

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

А. Н. КУЗНЕЦОВ, А. Л. ЧОРНЫЙ

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Справочное пособие

Рекомендовано Методическим советом НУК

Николаев • НУК • 2012

УДК 517(075.8)

ББК 22.1я73

К 89

Авторы:

А. Н. Кузнецов, кандидат физико-математических наук,
профессор НУК;

А. Л. Чорный, преподаватель кафедры высшей математики

Рецензент Е. Ю. Неделько, кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики.

Рекомендовано методическим советом НУК

Кузнецов А. Н.

К 89 Графики функций : справочное пособие / А. Н. Кузнецов,
А. Л. Чорный. – Николаев : НУК, 2012. – 138 с.

Данный справочник ставит целью систематизировать методы построения графиков функций с привлечением методов высшей математики. Анализируется построение графиков функций, заданных явно и неявно, в декартовых и полярных координатах, в параметрической форме. Даны для справок графики наиболее распространенных специальных функций, а также функций заданных через пределы и интегралы.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей и молодых преподавателей.

**УДК 517 (076)
ББК 22.1**

© Кузнецов А. Н., Чорный А. Л., 2012

©Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова, 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди различных способов задания функции графический наиболее распространен, особенно в инженерной практике. Справочной же литературы, достаточно полно освещающей вопросы исследования функций и построения их графиков, причем с применением методов высшей математики, мало.

Данное справочное пособие ставит перед собой задачу систематизировать методы построения графиков функций с привлечением высшей математики. Подробно анализируется построение графиков функций, заданных явно и неявно, в декартовых, полярных координатах и параметрической форме. Отдельные параграфы посвящены построению графиков некоторых специальных функций, наиболее часто используемых в инженерной практике, а также графикам функций, заданных через пределы или интегралы.

В конце приводится перечень наиболее часто встречающихся на практике функций и их графики.

В условиях перехода в обучении на кредитно-модульную систему обучения данное пособие будет полезно студентам и молодым преподавателям.

§1. ОБЩЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ЛИНИЙ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Общий план исследования функции $y = f(x)$ и построения графиков

Под полным исследованием функции обычно понимают:

- 1) нахождение области существования функции и точек её разрыва, поведение функции вблизи точек разрыва;
- 2) исследование функции на экстремум, отыскание экстремальных значений функции, отыскание интервалов возрастания и убывания функции;
- 3) нахождение точек перегиба функции, областей выпуклости и вогнутости графика функции;
- 4) нахождение асимптот графика функции (обозначены пунктиром).

Для большей точности эскиза графика рекомендуется построить еще и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции.

На основании проведенного исследования строится график функции.

Примечание 1. Если исследуемая функция $y = f(x)$ - четная, т.е. если $f(-x) = f(x)$, то достаточно исследовать функцию и построить ее график при положительных значениях аргумента из области существования функции. При отрицательных значениях аргумента график функции строится на том основании, что график четной функции симметричен относительно оси ординат.

Примечание 2. Если функция $y = f(x)$ - нечетная, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то эту функцию достаточно исследовать при положительных значениях аргумента. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примечание 3. Иногда порядок исследования выбирают исходя из конкретных особенностей данной функции.

В задачах 1-66 провести полное исследование функций, заданных в декартовых координатах уравнениями $y = f(x)$, и начертить их графики.

1. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет, функция всюду непрерывна.

2. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. $y' = 0$

при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ - стационарные точки. Определяем интервалы возрастания и убывания функции:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$	$y_{\min} = y(-1) = -0,5$; $y_{\max} = y(1) = 0,5$.
y'	-	0	+	0	-	
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

3. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. $y'' = 0$ при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:

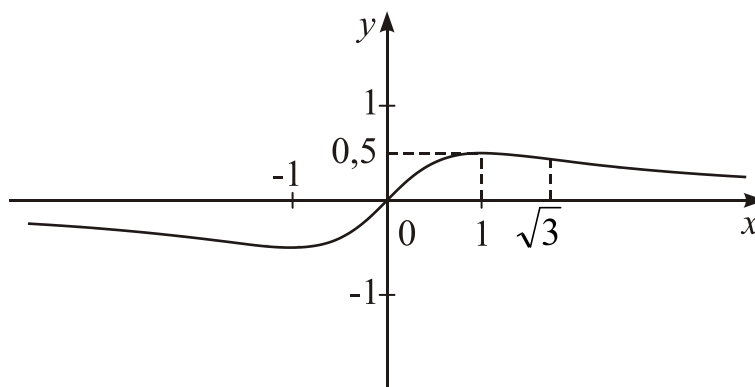
x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$	$y(-\sqrt{3}) = -0,43$; $y(0) = 0$; $y(\sqrt{3}) = 0,43$.
y''	-	0	+	0	-	0	+	
y	$\cap$	пер.	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$	

4. Асимптоты кривой. Так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, то $y = 0$ - горизонтальная асимптота; наклонных асимптот нет.

5. Учтем, что данная функция нечетная и найдем ее значения в нескольких дополнительных точках:

x	0,5	2,5	4	6
y	0,4	0,34	0,24	0,16

6. Строим график функции:



2. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. $x = \pm 1$ - точки разрыва второго рода. Находим $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$. Следовательно, прямые $x = \pm 1$ - вертикальные асимптоты.

2. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$. $y' = 0$ при $x = 0$ - стационарная точка:

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$	$y_{\min} = y(0) = 1$.
y'	-	-	0	+	+	
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	

3. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

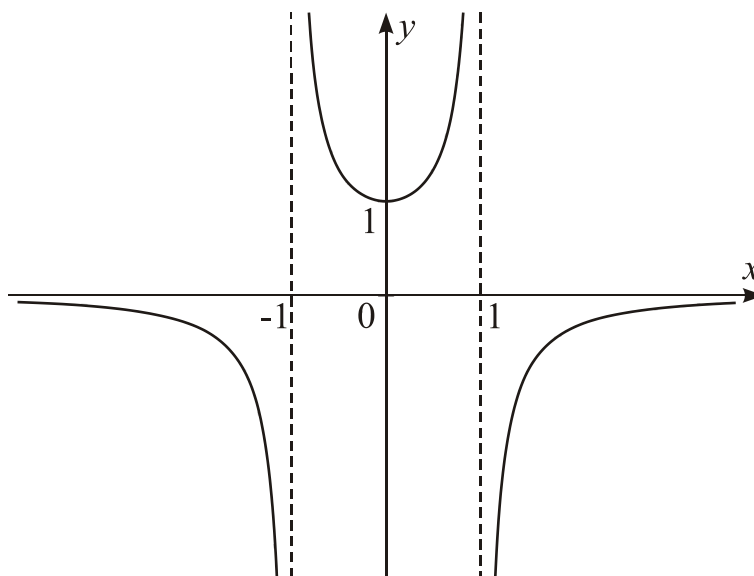
x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$
y''	-	+	-
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$

4. Асимптоты кривой. Так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$, то, $y = 0$ - горизонтальная асимптота кривой; наклонных асимптот нет.

5. Учитывая, что данная функция четная, найдем ее значения в нескольких дополнительных точках:

x	0,5	2	3	4
y	1,333	-0,333	-0,125	-0,067

6. Строим график функции:



3. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. $x = \pm 1$ - точки разрыва второго рода. Находим $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty. \quad \text{Следовательно, прямые}$$

$x = \pm 1$ - вертикальные асимптоты.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$. $y' < 0$

для $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Точек экстремума нет и функция на всей числовой оси убывающая.

4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \quad y'' = 0 \text{ при } x = 0:$$

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
y''	-	+	0	-	+
y	$\cap$	$\cup$	пер.	$\cap$	$\cup$

$$y_{\text{пер}}(0) = 0.$$

5. Асимптоты кривой:

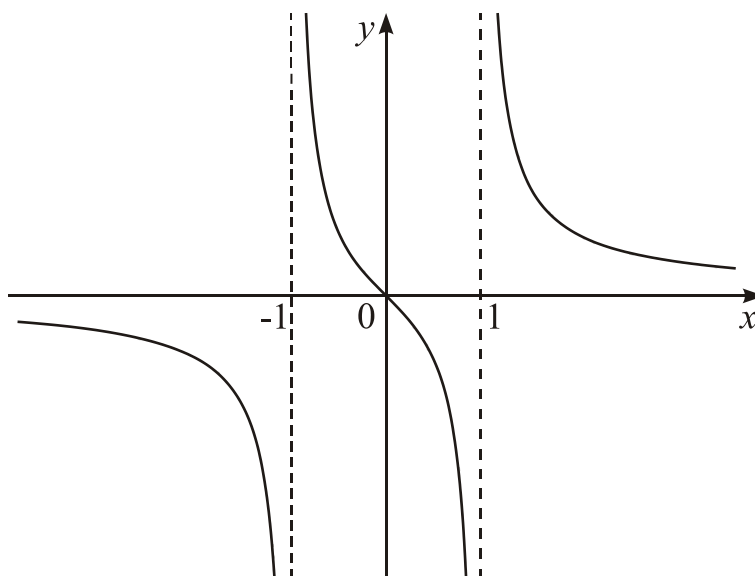
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$, следовательно, $y = 0$ - горизонтальная асимптота кривой;

наклонных асимптот нет.

6. Учитывая, что данная функция нечетная, найдем ее значения в нескольких дополнительных точках:

x	0,5	1,5	3	4
y	-0,667	1,2	0,375	0,267

7. Строим график функции:



$$4. y(x-1)(x-2)(x-3) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

2. $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ - точки разрыва второго рода. Находим

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = +\infty.$$

Указанные прямые - вертикальные асимптоты.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = -\frac{3x^2 - 12x + 11}{((x-1)(x-2)(x-3))^2}$,

$3x^2 - 12x + 11 = 0$, $x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1,42$; $x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 2,58$ - стационарные точки.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 1,42)$	1,42	$(1,42; 2)$	$(2; 2,58)$	2,58	$(2,58; 3)$	$(3; \infty)$
y'	-	-	0	+	+	0	-	-
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$

$$y_{\min} = y\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6; \quad y_{\max} = y\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6.$$

4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = 2 \cdot \frac{6x^4 - 48x^3 + 141x^2 - 180x + 85}{((x-1)(x-2)(x-3))^3}.$$

Так как уравнение $6x^4 - 48x^3 + 141x^2 - 180x + 85 = 0$ действительных корней не имеет, то $y'' \neq 0$.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$	$(3; +\infty)$
y''	-	+	-	+
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

5. Асимптоты кривой:

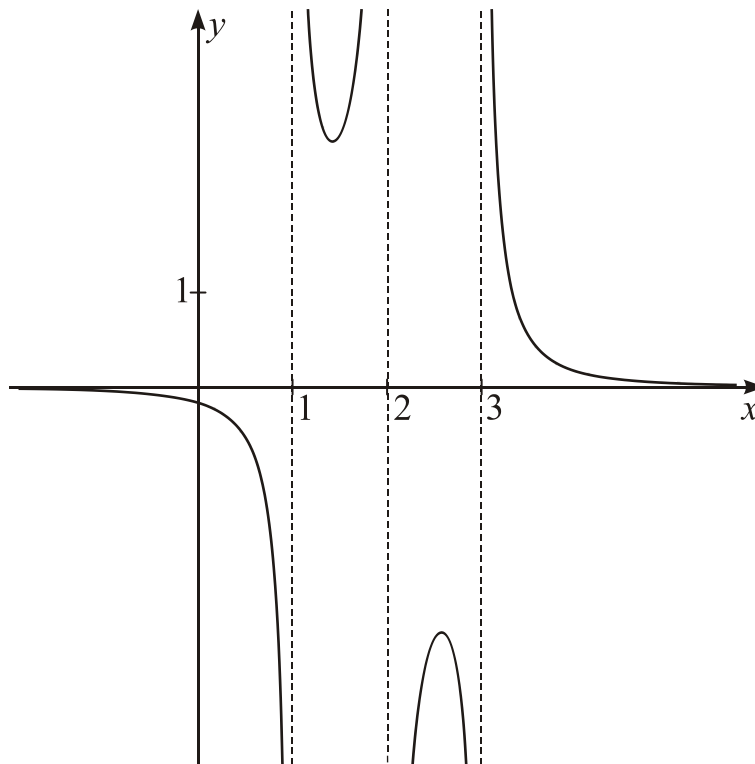
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 0, \text{ следовательно, } y = 0 \text{ - горизонтальная асимптота}$$

кривой. Наклонных асимптот нет.

6. Найдем значения в нескольких дополнительных точках:

x	0	1,25	1,75	2,25	2,75	4
y	-0,16	3,05	4,27	-4,27	-3,05	0,16

7. Строим график функции



5. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. $x = \pm 1$ - точки разрыва второго рода. Находим

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Указанные прямые - вертикальные асимптоты.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$. $y'(0) = 0$.

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	0	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
y'	+	+	0	-	-
y	↗	↗	max	↘	↘

$$y_{\max} = y(0) = 0.$$

4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба: $y'' = \frac{2 + 6x^2}{(x^2 - 1)^3}$.

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$
y''	+	-	+
y	∪	∩	∪

5. Асимптоты кривой:

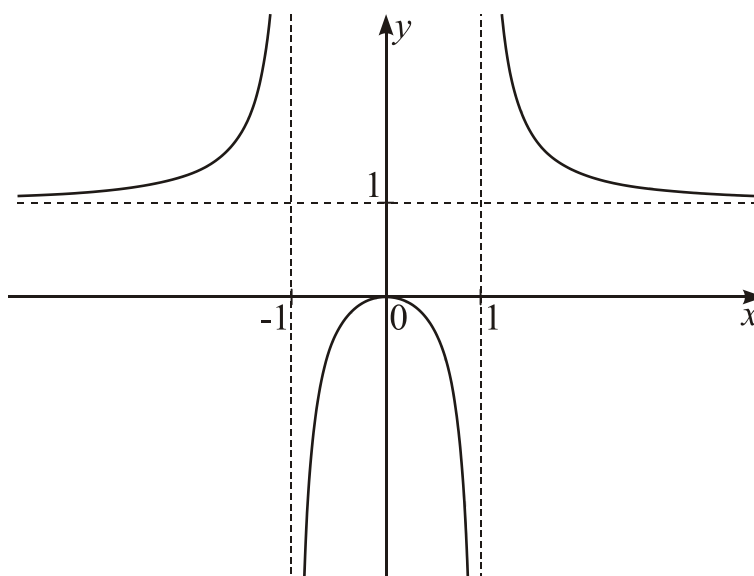
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$, следовательно, $y = 1$ является горизонтальной асимптотой,

причем, очевидно, при $x < -1$ и $x > 1$ $y = \frac{x^2}{x^2 - 1} > 1$ и кривая лежит над асимптотой.

6. Учитывая, что данная функция нечетная, найдем ее значения в нескольких дополнительных точках:

x	0,5	1,5	2
y	-0,33	1,8	1,33

7. Строим график функции



6. $y = (x^2 - 1)^3$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. При $x = 0$ $y = -1$, при $y = 0$ $x = \pm 1$.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = 6x(x^2 - 1)^2$. $y' = 0$ при $x = 0$, $x = \pm 1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
y'	-	0	-	0	+	0	+
y	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

$y_{\min} = y(0) = -1$.

