

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

В. М. Соков

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**Методичні вказівки до виконання лабораторних
та розрахунково-графічних робіт
з розділу «Коливання пружних систем»
дисципліни «Будівельна механіка корабля»**

Рекомендовано Методичною радою НУК



ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА

2026

УДК 534.1(076)
С59

Автор:

В. М. Соков, канд. техн. наук, доцент кафедри БМ та ККК

Рецензент:

Л. І. Коростильов, д-р техн. наук, проф., проф. кафедри БМ та ККК

Рекомендовано Методичною радою НУК

Соков В. М.

С59 Методичні вказівки до виконання лабораторних та розрахунково-графічних робіт з розділу «Коливання пружних систем» дисципліни «Будівельна механіка корабля» / В. М. Соков. – Миколаїв : НУК, 2026. – 116 с.

Викладено теоретичний та практичний матеріал для виконання лабораторних і розрахунково-графічних робіт з розділу «Коливання пружних систем» згідно з робочою програмою навчальної дисципліни «Будівельна механіка корабля» НУК ім. адмірала Макарова для освітнього ступеня «бакалавр».

Призначено для студентів кораблебудівних, машинобудівних, електротехнічних та інших спеціальностей.

УДК 534.1(076)

© В. М. Соков, 2026

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2026

Анотація. Представлені методика і послідовність проведення лабораторних і розрахунково-графічних робіт, які присвячені теоретичному й експериментальному дослідженню параметрів коливань пружних систем з одним, декількома та нескінченним ступенями вільності. Лабораторні і розрахунково-графічні роботи розроблені з метою експериментальної перевірки, підтвердження та закріплення набутих знань розрахунку параметрів вібрації.

Методичні вказівки розроблені для бакалаврів, згідно з діючою робочою програмою навчальної дисципліни «Будівельна механіка корабля», в рамках комплексної підготовки фахівців галузі знань 6 Інженерія виробництво та будівництво, спеціальності G11 Машинобудування, спеціалізації G11.04 Суднобудування. Вказівки також можуть бути корисними для студентів інших спеціальностей, у тому числі для магістрантів та аспірантів.

Ключові слова: *вібрація, коливання, вільні / власні коливання, вимушені коливання, форми коливань, головні вільні коливання, тон, частота, період, коефіцієнт динамічності, логарифмічний декремент затухання, коефіцієнт опору, амплітуда, резонанс, віброграф, осцилограф.*

Abstract. There are the methodology and sequence of laboratory works and calculation and graphic assignments are presented, which are devoted to the theoretical and experimental study of the parameters of oscillations of elastic systems with one, several and infinite degrees of freedom. Laboratory works and calculation and graphic assignments are designed to experimentally verify, confirm and consolidate the acquired knowledge of calculating vibration parameters.

The methodological directives were developed for bachelors, according to the current working program of the academic discipline “Structural Mechanics of Ship”, within the framework of the comprehensive training of specialists in the field of knowledge

G Engineering, Manufacturing and Construction, specialty G11 Industry Engineering, specialization G11.04 Shipbuilding. The directives may also be useful for students of other specialties, including master's and postgraduate students.

Keywords: *vibration, oscillations, free / eigen oscillations, forced oscillations, oscillation forms, principal eigen oscillations, tone, frequency, period, dynamic coefficient, logarithmic damping decrement, resistance coefficient, amplitude, resonance, vibrograph, oscilloscope.*

ПРИЙНЯТІ СКОРОЧЕННЯ ТА ПОЯСНЕННЯ

ГВК — головні вільні коливання.

Терміни *«вільні коливання»* і *«власні коливання»* є синонімами.

Терміни *«власні частоти»*, *«частоти вільних коливань»*, *«частоти власних коливань»* є синонімами.

Терміни *«власні форми»*, *«форми вільних коливань»*, *«форми власних коливань»* є синонімами.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Коливання системи з одним ступенем вільності

Мета роботи: теоретично й експериментально дослідити параметри вільних і вимушених коливань системи з одним ступенем вільності, щоб здобути навички обробки віброграм та визначення з них власних частот, коефіцієнтів опору і динамічності та, при необхідності, приєднану/віртуальну масу впливу рідини при гідропружних коливаннях.

Для досягнення вказаної мети в рамках виконання лабораторної роботи необхідно вирішити наступні задачі:

1) визначити власну частоту і форму коливань 1-го тону досліджуваної пружної системи, використовуючи задані викладачем теоретичні методи, таким чином отримавши *теоретичні власні частоти і форми*;

2) отримати та обробити віброграму № 1 вільних затухаючих коливань системи (без будь-якого додаткового опору) для 1-го тону та з неї визначити: а) *експериментальну власну частоту*; б) *логарифмічний декремент затухання*; в) *відносний коефіцієнт опору*; г) *теоретичний коефіцієнт динамічності при резонансі*; зафіксувати експериментальну форму вільних затухаючих коливань та порівняти її з теоретичною власною формою і зробити висновок щодо відповідності форм;

3) надати досліджуваній системі збуджуючу гармонічну силу, частота якої викликає резонанс системи і записати відповідну віброграму № 3 вимушених коливань, з якої визначити *експериментальний коефіцієнт динамічності при резонансі*; порівняти теоретичний та експериментальний коефіцієнти динамічності при резонансі між собою та зробити висновки;

4) порівняти значення розрахованих теоретичних власних частот із значенням експериментальної власної частоти, яка була отримана з віброграми № 1; зафіксувати експериментальну форму вимушених коливань при резонансі та порівняти її з теоретичною власною формою; зробити висновки;

5) якщо вимагається, то отримати та обробити віброграму № 2 вільних затухаючих гідропружних коливань системи (зі встановленим в'язким опором) для 1-го тону та з неї визначити ті ж самі величини, що і для віброграми № 1; порівняти відповідні дані з віброграм № 1 та № 2 і зробити висновки; зробити висновки щодо можливості застосування теорії звичайних лінійних коливань з одним ступенем вільності для вивчення гідропружних коливань; додатково визначити приєднану/віртуальну масу впливу рідини на коливання, без урахування впливу маси пружної в'язі (балки) і зробити висновки.

1.1 Короткі відомості з теорії

Простішими видами механічних пружних систем є системи з одним ступенем вільності, для яких положення всіх точок визначаються однією узагальненою координатою, яка є функцією часу. Прикладом такої системи може бути абсолютно жорстка маса, яка здатна виконувати поступові переміщення тільки в одному напрямку (рис. 1.1).

Розглянемо систему, представлену на рис. 1.1. Запишемо рівняння рівноваги всіх сил, що діють на масу m при її русі в певний момент часу t :

$$Q(t) + mg - k(w_{\text{ст}} + w) - m\ddot{w} - \beta\dot{w} = 0, \quad (1.1)$$

де $Q(t)$ – діюче на систему задане зовнішнє навантаження;

mg – сила ваги маси m ;

$k w_{\text{ст}}$ – врівноважуюча силу тяжіння реакція пружної в'язі;

$w_{\text{ст}}$ – переміщення маси під дією сили ваги;

$k w$ – реакція пружної в'язі при відхиленні системи від положення статичної рівноваги на величину w ;
 k – коефіцієнт жорсткості лінійно деформованої пружної в'язі;
 $-m\ddot{w}$ – сила інерції маси;
 $-\beta\dot{w}$ – сила в'язкого опору навколишнього середовища;
 β – коефіцієнт опору.

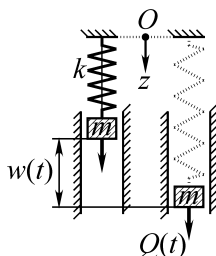


Рис. 1.1. Приклад системи з одним ступенем вільності

Перетворимо рівняння (1.1) до традиційного вигляду, тобто в лівій частині залишимо лише члени, які містять невідому функцію $w(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{w} + 2n\dot{w} + \lambda^2 w &= \frac{Q(t)}{m}; \\ 2n &= \frac{\beta}{m}; \quad \lambda^2 = \frac{k}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Загальне рішення рівняння (1.2) при гармонічній збурювальній силі $Q(t)$ з періодом вимушених коливань ω , рад/с, яка визначається залежністю

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega t, \quad (1.3)$$

має вигляд

$$w = A e^{-nt} \sin(\lambda_1 t + \varepsilon) + B \sin(\omega t + \delta). \quad (1.4)$$

Перша складова в (1.4) описує вільні затухаючі коливання системи з амплітудою Ae^{-nt} , яка зменшується, і круговою (власною) частотою λ_1 , рад/с:

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - n^2}, \text{ рад/с.} \quad (1.5)$$

Кругова частота – це кількість коливань за 2π секунд, рад/с.

Час, за який виконується одне повне коливання, називається періодом T . Він визначається виразом

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \text{ с.} \quad (1.6)$$

Величина, зворотна до періоду, називається *частотою коливань*. Вона визначає кількість коливань за одиницю часу й обчислюється за формулою

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\lambda_1}{2\pi}, \frac{\text{кол}}{\text{с}}, \text{ с}^{-1}, \text{ Гц.} \quad (1.7)$$

Для пружних систем зазвичай

$$\lambda \gg n, \quad \lambda_1 \approx \lambda, \quad (1.8)$$

де λ – кругова частота вільних коливань системи при відсутності сил опору, яка визначається за виразом:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.9)$$

Початкова амплітуда A та фаза коливань ε , що представляють собою постійні інтегрування, визначаються з початкових умов.

За період T амплітуда коливань Ae^{-nt} зменшиться в e^{nT} разів. Величина nT характеризує швидкість затухання коливань і називається *логарифмічним декрементом затухання*.

Через певний проміжок часу перший доданок в (1.4) практично перетворюється на нуль, і будуть мати місце усталені

вимушені коливання, які відбуваються з частотою, що дорівнює частоті вимушених коливань ω (друга складова в (1.4)).

Амплітуда вимушених коливань B визначається залежністю

$$B = \frac{Q_0}{m\lambda^2} \alpha = \frac{Q_0}{k} \alpha = \bar{w}_{\text{ст}} \cdot \alpha, \quad (1.10)$$

де $\bar{w}_{\text{ст}} \cdot \alpha$ – переміщення маси при статичній дії амплітудного значення Q_0 збурювальної сили;

α – коефіцієнт динамічності, який визначається залежністю

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2 \omega^2}{\lambda^4}}}. \quad (1.11)$$

Резонанс – це співпадіння частоти ω збурювальної періодичної сили з частотою вільних коливань λ_1 при наявності опору системи, або з частотою вільних коливань λ при відсутності такого опору. Тобто резонанс має місце, якщо $\lambda \approx \omega$ і/або $\lambda_1 \approx \omega$.

Значення *коефіцієнта динамічності при резонансі* α_{res} із (1.11) при $\lambda = \omega$ становить

$$\alpha_{\text{res}} = \frac{\lambda}{2n}. \quad (1.12)$$

Значення *коефіцієнта динамічності при резонансі* α_{res1} із (1.11) при $\lambda_1 = \omega$, де λ_1 визначається (1.5), становить:

$$\alpha_{\text{res1}} = \frac{\lambda}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3n^2}{4\lambda^2}}}. \quad (1.13)$$

Значення *найбільшого (або максимального) коефіцієнта динамічності* α_{max} становить [4, с. 38]:

$$\alpha_{\max} = \frac{\lambda}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{\lambda^2}}}, \quad \text{при} \quad \frac{\omega}{\lambda} = \sqrt{1 - 2 \frac{n^2}{\lambda^2}}. \quad (1.14)$$

Значення $\alpha_{\max}$ з (1.14) є екстремумом функції (1.11), використовуючи загальні правила аналізу [4, с. 39]. Порівнюючи $\alpha_{\max}$, α_{res} , α_{res1} , можна встановити:

$$\alpha_{res} < \alpha_{res1} < \alpha_{\max}. \quad (1.15)$$

Коефіцієнти динамічності α_{res} , α_{res1} , $\alpha_{\max}$ є різними величинами і їх не слід плутати.

Таким чином, на основі (1.15) можна зробити висновок, що максимальна амплітуда коливань реальної системи при наявності опору виникає при вимушеній частоті, яка не співпадає з частотою вільних коливань системи без урахування опору і навіть з частотою вільних коливань при наявності опору [4, с. 39]. При експериментальних дослідженнях резонанс системи відслідковується, як правило, за максимальною амплітудою коливань, яка записується реєструвальною апаратурою, що пов'язана з системою. Це означає, що частота, яка реєструється при досягненні найбільшої амплітуди вимушених коливань, точно в теорії не є частотою вільних коливань системи. Проте аналізуючи формули (1.12), (1.13), (1.14) для α_{res} , α_{res1} , $\alpha_{\max}$, враховуючи (1.8), можна зробити наступні висновки:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{res1} &= \frac{\lambda}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3n^2}{4\lambda^2}}} = \left| \lim_{\lambda \gg n} \sqrt{1 - \frac{3n^2}{4\lambda^2}} \cong 1 \right| \cong \frac{\lambda}{2n}. \\ \alpha_{\max} &= \frac{\lambda}{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{\lambda^2}}} = \left| \lim_{\lambda \gg n} \sqrt{1 - \frac{n^2}{\lambda^2}} \cong 1 \right| \cong \frac{\lambda}{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Умова (1.16) можлива, якщо відносний коефіцієнт опору n є відносно малим, при якому система, будучи виведеною з положення рівноваги і продовжуючи далі вільно коливатися, має змогу здійснити більше одного вільного періодичного затухаючого коливання. Чим менший відносний коефіцієнт опору n і чим більша різниця $\lambda \gg n$, тим ближче знаходяться значення частот вимушеної ω і власної (λ і/або λ_1) при досягненні максимальної амплітуди вимушених коливань.

На основі наведеного, при експериментальному дослідженні системи, яка періодично коливається під дією гармонічної збудовувальної сили, коли $\lambda \gg n$, можна вважати, що найбільші (з можливих) амплітуди вимушених коливань на практиці відповідають стану резонансу системи. Таке припущення значно спрощує дослідження параметрів коливань при $\lambda \gg n$ для реальних систем з одним, декількома і нескінченним числом ступенів вільності для 1-го і вищих тонів ГВК, які розглядатимуться в наступних лабораторних роботах.

На віддалені від резонансу коефіцієнт динамічності складає:

$$\alpha_{\min} = \alpha \cong \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}}. \quad (1.17)$$

1.2 Описання лабораторної установки

Лабораторна установка, зображена на рис. 1.2, являє собою консольну балку (пружну в'язь) 4 із зосередженою масою 3 на кінці.

Щоб створити додатковий опір, у схему вводиться пластина 5, жорстко з'єднана з коливальною масою і занурена в рідину. Збуджуюча сила створюється за допомогою електродвигуна 1, який обертає ексцентрично закріплену масу 2.

Нормальна до осі балки складова відцентрової сили дає гармонічну збуджуючу силу. Запис коливань відбувається на рухомій паперовій стрічці 7 спеціальним реєструвальним пером 6, прикріпленим до коливальної маси 3 або до кінця балки 4. При цьому використовується стрічкопротяжний механізм вібрографа системи Гейгера. Також запис коливань може вестися за допомогою інших пристроїв, які мають змогу записувати коливання маси 3.

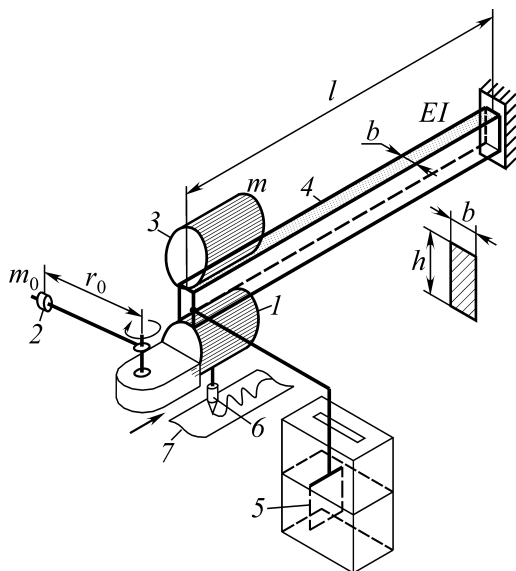


Рис. 1.2. Лабораторна установка

Для встановлення масштабу часу в схему включено відмітник часу, з яким пов'язаний записуючий пристрій, що робить на віброграмі відмітки через проміжки часу Δt .

Вивчивши будову установки, слід визначити величину основної і ексцентрично встановленої мас, заміряти довжину та розміри поперечного перерізу консольної балки і плече ексцентриситету маси r_0 .

Підготувати до роботи пристрій запису коливань. Перевірити роботу двигуна з ексцентричною масою. Параметри лабораторної установки необхідно занести до табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Параметри лабораторної установки

№	Найменування величини	Позначення	Значення
1	Довжина балки, м	l	
2	Зосереджена маса на кінці балки, кг	m	
3	Маса ексцентрика, кг	m_0	
4	Плече ексцентрика, м	r_0	
5	Висота поперечного перерізу балки, мм	h	
6	Ширина поперечного перерізу балки, мм	b	
7	Головний центральний момент інерції відносно осі, перпендикулярної до площини коливань, м ⁴	$I = \frac{hb^3}{12} \cdot 10^{-12}$	
8	Модуль пружності при розтягу матеріалу балки, Па	E	$2 \cdot 10^{11}$
9	Густина матеріалу балки (сталі), кг/м ³	ρ	7800
10	Розподілена маса балки (пружної в'язі), кг/м	$\mu = \rho b h \cdot 10^{-6}$	
11	Період роботи відмітника часу вібрографа, с	$\Delta\tau$	

1.3 Теоретичне визначення частоти 1-го тону вільних коливань досліджуваної системи

У цьому розділі, в рамках вирішення 1-ї задачі лабораторної роботи, наведені теоретичні методи для розрахунку власних частот 1-го тону для досліджуваної пружної системи на рис. 1.2, фізична модель якої є консольною балкою на рис. 1.3.

1.3.1. Визначення власних частот за методом приведення (без урахування маси балки). Розрахункова схема для обчислення власних частот з одним ступенем вільності показана на рис. 1.3, де зосереджена маса m замінена відповідною силою інерції P .

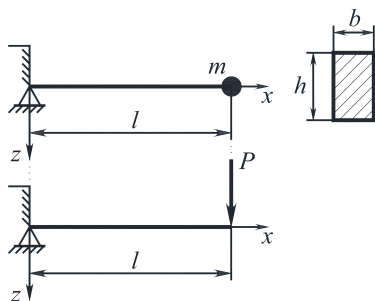


Рис. 1.3. Розрахункова схема для системи з одним ступенем вільності

Власна частота λ , рад/с, системи з одним ступенем вільності (рис. 1.1, 1.3) визначається за формулою (1.9), тобто:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.18)$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружної в'язі в місці прикріплення зосередженої маси m , який визначається з розрахункової схеми на рис. 1.3 (при $P = 1$) за формулою

$$k = \frac{3EI}{l^3}, \quad (1.19)$$

де $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па – модуль пружності при розтягуванні матеріалу консольної балки (для сталі);

I – головний центральний момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі, яка є поперечною площині найменшої жорсткості;

l – довжина досліджуваної балки.

При цьому за формулою (1.18) не враховується вплив маси пружної в'язі (балки) на власну частоту, який у загальному випадку може бути суттєвим і залежить від відношення зосередженої маси m до маси балки.

Нижче представлено енергетичні методи визначення власних частот з урахуванням маси пружної в'язі (балки) на основі методу Релея. Сам класичний метод Релея не застосовується через його незадовільну точність для розглядуваної схеми (рис. 1.3). За класичним методом Релея необхідно обрати форму коливань, яка повинна задовольняти кінематичним граничним умовам (ГУ). Чим ближче прийнята форма коливань до істинної форми, тим точнішими отримуються власні частоти. Вибір готової форми в класичному методі спричиняє деякі труднощі.

Розрахунок теоретичної власної частоти 1-го тону досліджуваної системи за описаним вище методом приведення без урахування маси балки можна оформити у вигляді табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Розрахунок теоретичної власної частоти 1-го тону досліджуваної системи за методом приведення без урахування маси балки

№	Назва величини	Формула або позначення	Значення
1	2	3	4
1	Модуль пружності при розтягу, Па	E	п. 8 табл. 1.1
2	Головний центральний момент інерції відносно осі, яка перпендикулярна площині коливань, м ⁴	I	п. 7 табл. 1.1
3	Довжина прольоту, м	l	п. 1 табл. 1.1
4	Зосереджена маса на кінці балки, кг	m	п. 2 табл. 1.1
5	Жорсткість пружної в'язі, Н/м	$k = \frac{3EI}{l^3}$	

1	2	3	4
6	Частота коливань 1-го тону, рад/с	$\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}$	

1.3.2. Визначення власних частот за методом Релея-Рітца (з урахуванням маси пружної в'язі – балки). Для більш точного визначення власних частот можна застосувати метод Релея-Рітца. В класичному варіанті методу Релея-Рітца задається ряд з невідомими коефіцієнтами, який повинен задовольняти всім кінематичним ГУ.

Для нашого випадку власну форму коливань $\varphi(x)$ можна задати у вигляді

$$\varphi(x) = a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3, \quad (1.20)$$

де a_1, a_2 – поки невідомі коефіцієнти.

