

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Д. С. МІНЧЕВ, А. В. НАГІРНИЙ

**ІНФОРМАЦІЙНІ ОСНОВИ
СИСТЕМ АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ
ДВИГУНІВ ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ: ПЛАНУВАННЯ
ТА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою НУК

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ • НУК • 2012

УДК 004:621.43(075.8)
ББК 73:31.365я73
М 62

Автори:

Д. С. Мінчев, кандидат технічних наук, доцент кафедри двигунів внутрішнього згоряння;

А. В. Нагірний, аспірант, асистент кафедри двигунів внутрішнього згоряння

Рецензенти:

Б. Г. Тимошевський, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри двигунів внутрішнього згоряння;

Ю. Л. Мошенцев, кандидат технічних наук, доцент кафедри двигунів внутрішнього згоряння

Мінчев Д. С.

М 62 Інформаційні основи систем автоматизованого проектування двигунів внутрішнього згоряння: планування та обробка результатів експерименту : навчальний посібник / Д. С. Мінчев, А. В. Нагірний. – Миколаїв : НУК, 2012. – 100 с.

Наведено докладну інформацію щодо засобів автоматизації досліджень процесів у двигунах внутрішнього згоряння. Логічно пов'язані проблеми планування експерименту, представлення результатів експерименту за допомогою регресійних рівнянь та визначення екстремумів дослідних функцій. Розглянуті відповідні алгоритми і надані рекомендації щодо їх реалізації в сучасних програмних середовищах.

Призначено для студентів заочної та денної форми навчання при вивченні курсів "Інформаційні основи САПР ДВЗ", "Оптимізація режимів роботи двигунів внутрішнього згоряння", "Теоретичні основи оптимізації режимів роботи ДВЗ".

УДК 004:621.43(075.8)
ББК 73:31.365я73

Навчальне видання

**МІНЧЕВ Дмитро Степанович
НАГІРНИЙ Антон Вікторович**

**ІНФОРМАЦІЙНІ ОСНОВИ
СИСТЕМ АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ
ДВИГУНІВ ВНУТРІШНЬОГО ЗГОРЯННЯ: ПЛАНУВАННЯ
ТА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Навчальний посібник

Комп'ютерне верстання *В.Г. Мазанко*
Коректор *М.О. Паненко*

© Мінчев Д. С., Нагірний А. В., 2012
© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2012

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 5,8. Об'єм даних 2479 кб. Тираж 14. Вид. № 34. Зам. № 355.

Видавець і виготовник Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ВСТУП

Навчальний посібник присвячений питанням планування та обробки результатів експериментів, що здійснюються в процесі проектування, доводки та дослідження двигунів внутрішнього згоряння. Зміст посібника викладений у вигляді низки лабораторних робіт, що передбачає поглиблену самостійну роботу читача. Дані лабораторні роботи також передбачені планом навчальної дисципліни "Інформаційні основи систем автоматизованого проектування двигунів внутрішнього згоряння".

Лабораторні роботи стосуються автоматизації натурних та чисельних досліджень процесів у двигунах внутрішнього згоряння за допомогою ЕОМ. Під час виконання робіт засвоюється призначення та особливості побудови плану-матриці повного факторного та дробового факторного експерименту; використання регресійних рівнянь для обробки масивів експериментальних даних при інтерполяційному та оптимізаційному експериментах; знання алгоритмів пошуку екстремумів отриманих регресійних функцій з метою вибору оптимального поєднання значень факторів, вплив яких на роботу двигуна досліджувався в експерименті. В результаті виконання даних робіт отримуються розрахункові програми генерації плану-матриці експериментального дослідження, обчислення коефіцієнтів регресійних рівнянь та визначення екстремумів регресійних рівнянь. Ці програмні засоби можуть бути використані студентом під час подальшого навчання або застосовуватись в інженерній діяльності.

Логічне послідовне поєднання запропонованих лабораторних робіт дає змогу викладачеві, за його рішенням, видати "наскрізне" завдання студентам до всіх трьох робіт. У цьому випадку результати виконання лабораторної роботи № 1 є вихідними даними до виконання лабораторної роботи № 2, а результати виконання лабораторної роботи № 2 – вихідними даними

до лабораторної роботи № 3. Таким чином можна досягти більшої наочності запропонованого курсу лабораторних робіт, хоча це й вимагатиме від студента якісного та вчасного виконання кожної роботи.

Лабораторні роботи виконуються на ЕОМ з застосуванням сучасних програмних засобів. Вважається логічним в якості середовища програмування обрати Microsoft Visual Basic for Applications, вбудований в такі програмні засоби, як Microsoft Office, AutoCAD, SolidWorks тощо, адже вміння створення програм у цьому середовищі може бути застосоване студентом під час його подальшої інженерної роботи за спеціальністю. Крім того, виконання лабораторних робіт пов'язане з використанням таких програмних засобів, як Microsoft Word, Microsoft Excel, Mathcad, які мають бути засвоєні студентом на належному рівні.

Для забезпечення можливості виконання робіт студентами з різним рівнем базової підготовки з програмування та використання обчислювальної техніки, студент має змогу самостійно обирати складність виконання кожної роботи, від якої залежить кількість отриманих балів у відповідності до робочої навчальної програми дисципліни. Для збільшення кількості балів студент має змогу виконати додаткові завдання до кожної лабораторної роботи.



1. ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Під час підготовки до лабораторного заняття студент має ознайомитися з теоретичною частиною роботи, яка видається викладачем завчасно, мати з собою її роздруківку, а також роздруківку робочого аркуша. В разі невиконання вказаних вимог та в разі неявки на заняття, студент отримує додаткове завдання до лабораторної роботи, за виконання якого не отримує додаткових балів.

Кожний студент отримує індивідуальне завдання до лабораторних робіт та готує індивідуальний звіт, який захищає особисто. Послідовність виконання кожної лабораторної роботи наступна:

- вивчення теоретичної частини роботи;
- вибір рівня складності роботи та отримання у викладача завдання на виконання роботи;
- розробка алгоритму програми та побудова блок-схеми алгоритму;
- розробка інтерфейсу користувача в середовищі Microsoft Excel;
- реалізація алгоритму в середовищі Visual Basic for Applications;
- підготовка звіту по роботі.

Звіт до кожної лабораторної роботи готується в електронному вигляді в середовищі Microsoft Word та має містити:

- теоретичну частину;
- робочий аркуш;
- блок-схему алгоритму програми;
- роздруківку програмного коду;
- інтерфейс програми;
- результати роботи програми (таблиці, графіки, тощо).

Звіт подається викладачеві в електронному та роздрукованому вигляді, до звіту додається розроблений програмний засіб в електронному

вигляді. Робочий аркуш у роздрукованому вигляді обов'язково має містити підпис викладача, дату отримання завдання та обраний рівень складності.

При оформленні звіту необхідно дотримуватися вимог ЄСКД до конструкторської документації. Кожний аркуш має містити рамку та кутовий штамп з кодом спеціальності, номером групи, номером студента за списком та номером лабораторної роботи. Текст звіту набирається за наступними вимогами: тип шрифту – Times New Roman; висота шрифту – 14 пт.; міжрядковий інтервал – 1,5; відступ абзацу – 1,25 см. Формули набираються в редакторі Microsoft Equation. Латинські символи виділяють курсивом, кириличні та грецькі – набирають прямим шрифтом.

Вимоги до побудови графіків:

- при побудові графічних залежностей необхідно уникати кольорових зображень (якщо є можливість);

- фон графіка має бути білим, вісі та лінії сітки – чорними;

- текстові підписи на графіку та підписи шкали мають набиратися шрифтом Times New Roman, висота шрифту – 12 пт;

- необхідно намагатися обирати співвідношення масштабів кожної вісі графіку таким чином, щоб графік мав вигляд прямокутника зі співвідношенням сторін не більше 1:2;

- абсолютний масштаб кожної шкали обирається так, що кожне ділення шкали відповідає 1, або 2, або 2,5, або 5 одиницям зміни параметра даної шкали. Можливе збільшення названих цифр в 10, 100, 1000 разів. Масштаб шкали вказується у вигляду підпису під віссю.



2. ВИМОГИ ДО ПОБУДОВИ БЛОК-СХЕМИ АЛГОРИТМІВ

Блок-схема алгоритму програми призначена для наочного представлення її логічної структури за допомогою використання графічних символів (блоків). Блок-схеми необхідно виконувати згідно з ДСТУ 19.002–80 та ДСТУ 19.003–80.

При побудові блок-схеми алгоритму слід використовувати стандартні блоки, наведені в таблиці 2.1. Вказані блоки поєднуються в блок-схему за допомогою ліній потоку або стрілок, відображаючи розрахунковий алгоритм.

Співвідношення геометричних розмірів стандартних блоків. Розмір a повинен вибиратися з ряду 10, 15, 20 мм. Допускається збільшувати розмір a на число, кратне 5. Розмір b дорівнює $1,5 \cdot a$.

Лінія потоку. Для зображень ліній потоку існують правила:

- лінії потоку повинні бути паралельні лініям зовнішньої рамки блок-схеми;

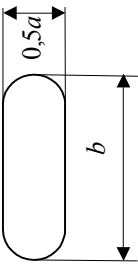
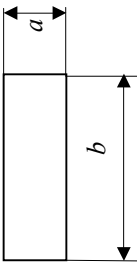
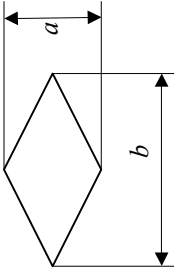
- зміна напрямку лінії потоку здійснюється під кутом 90° .

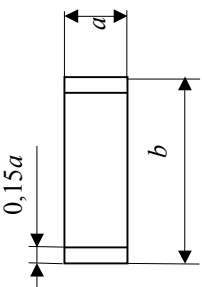
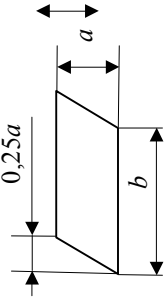
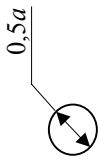
Алгоритмічні конструкції. Група кроків алгоритму, виконуваних послідовно один за одним без блоків умови, називається *лінійною послідовністю*. На рис. 2.1 зображено лінійну послідовність, що складається із двох кроків.

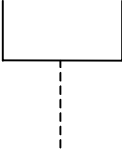
Розгалуження являє собою алгоритмічну конструкцію, в якій виконання того або іншого кроку залежить від істинності умови. Конструкція "розгалуження" записана в повній формі, якщо в ній присутні команди як для випадку правильного виконання умови, так і для хибного. На рис. 2.2 наведена блок-схема розгалуження в повній формі.

Якщо умова виконана правильно, то виконується команда "Дія 1", а якщо хибно – виконується команда "Дія 2".

∞ Таблиця 2.1. Стандартні блоки блок-схем алгоритмів

№	Найменування	Позначення	Функція
1	Термінатор (вхід-вихід)		Елемент відображає вхід із зовнішнього середовища або вихід з нього (найбільш часте застосування – початок і кінець програми). Всередині фігури записується відповідна дія.
2	Блок обчислень		Виконання однієї або кількох операцій, обробка даних будь-якого виду (зміна значення даних, форми подання, розташування). Всередині фігури записують безпосередньо операції.
3	Логічний блок (блок умови)		Показує рішення або функцію перемикального типу з одним входом і двома або більше альтернативними виходами, з яких тільки один може бути обраний після обчислення умов, визначених всередині цього елемента. Вхід в елемент позначається лінією, що входить зазвичай у верхню вершину елемента. Якщо виходів два чи три, то зазвичай кожен вихід позначається лінією, що виходить з решти вершин (бічних і нижньої). Якщо виходів більше трьох, то їх слід показувати однією лінією, що виходить з вершини (частіше нижньої) елемента, яка потім розгалужується. Відповідні результати обчислень можуть записуватися поруч з лініями, що відображають ці шляхи.

4	Зумовлений процес		Символ відображає виконання процесу, який складається з однієї або кількох операцій, що визначений в іншому місці програми (у підпрограмі, модулі). Всередині символу записується назва процесу і передані в нього дані.
5	Дані (введення-виведення)		Перетворення даних у форму, придатну для обробки (введення) або відображення результатів обробки (виведення). Цей символ не визначає носія даних (для вказівки типу носія даних використовуються специфічні символи).
6	Границя циклу		Символ складається з двох частин – відповідно початок і кінець циклу, операції, що виконуються в циклі, розміщуються між ними. Умови циклу записуються всередині символу початку або кінця циклу, залежно від типу організації циклу. Часто для зображення на блок-схемі циклу замість даного символу використовують логічний блок, вказуючи в ньому умову, а одну з ліній виходу замикають вище в блок-схемі (перед операціями циклу).
7	З'єднувач		Символ відображає вхід у частину схеми й вихід з іншої частини цієї схеми. Використовується для обриву лінії й продовження її в іншому місці (для запобігання зайвих перетинань або занадто довгих ліній, а також якщо схема складається з декількох сторінок). Відповідні сполучні символи повинні мати однакове (при тому унікальне) позначення.

№	Найменування	Позначення	Функція
8	Коментар		Використовується для більш докладного опису кроку, процесу або групи процесів. Опис розміщується з боку квадратної дужки й охоплюється нею по всій висоті. Пунктирна лінія йде до описуваного елемента або групи елементів (при цьому група виділяється замкнутою пунктирною лінією). Також символ коментарю варто використовувати в тих випадках, коли обсяг тексту, що розміщується всередині якогось символу, (наприклад, символ процесу, символ даних тощо), перевищує розмір символу.

У неповній формі конструкція "розгалуження" записана, якщо у розгалуженні присутні дії тільки для правильного виконання умови або тільки для хибного виконання умови. На рис. 2.3 представлені два види неповних форм конструкцій "розгалуження".

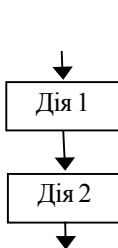


Рис. 2.1. Приклад блок-схеми лінійної послідовності алгоритму

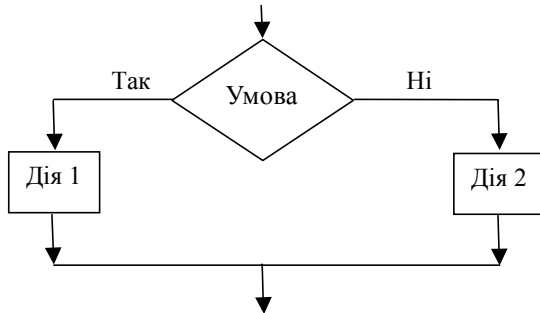


Рис. 2.2. Приклад блок-схеми розгалуженого алгоритму в повній формі

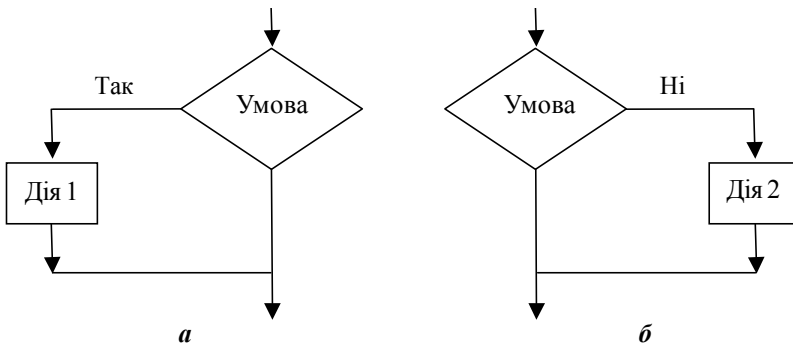


Рис. 2.3. Приклади блок-схем розгалуженого алгоритму в неповній формі:

а – у випадку правильного виконання умови; *б* – у випадку хибного виконання умови

Цикл являє собою алгоритмічну конструкцію, в якій багаторазово виконується одна й та сама послідовність кроків, що називається тілом циклу.

Кожне одноразове виконання циклу називається *ітерацією*.

Розрізняють два види циклів: цикли зі заздалегідь відомим числом ітерацій і цикли з невідомим до початку циклічного процесу числом повторень.

Якщо кількість ітерацій невідома, для визначення моменту припинення виконання тіла циклу використовується умова циклу. Якщо у випадку правильного виконання умови цикл триває, то така умова називається умовою продовження циклу. Якщо ж у випадку правильного виконання умови цикл завершується, то така умова називається умовою завершення циклу. У цьому випадку цикл триває доти, доки умова не виконається правильно.

Розрізняють цикли з перевіркою умови перед виконанням чергової ітерації і цикли з перевіркою умови після виконання чергової ітерації. Перші називаються циклами з передумовою (рис. 2.4), інші – з післяумовою (рис. 2.5).

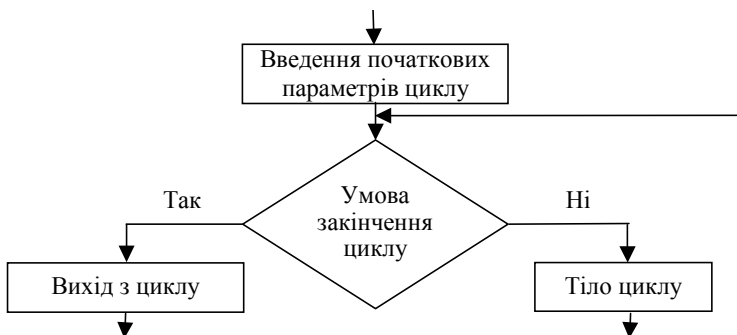


Рис. 2.4. Приклад блок-схеми циклу з передумовою

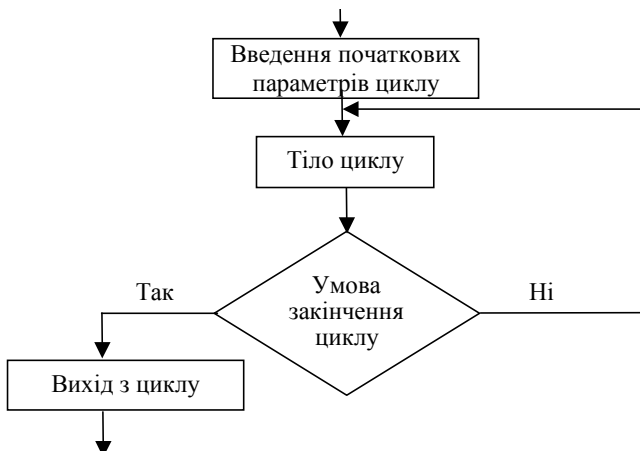


Рис. 2.5. Приклад блок-схеми циклу з післяумовою

3. ОСНОВИ ПРОГРАМУВАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ VISUAL BASIC

Реалізацію розроблених алгоритмів у даному курсі пропонується виконувати в середовищі Microsoft Excel, яке використовується як інтерфейс програми та засіб обробки вхідних та вихідних даних, і вбудований в Microsoft Excel мові програмування Visual Basic for Applications (VBA). Для забезпечення зв'язку між інтерфейсом користувача та програмним кодом слід використовувати стандартні об'єкти VBA.

VBA відноситься до мов об'єктно-орієнтованого програмування (ООП), які можна описати як методику аналізу, проектування і написання додатків за допомогою об'єктів. Об'єкт дозволяє розглядати дані разом з кодом, призначеним для їхньої обробки як єдине ціле. Всі візуальні елементи, такі, як **Робоча книга (WorkBook)**, **Робочий аркуш (Worksheet)**, **Активна клітинка (ActiveCell)**, **Діапазон (Range)**, **Діаграма (Chart)**, **Форма (UserForm)** тощо є об'єктами VBA. Кількість вбудованих об'єктів перевищує 100.

Об'єкти OLE i ActiveX

У VBA використовується механізм OLE (Object Linking and Embedding – зв'язування й впровадження об'єктів), який дозволяє взаємодіяти з будь-якими програмами, що підтримують OLE. Прикладом елементів, які можна інтегрувати за допомогою механізму OLE, є об'єкти, що вставляються OLEObject, створені, наприклад, за допомогою програм **Word Art**, **Clip Art** та ін. Всі OLE-об'єкти робочого аркуша утворюють сімейство OLEObjects. Крім того, OLE-технологія має так звану властивість **Automation**, за допомогою якої можна встановлювати властивості, застосовувати методи й обробляти події впроваджених об'єктів як звичайних об'єктів додатка. З 1996 р. фірма Microsoft увела

нову термінологію: OLE-об'єкт перейменований в об'єкт ActiveX, а OLE Automation – в Active Automation. Проте на практиці застосовують обидва терміни.

Ієрархія об'єктів

Ієрархія визначає зв'язок між об'єктами й показує шляхи доступу до них (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Ієрархія вбудованих об'єктів VBA

Повне посилання на об'єкт складається з ряду імен вкладених послідовно один в одного об'єктів. Роздільниками імен об'єктів у цьому ряді є крапки, ряд починається з об'єкта **Application** і закінчується ім'ям самого об'єкта. Наприклад, повне посилання на клітинку **A1** робочого аркуша **Аркуш1** робочої книги з ім'ям **Кафедра** має вигляд:

Application.Workbooks("Кафедра").Worksheets("Лист1").Range("A1")

Приводити щораз повне посилання на об'єкт не обов'язково. Звичайно досить обмежитися тільки неявним посиланням на об'єкт. У неявному посиланні, на відміну від повного, об'єкти, які активні в цей момент, як правило, можна опускати. У розглянутому випадку, якщо посилання на клітинку A1 дане в програмі, що виконується у середовищі Excel, то посилання на об'єкт **Application** можуть бути опущені, тобто досить привести відносне посилання:

Workbooks ("Кафедра") .Worksheets ("Лист1") .Range ("A1")

Якщо робоча книга **Кафедра** є активною, то посилання можна записати ще коротше:

Worksheets ("Лист1") .Range ("A1")

Якщо і робочий аркуш **Аркуш1** активний, то у відносному посиланні цілком достатньо обмежитися згадуванням тільки діапазону A1:

Range ("A1")

Методи

Метод представляє собою дію, виконувану над об'єктом.

Синтаксис застосування методу:

Об'єкт.Метод

Наприклад, за допомогою методу **Quit (Закрити)** закривається додаток (об'єкт **Application**):

Application.Quit

Метод можна застосовувати до всіх об'єктів сімейства. Наприклад, до сімейства **chartobjects (Діаграми)** робочого аркуша **Аркуш1** застосований метод **Delete (Видалити)**, що приводить до видалення всіх діаграм із робочого аркуша **Аркуш1**:

Worksheets ("Аркуш1") .ChartObjects.Delete

Властивості. Властивість являє собою атрибут об'єкта, що визначає його характеристики, такі, як розмір, колір, положення на екрані й стан об'єкта, наприклад доступність або видимість. Щоб змінити характеристики об'єкта, треба просто змінити значення його властивостей.

Синтаксис установки значення властивості:

Об'єкт.Властивість = Значення Властивості

У наступному прикладі змінюється заголовок вікна Excel за допомогою завдання властивості **Caption** об'єкту **Application**:

Application.Caption = "База даних"

Властивість можна змінювати відразу у всіх об'єктів сімейства. Наприклад, за допомогою установки властивості **Visible** (Видимість) значення **False** (Неправда) всі робочі аркуші активної книги (сімейство об'єктів **Worksheets**) не відображаються на дисплеї:

Worksheets.Visible = False

Серед властивостей особливе місце займають властивості, що повертають об'єкт. Найбільш часто вживані властивості наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. Властивості об'єктів VBA

ActiveWindow	Повертає активне вікно Excel
ActiveWorkbook	Повертає активну робочу книгу вікна Excel
ActiveSheet	Повертає активний аркуш активної робочої книги
ActiveDialog	Повертає активне діалогове вікно активного робочого аркуша
ActiveChart	Повертає активну діаграму активного робочого аркуша
ActiveCell	Повертає активну клітинку активного робочого аркуша

Події. Подія являє собою дію, розпізнавану об'єктом (наприклад, натиск мишею або натиснення клавіші), для якого можна запрограмувати відгук. Події виникають у результаті дій користувача або програми, або ж вони можуть бути викликані системою.