4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1). \quad y'' = 0 \text{ при } x = \pm 1, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \approx \pm 0,45.$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; -0,45)$	$-0,45$	$(-0,45; 0,45)$	$0,45$	$(0,45; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$

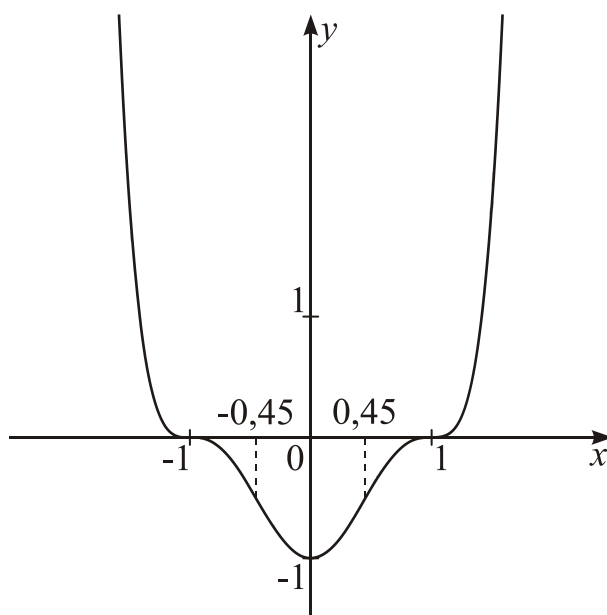
$$y_{\text{пер}}(-1) = 0, \quad y_{\text{пер}}(1) = 0, \quad y_{\text{пер}}(\pm 0,45) = -0,5.$$

5. Асимптот нет.

6. Учитывая, что данная функция четная, найдем ее значения в нескольких дополнительных точках:

x	0,5	1,5	2
y	-0,42	1,95	27

7. Строим график функции



$$7. \quad y = 32x^2(x^2 - 1)^3.$$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y = 0$ при $x = 0$, $x = \pm 1$.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = 64x(x^2 - 1)^2(4x^2 - 1)$.

$y' = 0$ при $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 0,5$.

В силу четности функции исследуем характер ее поведения только для следующих значений x -ов:

x	$(-0,5;0)$	0	$(0;0,5)$	0,5	$(0,5;1)$	1	$(1;\infty)$	$y_{\max} = y(0) = 0;$ $y_{\min} = y(\pm 0,5) = -\frac{27}{8} = -3,375.$
y'	+	0	-	0	+	0	+	
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	

4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба.

$$y'' = 64(x^2 - 1)(28x^4 - 17x^2 + 1). \quad y'' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1, \quad x = \pm \sqrt{\frac{17 - \sqrt{177}}{56}} \approx \pm 0,74,$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{17 - \sqrt{177}}{56}} \approx \pm 0,26.$$

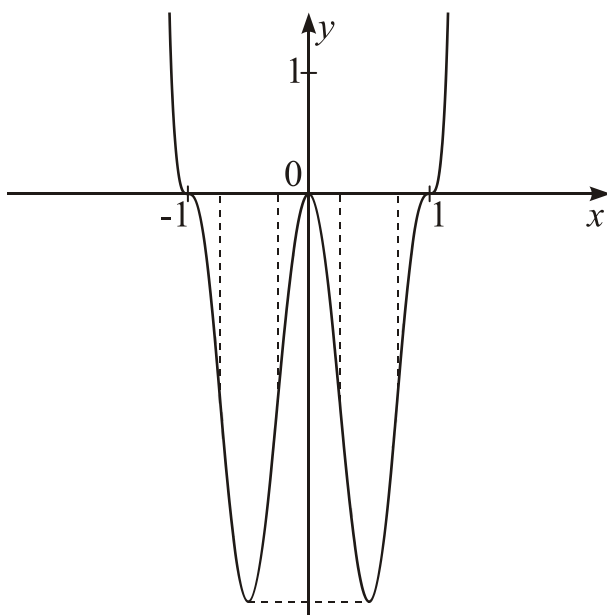
x	$(-0,26;0,26)$	0,26	$(0,26;0,74)$	0,74	$(0,74;1)$	1	$(1;+\infty)$	$y_{\text{пер}}(\pm 0,26) = -1,72,$
y''	-	0	+	0	-	0	+	$y_{\text{пер}}(\pm 0,74) = -1,67,$
y	$\cap$	пер.	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$	$y_{\text{пер}}(\pm 1) = 0.$

5. Асимптот нет.

6. Дополнительные точки:

x	0,2	1,5
y	-1,32	140,6

7. Строим график функции



8. $y = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} \right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} \right) = +\infty$. Следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = -\frac{1}{x^2} + x$. $y'(1) = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	-	0	+
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\min} = y(1) = \frac{3}{2} = 1,5.$$

4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба: $y'' = \frac{2}{x^3} + 1$.

$y'' = 0$ при $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1,26$.

x	$(-\infty; -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}; 0)$	$(0; +\infty)$
y''	+	0	-	+
y	$\cup$	пер.	$\cap$	$\cup$

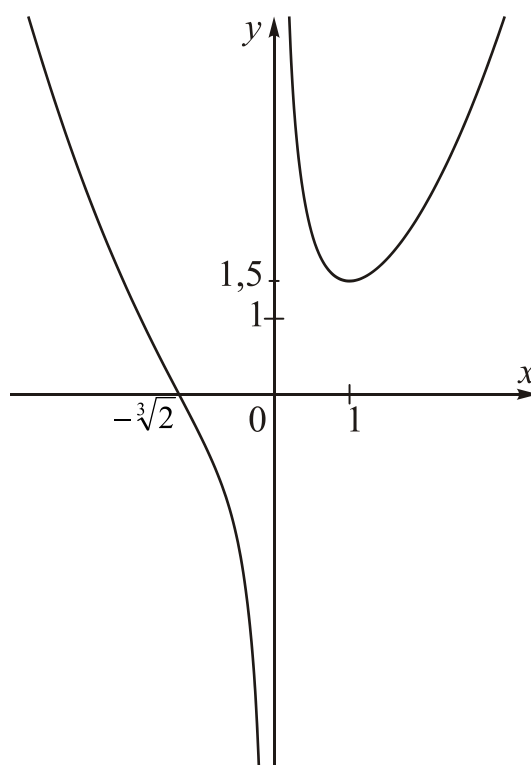
$$y_{\text{пер}} = y(-\sqrt[3]{2}) = 0.$$

5. Асимптоты кривой: $x = 0$ - вертикальная асимптота. Наклонных асимптот нет.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	-2	-1	-0,5	0,5	2
y	1,5	-0,5	-1,875	2,125	2,5

7. Строим график функции



9. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right) = +\infty$. Следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота.

Функция четная.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = x - \frac{1}{x^3} = \frac{x^4 - 1}{x^3}$. $y' = 0$

при $x = \pm 1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	0	+	-	0	+
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\min} = y(\pm 1) = 1.$$

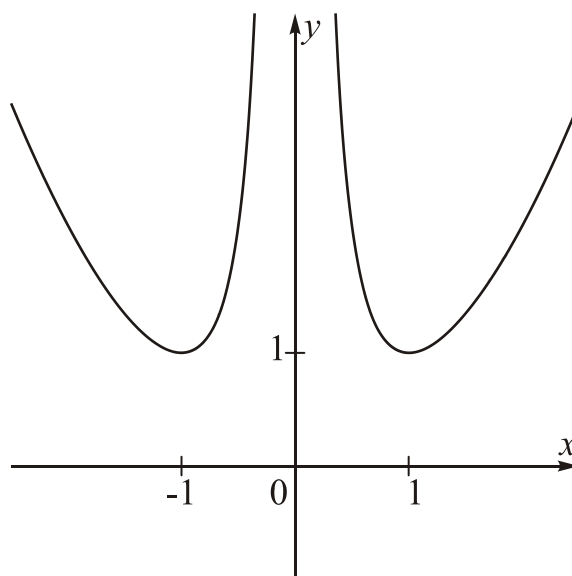
4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба: $y'' = 1 + \frac{3}{x^4}$.

$y'' > 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, т.е. кривая всюду вогнута.

5. Учитывая, что данная функция четная, найдем ее значения в нескольких дополнительных точках:

x	0,25	0,5	0,75	1,5	2	3
y	8,03	2,16	1,17	1,35	2,13	4,56

6. Строим график функции



10. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. $x = 0,5$ - точка пересечения с осью Ox .

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty$. Следовательно, $x = 1$ - вертикальная асимптота.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$. Следовательно, $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$. $y'(0) = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
y'	-	0	+	-
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\searrow$

$y_{\min} = y(0) = -1$.

4. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$y'' = 2 \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^4}$. $y'' = 0$ при $x = -0,5$.

x	$(-\infty; -0,5)$	-0,5	$(-0,5; 1)$	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+	+
y	$\cap$	пер.	$\cup$	$\cup$

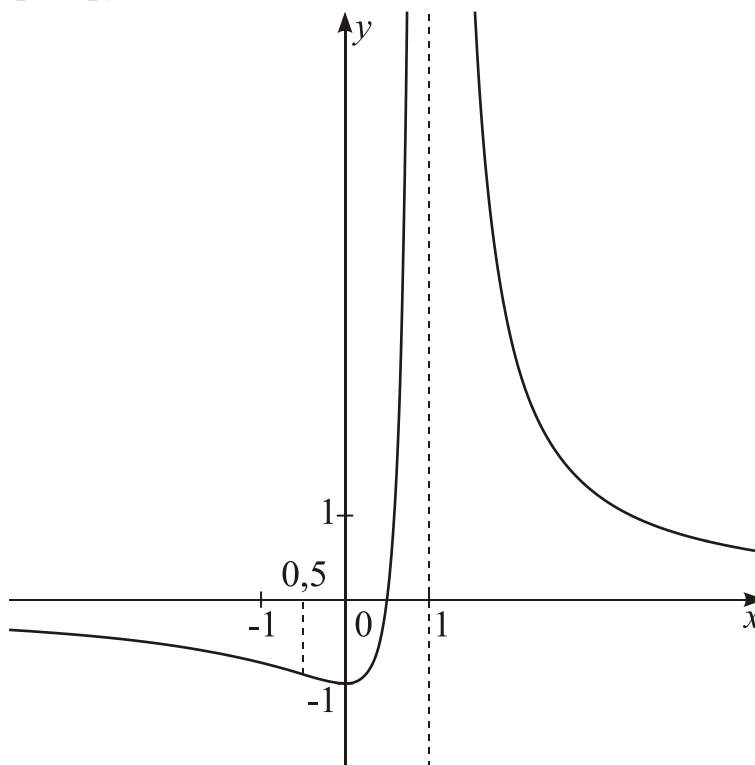
$y_{\text{пер}} = -0,89$.

5. Наклонных асимптот нет.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	-3	-2	-1	0,75	1,5	2	3
y	-0,44	-0,56	-0,75	8	8	3	1,25

7. Строим график функции



$$11. y = \frac{x^3}{3-x^2}.$$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

$$2. \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Следовательно, $x = \pm\sqrt{3}$ - вертикальные асимптоты графика функции.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$. $y' = 0$ при

$x = \pm 3$. Функция нечетная, $y(0) = 0$.

x	$(0; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+	+	0	-
y	↗	↗	max	↘

$$y_{\max} = y(3) = -4,5,$$

$$y_{\min} = y(-3) = 4,5.$$

4. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}. \quad y'' = 0 \text{ при } x = 0.$$

x	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
y''	-	0	+	+
y	∩	пер.	∪	∪

$$y_{\text{пер}} = y(0) = 0.$$

5. Асимптоты кривой: уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$, где

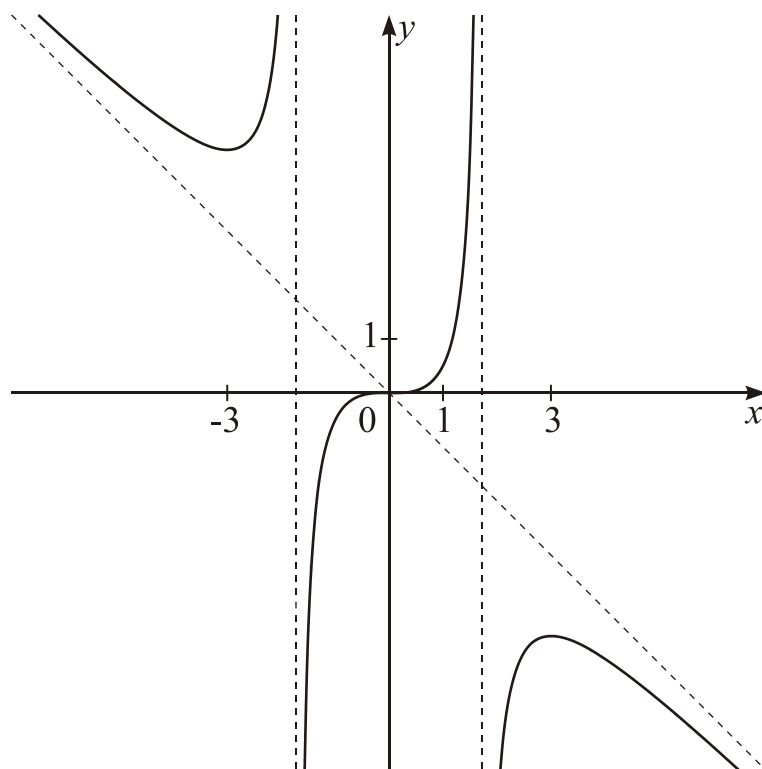
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

$y = -x$ - наклонная асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,5	1	2	4	5
y	0,05	0,5	-8	-4,92	-5,68

7. Строим график функции



12. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$

2. $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty;$ $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$ Следовательно, $x = -1$ -

вертикальная асимптота.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$ $y' = 0$ при

$x = 0$ и $x = -3.$

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	-	+	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$

$$y_{\max} = y(-3) = -\frac{27}{8} = -3,375.$$

4. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$
 $y'' = 0$ при $x = 0.$

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	-	-	0	+
y	$\cap$	$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(0) = 0.$$

5. Асимптоты кривой: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}$;

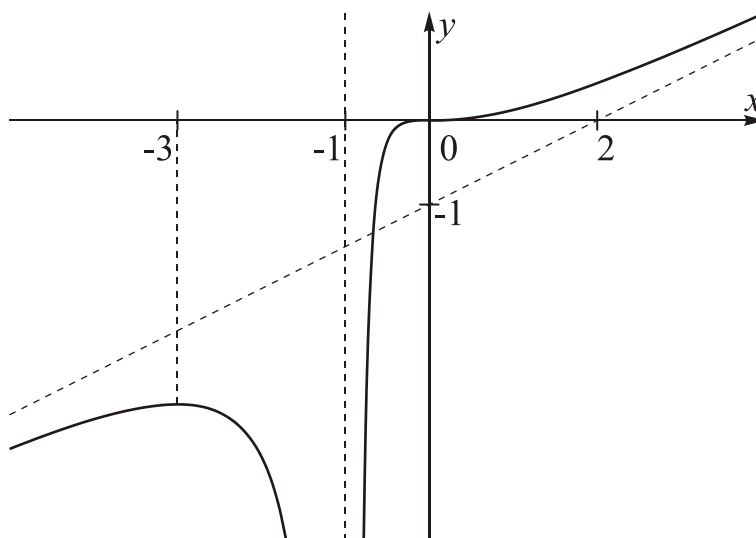
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = -1.$$

$y = \frac{1}{2}x - 1$ - наклонная асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	-4	-2	-0,5	1	2	3
y	-3,56	-4	-0,25	0,125	0,44	0,84

7. Строим график функции



13. $9y(x-1) = 4x^3$.

