МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**С. Б. ПРИХОДЬКО, Н. В. ПРИХОДЬКО,
Л. М. МАКАРОВА, А. В. ПУХАЛЕВИЧ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

**до виконання лабораторних робіт з дисципліни
«Математичне моделювання систем і процесів
та методи оптимізації»**

Рекомендовано Методичною радою НУК

ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА
2020

УДК 519.876.5(076)
М54

Автори: С. Б. Приходько, д-р техн. наук, професор;
Н. В. Приходько, канд. екон. наук, доцент;
Л. М. Макарова, канд. техн. наук;
А. В. Пухалевич, канд. техн. наук

Рецензент І. І. Коваленко, д-р техн. наук, професор

Рекомендовано Методичною радою

Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт
М54 з дисципліни «Математичне моделювання систем і процесів та методи оптимізації» / С. Б. Приходько, Н. В. Приходько, Л. М. Макарова, А. В. Пухалевич. – Миколаїв: НУК, 2020. – 40 с.

Методичні вказівки призначені для студентів п’ятого курсу спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення» і 122 «Комп’ютерні науки», які вивчають дисципліну «Математичне моделювання систем і процесів та методи оптимізації». Також можуть бути корисними магістрам, аспірантам і усім тим, кому потрібно виконувати моделювання випадкових величин і процесів та стохастичних систем, здійснювати оцінювання параметрів стохастичних систем із застосуванням методів оптимізації.

УДК 519.876.5(076)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова (НУК) дисципліна «Математичне моделювання систем і процесів та методи оптимізації» вивчається студентами спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення» і 122 «Комп'ютерні науки» у дев'ятому семестрі. Вона відноситься до циклу професійно-орієнтованих дисциплін навчального плану підготовки магістрів.

Ці методичні вказівки мають допомогти студентам п'ятого курсу зазначених спеціальностей у підготовці та виконанні лабораторних робіт з дисципліни «Математичне моделювання систем і процесів та методи оптимізації». Вони містять завдання для лабораторних робіт, стислий виклад теоретичних відомостей, етапи виконання робіт та контрольні запитання.

При виконанні кожної лабораторної роботи рекомендується:

- Засвоїти теоретичні відомості.
- Розібратися з завданням та етапами виконання роботи.
- Виконати запропоновані завдання та оформити звіт з роботи.
- Перевірити повноту розуміння теми за допомогою контрольних запитань, розташованих у кінці кожної роботи.

Лабораторну роботу необхідно виконувати відповідно за наведеними етапами виконання роботи. Звіт про лабораторну роботу оформлюється кожним студентом індивідуально. Звіт повинен містити: назву і мету роботи; завдання (постановку задачі); методику і алгоритм розв'язання задачі; текст програми (у разі якщо використовується оригінальна програма); результати роботи; аналіз результатів та висновки. Текст програми бажано розміщувати у додатку.

ВСТУП

Моделювання системи – процес встановлення відповідності між реальною системою та її моделлю з наступним дослідженням цієї моделі для отримання певних характеристик системи, яка розглядається. Отже, з одного боку **моделювання** (modelling) – процес побудови моделі, а з іншого боку **моделювання** (simulation) – це процес проведення експериментів на моделі замість експериментів на самій системі.

Модель (model, simulator) – це деяка інша система, яка зберігає істотні якості оригіналу та припускає дослідження фізичними або абстрактними методами.

Фізична модель – це пристрій, який дозволяє проводити дослідження процесу, що вивчається, шляхом його заміни подібним йому процесом зі зберіганням основних законів.

Абстрактна модель – модель, в якій опис системи здійснюється якоюсь мовою. **Математична модель** – абстрактна модель, в якій опис системи здійснюється математичною мовою.

В основі моделювання лежить **теорія подібності**, яка стверджує, що абсолютна подібність може мати місце, якщо замінити один об'єкт точно таким же. Тобто замість повного моделювання, як правило, виконують наближене моделювання. **Теорія подібності** (теория подобия) – це теорія, яка вивчає умови при яких забезпечується взаємна відповідність між моделлю та об'єктом, який досліджується.

Математичне моделювання – процес встановлення відповідності між реальною системою та її математичною моделлю з наступним дослідженням цієї моделі для отримання певних характеристик системи, яка розглядається.

Математичні моделі поділяють на **аналітичні** і **чисельні**, **статичні** і **динамічні**, **неперервні** і **дискретні**, **детерміновані** і **стохастичні**.

Початковою інформацією для побудови математичних моделей процесів і систем є дані про їх функціонування. Ця інформація визначає основну мету моделювання і дозволяє сформулювати вимоги до моделі, яка розробляється. Причому рівень абстрагування залежить від тих питань, на які дослідник системи бажає отримати відповіді за допомогою моделі, і в якійсь мірі визначає вибір математичної схеми.

Математичну схему або модель можна визначити як ланцюг при переході від змістовного до формального опису процесу функціонування системи з урахуванням впливу зовнішнього середовища. Поняття математичної моделі (схеми) дозволяє розглядати математику не як метод розрахунку, а як метод мислення, як засіб формулювання понять. При використанні математичної моделі (схеми) дослідника в першу чергу повинно цікавити питання про адекватність відображення у вигляді конкретних моделей (схем) реальних процесів у системі, а не можливість отримання результату рішення. Кожна конкретна система характеризується набором властивостей, що описуються за допомогою відповідних величин або функцій, які віддзеркалюють поведінку цієї системи і враховують умови її функціонування у взаємодії із зовнішнім середовищем. При побудові моделі системи з одного боку необхідно забезпечити її повноту, а з іншого – повинна бути вирішена задача про спрощення моделі.

У практиці моделювання систем вважається більш раціональним використовувати типові математичні моделі (схеми), які поділяють на такі типи.

Неперервно-детерміновані моделі (приклади – звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння у часткових похідних).

Дискретно-детерміновані моделі (приклади – різницеві рівняння, кінцевий автомат, автомат Мілі, кінцеві автомати з пам’яттю і без пам’яті, автомат Мура).

Неперервно-стохастичні моделі (приклади – білий шум, стохастичні диференціальні рівняння).

Дискретно-стохастичні моделі (приклади – системи масового обслуговування, ймовірнісні автомати, ймовірнісний автомат Мілі, ймовірнісний автомат Мура).

У практиці моделювання систем використовується різноманітне програмне забезпечення, наприклад, LabView, MatLab, Scilab, Excel. Зокрема, Scilab (http://www.scilab.org) є програмним пакетом, що вільно розповсюджується. Він є певною альтернативою комерційним пакетам MatLab/Simulink та MATRIXx/SystemBuild.

Лабораторна робота № 1.
Моделювання випадкової величини з рівномірним розподілом

Мета роботи: отримати практичні навички моделювання випадкової величини з рівномірним розподілом із використанням комп’ютера.

Завдання. Розробити програмний генератор для моделювання випадкової величини з рівномірним розподілом. Перевірити якість розробленого генератора у разі генерації 10000 значень випадкової величини та початковому значенні, яке дорівнює сумі номера групи і номера варіанта.

Зробити висновки за результатами виконання лабораторної роботи.

Загальні теоретичні відомості

Нагадаємо деякі відомості з теорії ймовірностей. Під випадковою величиною розуміють величину, яка у результаті опиту з випадковим результатом приймає те або інше значення. Оскільки закономірностей у появі цих значень немає, аналіз таких величин може виконуватися тільки методами теорії ймовірностей і математичної статистики. Для характеристики випадкової величини необхідно знати сукупність значень цієї величини, а також ймовірності, з якими ці значення можуть появитися.

Випадкова величина називається дискретною, якщо множина її можливих значень кінцева або лічильна. Неперервні (не дискретні) випадкові величини характеризуються тим, що множина їх можливих значень не лічильна.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке правило, яке дозволяє знаходити ймовірності можливих подій, зв’язаних з випадковою величиною.

Найбільш загальною формою закону розподілу випадкової величини є функція розподілу, яка представляє собою ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше ніж задане x:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Якщо функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X при будь-якому x неперервна і, крім того, має похідну $F'(x)$

будь-де, крім, можливо, окремих точок, то випадкова величина є неперервною.