Очевидно, що прийнята форма коливань (1.20) задовольняє всім кінематичним ГУ на жорсткому защемленні балки, тобто

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3 \big|_{x=0} = 0, \\ \varphi'(x) &= 2a_1 \cdot x + 3a_2 \cdot x^2 \big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Найбільша потенціальна енергія $\Pi_{\max}$ визначається виразом

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} &= \frac{EI}{2} \int_0^l [\varphi''(x)]^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l [2a_1 + 6a_2 \cdot x]^2 dx = \\ &= 2EI \cdot l \cdot (a_1^2 + 3a_1 a_2 l + 3a_2^2 l^2). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Найбільша кінетична енергія $T_{\max}$ з урахуванням розподіленої маси балки μ та зосередженої маси m на кінці запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned}
T_{\max} &= \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left[\mu \int_0^l \varphi(x)^2 dx + m \cdot \varphi(l)^2 \right] = \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left[\mu \int_0^l [a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x^3]^2 dx + m \cdot [a_1 \cdot l^2 + a_2 \cdot l^3]^2 \right] = \quad (1.23) \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left[\mu \cdot \left(\frac{a_1^2 \cdot l^5}{5} + \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot l^6}{3} + \frac{a_2^2 \cdot l^7}{7} \right) + (a_1 \cdot l^2 + a_2 \cdot l^3)^2 \right].
\end{aligned}$$

Складаємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (\Pi_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.24)$$

яка в розгорнутому вигляді запишеться так:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_1} (\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \left(4EI \cdot l - \frac{1}{210} \lambda^2 l^4 \cdot (42l + 210m) \right) a_1 + \\
&+ \left(6EI \cdot l^2 - \frac{1}{210} \lambda^2 l^4 \cdot (35l^2 + 210ml) \right) a_2 = 0, \\
\frac{\partial}{\partial a_2} (\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \left(6EI \cdot l^2 - \frac{1}{210} \lambda^2 l^4 \cdot (35l^2 + 210ml) \right) a_1 + \\
&+ \left(12EI \cdot l^3 - \frac{1}{210} \lambda^2 l^4 \cdot (30l^3 + 210ml^2) \right) a_2 = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Власні числа матриці, сформованої з системи (1.25), є власними частотами, а відповідні їм власні вектори цієї ж матриці є коефіцієнтами a_1 , a_2 , які після підстановки в (1.20) характеризують форму коливань для відповідної власної частоти. Власні числа/частоти вказаної матриці можна знаходити як числовими методами, які ґрунтуються на перетворенні матриць, так і складаючи характеристичне рівняння. Що стосується застосування числових методів, то над вихідною матрицею

(яка отримана з (1.25)) необхідно попередньо виконати ряд матричних перетворень і операцій, які включають у тому числі і знаходження оберненої матриці. Для малих систем спосіб знаходження власних чисел / частот з характеристичного рівняння є більш простим, а тому він і застосовуватиметься для обчислення власних чисел / частот.

Обчислюючи визначник (1.25) та прирівнюючи його до нуля, отримаємо характеристичне рівняння відносно власної частоти λ , з якого знайдемо дві власні частоти. З отриманих двох частот обираємо найменшу, яка відповідає коливанню системи з одним ступенем вільності. Вищевказане реалізується наступним чином.

Визначник системи (1.25) має вигляд:

$$\begin{vmatrix} \left(4EI \cdot l - \frac{1}{210} \lambda^2 l^4 \cdot (42l + 210m)\right) & \left(6EI \cdot l^2 - \frac{1}{210} \lambda^2 l^4 \cdot (35l^2 + 210ml)\right) \\ \left(6EI \cdot l^2 - \frac{1}{210} \lambda^2 l^4 \cdot (35l^2 + 210ml)\right) & \left(12EI \cdot l^3 - \frac{1}{210} \lambda^2 l^4 \cdot (30l^3 + 210ml^2)\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.26)$$

Розкриваючи визначник (1.26) і прирівнюючи його до нуля, отримаємо наступне характеристичне рівняння відносно невідомої власної частоти λ :

$$\mu l^{11} \left(\frac{m}{105} + \frac{\mu l}{1260} \right) \lambda^4 - EI \cdot l^7 \left(4m + \frac{34\mu l}{35} \right) \lambda^2 + 12(EI \cdot l^2)^2 = 0. \quad (1.27)$$

Вирішуючи характеристичне рівняння (1.27), знайдемо два (додатних) корені:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{EI \cdot \mu \cdot (\mu l + 12m) \cdot (51\mu l + 210m \mp 2\sqrt{624\mu^2 l^2 + 5040\mu ml + 11025m^2})}}{l^2 \cdot (\mu l + 12m) \cdot \mu}, \quad (1.28)$$

де верхній знак мінус (перед другим квадратним коренем усередині виразу) відповідає найменшій частоті λ_1 , тобто частоті 1-го тону вільних коливань.

На основі (1.28) власна частота λ , рад/с, досліджуваної системи з одним ступенем вільності, яка є консольною балкою довжиною l (рис. 1.3) із зосередженою масою m , кг, на вільному кінці, з урахуванням розподіленої маси μ , кг/м, пружної в'язі (балки), становить:

$$\lambda = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{EI \cdot \mu \cdot (\mu l + 12m) \cdot (51\mu l + 210m - 2\sqrt{624\mu^2 l^2 + 5040\mu ml + 11025m^2})}}{l^2 \cdot (\mu l + 12m) \cdot \mu} \quad (1.29)$$

де параметри (1.29) визначені в табл. 1.1.

При збільшенні числа членів ряду (1.20) результати прямуватимуть до точного значення власної частоти.

Розрахунок теоретичної власної частоти 1-го тону досліджуваної системи за описаним методом Релея-Рітца можна оформити у вигляді табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Розрахунок теоретичної власної частоти 1-го тону досліджуваної системи за методом Релея-Рітца

№	Назва величини	Формула або позначення	Значення
1	Модуль пружності при розтягу, Па	E	п. 8 табл. 1.1
2	Головний центральний момент інерції відносно осі, яка перпендикулярна площині коливань, м ⁴	I	п. 7 табл. 1.1
3	Довжина прольоту, м	l	п. 1 табл. 1.1
4	Зосереджена маса на кінці балки, кг	m	п. 2 табл. 1.1
5	Закон розподіленої маси пружної в'язі (балки), кг/м	μ	п. 10 табл. 1.1
6	Частота коливань 1-го тону, рад/с	формула (1.29)	

1.3.3. Визначення власних частот за методом Релея 2-го типу або за методом фіктивного навантаження (з урахуванням маси пружної в'язі – балки). Ще однією варіацією методу Релея є його реалізація, коли до системи прикладається навантаження, яке викликає появу очікуваної форми вільних коливань. Найбільш близькою до дійсної форми коливань розглядуваної балки (рис. 1.3) є форма статичного прогину, викликана дією сил ваги від зосередженої маси m та розподіленого рівномірного навантаження q . Причому прискорення сил ваги можна вважати рівним одиниці, тобто $g = 1$. Таким чином, ми вважаємо, що на кожну точку балки діє постійне прискорення. Хоча в дійсності при коливанні тіла прискорення його точок залежать від їхнього положення в даний момент часу. Визначити дійсні інерційні сили складно, хоча можливо, наприклад, методом послідовних наближень, який тут не розглядається. Проте і запропонований підхід статичного навантаження дає покращення результатів при визначенні значення власної частоти, приймаючи до уваги те, що нам не потрібно задавати форму коливань.

Розрахункова схема представлена на рис. 1.4.

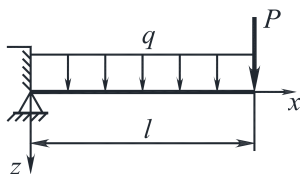


Рис. 1.4. Розрахункова схема для методу фіктивного навантаження

Вираз для прогину/форми коливань $\varphi(x)$ для цієї розрахункової схеми (рис. 1.4), отриманий методом суперпозиції від розподіленого q та зосередженого P навантажень, запишеться у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{Pl^3}{3EI} \left[\frac{x^2}{l^2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2l} \right) \right] + \frac{q \cdot x^2}{24EI} \cdot (6l^2 - 4lx + x^2), \\ P &= mg, \quad q = \mu g, \quad g = 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Підставивши форму (1.30) у вираз для найбільшої кінетичної енергії $T_{\max}$ (1.23), отримаємо:

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left[\mu \int_0^l \varphi(x)^2 dx + m \cdot \varphi(l)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{45360} \frac{\lambda^2 l^6 ((91\mu^2 l^2 + 819\mu lm + 2484m^2) \cdot \mu l + 2520m^3)}{(EI)^2}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Замість найбільшої потенціальної енергії використовується дійсна робота $W_{\max}$ сил $P = mg$ та $q = \mu$ (див. (1.30) при $g = 1$) на переміщеннях $\varphi(x)$, яка запишеться:

$$\begin{aligned} W_{\max} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_0^l q(x) \cdot \varphi(x) dx + P \cdot \varphi(l) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\mu \int_0^l \varphi(x) dx + m \cdot \varphi(l) \right] = \\ &= \frac{1}{120} \frac{l^3 (3\mu^2 l^2 + 15\mu ml + 20m^2)}{EI}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Відповідно до закону збереження енергії справедливо

$$W_{\max} = T_{\max}. \quad (1.33)$$

З виразу (1.33) отримуємо формулу для визначення власної частоти λ :

$$\lambda = 3\sqrt{42} \cdot \sqrt{\frac{EI(3\mu^2 l^2 + 15\mu ml + 20m^2)}{l^3[(91\mu^2 l^2 + 819\mu lm + 2484m^2) \cdot \mu l + 2520m^3]}}. \quad (1.34)$$

Розрахунок теоретичної власної частоти 1-го тону досліджуваної системи за описаним методом фіктивного навантаження можна оформити у вигляді табл. 1.4.

Таблиця 1.4 – Розрахунок власної теоретичної частоти 1-го тону досліджуваної системи за методом фіктивного навантаження

№	Назва величини	Формула або позначення	Значення
1	Модуль пружності при розтягу, Па	E	$2 \cdot 10^{11}$, п. 8 табл. 1.1
2	Головний центральний момент інерції відносно осі, яка перпендикулярна площині коливань, м ⁴	I	п. 7 табл. 1.1
3	Довжина прольоту, м	l	п. 1 табл. 1.1
4	Зосереджена маса на кінці балки, кг	m	п. 2 табл. 1.1
5	Закон розподіленої маси пружної в'язі (балки), кг/м	μ	п. 10 табл. 1.1
6	Частота коливань 1-го тону, рад/с	формула (1.34)	

У представлених методах для розрахунку теоретичних власних частот не враховано зсув, а також інерцію обертання поперечних перерізів балки та зосередженої маси 3 (рис. 1.2), у випадку, коли вона жорстко прикріплена до балки. Врахування інерції обертання поперечних перерізів балки та зосередженої маси 3 (рис. 1.2) зменшує власну частоту. Для параметрів балки на рис. 1.2 вплив зсуву є незначним і ним можна нехтувати. Розрахунки з урахуванням указаних факторів є більш складними.

1.3.4. Обчислення власних частот 1-го тону вільних коливань системи за різними методами. Розраховані теоретичні власні частоти за представленими методами наведені в табл. 1.5. Розрахунок власної частоти за методом приведення без урахування маси балки є обов'язковим.

Таблиця 1.5 – Теоретичні власні частоти 1-го тону досліджуваної системи за різними теоретичними методами

№	Найменування методу	Формула або позначення	Значення, рад/с
1	За методом приведення без урахування маси балки	λ_A	з табл. 1.2 за формулами (1.18), (1.19)
2	За методом Релея-Рітца	λ_B	з табл. 1.3 за формулою (1.29)
3	За методом фіктивного навантаження	λ_B	з табл. 1.4 за формулою (1.34)

Примітки.

1. Для контролю та перевірки результатів обчислень з табл. 1.5 у додатку А, в розділі «Для лабораторної роботи № 1» представлені числові розрахунки для певних фіксованих параметрів системи.

2. Врахування впливу пружної в'язі завжди зменшує частоту вільних коливань при теоретичних розрахунках (у порівнянні з неврахуванням пружної в'язі), тому що на роботу інерційних сил відтягується частина потенціальної енергії. І це повинно бути еталоном при перевірці теоретичних методів розрахунку власних частот.

1.3.5. Форма вільних коливань. Форма вільних коливань 1-го тону за методом приведення визначається залежністю

$$\varphi(x) = \frac{l^3}{3EI} \left[\frac{x^2}{l^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2l} \right) \right], \quad (1.35)$$

яка відповідає виразу прогину консольної балки на рис. 1.3 при $P = 1$.

Форма вільних коливань за методом Релея-Рітца визначається залежністю (1.20), де коефіцієнти a_1 , a_2 є власним вектором матриці однорідної системи (1.25). Цей вектор відповідає

власному числу, яке є власною частотою $\lambda_1 = \lambda$ 1-го тону вільних коливань, визначеною виразом (1.28) і/або (1.29).

Форма вільних коливань за методом фіктивного навантаження визначається залежністю (1.30).

Врешті-решт усі згадані власні форми коливань після нормування будуть подібними, лише незначно відрізнятимуться між собою, і в загальному випадку матимуть вигляд, показаний на рис. 1.5.

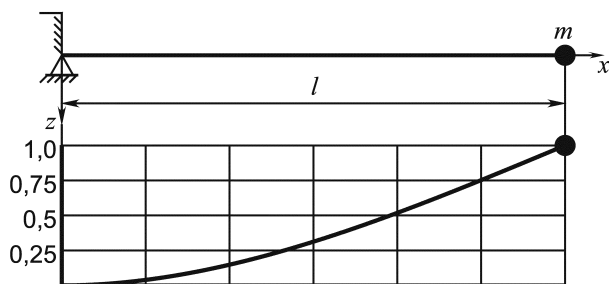


Рис. 1.5. Форма вільних коливань 1-го тону

1.4 Визначення параметрів вібрації з віброграми вільних затухаючих коливань

У цьому розділі представлено вирішення 2-ї задачі лабораторної роботи.

1.4.1. Обробка віброграми. Віброграма – це запис переміщень досліджуваного об’єкта в координатах «переміщення-час» (рис. 1.6) за допомогою спеціальних приладів.

Амплітуда коливань визначається безпосереднім вимірюванням ординат на віброграмі. Для знаходження періоду або частоти коливань на віброграмі, крім запису досліджуваного процесу, необхідно провести запис стандартного процесу

(відмітника часу) з відомою величиною періоду $\Delta\tau$. У випадку запису вільних затухаючих коливань по віброграмі визначається величина логарифмічного декременту затухання nT і пов'язаного з ним відносного коефіцієнта опору n .

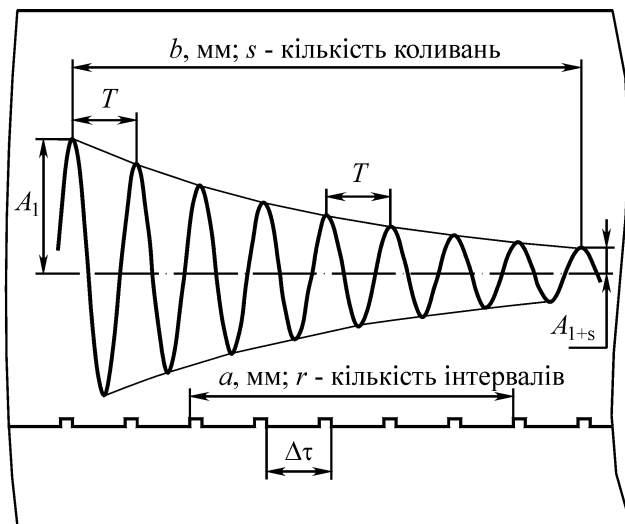


Рис. 1.6. Загальний вигляд віброграми вільних затухаючих коливань

Для підвищення точності визначення частоти коливань і коефіцієнта опору доцільно обирати ділянку віброграми, в межах якої міститься декілька коливань і відміток часу. Тоді частота f , Гц, досліджуваних коливань становить:

$$f = \frac{a \cdot s}{b \cdot r} \cdot \frac{1}{\Delta\tau}, \quad (1.36)$$

логарифмічний декремент затухання

$$nT = \ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{s} \cdot \ln \frac{A_1}{A_{1+s}}, \quad (1.37)$$

відносний коефіцієнт опору

$$n = \frac{nT}{T} = \frac{f}{s} \cdot \ln \frac{A_1}{A_{1+s}}, \quad (1.38)$$

де зміст величин b , s , a , r зрозумілий з рис. 1.6.

З урахуванням (1.12), (1.7), (1.8) коефіцієнт динамічності при резонансі з віброграми вільних затухаючих коливань визначиться залежністю

$$\alpha_{\max} = \alpha \cong \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{2\pi f}{2n} = \frac{\pi f}{n}. \quad (1.39)$$

У рамках даної лабораторної роботи віброграма затухаючих коливань (рис. 1.6) отримується наступним чином.

1.4.2. Отримання віброграми вільних затухаючих коливань та експериментальне визначення параметрів вібрації з неї. Відхиливши масу 3 (рис. 1.2) від положення рівноваги, викликати вільні коливання і провести їхній запис, отримавши віброграму № 1. Провести обробку віброграми № 1 вільних затухаючих коливань та отримати з неї наступні параметри вібрації: а) експериментальну власну частоту; б) логарифмічний декремент затухання; в) відносний коефіцієнт опору; г) теоретичний коефіцієнт динамічності при резонансі, за послідовністю, наведеною в табл. 1.6.

Таблиця 1.6 – Визначення параметрів вібрації з віброграми № 1 (і № 2 за необхідності) вільних затухаючих коливань

№	Назва величини	Формула або позначення	Значення
1	2	3	4
1	Довжина ділянки a , мм	a	з рис. 1.6
2	Кількість інтервалів r	r	з рис. 1.6
3	Довжина ділянки b , мм	b	з рис. 1.6

Продовження таблиці 1.6

1	2	3	4
4	Кількість коливань s	s	з рис. 1.6
5	Експериментальна власна частота, Гц, із віброграми вільних затухаючих коливань	$f = f_{\text{ез}} = \frac{a \cdot s}{b \cdot r} \cdot \frac{1}{\Delta \tau}$	
6	Експериментальний період вільних коливань, с, із віброграми вільних затухаючих коливань	$T_{\text{ез}} = \frac{1}{f}$	
7	Кругова експериментальна власна частота, рад/с, із віброграми вільних затухаючих коливань	$\lambda_{\text{ез}} = 2\pi f$	
8	Логарифмічний декремент затухання	$nT = \frac{1}{s} \cdot \ln \frac{A_1}{A_{1+s}}$	
9	Відносний коефіцієнт опору	$n = \frac{f}{s} \cdot \ln \frac{A_1}{A_{1+s}}$	
10	Теоретичний коефіцієнт динамічності при резонансі	$\alpha_{\text{max}}^{\text{т}} = \frac{\pi f}{n}$	

Власні форми, які були отримані під час виконання експерименту, повинні бути подібними до тих, що представлені на рис. 1.5.

Висновок у цьому розділі можна сформулювати наступним чином.

Приклад висновку. Під час експериментального дослідження вільних затухаючих коливань була записана відповідна віброграма і графічно зафіксована експериментальна форма коливань 1-го тону, яка відповідає теоретичній формі на рис. 1.5.

1.5 Визначення параметрів вібрації з віброграми вимушених коливань

У цьому розділі представлено вирішення 3-ї задачі лабораторної роботи.

1.5.1. Запис віброграми вимушених коливань. Включивши електродвигун і поступово змінюючи його оберти, досягнути резонансу. Резонанс буде мати місце тоді, коли візуально будуть отримуватися найбільші амплітуди/розмахи відхилень від положення рівноваги. Досягнувши такого найбільшого відхилення, необхідно зафіксувати оберти електродвигуна і приступити до запису віброграми. Записати вимушені коливання (віброграма № 3), після чого вимкнути електродвигун і пристрій для запису віброграми.

1.5.2. Обробка віброграми вимушених коливань і визначення з неї параметрів вібрації. Користуючись вказівками і формулами з п. 1.4.1, за віброграмою № 3 вимушених коливань визначити: частоту і період коливань; експериментальний коефіцієнт динамічності при резонансі.

Частота і період коливань з віброграми вимушених коливань визначається для підтвердження наявності/досягнення резонансу системою. Ця частота і період з віброграми вимушених коливань повинні практично співпадати з частотою і періодом визначених з віброграми вільних затухаючих коливань. Якщо цього не сталося, то експеримент з досягнення резонансу системою був проведений невірно і його необхідно повторити (або повторювати), допоки не буде досягнуто резонансу.

Віброграма вимушених коливань має вигляд, показаний на рис. 1.7.

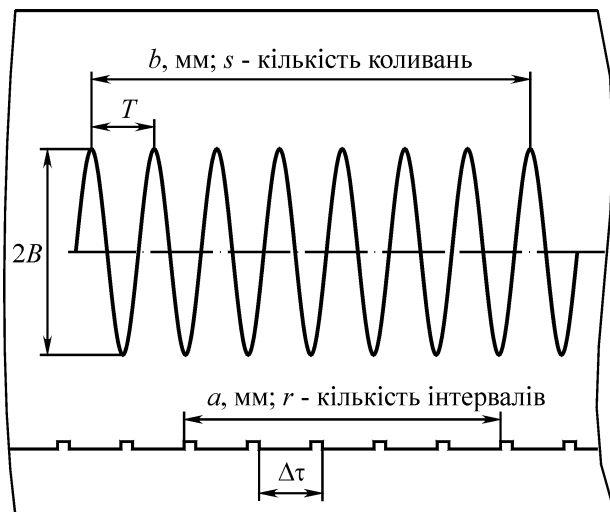


Рис. 1.7. Віброграма вимушених коливань

Коефіцієнт динамічності з віброграми вимушених коливань:

$$\alpha = \frac{B}{w_{\text{ст}}}, \quad (1.40)$$

де B – амплітуда вимушених коливань, виміряна за віброграмою № 3 (рис. 1.7);

$w_{\text{ст}}$ – переміщення маси системи при статичній дії на неї максимального значення збуджуючої сили Q_0 , яка обчислюється за формулою:

$$Q_0 = \omega^2 m_0 r_0 = 4\pi^2 f^2 m_0 r_0, \quad (1.41)$$

де m_0 – маса ексцентрика, кг;

$\omega = 2\pi f$ – кругова частота збуджуючої сили, рад/с;

f – частота вимушених коливань, визначена за віброграмою № 3, Гц;

r_0 – відстань від центру ваги ексцентричної маси 2 до осі двигуна (рис. 1.2), м.