1. $y = \frac{4x^3}{9(x-1)}$. Область определения функции: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{4x^2(2x-3)}{9(x-1)^2}$. $y' = 0$ при

$x = 0$ и $x = \frac{3}{2}$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$
y'	-	0	-	-	0	+
y	$\searrow$		$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{\min} = y\left(\frac{3}{2}\right) = 3.$

3. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:
 $y'' = \frac{8x(x^2 - 3x + 3)}{9(x-1)^3}$. Так как уравнение $x^2 - 3x + 3 = 0$ не имеет действительных корней, то $y'' = 0$ только при $x = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$	$y_{\text{пер}} = y(0) = 0$.
y''	+	0	-	+	
y	∪	пер.	∩	∪	

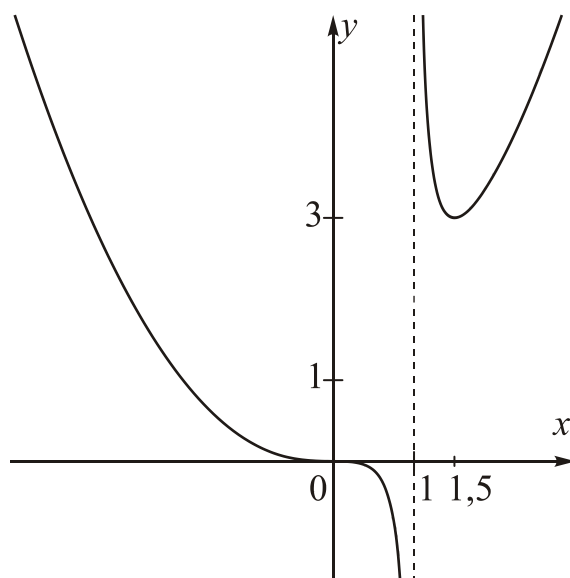
4. Асимптоты кривой: $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{4x^3}{9(x-1)} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{4x^3}{9(x-1)} = +\infty$. Следовательно,

$x = 1$ - вертикальная асимптота.

5. Значения функции в дополнительных точках.

x	-3	-2	-1	0	2	3
y	3	1,185	0,222	0	3,556	6

6. Строим график функции



14. $y(x^3 - 1) = x^4$.

1. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$. Область определения функции: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty$. Следовательно, $x = 1$ - вертикальная асимптота.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2}$. $y' = 0$ при

$x = 0$ и $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; \sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4}; +\infty)$
y'	+	0	-	-	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max} = y(0) = 0;$$

$$y_{\min} = y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{4}}{3} \approx 2,12.$$

4. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}. \quad y'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = -\sqrt[3]{2} \approx -1,26.$$

x	$(-\infty; -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
y''	+	0	-	0	-	+
y	$\cup$	пер.	$\cap$		$\cap$	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{3} \approx -0,84.$$

5. Асимптоты кривой:

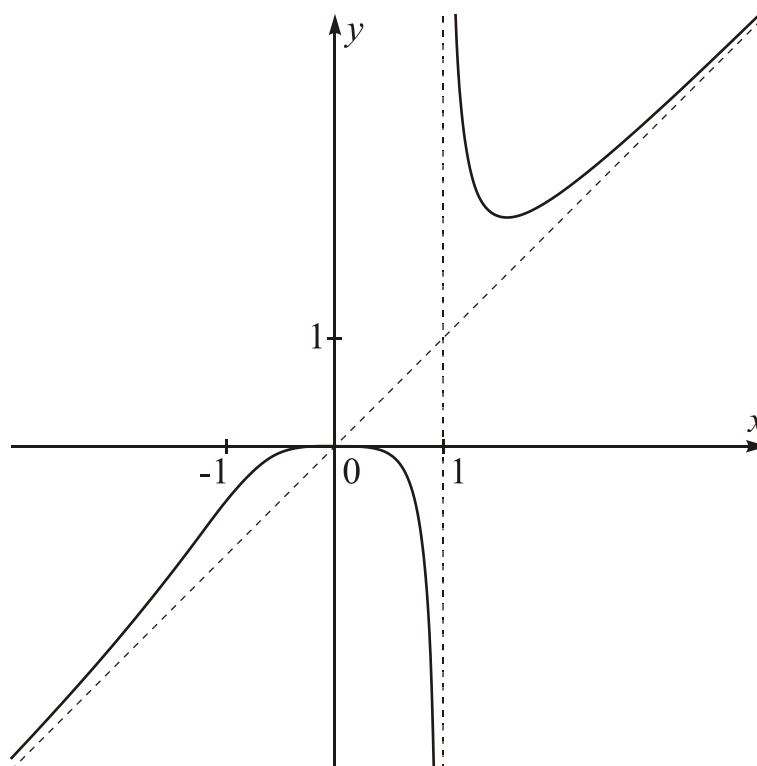
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) = 0.$$

$y = x$ - наклонная асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	-3	-2	-1	0,5	2	3
y	-2,89	-1,78	-0,5	-0,07	2,28	3,12

7. Строим график функции



15. $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$

2. $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} = +\infty.$ $x = -1$ - вертикальная асимптота.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{(x-1)(5-x)}{(x+1)^4}.$ $y' = 0$ при

$x = 1$ и $x = 5.$

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	1	(1; 5)	5	$(5; +\infty)$	
y'	-	-	0	+	0	-	$y_{\max} = y(5) = \frac{2}{27} \approx 0,074;$
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	$y_{\min} = y(1) = 0.$

4. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$y'' = \frac{2(x^2 - 10x + 13)}{(x+1)^5}.$ $y'' = 0$ при $x = 5 - 2\sqrt{3} \approx 1,54$ и $x = 5 + 2\sqrt{3} \approx 8,46.$

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1,54)$	1,54	(1,54; 8,46)	8,46	$(8,46; +\infty)$	
y''	-	+	0	-	0	+	$y(1,54) = 0,03;$
y	$\cap$	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$	$y(8,46) = 0,065.$

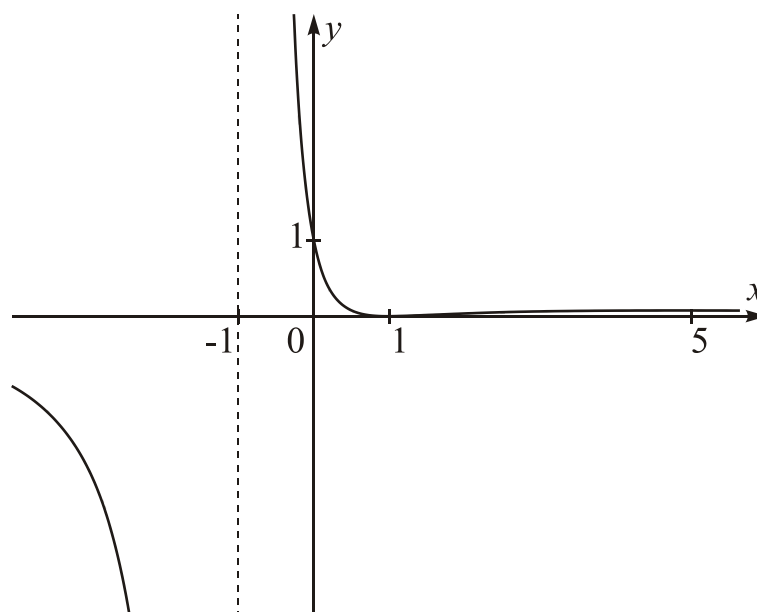
5. Асимптоты кривой:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	-3	-2	-0,25	0	0,5	2	3
y	-2	9	3,70	1	0,07	0,04	0,06

7. Строим график функции



16. $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$

2. $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2} = -\infty.$ Следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)(x+3)(x-2)}{2x^3}. \quad y' = 0 \text{ при } x = 1, x = -3 \text{ и } x = 2.$$

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$	$y_{\max} = y(-3) = -\frac{11}{6} \approx -1,83;$ $y_{\min} = y(2) = \frac{27}{8} = 3,375,$ $y_{\max} = y(1) = \frac{7}{2} = 3,5.$
y'	+	0	-	+	0	-	0	+	
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

4. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба: $y'' = \frac{7x-9}{x^4}.$

$$y'' = 0 \text{ при } x = \frac{9}{7} \approx 1,29.$$

x	$(-\infty; 0)$	$\left(0; \frac{9}{7}\right)$	$\frac{9}{7}$	$\left(\frac{9}{7}; +\infty\right)$	$y_{\text{пер}} = y\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{1307}{378} \approx 3,45.$
y''	-	-	0	+	
y	$\cap$	$\cap$	пер.	$\cup$	

5. Асимптоты кривой:

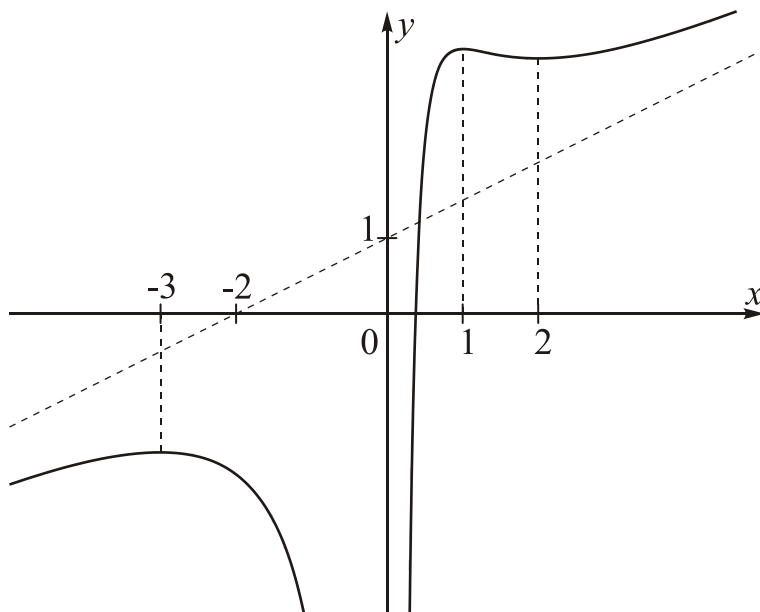
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x}{2x^2} = 1. \quad y = \frac{1}{2}x + 1 \quad - \quad \text{наклонная}$$

асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	-2	-1	0,5	3	4
y	-2,13	-4,5	2,25	3,5	3,78

7. Строим график функции



17. $(y - x)x^4 + 8 = 0$.

1. $y = x - \frac{8}{x^4}$. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = 1 + \frac{32}{x^5} = \frac{x^5 + 32}{2x^5}$. $y' = 0$

при $x = -\sqrt[5]{32} = -2$.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	$(0; +\infty)$
y'	+	0	-	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nearrow$

$$y_{\max} = y(-2) = -\frac{5}{2} = -2,5.$$

3. Интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$y'' = -\frac{160}{x^6} < 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Перегибов нет, график функции выпуклый.

4. Асимптоты кривой:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(x - \frac{8}{x^4} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(x - \frac{8}{x^4} \right) = -\infty \Rightarrow x = 0 - \text{вертикальная асимптота.}$$

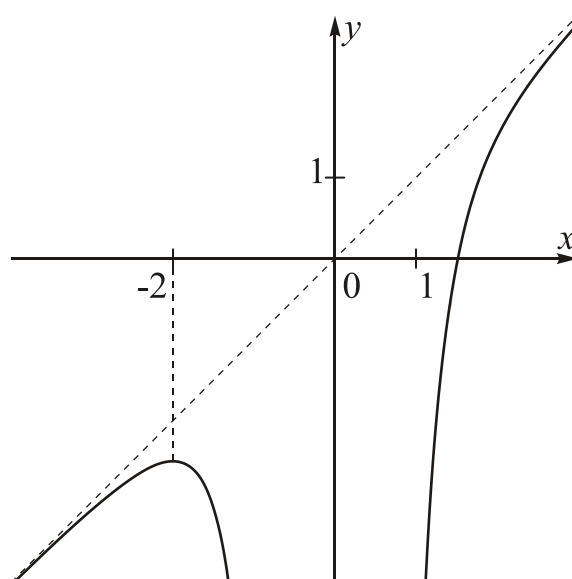
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8}{x^5} \right) = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = -8 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} = 0 \Rightarrow y = x -$$

наклонная асимптота.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	-4	-3	-1	1	2	3
y	-4,03	-3,1	-9	-7	1,5	2,9

6. Строим график функции



18. $y = \frac{x}{e^x}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty).$

2. Вертикальных асимптот нет.

3. Симметрии нет.

4. Точка пересечения с осями координат $(0;0).$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$ Следовательно, $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

6. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{1-x}{e^x}.$ $y' = 0$ при $x = 1.$

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	-
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$y_{\max} = y(1) = \frac{1}{e} \approx 0,37.$$

7. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{x-2}{e^x}. \quad y'' = 0 \text{ при } x = 2.$$

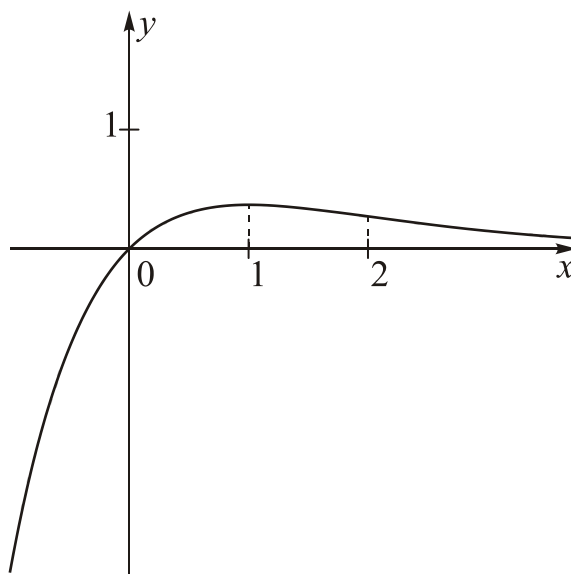
x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y''	-	0	+
y	$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(2) = \frac{2}{e^2} \approx 0,27.$$

8. Найдем значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	-2	-1	-0,5	0,5	3
y	-14,6	-2,72	-0,82	0,30	0,15

9. Строим график функции



19. $y = x^2 e^{-x}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Вертикальных асимптот нет.

3. Симметрии нет.

4. Точка пересечения с осями координат $(0;0)$.

5. Исследуем функцию на максимум и минимум:

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}x(2-x). \quad y' = 0 \text{ при } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2.$$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	-		+	0	-
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$y_{\min} = y(0) = 0,$$

$$y_{\max} = y(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0,54.$$

6. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2). \quad y'' = 0 \text{ при } x = 2 \pm \sqrt{2} \quad (x_1 \approx 0,59; \quad x_2 \approx 3,4).$$

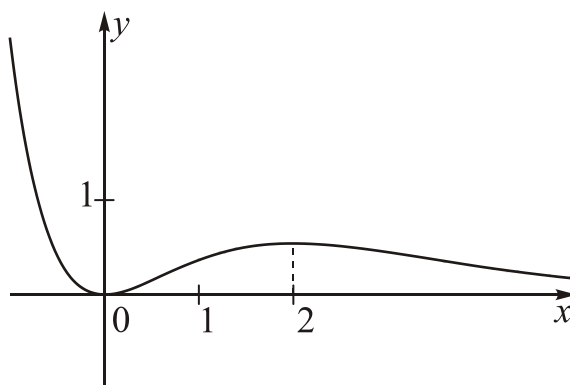
x	$(-\infty; 0,6)$	0,6	$(0,6; 3,4)$	3,4	$(3,4; +\infty)$	$y_{\text{пер}} = y(0,6) \approx 0,19;$
y''	+	0	-	0	+	$y_{\text{пер}} = y(3,4) \approx 0,38.$
y	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$	

7. Асимптоты кривой: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Следовательно, $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

8. Найдём значения функции в нескольких дополнительных точках.

x	-1,5	-1	-0,5	0,5	1	3
y	10,08	2,72	0,41	0,15	0,37	0,45

9. Строим график функции



20. $y = \frac{e^x}{x}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{e^x}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Следовательно, $x = 0$ - уравнение вертикальной асимптоты:

3. Симметрии нет.

4. Оси координат не пересекает.

5. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. $y' = 0$ при

$$x = 1.$$

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	-	0	+
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\min} = y(1) = e \approx 2,72.$$

6. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

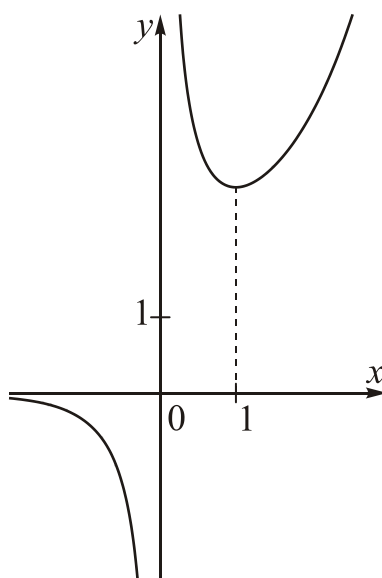
$$y'' = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}. \quad y'' \neq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \text{ Точек перегиба нет.}$$

x	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
y''	-	+
y	$\cap$	$\cup$

7. Найдем значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	-2	-1	-0,5	0,5	2	3
y	-0,07	-0,37	-1,21	3,30	3,70	6,70

8. Строим график функции



$$21. y = x - \ln(x+1).$$

1. Область определения функции: $x \in (-1; +\infty)$.

2. $\lim_{x \rightarrow -1+0} (x - \ln(x+1)) = +\infty$, следовательно, $x = -1$ - вертикальная асимптота.

3. Симметрии нет.

4. Точка пересечения с осями координат $(0; 0)$.

5. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. $y' = 0$ при $x = 0$.

x	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

$y_{\min} = y(0) = 0$.

6. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = \frac{1}{(x+1)^2}. \quad \forall x \in (-1; +\infty) \quad y'' > 0. \text{ График функции всюду вогнутый.}$$

7. Наклонные асимптоты:

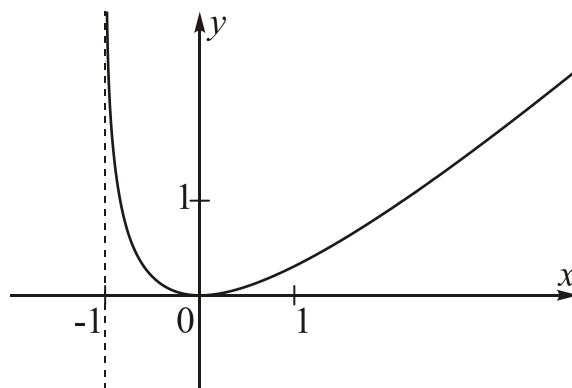
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = -\infty. \text{ Наклонных асимптот нет.}$$

8. Найдём значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	-0,5	0,5	1	2	3	4
y	0,19	0,10	0,31	0,90	1,61	2,39

9. Строим график функции



$$22. \quad y = \ln(x^2 + 1).$$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. График симметричен относительно оси ординат.

3. Точка пересечения с осями координат $(0; 0)$.

4. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$. $y' = 0$ при $x = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

$$y_{\min} = y(0) = 0.$$

5. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба: $y'' = \frac{2 \cdot (1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$.

$$y'' = 0 \text{ при } x = \pm 1.$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\cap$	пер.	$\cup$	пер.	$\cap$

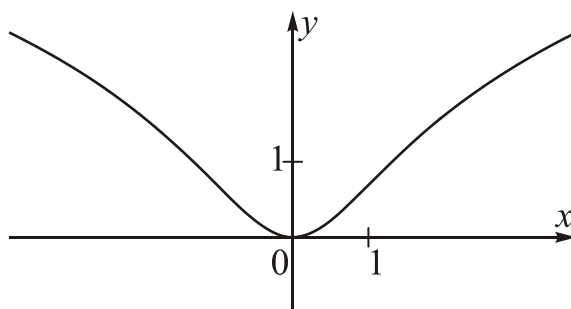
$$y_{\text{пер}}(\pm 1) = \ln 2 \approx 0,69.$$

6. Наклонных асимптот нет.

7. Найдём значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	0,5	2	3	4	5
y	0,22	1,61	2,30	2,83	3,26

8. Строим график функции



$$23. y = x^2 e^{-x^2}.$$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

3. Оу – ось симметрии, так как функция четная.

4. Точка пересечения с осями координат (0;0).

5. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$. $y' = 0$ при $x = 0$, $x = \pm 1$.

x	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$	$y_{\min} = y(0) = 0,$
y'	-	0	+	0	-	$y_{\max} = y(\pm 1) = \frac{1}{e} = 0,37.$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

6. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

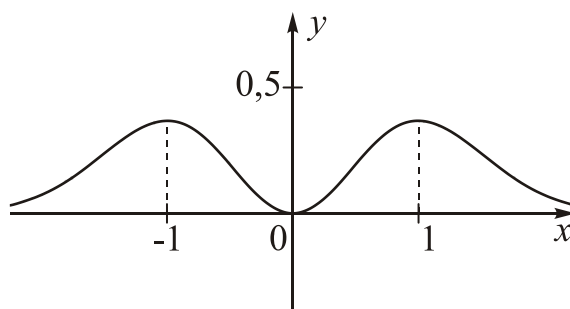
$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^4 - 5x^2 + 1). \quad y'' = 0 \text{ при } x = \pm \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2} \Rightarrow x_{1,2} \approx \pm 1,51; \quad x_{3,4} \approx \pm 0,47.$$

x	$(-0,47;0,47)$	0,47	$(0,47;1,5)$	1,5	$(1,5;+\infty)$	$y_{\text{пер}} = y(\pm 0,47) \approx 0,18;$
y''	+	0	-	0	+	$y_{\text{пер}} = y(\pm 1,5) \approx 0,23.$
y	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$	

7. Найдём значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	0,25	0,75	2	2,5
y	0,06	0,32	0,07	0,01

8. Строим график функции



24. $y = x^3 e^{-x}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty).$

2. $y = 0$ при $x = 0$, $y < 0$ при $x < 0$, $y > 0$ при $x > 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 6 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 6 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

4. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = x^2 e^{-x}(3-x)$. $y' = 0$ при $x = 0$, $x = 3$.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$	$y_{\max} = y(3) = \frac{27}{e^3} \approx 1,34.$
y'	+	0	+	0	-	
y	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

5. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

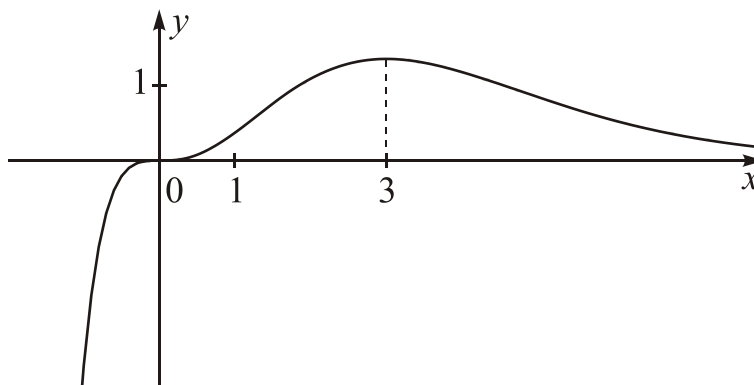
$$y'' = e^{-x}x(x^2 - 6x^2 + 6). \quad y'' = 0 \text{ при } x_1 = 0, \quad x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3} \quad (x_2 \approx 1,27; \quad x_3 \approx 4,73).$$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1,27)$	1,27	$(1,27; 4,73)$	4,73	$(4,73; +\infty)$	$y_{\text{пер}} = y(0) = 0;$
y''	-	0	+	0	-	0	+	$y_{\text{пер}} = y(1,27) = 0,57;$
y	$\cap$	пер.	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$	$y_{\text{пер}} = y(4,73) = 0,93.$

6. Найдем значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	-1	1	2	4	6
y	-2,72	0,37	1,08	1,17	0,54

7. Строим график функции



25. $y = xe^{-x^2/2}.$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty).$

2. Вертикальных асимптот нет.

3. График симметричен относительно начала координат, так как функция нечетная.

4. $(0;0)$ - точка пересечения с осями координат, $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = 0 \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

6. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = e^{-x^2/2}(1 - x^2).$ $y' = 0$ при $x = \pm 1.$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$	$y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}} \approx -0,61;$
y'	-	0	+	0	-	$y_{\max} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61.$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

7. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = -xe^{-x^2/2}(3-x^2). \quad y'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \pm\sqrt{3}.$$

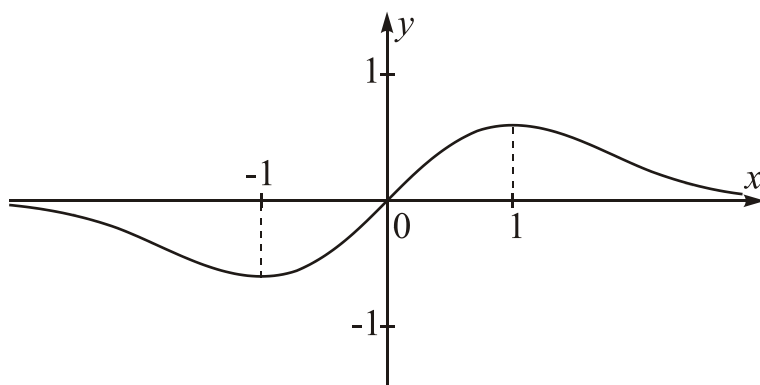
x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
y''	-	0	+	0	-	0	+
y	$\cap$	пер.	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(0) = 0; \quad y_{\text{пер}} = y(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}e^{-3/2} = -0,39; \quad y_{\text{пер}} = y(\sqrt{3}) = \sqrt{3}e^{-3/2} = 0,39.$$

8. Найдём значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	0,25	1,5	2	2,5	3
y	0,24	0,49	0,27	0,11	0,03

9. Строим график функции



$$26. \quad y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ и } y = 0$ - горизонтальные асимптоты.

$\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \frac{1}{e^x - 1} = \pm\infty \Rightarrow x = 0$ - вертикальная асимптота.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$

Экстремумов нет.

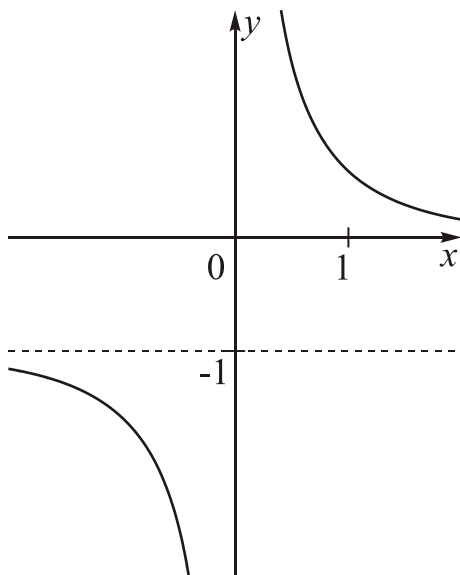
4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба: $y'' = \frac{e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^3}.$

Перегибов нет, так как $y'' \neq 0$ ни в одной точке.

5. Найдем значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	-1,05	-1,16	-1,58	0,58	0,16	0,05

6. Строим график функции



27. $y = x + \frac{\ln x}{x}.$

1. Область определения функции: $x \in (0; +\infty).$

2. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(x + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty \Rightarrow x = 0$ - вертикальная асимптота.

3. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}, \forall x \in (0; +\infty)$

$y' \neq 0$, следовательно, экстремумов нет.

4. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба: $y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$

$y'' = 0$ при $x = e^{3/2} \approx 4,48.$

x	$(0; e^{3/2})$	$e^{3/2}$	$(e^{3/2}; +\infty)$
y''	-	0	+
y	$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(e^{3/2}) = e^{3/2} + \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 4,82.$$

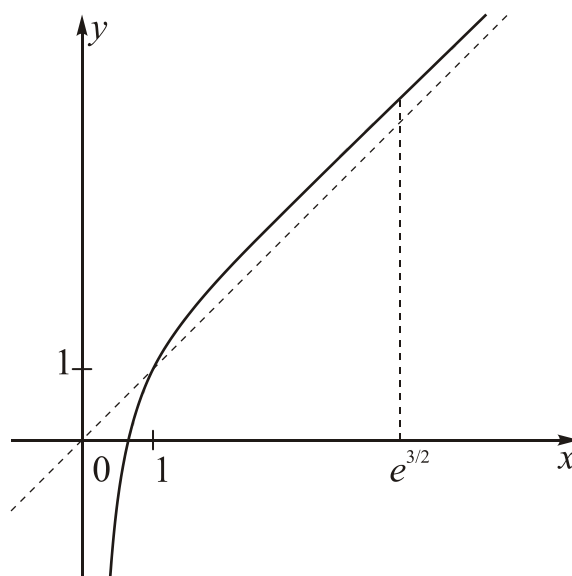
5. Наклонная асимптоты: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 1;$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \quad y = x - \text{наклонная асимптота.}$$

6. Найдем значения функции в нескольких дополнительных точках.

x	0,5	1	2	3	4	5	6
y	-0,89	1	2,35	3,37	4,35	5,32	6,30

7. Строим график функции



$$28. \quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

1. Область определения функции:

$$\frac{x+1}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -1-0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}} = +\infty \Rightarrow x = -1 - \text{вертикальная асимптота}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (\infty^0). \quad \text{Найдем } \ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{x}{1+x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{1+x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} y = 1.$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow y = e$ - горизонтальная асимптота.

$$4. \frac{y'}{y} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \Rightarrow y' = y \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right)$$

$\forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$. Покажем что $y' > 0$, для этого докажем вспомогательное неравенство: $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$. Рассмотрим на $[a; b]$ функцию $y = \ln x$.

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'(c) = \frac{1}{c}.$$

По теореме Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, $a < c < b$, $\Rightarrow$

$$\ln b - \ln a = f'(c)(b-a), \quad \ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a), \quad c = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, \quad a < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < b,$$

$$\frac{1}{a} > \frac{\ln \frac{b}{a}}{b-a} > \frac{1}{b} \text{ или } \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}. \quad (1)$$

Рассмотрим $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln \frac{1+x}{x}$. Пусть $b = 1+x$, $a = x$ (при $x > 0$) тогда по (1):

$$\frac{1+x-x}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1+x-x}{x}; \quad \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}. \quad (2)$$

Из (2) $\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} > 0$; учитывая, что $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$ имеем

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right) > 0, \text{ т.е. функция возрастающая.}$$

5. $y' \neq 0$, значит точек экстремума нет.

6. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$\begin{aligned} y'' &= y' \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right) + y \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(1+x)^2} \right) = y' \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right) - \frac{y}{x(1+x)^2} = \\ &= y \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right)^2 - \frac{y}{x(1+x)^2} = y \left(\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right)^2 - \frac{1}{x(1+x)^2} \right). \end{aligned}$$

Покажем, что для $x \in (-\infty; -1)$ $y'' > 0$ и кривая вогнута, а для $x \in (0; +\infty)$ $y'' < 0$ - кривая выпукла.

Первое неравенство очевидно. Докажем, что $\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right)^2 - \frac{1}{x(1+x)^2} < 0$

или $\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right)^2 < \frac{1}{(\sqrt{x}(1+x))^2}$, или $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x} < \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$.

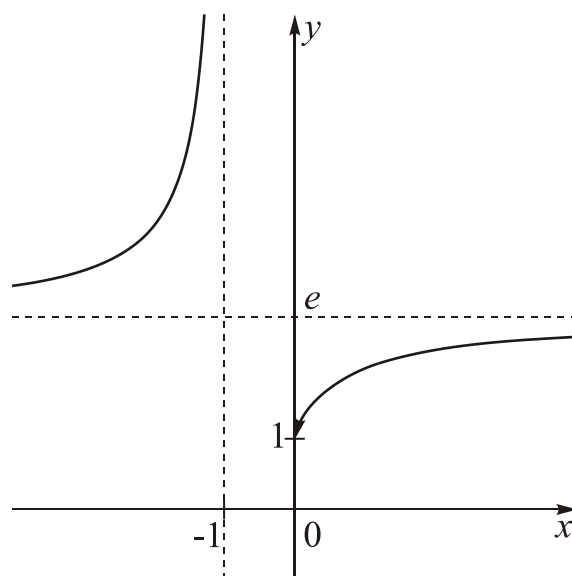
Но при $x > 0$ согласно (2) $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x} > 0$. Значит надо доказать, что при

$x > 0$ $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} > 0$. Но этот факт очевиден.