Щільністю ймовірності неперервної випадкової величини X називається похідна функції розподілу:

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right).$$

Випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку $\left[a,b\right]$, якщо її щільність ймовірності $f\left(x\right)$ має вигляд

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in\left[a,b\right];\\ 0, & x\notin\left[a,b\right].\end{cases}$$

Моделювання випадкової величини з рівномірним розподілом на комп'ютері, як правило, здійснюють алгоритмічним способом із використанням лінійних конгруентних генераторів 1-го, 2-го або 3-го порядків, поліноміальних конгруентних генераторів, мультиплікативних генераторів, інверсних конгруентних генераторів. Лінійний конгруентний генератор 1-го порядку має вигляд

$$\omega_i=\left(k_1\omega_{i-1}+k_0\right)\operatorname{mod}q\,,\ \omega_i\in\left[0,q\right),\tag{1.1}$$

де k_0, k_1 та q – це коефіцієнти, які підбираються спеціальним чином, наприклад, одна із комбінацій: $k_0=13849$, $k_1=25173$ та $q=65536$. Інший варіант: $k_0=0$, $k_1=470001$ та $q=999563$. Ці коефіцієнти не можуть бути довільними, їх потрібно обирати з великою обережністю.

За допомогою формули (1.1) ми можемо отримувати послідовність значень псевдовипадкових чисел. Ці числа називають псевдовипадковими тому, що вони є випадковими тільки на інтервалі $\left[0,q\right)$, а після q значень їх послідовність почне повторюватися. Інакше період генератора псевдовипадкових чисел, що визначається формулою (1.1), дорівнює q.

Для моделювання випадкової величини з рівномірним розподілом на одиничному інтервалі $\left[0,1\right)$, необхідно значення ω_i поділити на q. Значення випадкової величини X з рівномірним розподілом на інтервалі $\left[a,b\right)$ можна визначити як $x_i=a+\left(b-a\right)\omega_i/q$.

Для перевірки якості генераторів псевдовипадкових чисел застосовують дві групи тестів: графічні та оціночні. До графічних тестів відносять зокрема побудову гістограми елементів послідовності або значень випадкової величини. У графічних тестах результат інтерпретації залежить від користувача, що приводить до можливої різниці у трактуванні результатів, На відміну від графічних тестів, оціночні тести характеризуються тим, що вони видають чисельне значення певної величини, яка дозволяє однозначно казати, пройдено тест або ні. Одним із оціночних тестів є тест з перевірки закону розподілу значень випадкової величини за критерієм Пірсона (критерієм χ^2), який застосовують у разі великої вибірки (коли $n > 30$). Відповідно за цім критерієм, спочатку обчислюють значення χ^2

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(n_j - n p_j\right)^2}{n p_j},$$

де m – кількість підінтервалів (часток, клітинок), на які розбивається інтервал $\left[x_{\min}, x_{\max}\right]$; $x_{\min}$ і $x_{\max}$ – відповідно мінімальне і максимальне значення випадкової величини X; n_j – абсолютна частота в j-му підінтервалі (кількість значень випадкової величини, які попадають у j-ий підінтервал); p_j – ймовірність того, що значення випадкової величини X попадають у j-ий підінтервал.

Кількість підінтервалів (клітинок), на які розбивається інтервал $\left[x_{\min}, x_{\max}\right]$ може бути визначена за наступними формулами: $m = \log_2 n + 1 = 3{,}3\lg n + 1$ (формула Старджеса) або $m = 5\lg n$ (формула Брукса і Карузера).

Ймовірність того, що значення випадкової величини X попадають у j-ий підінтервал може бути визначена як

$$p_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx,$$

де x_{j-1} і x_j – ліва і права границі j-го підінтервалу.

Після цього в залежності від рівня значимості α та кількості ступенів вільності ν за таблицею верхніх 100α %-вих точок розподілу χ^2 (таблиця А1 у додатку А) знаходять значення $\chi^2_{кр}$. Якщо $\chi^2 \le \chi^2_{кр}$, то з ймовірністю $1 - \alpha$ можна прийняти нульову гіпотезу про закон розподілу результатів моделювання випадкової величини, якщо $\chi^2 > \chi^2_{кр}$ – цю гіпотезу потрібно відкинути.

Кількість ступенів вільності ν визначається як

$$\nu = m - k - 1,$$

де k – кількість параметрів, від яких залежить закон розподілу. Для рівномірного розподілу $k = 0$, для нормального розподілу $k = 2$.

Нагадаємо, що рівень значимості α визначається як $\alpha = 1 - p_{\partial}$, де p_{∂} – довірча ймовірність. Зазвичай приймають $p_{\partial} = 0,95$. Під рівнем значимості будь-якої статистичної гіпотези розуміють найбільшу ймовірність α, з якою ця гіпотеза може дати помилковий результат.

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Моделювання випадкової величини з рівномірним розподілом. Або іншими словами визначення послідовності значень псевдовипадкових чисел $(i = 1, 2, \ldots, n)$ за формулою (1.1).

2) Побудова гістограми значень випадкової величини з рівномірним розподілом за результатами моделювання. Побудова функції щільності ймовірності для рівномірного розподілу на гістограмі. Порівняння побудованої гістограми з функцією щільності ймовірності та формулювання висновку за результатами їх порівняння.

3) Перевірка нульової гіпотези про рівномірний закон розподілу значень випадкової величини за критерієм Пірсона (критерієм χ^2). Формулювання висновку за результатами цієї перевірки.

4) Формулювання висновків за результатами виконання лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Що таке випадкова величина?
2. Що таке функція розподілу випадкової величини?
3. Яка випадкова величина є неперервною?
4. Що таке щільність ймовірності неперервної випадкової величини?
5. Від якої кількості параметрів залежить рівномірний розподіл?

6. Що таке довірча ймовірність, рівень значимості?
7. Що таке псевдовипадкові числа?
8. Чим відрізняються псевдовипадкові числа від випадкових?
9. Назвіть способи генерування випадкових чисел.
10. Наведіть приклад лінійного конгруентного генератору псевдовипадкових чисел.
11. Для чого здійснюється перевірка якості генераторів псевдовипадкових чисел?
12. Як перевіряють якість генераторів псевдовипадкових чисел?
13. Які параметри характеризують якість генератора псевдовипадкових чисел?
14. Чим відрізняються оціночні тести від графічних тестів?
15. В чому полягає перевага оціночних тестів?
16. Поясніть критерій χ^2 (критерій Пірсона).
17. Як визначити критичне значення χ^2?

Лабораторна робота № 2. Моделювання гаусівської випадкової величини

Мета роботи: отримати практичні навички з моделювання гаусівської випадкової величини з використанням комп'ютера.

Завдання. Розробити програмний генератор для моделювання гаусівської випадкової величини (математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення дорівнюють номеру варіанта). Перевірити якість розробленого генератора у разі генерації 10000 значень випадкової величини. Вказівка: початкове значення випадкової величини з рівномірним розподілом взяти з лабораторної роботи № 1.

Загальні теоретичні відомості

При моделюванні різноманітних випадкових процесів (наприклад, білого шуму) часто виникає необхідність у значеннях випадкових величин з розподілом Гауса. Функція щільності ймовірності розподілу Гауса або нормального розподілу має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \tag{2.1}$$

де m_x – математичне сподівання випадкової величини *X*; σ_x – середньоквадратичне відхилення випадкової величини *X* Нагадаємо, що σ_x^2 дорівнює дисперсії випадкової величини *X*, яку зазвичай позначають D_x. Зверніть увагу, що функція (2.1) залежить від двох параметрів: m_x та σ_x.

Зараз для моделювання гаусівських величин використовують методи, основою яких є перетворення випадкових чисел з рівномірним розподілом у такі, що мають розподіл Гауса [1–6]. Всі ці методи можна поділити на дві групи: методи, що базуються на виключеннях [1–3], та методи, що використовують різноманітні перетворення [3–6]. Методи на основі виключень (або методи відбракування) та частина методів, що базується на нелінійних перетвореннях (наприклад, Бокса-Мюллера), потребують для створення визначеної кількості значень гаусівської випадкової величини (ГВВ) приблизно в 1,25 рази більше значень випадкових чисел з рівномірним розподілом. Суть методу відбракування є такою. Спочатку генерують значення випадкової величини з рівномірним розподілом x_i на інтервалі $\left[x_{\min}, x_{\max}\right)$

$$x_i = x_{\min} + \left(x_{\max} - x_{\min}\right)U_i$$

та значення випадкової величини з рівномірним розподілом y_i на інтервалі $\left[0, f_m\right)$

$$y_i = f_m U_{i+1},$$

де f_m – це максимальне значення функції щільності ймовірності; U_i і U_{i+1} – два випадкових числа, що рівномірно розподілені на інтервалі $\left[0, 1\right)$.