Для консольної балки статичне переміщення $w_{\text{ст}}$ визначається формулою:

$$w_{\text{ст}} = \frac{Q_0 \cdot l^3}{3EI}. \quad (1.42)$$

Розрахунок параметрів вимушеної вібрації можна оформити згідно з послідовністю в табл. 1.7.

Таблиця 1.7 – Розрахунок параметрів вимушеної вібрації

№	Назва величини	Формула або позначення	Значення
1	2	3	4
1	Довжина ділянки a , мм	a	з рис. 1.7
2	Кількість інтервалів r	r	з рис. 1.7
3	Довжина ділянки b , мм	b	з рис. 1.7
4	Кількість коливань s	s	з рис. 1.7
5	Експериментальна власна частота, Гц, із віброграми вимушених коливань при резонансі	$f = f_{\text{еп}} = \frac{a \cdot s}{b \cdot r} \cdot \frac{1}{\Delta\tau}$	
6	Кругова частота збуджуючої сили, рад/с	$\omega = 2\pi f$	
7	Експериментальний період вільних коливань, с, із віброграми вимушених коливань при резонансі	$T_{\text{еп}} = \frac{1}{f}$	
8	Експериментальна власна частота, Гц, із віброграми вільних затухаючих коливань	$f_{\text{ез}}$	п. 5 табл. 1.6
9	Різниця між частотами з віброграм вільних затухаючих коливань і вимушених коливань при резонансі, %	$\delta = \frac{f_{\text{еп}} - f_{\text{ез}}}{f_{\text{ез}}} \cdot 100\%$	

Продовження таблиці 1.7

1	2	3	4
10	Висновок про досягнення резонансу	$\left. \begin{array}{l} \delta \leq 3\% \rightarrow \text{так,} \\ \text{резонанс } \epsilon, \\ \delta > 3\% \rightarrow \text{ні,} \\ \text{резонансу немає.} \end{array} \right\}$	так/ні
11	Модуль пружності при розтягу, Па	E	п. 8 табл. 1.1
12	Головний центральний момент інерції відносно осі, яка перпендикулярна площині коливань, м^4	I	п. 7 табл. 1.1
13	Довжина прольоту, м	l	п. 1 табл. 1.1
14	Маса ексцентрика, кг	m_0	п. 3 табл. 1.1
15	Відстань від центру ваги ексцентричної маси 2 до осі двигуна (рис. 1.2), м	r_0	п. 4 табл. 1.1
16	Максимальне значення періодичної збуджуючої сили, Н	$Q_0 = 4\pi^2 f^2 m_0 r_0$	
17	Переміщення маси системи при статичній дії на неї максимального значення збуджуючої сили Q_0	$w_{\text{ст}} = \frac{Q_0 \cdot l^3}{3EI}$	
18	Амплітуда вимушених коливань, виміряна за віброграмою	B	з рис. 1.7
19	Коефіцієнт динамічності з віброграми вимушених коливань, або експериментальний коефіцієнт динамічності при резонансі	$\alpha = \alpha_{\text{max}}^e = \frac{B}{w_{\text{ст}}}$	
20	Теоретичний коефіцієнт динамічності при резонансі	α_{max}^r	п. 10 табл. 1.6
21	Різниця між експериментальним та теоретичним коефіцієнтами динамічності	$\delta = \frac{\alpha_{\text{max}}^r - \alpha_{\text{max}}^e}{\alpha_{\text{max}}^e} \cdot 100\%$	

Висновок може бути представлений наступним чином.

Приклад висновку. *Теоретичний та експериментальний коефіцієнти динамічності відрізняються між собою на $|\delta|\%$, що свідчить про відносно високу відповідність теоретичних розрахунків експериментальним результатам при дослідженні вібрації. Це дає змогу використовувати теоретичні формули розрахунку параметрів вільних і вимушених коливань у практичних інженерних розрахунках ще на стадії проектування конструкції, уникаючи великої кількості натурних вартісних експериментів.*

1.6 Порівняння власної експериментальної і теоретичних частот

У цьому розділі в рамках вирішення 4-ї задачі наведено порівняння розрахованих значень теоретичних власних частот зі значенням експериментальної власної частоти для 1-го тону. Це порівняння можна виконати у формі таблиці 1.8, де як експериментальна частота λ_e прийнята кругова експериментальна власна частота λ_{e3} з п. 7, табл. 1.6, яка отримана із віброграми вільних затухаючих коливань, тому що вона визначена точніше, аніж експериментальна власна частота ω , яка у свою чергу отримана з віброграми вимушених коливань при резонансі.

У табл. 1.8 різниці δ_j між частотами визначаються залежністю

$$\delta_j = \frac{\lambda_j - \lambda_e}{\lambda_e} \cdot 100\%, \quad (1.43)$$

де λ_j – кругова частота, обчислена за j -м методом (табл. 1.8), рад/с;

$\lambda_e = \lambda_{e3}$ – кругова експериментальна власна частота, рад/с.

Таблиця 1.8 – Порівняння експериментальної власної частоти з теоретичними

№ методу j	Метод розрахунку власної частоти		Позначення	Значення	Експериментальна власна частота $\lambda_e = \lambda_{ex}$, рад/с	Відносна різниця за (1.43)
A	Теоретичні власні частоти, рад/с	За методом приведення без урахування маси балки	λ_A	п. 1 табл. 1.5	з п. 7 табл. 1.6	δ_A
B		За методом Релея-Рітца	λ_B	п. 2 табл. 1.5	з п. 7 табл. 1.6	δ_B
B		За методом фіктивного навантаження	λ_B	п. 3 табл. 1.5	з п. 7 табл. 1.6	δ_B

Виконання нерівностей $\lambda_e < \lambda_A$, $|\delta_A| > |\delta_B|$, $|\delta_A| > |\delta_B|$ свідчить про правильність проведення експериментів з визначення експериментальної власної частоти. У протилежному випадку необхідно виявити недоліки у підготовці і проведенні експерименту і заново його повторити.

Під точністю розрахунків власних теоретичних частот необхідно розуміти відповідні різниці за модулем між значеннями теоретичних і експериментальних власних частот. Чим менше вказані різниці, тим точнішим є розрахунок.

Якщо необхідно порівняти власні теоретичні частоти між собою, які розраховані за різними методами, то це можна зробити на основі різниць δ_j з табл. 1.8. Наприклад, відносна різниця між значеннями власних частот, які розраховані за методами Релея-Рітца ($\lambda_B \rightarrow \delta_B$) та фіктивного навантаження ($\lambda_B \rightarrow \delta_B$), відносно частоти за методом Релея-Рітца (табл. 1.8) визначиться залежністю:

$$\delta_{BB} = \frac{\delta_B - \delta_B}{\delta_B + 1}. \quad (1.44)$$

Висновки. Нижче запропоновані варіанти висновків.

Простий висновок на основі табл. 1.8 може бути сформульований наступним чином.

Приклад простого висновку. *Оскільки різниця $|\delta_A| < 10 \%$, то це свідчить про задовільну точність теоретичних методик визначення власної частоти 1-го тону навіть без урахування впливу пружної в'язі та додаткових видів деформування.*

Додатна величина δ_A свідчить про те, що експериментальна власна частота λ_e є меншою за теоретичну власну частоту λ_A , яка була розрахована за методом приведення, де не було враховано вплив маси пружної в'язі, що є свідченням правильності проведення експерименту, тому що в дійсній системі потенціальна енергія витрачається на роботу інерційних сил при поступовому та обертовому рухах елементарних мас пружної в'язі.

У цілому, експериментальна і теоретичні власні частоти добре корелюють між собою навіть якщо вплив пружної в'язі не врахований, що свідчить про доволі точну реалізацію теоретичних основ розрахунку параметрів вільних коливань принаймні для 1-го тону. Це дає змогу ще на стадії проєктування певної конструкції розраховувати частоту 1-го тону її вільних коливань з достатньою точністю, щоб потім мати можливість уникати резонансу з робочими частотами механізмів і машин, які взаємодіють з даною конструкцією.

Проте, щоб підвищити точність розрахунку власної частоти 1-го тону, необхідно застосовувати більш складні методи розрахунку, враховувати вплив маси пружної в'язі та додаткові види деформування.

Формулювання більш складних висновків пов'язане з аналізом впливу маси пружної в'язі при оцінці точності

розрахованих теоретичних власних частот. Наприклад, щоб сформулювати висновок про вплив пружної в'язі, можна відповісти на наступне питання:

1. Як впливає врахування маси пружної в'язі на точність розрахунків теоретичних власних частот?

Приклад відповіді. *Вплив маси пружної в'язі при розрахунках теоретичних власних частот наближає значення вказаних частот до значення експериментальної власної частоти. Про це свідчать відносні різниці δ_B , δ_V з табл. 1.8, які за модулем є меншими за різницю $|\delta_A|$. Тому що δ_B , δ_V є результатом порівняння власних частот, які були розраховані з урахуванням впливу маси пружної в'язі, а δ_A – без урахування. Можна підсумувати те, що врахування маси пружної в'язі, по-перше, дає більш точні значення розрахованих власних теоретичних частот, а по-друге, зменшує значення розрахованих власних частот у порівнянні з неврахуванням цієї маси (при порівнянні власних теоретичних частот між собою, які розраховані за різними методами).*

Аналіз теоретичних методів розрахунку власних частот показав, що при збільшенні відношення зосередженої маси до маси пружної в'язі вплив останньої на частоту власних коливань зменшується.

Інші формулювання висновків можуть бути запропоновані викладачем.

1.7 Вивчення гідропружних коливань

1.7.1. Короткі вихідні положення щодо гідропружних коливань. У випадку експериментального вивчення гідропружних коливань, які матимуть місце при встановленні пластини 5 (рис. 1.2), яка коливається в ємності з певною рідиною, послідовність дій і розрахунків така сама, як у п. 1.4.

Єдине, що тут додається, то це вивчення впливу рідини, яка взаємодіє з коливальною системою на власну частоту цієї системи. Вплив рідини на власну частоту реалізується у вигляді приєднаної або віртуальної маси, яка додається до дійсної маси досліджуваної системи при розрахунках власних частот. Величина приєднаної маси впливу рідини залежить від тону коливань і характеру взаємодії тіла, що коливається, і рідини. В загальному випадку визначення приєднаної маси для певної коливальної системи, де є її взаємодія з рідиною, є складною теоретичною задачею. Приєднану масу простіше визначити експериментальним шляхом, що й буде продемонстровано в рамках цієї лабораторної роботи при вивченні коливань першого тону досліджуваної пружної системи при її взаємодії з рідиною.

1.7.2. Отримання віброграми вільних затухаючих коливань з наявним опором та експериментальне визначення параметрів вібрації з неї. Відхиливши масу 3 (рис. 1.2) від положення рівноваги, викликати вільні затухаючі коливання і провести їх запис, отримавши таким чином віброграму № 2. Провести обробку віброграми № 2 так само, як віброграми № 1, оформивши розрахунок за послідовністю, наведеною в табл. 1.6. Результати занести до таблиці 1.9.

Таблиця 1.9 – Визначення параметрів вібрації з віброграми № 2 вільних затухаючих коливань при наявності опору

№	Назва величини	Формула або позначення	Значення
1	Довжина ділянки a , мм	a , з рис. 1.6	
2	Кількість інтервалів r	r , з рис. 1.6	
	і т.д., як у табл. 1.6		

1.7.3. Порівняння частот вільних коливань при відсутності та наявності додаткового опору. Порівнюються власні частоти, які отримані з віброграм № 1 та № 2. Вказане порівняння зручно оформити у формі табл. 1.10, де індекси «1» та «2» при величинах у формулах колонки 6 відповідають номерам віброграм.

Якщо f_2 отрималась меншою за f_1 , то експеримент з додатковим опором був проведений вірно. Якщо, наприклад, наступні величини мають такі знаки: $\delta_f < 0$, $\delta_n > 0$, $\delta_\alpha < 0$, то висновок щодо порівняння параметрів вільних затухаючих коливань віброграм № 1 і № 2 може бути представлений наступним чином.

Таблиця 1.10 – Порівняння власних частот, отриманих з віброграм № 1 та № 2

№	Назва величини		Значення параметрів для віброграм		Різниця, δ , %	
			№ 1	№ 2	Формула	Значення
1	Експериментальна власна частота, Гц	f	п. 5 табл. 1.6	п. 5 табл. 1.9	$\delta_f = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \cdot 100\%$	
2	Відносний коефіцієнт опору	n	п. 9 табл. 1.6	п. 9 табл. 1.9	$\delta_n = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \cdot 100\%$	
3	Теоретичний коефіцієнт динамічності при резонансі	$\alpha_{\max}^T$	п. 10 табл. 1.6	п. 10 табл. 1.9	$\delta_\alpha = \frac{\alpha_{\max 2}^T - \alpha_{\max 1}^T}{\alpha_{\max 1}^T} \cdot 100\%$	

Приклад висновку. При введенні додаткового опору для однієї і тієї ж системи власна частота зменшилася на $|\delta_f|\%$, коефіцієнт опору збільшився на $|\delta_n|\%$, а коефіцієнт динамічності зменшився на $|\delta_\alpha|\%$. Це свідчить про значний вплив

взаємодіючої рідини, яка слугує додатковим опором, на параметри вільних коливань. Було виявлено, що взаємодіюча рідина значно зменшує власну частоту однієї і тієї ж системи у порівнянні з власною частотою, яка отримана при відсутності опору з боку рідини.

1.7.4. Перевірка теорії звичайних лінійних коливань щодо можливості її застосування для вивчення гідропружних коливань.

Обчислимо деяку дійсну / точну власну частоту λ_{32} вільних затухаючих коливань з урахуванням впливу відносного опору n на основі даних з віброграми № 2 за загальновідомою залежністю

$$\lambda_{32} = \sqrt{\lambda^2 - n^2}, \quad (1.45)$$

де λ_{32} – кругова власна частота, рад/с, з урахуванням опору;
 λ – кругова власна частота, рад/с, при відсутності будь-якого опору, яка може бути взята з табл. 1.5;
 n – відносний коефіцієнт опору, визначений на основі даних з віброграми № 2 (п. 9, табл. 1.9, або з табл. 1.10).

Обчислення власної кругової частоти λ_{32} проводиться з метою подальшого її порівняння з власною круговою частотою λ_2 вільних затухаючих коливань, отриманою з віброграми № 2 (п. 7, табл. 1.9), для того щоб зробити висновок, чи придатна лінійна теорія, яка описується рівняннями (1.2), (1.4), врахувати вплив рідини на власну частоту через відносний коефіцієнт опору n .

Відносна різниця $\delta_{\lambda 2}$ між частотами λ_{32} та λ_2 обчислюється за формулою

$$\delta_{\lambda 2} = \frac{\lambda_{32} - \lambda_2}{\lambda_2} \cdot 100 \%. \quad (1.46)$$

Якщо величина $|\delta_{\lambda 2}|$ отримується відносно малою (до 15 %), то висновок можна представити наступним чином.

Приклад висновку. *На основі проведених досліджень було виявлено, що звичайна лінійна теорія коливань цілком придатна для врахування впливу взаємодіючої рідини через відносний коефіцієнт опору, який отримується з віброграми вільних затухаючих коливань при гідропружних коливаннях системи при розрахунках власних частот.*

Якщо ж $|\delta_{\lambda 2}| > 15 \%$, то відповідний висновок буде протилежним до наведеного і слід додати, що необхідно шукати інші моделі впливу рідини на власну частоту, серед яких однією з найпростіших є врахування впливу рідини на власну частоту гідропружних коливань через приєднану/віртуальну масу.

1.7.5. Визначення приєднаної маси впливу рідини на власну частоту. Згідно із залежностями (1.18) та (1.19) маємо:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{m_{\Sigma}}}, \quad k = \frac{3EI}{l^3}, \quad (1.47)$$

де всі величини були пояснені для формул (1.18) та (1.19), але маса m_{Σ} – це сумарна маса, яка складається власне з маси зосередженої маси m , про яку мова йшла вище (рис. 1.3), та приєднаної/віртуальної маси впливу рідини m_v , тобто

$$m_{\Sigma} = m + m_v. \quad (1.48)$$

З урахуванням (1.47) та (1.48) отримаємо вираз для приєднаної маси m_v :

$$m_v = \frac{3EI}{4l^3 \pi^2 f^2} - m, \text{ кг}, \quad (1.49)$$

де f визначається з табл. 1.9, а решта параметрів визначені в табл. 1.1.

При відомому відношенні m_0/m висновок може бути сформульований наступним чином.

Приклад висновку. Для 1-го тону вільних гідропружних коливань досліджуваної системи приєднана маса m_0 складає $(m_0/m) \cdot 100 \%$ від зосередженої маси на кінці балки, що свідчить про значний вплив навколишньої рідини на параметри вільних коливань у порівнянні з її відсутністю для тієї ж системи.

1.8 Порядок виконання роботи й оформлення звіту

У процесі виконання лабораторної роботи необхідно:

1. Вивчити і занотувати короткі теоретичні відомості за п. 1.1.

2. Ознайомитися з лабораторною установкою за п. 1.2, зробити її ескіз (рис. 1.2), позначити на ній та описати основні елементи, занотувати основні положення. Визначити основні вихідні параметри лабораторної установки та занести їх до табл. 1.1.

3. Визначити теоретичні власні частоти і форми для 1-го тону за методами, які були задані викладачем, з тих, які описані в п. 1.3 (або з інших джерел). Розрахунок власних частот рекомендується виконувати у формі табл. 1.2, 1.3, 1.4. Отримані результати власних частот занести до табл. 1.5.

4. Отримати й обробити віброграму № 1 вільних затухаючих коливань згідно з п. 1.4.2 і на основі даних з неї визначити: а) експериментальну частоту вільних коливань; б) логарифмічний декремент затухання; в) відносний коефіцієнт опору; г) теоретичний коефіцієнт динамічності при резонансі, за розрахунковими залежностями, які наведені в табл. 1.6.

5. Отримати й обробити віброграму № 3 вимушених коливань при резонансі згідно з п. 1.5 (підтвердивши резонанс

за п. 10 табл. 1.7) і на основі даних з неї визначити експериментальний коефіцієнт динамічності при резонансі.

Порівняти теоретичний (з віброграми № 1) та експериментальний (з віброграми № 3) коефіцієнти динамічності при резонансі між собою згідно з послідовністю розрахунку в табл. 1.7 і зробити відповідні висновки (див. кінець п. 1.5.2).

6. Порівняти розраховані теоретичні власні частоти з експериментальною власною частотою, яка була отримана з віброграми № 1, і зробити відповідні висновки з рекомендаціями в п. 1.6.

7. Якщо вимагається, то встановити додатковий (в'язкий) опір у вигляді пластини 5, яка занурена в рідину (рис. 1.2), отримати й обробити віброграму № 2 вільних затухаючих коливань згідно з п. 1.7.2 і на основі даних з неї визначити ті ж величини, що і для віброграми № 1, згідно з послідовністю розрахунку в табл. 1.9.

Порівняти відповідні параметри з віброграм № 1 та № 2 згідно з табл. 1.10 і зробити висновки (див. п. 1.7.3).

Зробити висновки щодо можливості застосування теорії звичайних лінійних коливань для вивчення гідропружних коливань згідно з положеннями п. 1.7.4.

Визначити приєднану/віртуальну масу впливу рідини, без урахування впливу маси пружної в'язі (балки), згідно із залежністю (1.49), і зробити висновки (див. п. 1.7.5).

8. Зробити висновки щодо вирішення всіх задач лабораторної роботи.

9. Оформити звіт згідно з нормативними положеннями, де відображені всі наведені вище пункти.

Питання для (само)перевірки та (само)контролю

1. Що таке коливання?
2. Що таке частота?
3. Які є види частот?
4. Що таке кругова частота, одиниці її вимірювання?
5. Що таке звичайна частота, одиниці її вимірювання?
6. Як пов'язана звичайна та кругова частота між собою?
7. Що таке період коливань, одиниці його вимірювання?
8. Що таке амплітуда коливань?
9. Що таке розмах коливань?
10. Що таке вільні (власні) коливання?
11. Що таке вимушені коливання?
12. Що таке резонанс?
13. Що таке логарифмічний декремент затухання?
14. Що таке відносний коефіцієнт опору?
15. Як впливає відносний опір на частоту вільних коливань?
16. Як впливає відносний опір на амплітуду вільних коливань?
17. Як впливає відносний опір на період вільних коливань?
18. Що таке коефіцієнт динамічності?
19. Яким чином можна визначити коефіцієнт динамічності з віброграми вимушених коливань при резонансі?
20. Як можна визначити коефіцієнт динамічності з віброграми вільних затухаючих коливань?
21. Що таке система з одним ступенем вільності?
22. Як зміниться частота вільних коливань системи, якщо врахувати масу пружної в'язі у порівнянні з неврахуванням цієї маси при теоретичних розрахунках: збільшиться, зменшиться, не зміниться?
23. Що таке гідропружні коливання?
24. Як змінює власну частоту та період коливань взаємодіючи з конструкцією рідина при гідропружних коливаннях у порівнянні з відсутністю рідини для тієї ж конструкції?

25. Яким чином можна врахувати вплив взаємодіючої рідини на власну частоту?
26. Що таке приєднана / віртуальна маса впливу взаємодіючої рідини?
27. Що таке віброграма та як вона виглядає?
28. Які параметри можна визначити з віброграми?
29. Що таке віброграф?
30. Що таке осцилограф?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Коливання систем з декількома ступенями вільності

Мета роботи: теоретично та експериментально вивчити поведінку системи з трьома ступенями вільності при вібрації, з метою набуття навичку теоретичного й експериментального визначення власних частот і форм систем з декількома ступенями вільності.

