. **Ткач, М. Р.** Теоретическая механика. Кинематика: Иллюстративные материалы / М. Р. Ткач, В. П. Фролов. – Миколаїв : НУК, 2014. – 60 с.
13. **Ткач, М. Р.** Розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки. Частина I. Статика / М. Р. Ткач, С. О. Моргун, А. С. Познанський – Миколаїв : НУК, 2018. – 61 с.
14. **Ткач, М. Р.** Розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad. Частина I. Статика. / М. Р. Ткач, С. О. Моргун, А. С. Познанський – Миколаїв : НУК, 2018. – 72 с.
15. **Ткач, М. Р.** Розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки на базі системи Mathcad. Частина II. Кінематика. / М. Р. Ткач, С. О. Моргун, А. С. Познанський – Миколаїв : НУК, 2018. – 55 с.
16. **Ткач, М. Р.** Розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки. Частина II. Кінематика. / М. Р. Ткач, С. О. Моргун, А. С. Познанський – Миколаїв : НУК, 2018. – 50 с.

ЗМІСТ

Передмова (Preamble)	3
Глава перша. РОЗРАХУНКОВО ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ First chapter. ESTIMATED GRAPHIC PROBLEMS TASKS	
Розділ 1. Статика Paragraph 1. Statics	
Завдання С-1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил (Problem S-1. Forces and equilibrium of solid body in a plane).....	5
Завдання С-2. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів (Problem S-2. Reactions of the plane frame supports by method of joints)	9
Завдання С-3. Рівновага зчленованої системи тіл (Problem S-3. Concurrent forces and equilibrium of solid body in a plane)	13
Завдання С-4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду (Problem S-4. Equivalent systems of forces in space. Reducing of the space forces system)	17
Завдання С-5. Рівновага просторової системи довільно розташованих сил (Problem S-5. Concurrent forces and equilibrium of solid body in space)	22
Завдання С-6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури (Problem S-6. Planar centers of gravity calculation)	27
Розділ 2. Кінематика Paragraph 2. Kinematics	
Завдання К-1. Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями (Problem K-1. Determined Motion of a Particle)	31
Завдання К-2. Дослідження параметрів поступального та обертового рухів твердого тіла (Problem K-2. Kinematics of solid body. Translation and fixed axis rotation)	33
Завдання К-3. Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму (Problem K-3. Plane motion of solid bodies. Velocities and accelerations)	38

Глава друга. АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ Second chapter. ANALITYCAL SOLUTION

Розділ 3. Статика

Paragraph 3. Statics

Завдання С-1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил (Problem S-1. Forces and equilibrium of solid body in a plane)	43
Завдання С-2. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів (Problem S-2. Reactions of the plane frame supports by method of joints) .	46
Завдання С-3. Рівновага зчленованої системи тіл (Problem S-3. Concurrent forces and equilibrium of solid body in a plane)	55
Завдання С-4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду (Problem S-4. Equivalent systems of forces in space. Reducing of the space forces system)	60
Завдання С-5. Рівновага просторової системи довільно розташованих сил (Problem S-5. Concurrent forces and equilibrium of solid body in space) .	65
Завдання С-6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури (Problem S-6. Planar centers of gravity calculation)	69

Розділ 4. Кінематика

Paragraph 4. Kinematics

Завдання К-1. Кінематичне дослідження руху точки за завданими рівняннями (Problem K-1. Determined Motion of a Particle)	72
Завдання К-2. Дослідження параметрів поступального та обертового рухів твердого тіла (Problem K-2. Kinematics of solid body. Translation and fixed axis rotation)	77
Завдання К-3. Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму (Problem K-3. Plane motion of solid bodies. Velocities and accelerations)	81

Глава третя. КОМП'ЮТЕРИЗОВАНЕ РІШЕННЯ Third chapter. CAD SYSTEMS BASED SOLUTION

Розділ 5. Статика

Paragraph 5. Statics

Завдання С-1. Рівновага твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил (Problem S-1. Forces and equilibrium of solid body in a plane)	97
--	----

Завдання С-2.1. Розрахунок реакцій опор та сил в стержнях плоскої ферми методом вирізання вузлів (<i>Problem S-2.1. Reactions of the plane frame supports by method of joints</i>)	102
Завдання С-2.2. Розрахунок реакцій опор та сил в стрижнях плоскої ферми матричним методом (<i>Problem S-2.2. Reactions of the plane frame supports by matrix method</i>)	116
Завдання С-3. Рівновага зчленованої системи тіл (<i>Problem S-3. Concurrent forces and equilibrium of solid body in a plane</i>)	128
Завдання С-4. Приведення просторової системи довільно розташованих сил до простішого виду (<i>Problem S-4. Equivalent systems of forces in space. Reducing of the space forces system</i>)	138
Завдання С-5. Рівновага просторової системи довільно розташованих сил (<i>Problem S-5. Concurrent forces and equilibrium of solid body in space</i>)	150
Завдання С-6. Визначення положення центру тяжіння плоскої фігури (<i>Problem S-6. Planar centers of gravity calculation</i>)	163

Розділ 6. Кінематика

Paragraph 6. Kinematics

Завдання К-1. Кінематичне дослідження руху точки за заданими рівняннями (<i>Problem K-1. Determined Motion of a Particle</i>)	172
Завдання К-2. Дослідження параметрів поступального та обертального рухів твердого тіла (<i>Problem K-2. Kinematics of solid body. Translation and fixed axis rotation</i>)	177
Завдання К-3. Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму (<i>Problem K-3. Plane motion of solid bodies. Velocities and accelerations</i>)	184
Список рекомендованої літератури (<i>References</i>)	198