Після чого обчислюють значення функції щільності ймовірності для x_i – це $f\left(x_i\right)$. Далі значення y_i порівнюють з $f\left(x_i\right)$. Якщо $y_i \le f\left(x_i\right)$, то x_i беруть як значення випадкової величини з розподілом Гауса: $x_i \sim N\left(m_x, \sigma_x^2\right)$; інакше x_i відкидають (відбраковують).

Один із методів для моделювання гаусівських величин, що базується на центральній граничній теоремі, є таким [7]. Спочатку знаходиться сума *n* випадкових дробових чисел з одиничного інтервалу. Ця сума є випадковою величиною зі середнім *n*/2 і дисперсією *n*/12. Вичитаємо із суми *n*/2 та різницю ділимо на $\sqrt{n/12}$. В результаті випадкова величина буде мати нульове математичне сподівання і одиничну дисперсію. При достатньо великому *n* розподіл цієї величини наближено є нормальним, а її значення обчислюють як

$$z_k = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(2u_i - 1\right),$$

де u_i – *i*-те значення випадкової величини *u* з рівномірним законом розподілу на інтервалі $\left[-1, +1\right)$.

Якщо необхідна висока швидкість обчислень і задача, що вирішується мало залежить від хвостів нормального розподілу, то беруть $n = 12$, за рахунок чого спрощують попередній вираз [1, 7, 8]:

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} u_i - 6.$$

Для генерування значень нормально розподіленої випадкової величини з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією використовують метод Бокса-Мюллера, суть якого полягає у наступному. Спочатку генерують два значення U_i і U_{i+1} випадкової величини U з рівномірним законом розподілу на інтервалі $[0,1)$. Далі за допомогою перетворень [7, 8].

$$z_i = \sqrt{-2\ln U_i}\cos 2\pi U_{i+1};$$

$$z_{i+1} = \sqrt{-2\ln U_i}\sin 2\pi U_{i+1};$$

дістаємо пару некорельованих нормально розподілених випадкових чисел z_i і z_{i+1}. Цей метод є точним у разі, коли U_i і U_{i+1} – незалежні значення випадкової величини з рівномірним розподілом (в поодинокому випадку, неперервні) [7]. На практиці розподіл U_i і U_{i+1} є дискретним. Якщо генератор випадкових чисел з рівномірним розподілом має невеликий період (наприклад, менше 1000000), то хвости розподілу z_i і z_{i+1} будуть побудовані недостатньо точно, але для більшості задач ця обставина не має великого значення.

Модифікацію метода Бокса-Мюллера, яка дозволяє уникнути обчислень тригонометричних функцій, було запропоновано Джеймсом Беллом [1]. Її алгоритм є таким.

Крок 1. Утворити два випадкових числа U_i і U_{i+1}, рівномірно розподілених на інтервалі $[0,1)$.

Крок 2. Утворити два випадкових числа рівномірно розподілених на $[-1,+1)$ – це $u_i = 2U_i - 1$ і $u_{i+1} = 2U_{i+1} - 1$.

Крок 3. Утворити $S = u_i^2 + u_{i+1}^2$. Якщо $S > 1$, відкинути u_i і u_{i+1} та повернутися до кроку 1 (Тут ми втрачаємо 22 % ефективності). Якщо $S \le 1$, то (u_i, u_{i+1}) – координати випадкової точки, рівномірно розподіленої в одиничному крузі.

Крок 4. Утворити

$$z_i = u_i\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}},\ z_{i+1} = u_{i+1}\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}.$$

При наявності відбракувань існує проблема зменшення фактичної кількості значень псевдовипадкових чисел з рівномірним розподілом в межах періоду генератора, яку можна використовувати до їх повторення. Один із шляхів рішення цієї проблеми може бути реалізований завдяки методу на основі зворотної функції [3]. Але його використання для моделювання ГВВ ускладнено тим, що не існує аналітичного виразу зворотної функції для функції розподілу Гауса, а це потребує відповідної її апроксимації. Другий шлях – це застосування методу на основі нормалізуючих перетворень, зокрема перетворення Джонсона [5, 6]. В [5] для моделювання ГВВ запропоновано застосовувати нормалізуюче перетворення Джонсона із сім'ї S_B. Слід зазначити, що перетворення із цієї сім'ї не є бієктивним. А це приводить до поганих результатів на границях або «хвостах» емпіричного розподілу ГВВ, що моделюється. В [6] для покращення результатів моделювання випадкових величин з розподілом Гауса запропоновано застосовувати бієктивне нормалізуюче перетворення, яким є перетворення Джонсона із сім'ї S_U.

Для перевірки якості генераторів для моделювання гаусівських випадкових величин так само, як і псевдовипадкових чисел з рівномірним розподілом, застосовують дві групи тестів: графічні та оціночні.

У разі великої вибірки значень випадкової величини (коли $n > 30$) перевірку нормальності закону розподілу результатів моделювання в тому числі виконують за критерієм Пірсона χ^2 (дивись теоретичні відомості до лабораторної роботи № 1). Нагадаємо, при визначенні кількості ступенів вільності для розподілу Гауса кількість параметрів дорівнює двом. У разі малої вибірки значень випадкової величини (коли $n < 30$) перевірку нормальності закону розподілу результатів моделювання необхідно виконувати за іншими критеріями, наприклад, за критерієм Колмогорова-Смирнова.

Зазначимо, окрім перевірки нульової гіпотези про нормальність закону розподілу, слід ще виконати оцінювання параметрів закону розподілу Гауса: математичного сподівання та дисперсії. Точкові оцінки параметрів закону розподілу Гауса можна знайти або за вибіркою значень випадкової величини або за гістограмою.

Точкову оцінку математичного сподівання визначають як вибіркове середнє $\bar{x}$ за n результатами моделювання x_i ($i = 1,2,.., n$)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{2.2}$$

Незміщену точкову оцінку дисперсії визначають як вибіркову дисперсію S_x^2

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2. \qquad (2.3)$$

Тоді точкова оцінка середнього квадратичного відхилення $\hat{\sigma}_x$ дорівнює

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{S_x^2}. \qquad (2.4)$$

Точкові оцінки математичного сподівання та дисперсії за гістограмою визначають за наступними формулами:

$$\hat{m}_x = \sum_{j=1}^{m} x_j y\left(x_j\right)\Delta x; \qquad (2.5)$$

$$\hat{D}_x = \sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \hat{m}_x\right)^2 y\left(x_j\right)\Delta x, \qquad (2.6)$$

де m – кількість підінтервалів гістограми; x_j – значення випадкової величини X в середині j-го підінтервалу; $y\left(x_j\right)$ – значення ординати гістограми при значенні x_j. Зазначимо, що при використанні формул (2.5) і (2.6), у якості значення $y\left(x_j\right)$ потрібно брати відношення відносної частоти в j-му підінтервалі до довжини j-го підінтервалу Δx.

За формулами (2.2) – (2.4) знаходять відповідні точкові оцінки, які на відміну від інтервальних є менш надійними. Завдяки випадковому характеру похибки $\Delta\hat{\theta}$ оцінки $\hat{\theta}$ параметра θ для конкретизації точності наближеної рівності $\hat{\theta} \approx \theta$ необхідно мати ймовірність $p_д$ того, що $\left|\Delta\hat{\theta}\right|$ перейде деяку границю $\Delta > 0$:

$$P\left(\left|\Delta\hat{\theta}\right| \le \Delta\right) = p_д.$$

Інтервал від $\hat{\theta} - \Delta$ до $\hat{\theta} + \Delta$, в якому з ймовірністю $p_д$ знаходиться справжнє значення θ, називається довірчим інтервалом, а його границі – довірчими границями, ймовірність $p_д$ – довірчою ймовірністю. Величина $\alpha = 1 - p_д$ в загальному випадку називається рівнем значимості. Під рівнем значимості якої-небудь статистичної гіпотези розуміють найбільшу ймовірність α, з якою ця гіпотеза може дати помилковий результат.