Для досягнення вказаної мети в рамках виконання лабораторної роботи необхідно вирішити наступні задачі:

1) визначити власні частоти і форми вільних коливань 1-го, 2-го та 3-го тонів досліджуваної пружної системи з трьома ступенями вільності, використовуючи задані викладачем теоретичні методи, таким чином отримавши *теоретичні власні частоти і форми*;

2) послідовно для кожного тону ГВК, починаючи з 1-го до 3-го, надати досліджуваній системі збуджуючу гармонічну силу, частота якої викликає резонанс системи, і записати відповідні віброграми вимушених коливань, з яких для кожного тону визначити *експериментальну власну частоту*; зафіксувати експериментальні форми вимушених коливань при резонансі для всіх тонів та порівняти їх з відповідними теоретичними власними формами; зробити висновки;

3) порівняти розраховані значення теоретичних власних частот з відповідними (за тонами) значеннями експериментальних власних частот, які були отримані з віброграм вимушених коливань при резонансах для перших трьох тонів ГВК та зробити висновки.

2.1 Короткі відомості з теорії

2.1.1. Вільні коливання системи з n ступенями вільності. Переміщення системи з n ступенями вільності у будь-який момент часу t визначається узагальненими координатами, які є функцією часу. Фізичною інтерпретацією такої системи можуть, наприклад, служити n точкових прикріплених мас до невагомої балки (рис. 2.1), малі лінійні переміщення яких можливі тільки в одній площині. Розглянемо невагому балку, яка містить n зосереджених мас (рис. 2.1).

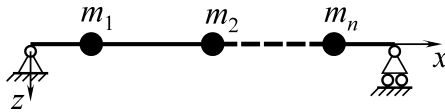


Рис. 2.1. Приклад системи з n ступенями вільності

До такої системи можна привести різні реальні конструкції, замінивши розподілені маси невеликих ділянок зосередженими масами. Використовуючи принципи кінетостатики, неважко отримати наступні рівняння руху:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} a_{11} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} a_{12} + \dots + m_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} a_{1n} + w_1 &= 0; \\ m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} a_{21} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} a_{22} + \dots + m_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} a_{2n} + w_2 &= 0; \\ \dots & \\ m_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} a_{n1} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} a_{n2} + \dots + m_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} a_{nn} + w_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

де a_{ij} – прогин в i -й точці (в місці прикріплення i -ї маси) при дії одиничної сили в j -й точці (в місці прикріплення j -ї маси).

Поклавши частинний інтеграл системи (2.1) у вигляді

$$w_i = A_i \cdot \sin(\lambda t + \theta), \quad (2.2)$$

отримаємо

$$\left. \begin{aligned} A_1(m_1 \cdot a_{11} \cdot \lambda^2 - 1) + A_2 \cdot m_2 \cdot a_{12} \cdot \lambda^2 + \dots + A_n \cdot m_n \cdot a_{1n} \cdot \lambda^2 &= 0; \\ A_1 \cdot m_1 \cdot a_{21} \cdot \lambda^2 + A_2(m_2 \cdot a_{22} \cdot \lambda^2 - 1) + \dots + A_n \cdot m_n \cdot a_{2n} \cdot \lambda^2 &= 0; \\ \dots & \\ A_1 \cdot m_1 \cdot a_{n1} \cdot \lambda^2 + A_2 \cdot m_2 \cdot a_{n2} \cdot \lambda^2 + \dots + A_n(m_n \cdot a_{nn} \cdot \lambda^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Рішення (2.3), відмінні від нуля, можуть бути знайдені, якщо визначник системи (2.3) прирівняти до нуля, тобто:

$$\begin{vmatrix} (m_1 \cdot a_{11} \cdot \lambda^2 - 1) & m_2 \cdot a_{12} \cdot \lambda^2 & \dots & m_n \cdot a_{1n} \cdot \lambda^2 \\ m_1 \cdot a_{21} \cdot \lambda^2 & (m_2 \cdot a_{22} \cdot \lambda^2 - 1) & \dots & m_n \cdot a_{2n} \cdot \lambda^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \cdot a_{n1} \cdot \lambda^2 & m_2 \cdot a_{n2} \cdot \lambda^2 & \dots & (m_n \cdot a_{nn} \cdot \lambda^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

Розкривши визначник (2.4), отримаємо рівняння n -го ступеня відносно λ^2 з додатними значеннями коефіцієнтів a_i :

$$1 - a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda^4 - a_3 \lambda^6 + \dots + (-1)^n \cdot a_n \cdot \lambda^{2n} = 0. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) має n дійсних додатних коренів $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$. Вирішуючи систему (2.3) при будь-якому відомому значенні $\lambda = \lambda_k$, легко знайти співвідношення між усіма амплітудами:

$$1 : \frac{A_2}{A_1} : \frac{A_3}{A_1} : \dots : \frac{A_i}{A_1} : \dots : \frac{A_n}{A_1} = 1 : n_2 : n_3 : \dots : n_i : \dots : n_n, \quad (2.6)$$

які визначають собою форму i -го типу ГВК системи.

Загальне рішення системи (2.1) має вигляд:

$$w_i = A_{i1} \cdot \sin(\lambda_1 t + \theta_1) + A_{i2} \cdot \sin(\lambda_2 t + \theta_2) + \dots + A_{in} \cdot \sin(\lambda_n t + \theta_n). \quad (2.7)$$

Таким чином, кожна маса m_i здійснює n гармонічних коливань з різними частотами. Величини A_{ik} та θ_k визначаються початковими умовами руху.

Таким чином, ГВК – це вільні коливання системи, які відбуваються лише з частотою певного тону.

Із загального рішення (2.7) видно, що ГВК системи відбуваються незалежно один від одного. Сили інерції, які виникають при одному з ГВК не виконують роботи на переміщеннях, що відповідають будь-якому іншому головному коливанню. Звідси можна вивести так звану умову ортогональності форм ГВК. Сила інерції i -ї маси при будь-якому k -му ГВК дорівнює:

$$F_{ki} = m_i \cdot A_{ki} \cdot \lambda_k^2 \cdot \sin(\lambda_k t + \theta_k), \quad (2.8)$$

отже,

$$\lambda_k^2 \cdot \sin(\lambda_k t + \theta_k) \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cdot A_{ki} \cdot A_{ji} = 0, \quad (2.9)$$

або

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_i \cdot A_{ki} \cdot A_{ji} = 0, \quad (2.10)$$

де A_{ki} , A_{ji} – амплітуди i -ї маси в k -му та j -му ГВК.

Із умови ортогональності (2.10) витікають два важливі наслідки:

1) кінетична енергія пружної системи, яка виконує складні коливальні рухи, дорівнює сумі енергій всіх ГВК, на які воно розкладається;

2) потенціальна енергія пружної системи, яка виконує складні коливальні рухи, дорівнює сумі потенціальних енергій всіх ГВК, на які воно розкладається.

Власні частоти (які є по суті власними числами матриці) можна знаходити не лише з характеристичного рівняння (2.5), а й числовими методами, заснованими на матричних перетвореннях і операціях над вихідною матрицею, яка отримана з (2.3). Для малих систем спосіб знаходження власних чисел / частот з характеристичного рівняння є більш простим, тому він тут і показаний.

2.1.2 Вільні коливання системи з 3-ма ступенями вільності. Для системи з 3-ма ступенями вільності загальні рівняння (2.3) переписуються у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} A_1(m_1 \cdot a_{11} \cdot \lambda^2 - 1) + A_2 \cdot m_2 \cdot a_{12} \cdot \lambda^2 + A_3 \cdot m_3 \cdot a_{13} \cdot \lambda^2 &= 0; \\ A_1 \cdot m_1 \cdot a_{21} \cdot \lambda^2 + A_2(m_2 \cdot a_{22} \cdot \lambda^2 - 1) + A_3 \cdot m_3 \cdot a_{23} \cdot \lambda^2 &= 0; \\ A_1 \cdot m_1 \cdot a_{31} \cdot \lambda^2 + A_2 \cdot m_2 \cdot a_{32} \cdot \lambda^2 + A_3(m_3 \cdot a_{33} \cdot \lambda^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Визначник системи (2.11) запишеться у наступному вигляді:

$$\begin{vmatrix} (m_1 \cdot a_{11} \cdot \lambda^2 - 1) & m_2 \cdot a_{12} \cdot \lambda^2 & m_3 \cdot a_{13} \cdot \lambda^2 \\ m_1 \cdot a_{21} \cdot \lambda^2 & (m_2 \cdot a_{22} \cdot \lambda^2 - 1) & m_3 \cdot a_{23} \cdot \lambda^2 \\ m_1 \cdot a_{31} \cdot \lambda^2 & m_2 \cdot a_{32} \cdot \lambda^2 & (m_3 \cdot a_{33} \cdot \lambda^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.12)$$

Приймаючи до уваги, що коефіцієнти податливості $a_{ij} = a_{ji}$, та розкриваючи визначник (2.12), отримаємо характеристичне рівняння для визначення частот вільних коливань або власних частот для системи з 3-ма ступенями вільності:

$$\left. \begin{aligned} &(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23}^2 - a_{12}^2 \cdot a_{33} - a_{22} \cdot a_{13}^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{13})m_1 m_2 m_3 \lambda^6 + \\ &(((a_{23}^2 - a_{22} \cdot a_{33})m_2 + (a_{13}^2 - a_{11} \cdot a_{33})m_1)m_3 + (a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22})m_1 m_2)\lambda^4 + \\ &(m_1 \cdot a_{11} + m_2 \cdot a_{22} + m_3 \cdot a_{33})\lambda^2 - 1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

2.2 Описання лабораторної установки

Лабораторна установка (рис. 2.2) для вивчення коливань системи з 3-ма ступенями вільності являє собою стіл 1 , на якому в опорах 2 закріплена призматична балка 3 з насадженими на неї однаковими масами 4 . Середня маса розташована посередині прольоту балки, а дві інші – рівновіддалені від неї та від кінців балки. Всі маси пов'язані з призматичною балкою так, що не мають можливості переміщуватися у напрямку осі балки, але можуть вільно повертатися на кут до 30° навколо осі, перпендикулярної до площини найменшої жорсткості балки.

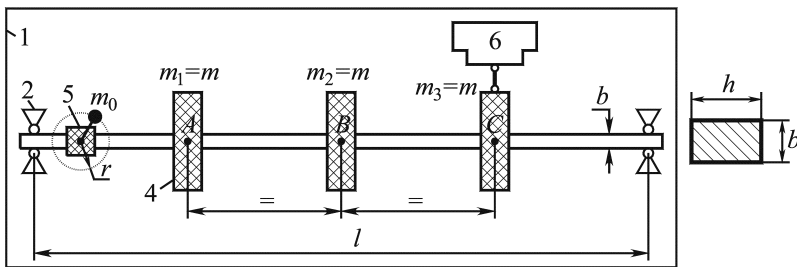


Рис. 2.2. Лабораторна установка

Конструкція обох опор призматичної балки забезпечує шарнірне обпирання при розміщенні осевих стійок балок у площині її найменшої жорсткості, тобто в горизонтальній площині.

Збудник коливань 5 забезпечує прикладення до балки 3 сили, яка гармонічно змінюється з часом. Частота збуджуючої сили може безперервно збільшуватися, послідовно попадаючи в резонанс з частотою 1-го, 2-го і 3-го тонів ГВК системи з трьома ступенями вільності.

Для запису коливального процесу системи використовується записуючий пристрій (віброграф, осцилограф тощо) 6. Перо записуючого пристрою за допомогою спеціальної вилки з'єднано з однією з мас, горизонтальне переміщення якої безпосередньо записується пристроєм 6.

Визначені параметри лабораторної установки необхідно занести до табл. 2.1 і провести там необхідні розрахунки.

Таблиця 2.1 – Параметри лабораторної установки

№	Найменування величини	Позначення	Значення
1	Довжина балки, м	l	
2	Зосереджена маса, кг	m	
3	Маса ексцентрика, кг	m_0	
4	Плече ексцентрика, м	r_0	
5	Висота поперечного перерізу балки, мм	h	
6	Ширина поперечного перерізу балки, мм	b	
7	Головний центральний момент інерції відносно осі, перпендикулярної до площини коливань, м ⁴	$I = \frac{hb^3}{12} \cdot 10^{-12}$	
8	Модуль пружності при розтягу матеріалу балки, Па	E	$2 \cdot 10^{11}$
9	Густина матеріалу балки (сталі), кг/м ³	ρ	7800
10	Розподілена маса балки (пружної в'язі), кг/м	$\mu = \rho b h \cdot 10^{-6}$	
11	Період роботи відмітника часу вібрографа, с	$\Delta\tau$	

2.3 Теоретичне визначення власних частот системи

2.3.1 Розрахунок власних частот за методом приведення (без урахування маси пружної в'язі – балки).

На рис. 2.3 представлені розрахункові схеми системи з трьома ступенями вільності. Згідно з принципом кінетостатики зосереджені маси m замінюються силами інерції P .

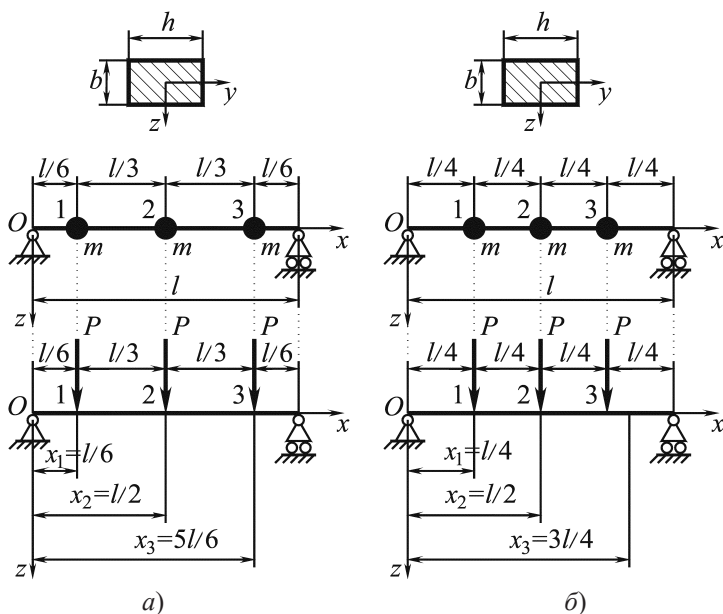


Рис. 2.3. Розрахункові схеми для системи з трьома ступенями вільності:

- a* – крайні зосереджені маси рівновіддалені від центральної маси;
- б* – всі зосереджені маси розташовані через рівні проміжки вздовж довжини балки

Для визначення власних частот коливань системи з 3-ма ступенями вільності (рис. 2.2, 2.3) при $m_1 = m_2 = m_3 = m$ необхідно вирішити рівняння (2.13) і знайти власні частоти $\lambda_{1,2,3}$.

Коефіцієнти податливості шукаються з виразу для прогину:

$$a_{ij} = w|_{P=1} = \frac{Pl^3}{6EI} \left[\frac{b}{l} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) + \left| \left| \left(\frac{x-a}{l} \right)^3 \right| \right| \right], \quad (2.14)$$

для розрахункової схеми на рис. 2.4.

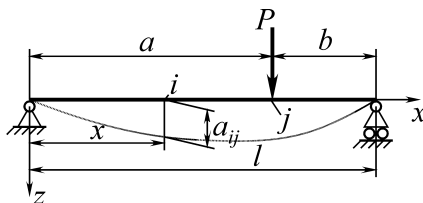


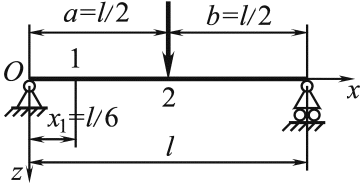
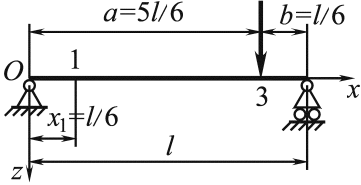
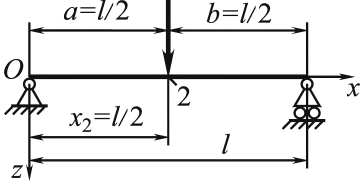
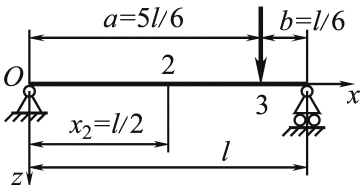
Рис. 2.4. Розрахункова схема для визначення податливостей

Нижче будуть показані окремі розрахунки для розрахункових схем на рис. 2.3, а та рис. 2.3, б.

Власні частоти для схеми на рис. 2.3, а. В табл. 2.2 наведено значення податливостей a_{ij} , обчислені з використанням формули (2.14), та відповідні розрахункові схеми, які отримані на основі схеми на рис. 2.4 та рис. 2.3, а.

Таблиця 2.2 – Розрахунок податливостей a_{ij} для схеми на рис. 2.3, а

№	Розрахункова схема	Значення податливості a_{ij}
1	2	3
1		$a_{11} = a_{33} = \frac{25l^3}{3888EI}$

1	2	3
2		$a_{12} = a_{21} = \frac{13l^3}{1296EI}$
3		$a_{13} = a_{31} = \frac{17l^3}{3888EI}$
4		$a_{22} = \frac{l^3}{48EI}$
5		$a_{23} = a_{32} = \frac{13l^3}{1296EI}$

Підставляючи значення податливостей з табл. 2.2 у формулу (2.13), отримаємо наступне характеристичне рівняння відносно λ :

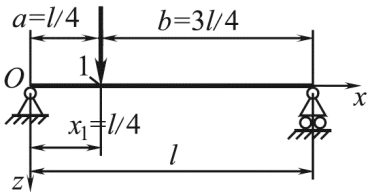
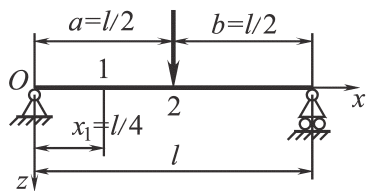
$$\frac{5}{102\,036\,672} \frac{l^9 m^3 \lambda^6}{E^3 I^3} - \frac{7}{78\,732} \frac{l^6 m^2 \lambda^4}{E^2 I^2} + \frac{131}{3888} \frac{l^3 m \lambda^2}{EI} - 1 = 0, \quad (2.15)$$

вирішуючи яке, отримуємо наступні корні, які є частотами вільних коливань або власними частотами:

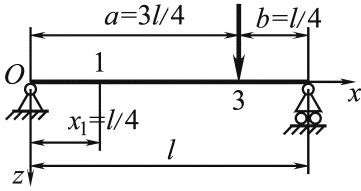
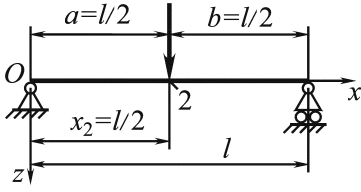
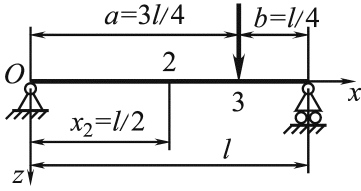
$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{162}{5} \frac{EI}{ml^3}} \approx 5,69 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \\ \lambda_2 &= \sqrt{486 \frac{EI}{ml^3}} \approx 22,05 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \\ \lambda_3 &= 36 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Власні частоти для схеми на рис. 2.3, б. У табл. 2.3 наведено значення податливостей a_{ij} , обчислені з використанням формули (2.14), та відповідні розрахункові схеми, які були отримані на основі схем на рис. 2.4 та рис. 2.3, б.

Таблиця 2.3 – Розрахунок податливостей a_{ij} для схеми на рис. 2.3, б

№	Розрахункова схема	Значення податливості a_{ij}
1	2	3
1		$a_{11} = a_{33} = \frac{3l^3}{256EI}$
2		$a_{12} = a_{21} = \frac{11l^3}{768EI}$

Продовження таблиці 2.3

1	2	3
3		$a_{13} = a_{31} = \frac{7l^3}{768EI}$
4		$a_{22} = \frac{l^3}{48EI}$
5		$a_{23} = a_{32} = \frac{11l^3}{768EI}$

Підставляючи значення податливостей з табл. 2.3 у формулу (2.13), отримаємо наступне характеристичне рівняння відносно λ :

$$\frac{7}{113\,246\,208} \frac{l^9 m^3 \lambda^6}{E^3 I^3} - \frac{13}{98\,304} \frac{l^6 m^2 \lambda^4}{E^2 I^2} + \frac{17}{384} \frac{l^3 m \lambda^2}{EI} - 1 = 0, \quad (2.17)$$

вирішуючи яке, отримуємо наступні корені, які є частотами вільних коливань або власними частотами:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{384 \left(\frac{16-11\sqrt{2}}{7} \right) \frac{EI}{ml^3}} \approx 4,93 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \\ \lambda_2 &= \sqrt{384 \frac{EI}{ml^3}} \approx 19,60 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \\ \lambda_3 &= \sqrt{384 \left(\frac{16+11\sqrt{2}}{7} \right) \frac{EI}{ml^3}} \approx 41,61 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

2.3.2. Розрахунок власних частот за методом Релея-Рітца (з урахуванням маси пружної в'язі – балки). Основи методу Релея-Рітца були пояснені при вивченні коливань системи з одним ступенем вільності. Для системи на рис. 2.2 задаємо форму коливань з невідомими коефіцієнтами, яка повинна задовольняти всім кінематичним граничним умовам. Для шарнірів, на які обперті обидва кінці балки, кінематичними ГУ є рівність нулю прогинів на торцях, тобто

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0. \quad (2.19)$$

Форму коливань, яка задовольняє вказаним кінематичним ГУ, можна записати у такому вигляді:

$$\varphi(x) = a_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l}. \quad (2.20)$$

Підставивши (2.20) у (2.19), можна впевнитися, що обрана форма задовольняє всім кінематичним ГУ:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\Rightarrow a_1 \cdot \sin \frac{\pi \cdot 0}{l} + a_2 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 0}{l} + a_3 \cdot \sin \frac{3\pi \cdot 0}{l} = 0; \\ \varphi(l) = 0 &\Rightarrow a_1 \cdot \sin \frac{\pi \cdot l}{l} + a_2 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot l}{l} + a_3 \cdot \sin \frac{3\pi \cdot l}{l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Найбільша потенціальна енергія $\Pi_{\max}$ визначається залежністю

$$\begin{aligned}\Pi_{\max} &= \frac{EI}{2} \int_0^l [\varphi''(x)]^2 dx = \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^l \left(-\frac{a_1 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{4a_2 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} - \frac{9a_3 \cdot \pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} \right)^2 dx = (2.22) \\ &= \frac{1}{4} \frac{EI\pi^4(a_1^2 + 16a_2^2 + 81a_3^2)}{l^3}.\end{aligned}$$

Найбільша кінетична енергія $T_{\max}$ з урахуванням (розподіленої) маси балки μ та зосереджених мас $m_1 = m_2 = m_3 = m$ записється наступним чином:

$$T_{\max} = \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left[\mu \int_0^l \varphi^2(x) dx + m \cdot \varphi^2(x_1) + m \cdot \varphi^2(x_2) + m \cdot \varphi^2(x_3) \right], \quad (2.23)$$

де x_1, x_2, x_3 — координати розташування зосереджених мас $m_{1,2,3}$, які можуть бути визначені з рис. 2.3.

Складаємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь за формулою:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (\Pi_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.24)$$

Власні числа матриці, сформованої з системи (2.24), є власними частотами, а відповідні їм власні вектори цієї ж матриці є коефіцієнтами a_1, a_2, a_3 , які після підстановки в (2.20) характеризують форму коливань для відповідної власної частоти. Власні числа / частоти вказаної матриці можна знаходити як числовими методами, які засновані на перетвореннях матриць, так і складаючи характеристичне рівняння. Що стосується застосування числових методів, то над вихідною матрицею

(яка отримана з (2.24)) необхідно попередньо виконати ряд матричних перетворень і операцій, які включають у тому числі і знаходження оберненої матриці. Для малих систем спосіб знаходження власних чисел / частот з характеристичного рівняння є більш простим, а тому він і застосовуватиметься для обчислення власних чисел / частот.

Обчислюючи визначник (2.24) та порівнюючи його до нуля, отримаємо характеристичне рівняння, з якого знайдемо три власні частоти трьох тонів ГВК. Вказане вище реалізується наступним чином.

Власні частоти для схеми на рис. 2.3, а. Найбільша кінетична енергія $T_{\max}$ з урахуванням (розподіленої) маси балки μ та зосереджених мас $m_1 = m_2 = m_3 = m$, які розташовані так, як це показано на рис. 2.3, а, запишеться наступним чином:

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left[\mu \int_0^l \varphi^2(x) dx + m \cdot \varphi^2(x_1) + m \cdot \varphi^2(x_2) + m \cdot \varphi^2(x_3) \right] = \\ &= \frac{\lambda^2}{4} \cdot \left[(\mu l + 3m)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 3ma_3^2 \right], \quad (2.25) \\ x_1 &= \frac{l}{6}, \quad x_2 = \frac{l}{2}, \quad x_3 = \frac{5l}{6}. \end{aligned}$$

Для схеми на рис. 2.3, а система (2.24) в розгорнутому вигляді запишеться так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} (\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{EI \cdot \pi^4}{l^3} - \lambda^2 (\mu l + 3m) \right) a_1 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial a_2} (\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{16 \cdot EI \cdot \pi^4}{l^3} - \lambda^2 (\mu l + 3m) \right) a_2 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial a_3} (\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{81 \cdot EI \cdot \pi^4}{l^3} - \lambda^2 (\mu l + 6m) \right) a_3 = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Обчислюючи визначник (2.26) та прирівнюючи його до нуля, отримаємо характеристичне рівняння, з якого знайдемо перші три власні частоти ГВК. Вищевказане реалізується наступним чином. Визначник системи (2.26) має вигляд

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{EI \cdot \pi^4}{l^3} - b \cdot \lambda^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{16 \cdot EI \cdot \pi^4}{l^3} - b \cdot \lambda^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{81 \cdot EI \cdot \pi^4}{l^3} - d \cdot \lambda^2 \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.27)$$

$$b = \mu l + 3m, \quad d = \mu l + 6m.$$

Розкриваючи визначник (2.27) і прирівнюючи його до нуля, отримаємо наступне характеристичне рівняння відносно невідомого λ (власної частоти):

$$\left. \begin{aligned} & \frac{c^2 g}{8l^9} \lambda^6 + \frac{(17cg + 81c^2)EI\pi^4}{8l^9} \lambda^4 + \frac{(16g + 1377c)(EI\pi^4)^2}{8l^9} \lambda^2 + \\ & + \frac{162(EI\pi^4)^3}{l^9} = 0, \\ & c = -l^3 b = -l^3(\mu l + 3m), \quad g = -l^3 d = -l^3(\mu l + 6m). \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Розв'язуючи характеристичне рівняння (2.28), знайдемо три додатних корені:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}} \approx 9,87 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}}; \\ \lambda_2 &= 4\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}} \approx 39,48 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}}; \\ \lambda_3 &= 9\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{dl^3}} \approx 88,83 \sqrt{\frac{EI}{dl^3}}; \\ b &= \mu l + 3m, \quad d = \mu l + 6m. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Варто відмітити, що якщо не враховувати розподілену масу балки ($\mu = 0$), то формули (2.29) практично переходять у формули (2.16), де коефіцієнти перед квадратними коренями у (2.29) становлять: 5,70; 22,79; 36,26, проти відповідних точних 5,69; 22,05; 36 у (2.16). Це можливо завдяки прийнятій формі (2.20), яка вже при трьох членах ряду дає практично точні результати при відсутності врахування маси пружної в'язі – балки. Це означає, що вплив пружної в'язі (балки) на власні частоти враховується правильно. Чим більше буде членів ряду в (2.20), тим точніше буде рішення і тим ближче воно наблизатиметься до точного (2.16) при відсутності врахування маси пружної в'язі – балки. Але як видно з наведених порівнянь, трьох членів ряду в (2.28) цілком достатньо для практичних розрахунків.

Характеристичні рівняння (2.15) та (2.28), з яких відповідно отримані корені (2.16) та (2.29) є різними, але дають близькі значення власних частот. Зокрема рівняння (2.28) містить число π , а (2.15) його не містить. За методом приведення ніколи не можна отримати власні частоти (2.29).

Власні частоти для схеми на рис. 2.3, б. Найбільша кінетична енергія $T_{\max}$ з урахуванням (розподіленої) маси балки μ

та зосереджених мас $m_1 = m_2 = m_3 = m$, які розташовані так, як це показано на рис. 2.3, б, запишеться наступним чином:

$$T_{\max} = \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left[\mu \int_0^l \varphi^2(x) dx + m \cdot \varphi^2(x_1) + m \cdot \varphi^2(x_2) + m \cdot \varphi^2(x_3) \right] = \quad (2.30)$$

$$= \frac{\lambda^2}{4} \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (\mu l + 4m), \quad x_1 = \frac{l}{4}, \quad x_2 = \frac{l}{2}, \quad x_3 = \frac{3l}{4}.$$

Для схеми на рис. 2.3, б система (2.24) у розгорнутому вигляді запишеться так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} (\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{EI \cdot \pi^4}{l^3} - \lambda^2 (\mu l + 4m) \right) a_1 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial a_2} (\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{16 \cdot EI \cdot \pi^4}{l^3} - \lambda^2 (\mu l + 4m) \right) a_2 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial a_3} (\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{81 \cdot EI \cdot \pi^4}{l^3} - \lambda^2 (\mu l + 4m) \right) a_3 = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Обчислюючи визначник (2.31) та прирівнюючи його до нуля, отримаємо характеристичне рівняння, з якого знайдемо три власні частоти. Вказане вище реалізується наступним чином. Визначник системи (2.31) має вигляд:

$\frac{1}{2} \left(\frac{EI \cdot \pi^4}{l^3} - b \cdot \lambda^2 \right)$	0	0	$= 0, \quad (2.32)$
0	$\frac{1}{2} \left(\frac{16 \cdot EI \cdot \pi^4}{l^3} - b \cdot \lambda^2 \right)$	0	
0	0	$\frac{1}{2} \left(\frac{81 \cdot EI \cdot \pi^4}{l^3} - b \cdot \lambda^2 \right)$	

$b = \mu l + 4m.$

Розкриваючи визначник (2.32) і прирівнюючи його до нуля, отримаємо наступне характеристичне рівняння відносно невідомого λ (власної частоти):

$$\left. \begin{aligned} & \frac{c^3}{8l^9} \lambda^6 + \frac{49}{4} \frac{EI \cdot \pi^4 \cdot c^2}{l^9} \lambda^4 + \frac{1393}{8} \frac{(EI \cdot \pi^4)^2 \cdot c}{l^9} \lambda^2 + \\ & + \frac{162(EI \cdot \pi^4)^3}{l^9} = 0, \\ & c = -l^3 b. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Вирішуючи характеристичне рівняння (2.33), знайдемо три (додатних) корені:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}} \approx 9,87 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}}; \\ \lambda_2 &= 4\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}} \approx 39,48 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}}; \\ \lambda_3 &= 9\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}} \approx 88,83 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}}; \\ b &= \mu l + 4m. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Варто відмітити, що якщо не враховувати розподілену масу балки ($\mu = 0$), то формули (2.34) практично переходять у формули (2.18), де коефіцієнти перед квадратними коренями у (2.34) становлять: 4,93; 19,74; 44,41 проти відповідних точних 4,93; 19,60; 41,61 у (2.18).

2.3.3 Обчислення власних частот досліджуваної системи за різними методами. В табл. 2.4 і табл. 2.5 (а також у табл. 2.4' і 2.5', які є іншими формами відповідно табл. 2.4 і 2.5) представлено формули для визначення теоретичних власних

частот ГВК для перших трьох тонів досліджуваної системи на рис. 2.3 як з урахуванням, так і без урахування розподіленої маси пружної в'язі (балки), які отримані за наведеними методами розрахунку. Розрахунок власних частот за методом приведення без урахування маси балки є обов'язковим. Якщо не встановлено інше, при виконанні лабораторної роботи однією групою (або підгрупою) необхідно використовувати одну зі схем на рис. 2.3.

Таблиця 2.4 – Теоретичні власні частоти для схеми на рис. 2.3, а

№	№ тону	Метод	Формула теоретичної кругової частоти	Значення, рад/с
1	2	3	4	5
1	1	Метод приведення (без урахування маси балки)	$\lambda_1 = 5,69\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	λ_{A1}
2	2		$\lambda_2 = 22,05\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	λ_{A2}
3	3		$\lambda_3 = 36\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	λ_{A3}
4	1	Метод Релея-Рітца (з урахуванням маси балки)	$\lambda_1 = 9,87\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 3m$	λ_{B1}
5	2		$\lambda_2 = 39,48\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 3m$	λ_{B2}
6	3		$\lambda_3 = 88,83\sqrt{\frac{EI}{dl^3}},$ $d = \mu l + 6m.$	λ_{B3}

Таблиця 2.4' – Теоретичні власні частоти для схеми на рис. 2.3, а

№ методу <i>j</i>	Назва теоретичного методу	Позначення	Номер тону <i>i</i>		
			1	2	3
<i>A</i>	Метод приведення (без урахування маси балки)	λ_A	$\lambda_{A1} = 5,69\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	$\lambda_{A2} = 22,05\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	$\lambda_{A3} = 36\sqrt{\frac{EI}{ml}}$
<i>B</i>	Метод Релея-Рітца (з урахуванням маси балки)	λ_B	$\lambda_{B1} = 9,87\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 3m$	$\lambda_{B2} = 39,48\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 3m$	$\lambda_{B3} = 88,83\sqrt{\frac{EI}{dl^3}},$ $d = \mu l + 6m.$

Таблиця 2.5 – Теоретичні власні частоти для схеми на рис. 2.3, б

№	№ тону	Метод	Формула теоретичної кругової частоти	Значення, рад/с
1	2	3	4	5
1	1	Метод приведення (без урахування маси балки)	$\lambda_1 = 4,93\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	λ_{A1}
2	2		$\lambda_2 = 19,60\sqrt{\frac{EI}{ml}}$	λ_{A2}
3	3		$\lambda_3 = 41,61\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	λ_{A3}
4	1	Метод Релея-Рітца (з урахуванням маси балки)	$\lambda_1 = 9,87\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 4m$	λ_{B1}

Продовження таблиці 2.5

1	2	3	4	5
5	2		$\lambda_2 = 39,48\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 4m$	$\lambda_{Б2}$
6	3		$\lambda_3 = 88,83\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 4m$	$\lambda_{Б3}$

Таблиця 2.5' – Теоретичні власні частоти для схеми на рис. 2.3, б

№ методу <i>j</i>	Назва теоретичного методу	Позначення	Номер тону <i>i</i>		
			1	2	3
<i>A</i>	Метод приведення (без урахування маси балки)	λ_A	$\lambda_{A1} = 4,93\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	$\lambda_{A2} = 19,60\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$	$\lambda_{A3} = 41,61\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$
<i>Б</i>	Метод Рейля-Рітца (з урахуванням маси балки)	λ_B	$\lambda_{Б1} = 9,87\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 4m$	$\lambda_{Б2} = 39,48\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 4m$	$\lambda_{Б3} = 88,83\sqrt{\frac{EI}{bl^3}},$ $b = \mu l + 4m$

Примітки.

1. Для контролю та перевірки результатів обчислень з табл. 2.4 і 2.5 в додатку А, в розділі «Для лабораторної роботи № 2» представлені числові розрахунки для певних фіксованих параметрів системи.

2. Врахування впливу пружної в'язі завжди зменшує частоту вільних коливань при теоретичних розрахунках, тому що на роботу інерційних сил відтягується частина потенціальної

енергії. І це повинно бути еталоном при перевірці теоретичних методів розрахунку власних частот.

3. Проте, може статися так, що при зростаючому відношенні зосередженої маси m до маси пружної в'язі – балки μl , тобто при $m/(\mu l) \rightarrow \infty$, розраховані власні частоти при врахуванні пружної в'язі (за методом Релея-Рітца) для вищих тонів можуть бути вищими на декілька відсотків (на практиці до 1...3 %, в теорії не вище 6,3 % для схеми, де крайні маси стоять на 1/4 від торців) відносно частот, які розраховані без врахування маси пружної в'язі.

По-перше, це пов'язано з особливостями методу Релея-Рітца, де ми тримаємо лише три члени ряду, і якщо в цьому методі не враховувати масу пружної в'язі – балки (при $\mu = 0$), то частоти отримуватимуться дещо вищими (див. пояснення після формул (2.29) і (2.34)). Підвищення кількості членів ряду в методі Релея-Рітца підвищить точність розрахунків і підтвердить положення, наведене в п. 2., проте призведе до зростання трудомісткості обчислень.

По-друге, за представленими теоретичними методами власні частоти визначаються лише в 1-му наближенні. Точний розрахунок власних частот відбувається в декілька етапів і є ітераційним процесом, коли параметри попереднього наближення є вхідними параметрами для наступного наближення. В цьому випадку буде виконуватися твердження п. 2.

2.3.4. Власні форми коливань. Власні форми коливань найзручніше визначати числовими методами, знаходячи власні вектори матриці, отриманої з системи (2.11) для прямого методу, або з системи (2.24) для методу Релея-Рітца. Власні вектори матриці, отриманої з системи (2.11) – це амплітуди коливань A_{ik} з виразу (2.7), які відповідають власній частоті λ_i i -го тону. Власні вектори матриці, отриманої з системи (2.24) – це коефіцієнти a_k ($k = 1, 2, 3$) виразу (2.20). Кожний власній частоті λ_i i -го тону відповідає свій набір коефіцієнтів a_k .

Власні форми коливань, які отримані відповідно до теоретичних розрахунків, представлені на рис. 2.5. Для схем на рис. 2.3, а і б форми коливань є подібні.

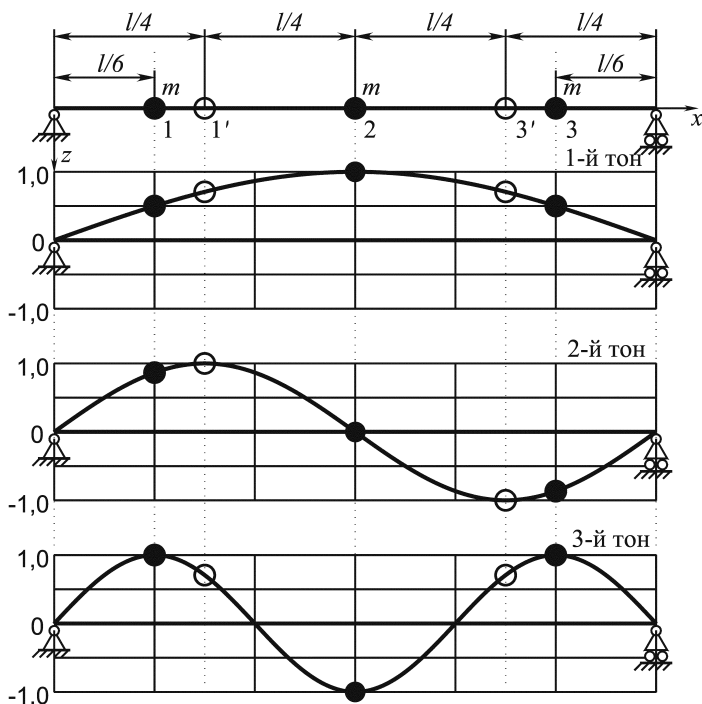


Рис. 2.5. Форми ГВК системи (балки) з трьома масами

Форми ГВК, отримані на основі різних теоретичних методів, будуть незначно відрізнятися один від одного, але загальні форми і кількості напівхвиль для i -х тонів будуть такими, як це показано на рис. 2.5.

Зосереджені маси 4 лабораторної установки на рис. 2.2 в місцях їх прикріплення можуть обертатися навколо осей, перпендикулярних площині згину, як тверде тіло, і не є жорстко закріпленими до балки, а тому інерція повороту цих

зосереджених мас відсутня і в розрахунках не враховується. При вібрації балки на рис. 2.2 ці маси візуально стоять на місці. Має місце лише незначне тертя у вузлах, де закріплені вказані зосереджені маси, яке в теорії повинно зменшувати частоту власних коливань при резонансі, але на практиці тертя у вузлах на частоту коливань не впливає.

У представлених методах для розрахунку теоретичних власних частот не враховано зсув, а також інерцію повороту поперечних перерізів балки. Врахування інерції повороту поперечних перерізів балки дещо зменшує власну частоту. Для параметрів балки на рис. 2.2 вплив зсуву є дуже мізерним і ним можна нехтувати. Розрахунки з врахуванням указаних факторів є більш складними.

2.4 Визначення параметрів вібрації з віброграми вимушених коливань

Упевнившись у нормальній роботі окремих вузлів установки, необхідно приступити до запису вимушених коливань системи. Запис вимушених коливань для певного тону проводиться вібрографом 6 (див. рис. 2.2) для крайньої маси досліджуваної системи. Послідовно підвищуючи оберти збудника коливань 5 (рис. 2.2) і добиваючись резонансу з першим, другим та третім тонами, провести запис вимушених коливань та зафіксувати (замалювати, сфотографувати тощо) власну форму для кожного з тонів. Резонанс досягається шляхом експериментального підбору такої дійсної частоти збудника коливань 5 (рис. 2.2), коли досягається найбільший розмах / амплітуда самописця 6 (а, відповідно, і досліджуваної системи) з усіх можливих (див. п. 1.5.1). Після закінчення запису необхідних віброграм виключити збудник коливань і віброграф.

Отримані віброграми обробляють згідно з методиками, які викладені в лабораторній роботі № 1. Обробку даних

з отриманих віброграм вимушених коливань можна оформити згідно з послідовністю в табл. 2.6.

Таблиця 2.6 – Розрахунок параметрів вимушеної вібрації при резонансі

№	Назва величини	Формула або позначення	Значення для <i>i</i> -го тону		
			1	2	3
1	Довжина ділянки <i>a</i> , мм	<i>a</i>	з рис. 1.7	з рис. 1.7	з рис. 1.7
2	Кількість інтервалів <i>r</i>	<i>r</i>	з рис. 1.7	з рис. 1.7	з рис. 1.7
3	Довжина ділянки <i>b</i> , мм	<i>b</i>	з рис. 1.7	з рис. 1.7	з рис. 1.7
4	Кількість коливань <i>s</i>	<i>s</i>	з рис. 1.7	з рис. 1.7	з рис. 1.7
5	Експериментальна власна частота, Гц, отримана з віброграми вимушених коливань при резонансі	$f = f_e = \frac{a \cdot s}{b \cdot r} \cdot \frac{1}{\Delta \tau}$			
6	Кругова частота збуджуючої сили, рад/с;	$\omega = 2\pi f$			
7	Експериментальний період коливань із віброграми вимушених коливань, с	$T_e = \frac{1}{f}$			

Власні форми, отримані під час виконання експерименту, повинні бути подібними до тих, що представлені на рис. 2.5.

Висновок у цьому розділі може бути сформульовано наступним чином.

Приклад висновку. Під час експериментального дослідження вимушених коливань було послідовно досягнуто резонансу для всіх перших трьох тонів ГВК, записані відповідні віброграми і графічно зафіксовані експериментальні форми коливань перших трьох тонів ГВК, які відповідають теоретичним формам на рис. 2.5.

2.5 Порівняння власних теоретичних і експериментальних частот

Вважається, що кругова частота ω збуджуючої сили з п. 6 табл. 2.6 при резонансі системи є (круговою) експериментальною власною частотою. При виконанні порівнянь теоретичні власні частоти слід відносити до відповідних (за тонами) експериментальних власних частот. Порівняння значень відповідних власних експериментальних і теоретичних частот можливо провести у формі, яка запропонована в табл. 2.7 і 2.8.