Суть програмування на VBA саме й полягає в цих двох поняттях: подія й відгук на нього. Якщо користувач робить якийсь вплив на систему, наприклад натискає кнопку, тоді в якості відгуку виконується код створеної користувачем процедури. Якщо такий відгук не створений, тобто не написана відповідна процедура, то система ніяк не реагує на дану подію і вона залишається без відгуку. Таким чином, дії, що відбуваються в системі, є подіями, а відгуки на них – процедурами. Цей спеціальний вид процедур, що генерують відгук на події, називається процедурами обробки подій. У цілому програмування на VBA складається в створенні коду програм, які генерують прямо або побічно відгуки на події.

Для забезпечення зв'язку між інтерфейсом користувача та кодом програми рекомендується використовувати методи та властивості сімейства **Worksheets**. Методом **Range** потрібно вказати адресу клітинки на сторінці Excel, на яку посилається програма при введенні чи виведенні даних. Властивість **Value** використовується для передачі вмісту клітинки на робочій сторінці Excel в код програми Visual Basic, а також передачі значення змінної з коду програми до певної клітинки робочої сторінки Excel. Властивість **Cells** використовується для передачі вмісту клітинки на робочій сторінці Excel, яка зміщена на декілька клітинок, кількість яких задана лічильниками, відносно основної клітинки на робочій сторінці Excel, заданої за допомогою методу Range, в код програми. Також за допомогою властивості Cells можна вивести значення змінної з коду програми до клітинки, яка зміщена на декілька клітинок, кількість яких задана лічильниками, відносно основної клітинки на робочій сторінці Excel, заданої за допомогою методу Range.

- Для введення значень змінних зі сторінки Excel в середовище VBA рекомендується використати наступну команду:

```
Назва_змінної = Worksheets ("Назва сторінки  
в Excel"). Range("Назва клітинки на сторінці  
Excel"). Value
```

- Для виведення значень змінних з середовища VBA на сторінку Excel рекомендується використати наступну команду:

```
Worksheets ("Назва сторінки в Excel ").  
Range ("Назва клітинки на сторінці Excel").  
Value = Назва_змінної.
```

- Для введення значень елементів масиву в середовище VBA зі сторінки Excel рекомендується використати наступну команду:

```
Значення_елемента_масиву = Worksheets  
("Назва сторінки в Excel").  
Range ("Назва клітинки на сторінці Excel").  
Cells("№ рядка, № стовпчика")
```

- Для виведення значень елементів масиву з середовища VBA на сторінку Excel рекомендується використати наступну команду:

```
Worksheets ("Назва сторінки в Excel").  
Range ("Назва клітинки на сторінці Excel").  
Cells("№ рядка, № стовпчика") =  
= Значення_елемента_масиву.
```


Для оголошення масивів даних використовують наступні команди. Якщо необхідно оголосити масив з фіксованим заздалегідь відомим розміром – статичний масив:

Dim Назва_масиву (розмір масиву) As тип_масиву

У разі, якщо розмір масиву заздалегідь невідомий або має змінюватися при виконанні відповідної процедури, тобто в разі необхідності оголошення динамічного масиву, використовують команду:

Dim Назва_масиву () As тип_масиву

Розмір динамічного масиву задається командами:

ReDim Назва_масиву ()

ReDim Назва_масиву () As тип_масиву

Необхідно зазначити, що за допомогою оператора ReDim тип елементів масиву не може бути змінений. Крім того, при виконанні даного оператора всі значення елементів масиву втрачаються.

Реалізація розробленого алгоритму програми в середовищі Visual Basic for Applications має здійснюватись з використанням наступних конструкцій управління:

- Конструкція **if...then**. Якщо при виконанні якої-небудь умови потрібно виконати один або кілька операторів, то потрібно використовувати конструкцію наступного виду:

**If умова then
оператор
End if**

За необхідності виконання певного оператора (чи блока операторів) залежно від результату перевірки умови потрібно використовувати наступну конструкцію:

**If умова then
оператор1
Else
оператор2
End if**

• Цикл **For...Next**. Використовується в тому випадку, коли кількість повторів заданого блоку операторів заздалегідь відомо. Дана конструкція має наступний вигляд:

```
For лічильник = поч. значення to кінц. значення
Step крок
    оператор1
    оператор2
Next лічильник
```

• Цикл **Do...Loop**. Використовується в тому випадку, коли невідома кількість повторів заданого блоку операторів. Дана конструкція має чотири різновиди:

цикл виконується, якщо значення умови = "false"

```
Do Until умова ' Цикл з передумовою
    оператор1
    оператор2
Loop
```

```
Do
    оператор1
    оператор2
Loop Until умова ' Цикл з післяумовою
цикл виконується, якщо значення умови = "true"
```

```
Do While умова ' Цикл з передумовою
    оператор1
    оператор2
Loop
```

```
Do
    оператор1
    оператор2
Loop While умова ' Цикл з післяумовою
```

• Цикл **While...Wend**. Також використовується в тому випадку, коли невідома кількість повторів заданого блоку операторів:

```
While умова ' Цикл з передумовою
    оператор1
    оператор2
Wend
```

Для створення окремих підпрограм, призначених для виконання певної послідовності дій, які можуть неодноразово використовуватись у тілі основної програми, зручно використовувати функції користувача та процедури користувача, які оголошуються наступним чином:

```
Function ім'я_функції (параметри) [As тип_функції]  
    оператори  
    ім'я_функції = ім'я_змінної  
End function
```

```
Sub ім'я_процедури (параметри)  
    оператори  
End Sub
```

Як параметри виступають змінні, значення яких надходять до функції або процедури з основного тіла програми, або має бути передано з підпрограми до основного тіла програми.

Виклик функції в основному тілі програми здійснюється наступним чином:

```
ім'я_змінної = ім'я_функції
```

Виклик процедури користувача в основному тілі програми може виконуватися двома способами:

```
Call ім'я_процедури (параметри)  
    ім'я_процедури параметри
```

У додатку наведені приклади використання вказаних конструкцій управління та команд при реалізації програми сортування масиву даних.



4. ПОБУДОВА ТРИВИМІРНИХ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ У СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD

Результатом виконання плану експериментальних досліджень, як буде сказано нижче, дуже часто є регресійна функція однієї або декількох змінних, що описує поведінку дослідного параметра двигуна (цільової функції) у певному діапазоні зміни набору змінних параметрів (факторів). Візуалізація такої функції допомагає наочно відобразити закономірності впливу факторів на цільову функцію та в першому наближенні отримати значення оптимального поєднання факторів (за якого цільова функція досягає екстремуму). В середовищі Mathcad реалізована зручна робота з двовимірними та тривимірними графіками, основи якої будуть розглянуті в даному розділі.

На рис. 4.1 представлений приклад побудови тривимірного графіка регресійного рівняння функції двох змінних $f(x, y)$ у середовищі Mathcad.

$$\begin{aligned}b_0 &:= 32.9189814814815 \\b_1 &:= 0.399074074074075 \\b_2 &:= 1 \\b_3 &:= -0.00500000000000002 \\b_4 &:= -0.0062962962962963 \\b_5 &:= -0.0241666666666667\end{aligned}$$

$$f(x, y) := b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2$$

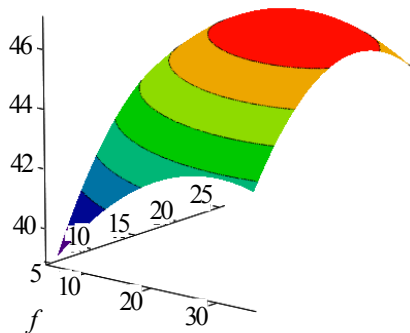


Рис. 4.1 Побудова графіка функції, яка задана в аналітичному вигляді

Для побудови даного графіка необхідно виконати наступні пункти:

1. Введіть значення коефіцієнтів регресійного рівняння $b_0, b_1, \dots, b_5$.
2. Наберіть ім'я функції двох змінних, оператор присвоювання ($:=$) та запишіть праву частину регресійного рівняння (наприклад виду: $f(x, y) := b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2$).

3. Встановіть курсор у те місце, де ви хочете побудувати графік.

4. На математичній панелі **Graph** (Графік) натисніть на кнопку **Surface Plot** (Тривимірний графік, або поверхня). На місці курсору з'явиться шаблон тривимірного графіка.

5. У єдине місце введення шаблону графіка введіть ім'я функції (не вказуючи в дужках змінні).

6. Для побудови графіка регресійного рівняння в границях зміни факторів необхідно натиснути на графік правою кнопкою миші і в меню **Властивості** на вкладці **Осі** відмінити автомасштабування осей X та Y та вказати границі зміни факторів вручну.

Для визначення області, в якій знаходиться екстремум регресійної функції, можна візуалізувати графік функції $f(x, y)$ у вигляді ліній рівня так, як зображено на рис. 4.2. Для цього на математичній панелі **Graph** (Графік) натисніть на кнопку **Contour Plot** (Лінії рівня), а потім введіть в єдине місце ім'я функції. Для відображення значень функції, що відповідають лініям рівня, необхідно в меню **Властивості** графіка на вкладці

Спеціальні в параметрах контуру встановити необхідну кількість ліній рівня та встановити опцію "Нумерація".

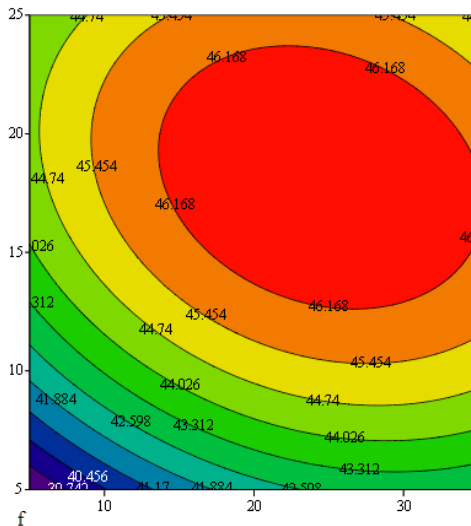


Рис. 4.2. Графік регресійної функції у вигляді ліній рівня

Також для визначення локального екстремуму функції в середовищі Mathcad використовується функція **root**.

Для цього потрібно похідну функції прирівняти нулю. Функції **root(df(x)/dx, x)** повинне передувати початкове наближення (за замовчуванням **df(x)/dx = 0**). На рис 4.3 представлено алгоритм пошуку екстремуму функції регресійного рівняння заданого вище в середовищі Mathcad.

Рис 4.3. Пошук екстремуму функції
регресійного рівняння

$$\begin{aligned} x &:= 15 \\ y &:= 20 \\ x_1 &:= \text{root}\left(\frac{d}{dx} f(x, y), x\right) \\ y_1 &:= \text{root}\left(\frac{d}{dy} f(x, y), y\right) \\ x_1 &= 18.621 \\ y_1 &= 25.735 \\ f(x_1, y_1) &= 46.865 \end{aligned}$$

Для знаходження екстремуму функції варто виконати описані нижче кроки.

1. Задайте початкове наближення ближче до екстремуму.
2. Запишіть вираження з функцією **root**, де в якості функція, що повинна дорівнювати нулю, запишіть похідну по заданій змінній (**df(x,y)/dx**).
3. Обчислити значення заданої функції від знайденого кореня рівняння **df(x,y)/dx=0**.



Лабораторна робота № 1.

Повний та дробовий факторний експеримент як засіб дослідження процесів у двигунах внутрішнього згоряння

Мета роботи: *розробка програмного засобу для визначення плану матриці повного факторного та дробового експерименту для вирішення інтерполяційних та оптимізаційних задач експериментальних досліджень ДВЗ.*

Теоретична частина

Техніка та технологія експериментального дослідження двигунів внутрішнього згоряння безперервно вдосконалюється протягом більш ніж 150-річного періоду їх розвитку. Експериментальні дослідження можуть переслідувати різноманітні задачі: доведення дослідних зразків двигунів, дослідження робочого процесу двигуна, вивчення впливу окремих параметрів та конструкції окремих вузлів двигуна на робочий процес та експлуатаційні властивості (ресурс, витрата пального, рівень викидів токсичних речовин з відхідними газами, тощо).

До 60–70 років XX століття основним різновидом експерименту був фізичний. Зміст такого експерименту полягає в дослідженні реальних фізичних процесів, що мають місце в реальному двигуні, виконаному "в металі", або в спеціально виготовленій дослідній установці для вивчення окремих процесів (наприклад, одноциліндровий "відсік" для дослідження робочого циклу двигуна, "бомба" для вивчення особливостей впорскування та вигорання палива), або у фізичній моделі двигуна чи окремого вузла двигуна, виконаної з залученням теорії подібності.

Фізичний експеримент може бути охарактеризований високою достовірністю отриманих експериментальних даних, адже враховуються всі реальні газодинамічні, гідравлічні та трібологічні особливості досліджуваних процесів. Проте проведення фізичного експерименту значно ускладнюється суттєвими труднощами при отриманні експериментальних даних, що потребує використання складної та високоякісної вимірювальної апаратури. Так, незважаючи на суттєвий прогрес засобів експериментальних вимірювань, деякі параметри окремих фізичних процесів, наприклад просторове розподілення температур та концентрації компонентів робочого тіла в процесі робочого циклу двигуна, не можуть бути отримані шляхом прямих вимірювань. Суттєвими недоліками фізичного експерименту є його висока вартість та істотні затрати часу на здійснення експерименту, адже потребується виготовлення об'єкту експериментального дослідження.

З розвитком електронно-обчислювальних машин, починаючи з 60-х років XX століття, при створенні та доведенні нових зразків двигунів більш широко застосовується чисельний експеримент. При чисельному експерименті реальний двигун або фізична модель замінюється математичною моделлю, яка описує, як правило, за допомогою системи нелінійних або лінійних диференціальних рівнянь, досліджувані процеси. Так, чисельні експерименти інтенсивно використовуються при конструюванні окремих вузлів двигуна з урахуванням їх термічного та механічного навантаження; при дослідженні робочих процесів у циліндрі двигуна за допомогою термодинамічних та газодинамічних математичних моделей; при дослідженні нестационарного хвильового руху газу в газоповітряному тракті двигуна; при дослідженні гідравлічних процесів у паливній апаратурі; при дослідженні процесів теплообміну тощо. Для здійснення названих досліджень широко застосовуються такі засоби САПР ДВЗ, як Solid Works, Catea, Ricardo WAVE, Ricardo VECTIS, AVL BOOST, AVL FIRE, GT-Power, Дизель-ПК тощо. До беззаперечних переваг чисельного експерименту при порівнянні з фізичним експериментом слід віднести його відносно низьку вартість, істотно вищу швидкість здійснення, можливість дослідження швидкоплинних процесів та процесів, параметри яких складно виміряти при фізичному експерименті. Як наслідок переваг

чисельного експериментування, з'являється можливість суттєвого збільшення кількості досліджуваних варіантів конструкції окремих вузлів двигуна, збільшення кількості варіантів поєднання окремих фізичних та геометричних факторів, які визначають протікання робочого процесу двигуна. До недоліків чисельного експерименту слід, безумовно, віднести необхідність ретельного налаштування, калібрування та верифікації математичної моделі, адже рівняння, що складають її основу, дозволяють лише приблизно описати реальні фізичні процеси, що досліджуються.

Практика сучасного проектування ДВЗ полягає в гармонійному поєднанні фізичних та чисельних експериментальних методів з безперервним зростанням частки чисельного експерименту.

Незважаючи на те, який різновид експерименту використовується – фізичний або чисельний, його проведенню обов'язково передують процедура планування експерименту. *Планування експерименту – процедура вибору кількості та умов проведення дослідів, необхідних та достатніх для вирішення поставленої задачі з потрібною точністю.* Планування експерименту характеризується:

- прагненням до мінімізації кількості дослідів;
- одночасним варіюванням всіма змінними, що визначають процес експерименту, за спеціальними алгоритмами;
- використанням математичного апарату для формалізації дій експериментатора;
- обранням чіткої стратегії, що дозволяє приймати обґрунтовані рішення після проведення кожної серії експериментів.

У загальному випадку експериментальні дослідження можуть виконуватися для вирішення задачі пошуку оптимальних умов (оптимізаційної задачі) або для встановлення впливу певних параметрів на характеристики об'єкту, що досліджується (інтерполяційні задачі). Експеримент, що проводиться з метою вирішення задачі оптимізації, називають також екстремальним експериментом, адже вирішення подібних задач з математичної точки зору можна формалізувати як пошук екстремуму певної функції.

Зазначимо, що подібний поділ є досить умовним, адже практика експериментальних досліджень ДВЗ здебільшого полягає в поєднанні інтерполяційних та оптимізаційних задач. Як приклад розглянемо план експериментального дослідження рівня токсичності відхідних газів ДВЗ, приклади якого наведені на рис. 5.1.

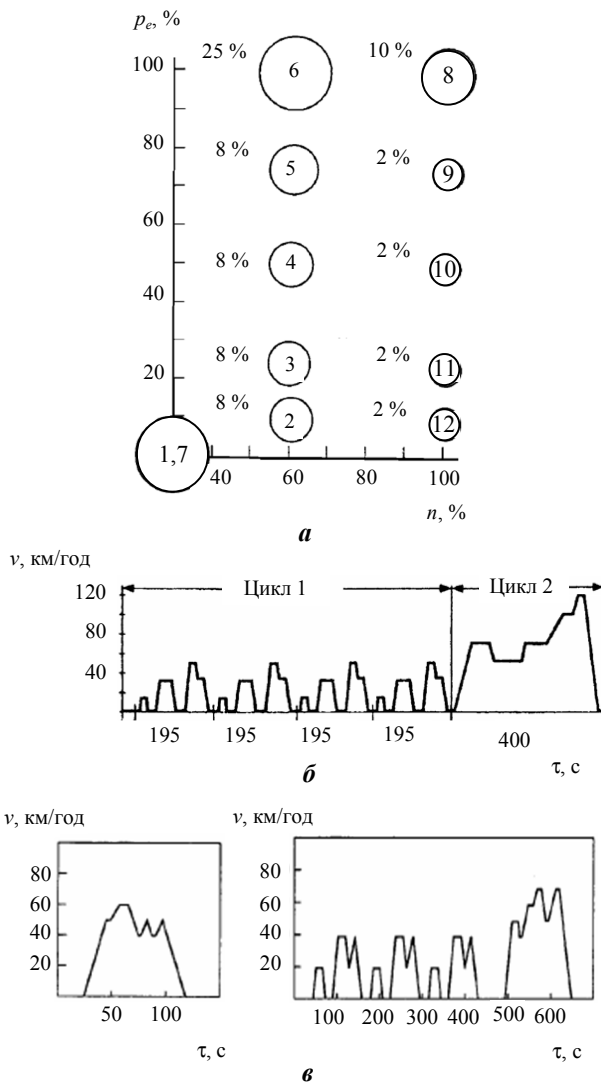


Рис. 5.1. Приклади планів експериментального дослідження токсичності відпрацьованих газів ДВЗ за циклами (p_e – середній ефективний тиск; n – частота обертання колінчастого валу; v – швидкість руху автомобіля; τ – час руху):
а – 13-режимний Європейський цикл для дизельних двигунів вантажних автомобілів;
б – стандартний Європейський їздовий цикл ECE R15/05; **в** – стандартний їздовий японський цикл (складається з двох частин для "холодного" та "прогрітого" двигуна)

План експерименту, зображений на рис. 5.1,*a*, являє собою сукупність усталених режимів роботи двигуна з визначеним часом роботи двигуна на кожному з режимів (у відсотках від загального часу експерименту). Перед початком експерименту двигун прогрівають до робочих температур масла та охолоджуючої рідини. Після виведення двигуна на кожний з режимів відкривають забірні клапани газоаналізатора на визначений період часу, після чого клапани закривають і двигун виводиться на наступний режим. За результатами обробки експериментальних даних отримують значення викидів основних складових токсичних речовин: оксидів азоту NO_x , твердих часток, угарного газу CO та вуглеводнів C_nH_m . На основі подібних випробувань можливо також розраховувати середньоексплуатаційну витрату пального, або комплексні паливо-екологічні критерії, які будуть розглянуті нижче.

Їздові цикли, показані на рис. 5.1,*б,в*, призначені для випробування двигуна у складі автомобіля на спеціальному стенді, обладнаному біговими барабанами, тому ці цикли більш доречно називати планами експериментального визначення токсичності автомобіля. На відміну від розглянутого вище 13-режимного циклу при випробуванні автомобіля двигун працює як на усталених, так і на перехідних режимах роботи.

Очевидно, що при випробуванні двигуна за стандартним циклом вирішується інтерполяційна задача отримання значення рівня шкідливих викидів в атмосфері. Проте, при проектуванні і доведенні двигуна перед інженерами неминуче постає оптимізаційна задача: таким чином обрати значення основних регульованих та конструктивних параметрів двигуна (кут випередження запалення або впорскування пального, тиск впорскування пального в залежності від режиму роботи двигуна, фази газорозподілу, форма камери згоряння, розташування та параметри нейтралізаторів токсичних компонентів, тощо), за яких двигун при випробуванні за стандартним циклом буде відповідати нормам щодо токсичності відпрацьованих газів. Зрозуміло, що в даному випадку постає необхідність багаторазового випробування двигуна для різного значення параметрів, що змінюються. Також зрозуміла необхідність системного підходу до такого експерименту, адже в інакшому випадку кількість дослідів та їх вартість можуть перевищити допустимі границі.

Формалізуючи задачу планування експерименту, об'єкт дослідження представляють у вигляді "чорної скрині" згідно з рис. 5.2. Для здійснення експериментального дослідження необхідно мати можливість впливати

на поведінку "чорної скрині". Всі можливі способи такого впливу називають *факторами*, на рис. 5.2 фактори схематично показані стрілками, що входять до скрині, та позначені літерою x . Фактор – це вимірюваний змінний параметр, який у визначений момент часу приймає певне значення. Фактори відповідають способам впливу на об'єкт дослідження. Кожний фактор має *зону визначення*, тобто сукупність значень, які може приймати фактор. Зона визначення фактору може бути неперервною та дискретною, проте в задачах планування експерименту ця зона завжди розглядається дискретною (тобто кожний фактор може приймати певну кількість значень або рівнів). Фактори поділяють на кількісні та якісні. До кількісних факторів можна віднести різні хімічні сполуки, різні технологічні способи виготовлення тощо. Кількісні фактори можуть бути представлені еквівалентним числом – тривалість впорскування пального, визначена в градусах повороту колінчастого валу, ступінь стиснення, визначена як відношення повного об'єму циліндра до об'єму камери стиснення та ін.

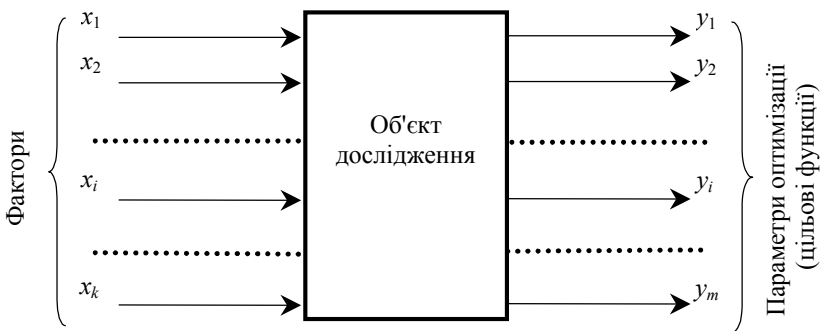


Рис. 5.2. Представлення об'єкта дослідження у вигляді "чорної скрині"

Стрілки, що виходять зі скрині, символізують числові характеристики цілей дослідження, які умовно позначаються літерою y . Числові характеристики цілей дослідження *також називають параметрами оптимізації або цільовими функціями*.