Для нормальної генеральної сукупності $(1-\alpha)\%$-вий довірчий інтервал точкової оцінки математичного сподівання визначається як

$$\left[\bar{x}-t_{n-1}S_x\big/\sqrt{n},\, \bar{x}+t_{n-1}S_x\big/\sqrt{n}\right],$$

де t_{n-1} – квантіль *t*-розподілу Стьюдента, визначається за таблицею верхніх 100α%-вих точок *t*-розподілу Стьюдента (таблиця Б1 у додатку Б) в залежності від рівня значимості $\alpha/2$ та кількості ступенів вільності ν, $\nu = n-1$.

Величину $t_{n-1}S_x\big/\sqrt{n}$ розглядають як довірчу похибку результату оцінювання (виміру). Вона зменшується зі збільшенням *n*.

Для нормальної генеральної сукупності $(1-\alpha)\%$-вий довірчий інтервал точкової оцінки середнього квадратичного відхилення визначають як

$$\left[S_x\sqrt{n\big/\chi^2_{\alpha/2}},\, S_x\sqrt{n\big/\chi^2_{1-\alpha/2}}\right].$$

Значення $\chi^2_{\alpha/2}$ і $\chi^2_{1-\alpha/2}$ визначають в залежності від α та ν за таблицею верхніх 100 %-вих точок розподілу χ^2 (таблиця А1 у додатку А). Кількість ступенів вільності ν визначається як $\nu = n-1$.

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Моделювання випадкової величини з нормальним розподілом.

2) Побудова гістограми значень випадкової величини з нормальним розподілом за результатами моделювання. Побудова функції щільності ймовірності нормального розподілу на гістограмі. Порівняння побудованої гістограми з функцією щільності ймовірності та формулювання висновку за результатами їх порівняння.

3) Перевірка нульової гіпотези про нормальний закон розподілу значень випадкової величини за критерієм Пірсона (критерієм χ^2). Формулювання висновку за результатами цієї перевірки.

4) Визначення точкових оцінок математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення за вибіркою та за гістограмою. Порівняння отриманих результатів.

5) Визначення інтервальних оцінок (довірчих інтервалів точкових оцінок) математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення.

6) Формулювання висновків за результатами виконання лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Що таке неперервна випадкова величина?
2. Що таке функція розподілу неперервної випадкової величини?
3. Що таке щільність ймовірності неперервної випадкової величини?
4. Від яких параметрів залежить нормальний розподіл (розподіл Гауса)?
5. Від якої кількості параметрів залежить нормальний розподіл?
6. Поясніть суть методу відбракування.
7. В чому недоліки методу відбракування?
8. Яку вибірку вважають малою (великою)?
9. За яким критерієм можна перевірити гіпотезу відносно нормальності закону розподілу ймовірностей у разі великої (малої) вибірки?
10. Як визначити вибіркову дисперсію (незміщену точкову оцінку дисперсії) та точкову оцінку середнього квадратичного відхилення випадкової величини?
11. Як знайти оцінки параметрів розподілу Гауса за гістограмою?
12. Що таке довірчий інтервал, довірча ймовірність, рівень значимості?
13. Як визначають для нормальної генеральної сукупності α%-ві довірчі границі точкової оцінки математичного сподівання?
14. Як визначають для нормальної генеральної сукупності α%-ві довірчі границі точкової оцінки середнього квадратичного відхилення?
15. Що таке квантіль розподілу?

Лабораторна робота № 3.
Моделювання стаціонарного випадкового процесу

Мета роботи: отримати практичні навички моделювання стаціонарного випадкового процесу з використанням комп’ютера.

Завдання: Спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ має наступний вираз:

$$S_x(\omega) = \frac{D_x \alpha_x}{\pi} \frac{\omega^2 + b_x^2}{\omega^4 + 2\left(\alpha_x^2 - \beta_x^2\right)\omega^2 + b_x^4}, \tag{3.1}$$

де D_x – дисперсія процесу $x(t)$; α_x і β_x – відповідно коефіцієнт затухання і середня частота кореляційної функції процесу $x(t)$; $b_x^2 = \alpha_x^2 + \beta_x^2$.

Виконати моделювання стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ на інтервалі часу [0, 300] секунд. Представити графіки $x(t)$ і $\dot{x}(t)$. Навести значення кроку інтегрування за часом Δt та точкову оцінку середньоквадратичного відхилення $\hat{\sigma}_x$. Дані для моделювання наведені в таблиці 3.1, $x(0) = \sigma_x$; $\dot{x}(0) = 0$; $\varepsilon = 0{,}05$.

Таблиця 3.1

№ варіанту	β_x	α_x	σ_x	№ варіанту		α_x	σ_x
1	0,9	0,3	0,012	15	0,8	0,3	0,015
2	0,9	0,3	0,030	16	0,8	0,3	0,035
3	0,9	0,3	0,060	17	0,8	0,3	0,065
4	0,9	0,3	0,100	18	0,8	0,3	0,105
5	0,9	0,3	0,130	19	0,8	0,3	0,135
6	0,7	0,3	0,075	20	0,7	0,4	0,080
7	0,7	0,3	0,100	21	0,7	0,4	0,105
8	1,1	0,3	0,060	22	1,0	0,3	0,065
9	1,1	0,3	0,130	23	1,0	0,3	0,135
10	0,9	0,7	0,080	24	0,9	0,6	0,085
11	0,9	0,7	0,150	25	0,9	0,6	0,155
12	0,9	0,3	0,040	26	0,9	0,4	0,045
13	0,9	0,3	0,070	27	0,9	0,4	0,075
14	0,9	0,3	0,070	28	0,9	0,4	0,075

Загальні теоретичні відомості

Нагадаємо деякі відомості з теорії випадкових процесів. Випадковим процесом називають випадкову функцію, аргументом якої є час.

Кореляційною (або автокореляційною) функцією випадкового процесу $X(t)$ називають невипадкову функцію двох аргументів $K_X(t,t')$, яка при кожній парі значень аргументів t і t' дорівнює кореляційному моменту відповідних перерізів випадкового процесу:

$$K_X(t\ t') = M\left\{\left[X(t) - m_X(t)\right]\left[X(t') - m_X(t')\right]\right\}.$$

Спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ називають границю відношення дисперсії, яка припадає на даний інтервал частот до довжини цього інтервалу, коли остання прямує до нуля.

Стаціонарним у вузькому розумінні випадковим процесом називають такий випадковий процес $X(t)$, для якого n-вимірний диференційний закон розподілу $f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ залежить при будь-якому n тільки від інтервалів часу між моментами часу $t_1, t_2, \ldots, t_n$, наприклад, залежить тільки від $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1, \ldots$, $t_n - t_1$.

Випадковий процес називається стаціонарним у широкому розумінні, якщо його математичне сподівання не залежить від часу t, а кореляційна функція є функцією тільки різниці моментів часу, наприклад, $\tau = t_2 - t_1$.

Окрім властивості стаціонарності при аналізі випадкових процесів зазвичай використовується припущення про ергодичність стаціонарних процесів. Ергодичність, як і стаціонарність, може визначатися по відношенню до різних ймовірнісних характеристик – математичному сподіванню, дисперсії, кореляційної функції. Стаціонарний процес називається ергодичним по відношенню до математичного сподівання, якщо середнє за множиною реалізацій дорівнює середньому за часом

$$M\{X_t\} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i .$$

Аналогічно визначається ергодичність по відношенню до дисперсії, кореляційної функції та інших характеристик.

Властивість ергодичності дозволяє при аналізі випадкових процесів знаходити оцінки їх ймовірнісних характеристик за однією реалізацією, замінюючи усереднення за множиною реалізацій усередненням за часом за однією реалізацією. Так, оцінки математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу визначаються за наступними формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ ;$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 ;$$

$$\hat{K}_X\left(\tau\right) = \hat{K}_X\left(\Delta t \cdot j\right) = \frac{1}{N-j}\sum_{i=1}^{N-j}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(x_{i+j} - \bar{x}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

де Δt – крок дискретизації за часом.