7. Найдем значения функции в нескольких дополнительных точках:

x	-3	-2	1	2	3	4
y	3,38	4	2	2,25	2,37	2,44

8. Строим график функции



29. $y = x + \sin x$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. График симметричен относительно начала координат, так как функция нечетная.

3. $(0;0)$ - точка пересечения с осями координат.

4. Исследуем функцию на максимум и минимум: $y' = 1 + \cos x$. $y' \geq 0$

$\forall x \in (-\infty; +\infty)$ ($y' = 0$ в точках $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), т.е. функция возрастающая всюду и точек экстремума нет.

5. Область выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба:

$$y'' = -\sin x. \quad y'' = 0 \text{ при } x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

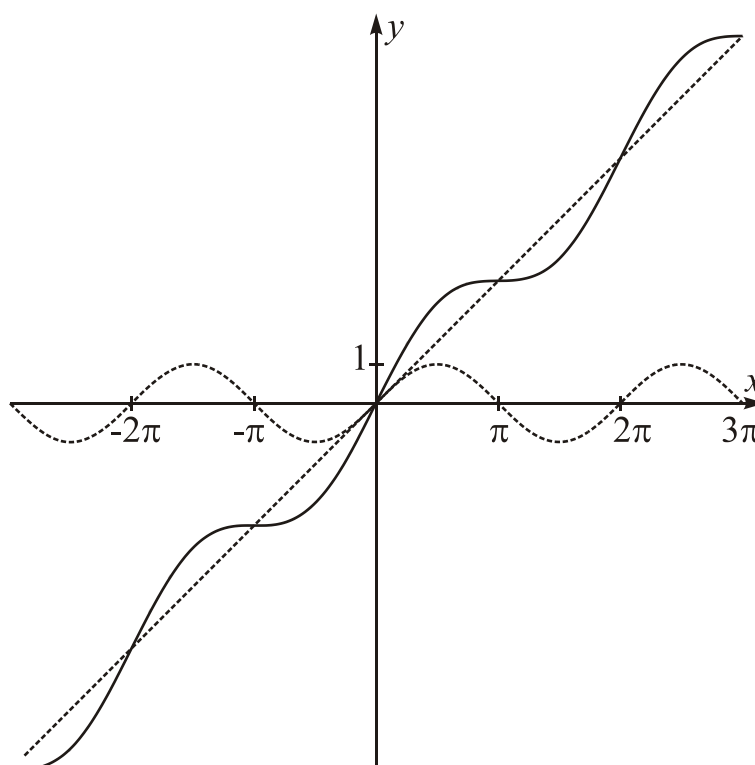
x	...	$(-\pi; 0)$	0	$(0; \pi)$	π	$(\pi; 2\pi)$	2π	$(2\pi; 3\pi)$	...
y''		+	0	-	0	+	0	-	
y		∪	пер.	∩	пер.	∪	пер.	∩	

$$y_{\text{пер}}^{(0)} = y(0) = 0; \quad y_{\text{пер}}^{(1)} = y(\pi) = \pi; \quad y_{\text{пер}}^{(2)} = y(2\pi) = 2\pi; \quad \dots \quad y_{\text{пер}}^{(n)} = y(n\pi) = n\pi; \quad \dots$$

6. Учитывая, что данная функция нечетная, найдем ее значения в нескольких дополнительных точках.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
y	2,57	3,71	8,85

7. Строим график функции



Примечание. График удобно строить как сумму ординат прямой $y = x$ и $y = \sin x$.

В дальнейшем исследование функций и построение их графиков будем проводить более кратко, предоставляя читателю некоторую самостоятельность в рассуждениях.

30. $y = x \sin x$.

1. $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y(-x) = y(x)$ - график симметричен относительно оси ординат.

3. $y' = \sin x + x \cos x$. $y' = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -x$ - этому уравнению удовлетворяют точки экстремума.

4. $y'' = 2 \cos x - x \sin x \Rightarrow y'' = 0$, если абсциссы точек перегиба удовлетворяют уравнению $x \operatorname{tg} x = 2$.

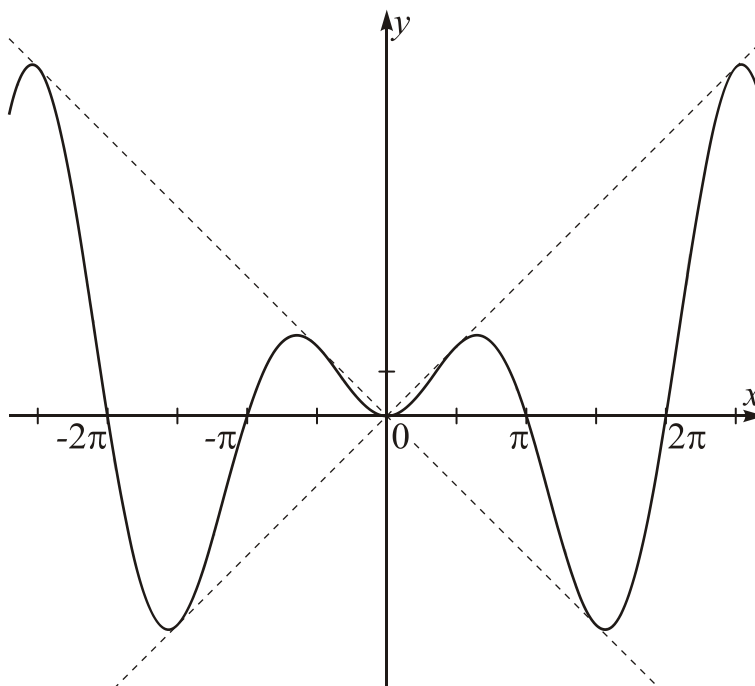
5. Функция является неограниченной при $x \rightarrow \infty$, т.к. для любого $M > 0$ можно найти такое значение x , что $|x \sin x| > M$. Но функция не является бесконечно большой, постольку она обращается в нуль при $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$

6. Асимптот нет: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ - не существует.

7. Значения функции в дополнительных точках:

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
y	0,55	1,57	-4,71	7,85

8. Строим график функции



31. $y = \ln \cos x$.

1. $\cos x > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Период $T = 2\pi$.

2. $y(-x) = y(x) \Rightarrow$ график симметричен относительно оси ординат.

3. $y' = -\operatorname{tg} x$. $y' = 0$ при $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$.

Рассмотрим поведение функции на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, после чего повторим

этот график на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

x	...	$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	...
y'		+	0	-	
y		$\nearrow$	max	$\searrow$	

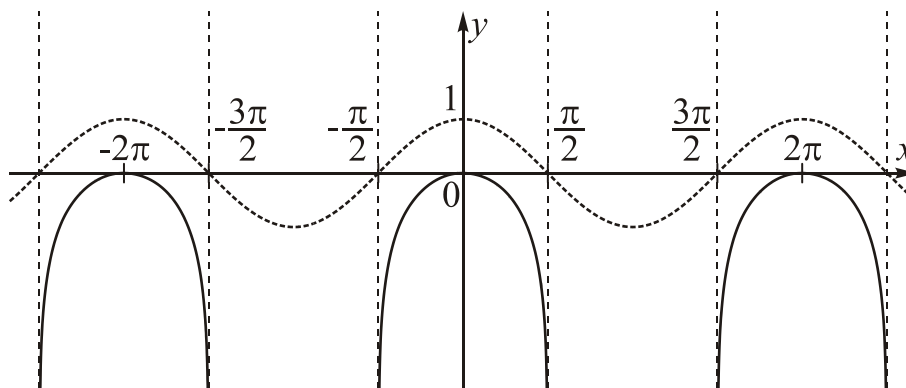
$y_{\max} = y(0) = 0$.

4. $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x} < 0$ для всех x из области определения функции, т.е. график

всюду выпуклый.

5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \ln \cos x = -\infty$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ - вертикальные асимптоты.

6. Строим график функции

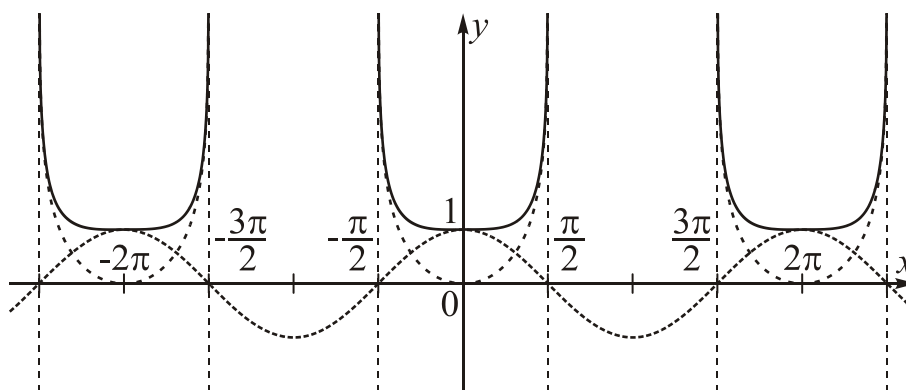


32. $y = \cos x - \ln \cos x$.

Этот график удобно рассмотреть как суперпозицию двух функций:

$y = \cos x$ и $y = -\ln \cos x$. Область определения будет такой же, как у функции

$y = \ln \cos x$, т.е. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



33. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

1. $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. $f(-x) = -f(x)$ - график симметричен относительно начала координат.
3. $y' = 1 - \frac{2}{1+x^2}$. $y' = 0$ при $x = \pm 1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max} = y(-1) = -1 + 2 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57;$$

$$y_{\min} = y(1) = 1 - 2 \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0,57.$$

4. $y'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$. $y'' = 0$ при $x = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	-	0	+
y	$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(0) = 0.$$

5. Асимптоты:

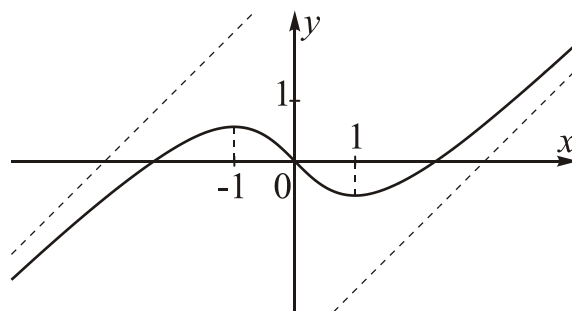
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\pi, & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \pi, & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow y = x \pm \pi.$$

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,5	1,5	2	3	4
y	-0,43	-0,47	-0,21	0,50	1,35

7. Строим график функции



34. $y = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$.

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$ при $x = 1$ и $x = 3$, т.е. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{(x-1)(x-3)}} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{(x-1)(x-3)}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3-0} e^{\frac{1}{(x-1)(x-3)}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3+0} e^{\frac{1}{(x-1)(x-3)}} = \infty \Rightarrow x = 1$

и $x = 3$ - вертикальные асимптоты.

3. $y' = -\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$. $y' = 0$ при $x = 2$.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 2)$	2	$(2; 3)$	$(3; +\infty)$
y'	+	+	0	-	-
y	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$

$y_{\max} = y(2) = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

4. $y'' = 2 \cdot \frac{3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 96x + 47}{(x^2 - 4x + 3)^4} \cdot e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$.

$y'' = 0 \Rightarrow 3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 96x + 47 = 0$. Представим это выражение в виде

$3(x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16) - 1 = 0$, $3(x-2)^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^4 = \frac{1}{3}$, $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

$x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 1,24$; $x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 2,76$.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; 1,24)$	1,24	$(1,24; 2,76)$	2,76	$(2,76; 3)$	$(3; +\infty)$
y''	+	+	0	-	0	+	+
y	$\cup$	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$	$\cup$

$y_{\text{пер}} = y\left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \approx 0,09$; $y_{\text{пер}} = y\left(2 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \approx 0,09$.

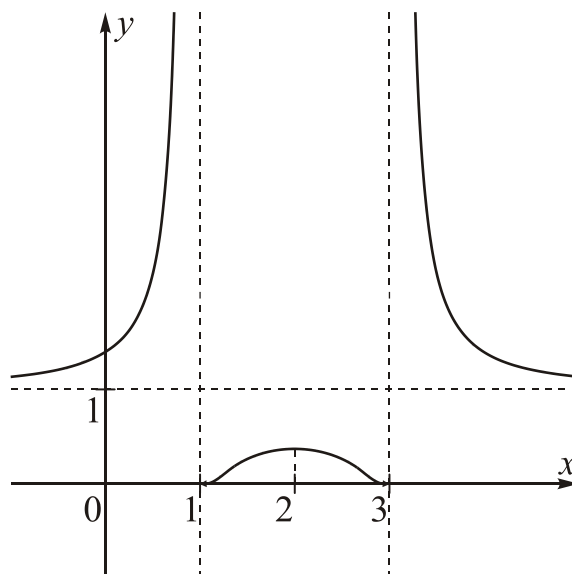
5. Асимптоты:

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2-4x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{(x-1)(x-3)}} = 1 \Rightarrow y = 1$ - горизонтальная асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4
y	1,40	2,23	0,26	0,26	2,23	1,40

7. Строим график функции



35. $y = e^{\sin x} - \sin x$ (без отыскания точек перегиба).

1. $x \in (-\infty; +\infty)$; $y > 0 \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функция периодическая, период $T = 2\pi$.

3. $y' = \cos x (e^{\sin x} - 1)$. $y' = 0$ при $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и при $e^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = 0$

и $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

x	...	$\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	π	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	...
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	
y		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

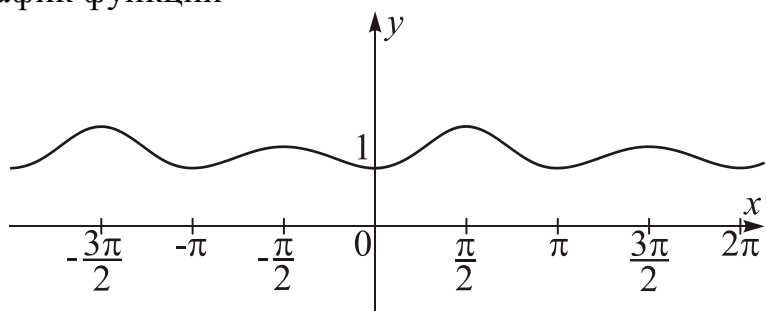
$$y_{\min} = y(k\pi) = 1; \quad y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e - 1 \approx 1,72; \quad y_{\max} = y\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 + \frac{1}{e} \approx 1,37.$$

4. Асимптот нет.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
y	1,32	1,32	1,20	1,20

6. Строим график функции



36. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

1. $x \in (-\infty; +\infty)$. $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$.

2. $y' = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} - 1$. $y' = 0$ при $x = \frac{8}{27} \approx 0,30$; $y' = \infty$ при $x = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \frac{8}{27})$	$\frac{8}{27}$	$(\frac{8}{27}; +\infty)$
y'	-	∞	+	0	-
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$y_{\min} = y(0) = 0$;

$y_{\max} = y\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27} \approx 0,15$.

3. $y'' = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$; $y'' = \infty$ при $x = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	-	∞	-
y	$\cap$		$\cap$

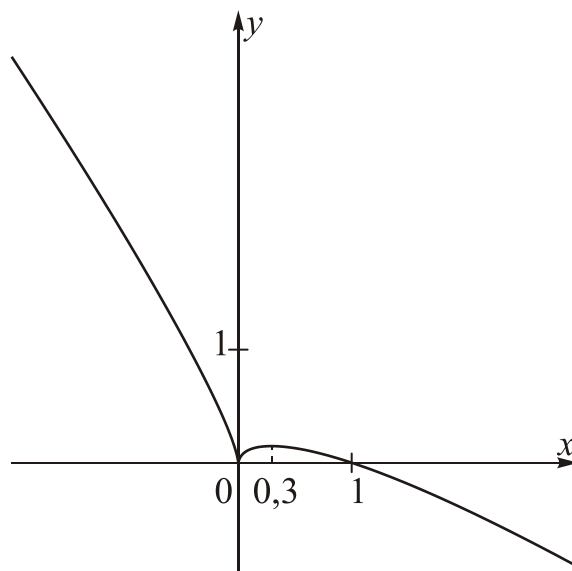
Перегибов нет.