Прикладами цільових функцій експериментальних дослідженнях ДВЗ є питома ефективна витрата пального, середньоексплуатаційна питома ефективна витрата пального, показники токсичності відпрацьованих газів, комплексний паливо-екологічний критерій, витрати потужності на тертя,

температура відхідних газів на вході в турбіну тощо. Приклади деяких факторів: степінь стиснення, фази газорозподілу, тиск та тривалість впорскування пального, тиск наддувного повітря, фізико-хімічні властивості палива та інші параметри, які зумовлюють особливості протікання робочого циклу двигуна внутрішнього згорання.

Якщо під час експериментального дослідження обирається одна цільова функція, то всі інші параметри оптимізації виступають в ролі обмежень. Цільова функція є ознакою об'єкта дослідження, має кількісне вираження та може бути визначена за будь-якого поєднання факторів. Множину значень, які може приймати цільова функція, називають *зоною визначення цільової функції*.

Під математичною моделлю об'єкта дослідження розуміється рівняння, яке пов'язує цільову функцію та фактори. В загальному вигляді це рівняння може бути записане так:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Подібне рівняння в теорії планування експерименту має назву *функція відгуку*.

Кожний фактор може приймати певний набір значень, які мають назву *рівня фактору*. Фіксований набір рівнів факторів визначає один з можливих станів чорної скрині, а отже й умови проведення одного з можливих дослідів. Відповідно, якщо перебрати всі можливі поєднання факторів, то буде отримана повна множина можливих станів об'єкта дослідження. Якщо всі фактори мають однакову кількість рівнів p , то загальна кількість можливих станів об'єкта дослідження N визначається так:

$$N = p^k,$$

де k – кількість факторів.

Так, система з 8 факторів, кожний з яких має 3 рівні, має $N = 3^8 = 6561$ можливих станів. Відповідно, послідовний перебір всіх можливих поєднань факторів вимагає суттєвих витрат часу для проведення всіх дослідів.

При плануванні експерименту до факторів та до об'єкта дослідження висувають вимогу відтворюваності результатів досліду та вимогу керованості. Відтворюваність результатів досліду полягає в тому, що значення цільової функції, отримане в результаті досліду, при певному фіксованому рівні факторів за умови здійснення досліду через різні нерівномірні проміжки часу відповідає інтервалу задовільної похибки до результатів експерименту.

Керованість об'єкту дослідження полягає в можливості обирання в кожному досліді тих рівнів факторів, які становлять найбільший інтерес.

Отже, планування екстремального експерименту полягає в обиранні кількості та умов проведення дослідів, мінімально необхідних для визначення оптимального значення цільової функції.

Планування інтерполяційного експерименту полягає у визначенні кількості та умов проведення дослідів, мінімально необхідних для отримання інформації щодо об'єкта дослідження. Інтерполяційний експеримент зазвичай передусє екстремальному експерименту.

При плануванні експерименту до сукупності факторів, рівні яких варіюються під час експерименту, висувається вимога *сумісності*. Сумісність факторів визначається як можливість та безпечність проведення дослідів при будь-якому поєднанні факторів. Наприклад, якщо експериментально вирішується задача визначення оптимальних фаз газорозподілу, слід враховувати можливість зіткнення клапанів з поршнем двигуна за умови великих значень кута випередження відкриття впускного клапана, або кута запізнєння закриття впускного клапана, недопустиме збільшення температури впускного клапану та відхідних газів за великого значення кута випередження відкриття впускного клапану тощо. Якщо в якості факторів при оптимізації робочого процесу дизельного двигуна обрані, наприклад, тиск впорскування пального, стієнь стиснення та тиск наддувного повітря, то слід врахувати можливість перевищення гранично допустимого тиску робочого тіла в циліндрі або швидкості наростання тиску в циліндрі при максимальному значенні перелічених факторів.

Побудові плану експерименту передусє з'ясування зон визначення факторів, значень основних рівнів факторів та інтервалів варіювання факторів. Для отримання зони визначення факторів (тобто максимального та мінімального значення, який приймає фактор) необхідно проаналізувати існуючу інформацію про об'єкт дослідження та принципові обмеження значень факторів. Наприклад, значення максимальної стієнь стиснення може обмежуватись умовами зіткнення поршня та клапанів, або недопустимим підвищенням тиску наприкінці процесу стиснення, що може викликати детонаційне згоряння в двигунах з іскровим запаленням та перевищення гранично допустимого тиску робочого тіла в циліндрі дизельного двигуна.

Основним, або нульовим, рівнем фактора називають таке значення фактора, яке приймається за вихідне під час складання плану експерименту.

Інтервалом варіювання фактора називають певне число, додавання якого до основного рівня фактора дозволяє отримати значення *наступного рівня фактора*, а віднімання інтервалу варіювання від основного рівня фактора – значення *попереднього рівня фактора*. Інтервал варіювання фактора не може бути меншим за похибку фіксування рівня фактора, та не може бути більшим за значення, при якому верхній або нижній рівень фактору виходять за межі зони визначення фактора.

Зона визначення фактора обмежена його *верхнім рівнем* (тобто максимальним значенням фактора) та *нижнім рівнем* (мінімальним значенням фактора).

Якщо експеримент призначений для вирішення задач оптимізації, то значення зони визначення фактора приймається по можливості мінімальним і достатнім для визначення напрямку руху до оптимуму, а якщо вирішується задача інтерполяції, то зони визначення факторів обираються так, що вони охоплюють всю досліджувану зону їх зміни.

Повний факторний експеримент – експеримент, під час проведення якого реалізуються всі можливі варіанти поєднання рівнів факторів.

Якщо під час проведення експерименту прийняти, що всі фактори можуть приймати значення, що відповідають верхньому та нижньому рівням фактора, то такий експеримент називають повним факторним експериментом типу 2^k (k – кількість факторів). Якщо ж фактори можуть приймати значення, що відповідають нижньому та верхньому рівням факторів, а також основному рівню факторів, то такий експеримент називають повним факторним експериментом типу 3^k .

Для спрощення та уніфікації позначень основний рівень фактора кодується як $x = 0$, верхній рівень – як $x = +1$, а нижній – як $x = -1$. Для визначення поєднання факторів у кожному досліді повного факторного експерименту складається матриця експерименту, приклади якої наведені в таблицях 5.1 та 5.2. Слід зазначити, що запис плану експерименту в кодованому вигляді дозволяє спростити дослідження планів, зокрема визначити особливості взаємодії факторів. Так, у таблиці 5.1 показаний запис плану-матриці повного факторного експерименту типу 2^3 в абсолютному та кодованому вигляді. В якості факторів виступають ступінь стиснення ϵ (основний рівень $\epsilon_0 = 15$, інтервал

варіювання $\Delta\epsilon = 1$), тиск наддувного повітря в ресивері двигуна p_s (основний рівень $p_{s,0} = 210$ кПа, інтервал варіювання $\Delta p_s = 15$ кПа), кут випередження впорскування пального $\phi_{в.вп}$ (основний рівень $\phi_{в.вп,0} = 12,5$ град. до ВМТ, інтервал варіювання $\Delta\phi_{в.вп} = 2,5$ град. до ВМТ).

Таблиця 5.1. План-матриця повного факторного експерименту типу 2^3 (три фактори, кожний з яких має два рівні)

Запис плану матриці в абсолютному вигляді				
Номер досліджу	Фактори			Питома ефективна витрата пального, g_e , г/(кВт·год)
	Степінь стиснення, ϵ	Тиск наддувного повітря, p_s , кПа	Кут випередження впорскування пального, $\phi_{в.вп}$, град до ВМТ	
1	16	225	15	
2	14	225	15	
3	16	195	15	
4	14	195	15	
5	16	225	10	
6	14	225	10	
7	16	195	10	
8	14	195	10	

Запис плану-матриці в кодованому вигляді								
Номер досліджу	Фактори			Взаємодія факторів				Значення цільової функції, y
	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	
1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
2	- 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	
3	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	
4	- 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	
5	+ 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	- 1	- 1	
6	- 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	
7	+ 1	- 1	- 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	
8	- 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	+ 1	- 1	

Як цільова функція плану експерименту, наведеного в таблиці 5.1, виступає питома ефективна витрата пального g_e .

Зазвичай кількість дослідів у повному факторному експерименті суттєво перевищує кількість коефіцієнтів рівняння функції відгуку, які

визначаються за допомогою експериментального дослідження. Для зменшення кількості дослідів використовуються плани дробових факторних експериментів.

Таблиця 5.2. План-матриця повного факторного експерименту типу 3^2 (два фактори, кожний з яких має три рівні)

Номер дослідів	Фактори		Значення цільової функції, y
	x_1	x_2	
1	+ 1	+ 1	
2	+ 1	0	
3	0	+ 1	
4	+ 1	- 1	
5	- 1	+ 1	
6	0	- 1	
7	- 1	0	
8	0	0	
9	- 1	- 1	

Дробовий факторний експеримент (або *дробова репліка* від повного факторного експерименту) – експеримент, що складається з певної кількості дослідів повного факторного експерименту. Кількість дослідів в повному факторному експерименті є кратною щодо кількості дослідів дробового факторного експерименту. Зазначимо, що кількість дослідів в дробовому факторному експерименті *не може бути меншою* за кількість невідомих коефіцієнтів рівняння регресії.

Як правило, в якості дробової репліки використовується повний факторний експеримент для меншої кількості факторів. Так, для складання плану-матриці дробового факторного експерименту від повного факторного експерименту типу 2^3 (див. таблицю 5.1) можливо скоротити кількість дослідів з восьми до чотирьох, якщо використати план-матрицю повного факторного експерименту типу 2^2 , в якому як план для фактора x_3 прийняти стовпчик x_1x_2 . Отриманий таким чином план експерименту має назву напіврепліки повного факторного експерименту типу 2^3 та позначається як 2^{3-1} (наведений у табл. 5.3).

Аналогічним чином отримуються план-матриці для напівреплік, чвертьреплік, 1/8-реплік та ін. для будь-якого повного факторного експерименту типу 2^k .

Для скорочення кількості дослідів у повному факторному експерименті типу 3^k використовуються композиційні плани Бокса-Уілсона, докладне вивчення яких виходить за межі даної лабораторної роботи.

Таблиця 5.3. План-матриця дробового факторного експерименту типу 2^{3-1} (напіврепліка від повного факторного експерименту типу 2^3)

Номер дослідів	Фактори			Значення цільової функції, y
	x_1	x_2	x_3	
1	+ 1	+ 1	+ 1	
2	+ 1	– 1	– 1	
3	– 1	+ 1	– 1	
4	– 1	– 1	+ 1	

Насамкінець зазначимо, що під час реалізації плану експерименту обов'язково слід враховувати реальні умови його проведення. Так, при виконанні фізичних експериментів істотний вплив на параметри досліджуваних процесів мають параметри оточуючого середовища – температура, тиск та вологість повітря, наявність вітру тощо. Необхідно зменшити вплив систематичних похибок, які вносяться в результати експерименту внаслідок впливу зміни факторів, можливості впливу на котрі у експериментатора обмежені. Один з можливих шляхів – випадкова послідовність дослідів, передбачених планом-матрицею експерименту. Досліди необхідно "рандомізувати" в часі, відповідна процедура має назву процедури *рандомізації*.

Послідовність виконання роботи

У даній роботі пропонується розробити програму генерації плану повного факторного експерименту в середовищах Mathcad та Microsoft Excel + Visual Basic for Applications.

Програма генерації плану повного факторного експерименту може бути виконана різної складності у відповідності до таблиці 5.4. В залежності від складності програми студентом отримується належна кількість балів за виконання роботи.

Для реалізації алгоритму побудови плану-матриці експерименту типу p^k рекомендується використовувати наступний метод чергування

знаків. У першому стовпчику, в якому записують значення для першого фактора, знаки фактора чергуються з кроком p^0 ; у другому стовпчику – з кроком p^1 ; ...; в k -му стовпчику чергування здійснюється з кроком p^{k-1} . У таблиці 5.2 принцип чергування знаків наочно проілюстрований для експерименту типу 2^3 , в таблиці 5.5 – для експерименту типу 3^3 .

Таблиця 5.4. Варіанти виконання програми генерації плану повного факторного експерименту

№	Вимоги до програми	Складність, відсоток	Кількість балів
1	Генерація плану повного факторного експерименту типу 2^5 , основний рівень та інтервали варіювання факторів задаються користувачем.	50 %	13
2	Генерація плану повного факторного експерименту типу 3^4 , основний рівень та інтервали варіювання факторів задаються користувачем.	60 %	15
3	Генерація плану повного факторного експерименту типу 2^k , де k – кількість факторів, основний рівень та інтервали варіювання котрих задаються користувачем.	70 %	18
4	Генерація плану повного факторного експерименту типу 3^k , де k – кількість факторів, основний рівень та інтервали варіювання котрих задаються користувачем.	80 %	20
5	Генерація плану повного факторного експерименту типу p^k , де p – кількість рівнів факторів, яку задає користувач, k – кількість факторів, основний рівень та інтервали варіювання котрих задаються користувачем.	100 %	25
6	Додаткова процедура рандомізації дослідів	+ 10 %	+ 3
7	Додаткова процедура побудови дробового факторного експерименту типу 2^{k-l} , k – кількість факторів, l – дробовість репліки.	+ 30 %	+ 8

Аналітично метод чергування знаків для випадку експерименту типу 2^k може бути записаний наступним чином:

$$x_j^i = (-1)^{Ціле \left[\frac{i-1}{2^{(j-1)}} \right]},$$

де i – номер досліду; j – номер фактора.

Таблиця 5.5. План-матриця повного факторного експерименту типу 3^3 , побудована згідно з методом чергування знаків

Номер досліду	Фактори			Значення цільової функції, y
	x_1	x_2	x_3	
1	+ 1	+ 1	+ 1	
2	0	+ 1	+ 1	
3	– 1	+ 1	+ 1	
4	+ 1	0	+ 1	
5	0	0	+ 1	
6	– 1	0	+ 1	
7	+ 1	– 1	+ 1	
8	0	– 1	+ 1	
9	– 1	– 1	+ 1	
10	+ 1	+ 1	0	
11	0	+ 1	0	
12	– 1	+ 1	0	
13	+ 1	0	0	
14	0	0	0	
15	– 1	0	0	
16	+ 1	– 1	0	
17	0	– 1	0	
18	– 1	– 1	0	
19	+ 1	+ 1	– 1	
20	0	+ 1	– 1	
21	– 1	+ 1	– 1	
22	+ 1	0	– 1	
23	0	0	– 1	
24	– 1	0	– 1	
25	+ 1	– 1	– 1	
26	0	– 1	– 1	
27	– 1	– 1	– 1	

Очевидно, що x_j^i при такому запису може приймати два значення: -1 та $+1$. Таким чином, використовуючи наведену залежність, можна безпосередньо заповнити план-матрицю експерименту 2^k у кодованому вигляді.

Для експерименту типу 3^k слід використовувати наступні залежності:

$$K = \frac{1}{3} \left(Ціле \left[\frac{i-1}{3^{(j-1)}} \right] + 1 \right) - Ціле \left(\frac{1}{3} \left(Ціле \left[\frac{i-1}{3^{(j-1)}} \right] + 1 \right) \right),$$

де i – номер досліджу; j – номер фактора.

Якщо $K = 1/3$, то $x_j^i = 1$; якщо $K = 2/3$, то $x_j^i = 0$; якщо $K = 0$, то $x_j^i = -1$.

При запису плану-матриці з реальними значеннями факторів для кожної клітинки таблиці виконуються відповідні обчислення.

Лабораторна робота № 1.

РОБОЧИЙ АРКУШ

**Повний та дробовий факторний експеримент
як засіб дослідження процесів у двигунах
внутрішнього згоряння**

Фактор	Основний рівень	Інтервал варіювання	Кількість рівнів фактора
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
x_5			
x_6			
x_7			
x_8			
x_9			
x_{10}			
x_{11}			
x_{12}			

Рівень складності _____

Студент групи _____ ППб _____

Викладач _____

Дата _____

Контрольні питання

1. Поясніть відмінності між фізичним та чисельним експериментом при дослідженні процесів у ДВЗ. Наведіть переваги та недоліки кожного типу.
 2. З якою метою застосовується планування експерименту?
 3. У чому полягає планування оптимізаційного експерименту?
 4. З якою метою виконують планування інтерполяційного експерименту?
 5. Дайте визначення фактора, наведіть приклади факторів, які можуть бути застосовані при дослідженні процесів у ДВЗ.
 6. Дайте визначення цільовій функції, наведіть приклади.
 7. Дайте визначення поняттям: зона визначення фактора, основний рівень фактора, інтервал варіювання фактора.
 8. Що таке функція відгуку, з якою метою вона застосовується в теорії планування експерименту?
 9. Дайте визначення повного факторного експерименту та дробового факторного експерименту.
 10. Розшифруйте позначення плану експерименту типу 3^4 . Яка кількість дослідів передбачена цим планом?
 11. Розшифруйте позначення плану експерименту типу 2^{4-1} . Яка кількість дослідів передбачена цим планом?
 12. З якою метою виконують рандомізацію плану експерименту? Для якого типу експерименту – чисельного чи фізичного – рандомізація є більш необхідною і чому?
-

Лабораторна робота № 2.

Аналіз результатів експерименту за допомогою поліноміальних регресійних рівнянь

Мета роботи: *розробка програмного засобу для визначення коефіцієнтів регресійних рівнянь для поліноміальних функцій відгуку шляхом обробки результатів повного факторного експерименту.*

Теоретична частина

Після здійснення експерименту згідно з матрицею планування експерименту, дослідник отримує таблицю значень цільової функції (або декількох цільових функцій). Зрозуміло, що аналіз табличної функції з метою пошуку оптимального поєднання факторів (при вирішенні оптимізаційних задач) або з метою визначення певних закономірностей щодо досліджуваного об'єкту (при вирішенні інтерполяційних задач) є ускладненим. Для формалізації цих задач використовуються математичні моделі об'єкту дослідження або функції відгуку, які отримують шляхом спеціальної обробки експериментальних даних.

Розглянемо приклад. У таблиці 6.1 наведені результати експериментального дослідження впливу кута випередження відкриття впускного клапана $\varphi_{в.вп}$ та кута запізнення закриття впускного клапана $\varphi_{з.вп}$ на потужність N_e бензинового двигуна, що працює на усталеному режимі роботи. Отже, в якості факторів використовувались параметри $\varphi_{в.вп}$ та $\varphi_{з.вп}$, а в якості цільової функції – N_e . З таблиці 6.1 також очевидно, що експеримент виконувався за планом повного факторного експерименту типу 3^2 , адже кількість факторів $k = 2$, а кількість інтервалів варіювання факторів – $p = 3$. Основний рівень фактору $\varphi_{в.вп} = 20$ град. до ВМТ, а інтервал варіювання фактора – $\Delta\varphi_{в.вп} = 15$ град. Основний рівень фактора $\varphi_{з.вп} = 15$ град. після НМТ, а інтервал варіювання фактора –

$\Delta\varphi_{3,вп} = 10$ град. Зазначимо, що подібний експеримент потребує виготовлення 9 розподільчих валів з різним профілем кулачків. За результатами експерименту постає питання: яке поєднання $\varphi_{3,вп}$ та $\varphi_{в,вп}$ слід обрати для досягнення найбільшої потужності двигуна?

Таблиця 6.1. Результати експериментального дослідження впливу фаз газорозподілу впускного клапана на потужність бензинового двигуна (за повного відкриття дросельної заслінки та при сталому числі обертів колінчастого валу)

Номер досліджу	Фактори, кодований вигляд		Фактори, значення		Значення цільової функції, N_e , кВт
	x_1	x_2	$\varphi_{в,вп}$, град. до ВМТ	$\varphi_{3,вп}$, град. після НМТ	
1	+ 1	+ 1	35	25	44
2	+ 1	0	35	15	46,5
3	0	+ 1	20	25	46,5
4	+ 1	- 1	35	5	43
5	- 1	+ 1	5	25	44
6	0	- 1	20	5	41
7	- 1	0	5	15	43
8	0	0	20	15	47
9	- 1	- 1	5	5	40

Розглянемо візуалізацію табличної функції шляхом побудови графічних залежностей. На рис. 6.1,*а* таблична функція двох змінних $N_e = f(\varphi_{в,вп}, \varphi_{3,вп})$ представлена у вигляді тривимірного графіка, на якому для наочності експериментальні точки вказані у вигляді стовпчиків, висота яких відповідає значенню цільової функції в кожній точці. На рис. 6.1,*б* наведений графік табличної функції $N_e = f(\varphi_{в,вп}, \varphi_{3,вп})$ у вигляді ізоліній для трьох значень $\varphi_{3,вп}$. Аналізуючи рис. 6.1, можна визначити лише приблизний діапазон оптимального поєднання $\varphi_{в,вп}$ та $\varphi_{3,вп}$ – для більш точного визначення бракує експериментальних даних. Зрозуміло, що можна збільшити кількість дослідів, проте це потребуватимете значних затрат часу і коштів (у даному прикладі необхідно виготовити нові розподільчі вали).

Рациональніший шлях – визначення за результатами експерименту математичної моделі дослідження (функції відгуку), тобто аналітичної залежності цільової функції від факторів у вигляді математичного рівняння:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

У прикладі, що розглядається, постає задача пошуку аналітичного вигляду функції $N'_e = f(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})$. Перш за все необхідно обрати тип функції, що використовується в якості функції відгуку. Обрання типу функції відгуку є дуже відповідальним кроком, при здійсненні якого слід враховувати відомі властивості об'єкта дослідження, тип експериментального дослідження (інтерполяційний чи оптимізаційний експеримент), інтервали варіювання факторів. Як правило, при обробці експериментальних даних, отриманих при випробуванні ДВЗ, використовують поліноміальні моделі різної степені (здебільшого не вище третьої степені). До переваг математичних моделей поліноміального типу слід віднести простоту математичних операцій над такими моделями та їх більш глибоку теоретичну розробку.

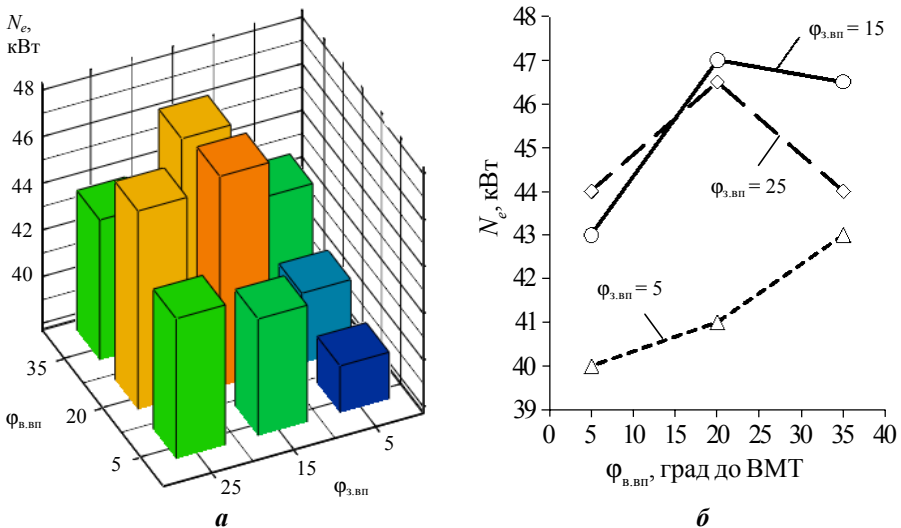


Рис. 6.1. Графічне представлення результатів експерименту, наведених у таблиці 6.1

Наведемо приклади поліноміальних математичних моделей:

1. Для двофакторного експерименту:

поліном нульової степені: $y = a_0$;

поліном першої степені: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$;

поліном другої степені: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2$;

поліном третьої степені: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2 + a_6x_1^2x_2 + a_7x_1x_2^2 + a_8x_1^3 + a_9x_2^3$.