Спектральна щільність $S_X\left(\omega\right)$ і кореляційна функція $K_X\left(\tau\right)$ зв'язані перетворенням Фур'є. У дійсній формі цей зв'язок такий

$$S_X\left(\omega\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} K_X\left(\tau\right)\cos\omega\tau\, d\tau \ ;$$

$$K_X\left(\tau\right) = 2\int_0^{\infty} S_X\left(\omega\right)\cos\omega\tau\, d\omega \, .$$

У комплексній формі цей зв'язок має наступний вигляд:

$$S_X\left(\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_X\left(\tau\right) d\tau;$$

$$K_X\left(\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_X\left(\omega\right) d\omega \, .$$

У разі, якщо спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу $x\left(t\right)$ має вираз (3.1), то $x\left(t\right)$ описується наступним стохастичним диференціальним рівнянням (СДР):

$$\ddot{x} + 2\alpha_x\dot{x} + b_x^2 x = \sqrt{2D_x\alpha_x}\left[\dot{n}\left(t\right) + b_x n\left(t\right)\right], \qquad (3.2)$$

де $n\left(t\right)$ – білий шум.

Нагадаємо, білий шум (white noise) – це нормальний стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім значенням та кореляційною функцією, яка дорівнює дельта-функції.

Аналітичного рішення СДР (3.2) не існує. Тому ми будемо знаходити чисельне рішення СДР (3.2). Для цього спочатку перетворимо СДР (3.2) у систему рівнянь 1-го порядку шляхом введення двох нових змінних $x_1 = x$ та $x_2 = \dot{x} - \sqrt{2D_x\alpha_x}\,n(t)$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sqrt{2D_x\alpha_x}\,n(t); \tag{3.3}$$

$$\dot{x}_2 = \sqrt{2D_x\alpha_x}\left[b_x - 2\alpha_x\right]n(t) - 2\alpha_x x_2 - b_x^2 x_1. \tag{3.4}$$

На основі системи рівнянь (3.3) і (3.4) будуємо систему різницевих рівнянь за методом Ейлера

$$x_{1_{i+1}} = x_{1_i} + \left\{x_{2_i} + \sqrt{2D_x\alpha_x}\,n(t_i)\right\}\Delta t; \tag{3.5}$$

$$x_{2_{i+1}} = x_{2_i} + \left\{\sqrt{2D_x\alpha_x}\left[b_x - 2\alpha_x\right]n(t_i) - 2\alpha_x x_{2_i} - b_x^2 x_{1_i}\right\}\Delta t, \tag{3.6}$$

де $n(t_i)$ – ордината білого шуму в момент часу t_i, $n(t_i) = z_i\sqrt{N_0/\Delta t}$; z_i – значення випадкової величини з розподілом Гауса з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсію, $z_i \sim N(0,1)$; N_0 – інтенсивність білого шуму. Тут $N_0 = 1$.

Чисельне рішення за різницевими рівняннями (3.5) і (3.6) збігається у середньоквадратичному. У цьому разі може бути застосований такий критерій збіжності:

$$\left|\frac{\sigma_x - \hat{\sigma}_x}{\sigma_x}\right| \le \varepsilon, \tag{3.7}$$

де ε – задана відносна похибка; $\hat{\sigma}_x$ – точкова оцінка середнього квадратичного відхилення σ_x процесу $x(t)$

Результатом моделювання стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ за різницевими рівняннями (3.5) і (3.6) буде чисельне рішення СДР або інакше – послідовність значень $x(t)$, яка задовольняє критерію (3.7). Як правило чисельне рішення за різницевими рівняннями (3.5) і (3.6) вдається отримати після декількох прогонів. При цьому для кожного нового прогону слід обирати крок інтегрування за часом Δt меншим за попередній приблизно на 5%. Зазначимо, при першому прогоні потребує визначення початкове значення кроку інтегрування за часом Δt. Його рекомендується обирати таким чином: Δt повинен бути значно більшим за час кореляції та значно меншим за час постійної системи, яка моделюється. Щоб не помилитися з вибором ми рекомендуємо порадитися з викладачем.

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Визначення початкового значення кроку інтегрування за часом Δt.

2) Моделювання стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ за різницевими рівняннями (3.5) і (3.6). Визначення значення кроку інтегрування за часом Δt та точкової оцінки середньоквадратичного відхилення $\hat{\sigma}_x$ за результатами моделювання.

3) Побудова графіків $x(t)$ і $\dot{x}(t)$.

4) Формулювання висновків за результатами виконання лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Що таке випадковий процес?
2. Які припущення використовують при аналізі випадкових процесів?
3. Дайте визначення стаціонарного випадкового процесу у широкому та вузькому розумінні.
4. Поясніть властивість ергодичності.
5. Що таке кореляційна функція?
6. Що таке спектральна щільність?
7. Що таке білий шум?
8. Як моделюють білий шум?
9. Для чого СДР 2-го порядку перетворюють у систему двох СДР 1-го порядку?
10. Поясніть метод Ейлеру.
11. Як визначити початкове значення кроку інтегрування за часом Δt?
12. Як обрати крок інтегрування за часом Δt для нового прогону?
13. Який критерій збіжності використовують при знаходженні чисельного рішення СДР за методом Ейлера?

Лабораторна робота № 4.
Моделювання нелінійної стохастичної диференціальної системи

Мета роботи: отримати практичні навички моделювання нелінійної стохастичної диференціальної системи з використанням комп'ютера.

Завдання: Вихідний сигнал нелінійної СДС описуються наступним рівнянням:

$$\ddot{y} + b_1\dot{y} + b_2\left|\dot{y}\right|\dot{y} + c_1 y + c_3 y^3 = x(t) \tag{4.1}$$

з початковими умовами $y(0) = y_0$; $\dot{y}(0) = 0$.

Випадковий вплив $x(t)$ описується СДР (3.2) з роботи № 3.

Виконати моделювання вихідного сигналу системи на інтервалі часу [0, 300] секунд. Представити графіки залежностей $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $x(t)$ і $\dot{x}(t)$. Навести значення кроку інтегрування за часом Δt та точкові оцінки середньоквадратичних відхилень $\hat{\sigma}_y$ і $\hat{\sigma}_x$. Данні для моделювання за варіантами наведені в таблицях 3.1 та 4.1.

Таблиця 4.1

№ варіанту	b_1	b_2	σ_x	y_0
1, 15	0,01	0,0	0,012	0,154
2, 16	0,01	0,2	0,030	0,161
3, 17	0,01	1,0	0,060	0,151
4, 18	0,01	2,0	0,100	0,165
5, 19	0,01	3,0	0,130	0,169
6, 20	0,01	1,0	0,075	0,168
7, 21	0,01	3,0	0,100	0,145
8, 22	0,01	1,0	0,060	0,142
9, 23	0,01	3,0	0,130	0,152
10, 24	0,01	1,0	0,080	0,153
11, 25	0,01	3,0	0,150	0,166
12, 26	0,04	0,2	0,040	0,170
13, 27	0,04	1,0	0,070	0,160
14, 28	0,07	0,6	0,070	0,179

Інші параметри такі: $c_1 = 1$ і $c_3 = -1$ (для варіантів з 1 по 14); $c_1 = 1{,}1$ і $c_3 = -1{,}1$ (для варіантів з 15 по 28); $\sigma_y = y_0$; $\varepsilon = 0{,}05$.

Також виконати моделювання вихідного сигналу системи на інтервалі часу [0, 300] секунд у разі, коли у якості моделі випадкового впливу $x(t)$ використовується білий шум. Представити графіки $y(t)$, $\dot{y}(t)$ та $x(t)$. Навести значення кроку інтегрування за часом Δt та точкову оцінку середньоквадратичного відхилення $\hat{\sigma}_y$.

Зробити висновки щодо отриманих результатів.

Загальні теоретичні відомості

Стохастичною диференціальною системою (СДС) прийнято називати таку систему, поведінка якої описується стохастичним диференціальним рівнянням (СДР). Велика кількість динамічних об'єктів у техніці є саме такими системами.