4. Асимптот нет.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	-2	-1	0,5	2	3
y	3,59	2	0,13	-0,41	-0,92

6. Строим график функции



37. $y^3 = x^2(x^2 - 4)^3$.

1. $y = \sqrt[3]{x^2(x^2 - 4)}$; $x \in (-\infty; +\infty)$. Функция четная и график симметричен относительно оси ординат. $y = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 2$.

2. $y' = \frac{2}{2 \cdot \sqrt[3]{x}}(x^2 - 4) + 2x \cdot \sqrt[3]{x^2} = \frac{8(x^2 - 1)}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$. $y' = 0$ при $x = \pm 1$; $y' = \infty$ при $x = 0$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	0	+	∞	-	0	+
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\min} = y(\pm 1) = -3;$$

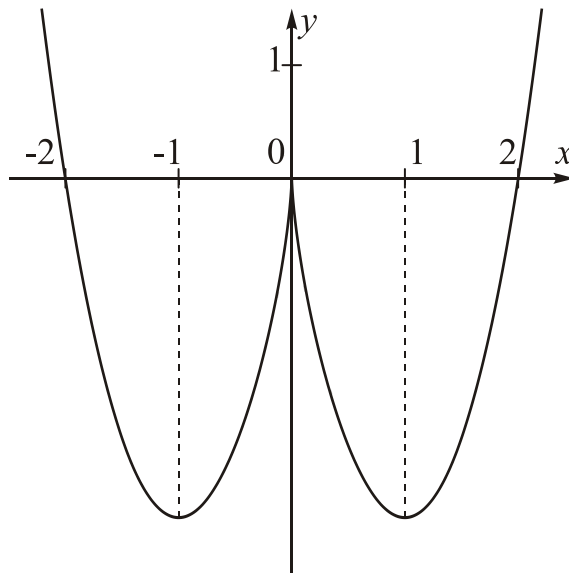
$$y_{\max} = y(0) = 0.$$

3. $y'' = \frac{8}{9} \cdot \frac{5x^2 + 1}{\sqrt[3]{x^4}}$; $y'' > 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \Rightarrow$ кривая всюду вогнута. Точек перегиба нет.

4. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,5	1,5	2,5	3
y	-2,36	-2,29	4,15	10,4

5. Строим график функции



38. $(y + x)^3 = 27x$.

1. $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - x$; $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $f(-x) = -f(x)$. Функция нечетная и график симметричен относительно начала координат. $y = 0$ при $x = \pm \sqrt[3]{27} \approx \pm 5,196$.

3. $y' = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$. $y' = 0$ при $x = \pm 1$; $y' = \infty$ при $x = 0$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	0	+	∞	+	0	-
y	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$

$$y_{\max} = y(1) = 2;$$

$$y_{\min} = y(-1) = -2.$$

4. $y'' = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$. $y'' = \infty$ при $x = 0$.

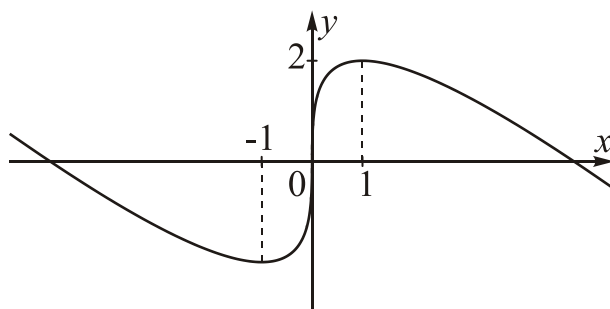
x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	+	∞	-
y	$\cup$	пер.	$\cap$

$$y_{\text{пер}} = y(0) = 0.$$

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,5	2	3	4	5	6
y	1,88	1,77	1,33	0,76	0,13	-0,55

6. Строим график функции



39. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1$.

1. $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x(x+1)}}$. $y' = \infty$ при $x = 0$ и $x = -1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	-	∞	+	∞	-
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$y_{\min} = y(-1) = 0;$$

$$y_{\max} = y(0) = 2.$$

3. $y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x\sqrt[3]{x} - (x+1)\sqrt[3]{x+1}}{x(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}}$. $y'' = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$; $y'' = \infty$ при $x = 0$ и $x = -1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
y''	-	∞	-	0	+	∞	+
y	$\cap$		$\cap$	пер.	$\cup$		$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

4. Асимптоты:

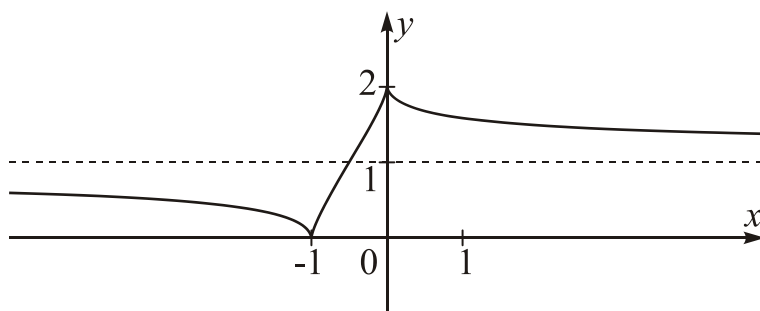
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} \right) \left(\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^4} \right)}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^4}} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^4}} + 1 = 1.$$

$y = 1$ - горизонтальная асимптота.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	-3	-2	2	3	4
y	0,51	0,41	1,49	1,44	1,40

6. Строим график функции



$$40. y = \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot (x+1)^3.$$

$$1. x \in (-\infty; +\infty).$$

$$2. y' = \frac{(x+1)^2(11x-7)}{3 \cdot \sqrt[3]{x-1}}. y' = 0 \text{ при } x = -1 \text{ и } x = \frac{7}{11} \approx 0,636; y' = \infty \text{ при } x = 1.$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$\left(-1; \frac{7}{11}\right)$	$\frac{7}{11}$	$\left(\frac{7}{11}; 1\right)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	+	0	-	∞	+
y	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max} = y\left(\frac{7}{11}\right) \approx 2,32;$$

$$y_{\min} = y(1) = 0.$$

$$3. y'' = \frac{8(x+1)(11x^2 - 14x + 2)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^4}}. y'' = 0 \text{ при } x_1 = -1 \text{ и } x_{2,3} = \frac{7 \pm 3\sqrt{3}}{11} \quad (x_2 \approx 1,11;$$

$$x_3 \approx 0,16). y'' = \infty \text{ при } x_4 = 1.$$

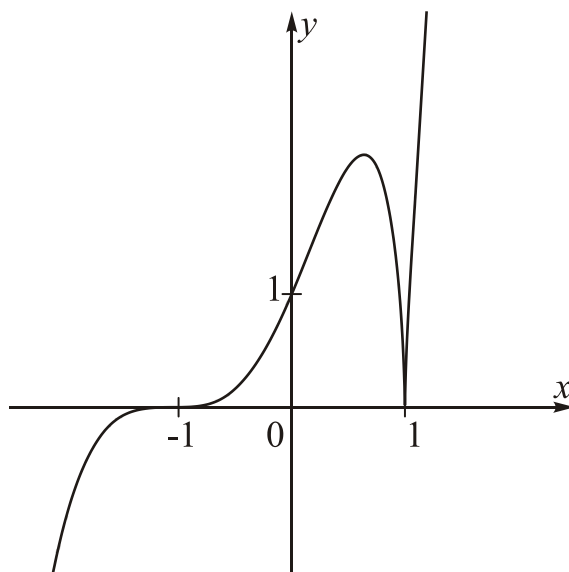
x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0,16)$	0,16	$(0,16; 1)$	1	$(1; 1,11)$	1,11	$(1,11; +\infty)$
y''	-	0	+	0	-	∞	-	0	+
y	$\cap$	пер.	$\cup$	пер.	$\cap$		$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(-1) = 0; \quad y_{\text{пер}} = y(0,16) \approx 1,37; \quad y_{\text{пер}} = y(1,11) = 2,14.$$

4. Значения функции в дополнительных точках:

x	-2	-1,5	-0,5	2
y	-2,08	-0,23	0,16	27

5. Строим график функции



41. $y^3 = 6x^2 - x^3$.

1. $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3} \quad x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = \frac{x(4-x)}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}}$. $y' = 0$ при $x = 4$; $y' = \infty$ при $x = 0$ и $x = 6$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; 6)$	6	$(6; +\infty)$
y'	-	0	+	0	-	∞	-
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$

$$y_{\min} = y(0) = 0;$$

$$y_{\max} = y(4) = 2\sqrt[3]{4} \approx 3,18.$$

3. $y'' = -\frac{8x^2}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^5}}$; $y'' = \infty$ при $x = 6$; $y'' = 0$ при $x = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 6)$	6	$(6; +\infty)$
y''	-	0	-	∞	+
y	$\cap$		$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(6) = 0.$$

4. АСИМПТОТЫ:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x}} - 1 = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + \sqrt[3]{x^3}) \left(\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)x^3} + \sqrt[3]{x^6} \right)}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)x^3} + \sqrt[3]{x^6}} =$$

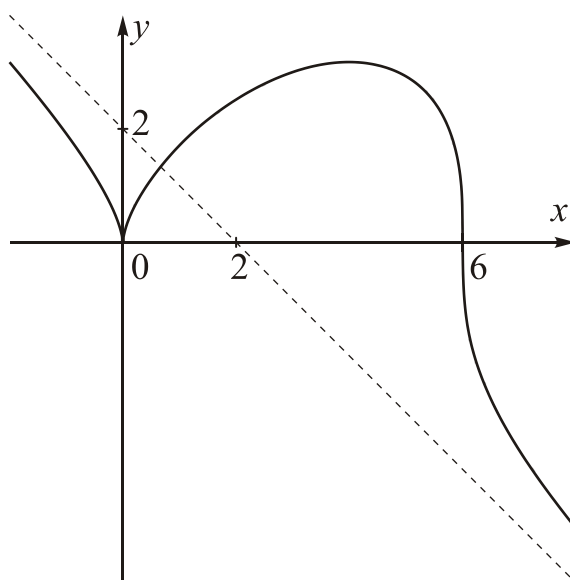
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{\sqrt[3]{36x^4 - 12x^5 + x^6} - \sqrt[3]{6x^5 - x^6} + \sqrt[3]{x^6}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt[3]{\frac{36}{x^2} - \frac{12}{x} + 1} - \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} + \sqrt[3]{1}} = \frac{6}{3} = 2.$$

$y = -x + 2$ - наклонная асимптота.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	-3	-2	-1	1	2	3	5	7
y	4,33	3,18	1,91	1,71	2,52	3	2,92	-3,66

6. Строим график функции



42. $(y - x)^2 = x^5.$

1. Поскольку левая часть положительна, то $x \geq 0$, тогда $y = x \pm \sqrt{x^5}$, т.е. функция двузначная.

2. Функция $y_1 = x + \sqrt{x^5}$ (верхняя часть графика). $y'_1 = 1 + \frac{5}{2}x^{3/2}$, $y'_1 > 0$ -

функция монотонно возрастает. Для нижней части графика $y_2 = x - \sqrt{x^5}$

производная $y'_2 = 1 - \frac{5}{2}x^{3/2}$, $y' = 0$ при $x = \frac{\sqrt[3]{20}}{5} \approx 0,54$.

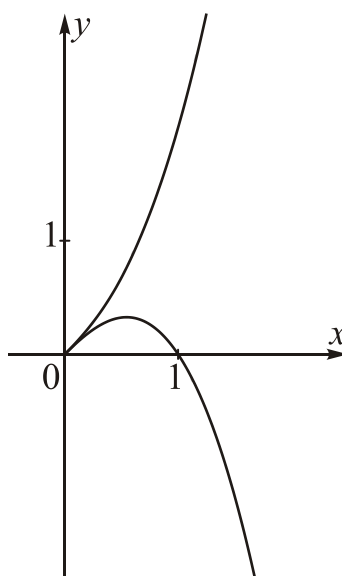
3. Для первой кривой $y_1'' = \frac{15}{4}x^{1/2} > 0 \quad \forall x > 0$ - кривая вогнута. Для второй кривой $y_2'' = -\frac{15}{4}x^{1/2} < 0 \quad \forall x > 0$ - кривая выпукла.

4. Асимптот нет.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	0	0,5	1	2	3
y_1	0	0,68	2	7,66	18,59
y_2	0	0,32	0	-3,66	-12,59

6. Строим график функции



43. $(y - x^2)^2 = x^5.$

1. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то $x \geq 0$ и $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}.$

2. Обозначим: $y_1 = x^2 + \sqrt{x^5}$ - верхняя ветвь графика; $y_2 = x^2 - \sqrt{x^5}$ - нижняя ветвь графика.

3. $y_1' = 2x + \frac{5}{2}x^{3/2} > 0$ для $x > 0$ - функция монотонно возрастает.

$$y_2' = 2x - \frac{5}{2}x^{3/2} = x \left(2 - \frac{5}{2}\sqrt{x} \right) \quad y_2' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \frac{16}{25} = 0,64.$$

x	$\left(0; \frac{16}{25}\right)$	$\frac{16}{25}$	$\left(\frac{16}{25}; +\infty\right)$
y_2'	+	0	-
y_2	↗	max	↘

$$y_{2 \max} = y_2\left(\frac{16}{25}\right) = \frac{256}{3125} \approx 0,08.$$

4. $y_1'' = 2 + \frac{15}{4}\sqrt{x} > 0$ для $x > 0$ - график вогнутый;

$$y_2'' = 2 - \frac{15}{4}\sqrt{x}; \quad y_2'' = 0 \text{ при } x = \frac{64}{225} \approx 0,28.$$

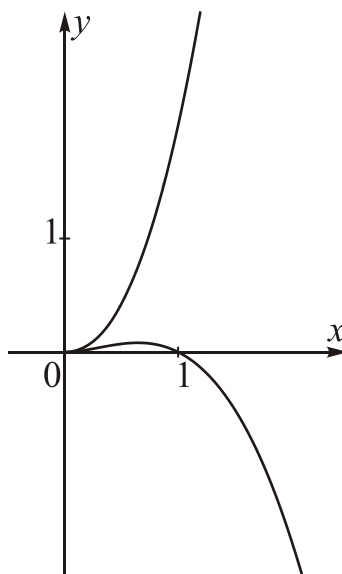
x	$\left(0; \frac{64}{225}\right)$	$\frac{64}{225}$	$\left(\frac{64}{225}; +\infty\right)$
y_2''	+	0	-
y_2	$\cup$	пер.	$\cap$

$$y_{2 \text{ пер}} = y_2\left(\frac{64}{225}\right) \approx 0,04.$$

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	0	0,5	1	1,5	2
y_1	0	0,43	2	5,01	9,66
y_2	0	0,07	0	-0,51	-1,66

6. Строим график функции



44. $y^2 = x^3 + 1.$

1. $y = \pm\sqrt{x^3 + 1}$ - функция двузначная, $x \geq -1$. График симметричен относительно оси абсцисс. Поэтому исследуем верхнюю его часть для $y = \sqrt{x^3 + 1}$ и затем симметрично отразим на нижнюю полуплоскость.

2. $y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}. \quad y' = 0 \text{ при } x = 0.$

x	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	+
y	$\nearrow$		$\nearrow$

3. $y'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{x(x^3 + 4)}{(x^3 + 1)^{3/2}}$. $y'' = 0$ при $x = 0$ и $x = -\sqrt[3]{4}$ (не подходит).