2. Для трифакторного експерименту:

поліном нульової степені: $y = a_0$;

поліном першої степені: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$;

поліном другої степені: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1x_2 + a_5x_1x_3 + a_6x_2x_3 + a_7x_1^2 + a_8x_2^2 + a_9x_3^2$.

У наведених рівняннях a_i – коефіцієнти рівнянь функції відгуку, які мають бути отримані шляхом спеціальної обробки результатів дослідів.

Для іншої кількості факторів поліноміальні рівняння отримуються аналогічним чином. Зазначимо, що вибір типу функції поверхні відгуку накладає відбиток на особливості побудови плану експерименту. *Дійсно, якщо кількість рівнів факторів при експериментальному дослідженні $p = 2$, то можлива побудова лише лінійних математичних моделей, якщо $p = 3$ – можна побудувати як лінійну (поліном першої степені), так і квадратичну (поліном другої степені) математичну модель, якщо ж $p = 4$, то можлива побудова математичної моделі до третьої степені полінома включно.*

Слід також підкреслити, що використання поліноміальних регресійних математичних моделей для формалізації функції відгуку неминуче супроводжується низкою спрощень та припущень, що є своєрідною "зворотною стороною" використання математичних моделей. Основним припущенням є неперервність та гладкість поверхні відгуку та існування лише одного екстремуму функції в зоні визначення факторів. Якщо ці припущення не відповідатимуть дійсності, що часто дуже складно або навіть неможливо перевірити, то результати аналізу можуть дати негативний результат. Розглянемо ілюстрацію, наведену на рис. 6.2, на якій зображені приклади цільових функцій, що залежать від одного фактору (які можуть бути отримані експериментально для досить малого кроку зміни фактору). Очевидно, що для опису поведінки реального об'єкту, якій відповідає залежність $f_1 = f_1(x_1)$ (рис. 6.2,*а*), цілком доречно використовувати поліноміальну функцію відгуку для отримання регресійного рівняння. Але для випадку, зображеному на рис. 6.2,*б*, використання поліноміальної функції відгуку може призвести до суттєвої похибки, адже цільова функція $f_2 = f_2(x_1)$ не є гладкою та має два екстремуми, при цьому в разі використання широкого інтервалу варіювання фактору x_1 один з цих екстремумів може бути невиявлений під час експерименту. Ще раз зауважимо, що, як правило, вигляд цільової функції невідомий експериментаторові.

Обчислення коефіцієнтів a_i здійснюється шляхом апроксимації табличних даних функцією обраного типу. *Апроксимація*, або наближення табличної функції $f = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – пошук функції $g = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$, близької до заданої функції. Критерії близькості функцій $f = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ та $g = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ можуть бути наступними: 1) функція $g = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ у вузлових точках співпадає з функцією $f = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$; 2) функція $g = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ має бути близькою до функції $f = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ для всього інтервалу зміни факторів. Апроксимація за першим способом має назву інтерполяції. До недоліків інтерполяції слід віднести зчаста погану відповідність отриманої функції щодо поведінки реального об'єкту, що практично унеможливлює використання цього методу при вирішенні оптимізаційних задач, адже вони пов'язані з передбаченням поведінки об'єкту дослідження в діапазоні між відомими дослідними точками. Апроксимація за другим способом має назву *регресії*, а отримані рівняння функції відгуку – *регресійними* рівняннями. Регресійні рівняння адекватніше описують поведінку реального об'єкта, що поза іншим пов'язано з похибкою отриманих експериментальних даних та з необхідністю її урахування, тому в більшості випадків використовуються саме вони.

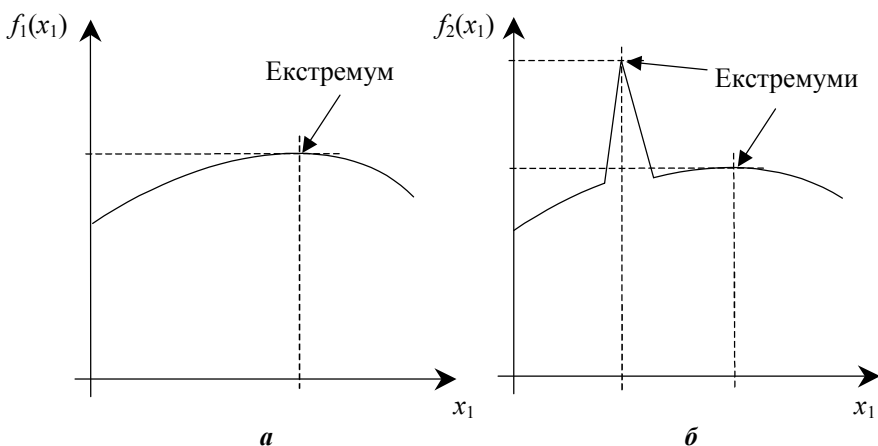


Рис. 6.2. Приклади цільових функцій, які залежать від одного фактора

Таким чином, постає задача пошуку таких значень коефіцієнтів a_i , за яких отримана регресійна функція $g = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ найбільш точно описує поведінку об'єкта дослідження. Найбільш поширеним

методом вирішення цієї задачі є метод найменших квадратів. *Метод найменших квадратів* полягає в пошуку регресійної функції $g = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$, такої, що сума квадратів різниці між табличною функцією $f = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ та регресійною функцією $g = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$, обчислених для вузлових точок табличної функції є мінімальною. Формалізуючи цю вимогу, запишемо:

$$\sum_{i=1}^N (g(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}) - f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}))^2 = \min,$$

де N – загальна кількість вузлових точок табличної функції (кількість дослідів); i – номер дослідів; k – кількість факторів.

Враховуючі, що при визначенні функції $g = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ значення факторів $x_1, x_2, \dots, x_k$ є відомим з таблиці результатів експерименту, перепишемо наведену вище умову дещо інакше:

$$u(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^N (g(a_0, a_1, \dots, a_m)_i - f_i)^2 = \min,$$

де a_i – коефіцієнти рівняння регресії; m – кількість коефіцієнтів у регресійному рівнянні.

У такому записі зрозуміло, що в якості невідомих змінних виступають коефіцієнти рівняння регресії, які необхідно знайти шляхом мінімізації функції багатьох змінних $u(a_0, a_1, \dots, a_m)$.

Відомо, що екстремуму функції багатьох змінних відповідає рівність нулю її часткових похідних. Отже, для знаходження коефіцієнтів a_i необхідно вирішити систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^N (g(a_0, a_1, \dots, a_m)_i - f_i)^2 = 0; \\ \frac{\partial u(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^N (g(a_0, a_1, \dots, a_m)_i - f_i)^2 = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial u(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^N (g(a_0, a_1, \dots, a_m)_i - f_i)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Якщо в якості рівнянь регресії використовуються поліноміальні рівняння, то наведена система рівнянь є системою лінійних алгебраїчних рівнянь та може бути вирішена з застосуванням відомих методів (зокрема, за методом Гауса, який буде розглянутий нижче).

Розглянемо докладніше особливості отримання системи рівнянь для регресійних рівнянь, які представляють собою поліноми різної степені. Найбільш простий випадок – коли кількість факторів $k = 1$, а в якості функції відгуку обрано поліном першої степені. В цьому випадку регресійне рівняння має вигляд:

$$g = g(x) = a_0 + a_1x.$$

Запишемо функцію $u(a_0, a_1)$ та знайдемо її часткові похідні:

$$u(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1x_i - f_i)^2,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(a_0, a_1)}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1x_i - f_i)^2 = 0; \\ \frac{\partial u(a_0, a_1)}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1x_i - f_i)^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1x_i - f_i) = 0; \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^N [x_i(a_0 + a_1x_i - f_i)] = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0N + a_1 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N f_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N (x_i f_i), \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N f_i - a_1 \sum_{i=1}^N x_i \right); \\ a_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i f_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}. \end{cases}$$

Розглянемо більш складний випадок – поліноміальне рівняння регресії другої степені для двох факторів:

$$\begin{aligned}
 g &= g(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2, \\
 u(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= \\
 &= \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{1i}x_{2i} + a_4x_{1i}^2 + a_5x_{2i}^2 - f_i)^2, \\
 \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)}{\partial a_0} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{1i}x_{2i} + a_4x_{1i}^2 + a_5x_{2i}^2 - f_i) = 0; \\ &\frac{\partial u(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)}{\partial a_1} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N [x_{1i}(a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{1i}x_{2i} + a_4x_{1i}^2 + a_5x_{2i}^2 - f_i)] = 0; \\ &\frac{\partial u(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)}{\partial a_2} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N [x_{2i}(a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{1i}x_{2i} + a_4x_{1i}^2 + a_5x_{2i}^2 - f_i)] = 0; \\ &\frac{\partial u(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)}{\partial a_3} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N [x_{1i}x_{2i}(a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{1i}x_{2i} + a_4x_{1i}^2 + a_5x_{2i}^2 - f_i)] = 0; \\ &\frac{\partial u(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)}{\partial a_4} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N [x_{1i}^2(a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{1i}x_{2i} + a_4x_{1i}^2 + a_5x_{2i}^2 - f_i)] = 0; \\ &\frac{\partial u(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)}{\partial a_5} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N [x_{2i}^2(a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + a_3x_{1i}x_{2i} + a_4x_{1i}^2 + a_5x_{2i}^2 - f_i)] = 0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^N x_{2i} + a_3 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i} + \\
& + a_4 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 + a_5 \sum_{i=1}^N x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^N f_i; \\
& a_0 \sum_{i=1}^N x_{1i} + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i} + a_3 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 x_{2i} + \\
& + a_4 \sum_{i=1}^N x_{1i}^3 + a_5 \sum_{i=1}^N x_{2i}^2 x_{1i} = \sum_{i=1}^N (x_{1i} f_i); \\
& a_0 \sum_{i=1}^N x_{2i} + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^N x_{2i}^2 + a_3 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i}^2 + \\
& + a_4 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 x_{2i} + a_5 \sum_{i=1}^N x_{2i}^3 = \sum_{i=1}^N (x_{2i} f_i); \\
& a_0 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i} + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 x_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i}^2 + a_3 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 x_{2i}^2 + \\
& + a_4 \sum_{i=1}^N x_{1i}^3 x_{2i} + a_5 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i}^3 = \sum_{i=1}^N (x_{1i} x_{2i} f_i); \\
& a_0 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1i}^3 + a_2 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 x_{2i} + a_3 \sum_{i=1}^N x_{1i}^3 x_{2i} + \\
& + a_4 \sum_{i=1}^N x_{1i}^4 + a_5 \sum_{i=1}^N x_{2i}^2 x_{1i}^2 = \sum_{i=1}^N (x_{1i}^2 f_i); \\
& a_0 \sum_{i=1}^N x_{2i}^2 + a_1 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^N x_{2i}^3 + a_3 \sum_{i=1}^N x_{1i} x_{2i}^3 + \\
& + a_4 \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 x_{2i}^2 + a_5 \sum_{i=1}^N x_{2i}^4 = \sum_{i=1}^N (x_{2i}^2 f_i).
\end{aligned} \right.$$

Для вирішення наведеної системи рівнянь зручно застосувати метод Гауса, який належить до прямих методів вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), які мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}a_0 + b_{12}a_1 + b_{13}a_2 + \dots + b_{1j}a_{j-1} + \dots + b_{1m}a_{m-1} = f_1; \\ b_{21}a_0 + b_{22}a_1 + b_{23}a_2 + \dots + b_{2j}a_{j-1} + \dots + b_{2m}a_{m-1} = f_2; \\ b_{31}a_0 + b_{32}a_1 + b_{33}a_2 + \dots + b_{3j}a_{j-1} + \dots + b_{3m}a_{m-1} = f_3; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{i1}a_0 + b_{i2}a_1 + b_{i3}a_2 + \dots + b_{ij}a_{j-1} + \dots + b_{im}a_{m-1} = f_i; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{m1}a_0 + b_{m2}a_1 + b_{m3}a_2 + \dots + b_{mj}a_{j-1} + \dots + b_{mm}a_{m-1} = f_m, \end{array} \right.$$

де $a_0, a_1, \dots, a_m$ – невідомі, які мають бути обчислені при розв'язанні системи; b_{ij} – дійсні коефіцієнти; f_i – права частина рівнянь; i – номер рядка; j – номер стовбцю; m – кількість невідомих.

У матричній формі дана система має наступний вигляд:

$$B \cdot a = f,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3j} & \dots & b_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{j-1} \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

Вирішення такої системи рівнянь полягає у визначенні вектора a за вхідним вектором f при відомій матриці B , яка складається з дійсних чисел та є невинродженою. Відомо, що при виконанні вказаних умов рішення СЛАР існує, є єдиним та стійким по вхідним каналам.

Нехай вектор $a' = (a'_0, a'_1, \dots, a'_m)^T$ є наближеним вирішенням СЛАР. Необхідно отримати таке вирішення, що $e = a - a'$ є мінімальним (e – похибка вирішення).

Метод Гауса складається з двох основних етапів, що мають назву *прямий хід* та *зворотний хід*. Прямий хід полягає в послідовному виклю-

ченні невідомих з системи рівнянь для перетворення її до еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею. Обчислення невідомих відбувається на етапі зворотного ходу.

Прямий хід складається з $m - 1$ кроків виключення невідомих. На першому кроці здійснюється виключення невідомого a_0 в рівняннях з номерами 2, 3, 4, ..., m . Припустимо, що коефіцієнт $b_{11} \neq 0$ та назвемо його головним (або ведучім) елементом 1-го кроку.

Обчислимо множники першого кроку:

$$\mu_{i1} = b_{i1}/b_{11}, (i = 2, 3, \dots, m).$$

Відніmemo з другого, третього, ..., m -го рівнянь перше рівняння системи, помножене відповідно на $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_m$, що призведе до обернення на нуль коефіцієнтів при a_0 у всіх рівняннях системи, окрім першого:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}a_0 + b_{12}a_1 + b_{13}a_2 + \dots + b_{1j}a_{j-1} + \dots + b_{1m}a_{m-1} = f_1; \\ b_{22}^{(1)}a_1 + b_{23}^{(1)}a_2 + \dots + b_{2j}^{(1)}a_{j-1} + \dots + b_{2m}^{(1)}a_{m-1} = f_2^{(1)}; \\ b_{32}^{(1)}a_1 + b_{33}^{(1)}a_2 + \dots + b_{3j}^{(1)}a_{j-1} + \dots + b_{3m}^{(1)}a_{m-1} = f_3^{(1)}; \\ \vdots \\ b_{i2}^{(1)}a_1 + b_{i3}^{(1)}a_2 + \dots + b_{ij}^{(1)}a_{j-1} + \dots + b_{im}^{(1)}a_{m-1} = f_i^{(1)}; \\ \vdots \\ b_{m2}^{(1)}a_1 + b_{m3}^{(1)}a_2 + \dots + b_{mj}^{(1)}a_{j-1} + \dots + b_{mm}^{(1)}a_{m-1} = f_m^{(1)}, \end{array} \right.$$

$$b_{ij}^{(1)} = b_{ij} - \mu_{i1} b_{1j}, \quad f_i^{(1)} = f_i - \mu_{i1} f_1, \quad (i, j = 2, 3, \dots, m).$$

На другому кроці виключимо невідоме a_1 в рівняннях з номерами 3, 4, 5, ..., m . Припустимо, що коефіцієнт $b_{22}^{(1)} \neq 0$ та назвемо його головним (або ведучим) елементом 2-го кроку.

Обчислимо множники другого кроку:

$$\mu_{i2} = b_{i2}^{(1)} / b_{22}^{(1)}, \quad (i = 2, 3, \dots, m).$$

Віднімаємо з третього, четвертого, ..., m -го рівнянь друге рівняння системи, помножене відповідно на $\mu_{32}, \mu_{42}, \dots, \mu_{m2}$, що призведе до обернення на нуль коефіцієнтів при a_1 у всіх рівняннях системи, окрім першого та другого:

$$b_{ij}^{(2)} = b_{ij}^{(1)} - \mu_{i2} b_{2j}^{(1)}, \quad f_i^{(2)} = f_i^{(1)} - \mu_{i2} f_2^{(1)}, \quad (i=3, 4, \dots, m).$$

$$\mu_{ik} = b_{ik}^{(k-1)} / b_{kk}^{(k-1)}, \quad (i = k + 1, k + 2, \dots, m),$$

Після $m-1$ -го кроку виключення отримаємо систему рівнянь:

матриця B якої є верхньою трикутною – отже, прямий хід завершено.

Перш ніж перейти до опису процедури зворотного ходу, звернімо увагу на те, що при здійсненні прямого ходу для кожного кроку обчислення висувалася вимога рівності нулю головного елемента кроку $b_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Зрозуміло, що у випадку, коли головний елемент кроку дорівнює нулю, відбудеться ділення на нуль при обчисленні множників i , таким чином, відбудеться аварійна зупинка алгоритму. Крім того, зважимо на те, що на k -му кроці прямого ходу коефіцієнти рівнянь системи розраховуються за формулами:

$$b_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k-1)} - \mu_{ik} b_{kj}^{(k-1)}, \quad f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - \mu_{ik} f_k^{(k-1)}, \\ (i = k + 1, k + 2, \dots, m).$$

З цієї залежності зрозуміло, що для уникнення великих похибок при здійсненні алгоритму слід унеможливити виникнення під час його виконання великих значень коефіцієнтів μ_{ik} , адже ЕОМ має обмежену розрядність для збереження чисел.

Для усунення вказаних недоліків необхідно, щоб кожному кроку прямого ходу передувала процедура сортування рівнянь у системі, так щоб забезпечити на k -му кроці виключення невідомих в якості головного елемента максимальний по модулю коефіцієнт $b_{ik}^{(k-1)}$, шляхом заміни місцями рівняння, що вміщує максимальний елемент в поточному стовбці з k -м рівнянням системи. Таким чином буде гарантована залежність $|\mu_{ik}| \leq 1$ для всіх $k = 1, 2, \dots, m - 1$ та $i = k + 1, k + 2, \dots, m$, крім того, буде унеможливлений випадок ділення на нуль (якщо вихідна матриця B є невивродженою).

Зворотний хід. Зворотний хід полягає в обчисленні невідомих з використанням верхньої трикутної матриці, отриманої за результатами прямого ходу. Неважко довести, що шляхом зворотної підстановки невідомі змінні можуть бути обчислені наступним чином:

$$a'_{m-1} = f_m^{m-1} / b_{mm}^{m-1}, \\ a'_{k-1} = (f_k^{k-1} - b_{k,k+1}^{k-1} a'_{k+1} - b_{k,k+2}^{k-1} a'_{k+2} - \dots - b_{k,m}^{k-1} a'_{m-1}) / b_{kk}^{k-1}, \\ (k = m - 1, m - 2, \dots, 1)$$

Обчислення похибки. Перший висновок про точність отриманого рішення можна отримати шляхом підстановки отриманих значень a'_j ($j = 0, 1, \dots, m - 1$) в ліву частину рівнянь. Таким чином можна отримати вектор відхилю r :

$$r = \begin{pmatrix} f_0 - f'_0 \\ f_1 - f'_1 \\ f_2 - f'_2 \\ \dots \\ f_{j-1} - f'_{j-1} \\ \dots \\ f_m - f'_m \end{pmatrix},$$

де $f'_1, f'_2, \dots, f'_m$ – коефіцієнти правих частин, після підстановки вектора a' .

Більш суворою є наступна оцінка абсолютної Δa та відносної δa похибок вирішення СЛАР:

$$\Delta a \leq \|B^{-1}\| \cdot \|r\|, \quad \delta a \leq \Delta a / \|a'\|,$$

$$\|a'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m |a_i'^2|}, \quad \|r\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m |r_i^2|},$$

$$\|B^{-1}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^m |c_{ij}^2|}, \quad c_{ij} = \frac{B_{ij}}{\det B},$$

де $\|a'\|, \|r\|, \|B^{-1}\|$ – норми векторів a', r та матриці B^{-1} відповідно; c_{ij} – елементи матриці B^{-1} , зворотної до матриці B ; B_{ij} – алгебраїчні доповнення елементу матриці b_{ij} в її визначнику; $\det B$ – визначник матриці B .

Виконаємо апроксимацію даних, наведених в таблиці 6.1, за допомогою регресійного рівняння другої степені. Після розв'язку методом Гауса відповідної системи алгебраїчних рівнянь, отриманої вище, рівняння регресії матиме вигляд:

$$N'_e = N'_e(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}}) = 32,919 + 0,3991 \cdot \varphi_{\text{в.вп}} + 1 \cdot \varphi_{\text{з.вп}} - \\ - 0,005 \cdot \varphi_{\text{в.вп}} \cdot \varphi_{\text{з.вп}} - 0,0062963 \cdot (\varphi_{\text{в.вп}})^2 - 0,0024167 \cdot (\varphi_{\text{з.вп}})^2, \text{ кВт.}$$

Для уявлення про точність описання експериментальних даних функцією відгуку обраного типу розглянемо таблицю 6.2, в якій наведені значення експериментальних даних N_e та розрахункових значень N'_e , отриманих за допомогою рівняння регресії, а також квадрат різниці між ними. Середнє квадратичне відхилення становить:

$$СКВ = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (N_e - N'_e)^2}{N - 1}} = 0,793 \text{ кВт.}$$

Таблиця 6.2. Порівняння експериментальних даних з розрахунковими даними, отриманими в опорних точках за допомогою регресійного рівняння

$\Phi_{в.вп}$, град. до ВМТ	35	35	20	35	5	20	5	20	5
$\Phi_{з.вп}$, після НМТ	25	15	25	5	25	5	15	15	5
Експериментальне значення N_e , кВт	44	46,5	46,5	43	44	41	43	47	40
Розрахункове значення N'_e , кВт	44,69	46,11	45,78	42,69	44,03	42,28	43,94	46,44	39,03
$(N_e - N'_e)^2$	0,48	0,15	0,52	0,09	0,00	1,63	0,89	0,31	0,95

Зауважимо, що похибка експериментального вимірювання потужності двигуна становить, як правило, 0,5...1,0 %.

Функція $N'_e(\Phi_{в.вп}, \Phi_{з.вп})$ є параболоїдом, його частина, яка обмежена зоною визначення факторів, наведена на рис. 6.3. Слід зазначити, що більш зручним для аналізу є візуалізація регресійного рівняння у вигляді двовимірних графіків. На рис. 6.4 наведені два способи такої візуалізації.

На рис. 6.4,*а* регресійна функція представляється у вигляді набору ліній постійного значення функції $N'_e(\Phi_{в.вп}, \Phi_{з.вп})$, або ізоліній, побудованих у координатах факторів $\Phi_{в.вп}$, $\Phi_{з.вп}$ шляхом проєціювання поверхні, зображеної на рис. 6.3, на площину $\Phi_{в.вп}$, $\Phi_{з.вп}$. Такий спосіб побудови дозволяє наочно представити напрямки зростання цільової функції та визначити в першому наближенні оптимальне поєднання факторів. На рис. 6.4,*б* візуалізація регресійного рівняння здійснюється шляхом побудови

залежностей $N'_e(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})$, отриманих шляхом перетину поверхні відгуку площинами $\varphi_{\text{з.вп}} = \text{idem}$.