Аналітичного рішення СДР (4.1) не існує. Тому ми будемо знаходити чисельне рішення СДР (4.1). Для цього спочатку перетворимо СДР (4.1) у систему рівнянь 1-го порядку шляхом введення двох нових змінних $y_1 = y$ та $y_2 = \dot{y}$

$$\dot{y}_1 = y_2; \tag{4.2}$$

$$\dot{y}_2 = x_1 - b_1 y_2 - b_2 |y_2| y_2 - c_1 y_1 - c_3 y_1^3. \tag{4.3}$$

Тут також введена нова змінна $x_1 = x$. На основі системи рівнянь (4.2) і (4.3) будуємо систему різницевих рівнянь за методом Ейлера

$$y_{1_{i+1}} = y_{1_i} + y_{2_i} \Delta t; \tag{4.4}$$

$$y_{2_{i+1}} = y_{2_i} + \left(x_{1_i} - b_1 y_{2_i} - b_2 \left| y_{2_i} \right| y_{2_i} - c_1 y_{1_i} - c_3 y_{1_i}^3 \right) \Delta t. \tag{4.5}$$

Моделювання вихідного сигналу системи у разі, коли випадковий вплив $x(t)$ описується СДР (3.2), здійснюється за різницевими рівняннями (4.4), (4.5), (3.5) і (3.6).

Чисельне рішення за різницевими рівняннями (4.4), (4.5), (3.5) і (3.6) збігається у середньоквадратичному. У цьому разі може бути застосований такий критерій збіжності:

$$\left|\frac{\sigma_y-\hat{\sigma}_y}{\sigma_y}\right|+\left|\frac{\sigma_x-\hat{\sigma}_x}{\sigma_x}\right|\le\varepsilon, \qquad (4.6)$$

де ε – задана відносна похибка; $\hat{\sigma}_y$ та $\hat{\sigma}_x$ – точкові оцінки середньоквадратичних відхилень σ_y і σ_x процесів $y(t)$ та $x(t)$ відповідно.

Результатом моделювання випадкового процесу $y(t)$ за різницевими рівняннями (4.4), (4.5), (3.5) і (3.6) буде чисельне рішення системи СДР або інакше – послідовності значень $y(t)$ і $x(t)$, які задовольняють критерію (4.6). Як правило, чисельне рішення за різницевими рівняннями (4.4), (4.5), (3.5) і (3.6) вдається отримати після декількох прогонів. При цьому для кожного нового прогону слід обирати крок інтегрування за часом Δt, меншим за попередній приблизно на 5%. Зазначимо, при першому прогоні потребує визначення початкове значення кроку інтегрування за часом Δt. Його рекомендується обирати таким чином: Δt повинен бути значно більшим за час кореляції та значно меншим за час постійної системи, яка моделюється.

Моделювання вихідного сигналу системи у разі, коли у якості моделі випадкового впливу $x(t)$ використовується білий шум, здійснюється за різницевими рівняннями (4.4) і (4.5). При цьому інтенсивність білого шуму (постійну ординату його спектральної щільності) зв'язують зі спектральною щільністю (3.1) випадкового впливу $x(t)$, наприклад, прирівнюючи їх дисперсії (площі спектральних щільностей).

Чисельне рішення за різницевими рівняннями (4.4) і (4.5) збігається у середньоквадратичному. У цьому разі також може бути застосований критерій збіжності (4.6).

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Визначення початкового значення кроку інтегрування за часом Δt.

2) Моделювання вихідного сигналу системи у разі, коли випадковий вплив $x(t)$ описується СДР (3.2), за різницевими рівняннями (4.4), (4.5), (3.5) і (3.6). Визначення значення кроку

інтегрування за часом Δt та точкових оцінок середньоквадратичних відхилень $\hat{\sigma}_y$ і $\hat{\sigma}_x$ за результатами моделювання.

3) Побудова графіків $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $x(t)$ і $\dot{x}(t)$.

4) Моделювання вихідного сигналу системи у разі, коли у якості моделі випадкового впливу $x(t)$ використовується білий шум, за різницевими рівняннями (4.4) і (4.5). Визначення значення кроку інтегрування за часом Δt та точкових оцінок середньоквадратичних відхилень $\hat{\sigma}_y$ і $\hat{\sigma}_x$ за результатами моделювання.

5) Побудова графіків $y(t)$, $\dot{y}(t)$ і $x(t)$.

6) Формулювання висновків за результатами виконання лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Яку систему називають стохастичною диференціальною системою?
2. Наведіть приклад математичної моделі, яка описує поведінку динамічного об’єкту при дії на нього випадкових впливів.
3. Що таке стохастичне диференційне рівняння?
4. Що таке білий шум?
5. Чому у якості моделі випадкового впливу на систему можна використовувати білий шум?
6. Як здійснити моделювання випадкового впливу на систему за допомогою білого шуму?
7. Як знайти інтенсивність білого шуму у разі його застосування у якості моделі випадкового впливу на систему?
8. Для чого СДР 2-го порядку перетворюють у систему двох СДР 1-го порядку?
9. Поясніть метод Ейлеру.
10. Як визначити початкове значення кроку інтегрування за часом Δt?
11. Як обрати крок інтегрування за часом Δt для нового прогону?
12. Який критерій збіжності використовують при знаходженні чисельного рішення СДР за методом Ейлера?

Лабораторна робота № 5.
Оцінювання параметрів нелінійної стохастичної диференціальної системи узагальненим методом моментів

Мета роботи: отримати практичні навички оцінювання параметрів нелінійної стохастичної диференціальної системи узагальненим методом моментів із застосуванням методів оптимізації з використанням комп'ютера.

Завдання: За реалізаціями випадкових процесів $y(t)$ і $\dot{y}(t)$, що отримані в роботі № 4 у разі, коли в якості моделі випадкового впливу $x(t)$ використовується білий шум, виконати оцінювання параметрів нелінійної стохастичної диференціальної системи (СДС), поведінка якої описується СДР (4.1), узагальненим методом моментів. А саме: за узагальненим методом моментів знайти точкові оцінки $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_1$ і $\hat{c}_3$ відповідних параметрів b_1, b_2, c_1 і c_3. Представити графіки $\hat{b}_1(t)$, $\hat{b}_2(t)$, $\hat{c}_1(t)$ і $\hat{c}_3(t)$, а також точкові оцінки дисперсій відповідних параметрів b_1, b_2, c_1 і c_3.

Зробити висновки щодо отриманих результатів.

Загальні теоретичні відомості

Оцінювання невідомих параметрів нелінійної стохастичної диференціальної системи узагальненим методом моментів (УММ – generalized method of moments) здійснюється в результаті вирішення наступної оптимізаційної задачі (задачі математичного програмування):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\}^T \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) \{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\}, \tag{5.1}$$

де $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ – вектор моментних умов; $\boldsymbol{\theta}$ – вектор параметрів СДР, які потребують оцінювання; $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор статистичних моментів; $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ – додатна напіввизначена вагова матриця, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{C}^{-1}$; $\mathbf{C}$ – кореляційна матриця. Фактично елементи вагової матриці $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ визначають ті вагові коефіцієнти, з якими беруться моментні умови при оцінюванні вектору $\boldsymbol{\theta}$.

Для вирішення оптимізаційної задачі (5.1) може бути рекомендований, наприклад, метод градієнтного спуску.

З лінійної алгебри відомо, що матриця є додатною напіввизначеною матрицею, якщо її квадратична форма більше або дорівнює нулю. Тобто, в (5.1) $\{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\}^T \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) \{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\} \geq 0$ для будь-яких $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$.

Перші n компонент вектору $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ визначаються як

$$m_k(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{M}\{f_k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta})\},$$

де $\mathrm{M}\{\ \}$ – операція математичного сподівання. В нашому випадку в якості перших двох компонент $f_1(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta})$ та $f_2(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta})$ потрібно взяти праві частини рівнянь (4.2) та (4.3), замінивши x_1 на $n(t)$.