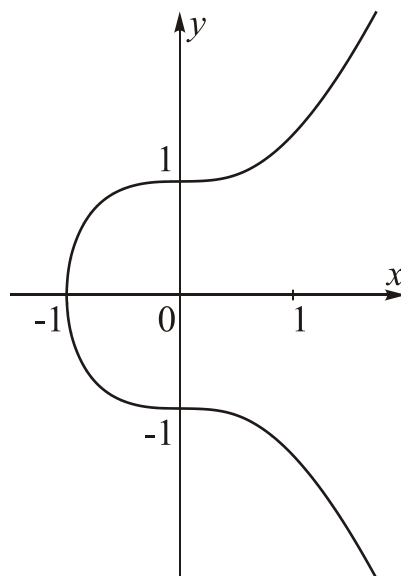
x	$(-1; 0)$	0	$(1; +\infty)$
y_2''	-	0	+
y_2	$\cap$	пер.	$\cup$

$y_{\text{пер}} = y(0) = 1.$

4. Значения функции в дополнительных точках:

x	-1	-0,5	0,5	1	2
y	0	0,94	1,06	1,41	3

5. Строим график функции



45. $y^2 = x^3 - x.$

1. $y = \pm\sqrt{x^3 - x}$ - функция двузначная, график симметричен относительно оси абсцисс. $y = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 1$.

$$(x^2 - 1)x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 1 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow x \in [1; +\infty),$$

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - 1 \leq 0, \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 0].$$

2. Рассмотрим $y = \sqrt{x^3 - x}$, $y' = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$. $y' = 0$ при $x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0,58$.

x	$\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$	$(1; +\infty)$
y'	+	0	-	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nearrow$

$y_{\text{max}} = y\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,62.$

3. $y'' = \frac{3x^4 - 6x^2 - 1}{4\sqrt{(x^3 - x)^3}}$. $y'' = 0$ при $x = \pm\sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{12}}{3}}$. Отбросив комплексные корни

и учитывая ОДЗ получим, что $x = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{12}}{3}} \approx 1,47$.

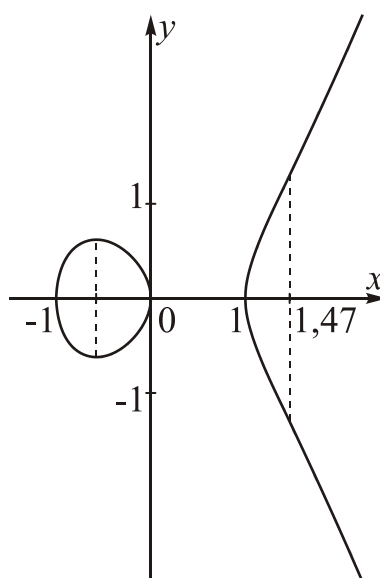
x	$[-1;0]$	$(1;1,47)$	$1,47$	$(1,47;+\infty)$
y''	-	-	0	+
y	$\cap$	$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(1,47) = 1,30.$$

4. Значения функции в дополнительных точках:

x	-0,75	-0,25	1,5	2	3
y	0,57	0,48	1,37	2,45	4,90

5. Строим график функции



46. $y^2 = x(x-1)^2$.

1. $x \geq 0$.

2. $y = \pm|x-1|\sqrt{x}$ - функция двузначная. График симметричен относительно оси Ox . Рассмотрим $y = |x-1|\sqrt{x}$. $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$.

3. $x \in [0;1]$: $y = (1-x)\sqrt{x}$ и $y' = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$. $y' = 0$ при $x = \frac{1}{3}$, $y' = \infty$ при $x = 0$.

$x > 1$: $y = (x-1)\sqrt{x}$ и $y' = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. $y' = 0$ при $x = \frac{1}{3} \notin (1;+\infty)$.

x	$\left(0;\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	-		+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\nearrow$

$$y_{\text{max}} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{12}}{9} \approx 0,38.$$

4. $y'' = \frac{-3x-1}{4\sqrt{x^3}} < 0$ для $x \in (0;1)$ - кривая выпукла;

$y'' = \frac{3x+1}{4\sqrt{x^3}} > 0$ для $x \in (1;+\infty)$ - кривая вогнута.

Соответственно для кривой $y = -|x-1|\sqrt{x}$ для $x \in (1;+\infty)$ - кривая выпуклая. В

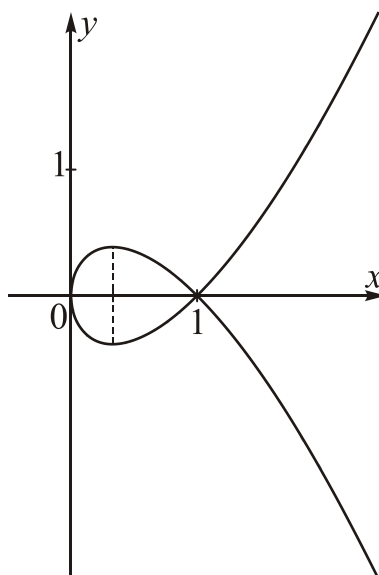
точке $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ для первой кривой будет min, для второй – max, поэтому

считаем, что в этой точке для всей кривой нет экстремума.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,25	0,5	1,5	2	3
y	0,38	0,35	0,61	1,41	3,46

6. Строим график функции



47. $y^2 = x^2(x-1)$.

1. $y^2 \geq 0$ поэтому функция определена при $x = 0$ и при $x \geq 1$.

2. $y = \pm|x|\sqrt{x-1}$ - начало координат – *изолированная точка*^{*)}; график симметричен относительно оси Ox .

3. Берем $y = |x|\sqrt{x-1}$.

Для $x \geq 1$ имеем: $y = x\sqrt{x-1}$, $y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$. $y' = 0$ при $x = \frac{2}{3}$, которая не входит в ОДЗ функции; $y' > 0$ для $\forall x \in (1;+\infty)$, т.е. функция возрастающая.

^{*)} Изолированная точка множества – это такая точка, у которой существует окрестность, не содержащая других точек этого множества.

4. $y'' = \frac{3x-4}{4(x-1)\sqrt{x-1}} \cdot y'' = 0$ при $x = \frac{4}{3}$.

x	$\left(1; \frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$
y''	-	0	+
y	$\cap$	пер.	$\cup$

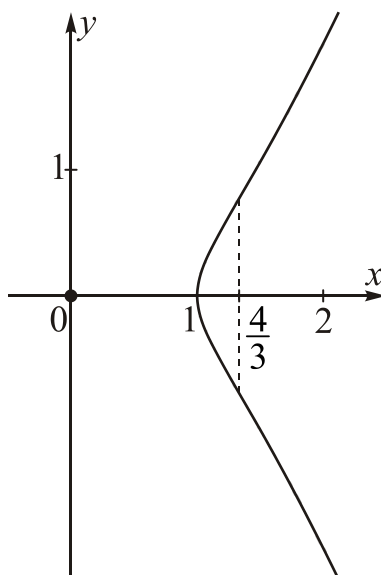
$$y_{\text{пер}} = y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,77.$$

5. Кривая не имеет асимптот.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	1,25	1,5	2	2,5	3	4
y	0,63	1,06	2	3,06	4,24	6,93

7. Строим график функции



48. $y^2 = \frac{x^3 - 2}{3x}$.

1. $y^2 \geq 0$, поэтому $\frac{x^3 - 2}{x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 \geq 2, \\ x > 0, \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{2} \approx 1,26,$

$\begin{cases} x^3 \leq 2, \\ x < 0, \end{cases} \Rightarrow x < 0.$

Т.е. $x \in (-\infty; 0) \cup [\sqrt[3]{2}; +\infty)$. График симметричен относительно оси Ox .

2. $y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - 2}{3x}}$. Рассмотрим $y = \sqrt{\frac{x^3 - 2}{3x}}$. $y' = \frac{x^3 + 1}{3x^2 \sqrt{\frac{x^3 - 2}{3x}}}$; $y' = 0$ при $x = -1$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	$(\sqrt[3]{2}; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	$\nearrow$

$$y_{\min} = y(-1) = 1.$$

$$3. \quad y'' = \frac{-2x^3 + 1}{3x^4 \sqrt{\left(\frac{x^2 - 2}{3x}\right)^3}}. \quad y'' = 0 \Rightarrow -6x^3 + 3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,79 \quad - \quad \text{не}$$

принадлежит области определения функции. Точек перегиба нет.

x	$(-\infty; 0)$	$(\sqrt[3]{2}; +\infty)$
y''	$+$	$-$
y	$\cup$	$\cap$

4. Асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \sqrt{\frac{x^3 - 2}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \sqrt{\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3x}} = \infty \Rightarrow x = 0 \text{ - вертикальная асимптота.}$$

Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3 - 2}{3x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}}}{x},$$

$$\text{при } x \rightarrow +\infty \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = |\infty \cdot 0| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{3x^2 \left(\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = 0.$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left(\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = |\infty \cdot 0| =$$

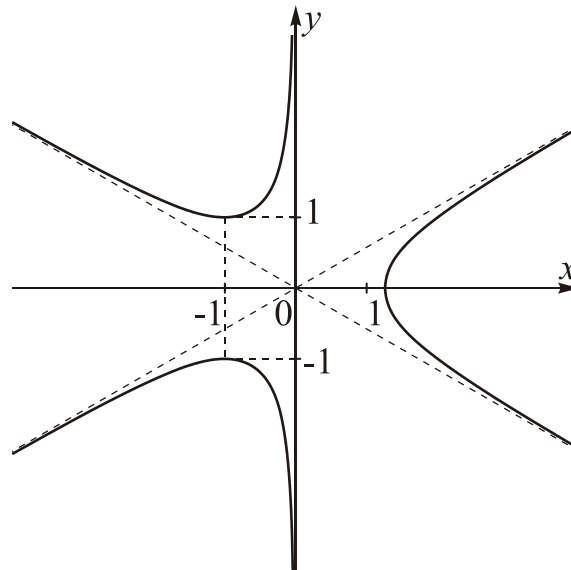
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x^2 \left(\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} = 0.$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x \text{ - наклонные асимптоты.}$$

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	-3	-2	-0,5	1,5	2	3	4
y	1,80	1,29	1,19	0,55	1	1,67	2,27

6. Строим график функции



49. $x^2y + xy^2 = 2$.

1. Поскольку уравнение кривой $F(x; y) = x^2y + xy^2 - 2$ не изменится если заменить x на y , а y на x , то кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$ и проходит через точку $(1;1)$.

2. Для нахождения горизонтальных асимптот кривой $F(x; y) = 0$ приравнивают к нулю коэффициент при высшей степени x , входящий в уравнение; причем, если этот коэффициент – постоянная величина, то горизонтальных асимптот нет. У нас $y = 0$ - ось Ox есть горизонтальная асимптота.

Для нахождения вертикальных асимптот кривой $F(x; y) = 0$ приравнивают нулю коэффициент при высшей степени y . У нас $x = 0$ - ось Oy есть вертикальная асимптота.

3. Для нахождения наклонных асимптот кривой $F(x; y) = 0$ надо в уравнении кривой заменить y на $kx + b$, приравнять нулю коэффициенты при двух высших степенях x и полученную систему решить относительно k и b . Имеем

$$x^2(kx+b)+x(kx+b)^2-2=0,$$

$$kx^3+bx^2+k^2x^3+2kbx^2+b^2x-2=0 \Rightarrow (k+k^2)x^3+(b+2kb)x^2+b^2x-2=0;$$

$$\begin{cases} k(1+k)=0, \\ b(1+2k)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k_1=0, & b_1=0, \\ k_2=-1, & b_2=0. \end{matrix}$$

$y=0$ (получено ранее); $y=-x$ - наклонная асимптота (биссектриса II и IV координатных углов).

4. Для нахождения области определения неявно заданной функции решаем заданное уравнение относительно y . Имеем $xy^2+x^2y-2=0 \Rightarrow$

$$y_{1,2} = \frac{-x^2 \pm \sqrt{x^4+8x}}{2x}. \quad (1)$$

$x^4+8x \geq 0$ или $x(x^3+8) \geq 0 \Rightarrow x \leq -2$ и $x > 0$ (из (1) следует, что $x \neq 0$), т.е. $x \in (-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$.

5. Рассмотрим несколько дополнительных точек кривой. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2y+xy^2-2=0 \\ y=kx \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} xk+k^2x^3-2=0; & x^3(k+k^2)=2; & x=\sqrt[3]{\frac{2}{k+k^2}}. \end{matrix}$$

k	-2	-0,5	2	3	4	5
x	1	-2,83	0,69	0,55	0,48	0,41
y	-2x	-0,5x	2x	3x	4x	5x

Найдем еще дополнительные точки согласно уравнения (1):

x	-4	-3	0,5	2	3
y_1	0,125	0,24	1,77	0,39	0,2
y_2	3,88	2,76	-2,25	-2,42	-3,2

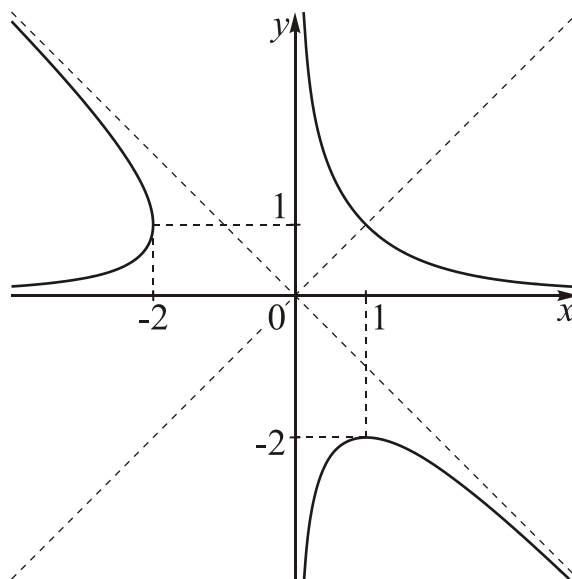
6. Есть подозрение, что для $y_2 = \frac{-x^2 - \sqrt{x^4+8x}}{2x}$ существует экстремум.

Найдем $y'_2 = \frac{2x^4 - 4x^3 + 16x - 8 - 2x^2\sqrt{x^4+8x}}{4x^2\sqrt{x^4+8x}}$. $y'_2 = 0$ при $x=1$.

x	(0;1)	1	(1;+∞)
y'_2	+	0	-
y_2	↗	max	↘

$$y_{2\max} = y_2(1) = -2.$$

7. Строим график функции



50 $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$ (строфоида^{*)}) ($a > 0$).

1. $y = \pm|x|\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ - функция двузначная, график симметричен относительно оси Ox .

$$\frac{a+x}{a-x} \geq 0 \Rightarrow (a+x)(a-x) \geq 0 \begin{cases} a+x \geq 0, \\ a-x < 0 \end{cases} \Rightarrow -a \leq x < a.$$

$$y = \pm|x|\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \begin{cases} \mp x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, & -a \leq x \leq 0, \\ \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, & 0 < x < a. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ на отрезке $-a \leq x < a$. Отразив ее симметрично относительно оси Ox , получим график функции $y = \pm|x|\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

2. $y = 0$ при $x = -a$ и $x = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow a-0} y = +\infty \Rightarrow x = a$ - вертикальная асимптота.

4. $y' = \frac{a^2 + ax - x^2}{(a-x)^2 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}$. $y' = 0$ при $x_1 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{5}) \approx -0,62a$ ($x_2 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,62a$ не

подходит).