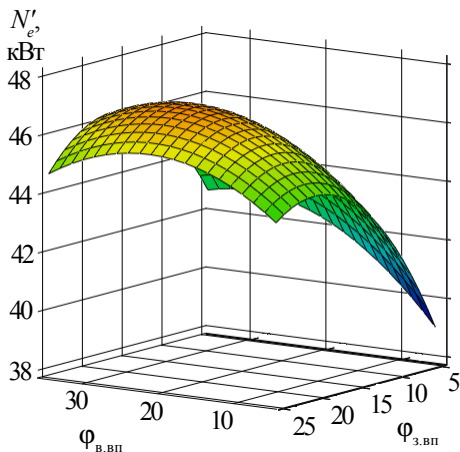
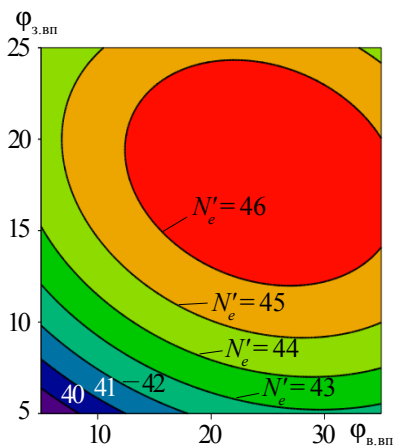
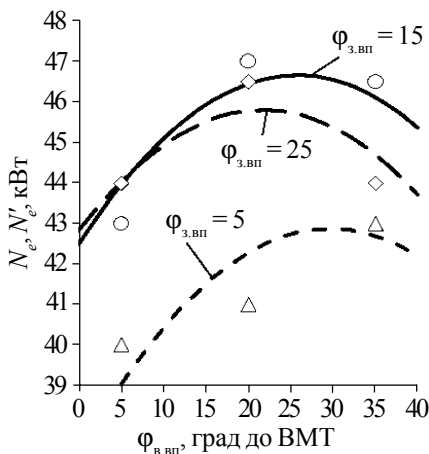


Рис. 6.3. Візуалізація регресійного рівняння $N'_e(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})$ у вигляді тривимірного графіка



a



б

Рис. 6.4. Візуалізація регресійного рівняння $N'_e(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})$ у вигляді двовимірного графіка

Аналізуючи дані, представлені на рис. 6.3, 6.4 та в таблиці 6.2, можна зробити висновок, що регресійна функція у вигляді полінома другої степені адекватно описує експериментальні дані та може бути використана при пошуку оптимальних фаз газорозподілу на впуску.

Проілюструємо вплив типу регресійної функції. Якщо використати рівняння регресії у вигляді поліному першої степені, то поверхня відгуку представлятиме собою площину, зображену на рис. 6.5,*а*. Як добре зрозуміло з рис. 6.5,*б*, використання лінійної регресії дозволяє лише визначити напрямок найбільш швидкого зростання функції, та не дозволяє робити висновок про зону оптимального поєднання факторів.

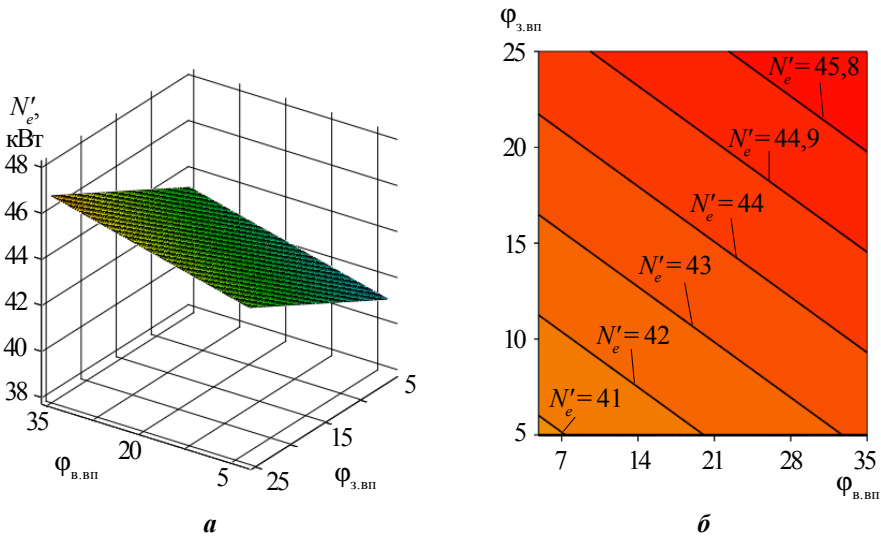


Рис. 6.5. Візуалізація функції відгуку при апроксимації даних таблиці 6.1 поліномом першої степені

Розглянутий приклад дозволяє більш докладно з'ясувати особливості інтерполяційного та оптимізаційного експерименту. Як зазначалося вище, інтерполяційний експеримент має на меті дослідження поведінки об'єкта в певній, як правило, досить широкій зоні визначення факторів. Внаслідок того, що реальні об'єкти дослідження, зокрема ДВЗ, мають здебільшого нелінійні ознаки, то, зрозуміло, що для адекватного відображення їх поведінки за допомогою математичних моделей слід використовувати нелінійні регресійні функції (зокрема, поліноміальні другої, третьої або четвертої степені), або використовувати інтерполяційні многочлени. В якості прикладу на рис. 6.6. зображена універсальна характеристика двигуна VW 1,9TDI, яка представлена в координатах $g_e = f(p_e, n)$.

Очевидно, що для отримання такої характеристики необхідне експериментальне визначення параметрів двигуна для великої кількості значень факторів (яким у даному випадку виступають середній ефективний тиск p_e та частота обертання колінчастого вала n). Внаслідок суттєвої нелінійності функції $g_e = f(p_e, n)$ використання в якості функції відгуку регресійного поліноміального рівняння суттєво ускладнюється, або навіть неможливе без значного відхилення від експериментальних даних. Тому кожна з наведених ліній постійного значення питомої ефективної витрати пального g_e отримується за допомогою інтерполяційних многочленів.

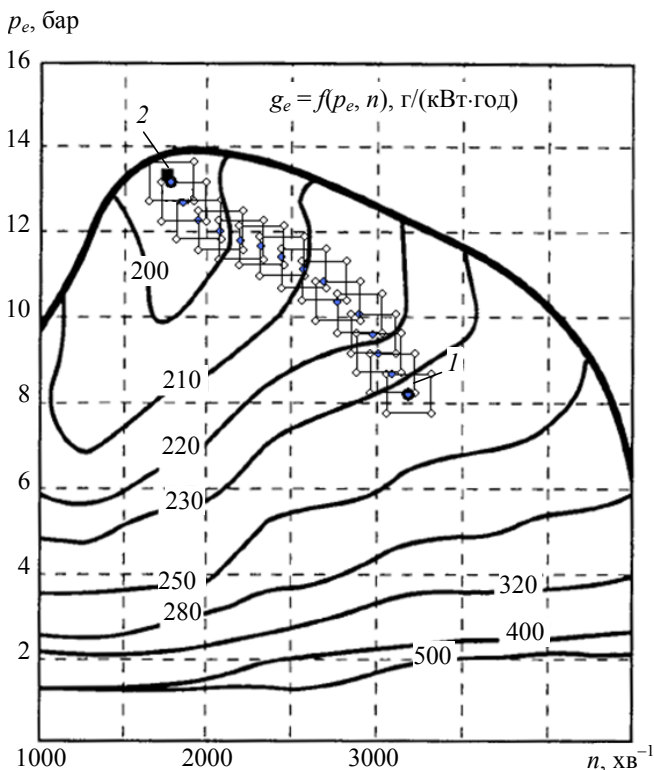
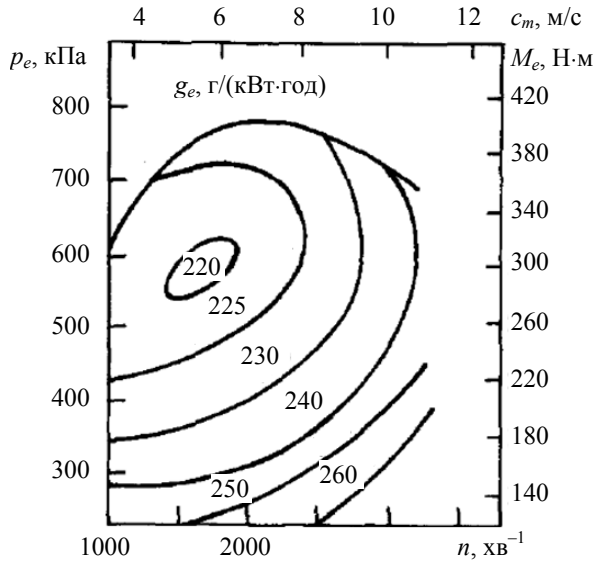


Рис. 6.6. Універсальна характеристика автомобільного дизельного двигуна VW 1,9TDI. Ізолінії g_e отримані шляхом інтерполяції таблиць експериментальних даних:

I – початкова точка оптимізаційного експерименту; 2 – кінцева точка оптимізаційного експерименту

Натомість універсальна характеристика, зображена на рис. 6.7, отримана за допомогою загального регресійного рівняння, яке апроксимує реальні дослідні точки та характеризується значно зменшеною нелінійністю.

Рис. 6.7. Універсальна характеристика середньообертового дизельного двигуна. Ізолнії g_e отримані за допомогою загального регресійного рівняння



Зрозуміло, що виконання подібних інтерполяційних експериментів потребує значної кількості дослідів для отримання адекватної інформації щодо об'єкта дослідження.

Розглянемо випадок, коли як мета експерименту була поставлена задача знаходження точки, що відповідає мінімальній питомій витраті пального (іншими словами – максимальному ефективному ККД) двигуна. За таких умов поведінка об'єкта дослідження в широкому діапазоні режимів роботи двигуна не цікавить дослідника, тому кількість дослідів може і має бути скорочена. Експеримент, в якому здійснюється пошук екстремуму цільової функції, як зазначалося вище, є оптимізаційним експериментом. Принцип проведення такого експерименту проілюстрований на рис. 6.6. Спочатку визначається g_e в довільній "базовій" точці 1, яка має координати (p_{e1}, n_1) . Далі будується план-матриця повного факторного експерименту типу 2^2 для прийнятого інтервалу варіювання факторів $\Delta p_e, \Delta n$. За результатами виконання цього експерименту отримується лінійне регресійне рівняння, яке дозволяє визначити напрямок

найбільшого зменшення функції $g_e = f(p_e, n)$. Наступна базова точка обирається у відповідності до цього напрямку (або градієнта функції), для цієї точки також будується відповідний план-матриця експерименту і визначається наступна точка. Таким чином, послідовно буде отримана точка 2, в якій буде досягнутий мінімум цільової функції g_{emin} . Подальше уточнення значення g_{emin} можливе шляхом зменшення інтервалів варіювання факторів $\Delta p_e, \Delta n$.

Аналогічним чином здійснюється оптимізаційний експеримент для більшого числа факторів. Отже, для інтерполяційного експерименту при-
таманне використання складних нелінійних рівнянь регресії, в той час як виконання оптимізаційного експерименту в більшості випадків може бути здійснене з використанням планів типу 2^k .

Послідовність виконання роботи

У даній роботі студенти мають розробити програму для виконання регресійного аналізу результатів експерименту, виконаного за планом експерименту. Програма регресійного аналізу може бути виконана різної складності у відповідності до таблиці 6.3. Залежно від складності програми студентом отримується належна кількість.

В якості вихідних даних студенти отримують результати експерименту, наведені на робочому аркуші у вигляді таблиці. Розроблена програма має забезпечувати:

1) визначення коефіцієнтів рівняння регресії обраного типу шляхом вирішення СЛАР за методом Гауса з наведенням похибки обчислення коефіцієнтів (виконується в середовищі MS Excel + Visual Basic for Applications);

2) графічну візуалізацію функції відгуку з визначенням її екстремуму (виконується в середовищі Mathcad).

Послідовність виконання лабораторної роботи наступна:

1. Розробка алгоритму програми та побудова блок-схеми алгоритму.
2. Розробка інтерфейсу користувача в середовищі Microsoft Excel.
3. Реалізація алгоритму в середовищі Visual Basic for Applications.
4. Реалізація візуалізації рівняння регресії в середовищі Mathcad.

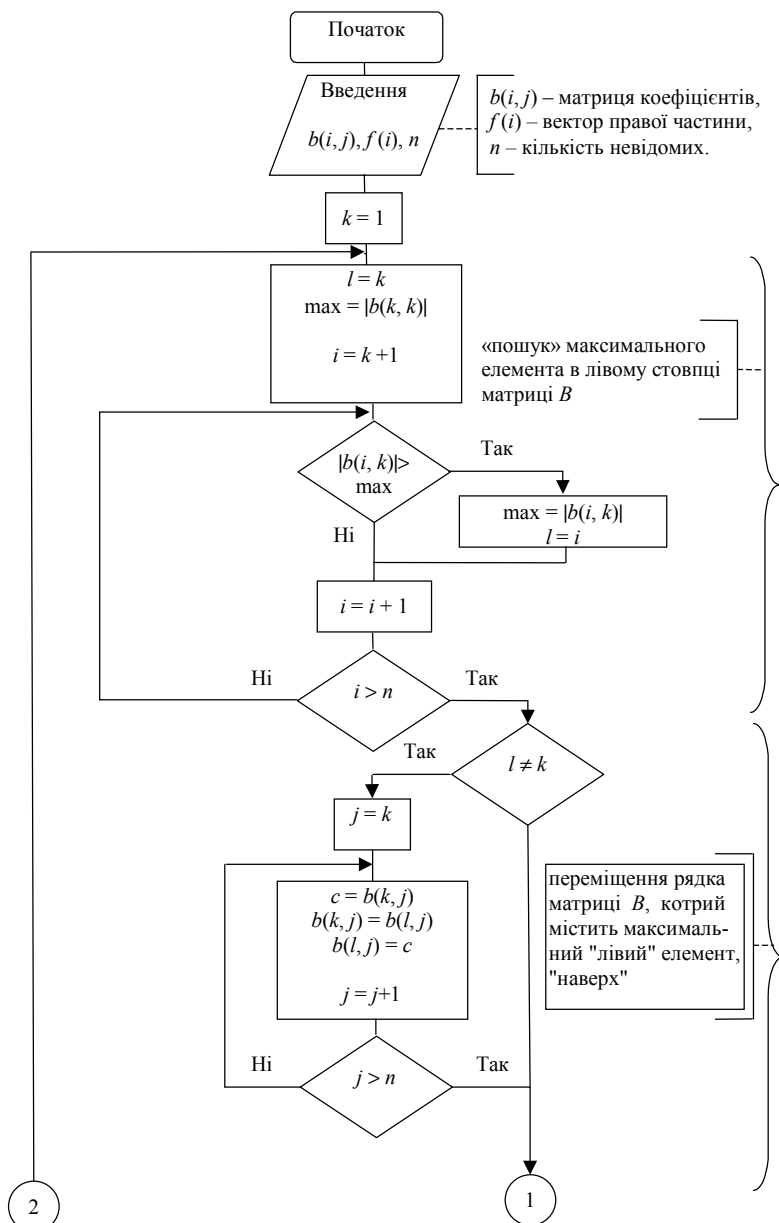
При реалізації алгоритму в середовищі Visual Basic for Applications необхідно методом Гауса вирішити СЛАР. Блок-схема алгоритму цього методу представлена нижче.

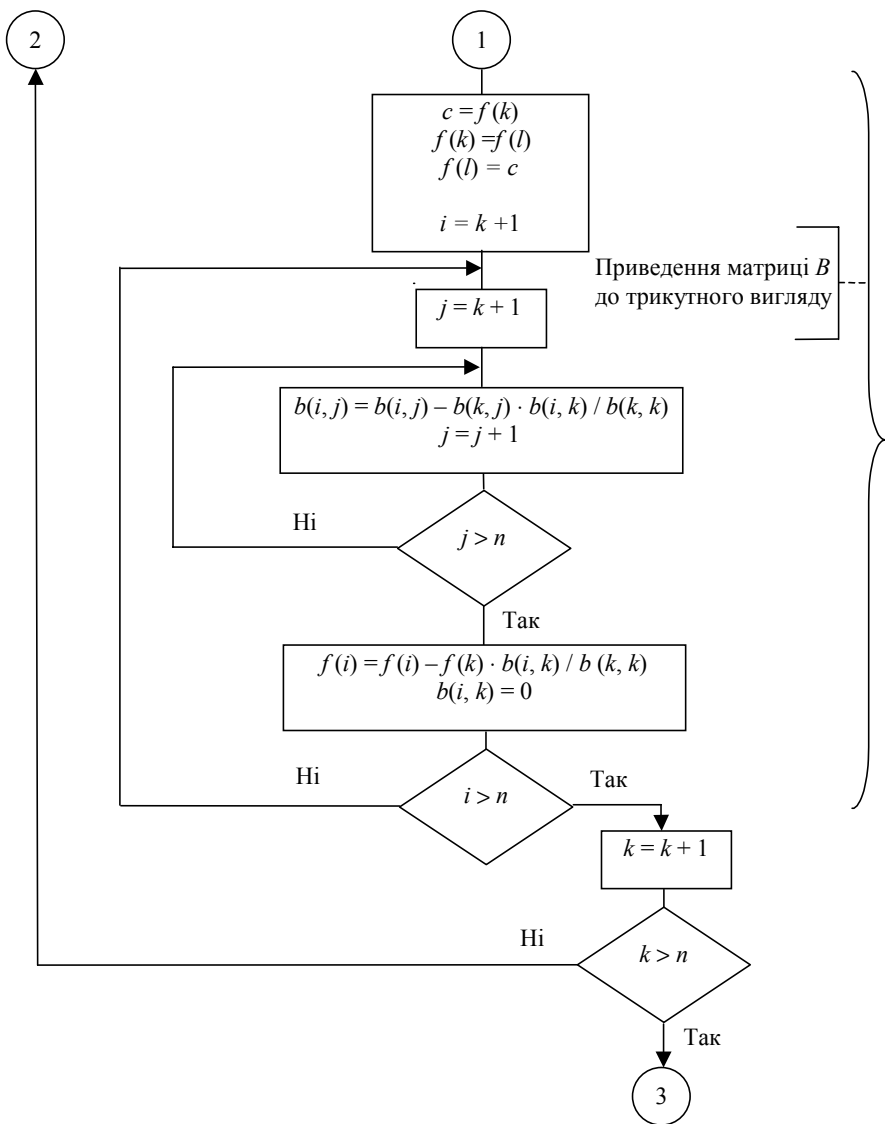
Візуалізація рівняння регресії в середовищі Mathcad докладно описана в розділі 4.

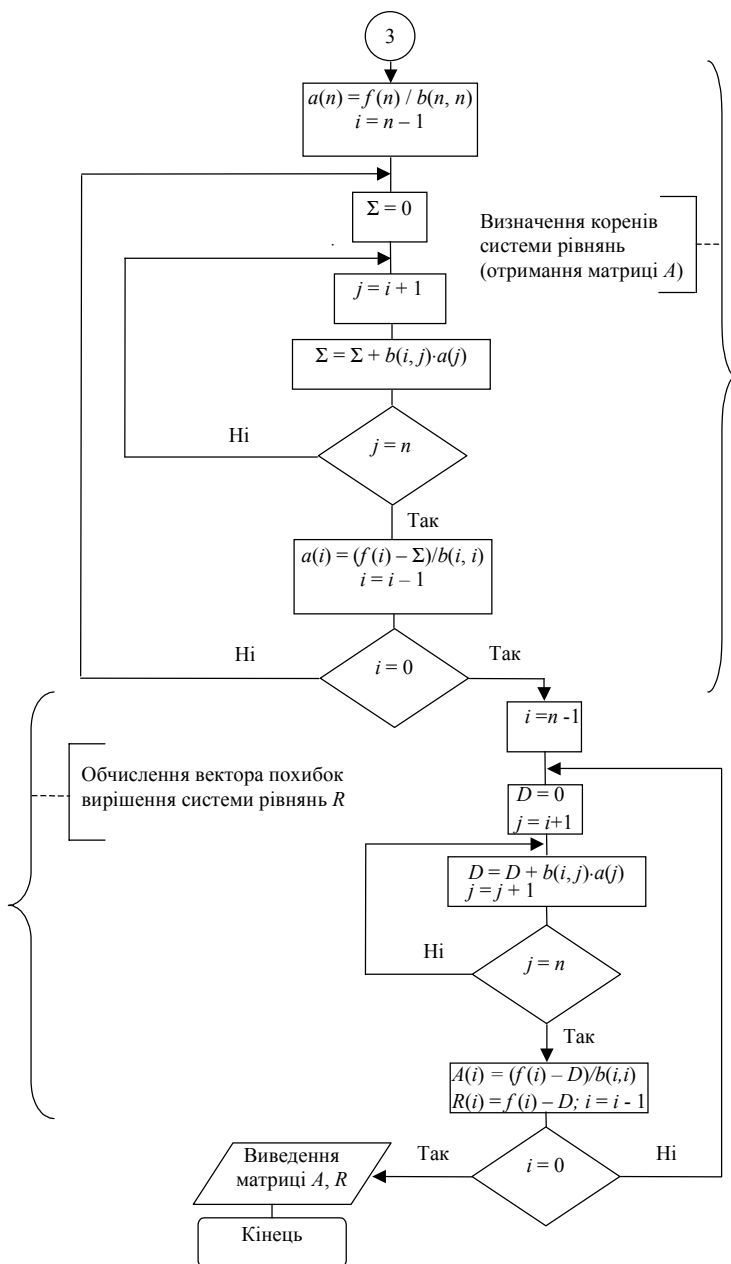
Таблиця 6.3. Варіанти виконання програми обчислення коефіцієнтів рівняння регресії

№	Вимоги до програми	Складність, відсоток	Кількість балів
1	Визначення регресійного рівняння типу $y = a_0 + a_1x$, для обробки однофакторного експерименту для фіксованої кількості дослідів $N = 4$.	50 %	13
2	Визначення регресійного рівняння типу $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$, для обробки двофакторного експерименту для фіксованої кількості дослідів $N = 4$.	60 %	15
3	Визначення регресійного рівняння типу $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2$, для обробки двофакторного експерименту для фіксованої кількості дослідів $N = 9$.	70 %	18
4	За вибором користувача визначення регресійного рівняння типу $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ або $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2$, для обробки двофакторного експерименту для фіксованої кількості дослідів $N = 9$.	80 %	20
5	За вибором користувача визначення регресійного рівняння типу $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ або $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2$, для обробки двофакторного експерименту для довільної кількості дослідів $N = var$.	100 %	25
6	Додаткова процедура візуалізації рівняння регресії.	+ 10 %	+ 3
7	Додатково визначення регресійного рівняння типу $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, для обробки трифакторного експерименту для довільної кількості дослідів $N = var$.	+ 30 %	+ 8

Блок-схема розв'язання СЛАР методом Гауса







Лабораторна робота № 2.