Елементи кореляційної матриці знаходять як

$$c_{kl}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{M}\left\{\left[f_k(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) - m_k(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right]\left[f_l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) - m_l(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\right]\right\}, \quad (5.2)$$

$$k,l = 1,\ldots,0{,}5n!/(n-2)!$$

Використовуючи формулу Іто для системи рівнянь (4.2) і (4.3) та функцій y_1^2, y_2^2, y_1y_2, y_1^3, y_2^3, $y_1^2y_2$, $y_1y_2^2$, $y_1^2y_2^2$, $y_1^3y_2$, $y_1y_2^3$, y_1^4, y_2^4 визначають наступні компоненти вектору $f(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta})$, які з першими двома записуються як

$$f_1(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = y_2;$$
$$f_2(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = n(t) - y_2b_1 - y_2|y_2|b_2 - y_1c_1 - y_1^3c_3;$$
$$f_3(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = 2y_1y_2;$$
$$f_4(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = 2\left(y_2n(t) - y_2^2b_1 - y_2^2|y_2|b_2 - y_1y_2c_1 - y_1^3y_2c_3\right) + N_0;$$
$$f_5(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = y_1n(t) - y_1y_2b_1 - y_1y_2|y_2|b_2 - y_1^2c_1 - y_1^4c_3 + y_2^2;$$
$$f_6(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) = 3y_1^2y_2; \quad (5.3)$$
$$f_7(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = 3\left(y_2^2n(t) - y_2^3b_1 - y_2^3|y_2|b_2 - y_1y_2^2c_1 - y_1^3y_2^2c_3 + y_2N_0\right);$$
$$f_8(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = y_1^2n(t) - y_1^2y_2b_1 - y_1^2y_2|y_2|b_2 - y_1^3c_1 - y_1^5c_3 + 2y_1y_2^2;$$
$$f_9(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) = 2\left(y_1y_2n(t) - y_1y_2^2b_1 - y_1y_2^2|x_2|b_2 - y_1^2y_2c_1 - y_1^4y_2c_3\right) + y_1N_0 + y_2^3;$$
$$f_{10}(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = 2\left(y_1y_2^3 + y_1^2y_2n(t) - y_1^2y_2^2b_1 - y_1^2y_2^2|y_2|b_2 - y_1^3y_2c_1 - y_1^5y_2c_3\right) + y_1^2N_0;$$
$$f_{11}(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = y_1^3n(t) - y_1^3y_2b_1 - y_1^3y_2|y_2|b_2 - y_1^4c_1 - y_1^6c_3 + 3y_1^2y_2^2;$$
$$f_{12}(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = 3\left(y_1y_2N_0 + y_1y_2^2n(t) - y_1y_2^3b_1 - y_1y_2^3|y_2|b_2 - y_1^2y_2^2c_1 - y_1^4y_2^2c_3\right) + y_2^4;$$
$$f_{13}(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = 4y_1^3y_2;$$
$$f_{14}(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}) = 4\left(y_2^3n(t) - y_2^4b_1 - y_2^4|y_2|b_2 - y_1y_2^3c_1 - y_1^3y_2^3c_3\right) + 6y_2^2N_0.$$

Після операції математичного сподівання для компонент вектору $f(\mathbf{y},\boldsymbol{\theta})$ (5.3) маємо

$$
\begin{aligned}
&m_1(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_{1_2};\\
&m_2(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = -\alpha_{1_2} b_1 - \alpha_{2_{|2|}} b_2 - \alpha_{1_1} c_1 - \alpha_{3_1} c_3;\\
&m_3(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 2\alpha_{1_1 1_2};\\
&m_4(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = N_0 - 2\left(\alpha_{2_2} b_1 + \alpha_{3_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_1 1_2} c_1 + \alpha_{3_1 1_2} c_3\right);\\
&m_5(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_{2_2} - \alpha_{1_1 1_2} b_1 - \alpha_{1_1 2_{|2|}} b_2 - \alpha_{2_1} c_1 - \alpha_{4_1} c_3;\\
&m_6(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 3\alpha_{2_1 1_2};\\
&m_7(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 3\left(\alpha_{1_2} N_0 - \alpha_{3_2} b_1 - \alpha_{4_{|2|}} b_2 - \alpha_{1_1 2_2} c_1 - \alpha_{3_1 2_2} c_3\right);\\
&m_8(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_{2_1 1_2} b_1 + \alpha_{2_1 2_{|2|}} b_2 + \alpha_{3_1} c_1 + \alpha_{5_1} c_3 - 2\alpha_{1_1 2_2}; \qquad (5.4)\\
&m_9(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_{1_1} N_0 + \alpha_{3_2} - 2\left(\alpha_{1_1 2_2} b_1 + \alpha_{1_1 3_{|2|}} b_2 + \alpha_{2_1 1_2} c_1 + \alpha_{4_1 1_2} c_3\right);\\
&m_{10}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 2\left(\alpha_{1_1 3_2} - \alpha_{2_1 2_2} b_1 - \alpha_{2_1 3_{|2|}} b_2 - \alpha_{3_1 1_2} c_1 - \alpha_{5_1 1_2} c_3\right) + \alpha_{2_1} N_0;\\
&m_{11}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 3\alpha_{2_1 2_2} - \alpha_{3_1 1_2} b_1 - \alpha_{3_1 2_{|2|}} b_2 - \alpha_{4_1} c_1 - \alpha_{6_1} c_3;\\
&m_{12}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 3\left(\alpha_{1_1 1_2} N_0 - \alpha_{1_1 3_2} b_1 - \alpha_{1_1 4_{|2|}} b_2 - \alpha_{2_1 2_2} c_1 - \alpha_{4_1 2_2} c_3\right) + \alpha_{4_2};\\
&m_{13}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 4\alpha_{3_1 1_2};\\
&m_{14}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = 6\alpha_{2_2} N_0 - 4\left(\alpha_{4_2} b_1 + \alpha_{5_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_1 3_2} c_1 + \alpha_{3_1 3_2} c_3\right),
\end{aligned}
$$

де $\alpha_{k_i} = \mathrm{M}\left\{y_i^k\right\}$; $\alpha_{k_i l_j} = \mathrm{M}\left\{y_i^k y_j^l\right\}$; $\alpha_{k_{|2|}} = \mathrm{M}\left\{y_2^{k-1}\left|y_2\right|\right\}$; $\alpha_{k_1 l_{|2|}} = \mathrm{M}\left\{y_1^k y_2^{l-1}\left|y_2\right|\right\}$. Тут індекси i та j позначають номери змінних в рівняннях (4.2) та (4.3) – це змінні y_1 або y_2.

Перевага УММ в порівнянні з таким відомим методом як метод максимальної правдоподібності полягає у тому що для визначення $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ та $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ не потрібно знати аналітичний вираз функції щільності ймовірності в залежності від вектору $\boldsymbol{\theta}$ та компонентів СДР у разі застосування формули Іто. В порівнянні з іншим класичним методом – методом моментів перевага УММ у тому, що не потрібно обирати певні моментні умови для знаходження оцінок певної кількості параметрів СДР: у разі застосування УММ всі моментні умови використовуються, при чому кожна зі своєю вагою.

Але недолік УММ пов'язаний з проблемою стрімкого ускладнення рішення задачі (5.1) при збільшенні компонентів СДР. Так, як ми побачили, вже для СДР 2-го порядку, компоненти якого розподілені не за нормальним законом, та при використанні статистичних моментів до 4-го порядку вектор $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ складається з 14 компонентів (5.4), а матриця $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ має 196 елементів.

Для вирішення цієї проблеми в [9] було запропоновано будувати нормалізоване СДР на основі нормалізуючого перетворення за СДР, яке описує поведінку нелінійної СДС. Далі на основі нормалізованого СДР знаходити вектор моментних умов і вагову матрицю. Вказаний підхід дозволяє зменшити розміри вектору моментних умов і вагової матриці. Так, при оцінюванні параметрів СДР 2-го порядку вектор моментних умов вже складається з 5 компонентів, а вагова матриця має лише 25 елементів. При цьому, як було показано в [9], точність оцінок параметрів СДР із застосуванням нормалізуючих перетворень зменшується незначно. В якості нормалізуючого перетворення рекомендується використовувати перетворення Джонсона [9 – 11].

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Сформувати вектор $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$ з компонентами (5.4).

2) Сформувати кореляційну матрицю **C** з елементами (5.2).

3) Сформувати вагову матрицю $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$, яка є зворотною до матриці **C**.

4) Сформувати цільову функцію $\{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\}^T \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\{\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})\}$ для рішення оптимізаційної задачі (5.1).