Таблиця 2.7 – Порівняння власних теоретичних і експериментальних частот без урахування маси пружної в'язі – балки

№ тону i	Експериментальна власна частота ω , рад/с (п. 6 табл. 2.6)	Теоретична власна частота λ , рад/с (з табл. 2.4 або 2.5)	Розходження δ у порівнянні з експериментальною власною частотою, %, $\delta = \frac{\lambda - \omega}{\omega} 100\%$
1	ω_1	λ_{A1}	δ_{A1}
2	ω_2	λ_{A2}	δ_{A2}
3	ω_3	λ_{A3}	δ_{A3}

Таблиця 2.8 – Порівняння власних теоретичних і експериментальних частот з урахуванням маси пружної в’язі – балки

№ тону i	Експериментальна власна частота ω , рад/с (п. 6 табл. 2.6)	Теоретична власна частота λ , рад/с (з табл. 2.4 або 2.5)	Розходження δ у порівнянні з експе- риментальною влас- ною частотою, %, $\delta = \frac{\lambda - \omega}{\omega} 100\%$
1	ω_1	λ_{B1}	δ_{B1}
2	ω_2	λ_{B2}	δ_{B2}
3	ω_3	λ_{B3}	δ_{B3}

Порівняння частот можна виконувати і в іншій формі, як це, наприклад, показано в табл. 2.9, 2.10 нижче. В табл. 2.9 виписані власні теоретичні й експериментальні частоти, а в табл. 2.10 наведені відповідні відносні різниці δ_{ji} між ними, які у свою чергу визначаються залежністю:

$$\delta_{ji} = \frac{\lambda_{ji} - \omega_i}{\omega_i} 100\%, \quad (2.35)$$

де j – номер або позначення теоретичного методу розрахунку власних частот у табл. 2.9, табл. 2.10;

i – номер тону.

Таблиця 2.9 – Виписані власні частоти для порівняння

№ методу або спостере- ження j	Джерело отримання частоти	Позна- чення	Номер тону i		
			1	2	3
Експериментальні власні частоти					
1	Експериментальна власна частота, рад/с	ω	ω_1	ω_2	ω_3
Теоретичні власні частоти					
A	з табл. 2.4 або 2.5 (без урахування маси пружної в'язі)	λ_A	λ_{A1}	λ_{A2}	λ_{A3}
B	з табл. 2.4 або 2.5 (з урахуванням маси пружної в'язі)	λ_B	λ_{B1}	λ_{B2}	λ_{B3}

Таблиця 2.10 – Порівняння частот відповідно до табл. 2.9

№ порівняння j	З яким теоретичним методом порівнюється власна експериментальна частота?	Позначення	Номер тону i		
			1	2	3
A	з табл. 2.4 або 2.5 (без урахування маси пружної в'язі)	δ_A	δ_{A1}	δ_{A2}	δ_{A3}
B	з табл. 2.4 або 2.5 (з урахуванням маси пружної в'язі)	δ_B	δ_{B1}	δ_{B2}	δ_{B3}

Ознакою правильності проведення експерименту і виконаних розрахунків є виконання нерівностей: $|\delta_{Ai}| > |\delta_{Bi}|$, $\lambda_{Ai} > \omega_i$, де i – номер тону.

Під точністю розрахунків власних теоретичних частот необхідно розуміти відповідні різниці за модулем між значеннями теоретичних і експериментальних власних частот. Чим менше вказані різниці, тим точнішим є розрахунок.

При необхідності порівняння власних теоретичних частот між собою, можна скористатися формулою (1.44). Наприклад, різниця між значеннями власних частот 2-го тону, які розраховані за методом Релея-Рітца ($\lambda_{B2} \rightarrow \delta_{B2}$) і за методом приведення ($\lambda_{A2} \rightarrow \delta_{A2}$), відносно частоти за методом приведення визначиться відповідно до залежності:

$$\delta_{BA2} = \frac{\delta_{B2} - \delta_{A2}}{\delta_{A2} + 1}. \quad (2.36)$$

Висновки. Нижче запропоновані варіанти висновків.

Простий висновок на основі табл. 2.7 або табл. 2.10 може бути сформульований наступним чином.

Приклад простого висновку. Аналіз послідовності різниць δ_{A1} , δ_{A2} , δ_{A3} показав, що їх значення за модулем не перевищують 10 % для всіх тонів, а поступово зростаюча послідовність $|\delta_{A1}|$, $|\delta_{A2}|$, $|\delta_{A3}|$ свідчить про недосконалість запропонованого методу приведення для розрахунку теоретичних власних частот для вищих тонів, де не враховані

додаткові фактори, такі як вплив пружної в'язі та інші види деформування.

Додатні величини δ_{A1} , δ_{A2} , δ_{A3} свідчать про те, що експериментальні власні частоти $\omega_{1,2,3}$ є меншими за відповідні теоретичні власні частоти λ_{A1} , λ_{A2} , λ_{A3} , які були розраховані за методом приведення, де не було враховано вплив маси пружної в'язі, що є свідченням правильності проведення експерименту, тому що в дійсній системі потенціальна енергія витрачається на роботу інерційних сил при поступовому та обертовому рухах елементарних мас пружної в'язі.

У цілому, експериментальні і відповідні теоретичні власні частоти добре корелюють між собою, навіть якщо вплив пружної в'язі не врахований, що свідчить про відносно задовільну реалізацію теоретичних основ розрахунку параметрів вільних коливань для систем зі скінченним числом ступенів свободи. Це дає змогу ще на стадії проєктування певної конструкції розраховувати частоти її вільних коливань із задовільною точністю для вищих тонів, щоб потім мати можливість уникати резонансу з робочими частотами механізмів і машин, які взаємодіють з даною конструкцією. Проте, для вищих тонів доведеться розширювати резонансну зону у зв'язку з погіршенням точності визначення власних теоретичних частот зі зростанням тону.

Щоб підвищити точність розрахунків власних частот, необхідно застосовувати більш складні теоретичні методи, враховувати вплив маси пружної в'язі та додаткові види деформування.

Формулювання більш складних висновків пов'язано з аналізом впливу маси пружної в'язі при оцінці точності розрахованих теоретичних власних частот. Наприклад, щоб сформулювати більш складні висновки, можна відповісти на наступні питання.

1. Як впливає врахування маси пружної в'язі на точність розрахунків теоретичних власних частот?

Приклад відповіді. Врахування впливу маси пружної в'язі наближає значення теоретичних власних частот до відповідних експериментальних власних частот. Про це свідчать відносні різниці $\delta_{Б1}$, $\delta_{Б2}$, $\delta_{Б3}$, з табл. 2.8 (або табл. 2.10), які за модулем є меншими за відповідні різниці $|\delta_{А1}|$, $|\delta_{А2}|$, $|\delta_{А3}|$. Тому що $\delta_{Б1}$, $\delta_{Б2}$, $\delta_{Б3}$ є результатом порівняння власних частот, які були розраховані з урахуванням впливу маси пружної в'язі, а $\delta_{А1}$, $\delta_{А2}$, $\delta_{А3}$ – без врахування. З указаного можна заключити, що врахування маси пружної в'язі, по-перше, дає більш точні значення розрахованих власних теоретичних частот, а по-друге, врахування маси пружної в'язі зменшує значення відповідних (за тонами) розрахованих власних частот у порівнянні з неврахуванням цієї маси (при порівнянні відповідних теоретичних частот між собою, які розраховані за різними методами).

Аналіз теоретичних методів розрахунку власних частот показав, що при збільшенні відношень зосереджених мас до маси пружної в'язі вплив останньої на частоти вільних коливань зменшується.

2. Як впливає маса пружної в'язі на власні теоретичні частоти зі зростанням тону?

Приклад відповіді. Поступово зростаюча послідовність різниць $||\delta_{А1}| - |\delta_{Б1}|| < ||\delta_{А2}| - |\delta_{Б2}|| < ||\delta_{А3}| - |\delta_{Б3}||$ свідчить про поступове збільшення впливу маси пружної в'язі на власні теоретичні частоти зі зростанням тону. Тому що для кожного наступного тону зі збільшенням частоти коливань збільшуються швидкості і прискорення матеріальних часток тіла. Це призводить відповідно до збільшення інерційних сил зі зростанням тону. Як наслідок для кожного наступного тону все більше потенціальної енергії витрачається на роботу інерційних сил і все менше потенціальної енергії залишається на рух зосереджених мас. Тобто інерційні сили пружної в'язі все більше відтягують на себе запас потенціальної енергії зі зростанням тону.

Інші формулювання висновків можуть бути запропоновані викладачем.

2.6 Порядок виконання роботи і оформлення звіту

При виконанні лабораторної роботи необхідно:

1. Вивчити і занотувати короткі теоретичні відомості за п. 2.1.
2. Ознайомитися з лабораторною установкою за п. 2.2, зробити її ескіз (рис. 2.2), позначити на ній та описати основні елементи, занотувати основні положення. Визначити основні вихідні параметри лабораторної установки та занести їх до табл. 2.1.
3. Розрахувати теоретичні власні частоти для перших трьох тонів за методами, заданими викладачем, з тих, які описані в п. 2.3 (або з інших джерел). Розрахунок власних частот для кожного тону рекомендується виконувати у формі табл. 2.4, 2.5.
4. Отримати й обробити віброграми вимушених коливань при резонансах згідно з п. 2.4 та на основі даних з неї визначити експериментальні власні частоти для кожного тону ГВК.
5. Порівняти відповідні (за тонами) значення теоретичних та експериментальних власних частот та зробити висновки згідно з рекомендаціями в п. 2.5.
6. Зробити висновки щодо вирішення всіх задач лабораторної роботи.
7. Оформити звіт згідно з нормативними положеннями, де відображені всі наведені вище пункти.

Питання для (само)перевірки та (само)контролю

1. Що таке система з декількома степенями свободи/вільності?
2. Що таке ГВК?
3. Що таке тон коливання?

4. Скільки тонів ГВК може бути у системи з 4-ма ступенями вільності?
5. Що таке форма коливань?
6. Основна властивість форм ГВК.
7. Наслідок для кінетичної енергії, яка впливає з основної властивості форм ГВК.
8. Наслідок для потенціальної енергії, яка впливає з основної властивості форм ГВК.
9. Як впливає маса пружної в'язі на теоретичну власну частоту (у порівнянні з неврахуванням цієї маси) зі збільшенням номеру тону ГВК: вплив маси збільшується, вплив маси зменшується, вплив маси не змінюється?
10. Як змінює врахування маси пружної в'язі власну теоретичну частоту (у порівнянні з неврахуванням цієї маси) зі збільшенням номеру тону ГВК: частота збільшується, частота зменшується, частота не змінюється?
11. Для якого тону ГВК вплив маси пружної в'язі на власну частоту буде сильнішим: для 1-го чи для 3-го?
12. Як змінюється коефіцієнт динамічності зі збільшенням номера тону ГВК: збільшується, зменшується, не змінюється?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Коливання пружних тіл з розподіленими масами

Мета роботи: теоретично й експериментально вивчити поведінку системи з розподіленими масами (тобто системи з нескінченним числом ступенів вільності) при вібрації, з метою набуття навичку теоретичного та експериментального визначення власних частот і форм систем з розподіленими масами.

Для досягнення вказаної мети в рамках виконання лабораторної роботи необхідно вирішити наступні задачі:

1) визначити власні частоти і форми вільних коливань 1-го, 2-го та 3-го тонів досліджуваної пружної системи з розподіленими масами, використовуючи задані викладачем теоретичні методи, таким чином отримавши *теоретичні власні частоти і форми*;

2) послідовно для кожного тону ГВК, з 1-го до 3-го, надати досліджуваній системі збуджуючу гармонічну силу, частота якої викликає резонанс системи, і записати відповідні віброграми вимушених коливань, з яких для кожного тону визначити *експериментальну власну частоту*; зафіксувати експериментальні форми вимушених коливань при резонансі для всіх тонів та порівняти їх з відповідними теоретичними власними формами; зробити висновки;

3) порівняти розраховані значення теоретичних власних частот з відповідними (за тонами) значеннями експериментальних власних частот, які були отримані з віброграм вимушених коливань при резонансах для перших трьох тонів ГВК і зробити висновки.

3.1 Короткі теоретичні відомості

3.1.1. Коливання тіл з розподіленими масами. Пружні тіла і системи, які складаються з сукупності пружних тіл, можна розглядати як такі, що складаються з нескінченної кількості зосереджених мас, поєднаних внутрішніми пружними в'язями, тобто такі системи мають нескінченне число ступенів вільності. Довільний коливальний рух пружного тіла можливо представити як суму нескінченно великого числа простих ГВК.

Кожне головне вільне коливання характеризується формою і відповідною їй частотою. Основна відмінність між формами коливань полягає в числі вузлів, тобто таких точок, ліній або поверхонь, які при коливаннях тіла залишаються нерухомими.

3.2 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка на рис. 3.1 представляє собою вільно обперту призматичну балку 2 прямокутного перерізу. На балці встановлений збудник коливань, який складається з ексцентрично закріпленої маси 3, що приводиться в рух електромотором 4. Вертикальна проєкція відцентрової сили, що з'являється при обертанні маси 3, створює гармонічну збуджуючу силу.

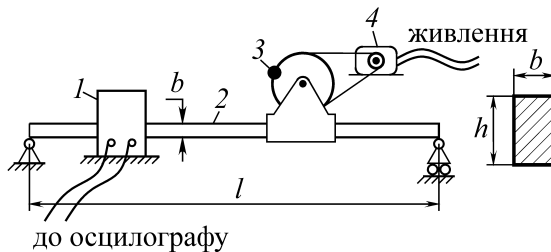


Рис. 3.1. Лабораторна установка

Змінюючи частоту збуджуючої сили ω , можливо послідовно викликати резонанс з першим, другим і т. д. тонами власних коливань балки. При цьому форма спостережуваних коливань буде практично співпадати з формою того тону, частота якого λ_n дорівнює частоті збуджуючої сили. Резонанс не спостерігається при $\omega = \lambda_n$ лише в тому випадку, якщо переріз співпадає з вузлом відповідної форми.

Для запису коливального процесу використовується електродинамічний датчик I , сигнал якого передається на гальванометр осцилографа. Паралельно на осцилограф подається сигнал відмітника часу.

Визначені параметри лабораторної установки необхідно занести до табл. 3.1 і провести там необхідні розрахунки.

Таблиця 3.1 – Параметри лабораторної установки

№	Найменування величини	Позначення	Значення
1	Довжина балки, м	l	
2	Маса ексцентрика, кг	m_0	
3	Плече ексцентрика, м	r_0	
4	Висота поперечного перерізу балки, мм	h	
5	Ширина поперечного перерізу балки, мм	b	
6	Площа поперечного перерізу, м ²	$F = bh \cdot 10^{-6}$	
7	Головний центральний момент інерції відносно осі, перпендикулярної до площини коливань, м ⁴	$I = \frac{hb^3}{12} \cdot 10^{-12}$	
8	Модуль пружності при розтягу матеріалу балки, Па	E	$2 \cdot 10^{11}$
9	Густина матеріалу балки (сталі), кг/м ³	ρ	7800
10	Розподілена маса балки (пружної в'язі), кг/м	$\mu = \rho F$	
11	Період роботи відмітника часу вібрографа, с	$\Delta\tau$	

3.3 Теоретичне визначення власних частот системи

3.3.1. Вільні коливання прямої призматичної балки. Розглянемо пружне тіло у вигляді балки (рис. 3.1), яка може згинатися у площині xOz .

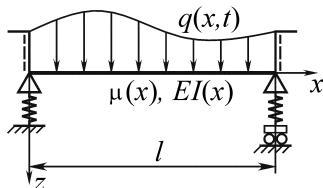


Рис. 3.2. Пружне тіло на прикладі балки

Диференціальне рівняння згину балки при дії на неї змінного в часі зовнішнього навантаження $q(x, t)$ та сил інерції мас $\left(-\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$ має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \mu(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (3.1)$$

Розв'язок диференціального рівняння (3.1) шукають методом розділення змінних, приймаючи функцію, що розшукується, у вигляді

$$w(x, t) = \varphi(x) \cdot T(t), \quad (3.2)$$

де $\varphi(x)$ – форма коливань;
 $T(t)$ – часова координата.

У випадку вільних коливань, коли $q(x, t) = 0$, підстановка розв'язку (3.2) в диференціальне рівняння (3.1) і розділення змінних призводить до двох диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \lambda^2 \mu \varphi &= 0; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \lambda^2 T &= 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (EI \varphi'')'' - \lambda^2 \mu \varphi &= 0; \\ \ddot{T} + \lambda^2 T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Для призматичної балки $EI(x) = EI = \text{const}$, $\mu(x) = \mu = \text{const}$ інтеграл (рішення) першого рівняння (3.3) можна записати у вигляді:

$$\varphi_n(x) = a_n \cdot \text{ch } k_n x + b_n \cdot \text{sh } k_n x + c_n \cdot \cos k_n x + d_n \cdot \sin k_n x, \quad (3.4)$$

де a_n, b_n, c_n, d_n – постійні інтегрування, які визначаються з граничних умов;

k_n – коефіцієнт, який визначається виразом:

$$k_n = \sqrt[4]{\frac{\mu \cdot \lambda_n^2}{EI}}. \quad (3.5)$$

Для зручності представимо вирази для похідних від (3.4):

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_n(x) &= a_n \cdot k_n \cdot \text{sh } k_n x + b_n \cdot k_n \cdot \text{ch } k_n x - c_n \cdot k_n \cdot \sin k_n x + d_n \cdot k_n \cdot \cos k_n x, \\ \varphi''_n(x) &= a_n \cdot k_n^2 \cdot \text{ch } k_n x + b_n \cdot k_n^2 \cdot \text{sh } k_n x - c_n \cdot k_n^2 \cdot \cos k_n x - d_n \cdot k_n^2 \cdot \sin k_n x, \\ \varphi'''_n(x) &= a_n \cdot k_n^3 \cdot \text{sh } k_n x + b_n \cdot k_n^3 \cdot \text{ch } k_n x + c_n \cdot k_n^3 \cdot \sin k_n x - d_n \cdot k_n^3 \cdot \cos k_n x. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Підпорядковуючи вираз (3.4) граничним умовам, у загальному випадку отримуємо систему однорідних рівнянь. Прирівнюючи визначник отриманих рівнянь до нуля та розкриваючи його, отримуємо характеристичне рівняння. З отриманого характеристичного рівняння, застосовуючи формулу (3.5), можливо знайти частоти вільних коливань. Продемонструємо це на наступному прикладі.

3.3.2. Визначення власних частот і форм для прямої призматичної балки на шарнірних опорах (рис. 3.3) з диференціального рівняння. Граничні умови для такої балки (рис. 3.3) запишуться у наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} EI(0)\varphi''(0) = 0 &\Rightarrow \varphi''(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \\ EI(l)\varphi''(l) = 0 &\Rightarrow \varphi''(l) = 0, \quad \varphi(l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

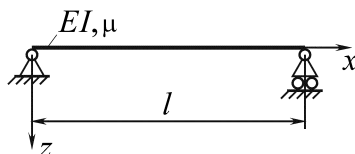


Рис. 3.3. Балка на шарнірних опорах

Підпорядковуючи вираз (3.4) граничним умовам (3.7) з використанням (3.6), отримаємо наступну систему однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \varphi''(0) = 0 &\Rightarrow a_n \cdot k_n^2 - c_n \cdot k_n^2 = 0, \\ \varphi(0) = 0 &\Rightarrow a_n + c_n = 0, \\ \varphi''(l) = 0 &\Rightarrow a_n \cdot k_n^2 \cdot \operatorname{ch} k_n l + b_n \cdot k_n^2 \cdot \operatorname{sh} k_n l - c_n \cdot k_n^2 \cdot \cos k_n l - d_n \cdot k_n^2 \cdot \sin k_n l = 0, \\ \varphi(l) = 0 &\Rightarrow a_n \cdot \operatorname{ch} k_n l + b_n \cdot \operatorname{sh} k_n l + c_n \cdot \cos k_n l + d_n \cdot \sin k_n l = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Оскільки $k_n \neq 0$, то з 1-го та 2-го рівнянь (3.8) можна встановити, що

$$a_n = 0, \quad c_n = 0, \quad (3.9)$$

а тому два останніх рівняння (3.8) переписуться у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} b_n \cdot k_n^2 \cdot \operatorname{sh} k_n l - d_n \cdot k_n^2 \cdot \sin k_n l &= 0, \\ b_n \cdot \operatorname{sh} k_n l + d_n \cdot \sin k_n l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Визначник системи (3.10) і відповідне характеристичне рівняння запишуться наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{k_n^2 \cdot \operatorname{sh} k_n l}{\operatorname{sh} k_n l} \right| \left| \frac{-k_n^2 \cdot \sin k_n l}{\sin k_n l} \right| &= 0 \Rightarrow k_n^2 \cdot \operatorname{sh} k_n l \cdot \sin k_n l + \\ + k_n^2 \cdot \sin k_n l \cdot \operatorname{sh} k_n l &= 0 \Rightarrow 2 \cdot k_n^2 \cdot \operatorname{sh} k_n l \cdot \sin k_n l = \\ = 0 \Rightarrow \sin k_n l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Останнє рівняння отримано з урахуванням того, що $k_n \neq 0$ і відповідно $\operatorname{sh} k_n l \neq 0$, а тому залишається, що лише складова $\sin k_n l$ може дорівнювати нулю.

Вирішуючи (останнє) тригонометричне рівняння (3.11), отримаємо власні частоти n -го тону коливань:

$$\left. \begin{aligned} \sin k_n l = 0 \Rightarrow k_n l = \pi n \Rightarrow k_n = \frac{\pi n}{l} \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{\mu \cdot \lambda_n^2}{EI}} &= \frac{\pi n}{l} \Rightarrow \\ \sqrt{\frac{\mu \cdot \lambda_n^2}{EI}} = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, & \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Власні форми коливань. Підставивши λ_n у (3.4) і врахувавши, що $a_n = b_n = c_n = 0$ ($b_n = 0$ отримується з 1-го або 2-го рівняння (3.10), бо $\sin k_n l = 0$, а праві частини вказаних рівнянь дорівнюватимуть нулю лише при $b_n = 0$, бо $k_n \neq 0$ і $\operatorname{sh} k_n l \neq 0$), отримаємо наступний вираз для n -ї форми власних коливань:

$$\varphi_n(x) = d_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.13)$$

де d_n – довільний коефіцієнт, який можна покласти рівним одиниці.