РОБОЧИЙ АРКУШ

Регресійний аналіз з використанням поліноміальних функцій відгуку

Номер досліджу	Фактори, кодований вигляд			Значення цільової функції
	x_1	x_2	x_3	
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

Фактор	Найменування	Позна-чення	Одиниці вимірювання	Нульовий рівень	Інтервал варіювання
x_1					
x_2					
x_3					

Рівень складності _____

Студент групи _____ ППб _____

Викладач _____

Дата _____

Контрольні питання

1. Запишіть поліноміальне рівняння першої степені для чотирифакторного експерименту.
 2. Яка мінімальна кількість рівнів факторів необхідна для застосування поліноміальних функцій відгуку третьої степені?
 3. Які припущення необхідно прийняти при застосуванні функцій відгуку для дослідження процесів у ДВЗ?
 4. Дайте визначення апроксимації табличної функції, назвіть два основних різновиди апроксимації.
 5. У чому полягає інтерполяція табличної функції?
 6. Чим відрізняється регресія табличної функції від інтерполяції?
 7. У чому полягає метод найменших квадратів? Запишіть математичну формалізацію цього методу.
 8. Яким чином отримується СЛАР для визначення коефіцієнтів регресійного рівняння за методом найменших квадратів при використанні поліноміальних функцій відгуку?
 9. Дайте визначення прямого та зворотного ходу метода Гауса для вирішення СЛАР.
 10. З якою метою здійснюється сортування рівнянь СЛАР при чисельній реалізації прямого ходу метода Гауса?
 11. Наведіть відомі Вам способи візуалізації поверхні відгуку табличної функції, отриманої при обробці результатів двофакторного експерименту.
 12. Поясніть, чому при здійсненні оптимізаційного експерименту застосовують лінійні та квадратичні функції відгуку, в той час як проведення інтерполяційного експерименту потребує застосування поліномів більшої степені?
-

Лабораторна робота № 3.
Визначення оптимального поєднання факторів
з використанням функції відгуку

Мета роботи: розробка програмного засобу для пошуку мінімуму та максимуму регресійної функції однієї або декількох змінних.

Теоретична частина

Оптимізаційний експеримент передбачає визначення екстремуму дослідної функції.

Загальні визначення

Приймаємо, що $R = \{x: -\infty < x < \infty\}$ – числова вісь, X – деяка множина з R , $f(x)$ – функція, яка визначена на множині X та приймає в усіх точках $x \in X$ кінцеві значення.

Прикладами множин з R є: відрізок $[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$, інтервал $(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$, напівінтервали $[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$. У наведених прикладах a, b – числа.

Поставимо задачу мінімізації функції $f(x)$ на множині X .

Точку $x^* \in X$ називають точкою мінімуму функції $f(x)$ на множині X , якщо $f(x^*) \leq f(x)$ для всіх $x \in X$. Значення функції $f(x^*)$ називають найменшим або мінімальним значенням $f(x)$ та позначають

$$\min_{x \in X} f(x) = f(x^*) = f^*.$$

Якщо функція $f(x)$ обмежена знизу на множині X , то число f^* називають нижньою межею $f(x)$ на X , якщо:

- 1) $f^* \leq f(x)$ для всіх $x \in X$;
- 2) для будь-якого завгодно малого числа $\epsilon > 0$ знайдеться точка $x_\epsilon \in X$, для якої $f(x_\epsilon) < f^* + \epsilon$.

Якщо функція $f(x)$ не обмежена знизу на X , то в якості нижньої грані $f(x)$ на X приймається $f^* = -\infty$. Нижня грань $f(x)$ на X позначається так:

$$\inf_{x \in X} f(x) = f^*.$$

Точка $v^* \in X$ називається точкою локального мінімуму функції $f(x)$ на множині X , зі значенням $c = f(v^*)$, якщо існує таке число $\alpha > 0$, що $f(v^*) \leq f(x)$ для всіх $\{x: |x - v^*| < \alpha\}$.

Якщо для $\alpha > 0$ рівність $f(v^*) = f(x)$ є вірною лише для $x = v^*$, то v^* називають точкою строгого локального мінімуму.

Звернімось до рис. 7.1. Точки x_0, x_2, x_4 є точками строгого локального мінімуму, а в точках, які задовольняють нерівності $x_5 < x \leq x_6$ та $x_8 < x \leq x_9$, реалізується нестрогий локальний мінімум.

Точкою глобального або абсолютного мінімуму функції $f(x)$, зображеної на рис. 7.1, є точка x_2 .

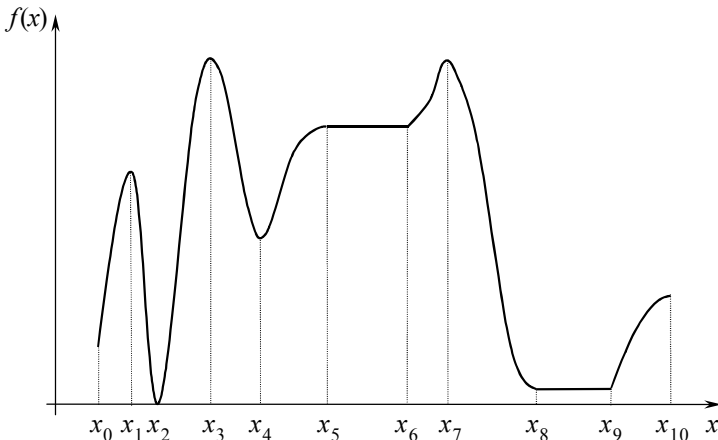


Рис. 7.1. Графічна інтерпретація пошуку екстремуму функції $f(x)$

Функцію $f(x)$ називають унімодальною на відрізку $X = [a, b]$, якщо вона неперервна на $[a, b]$ та існують числа α, β ($a \leq \alpha \leq \beta \leq b$) такі, що:

- 1) $f(x)$ монотонно спадає при $a \leq x \leq \alpha$;
- 2) $f(x)$ монотонно зростає при $\beta \leq x \leq b$;
- 3) $\inf_{x \in X} f(x) = f^*$ для $\alpha \leq x \leq \beta$.

Унімодальна функція має лише один екстремум (максимум або мінімум).

Якщо ставиться задача пошуку максимуму функції $f(x)$ на множині X , слід використовувати наступні визначення.

Точку $x' \in X$ називають точкою максимуму функції $f(x)$ на множині X , якщо $f(x') \geq f(x)$ для всіх $x \in X$. Значення функції $f(x')$ називають найбільшим або максимальним значенням $f(x)$ та позначають:

$$\max_{x \in X} f(x) = f(x').$$

Якщо функція $f(x)$ обмежена зверху на множині X , то число f' називають верхньою межею $f(x)$ на X , якщо:

1) $f' \geq f(x)$ для всіх $x \in X$;

2) для будь-якого завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться точка $x_\varepsilon \in X$, для якої $f(x_\varepsilon) > f' + \varepsilon$.

Якщо функція $f(x)$ не обмежена зверху на X , то в якості верхньої грані $f(x)$ на X приймається $f' = \infty$. Верхня грань $f(x)$ на X позначається так:

$$\sup_{x \in X} f(x) = f'.$$

Точка $v' \in X$ називається точкою локального максимуму функції $f(x)$ на множині X , зі значенням $c = f(v')$, якщо існує таке число $\alpha > 0$, що $f(v')$ і $f(x)$ для всіх $\{x: |x - v'| < \alpha\}$.

Якщо для $\alpha > 0$ рівність $f(v') = f(x)$ є вірною лише для $x = v'$, то v' називають точкою строгого локального мінімуму.

На рис. 7.1 точки x_1, x_3, x_7, x_{10} є точками строгого локального максимуму, а в точках, які задовольняють нерівності $x_5 \leq x < x_6$ та $x_8 < x < x_9$, реалізується нестрогий локальний максимум. Точка x_3 – точка глобального максимуму.

Наостанок зазначимо, що будь-яка задача максимізації функції $f(x)$ на множині X є еквівалентною задачі мінімізації функції $-f(x)$ на множині X . Тому в подальшому всі висновки будемо робити для випадку мінімізації функції.

Пошук екстремуму функції однієї змінної

Класичний метод пошуку точок екстремуму функції однієї змінної полягає в наступному.

Якщо функція $f(x)$ кусково-неперервна та кусково-гладка на відрізку $[a, b]$, це значить, що на $[a, b]$ може існувати лише певне число точок,

в яких $f(x)$ або має розрив першого роду, або неперервна, але не має похідної. В цьому випадку, як відомо, точками екстремуму функції $f(x)$ на $[a, b]$ можуть бути лише ті точки, для яких виконується одна з наступних умов:

- 1) $f(x)$ має розрив;
- 2) $f(x)$ неперервна, але не має похідної;
- 3) похідна $f'(x)$ існує та дорівнює 0;
- 4) $x = a$, або $x = b$.

Усі перелічені точки називають підозрілими на екстремум.

Пошук точок екстремуму функції починають зі знаходження всіх точок, підозрілих на екстремум, після чого проводять додаткове дослідження для визначення точок локального мінімуму та максимуму. Для цього додатково досліджують поведінку першої $f'(x)$ та другої $f''(x)$ похідної функції $f(x)$. Глобальний мінімум та глобальний максимум функції знаходять порівнянням всіх визначених точок локального мінімуму та локального максимуму функції.

Класичний метод дослідження функції на екстремум слід використовувати у випадках, якщо достатньо просто вдається виявити всі підозрілі на екстремум точки та реалізувати описану вище схему відбору екстремальних точок. Проте, слід зазначити, що класичний метод має вельми обмежене застосування. Справа в тому, що в практичних задачах обчислення похідної $f'(x)$, як правило, є складною задачею. Наприклад, якщо функція $f(x)$ визначається спостереженням, або за результатами фізичного експерименту, отримати інформацію про поведінку її похідної дуже важко. Але навіть в тих випадках, якщо похідна може бути обчислена, вирішення рівняння $f'(x) = 0$ та визначення інших точок, підозрілих на екстремум, може бути пов'язане зі значними труднощами. Саме тому були розроблені інші методи пошуку екстремуму функції, більш зручні для реалізації на ЕОМ. Ці *методи є чисельними методами*, на противагу класичному методу, який здебільшого є *аналітичним методом*. Розглянемо чисельні методи, які знайшли найбільше застосування: метод дихотомії, метод золотого перерізу, метод дотичних та метод рядного пошуку.

Метод дихотомії

Найпростішим методом мінімізації функції, що не потребує розрахунку похідної, є метод ділення відрізка навпіл, або метод дихотомії.

Припустимо, що функція $f(x)$ є унімодальною на відрізку $[a, b]$. Пошук мінімуму $f(x)$ на $[a, b]$ почнемо з обирання двох точок $x_1 = (a + b - \delta)/2$ та $x_2 = (a + b + \delta)/2$, де δ – постійна, що є параметром методу, $0 < \delta < (b - a)$. Значення δ обирається користувачем та може визначатися доцільною кількістю вірних десяткових знаків аргумента x . Зокрема зрозуміло, що δ не може бути меншим за машинний нуль ЕОМ. Точки x_1 та x_2 розташовані симетрично на відрізку $[a, b]$ та при малих δ ділять його майже навпіл – цим і пояснюється назва методу (див. рис. 7.2).

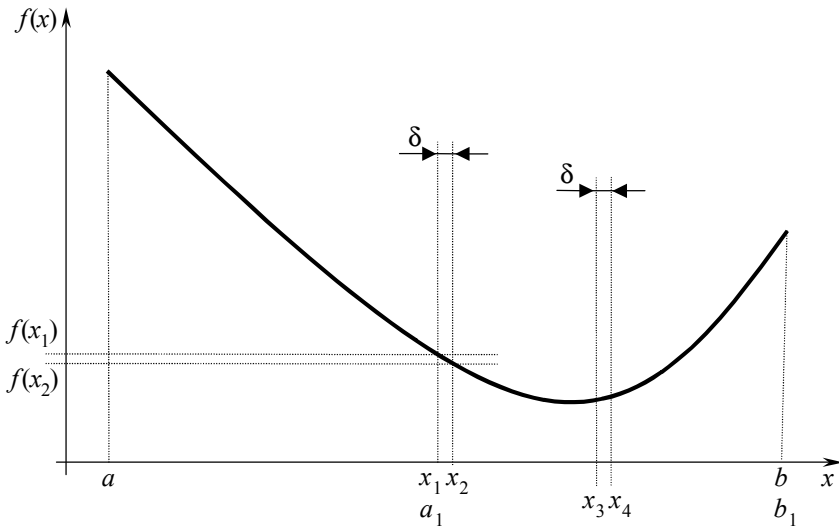


Рис. 7.2. Графічна інтерпретація методу дихотомії

Після обирання x_1 та x_2 обчислюються значення функції в цих точках $f(x_1), f(x_2)$ та порівнюються між собою.

Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то приймають $a_1 = a, b_1 = x_2$.

Якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то приймають $a_1 = x_1, b_1 = b$.

Зрозуміло, що відрізок $[a_1, b_1]$ має довжину:

$$b_1 - a_1 = (a - b - \delta)/2 + \delta.$$

Нехай відрізок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ є відомим, тоді:

$$b_{k-1} - a_{k-1} = (b - a - \delta)/2^{k-1} + \delta, k \geq 2.$$

Визначимо точки $x_{2k-1} = (a_{k-1} + b_{k-1} - \delta)/2$ та $x_{2k} = (a_{k-1} + b_{k-1} + \delta)/2$, розташовані на відрізку $[a_{k-1}, b_{k-1}]$, симетрично відносно його середини та обчислимо значення $f(x_{2k-1}), f(x_{2k})$.

Якщо $f(x_{2k-1}) \leq f(x_{2k})$, то приймають $a_k = a_{k-1}, b_k = x_{2k}$.

Якщо $f(x_{2k-1}) > f(x_{2k})$, то приймають $a_k = x_{2k}, b_k = b_{k-1}$.

Довжина отриманого відрізка $[a_k, b_k]$ дорівнює:

$$b_k - a_k = (b - a - \delta)/2^k + \delta.$$

Якщо кількість обчислень функції, що мінімізується, нічим не обмежена, то описаний процес поділення відрізка навпіл продовжується доки не буде отриманий відрізок $[a_k, b_k]$ довжиною $b_k - a_k < \varepsilon$, де ε – задана точність, причому $\varepsilon > \delta$.

Для досягнення точності $b_k - a_k < \varepsilon$ необхідно здійснити наступну кількість n таких обчислень:

$$n = 2k > 2 \cdot \log_2((b - a - \delta)/(\varepsilon - \delta)).$$

В якості наближення до координати мінімуму функції рекомендується прийняти:

$$v^* = (a_k + b_k)/2.$$

В цьому випадку похибка визначення v^* дорівнюватиме:

$$\rho = (b_k - a_k)/2 = (b - a - \delta)/2^{k+1} + \delta/2.$$

Слід зазначити, що метод дихотомії без змін можливо застосовувати для мінімізації функцій, що не є унімодальними. Проте, в цьому випадку неможливо гарантувати, що знайдене вирішення є достатньо точним наближенням до глобального мінімуму.

Метод золотого перерізу

Золотим перерізом відрізка називають такий переріз, який поділяє відрізок на дві нерівні частини так, що відношення довжини всього відрізка до довжини більшої частини дорівнює відношенню довжини більшої частини до довжини меншої частини відрізка.

Неважко встановити, що золотий переріз відрізка $[a, b]$ здійснюється двома точками:

$$x_1 = a + (3 - \sqrt{5})(b - a)/2 = a + (b - a) \cdot 0,381966011;$$

$$x_2 = a + (\sqrt{5} - 1)(b - a)/2 = a + (b - a) \cdot 0,618033989.$$

Цінною властивістю такого поділу відрізка є те, що точка x_1 в свою чергу здійснює золотий переріз відрізка $[a, x_2]$, тому що:

$$(x_2 - x_1) < (x_1 - a) = (b - x_1);$$

$$(x_2 - a)/(x_1 - a) = (x_1 - a)/(x_2 - x_1).$$

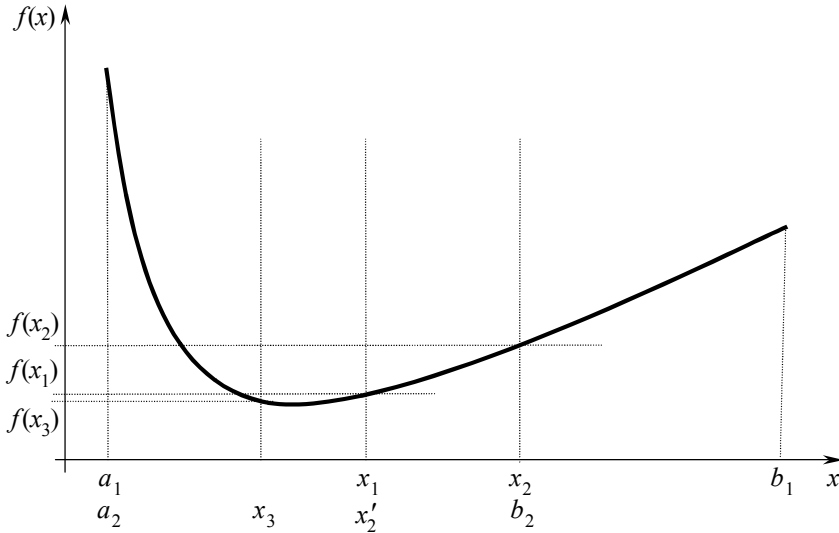


Рис. 7.3. Графічна інтерпретація методу золотого перерізу

Припустимо, що функція $f(x)$ є унімодальною на відрізку $[a, b]$. Призначимо $a_1 = a$, $b_1 = b$. На відрізку $[a_1, b_1]$ визначимо точки x_1 та x_2 і визначимо значення $f(x_1), f(x_2)$.

Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то приймають $a_2 = a_1$, $b_2 = x_2$, $x'_2 = x_1$.

Якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то приймають $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$, $x'_2 = x_2$.

Довжина відрізка $[a_2, b_2]$ дорівнює:

$$b_2 - a_2 = (\sqrt{5} - 1)(b - a) / 2.$$

Важливим є те, що відрізок $[a_2, b_2]$ містить точку x'_2 з обчисленим значенням функції $f(x'_2) = \min \{f(x_1), f(x_2)\}$, яка здійснює золотий переріз відрізка $[a_2, b_2]$.

Нехай визначені точки $x_1, \dots, x_{n-1}$, обчислені значення функції $f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$ та знайдено відрізок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, довжина якого дорівнює:

$$b_{n-1} - a_{n-1} = ((\sqrt{5} - 1) / 2)^{n-2} (b - a).$$

Також відома точка x'_{n-1} , яка здійснює золотий переріз відрізка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, для якої:

$$f(x'_2) = \min_{1 \leq i \leq n-1} f(x_i), \quad n \geq 2.$$

Тоді в якості наступної точки візьмемо точку $x_n = a_{n-1} + b_{n-1} - x'_{n-1}$, яка також здійснює золотий переріз відрізка, й обчислимо $f(x_n)$.

Нехай для визначеності $a_{n-1} < x_n < x'_{n-1} < b_{n-1}$.

Якщо $f(x_n) \leq f(x'_{n-1})$, то приймаємо $a_n = a_{n-1}$, $b_n = x'_{n-1}$, $x'_n = x_n$.

Якщо $f(x_n) > f(x'_{n-1})$, то приймаємо $a_n = x_n$, $b_n = b_{n-1}$, $x'_n = x'_{n-1}$.

Новий відрізок $[a_n, b_n]$ має довжину:

$$b_n - a_n = ((\sqrt{5} - 1) / 2)^{n-1} (b - a).$$

Якщо кількість обчислень функції, що мінімізується, нічим не обмежена, то описаний процес продовжується доки не буде отриманий відрізок $[a_n, b_n]$ довжиною $b_n - a_n < \epsilon$, де ϵ – задана точність, причому ϵ . В якості наближення до вирішення можна прийняти x'_n .

При цьому похибка становитиме:

$$\rho \leq \max \{x'_n - a_n; b_n - x'_n\} = (\sqrt{5} - 1) \cdot (b_n - a_n) / 2 = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n (b - a).$$

Необхідно зазначити, що реалізація методу золотого перерізу на ЕОМ пов'язана з деякими труднощами. Справа в тому, що обчислення $\sqrt{5}$ неминуче пов'язане з виникненням похибки округлення. З кожною ітерацією реалізації методу дана похибка буде зростати, та за умови великої кількості ітерацій n метод золотого перерізу не може бути реалізований на ЕОМ з дотриманням достатньої точності розрахунків.

Для усунення даного недоліку необхідно при визначенні точки x_{n+1} замість рівняння $x_{n+1} = a_n + b_n - x_n$ безпосередньо вираховувати золотий переріз за виразами:

$$x_{n+1} = a_n + (3 - \sqrt{5})(b_n - a_n) / 2;$$

або

$$x_{n+1} = a_n + (\sqrt{5} - 1)(b_n - a_n) / 2.$$

Після такої модифікації метод золотого перерізу характеризується високою точністю, хоча й дещо меншою економічністю.

Метод дотичних

Метод дотичних, або метод Ньютона є одним з найбільш ефективних методів пошуку мінімуму функції однієї змінної $f(x)$, але може бути застосований лише у випадку, якщо можливо обчислити похідну даної функції $f'(x)$.

Якщо функція $f(x)$ є випуклою та диференційованою на відрізку $[a, b]$, можна довести, що така функція є також унімодальною на $[a, b]$.

Зафіксуємо довільну точку $v \in [a, b]$ та визначимо функцію $g(x, v)$:

$$g(x, v) = f(v) + f'(v) \cdot (x - v), \quad a \leq x \leq b.$$

Можна довести, що:

$$g(x, v) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Функція $g(x, v)$ є дотичною до функції $f(x)$ в точці v .

В якості першого наближення оберемо будь-яку точку $x_0 \in [a, b]$. Визначимо функцію $p_0(x) = g(x, x_0)$ та визначимо точку $x_1 \in [a, b]$ з умови

$$p_0(x_1) = \min_{u \in [a,b]} p_0(u).$$

Зрозуміло, що у випадку, якщо $f'(x_0) \neq 0$, то в якості x_1 виступатиме або точка $x_1 = a$, або точка $x_1 = b$.

Наступну точку x_2 визначимо як точку перетину функцій $g(x, x_0)$ та $g(x, x_1)$ (див. рис. 7.4) і. т. д.

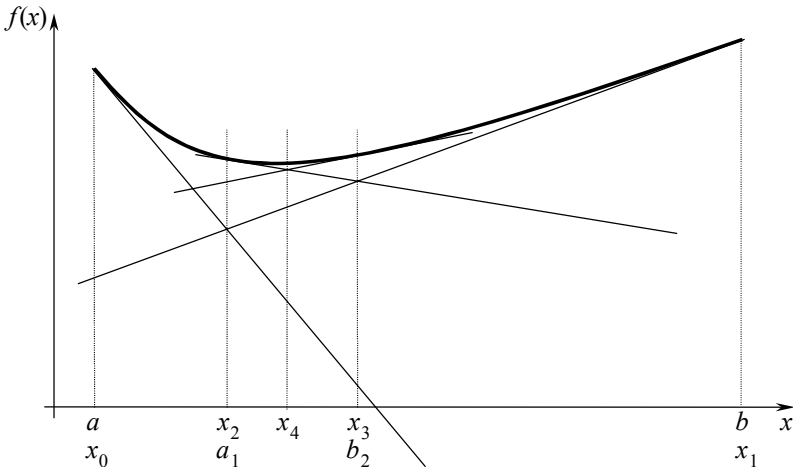


Рис. 7.4. Графічна інтерпретація методу дотичних

Якщо точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 1$) є відомими, то наступна точка x_{n+1} визначається як точка перетину дотичних $g(x, x_{n-1})$ та $g(x, x_n)$.

В якості умови вирішення задачі можна прийняти умову $x_n - x_{n-1} < \varepsilon$, де ε – точність розрахунку, яка задається користувачем.

Розглянемо схему реалізації методу дотичних на ЕОМ.