5) Задати часовий інтервал, на якому будуть визначатися точкові оцінки $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_1$ і $\hat{c}_3$ – компоненти вектору $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

6) На заданому часовому інтервалі за реалізаціями випадкових процесів $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ визначити точкові оцінки статистичних моментів, що входять до кореляційної матриці **C** та компонентів вектору $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha})$.

7) Підставити визначені на етапі 6 точкові оцінки статистичних моментів в цільову функцію оптимізаційної задачі (5.1).

8) Знайти точкові оцінки $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_1$ і $\hat{c}_3$ в результаті рішення оптимізаційної задачі (5.1).

9) Змінити часовий інтервал, на якому будуть визначатися точкові оцінки $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{c}_1$ і $\hat{c}_3$.

10) Повторювати етапи 6 – 9 доки не буде вичерпано можливість змінювати часовий інтервал.

11) На кожній новій (починаючи з п’ятої) послідовності етапів 6 – 9 знаходити точкові оцінки дисперсій відповідних параметрів b_1, b_2, c_1 і c_3.

12) Представити графіки $\hat{b}_1(t)$, $\hat{b}_2(t)$, $\hat{c}_1(t)$ і $\hat{c}_3(t)$, а також точкові оцінки дисперсій відповідних параметрів b_1, b_2, c_1 і c_3.

13) Формулювання висновків за результатами виконання лабораторної роботи.

Контрольні питання

1. Яку систему називають стохастичною диференціальною системою?
2. Що таке стохастичне диференційне рівняння?
3. Що таке білий шум?
4. Поясніть суть узагальненого методу моментів.
5. Що є результатом множення вектору рядка на квадратну матрицю? Яка умова при цьому повинна виконуватися?
6. Що є результатом множення вектору рядка на вектор стовпчик? Яка умова при цьому повинна виконуватися?
7. Що є результатом транспонування вектору рядка?
8. Як визначається вагова матриця?
9. Як визначити зворотну матрицю?
10. Що визначають елементи вагової матриці?
11. Який метод може бути використаний для вирішення оптимізаційної задачі (5.1)?
12. Як визначаються елементи кореляційної матриці?
13. У чому перевага узагальненого методу моментів в порівнянні з методом максимальної правдоподібності (методу моментів)?
14. В чому полягає недолік узагальненого методу моментів?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Форсайт, Дж.** Машинные методы математических вычислений [Текст] / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 279 с.

2. Вероятностные методы в вычислительной технике: Учеб. пособие для вузов по спец. ЭВМ [Текст] / А.В. Крайников и др.; под ред. А.Н. Лебедева и Е.А. Чернявского. – М.: Высш. шк., 1986. – 312 с.

3. **Thomas, D.B.** Gaussian Random Number Generators [E-resource] / D.B. Thomas, W. Luk, P.H.W. Leong, J.D. Villasenor // ACM Computing Surveys. – 2007. – Vol. 39. – No. 4. – P. 1–38. Access mode: http://www.cse.cuhk.edu.hk/~phwl/mt/public/archives/papers/ grng_acmcs07.pdf

4. **Кендалл, М.** Теория распределений [Текст] / М. Кендалл, А. Стюарт // Пер. с англ. / Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 588 с.

5. **Приходько, С.Б.** Моделювання гаусівських випадкових величин на основі перетворення Джонсона із сім’ї S_B [Текст] / С.Б. Приходько // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 64–69.

6. **Приходько, С.Б.** Моделювання гаусівських випадкових величин із використанням перетворення Джонсона із сім’ї S_U [Текст] / С.Б. Приходько // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2015. – Т. 5, № 1. – С. 92–97.

7. **Поллард, Дж.** Справочник по вычислительным методам статистики [Текст] / Пер. с англ. В.С. Занадворова; Под ред. и с предисл. Е.М. Четыркина. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 344 с.

8. **Ситнік, В.Ф.** Імітаційне моделювання: Навч. посібник [Текст] / В.Ф. Ситнік, Н.С. Орленко. – К.: КНЕУ, 1998. – 232 с.

9. **Приходько, С.Б.** Оценка параметров нелинейных стохастических дифференциальных уравнений на основе нормализирующих преобразований [Текст] / С.Б. Приходько // Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2012. – № 1015. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип. 19. – С. 276–282.

10. **Приходько, С.Б.** Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Обробка експериментальних даних на ЕОМ» / С.Б. Приходько. – Миколаїв: НУК, 2005. – 52 с.

11. **Приходько, С.Б.** Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Обробка експериментальних даних на комп’ютері» / С.Б. Приходько, Л.М. Макарова, К.С. Пугаченко. – Миколаїв: НУК, 2018. – 76 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Верхні 100α%-ві точки розподілу χ^2

В таблиці А1 наведені верхні 100α%-ві точки розподілу χ^2, тобто такі значення x, що $P\left(\chi_\nu^2 > x\right) = \alpha$.

Таблиця А1

ν	α							
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,005
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$0{,}0^4 39$	$0{,}0^3 16$	$0{,}0^3 98$	$0{,}0^2 39$	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,0201	0,0506	0,103	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	36,42	39,36	42,98	45,56

Продовження таблиці А1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	10,52	11,52	13,12	14,61	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	124,3	129,6	135,8	140,2

Нижні 100α%-ві точки розподілу χ^2 дорівнюють верхнім $100(1-\alpha)$%-вим точкам.

Звернемо увагу на те, що якщо випадкова величина X має розподіл χ^2 з ν ступенями вільності і ν достатньо велико (скажімо, більше 30), то розподіл величини $Z=\sqrt{2X}-\sqrt{2\nu-1}$ є наближено нормальним з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією. Це дає змогу застосовувати таблиці нормального розподілу і попередню формулу для знаходження значення x для достатньо великих ν.

Додаток Б

Верхні 100α%-ві точки *t*-розподілу Стьюдента

В таблиці Б1 наведені верхні 100α%-ві точки *t*-розподілу Стьюдента, тобто такі значення x, що $P\left(t_\nu > x\right) = \alpha$.

Таблиця Б1

ν	α				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
1	2	3	4	5	6
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,08
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53
5	4,03	3,36	2,57	2,01	1,48
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44
7	3,50	3,00	2,36	1,90	1,42
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36
12	3,06	2,68	2,18	1,78	1,36
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,35
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,34
15	2,95	2,60	2,13	1,75	1,34
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33
19	2,86	2,54	2,09	1,73	1,33
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1,32
21	2,83	2,52	2,08	1,72	1,32
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32
25	2,79	2,48	2,06	1,71	1,32
26	2,78	2,48	2,06	1,71	1,32
27	2,77	2,48	2,05	1,70	1,31
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31

Продовження таблиці Б1

1	2	3	4	5	6
29	2,76	2,47	2,04	1,70	1,31
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,31
40	2,70	2,46	2,02	1,68	1,30
50	2,68	2,42	2,01	1,67	1,30
60	2,66	2,40	2,00	1,67	1,30
80	2,64	2,39	1,99	1,66	1,29
100	2,63	2,37	1,98	1,66	1,29
200	2,60	2,36	1,97	1,65	1,29
500	2,59	2,34	1,96	1,65	1,28
∞	2,576	2,326	1,960	1,645	1,282

Для отримання нижніх $100\alpha\%$-вих точок *t*-розподілу Стьюдента необхідно змінити знак у верхній $100\alpha\%$-вій точці.

НОТАТКИ

Навчальне видання

ПРИХОДЬКО Сергій Борисович
ПРИХОДЬКО Наталія Василівна
МАКАРОВА Лідія Миколаївна
ПУХАЛЕВИЧ Андрій Володимирович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Математичне моделювання систем і процесів та методи оптимізації»

Коректор – М. П. Фоміна
Верстка – Ю. С. Семенченко

Підписано до друку 23.09.2020 р. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Цифровий друк.
Умовно-друк. арк. 2,33. Наклад 100. Замовлення № 0107-22.
Ціна договірна. Віддруковано з готового оригінал-макета.

Видавець і виготовлювач
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail: publishing@nuos.mk.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК № 6402 від 19.09.2018 р.

Віддруковано в друкарні Видавничий дім «Гельветика»
73034, м. Херсон, вул. Паровозна, 46-а
Телефони +38 (0552) 39 95 80, +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08
E-mail: mailbox@helvetica.com.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК № 6424 від 04.10.2018 р.