З формули (3.12) для власної частоти λ_n можна зробити висновок, що відношення двох послідовних частот вільних коливань

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2$$

менше одиниці і прагне до одиниці зі збільшенням номера частоти [1].

3.3.3. Визначення власних частот і форм згинальних коливань балки на рис. 3.3 за методом Релея-Рітца з урахуванням зсуву й інерції обертання поперечних перерізів. Форма коливань $\varphi(x)$ є сумою згинальної та зсувної складової, яка задається у вигляді

$$\varphi(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x), \quad (3.14)$$

де $\varphi_a(x)$, $\varphi_b(x)$ – відповідно згинальна та зсувна складові форми коливань.

Згинальна складова форми коливань $\varphi_a(x)$ повинна задовольняти кінематичним граничним умовам для обох шарнірів на торцях балки (рис. 3.3):

$$\varphi_a(0) = 0, \quad \varphi_a(l) = 0. \quad (3.15)$$

Форму для згинальної складової $\varphi_a(x)$, що задовольняє вказаним кінематичним ГУ (3.15), можна записати у вигляді ряду:

$$\varphi_a(x) = a_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l}. \quad (3.16)$$

Підставивши (3.16) у (3.15), можна впевнитися, що обрана форма згинальної складової задовольняє всім кінематичним ГУ:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a(0) = 0 &\Rightarrow a_1 \cdot \sin \frac{\pi \cdot 0}{l} + a_2 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot 0}{l} + a_3 \cdot \sin \frac{3\pi \cdot 0}{l} = 0; \\ \varphi_a(l) = 0 &\Rightarrow a_1 \cdot \sin \frac{\pi \cdot l}{l} + a_2 \cdot \sin \frac{2\pi \cdot l}{l} + a_3 \cdot \sin \frac{3\pi \cdot l}{l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Вимог для зсувної складової $\varphi_b(x)$ щодо задоволення граничним умовам у нашому випадку не висувається. Вважати-мемо, що зсувна складова повторює згинальну складову, тобто

$$\varphi_b(x) = b_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} + b_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l}. \quad (3.18)$$

Вирази для максимальної потенціальної $\Pi_{\max}$ і кінетичної $T_{\max}$ енергій мають вигляд:

$$\Pi_{\max} = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2}{dx^2} \varphi_a(x) \right)^2 dx + \frac{GF_{\text{пр}}}{2} \int_0^l \left(\frac{d}{dx} \varphi_b(x) \right)^2 dx, \quad (3.19)$$

$$T_{\max} = \frac{\lambda^2}{2} \mu \int_0^l (\varphi_a(x) + \varphi_b(x))^2 dx + \frac{\lambda^2}{2} I_{\mu} \int_0^l \left(\frac{d}{dx} \varphi_a(x) \right)^2 dx, \quad (3.20)$$

де $G = 7,7 \cdot 10^{10}$ Па – модуль зсуву для сталі;

$F_{\text{пр}}$ – приведена площа поперечного перерізу, яка працює на зріз і визначається залежністю

$$F_{\text{пр}} = \frac{F}{k}, \quad (3.21)$$

$F = b \cdot h$ – площа поперечного перерізу, визначена в п. 6 табл. 3.1;

$k = 1, 2$ – коефіцієнт форми прямокутного перерізу;

I_{μ} – головний центральний момент інерції розподілених мас (або погонний момент інерції мас) при обертанні поперечних перерізів, $(\text{кг/м}) \cdot \text{м}^2$, який визначається залежністю

$$I_{\mu} = \rho \cdot I, \quad (3.22)$$

У виразі для максимальної потенціальної енергії $\Pi_{\max}$ перша складова – це потенціальна енергія від згинальної, а друга – від зсувної складових деформації. У виразі для максимальної кінетичної енергії $T_{\max}$ перша складова – це кінетична енергія від поступального переміщення елементарних об'ємів балки, а друга складова враховує інерцію обертання поперечних перерізів балки, використовуючи кути повороту від форми коливань для згинальної складової.

Невідомі коефіцієнти a_i і b_i рядів (3.16), (3.18) для форм $\varphi_a(x)$ і $\varphi_b(x)$, які задіяні у виразах (3.19), (3.20), знайдуться з умов

$$\frac{\partial}{\partial a_i}(\Pi_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b_i}(\Pi_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.23)$$

Записуючи (3.23) у розгорнутому вигляді, отримаємо наступне:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1}(\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \left(\frac{1}{2} \frac{\pi^4 EI}{l^3} - \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 (2I_\mu \pi^2 + 2l^2 \mu)}{l} \right) \cdot a_1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \cdot b_1 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial a_2}(\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \left(\frac{8\pi^4 EI}{l^3} - \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 (8I_\mu \pi^2 + 2l^2 \mu)}{l} \right) \cdot a_2 - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \cdot b_2 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial a_3}(\Pi_{\max} - T_{\max}) &= \left(\frac{81\pi^4 EI}{2l^3} - \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 (18I_\mu \pi^2 + 2l^2 \mu)}{l} \right) \cdot a_3 - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \cdot b_3 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial b_1}(\Pi_{\max} - T_{\max}) &= -\frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \cdot a_1 + \left(\frac{1}{2} \frac{\pi^2 GF_{\text{нр}}}{l} - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \right) \cdot b_1 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial b_2}(\Pi_{\max} - T_{\max}) &= -\frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \cdot a_2 + \left(\frac{2\pi^2 GF_{\text{нр}}}{l} - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \right) \cdot b_2 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial b_3}(\Pi_{\max} - T_{\max}) &= -\frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \cdot a_3 + \left(\frac{9}{2} \frac{\pi^2 GF_{\text{нр}}}{l} - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l \right) \cdot b_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Обчислюючи визначник (3.24) та прирівнюючи його до нуля, отримаємо характеристичне рівняння, з якого знайдемо три власні частоти. Вищевказане реалізується наступним чином. Визначник системи (3.24) має вигляд:

$$\begin{vmatrix}
 c_{11} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2\mu l & 0 & 0 \\
 0 & c_{22} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2\mu l & 0 \\
 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2\mu l \\
 -\frac{1}{2}\lambda^2\mu l & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2\mu l & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2\mu l & 0 & 0 & c_{66}
 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.25)$$

де в (3.25) введені наступні позначення:

$$\left. \begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\pi^4 EI}{l^3} - \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 (2I_\mu \pi^2 + 2l^2 \mu)}{l}, & c_{22} &= \left(\frac{8\pi^4 EI}{l^3} - \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 (8I_\mu \pi^2 + 2l^2 \mu)}{l} \right), \\
 c_{33} &= \frac{81}{2} \frac{\pi^4 EI}{l^3} - \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 (18I_\mu \pi^2 + 2l^2 \mu)}{l}, \\
 c_{44} &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2 GF_{\text{нп}}}{l} - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l, & c_{55} &= \frac{2\pi^2 GF_{\text{нп}}}{l} - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l, & c_{66} &= \frac{9}{2} \frac{\pi^2 GF_{\text{нп}}}{l} - \frac{1}{2} \lambda^2 \mu l.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Розкриваючи визначник (3.25) і прирівнюючи його до нуля, отримаємо наступне характеристичне рівняння відносно власної частоти λ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{81}{4} \cdot \frac{\pi^6}{l^{12}} \cdot \left(\frac{p}{9} + 9u - q \right) \left(\frac{p}{4} + 4u - q \right) (p + u - q) &= 0, \\ p &= \lambda^2 \mu d l^4, \quad u = EF_{\text{np}} G l \pi^4, \quad q = \lambda^2 \pi^2 g l^2, \\ d &= I_{\mu} \lambda^2 - F_{\text{np}} G, \quad g = F_{\text{np}} G I_{\mu} + E I \mu. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Вирішуючи характеристичне рівняння (3.27), відбираємо три перших додатних корені, які будуть власними частотами вільних згинальних коливань балки з урахуванням зсуву й інерції обертання поперечних перерізів. Ці корені виглядають так:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= \sqrt{\frac{2\lambda_{0n}^2}{1 + \alpha_n + \beta_n + \sqrt{(1 + \alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n\beta_n}}}, \\ \lambda_{0n} &= \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \\ \alpha_n &= \frac{n^2}{G} \cdot \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot \frac{EI}{F_{\text{np}}}, \quad \beta_n = n^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot r}{l} \right)^2, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \infty, \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

де r – радіус інерції площі поперечного перерізу, який обчислюється за формулою:

$$r = \sqrt{\frac{I}{F}}. \quad (3.29)$$

З виразу (3.28) можна заключити, що врахування зсуву й інерції обертання поперечних перерізів зменшує частоти вільних коливань у порівнянні з власними частотами чисто згинальних коливань, визначених за (3.12).

Власні форми коливань. Власні вектори матриці, отриманої з системи (3.24) – це коефіцієнти a_k, b_k ($k = 1, 2, 3$) виразів (3.16), (3.18), сума яких становить вираз (3.14), який, у свою чергу, визначає власні форми коливань. Кожній власній частоті λ_i i -го тону відповідає свій набір коефіцієнтів a_k, b_k . Підставивши відповідні коефіцієнти a_k, b_k i -го тону в (3.16), (3.18), отримуємо власні форми коливань відповідного i -го тону, визначених виразом (3.14).

Далі з представленого методу отримані частоти вільних згинальних коливань розглядуваної балки на рис. 3.3 без урахування зсуву й інерції обертання поперечних перерізів і з розділним урахуванням вказаних факторів.

3.3.4. Обчислення власних частот згинальних коливань за методом Релея-Рітца для балки на рис. 3.3 лише від згину, без урахування додаткових факторів. У цьому випадку можна використовувати формули для власних частот (2.29) або (2.34), поклавши в них значення зосереджених мас $m = 0$. Зокрема власні частоти за (2.34) визначаються залежностями:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}} \approx 9,87 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}}; \\ \lambda_2 &= 4\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}} \approx 39,48 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}}; \\ \lambda_3 &= 9\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}} \approx 88,83 \sqrt{\frac{EI}{bl^3}}; \\ b &= \mu l + 4m. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Поклавши зосереджені маси m в (3.30) рівними нулю ($m = 0$), формули (3.30) переходять точно у формули (3.12), які для перших трьох тонів запишуться так:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \approx \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}; \\ \lambda_2 &= \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \approx \frac{39,48}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}; \\ \lambda_3 &= \frac{9\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \approx \frac{88,83}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Залежності (3.31) також можливо отримати з (2.29), поклавши в (2.29) $m = 0$.

3.3.5. Визначення власних частот згинальних коливань для балки на рис. 3.3 з урахуванням лише зсуву. Щоб врахувати лише зсув і не враховувати інерцію обертання поперечних перерізів, у виразі (3.20) для кінетичної енергії $T_{\max}$ другу складову, яка враховує інерцію обертання поперечних перерізів, слід покласти рівною нулю. В цьому випадку значення власних частот отримуватимуться за наступними виразами:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu(1+\alpha_n)}}, \quad \alpha_n = \frac{n^2}{G} \cdot \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot \frac{EI}{F_{\text{пр}}}, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \infty, \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Форма коливань у цьому випадку буде подібна до (3.13).

З виразу (3.32) можна заключити [1], що врахування зсуву зменшує частоти вільних коливань у порівнянні з власними частотами чисто згинальних коливань, визначених за (3.12),

причому цей вплив іноді значно більший за вплив інерції обертання, так як для тонкостінних балок

$$\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 \ll \frac{EI}{l^2 GF_{\text{пр}}}.$$

Основний вплив на зміну стрілок прогину при врахуванні зсуву повинна надавати зміна частотних характеристик стержня.

3.3.6. Визначення власних частот згинальних коливань для балки на рис. 3.3 з урахуванням лише інерції обертання поперечних перерізів. Щоб врахувати лише інерцію обертання поперечних перерізів і не враховувати вплив зсуву, у виразі (3.19) для потенціальної енергії Π_{max} другу складову, яка враховує зсув, слід покласти рівною нулю. При чому у виразах (3.19) і (3.20) необхідно враховувати лише згинальну складову форми коливань φ_a , нехтуючи зсувною складовою φ_b , тобто покладаючи $\varphi_b(x) = 0$. У цьому випадку значення власних частот отримуватимуться за наступними виразами:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu(1+\beta_n)}}, \quad \beta_n = n^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot r}{l}\right)^2, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \infty, \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Форма коливань у цьому випадку буде подібна до (3.13).

З виразу (3.33) можна заключити, що інерція обертання поперечних перерізів зменшує частоту вільних коливань у порівнянні з власними частотами чисто згинальних коливань, визначених за (3.12), причому цей вплив збільшується зі зростанням номера тону.

3.3.7. Обчислення власних частот досліджуваної системи за різними методами. Нижче в табл. 3.2–3.5 наведено форми розрахунків власних частот з використанням розглянутих методів.

Таблиця 3.2 – Теоретичні частоти λ чисто згинальних вільних коливань з п. 3.3.2 без урахування будь-яких додаткових факторів

№ тону	Формула теоретичної кругової частоти	Значення, рад/с
1	$\lambda_1 = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$	λ_{A1}
2	$\lambda_2 = \frac{39,48}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$	λ_{A2}
3	$\lambda_3 = \frac{88,83}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$	λ_{A3}

Таблиця 3.3 – Теоретичні частоти λ згинальних вільних коливань з п. 3.3.3 з урахуванням зсуву та інерції обертання поперечних перерізів

№ тону	Формула теоретичної кругової частоти	Значення, рад/с
1	$\lambda_1 = z \text{ (3.28) при } n = 1$	λ_{B1}
2	$\lambda_2 = z \text{ (3.28) при } n = 2$	λ_{B2}
3	$\lambda_3 = z \text{ (3.28) при } n = 3$	λ_{B3}

Таблиця 3.4 – Теоретичні частоти λ згинальних вільних коливань з п. 3.3.5 з урахуванням зсуву

№ тону	Формула теоретичної кругової частоти	Значення, рад/с
1	$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu(1+\alpha_1)}}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{EI}{F_{\text{пр}}}$	λ_{B1}
2	$\lambda_2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu(1+\alpha_2)}}, \quad \alpha_2 = \frac{4}{G} \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{EI}{F_{\text{пр}}}$	λ_{B2}
3	$\lambda_3 = \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu(1+\alpha_3)}}, \quad \alpha_3 = \frac{9}{G} \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{EI}{F_{\text{пр}}}$	λ_{B3}

Таблиця 3.5 – Теоретичні частоти λ згинальних вільних коливань з п. 3.3.6 з урахуванням інерції обертання поперечних перерізів

№ тону	Формула теоретичної кругової частоти	Значення, рад/с
1	$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu(1+\beta_1)}}, \quad \beta_1 = \left(\frac{\pi \cdot r}{l}\right)^2$	λ_{I1}
2	$\lambda_2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu(1+\beta_2)}}, \quad \beta_2 = 4 \left(\frac{\pi \cdot r}{l}\right)^2$	λ_{I2}
3	$\lambda_3 = \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu(1+\beta_3)}}, \quad \beta_3 = 9 \left(\frac{\pi \cdot r}{l}\right)^2$	λ_{I3}

Примітки.

1. Теоретичні власні частоти (розрахунок яких представлено в табл. 3.2–3.5), отримані на основі методу Релея-Рітца, могли бути б отримані з рівняння Лагранжа 2-го роду.

2. Для контролю та перевірки результатів обчислень з табл. 3.2–3.5 у додатку А в розділі «Для лабораторної

роботи № 3» представлені числові розрахунки для певних фіксованих параметрів системи.

3.3.8. Власні форми коливань. Власна форма згинальних коливань, яка отримана аналітично, визначається виразом (3.13), а власну форму згинальних коливань з урахуванням зсуву й інерції обертання поперечних перерізів найзручніше визначати числовими методами, знаходячи власні вектори матриці, отриманої з системи (3.24), як про це було вказано в п. 3.3.3. Власні форми коливань при окремому врахуванні зсуву і/або інерції обертання поперечних перерізів подібні до (3.13). Власні форми коливань, які отримані згідно з теоретичними розрахунками, представлені на рис. 3.4.

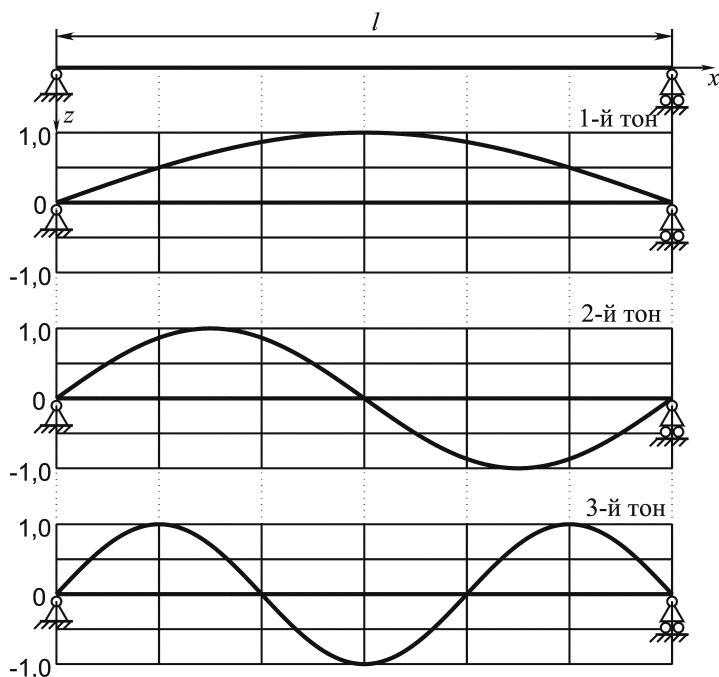


Рис. 3.4. Форми ГVK балки з розподіленими масами

Форми ГВК, які були отримані на основі різних теоретичних методів, будуть мало відрізнятися одна від одної, але загальні форми і кількості напівхвиль для i -х тонів будуть такими, як це показано на рис. 3.4.

3.4 Визначення параметрів вібрації з віброграми вимушених коливань

Впевнившись у нормальній роботі окремих вузлів установки, необхідно приступити до запису вимушених коливань системи. Запис вимушених коливань для певного тону проводиться пристроєм запису – осцилографом на основі сигналу від електродинамічного датчика I (див. рис. 3.1) або безпосередньо підключеним вібрографом або осцилографом у точці закріплення датчика I . Послідовно підвищуючи оберти збудника коливань 3, 4 (рис. 3.1) і добиваючись резонансу з першим, другим та третім тонами ГВК, провести запис вимушених коливань і зафіксувати (замалювати, сфотографувати тощо) власну форму для кожного з тонів. Резонанс досягається шляхом експериментального підбору такої дійсної частоти збудника коливань 3, 4 (рис. 3.1), коли досягається найбільший розмах / амплітуда з усіх можливих точки балки, де закріплений датчик I . Після закінчення запису необхідних віброграм виключити збудник коливань 4 і пристрій запису коливань.

Отримані віброграми обробляють згідно з методиками, які викладені в лабораторній роботі № 1. Обробку даних з отриманих віброграм вимушених коливань можна оформити за табл. 3.6.

Власні форми, які були отримані під час експерименту, повинні бути подібними до тих, що представлені на рис. 3.4.

Таблиця 3.6 – Розрахунок параметрів вимушеної вібрації при резонансі

№	Назва величини	Формула або позначення	Значення для <i>i</i> -го тону		
			1	2	3
1	Довжина ділянки <i>a</i> , мм	<i>a</i>	з рис. 1.7	з рис. 1.7	з рис. 1.7
2	Кількість інтервалів <i>r</i>	<i>r</i>	з рис. 1.7	з рис. 1.7	з рис. 1.7
3	Довжина ділянки <i>b</i> , мм	<i>b</i>	з рис. 1.7	з рис. 1.7	з рис. 1.7
4	Кількість коливань <i>s</i>	<i>s</i>	з рис. 1.7	з рис. 1.7	з рис. 1.7
5	Експериментальна власна частота, Гц, із віброграми вимушених коливань при резонансі	$f = f_e = \frac{a \cdot s}{b \cdot r} \cdot \frac{1}{\Delta \tau}$			
6	Кругова частота збуджуючої сили, рад/с	$\omega = 2\pi f$			
7	Експериментальний період коливань із віброграми вимушених коливань, с	$T_e = \frac{1}{f}$			

Висновок у цьому розділі може бути сформульовано наступним чином.

Приклад висновку. Під час експериментального дослідження вимушених коливань було послідовно досягнуто резонансу для всіх перших трьох тонів ГВК, записані відповідні віброграми і графічно зафіксовані експериментальні форми коливань перших трьох тонів ГВК, які відповідають теоретичним формам на рис. 3.4.

3.5 Порівняння власних теоретичних та експериментальних частот

Вважається, що кругова частота ω збуджуючої сили з п. 6 табл. 3.6 при резонансі системи є експериментальною власною частотою. При виконанні порівнянь теоретичні власні частоти слід відносити до відповідних (за тонами) експериментальних власних частот. Порівняння експериментальних частот з теоретичними можливо провести у формі, яка запропонована в табл. 3.7–3.10. Таблиць, подібних до табл. 3.7–3.10, буде стільки, скільки методів встановлено викладачем для розрахунку власних частот.