Приймаємо $a_0 = a$, $b_0 = b$. Зрозуміло, що функція $f(x)$ є випуклою лише у випадку, якщо задовольняється умова $f'(a_0) < 0$ та $f'(b_0) > 0$. Нехай вже відомий відрізок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ і виконується умова $f'(a_{n-1}) < 0$ та $f'(b_{n-1}) > 0$. Позначимо точку x_n як точку перетину дотичних $g(x, a_{n-1})$ і $g(x, b_{n-1})$:

$$x_n = \frac{f(a_{n-1}) - f(b_{n-1}) + b_{n-1}f'(b_{n-1}) - a_{n-1}f'(a_{n-1})}{f'(b_{n-1}) - f'(a_{n-1})}.$$

Обчислимо похідну $f'(x_n)$. Якщо $f'(x_n) \neq 0$ (в протилежному випадку задача є вирішеною), то:

якщо $f'(x_n) > 0$ приймаємо $a_n = a_{n-1}$, $b_n = x_n$;

якщо $f'(x_n) < 0$ приймаємо $a_n = x_n$, $b_n = b_{n-1}$;

якщо виконується умова $(b_n - a_n) < \varepsilon$, то задачу вирішено з похибкою, яка може бути оцінена так:

$$\rho \leq \max \{x_{n+1} - a_n; b_n - x_{n+1}\}.$$

Метод розрядного пошуку

Розглянемо також один з найбільш універсальних методів мінімізації функції однієї змінної, який водночас є найменш вибагливим до властивостей функції, що досліджується, – метод розрядного пошуку.

Для спрощення розглянемо функцію $f(x)$, неперервну та унімодальну на відрізку $[a, b]$.

Сутність методу полягає в розбитті відрізка $[a, b]$ певною кількістю N відрізків точками $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}$. Далі визначається набір значень функції $f(a), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{N-1}), f(b)$ і шляхом їх порівняння між собою визначається відрізок $[x_{l-1}, x_{l+1}]$, який містить мінімум функції $f(x)$. Далі отриманий відрізок $[x_{l-1}, x_{l+1}]$ поділяється на L частин точками $x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_{L-1}$ та визначаються значення функцій $f(x_{l-1}), f(x'_1), f(x'_2), f(x'_3), \dots, f(x'_{L-1}), f(x_{l+1})$. Порівнюючи між собою отримані значення, знаходимо новий відрізок $[x'_{l-1}, x'_{l+1}]$ та повторюємо розрахунки доти, доки різниця між границями досліджуваного відрізка не буде меншою за прийняту точність розрахунку ε :

$$x_{l+1}^m - x_{l-1}^m < \varepsilon.$$

Зрозуміло, що існує досить багато варіантів реалізації даного методу: розбиття відрізка може виконуватися рівномірно або за певним законом, кількість точок, на які розбивається відрізок, може бути однаковою на кожній ітерації ($N = L$) або змінюватися за певним законом тощо.

Розглянемо особливості реалізації на ЕОМ методу розрядного пошуку за умови рівномірного розбиття відрізка, який містить мінімум функції $f(x)$ однаковою для кожної ітерації кількістю точок N (див. рис. 7.5).

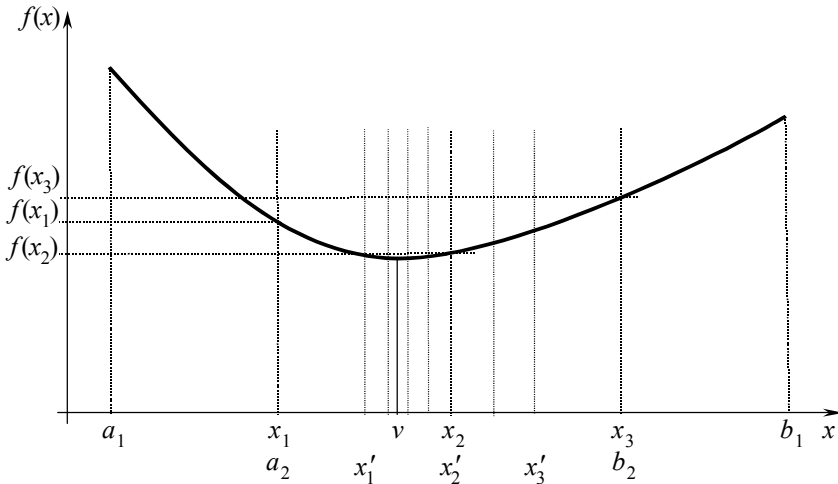


Рис. 7.5. Графічна інтерпретація методу розрядного пошуку для $N=4$

Приймаємо $a_1 = a$, $b_1 = b$. Координати проміжних точок розрахуємо за наступним виразом:

$$x_i = a + \frac{i}{N}(b - a), \quad x = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Знаходимо точку x_p , для якої задовольняється умова:

$$f(x_{l-1}) > f(x_l) < f(x_{l+1}).$$

Приймаємо $a_2 = x_{l-1}$, $b_2 = x_{l+1}$.

Якщо $f(x_{N-1}) > f(b_1)$ (тобто $l = N - 1$), то приймаємо $a_2 = x_{N-1}$, $b_2 = b_1$.

Якщо $f(x_1) > f(a)$ (тобто $l = 1$), то приймаємо $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$.

Нехай вже відомий відрізок $[a_n, b_n]$. Розіб'ємо його на N відрізків однакової довжини точками:

$$x_i = a_n + \frac{i}{N}(b_n - a_n), \quad x = 1, 2, \dots, N-1.$$

Знаходимо точку x_l , для якої задовольняється умова:

$$f(x_{l-1}) > f(x_l) < f(x_{l+1}).$$

Приймаємо $a_{n+1} = x_{l-1}$, $b_{n+1} = x_{l+1}$.

Якщо $f(x_{N-1}) > f(b_n)$ (тобто $l = N-1$), то приймаємо $a_{n+1} = x_{N-1}$, $b_{n+1} = b_n$.

Якщо $f(x_1) > f(a)$ (тобто $l = 1$), то приймаємо $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_1$.

Якщо виконується умова:

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \varepsilon,$$

то потрібна точність досягнута, в якості відповіді можна взяти точку

$$v = a_{n+1} + (b_{n+1} - a_{n+1})/2,$$

похибка визначення якої може бути оцінена як

$$\rho \leq \max \{x_{n+1} - a_n; b_n - x_{n+1}\}.$$

На останок, виконаємо спробу порівняти описані методи мінімізації функції однієї змінної. В якості функції, що мінімізується, приймемо:

$$f(x) = -2x^{1/3} + 0,8x^{4/3} + 2.$$

Ставиться задача пошуку мінімуму функції $f(x)$ на відрізку $[0, 2]$ (див. рис. 7.6).

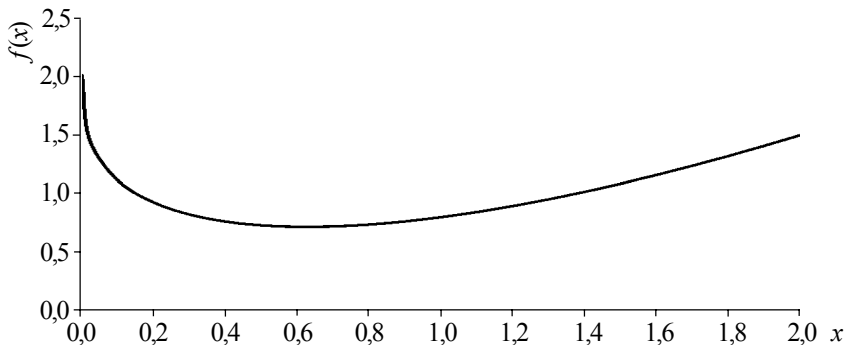


Рис. 7.6. Графік функції $f(x) = -2x^{1/3} + 0,8x^{4/3} + 2$ на відрізку $[0, 2]$

Зазначимо, що похідна даної функції $f'(x)$ має наступний вигляд:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2/3} + \frac{3,2}{3}x^{1/3}.$$

Аналітичне вирішення рівняння $f'(x) = 0$ дає точну відповідь $x^* = 0,625$, в якій значення функції становить $f(x^*) \approx 0,71751804$. Скористаємося чисельними методами. В таблиці 7.1 наведено порівняння чотирьох розглянутих вище методів. В усіх випадках задана точність знаходження абсциси точки мінімуму становила $\epsilon = 0,00001$.

Таблиця 7.1. Порівняння чисельних методів пошуку мінімуму функції однієї змінної для функції $f(x) = -2x^{1/3} + 0,8x^{4/3} + 2$ на відрізку $[0, 2]$

Параметр	Метод дихотомії	Метод золотого перерізу	Метод дотичних	Метод розрядного пошуку
x^*	$\approx 0,624996185$	$\approx 0,62500134$	$\approx 0,625000156$	0,625
$f(x^*)$	$\approx 0,71751804$	$\approx 0,71751804$	$\approx 0,71751804$	$\approx 0,71751804$
N	18	26	21	18
M	38	28	88	90
ϵ	$1 \cdot 10^{-5}$			
ρ	$\approx 3,8152 \cdot 10^{-6}$	$\approx 4,554 \cdot 10^{-6}$	$\approx 3,008 \cdot 10^{-6}$	$\approx 3,629 \cdot 10^{-6}$
$ x_t^* - x^* $	$\approx 3,8145 \cdot 10^{-6}$	$\approx 1,3399 \cdot 10^{-6}$	$\approx 1,561 \cdot 10^{-7}$	0

В таблиці 7.1 використані наступні позначення: N – кількість ітерацій, M – кількість обчислень функції (та похідної функції для методу дотичних), ρ – оцінка похибки знаходження x^* , $|x_t^* - x^*|$ – фактична абсолютна похибка знаходження x^* .

Аналізуючи таблицю 7.1, зазначимо, що за умови майже однакової ρ , найбільш економічним є метод золотого перерізу, який потребує лише 28 обчислень значення функції $f(x)$. Найменш економічним є метод розрядного пошуку, який вимагає 90 обчислень функції, але й найбільш точне рішення задачі знайдено саме за методом розрядного пошуку. Останнє здебільшого зумовлене випадковим збігом вихідних даних.

Необхідно зазначити, що у випадку, якщо точне рішення задачі знайти неможливо (більшість реальних випадків), то оцінка похибки може бути здійснена тільки за допомогою ρ . З цієї точки зору найбільша точність отримана при використанні методу дотичних. Також варто підкреслити

деяку умовність проведеного порівняння, адже для іншої $f(x)$ результати можуть суттєво змінитися, що й зумовлює вибір на користь того чи іншого методу при вирішенні практичних задач.

Пошук екстремуму функції декількох змінних.

Однією з найбільш розповсюджених задач експериментального (натурного та чисельного) дослідження ДВЗ, як було показано вище, є задача пошуку екстремуму цільової функції, яка здебільшого є функцією декількох змінних, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Функція $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ мінімізується на деякій множині $X \in R^m$.

Для спрощення дамо основні визначення теорії *мінімізації* функції декількох змінних, беручи до уваги, що задача максимізації функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ еквівалентна задачі мінімізації функції $-f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Нехай $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ є дійсною функцією багатьох змінних, що визначена на множині $X \in R_m$. Точка $\bar{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\} \in X$ є точкою глобального мінімуму функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на множині X , якщо для всіх $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in X$ виконується нерівність $f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x})$.

Точка $\bar{x} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m\} \in X$ є точкою локального мінімуму функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на множині X , якщо існує такий δ -окіл U_δ цієї точки, що для всіх $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in X_\delta = X \cap U_\delta$ виконується нерівність $f(\bar{x}') \leq f(\bar{x})$. Якщо ж для всіх $\bar{x} \in X_\delta (\bar{x} \neq \bar{x}')$ виконується строга нерівність $f(\bar{x}') < f(\bar{x})$, то $\bar{x}'$ є точкою строго локального мінімуму.

Більшість методів вирішення задачі безумовної мінімізації в дійсності є методами пошуку точки локального мінімуму. За виключенням деяких випадків, знаходження глобального мінімуму полягає в пошуку всіх локальних мінімумів функції та їх взаємного порівняння.

Множина точок, для яких цільова функція приймає постійне значення $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = c$, має назву *поверхня рівня*. Якщо кількість змінних дорівнює 2, то поверхня рівня приймає вигляд *лінії рівня*. На рис. 7.7 схематично показано, яким чином отримуються лінії рівня функції двох змінних. Функція $f(x_1, x_2)$ у тривимірному просторі приймає вигляд деякої поверхні $u = f(x_1, x_2)$, найнижча точка якої дає вирішення задачі мінімізації. Для зображення рельєфу поверхні u на ній нанесені лінії перетину поверхні з площинами $u = \text{const}$, проєкції яких на площину Ox_1x_2 і є лініями рівня. Аналогічним чином отримані лінії рівня на рис. 6.4, 6.6, 6.7.

Якщо функція $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ є диференційованою, то для неї можна визначити вектор перший часткових похідних:

$$g(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\bar{x}) \right]^T.$$

Вектор $g(\bar{x})$ має назву градієнта функції. Якщо $g(\bar{x}) \neq 0$, то, як відомо, він є перпендикулярним поверхні рівня та спрямований в сторону найшвидшого зростання функції.

Вектор $-g(\bar{x})$ має назву антиградієнта та вказує напрямок найшвидшого зменшення функції.

Існує досить велика кількість чисельних методів мінімізації функції багатьох змінних. Назвемо декілька з них:

- метод координатного спуску, який полягає в ітераційному застосуванні методів мінімізації функції однієї змінної окремо для кожної координатної вісі;

- градієнтний метод, який оснований на використанні властивості антиградієнта функції вказувати напрямок її найшвидшого зменшення;

- метод Ньютона в різних модифікаціях;
- метод спряжених градієнтів;
- метод прямого пошуку, який не потребує обчислення похідної функції.

У даному курсі пропонується докладно розглянути градієнтний метод, який поєднує простоту і високу ефективність. Розглянемо особливості застосування такого методу для двох випадків: 1) похідна функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ може бути обчислена; 2) похідна функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ не може бути обчислена.

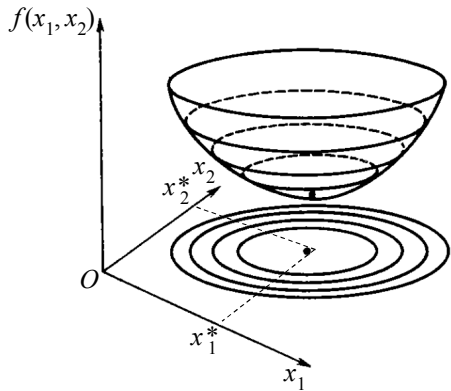


Рис. 7.7. Отримання ліній рівня функції двох змінних

Перша похідна функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ може бути обчислена.

Нехай точка $\bar{x}^{(n)} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ є наближенням до точки мінімуму функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Тоді у відповідності до градієнтного методу за наступне наближення слід обрати точку

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - a_n g(\bar{x})^{(n)},$$

де $a_n > 0$ – число, яке називають шагом методу; $g(\bar{x})$ – градієнт функції.

В якості критерію закінчення ітерацій використовуються наступні:

$$\begin{aligned} |\bar{x}^{(n+1)} - \bar{x}^{(n)}| &< \varepsilon_1; \\ |f(\bar{x})^{(n+1)} - f(\bar{x})^{(n)}| &< \varepsilon_2; \\ f'(\bar{x})^{(n)} &< \varepsilon_3, \end{aligned}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – задані користувачем позитивні числа.

Дані критерії можуть використовуватися окремо або у різних поєднаннях.

Для наочності розглянемо конкретний приклад. При обробці результатів експериментального дослідження двигуна, наведених у табл. 6.1, було застосоване регресійне рівняння у вигляді поліному другої степені, та обчислені коефіцієнти рівняння регресії. Поставимо задачу знаходження максимуму отриманої функції $N'_e = N'_e(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})$, зауважуючи, що пошук слід виконувати з урахуванням обмежень: $5 < \varphi_{\text{в.вп}} < 35$ град. п.к.в., $5 < \varphi_{\text{з.вп}} < 25$ град. п.к.в. Функція $N'_e(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})$ належить до функцій вигляду:

$$f(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1^2 + a_5 x_2^2.$$

Часткові похідні такої функції визначаються рівняннями:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a_1 + a_3 x_2 + 2a_4 x_1;$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = a_2 + a_3 x_1 + 2a_5 x_2.$$

Для випадку функції $N'_e(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})$ рівняння часткових похідних матимуть вигляд:

$$\frac{\partial N'(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})}{\partial \varphi_{\text{в.вп}}} = 0,3991 + 0,005 \cdot \varphi_{\text{з.вп}} + 2 \cdot 0,0062963 \cdot \varphi_{\text{в.вп}};$$

$$\frac{\partial N'(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})}{\partial \varphi_{\text{з.вп}}} = 0,3991 + 0,005 \cdot \varphi_{\text{в.вп}} + 2 \cdot 0,0024167 \cdot \varphi_{\text{з.вп}}.$$

Як перше наближення оберемо довільну точку $\bar{x}^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\} = \{5, 5\}$ (тобто $\varphi_{\text{в.вп}}^{(0)} = 5$, $\varphi_{\text{з.вп}}^{(0)} = 5$).

Шаг методу оберемо окремо для кожної змінної за виразом:

$$a_{x_1} = \frac{\varphi_{\text{в.вп}}^{\max} - \varphi_{\text{в.вп}}^{\min}}{L} = \frac{35 - 5}{20} = 1,5 \text{ град. п.к.в.};$$

$$a_{x_2} = \frac{\varphi_{\text{з.вп}}^{\max} - \varphi_{\text{з.вп}}^{\min}}{L} = \frac{25 - 5}{20} = 1 \text{ град. п.к.в.}$$

Прийmemo шаги постійними незалежно від величини наближення. Наступне наближення розрахуємо за виразами:

$$\varphi_{\text{в.вп}}^{(1)} = \varphi_{\text{в.вп}}^{(0)} + a_{x_1} \frac{\partial N'(\varphi_{\text{в.вп}}^{(0)}, \varphi_{\text{з.вп}}^{(0)})}{\partial \varphi_{\text{в.вп}}};$$

$$\varphi_{\text{з.вп}}^{(1)} = \varphi_{\text{з.вп}}^{(0)} + a_{x_2} \frac{\partial N'(\varphi_{\text{в.вп}}^{(0)}, \varphi_{\text{з.вп}}^{(0)})}{\partial \varphi_{\text{з.вп}}}.$$

Після виконання відповідної підстановки отримаємо:

$$\varphi_{\text{в.вп}}^{(1)} = 5,467 \text{ град. п.к.в.}; \varphi_{\text{з.вп}}^{(1)} = 5,733 \text{ град. п.к.в.}$$

Відповідно, $n + 1$ наближення отримаємо за виразами:

$$\varphi_{\text{в.вп}}^{(n+1)} = \varphi_{\text{в.вп}}^{(n)} + a_{x_1} \frac{\partial N'(\varphi_{\text{в.вп}}^{(n)}, \varphi_{\text{з.вп}}^{(n)})}{\partial \varphi_{\text{в.вп}}};$$

$$\varphi_{\text{з.вп}}^{(n+1)} = \varphi_{\text{з.вп}}^{(n)} + a_{x_2} \frac{\partial N'(\varphi_{\text{в.вп}}^{(n)}, \varphi_{\text{з.вп}}^{(n)})}{\partial \varphi_{\text{з.вп}}}.$$

Зазначимо, що в наведених виразах перед шагом методу записаний "+", адже вирішується задача максимізації функції. Також зрозуміло, що для визначення a_{x_1} та a_{x_2} можна інтервал зміни відповідної змінної ділити на довільне число (не обов'язково на $L = 20$), або зробити залежним від номеру ітерації n , наприклад, наступним чином:

$$a_{x_1}^n = a_{x_1}^1 \gamma^n; \quad a_{x_2}^n = a_{x_2}^1 \gamma^n,$$

де $0 < \gamma < 1$.

У цьому випадку початкове значення шагу можна суттєво збільшити.

На рис. 7.8 наведені лінії рівня функції $N'_e(\varphi_{\text{в.вп}}, \varphi_{\text{з.вп}})$ та зображена графічна інтерпретація градієнтного методу. З рисунка зрозуміло, що траєкторія пошуку залежить від початкового наближення та при достатньо малому значенні шагів є лінійною, що проходить перпендикулярно лініям рівня функції, що досліджується.

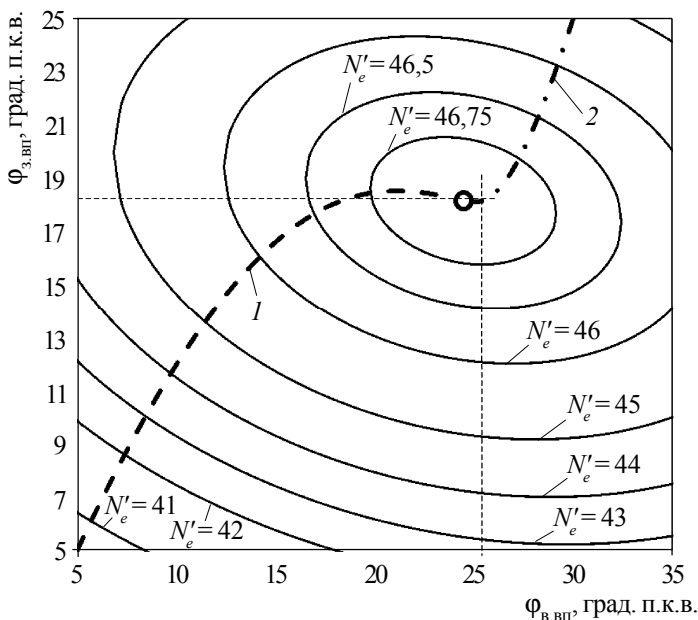


Рис. 7.8. Графічна інтерпретація градієнтного методу пошуку максимуму функції двох змінних для різних початкових наближень:

1 – початкове наближення $\bar{x}^{(0)} = \{5, 5\}$; 2 – початкове наближення $\bar{x}^{(0)} = \{30, 25\}$

У таблиці 7.2 наведено порівняння основних результатів визначення максимуму функції $N'_e(\Phi_{\text{в.вп}}, \Phi_{\text{з.вп}})$ для різного значення заданої точності ϵ_1 для двох випадків початкового наближення. З таблиці 7.2 зрозуміло, що $\bar{x}^{(0)} = \{30, 25\}$ є більш вдалим першим наближенням, ніж $\bar{x}^{(0)} = \{5, 5\}$, але зі збільшенням точності ϵ_1 відносна відмінність у кількості ітерацій зменшується.

Таблиця 7.2. Результати пошуку максимуму функції $N'_e(\Phi_{\text{в.вп}}, \Phi_{\text{з.вп}})$ градієнтним методом

Параметр	$\bar{x}^{(0)} = \{5, 5\}$	$\bar{x}^{(0)} = \{5, 5\}$	$\bar{x}^{(0)} = \{30, 25\}$	$\bar{x}^{(0)} = \{30, 25\}$
Точність ϵ_1	0,01	0,00001	0,01	0,00001
Кількість ітерацій, N	188	576	109	495
$\Phi_{\text{в.вп}}^{(n+1)}$, град. п.к.в.	$\approx 23,933$	$\approx 24,481$	$\approx 25,019$	$\approx 24,482$
$\Phi_{\text{з.вп}}^{(n+1)}$, град. п.к.в.	$\approx 18,245$	$\approx 18,157$	$\approx 18,0999$	$\approx 18,157$
$N'_e^{(n+1)}$, кВт	$\approx 46,8807$	$\approx 46,8825$	$\approx 46,8808$	$\approx 46,8825$
$ \bar{x}^{(n+1)} - \bar{x}^{(n)} $	$\approx 0,00999$	$\approx 9,9 \cdot 10^{-6}$	$\approx 0,00999$	$\approx 9,9 \cdot 10^{-6}$
$ f(\bar{x})^{(n+1)} - f(\bar{x})^{(n)} $	$\approx 6,7 \cdot 10^{-5}$	$\approx 6,6 \cdot 10^{-11}$	$\approx 6,5 \cdot 10^{-5}$	$\approx 6,6 \cdot 10^{-11}$

Перша похідна функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ не може бути обчислена.

Якщо похідну функції $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ не можливо обчислити, що характерно для оптимізаційного натурного експерименту, то наведена вище послідовність дій дещо змінюється.

Для початкової точки $\bar{x}^{(0)}$ складається план-матриця повного факторного експерименту типу 2^m (якщо застосовуватиметься лінійне рівняння регресії) або 3^m (якщо застосовуватиметься квадратичне рівняння регресії), де m – кількість змінних. Інтервали варіювання кожного фактора обираються суттєво меншими за зони визначення відповідних факторів, та визначаються крім іншого, з огляду на точність експериментального визначення цільової функції.

Результати повного факторного експерименту обробляють за допомогою регресійного рівняння $j(x_1, x_2, \dots, x_m)$ відповідного типу. Далі знаходять градієнт $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функції $j(x_1, x_2, \dots, x_m)$:

$$g(\bar{x}) = j'(\bar{x}) = \left[\frac{\partial j}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial j}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial j}{\partial x_m}(\bar{x}) \right]^T.$$

Наступне наближення координати мінімуму знаходять за виразами:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - \Delta \bar{x} \cdot g(\bar{x}^{(0)}); \quad \bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - \Delta \bar{x} \cdot g(\bar{x}^{(n)}),$$

або:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} - \Delta x_1 \cdot \frac{\partial j}{\partial x_1}(\bar{x}); \\ x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} - \Delta x_2 \cdot \frac{\partial j}{\partial x_2}(\bar{x}); \\ \dots \\ x_m^{(n+1)} = x_m^{(n)} - \Delta x_m \cdot \frac{\partial j}{\partial x_m}(\bar{x}). \end{cases}$$

Пошук наступних наближень здійснюється доти, доки не будуть задоволені вимоги точності $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

Графічно даний метод ілюструється рис. 6.6.

Послідовність виконання роботи

У даній роботі студент має розробити програму для пошуку мінімуму та максимуму регресійної функції, отриманої при обробці повного факторного експерименту. Програма пошуку мінімуму функції може бути виконана різної складності у відповідності до таблиці 7.3. В залежності від складності програми студентом отримується належна кількість балів.

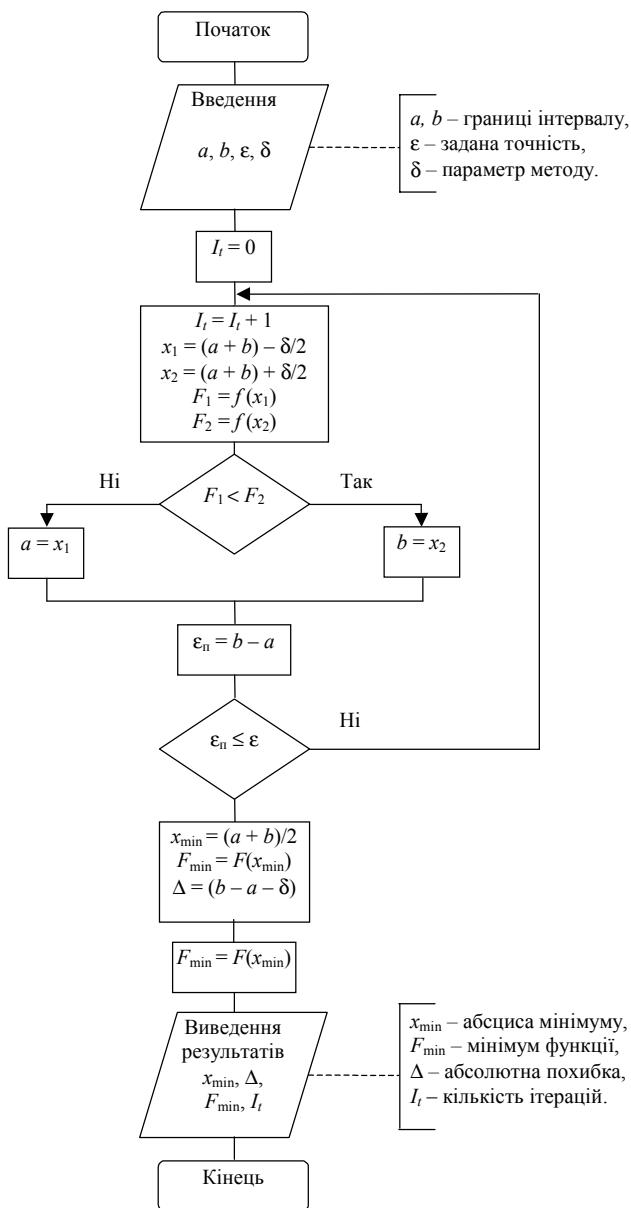
Перед пошуком мінімуму чи максимуму функції однієї змінної необхідно встановити її характер на заданому інтервалі: чи є функція випукла або увігнута. Для цього необхідно обчислити другу похідну функції $f''(x)$:

якщо $f''(x) > 0$, то функція випукла та має на вказаному інтервалі мінімум, який не співпадає з границями; якщо $f''(x) < 0$, то функція увігнута та має на вказаному інтервалі мінімум, який не співпадає з границями інтервалу.

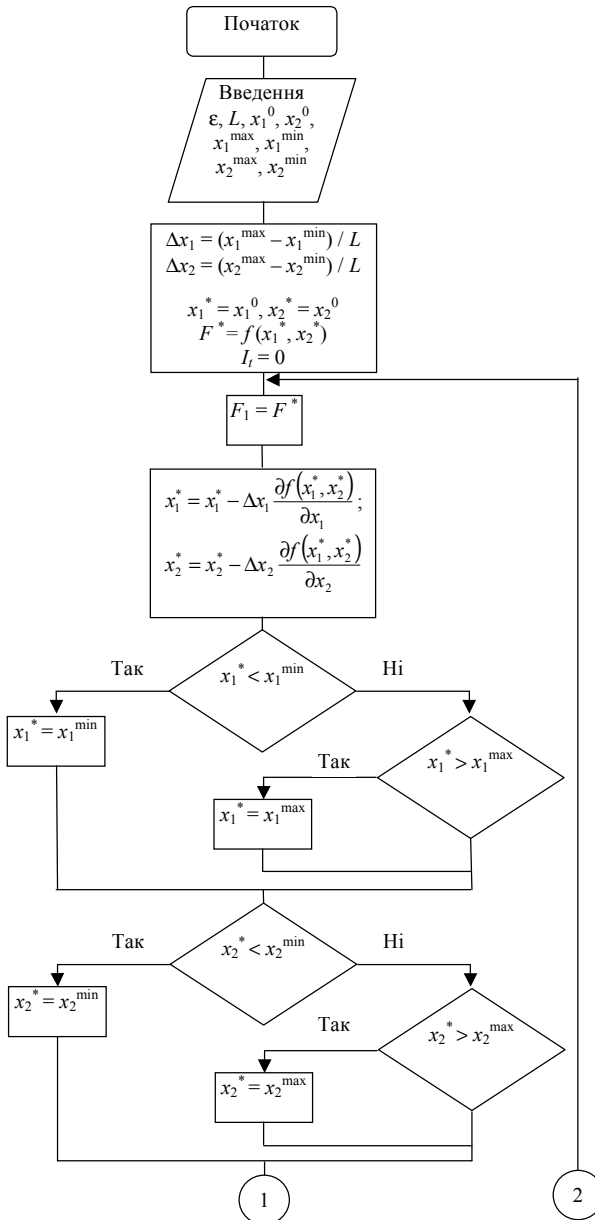
Таблиця 7.3. Варіанти виконання програми визначення максимуму і мінімуму регресійної функції відгуку

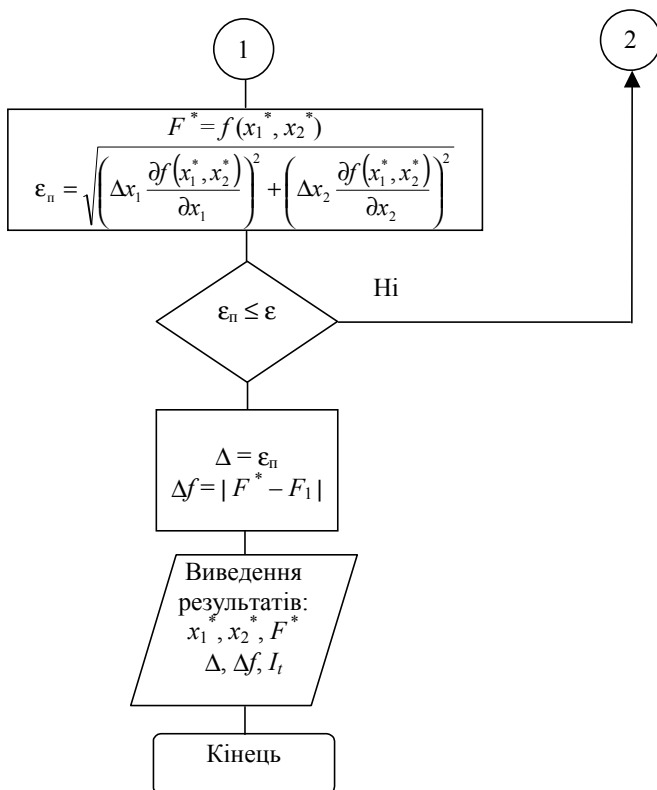
№	Вимоги до програми	Складність, відсоток	Кількість балів
1	Визначення мінімуму та максимуму функції $f(x)$ методом дихотомії.	50 %	13
2	Визначення мінімуму та максимуму функції $f(x)$ методом золотого перерізу.	60 %	15
3	Визначення мінімуму та максимуму функції $f(x)$ методом розрядного пошуку.	70 %	18
4	Визначення мінімуму та максимуму функції $f(x)$ методом Ньютона.	70 %	18
5	Визначення мінімуму та максимуму функції $f(x_1, x_2)$ градієнтним методом.	90 %	23
6	Визначення мінімуму та максимуму функції $f(x)$ методом дихотомії, золотого перерізу, методом розрядного пошуку та методом Ньютона.	100 %	25
7	Додаткова процедура графічної візуалізації процедури пошуку екстремуму.	+ 10 %	+ 3
8	Універсальна програма для визначення мінімуму та максимуму функції однієї та двох змінних.	+ 30 %	+ 8

Блок-схема алгоритму мінімізації функції за методом дихотомії



Блок-схема алгоритму мінімізації функції двох змінних $f=f(x_1, x_2)$





Пошук максимуму функції однієї змінної та функції двох змінних виконується за аналогічними алгоритмами, якщо функцію $f(x)$ замінити функцією $-f(x)$.

Лабораторна робота № 3.
РОБОЧИЙ АРКУШ
Пошук екстремуму функцій

Визначити максимум та мінімум функції однієї змінної

$f(x) =$ _____
на інтервалі _____

Визначити максимум та мінімум функції двох змінних

$f(x_1, x_2) =$ _____
на інтервалі _____

Рівень складності _____

Студент групи _____ ППб _____

Викладач _____

Дата _____

Контрольні питання

1. Дайте визначення унімодальної функції.
 2. Дайте визначення локального та глобального мінімуму функції. Наведіть графічну інтерпретацію для функції однієї змінної.
 3. Дайте визначення строгого та нестрогого локального максимуму функції. Наведіть графічну інтерпретацію для функції однієї змінної.
 4. У чому полягає класичний метод пошуку екстремуму функції однієї змінної? Які переваги та недоліки він має?
 5. Наведіть графічну інтерпретацію методу дихотомії. Що називають параметром методу δ ?
 6. Наведіть графічну інтерпретацію методу золотого перерізу. Яка особливість цього методу робить його одним з найбільш економічних?
 7. Поясніть за допомогою графічного представлення сутність методу Ньютона для визначення екстремуму функції однієї змінної. Накресліть блок-схему цього методу.
 8. У чому полягає метод розрядного пошуку екстремуму функції однієї змінної? Наведіть блок-схему методу.
 9. Дайте визначення градієнта та антиградієнта функції багатьох змінних. Наведіть графічну інтерпретацію для випадку функції двох змінних.
 10. Які властивості градієнта функції використовуються при чисельному пошуку екстремуму функції багатьох змінних?
 11. У чому полягає відмінність реалізації градієнтних методів пошуку екстремуму функції багатьох змінних для випадків, якщо похідна досліджуваної функції може або не може бути обчислена?
 12. Чи залежить точність та економічність методів чисельного пошуку екстремуму функції декількох змінних від обирання початкового наближення?
-

ДОДАТОК

Приклади команд та конструкцій керування у Visual Basic.

- Введення значень змінних зі сторінки Excel в середовище VBA:

```
vnt_a = Worksheets("Лист1").Range("vnt_a").Value
```

- Виведення значень змінних з середовища VBA на сторінку Excel:

```
Worksheets("Лист1").Range("vnt_a").Value = vnt_a
```

- Введення значень елементів масиву в середовище VBA зі сторінки Excel з використанням циклу For...Next:

```
Fori_cnt = 0 To vnt_n - 1  
Forj_cnt = 0 To vnt_n - 1  
Arr_A(i_cnt, j_cnt) = Worksheets("Лист1").  
Range("Massiv_A").Cells(i_cnt + 1, j_cnt + 1)  
Next j_cnt  
Next i_cnt
```

- Виведення значень елементів масиву з середовища VBA на сторінку Excel:

```
Fori_cnt = 0 To vnt_n - 1  
Forj_cnt = 0 To vnt_n - 1  
Worksheets("Лист1").Range("Massiv_A").  
Cells(i_cnt + 1, j_cnt + 1) =  
= Arr_A(i_cnt, j_cnt)  
Next j_cnt  
Next i_cnt
```

- Оголошення статичних масивів:

```
Dim Arr_A(99,99) As Double
Dim Arr_A(1 to 100,1 to 100) As Double
```

Наведеним способом оголошується двовимірний масив розміром 100×100 , де елементи масиву дійсні числа. В першому випадку нумерація рядків та стовпчиків починається з 0, а в другому – з 1.

- Оголошення динамічних масивів:

оголошення масиву без розміру для оголошення типу масиву:

```
Dim Arr_A() As Double
```

встановлення розміру масиву:

```
ReDim Arr_A(1 to 100,1 to 100) As Double
```

- Конструкція if...then:

```
If Abs(Arr_A(i_cnt, k_cnt)) > maxim Then
maxim = Abs(Arr_A(i_cnt, k_cnt))
Else
l_cnt = i_cnt
End If
```

Як приклад готової програми розглянемо програму сортування заданого масиву за зростанням значень його елементів. На рис. 1Д представлений інтерфейс програми в середовищі Microsoft Excel.

Відсортувати масив		
Заданий масив		
-5	100	1
4	3	15
2	0	6
Масив відсортований		
-5	0	1
2	3	4
6	15	100

Рис. 1Д. Можливий варіант інтерфейсу програми сортування масиву за зростанням значень його елементів

Для побудови кнопки із назвою "Відсортувати масив", яка активує процедуру сортування, що записана в VBA, необхідно:

1. В середовищі MicrosoftExcel в меню **Елементи управління** на вкладці **Додати** вибрати команду **Вставити елемент управління кнопка**" (рис. 2Д).

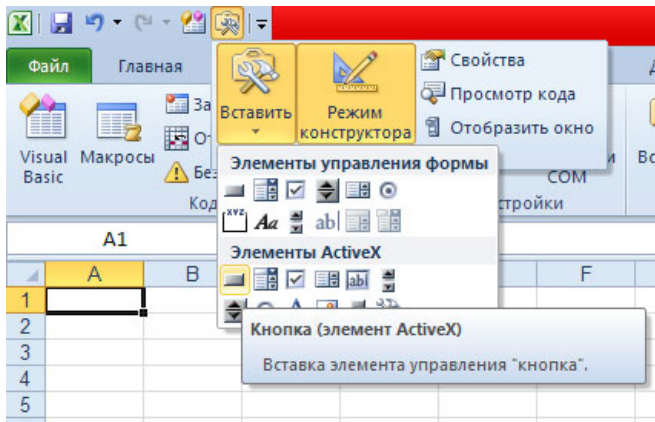


Рис. 2Д. Побудова елемента управління "Кнопка"

2. Натиснути курсором на лист Microsoft Excel у тому місці, де ба-
о побудувати кнопку, і за допомогою курсору рамкою задати габаритні розміри об'єкта (рис. 3Д).

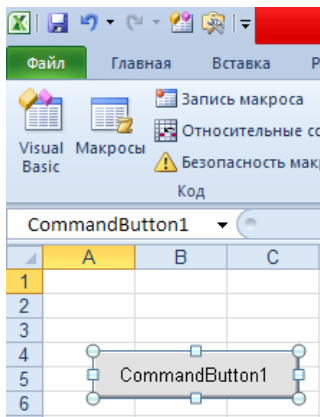


Рис. 3Д. Побудова кнопки управління `CommandButton1`

3. Для перейменування кнопки необхідно натиснути на кнопку правою клавішею миші в Режимі конструктора. В меню **Об'єкт CommandButton1** вибрати вкладку **Edit** і записати бажану назву кнопки (рис. 4Д).

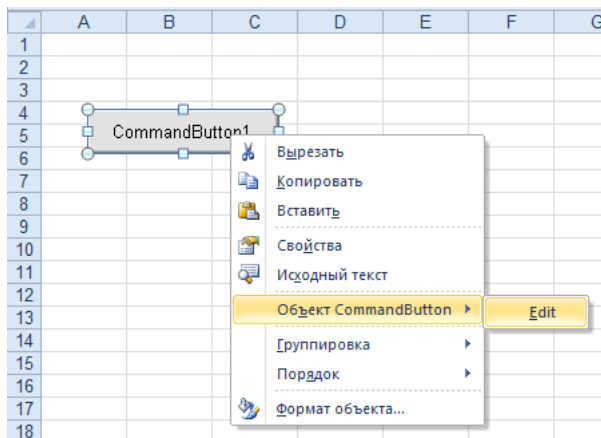


Рис. 4Д. Перейменування кнопки управління CommandButton1

4. Для зв'язку елемента управління "Кнопка" з процедурою, записаною в середовищі VBA, необхідно натиснути на кнопку правою клавішею миші в Режимі конструктора і вибрати вкладку **Вихідний текст** (див. рис. 4Д). У відкритому вікні VBA буде записана процедура, що зв'язана з побудованою кнопкою.

Код програми, реалізований у VBA, представлений нижче.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim Arr1(1 To 3, 1 To 3) As Double
Dim Arr2(1 To 3, 1 To 3) As Double
Dim ArrB(1 To 9) As Double

Fori_cnt = 1 To 3
Forj_cnt = 1 To 3
    Arr1(i_cnt, j_cnt) = Worksheets("Лист1")._
Range("Arr_1").Cells(i_cnt, j_cnt)
```

```

Next j_cnt
Next i_cnt

f_cnt = 1
For i_cnt = 1 To 3
For j_cnt = 1 To 3
Arr B(f_cnt) = Arr1(i_cnt, j_cnt)
f_cnt = f_cnt + 1
Next j_cnt
Next i_cnt

Forv_cnt = 1 To 9
Min = ArrB(v_cnt)
l = v_cnt
Fori_cnt = v_cnt To 9
If Min > ArrB(i_cnt) Then
Min = ArrB(i_cnt)
l = i_cnt
End If
Next i_cnt
ArrB(l) = ArrB(v_cnt)
ArrB(v_cnt) = Min
Next v_cnt

f_cnt = 1
Fori_cnt = 1 To 3
Forj_cnt = 1 To 3
Arr1(i_cnt, j_cnt) = ArrB(f_cnt)
f_cnt = f_cnt + 1
Worksheets("Лист1").Range("Arr2")._
Cells(i_cnt, j_cnt) = Arr1(i_cnt, j_cnt)
Next j_cnt
Next i_cnt

End Sub

```

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Адлер, Ю. П.** Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий [Текст] / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М. : Наука, 1976. – 278 с.
2. **Амосов, А. А.** Вычислительные методы для инженеров : учебное пособие [Текст] / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченкова. – М. : Высшая школа, 1994. – 544 с.
3. **Анеликова, Л. А.** Лабораторные работы по Excel [Текст] / Л. А. Анеликова. – М. : СОЛОН-ПРЕС, 2006. – 128 с.
4. **Банди, Б.** Методы оптимизации : вводный курс [Текст] / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.
5. **Блохин, А. В.** Теория эксперимента [Электронный ресурс]: Курс лекций в двух частях : Часть 2. – Электрон.текст. дан. (1,0 Мб). – Мн. : Научно-методический центр "Электронная книга БГУ", 2003. – Режим доступа: <http://anubis.bsu.by/publications/elresources/Chemistry/blohin2.pdf>. – Электрон. версия печ. публикации, 2002. – PDF формат, версия 1.4.
6. **Васильев, Ф. П.** Методы оптимизации [Текст] / Ф. П. Васильев. – М. : Издательство "Факториал пресс", 2002. – 824 с.
7. **Глушаков, С. В.** Программирование на VisualBasic 6.0 [Текст] / С. В. Глушаков, А. С. Сурядный. – Х. : Фолио, 2004. – 497 с.
8. Двигуни внутрішнього згоряння : Серія підручників у 6 томах. Т. 4. Основи САПР ДВЗ. [Текст] / за ред. А. П. Марченка, А. Ф. Шеховцова. – Х. : Видавн. центр НТУ "ХПІ", 2004. – 428 с.
9. **Демидова, Л. А.** Программирование в среде Visual Basic for Applications [Текст] / Л. А. Демидова, А. Н. Пылькин. – М. : Горячая линия–Телеком, 2004. – 175 с.

10. **Кузьмин, В.** Microsoft Office Excel : учебный курс [Текст] / В. Кузьмин. – СПб. : Издательская группа BHV, 2004. – 493 с.

11. **Макаров, Е. Г.** Инженерные расчёты в Mathcad : учебный курс [Текст] / Е. Г. Макаров. – СПб. : Питер, 2005. – 448 с.

12. **Парсаданов, И. В.** Повышение качества и конкурентоспособности дизелей на основе комплексного топливно-экологического критерия : монография [Текст] / И. В. Парсаданов. – Х. : Издательский центр НТУ "ХПИ", 2003. – 244 с.

13. **Ракитин, В. И.** Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ к персональным компьютерам : учебное пособие [Текст] / В. И. Ракитин, В. Е. Первушин. – М. : Высшая школа, 1998. – 383 с.



ЗМІСТ

Вступ	3
1. Вимоги до виконання лабораторних робіт	5
2. Вимоги до побудови блок-схеми алгоритмів	7
3. Основи програмування у середовищі Visual Basic	13
4. Побудова тривимірних графіків функцій у середовищі Mathcad	21
<i>Лабораторна робота № 1. Повний та дробовий факторний експеримент як засіб дослідження процесів у двигунах внутрішнього згоряння.</i>	<i>24</i>
<i>Лабораторна робота № 2. Аналіз результатів експерименту за допомогою поліноміальних регресійних рівнянь.</i>	<i>41</i>
<i>Лабораторна робота № 3. Визначення оптимального поєднання факторів з використанням функції відгуку.</i>	<i>67</i>
Додаток	93
Список рекомендованої літератури	98