Таблиця 3.7 – Порівняння з частотами з табл. 3.2

№ тону <i>i</i>	Експериментальна власна частота ω , рад/с (п. 6 табл. 3.6)	Теоретична власна частота λ , рад/с (з табл. 3.2)	Розходження δ у порівнянні з експериментальною власною частотою, %, $\delta = \frac{\lambda - \omega}{\omega} 100\%$
1	ω_1	λ_{A1}	δ_{A1}
2	ω_2	λ_{A2}	δ_{A2}
3	ω_3	λ_{A3}	δ_{A3}

Таблиця 3.8 – Порівняння з частотами з табл. 3.3

№ тону <i>i</i>	Експериментальна власна частота ω , рад/с (п. 6 табл. 3.6)	Теоретична власна частота λ , рад/с (з табл. 3.3)	Розходження δ у порівнянні з експериментальною власною частотою, %, $\delta = \frac{\lambda - \omega}{\omega} 100\%$
1	ω_1	λ_{B1}	δ_{B1}
2	ω_2	λ_{B2}	δ_{B2}
3	ω_3	λ_{B3}	δ_{B3}

Таблиця 3.9 – Порівняння з частотами з табл. 3.4

№ тону i	Експериментальна власна частота ω , рад/с (п. 6 табл. 3.6)	Теоретична власна частота λ , рад/с (з табл. 3.4)	Розходження δ у порівнянні з експе- риментальною влас- ною частотою, %, $\delta = \frac{\lambda - \omega}{\omega} 100\%$
1	ω_1	λ_{B1}	δ_{B1}
2	ω_2	λ_{B2}	δ_{B2}
3	ω_3	λ_{B3}	δ_{B3}

Таблиця 3.10 – Порівняння з частотами з табл. 3.5

№ тону i	Експериментальна власна частота ω , рад/с (п. 6 табл. 3.6)	Теоретична власна частота λ , рад/с (з табл. 3.5)	Розходження δ у порівнянні з експе- риментальною влас- ною частотою, %, $\delta = \frac{\lambda - \omega}{\omega} 100\%$
1	ω_1	λ_{I1}	δ_{I1}
2	ω_2	λ_{I2}	δ_{I2}
3	ω_3	λ_{I3}	δ_{I3}

Порівняння частот можна виконувати і в іншій формі, як це, наприклад, показано в табл. 3.11 і 3.12 нижче. В табл. 3.11 виписані власні теоретичні та експериментальні частоти, а в табл. 3.12 наведені відповідні відносні різниці δ_{ji} між ними, які у свою чергу визначаються залежністю:

$$\delta_{ji} = \frac{\lambda_{ji} - \omega_i}{\omega_i} 100\%, \quad (3.34)$$

де j – номер або позначення теоретичного методу розрахунку власних частот у табл. 3.11, 3.12;

i – номер тону.

Таблиця 3.11 – Виписані власні частоти для порівняння

№ методу або спостере- ження j	Джерело отримання частоти	Позна- чення	Номер тону i		
			1	2	3
Експериментальні власні частоти					
1	Експериментальна власна частота, рад/с	ω	ω_1	ω_2	ω_3
Теоретичні власні частоти					
A	3 табл. 3.2 (лише згин, без додаткових факторів)	λ_A	λ_{A1}	λ_{A2}	λ_{A3}
B	3 табл. 3.3 (зсув + інерція обертання)	λ_B	λ_{B1}	λ_{B2}	λ_{B3}
B	3 табл. 3.4 (зсув)	λ_B	λ_{B1}	λ_{B2}	λ_{B3}
Γ	3 табл. 3.5 (інерція обертання)	λ_Γ	$\lambda_{\Gamma 1}$	$\lambda_{\Gamma 2}$	$\lambda_{\Gamma 3}$

Таблиця 3.12 – Порівняння частот відповідно до табл. 3.11

№ порів- няння j	З яким теоретичним мето- дом порівнюється власна експериментальна частота?	Позна- чення	Номер тону i		
			1	2	3
A	3 табл. 3.2 (без додаткових факторів)	δ_A	δ_{A1}	δ_{A2}	δ_{A3}
B	3 табл. 3.3 (зсув + інерція обертання)	δ_B	δ_{B1}	δ_{B2}	δ_{B3}
B	3 табл. 3.4 (зсув)	δ_B	δ_{B1}	δ_{B2}	δ_{B3}
Γ	3 табл. 3.5 (інерція обертання)	δ_Γ	$\delta_{\Gamma1}$	$\delta_{\Gamma2}$	$\delta_{\Gamma3}$

Ознакою правильності проведення експерименту і виконаних розрахунків є виконання нерівностей: $|\delta_{Ai}| > |\delta_{Bi}|$, $|\delta_{Ai}| > |\delta_{Bi}|$, $|\delta_{Ai}| > |\delta_{\Gamma i}|$, $\lambda_{Ai} > \omega_i$, де i – номер тону.

Під точністю розрахунків власних теоретичних частот необхідно розуміти відповідні різниці за модулем між

значеннями теоретичних і експериментальних власних частот. Чим менше вказані різниці, тим точнішим є розрахунок.

Висновки. Нижче запропоновані варіанти висновків.

Слід зауважити, що в цьому випадку ми маємо справу з системою з розподіленими масами, де сама пружна в'язь є об'єктом дослідження і висновки не можуть бути скопійовані з попередньої лабораторної роботи, хоча будуть схожими в загальному плані. Простий висновок на основі табл. 3.7 або табл. 3.12 може бути сформульований наступним чином.

Приклад простого висновку. *Аналіз послідовності різниць δ_{A1} , δ_{A2} , δ_{A3} показав, що їх значення за модулем не перевищують 10 % для всіх тонів, а поступово зростаюча послідовність $|\delta_{A1}|$, $|\delta_{A2}|$, $|\delta_{A3}|$ свідчить про недосконалість запропонованого методу (3.12) для розрахунку теоретичних власних частот вільних згинальних коливань балки для вищих тонів, де не враховані додаткові види деформування та руху.*

В цілому, експериментальні і відповідні теоретичні власні частоти добре корелюють між собою, навіть якщо врахована лише згинальна складова, що свідчить про відносно задовільну реалізацію теоретичних основ розрахунку параметрів вільних коливань для систем з нескінченним числом ступенів свободи. Це дає змогу ще на стадії проєктування певної конструкції розраховувати частоти її вільних коливань із задовільною точністю для вищих тонів, щоб потім мати можливість уникати резонансу з робочими частотами механізмів і машин, які взаємодіють з даною конструкцією. Проте для вищих тонів доведеться розширювати резонансну зону, у зв'язку з погіршенням точності визначення власних теоретичних частот зі зростанням тону.

Щоб підвищити точність розрахунків власних частот, необхідно застосовувати більш складні теоретичні методи, враховувати вплив додаткових видів деформування та руху, таких як, наприклад, зсув та обертання поперечних перерізів.

Формулювання більш складних висновків пов'язано з аналізом впливу додаткових видів деформування і руху при оцінці точності розрахованих теоретичних власних частот. Наприклад, щоб сформулювати більш складні висновки, можна відповісти на наступні питання.

1. Як впливає врахування зсуву на теоретичні власні частоти?

Приклад відповіді. *Так як різниці $|\delta_{B1}|$, $|\delta_{B2}|$, $|\delta_{B3}|$ менші за відповідні різниці $|\delta_{A1}|$, $|\delta_{A2}|$, $|\delta_{A3}|$, то це означає, що врахування зсуву уточнює значення розрахованих теоретичних власних частот і наближає їх до відповідних (за тонами) експериментальних власних частот.*

2. Як змінюється вплив зсуву зі зростанням номера тону на частоти власних теоретичних коливань?

Щоб відповісти на це питання, необхідно розрахувати послідовність різниць $\{||\delta_{A1}| - |\delta_{B1}||; ||\delta_{A2}| - |\delta_{B2}||; ||\delta_{A3}| - |\delta_{B3}||\}$. Якщо ця послідовність різниць є поступово зростаючою, то це свідчить про поступове збільшення впливу зсуву на теоретичні власні частоти зі зростанням тону у порівнянні з неврахуванням впливу зсуву. Поступово спадаюча послідовність свідчить про протилежне. Тому що δ_{Ai} розраховані для частот, які обчислені без урахування зсуву, а δ_{Bi} – з урахуванням зсуву.

3. Як впливає врахування поєднання зсуву та інерції обертання поперечних перерізів на частоти теоретичних власних коливань?

Приклад відповіді. *Так як різниці $\{|\delta_{B1}|, |\delta_{B2}|, |\delta_{B3}|\}$ менші за відповідні різниці $\{|\delta_{A1}|, |\delta_{A2}|, |\delta_{A3}|\}$, $\{|\delta_{B1}|, |\delta_{B2}|, |\delta_{B3}|\}$, $\{|\delta_{G1}|, |\delta_{G2}|, |\delta_{G3}|\}$, то це означає, що врахування зсуву й інерції обертання поперечних перерізів ще більше уточнює значення теоретичних власних частот (у порівнянні з відповідними теоретичними власними частотами, де врахована лише згинальна складова або згинальна складова і зсув), ще більше наближаючи їх до значень відповідних експериментальних власних частот.*

Додаткові питання можуть бути сформульовані таким чином: а) як змінюється вплив чисто інерції обертання поперечних перерізів зі зростанням номера тону на частоти власних теоретичних коливань; б) який фактор впливає на частоти теоретичних власних коливань сильніше: зсув чи інерція обертання перерізів тощо. Щоб відповісти на них, треба використовувати хоча б метод Релея-Рітца, описаний у п. 3.3.5.

Інші формулювання висновків можуть бути запропоновані викладачем.

3.6 Порядок виконання роботи і оформлення звіту

У процесі виконання лабораторної роботи необхідно:

1. Вивчити і занотувати короткі теоретичні відомості за п. 3.1 і п. 3.3.2.

2. Ознайомитися з лабораторною установкою за п. 3.2, зробити її ескіз (рис. 3.1), позначити на ній та описати основні елементи, занотувати основні положення. Визначити основні вихідні параметри лабораторної установки та занести їх до табл. 3.1.

3. Розрахувати теоретичні власні частоти для перших трьох тонів за методами, що були задані викладачем, з тих, які описані в п. 3.3, (або з інших джерел). Розрахунок власних частот для кожного тону рекомендується виконувати у формі табл. 3.2, 3.3, 3.4, 3.5.

4. Отримати і обробити віброграми вимушених коливань при резонансі згідно п. 3.4 та на основі даних з неї визначити експериментальні власні частоти для кожного тону ГВК.

5. Порівняти відповідні (за тонами) значення теоретичних та експериментальних власних частот та зробити висновки згідно з рекомендаціями в п. 3.5.

6. Зробити висновки щодо вирішення всіх задач лабораторної роботи.

7. Оформити звіт відповідно до нормативних положень, де відображені всі наведені пункти.

Питання для (само)перевірки та (само)контролю

1. Що таке система з розподіленими масами?
2. Що таке система з нескінченним ступенем вільності?
3. Як впливає зсув на частоту вільних коливань балки?
4. Як змінюється вплив зсуву на власну частоту балки зі зростанням тону?
5. Як впливає врахування інерції обертання перерізів на власну частоту балки?
6. Як змінюється вплив інерції обертання поперечних перерізів на власну частоту балки зі зростанням тону?
7. Як впливає на власну частоту врахування зсуву й інерції обертання поперечних перерізів?

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коливання стержнів, пластин та оболонок [Електронний ресурс] : підручн. для студ. спец. 131 «Прикладна механіка» / А. Є. Бабенко, О. О. Боронко, Я. І. Лавренко, С. І. Трубачев ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Електронні текстові дані (1 файл: 10,28 Мбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 252 с.
2. Ковальов О. С. Малі коливання. І. Лінійні коливання : навч.-метод. посіб. / О. С. Ковальов, О. В. Єзерська, З. О. Майзеліс, Т. С. Чебанова. Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. 112 с.
3. Анісімов І. О. Коливання та хвилі : навч. посібник. К. : КНУ ім. Тараса Шевченка, 2001. 218 с.
4. Справочник по строительной механике корабля : в трех томах. Т. 3. Динамика и устойчивость корпусных конструкций / Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. Л. : Судостроение, 1982. 320 с.
5. Дідковський В. С., Дрозденко К. С. Основи аналітичної механіки та теорії коливань : підручник. К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 149 с.
6. Основи теорії коливань та стійкості рухомого складу : навч. посібник / О. В. Устенко, Р. І. Візник, А. О. Ловська та ін. Харків : УкрДУЗТ, 2021. 129 с., рис. 78, табл. 1.

ДОДАТОК

Контроль та перевірка правильності обчислень

Для лабораторної роботи № 1. Для перевірки правильності та контролю застосовуваних виразів слід орієнтуватися на наступне. Наприклад, якщо мається сталевая призматична балка на рис. 1.3, з прямокутним поперечним перерізом $h \times b = 10 \times 5$ мм, де площа становить $F = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, а момент інерції $I = 1,0417 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4$, з густиною матеріалу (сталі) $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, модулем пружності при розтягу $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ і довжиною балки $l = 1,2 \text{ м}$, розподілена маса балки $\mu = 0,39 \text{ кг/м}$. Зосереджена маса $m = 0,7 \text{ кг}$. Тоді при вказаних параметрах частоти вільних коливань повинні отримуватися такими, які наведені в табл. А.1.

Таблиця А.1 – Частота вільних коливань 1-го тону для перевірки / підтвердження формул для схеми на рис. 1.3

№ методу j	Назва теоретичного методу	Позначення	Значення
A	За методом приведення без урахування маси балки, з табл. 1.2 за формулою (1.18), (1.19),	λ_A	7,188
B	За методом Релея-Рітца, з табл. 1.3 за формулою (1.29)	λ_B	6,680
B	За методом фіктивного навантаження, з табл. 1.4 за формулою (1.34)	λ_B	6,682

Для лабораторної роботи № 2. Для перевірки правильності та контролю застосовуваних виразів, слід орієнтуватися на наступне. Наприклад, якщо мається система з 3-ма ступенями вільності, яка реалізована у вигляді балки із зосередженими масами (рис. 2.3), з прямокутним поперечним перерізом $h \times b = 10 \times 5$ мм, де площа становить $F = 50 \cdot 10^{-6}$ м², а момент інерції $I = 1,0417 \cdot 10^{-10}$ м⁴, з густиною матеріалу (сталі) $\rho = 7800$ кг/м³, модулем пружності при розтягу $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па і довжиною балки $l = 1,2$ м, розподілена маса балки $\mu = 0,39$ кг/м. Три зосереджені маси кожна по $m = 0,7$ кг. Тоді при вказаних параметрах частоти вільних коливань повинні отримуватися такими, які наведені в табл. А.2, табл. А.3.

Таблиця А.2 – Частоти вільних коливань для перевірки / підтвердження формул для схеми на рис. 2.3, а (крайні маси відстоять на 1/6 від торців)

№ методу <i>j</i>	Назва теоретичного методу	Позначення	Номер тону <i>i</i>		
			1	2	3
А	З табл. 2.4, (без урахування маси пружної в'язі)	λ_A	23,6	91,5	149,4
Б	З табл. 2.5, (з урахуванням маси пружної в'язі)	λ_B	21,4	85,5	142,8

Таблиця А.3 – Частоти вільних коливань для перевірки / підтвердження формул для схеми на рис. 2.3, б (крайні маси відстоять на 1/4 від торців)

№ методу <i>j</i>	Назва теоретичного методу	Позначення	Номер тону <i>i</i>		
			1	2	3
А	З табл. 2.4, (без урахування маси пружної в'язі)	λ_A	20,5	81,3	172,7
Б	З табл. 2.5, (з урахуванням маси пружної в'язі)	λ_B	19,0	75,8	170,6

Для лабораторної роботи № 3. Для перевірки правильності та контролю застосовуваних виразів слід орієнтуватися на наступне. Наприклад, якщо мається сталева призматична балка на рис. 3.3 з поперечним перерізом двотавра № 60 за ГОСТ 8239–72, де площа становить $F = 138 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, а момент інерції $I = 76806 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, з густиною матеріалу (сталі) $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, модулем пружності при розтягу $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, модулем зсуву $G = 7,7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ і довжиною балки $l = 4 \text{ м}$. При цьому коефіцієнт форми поперечного перерізу становить

$$k = \frac{F}{(60 \cdot 1,2) \cdot 10^{-4}} = 1,917, \text{ приведена площа поперечного пере-}$$

різу $F_s = 72 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, розподілена маса балки $\mu = 107,64 \text{ кг/м}$, момент інерції розподілених мас за (3.22) $I_\mu = 5,99 (\text{кг/м}) \cdot \text{м}^2$. Тоді при вказаних параметрах частоти вільних коливань повинні отримуватися такими, які наведені в табл. А.4.

Таблиця А.4 – Частоти вільних коливань для перевірки / підтвердження формул для балки на рис. 3.3

№ методу <i>j</i>	Назва теоретичного методу	Позна- чення	Номер тону <i>i</i>		
			1	2	3
<i>A</i>	З табл. 3.2, (без додатко- вих факторів)	λ_A	737	2948	6632
<i>B</i>	З табл. 3.3, (зсув + інерція обертання)	λ_B	673	2217	4059
<i>B</i>	З табл. 3.4, (зсув)	λ_B	681	2272	4163
<i>Г</i>	З табл. 3.5, (інерція обертання)	λ_Γ	725	2764	5797

ЗМІСТ

Анотація / Abstract	3
Прийняті скорочення та пояснення	5
Лабораторна робота № 1	
Коливання системи з одним ступенем вільності	6
1.1 Короткі відомості з теорії.....	7
1.2 Описання лабораторної установки.....	12
1.3 Теоретичне визначення частоти 1-го тону вільних коливань досліджуваної системи.....	14
1.3.1. Визначення власних частот за методом приведення (без урахування маси балки).....	15
1.3.2. Визначення власних частот за методом Релея-Рітца (з урахуванням маси пружної в'язі – балки).....	17
1.3.3. Визначення власних частот за методом Релея 2-го типу або за методом фіктивного навантаження (з урахуванням маси пружної в'язі – балки).....	21
1.3.4. Обчислення власних частот 1-го тону вільних коливань системи за різними методами.....	23
1.3.5. Форма вільних коливань.....	24
1.4 Визначення параметрів вібрації з віброграми вільних затухаючих коливань.....	25
1.4.1. Обробка віброграми.....	25
1.4.2. Отримання віброграми вільних затухаючих коливань та експериментальне визначення параметрів вібрації з неї.....	27

1.5	Визначення параметрів вібрації з віброграми вимушених коливань.....	29
1.5.1.	Запис віброграми вимушених коливань.....	29
1.5.2.	Обробка віброграми вимушених коливань і визначення з неї параметрів вібрації.....	29
1.6	Порівняння власної експериментальної і теоретичних частот.....	33
1.7	Вивчення гідропружних коливань.....	36
1.7.1.	Короткі вихідні положення щодо гідропружних коливань.....	36
1.7.2.	Отримання віброграми вільних затухаючих коливань з наявним опором та експериментальне визначення параметрів вібрації з неї.....	37
1.7.3.	Порівняння частот вільних коливань при відсутності та наявності додаткового опору.....	38
1.7.4.	Перевірка теорії звичайних лінійних коливань щодо можливості її застосування для вивчення гідропружних коливань.....	39
1.7.5.	Визначення приєднаної маси впливу рідини на власну частоту.....	40
1.8	Порядок виконання роботи й оформлення звіту.....	41

Лабораторна робота № 2

Коливання систем з декількома ступенями вільності.....45

2.1	Короткі відомості з теорії.....	46
2.1.1.	Вільні коливання системи з n ступенями вільності	46
2.1.2.	Вільні коливання системи з 3-ма ступенями вільності.....	49
2.2	Описання лабораторної установки.....	50
2.3	Теоретичне визначення власних частот системи.....	52
2.3.1.	Розрахунок власних частот за методом приведення (без урахування маси пружної в'язі – балки).....	52

2.3.2. Розрахунок власних частот за методом Релея-Рітца (з урахуванням маси пружної в'язі – балки).....	57
2.3.3. Обчислення власних частот досліджуваної системи за різними методами.....	63
2.3.4. Власні форми коливань.....	67
2.4 Визначення параметрів вібрації з віброграми вимушених коливань.....	69
2.5 Порівняння власних теоретичних і експериментальних частот.....	71
2.6 Порядок виконання роботи і оформлення звіту.....	76

Лабораторна робота № 3

Коливання пружних тіл з розподіленими масами.....	78
3.1 Короткі теоретичні відомості.....	79
3.1.1. Коливання тіл з розподіленими масами.....	79
3.2 Опис лабораторної установки.....	79
3.3 Теоретичне визначення власних частот системи.....	81
3.3.1. Вільні коливання прямої призматичної балки.....	81
3.3.2. Визначення власних частот і форм для прямої призматичної балки на шарнірних опорах (рис. 3.3) з диференціального рівняння.....	83
3.3.3. Визначення власних частот і форм згинальних коливань балки на рис. 3.3 за методом Релея-Рітца з урахуванням зсуву й інерції обертання поперечних перерізів.....	85
3.3.4. Обчислення власних частот згинальних коливань за методом Релея-Рітца для балки на рис. 3.3 лише від згину, без урахування додаткових факторів.....	90
3.3.5. Визначення власних частот згинальних коливань для балки на рис. 3.3 з урахуванням лише зсуву.....	91
3.3.6. Визначення власних частот згинальних коливань для балки на рис. 3.3 з урахуванням лише інерції обертання поперечних перерізів.....	92

3.3.7. Обчислення власних частот досліджуваної системи за різними методами.....	93
3.3.8. Власні форми коливань.....	95
3.4 Визначення параметрів вібрації з віброграми вимушених коливань.....	96
3.5 Порівняння власних теоретичних та експериментальних частот.....	98
3.6 Порядок виконання роботи і оформлення звіту.....	103
Список використаної літератури.....	105
Додаток. Контроль та перевірка правильності обчислень.....	106

НОТАТКИ

НОТАТКИ

НОТАТКИ

Навчальне видання

СОКОВ Валерій Миколайович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**Методичні вказівки до виконання лабораторних
та розрахунково-графічних робіт
з розділу «Коливання пружних систем»
дисципліни «Будівельна механіка корабля»**

Комп'ютерне верстання *Н. М. Ковальчук*
Коректор *О. Є. Вакула*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 6,74. Вид. № 17. Зам. № 1210-87.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54007
E-mail: publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.