^{*)} Строфоидой называют геометрическое место точек M_1 и M_2 (лежащих на произвольных лучах, проходящих через точку A), для которых $PM_1 = PM_2 = OP$ (P – произвольная точка на оси Oy).

x	$(-a; -0,62a)$	$-0,62a$	$(-0,62a; a)$
y'	-	0	+
y	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\min} = y\left(\frac{a}{2}(1 - \sqrt{5})\right) \approx -0,3a.$$

5. $y'' = \frac{a^2(2a+x)}{(a-x)^4 \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^3}}$. $y'' = 0$ при $x = -2a$ (не подходит). Таким образом,

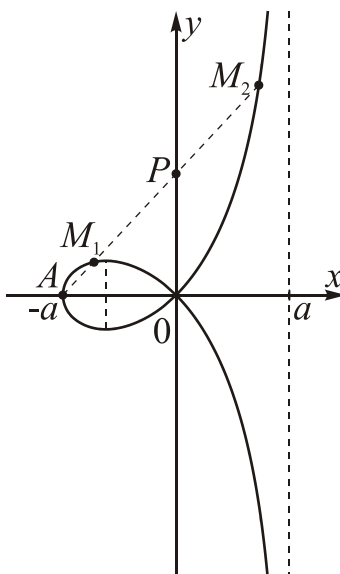
$y'' > 0 \quad \forall x \in [-a; a]$ - функция везде вогнута.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	$-0,75a$	$-0,5a$	$-0,25a$	$0,25a$	$0,5a$	$0,75a$
y	$-0,28a$	$-0,29a$	$-0,19a$	$0,32a$	$0,87a$	$1,98a$

7. Строим график функции

В точке $(0;0)$ $y' = \pm 1$. В этой точке строфоида имеет две касательные $y = x$ и $y = -x$, а ее ветви пересекаются в *узловой точке*^{*)} под прямым углом.



51. $9y^2 = 4x^3 - x^4$.

1. $y = \pm \frac{1}{3} \sqrt{4x^3 - x^4}$; $4x^3 - x^4 \geq 0 \Rightarrow x^3(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$. Функция

двузначная, ее график симметричен относительно оси Ox .

*) Узловая точка – это точка самопересечения, т.е. в ней кривая касается самой себя.

2. Рассмотрим $y = \frac{1}{3}\sqrt{4x^3 - x^4}$, так как $0 \leq x \leq 4$, то $y = \frac{x}{3}\sqrt{4x - x^2}$.

3. $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 4$.

4. $y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{x(3-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$. $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 3$.

x	$(0;3)$	3	$(3;4)$
y'	+	0	-
y	↗	max	↘

$$y_{\max} = y(3) = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

5. $y'' = \frac{2}{3} \cdot \frac{x(x^2 - 6x + 6)}{\sqrt{(4x - x^2)^3}}$. $y'' = 0$ при $x = 0$ и $x = 3 - \sqrt{3} \approx 1,27$.

x	$(0;1,27)$	1,27	$(1,27;4)$
y''	+	0	-
y	∪	пер.	∩

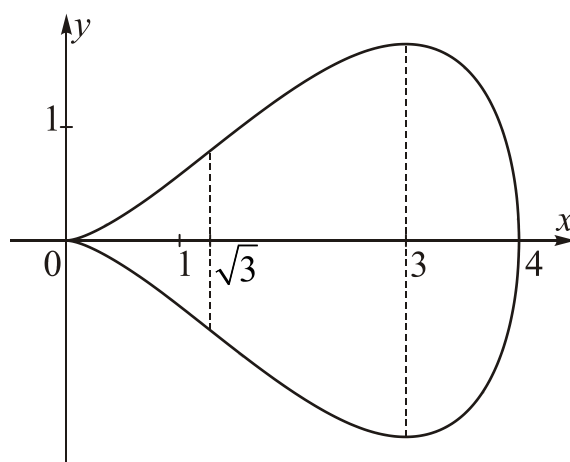
$$y_{\text{пер}} = y(1,27) \approx 0,79.$$

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3,5
y	0,22	0,58	0,37	1,33	1,61	1,54

7. Асимптот нет.

8. Строим график функции



52. $25y^2 = x^2(4 - x^2)^3$.

1. $y = \pm \frac{x}{5}\sqrt{(4 - x^2)^3}$ $x \in [-2;2]$, график симметричен относительно координатных осей.

2. Рассмотрим $y = \frac{x}{5}\sqrt{(4 - x^2)^3}$, $y' = \frac{4}{5}\sqrt{4 - x^2}(1 - x^2)$. $y' = 0$ при $x = \pm 1$.

x	$(-2;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;2)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$

$$y_{\min} = y(-1) = -\frac{3\sqrt{3}}{5} \approx -1,04;$$

$$y_{\max} = y(1) = \frac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1,04.$$

$$3. \quad y'' = \frac{12x(x^2 - 3)}{5\sqrt{4 - x^2}}. \quad y'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \pm\sqrt{3}.$$

x	$(-2;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};2)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cap$	пер.	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{5} = -0,35;$$

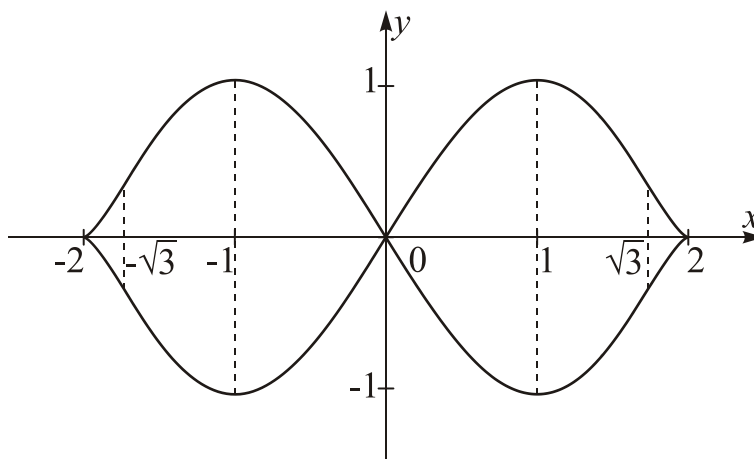
$$y_{\text{пер}} = y(0) = 0;$$

$$y_{\text{пер}} = y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0,35.$$

4. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,25	0,5	1,5
y	0,39	0,73	0,70

5. Строим график функции



$$53. \quad y^2 = x^2 - x^4.$$

1. Функция двузначная, четная, симметричная относительно координатных осей.

2. Пересечения с координатными осями: $y = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 1$.

$$3. \quad y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}. \quad x^2 - x^4 \geq 0, \quad x^2(1 - x^2) \geq 0 \Rightarrow x \in [-1; 1].$$

$$4. \quad \text{Берем } y = \sqrt{x^2 - x^4}; \quad y' = \frac{x(1 - 2x^2)}{\sqrt{x^2 - x^4}}. \quad y' = 0 \text{ при } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,71. \quad \exists y' \text{ при } x = 0.$$

x	$\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$	$y_{\max 1} = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2};$
y'	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	$y_{\min} = y(0) = 0;$
y	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$	$y_{\max 2} = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

Представим производную в виде $y' = \frac{x(1-2x^2)}{|x|\sqrt{1-x^2}}$. В точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} y' = \lim_{x \rightarrow 0-0} -\frac{x(1-2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0-0} -\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} y' = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x(1-2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}} = 1 \Rightarrow (0;0) -$$

угловая*) точка графика с двумя разными касательными.

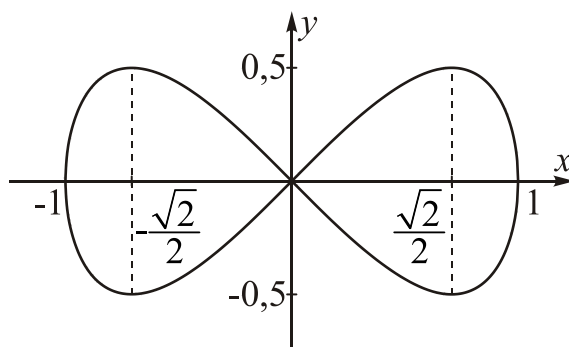
5. $y'' = \frac{x^4(2x^2-3)}{\sqrt{(x^2-x^4)^3}}$. $y'' = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ (не подходит).

x	$(-1;0)$	0	$(0;1)$
y''	$-$	0	$-$
y	$\cap$		$\cap$

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,25	0,4	0,5	0,6	0,9
y	0,24	0,37	0,43	0,48	0,39

7. Строим график функции



54. $x^2 y^2 = 4(x-1)$.

1. Функция определена при $x \geq 1$, двузначная, график симметричен относительно оси Ox .

*) Угловая точка кривой $y = f(x)$ - такая особая точка функции $f(x)$, в которой производная не определена, но существуют различные односторонние пределы отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow +0$ и $\Delta x \rightarrow -0$.

2. $y = \pm \frac{2\sqrt{x-1}}{x}$. Рассмотрим $y = 2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}$.

3. $y' = \frac{2-x}{x^2\sqrt{x-1}}$. $y' = 0$ при $x = 2$; $y' = \infty$ при $x = 0$ и $x = 1$ (не подходят).

x	(1;2)	2	(2;+∞)
y'	+	0	-
y	↗	max	↘

$y_{\max} = y(2) = 1$.

4. $y'' = \frac{3x^2 - 12x + 8}{2x^3\sqrt{(x-1)^3}}$. $y'' = 0$ при $x = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ (не подходит) и $x = \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \approx 3,16$.

x	(1;3,16)	3,16	(3,16;+∞)
y''	-	0	+
y	∩	пер.	∪

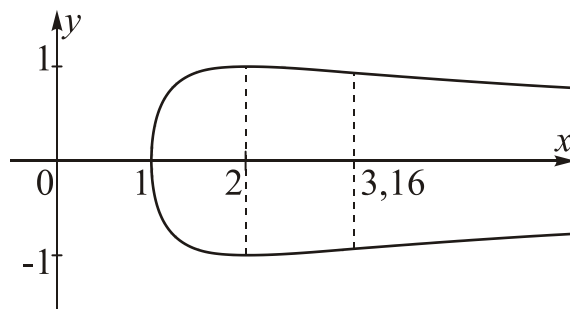
$y_{\text{пер}} = y\left(\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) \approx 0,93$.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	1,5	2	3	4	5	6
y	0,94	1	0,94	0,87	0,8	0,75

7. Строим график функции



55. $y^2(2a-x) = x^3$ ($a > 0$) – циссоида*).

1. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$. Функция определена при $0 \leq x < 2a$, двузначная, график симметричен относительно оси абсцисс.

2. Берем $y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$; $y' = \frac{\sqrt{x}(3a-x)}{\sqrt{(2a-x)^3}}$. $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 3a$ (не подходят).

$y' = \infty$ при $x = 2a$ (не подходит). Точек экстремума нет. Так как $y' > 0$ $\forall x \in [0; 2a)$, функция возрастает на всей области определения.

*) Циссоида – геометрическое место точек M , для которых $OM = PQ$, P – произвольная точка *производящего* круга с диаметром $2a$ (см. далее рисунок).

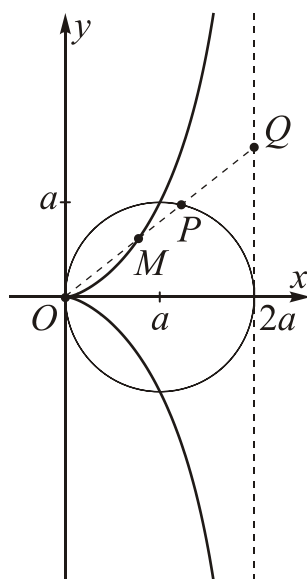
3. $y'' = \frac{3a^2}{\sqrt{x(2a-x)^5}} > 0 \quad \forall x \in [0; 2a)$. Кривая вогнута для $y > 0$, точек перегиба нет.

4. $\lim_{x \rightarrow 2a-0} \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} = \infty \Rightarrow x = 2a$ - вертикальная асимптота.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	0	$0,5a$	a	$1,5a$	$1,7a$	$1,75a$
y	0	$0,29a$	a	$2,60a$	$4,05a$	$4,63a$

6. Строим график функции



56. $13x^2y^2 = (13x-15)(x-3)$.

1. $(13x-15)(x-3) \geq 0$, при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{15}{13}\right] \cup [3; +\infty)$; функция двузначная.

2. $y = \pm \frac{1}{x} \sqrt{\left(x - \frac{15}{13}\right)(x-3)}$; $y\left(\frac{15}{13}\right) = 0$; $y(3) = 0$. Берем $y = \frac{\sqrt{\left(x - \frac{15}{13}\right)(x-3)}}{x}$, график симметричен относительно оси Ox .

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\left(x - \frac{15}{13}\right)(x-3)}}{x} = \pm\infty \Rightarrow x = 0$ (ось Oy) - вертикальная асимптота.

Наклонная асимптота $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\left(x - \frac{15}{13}\right)(x-3)}}{x^2} = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{13x^2 - 54x + 45}{13x^2}} = 1.$$

$y = \pm 1$ (для обеих ветвей) - горизонтальная асимптота.

4. $y' = \frac{9 \cdot (3x-5)}{x^2 \sqrt{13(13x-15)(x-3)}}$. $y' = 0$ при $x = \frac{5}{3}$ (не входит в ОДЗ); $y' = \infty$ при $x = 0$ (не входит в ОДЗ).

x	$(-\infty; 0)$	$\left(0; \frac{15}{13}\right)$	$(3; +\infty)$
y'	-	-	+
y	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Экстремумов нет.

5. $y'' = \frac{54 \cdot (13x^3 - 73x^2 + 135x - 75)}{x^3 \sqrt{13(13x-15)(x-3)}}$. $y'' = 0$ при $x = 1$ (находим путем подбора).

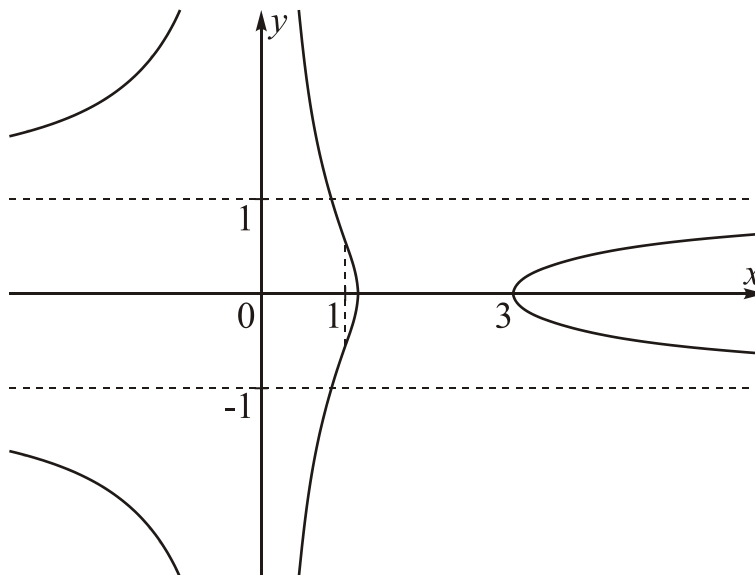
x	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	1	$\left(1; \frac{15}{13}\right)$	$(3; +\infty)$
y''	+	+	0	-	-
y	$\cup$	$\cup$	пер.	$\cap$	$\cap$

$$y_{\text{пер}}(1) = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0,56.$$

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	-3	-2	-1	0,5	4	5	6
y	-1,66	-1,99	-2,94	2,56	0,42	0,56	0,64

7. Строим график функции



57. $x^2 y^2 = (a+x)^3(a-x)$ - конхоида ($a > 0$)*).

1. $y^2 = \frac{(a+x)^3(a-x)}{x^2}$.

*) Конхоида Никомеда – это геометрическое место точек M , для которых $AM = PA \pm a$ (“+” для правой ветви, “-” – для левой, см. далее рисунок).

$$2. \quad y = \pm \frac{(a+x)\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \pm \left(a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \sqrt{a^2-x^2} \right). \quad \text{График} \quad \text{симметричен}$$

относительно оси Ox .

Берем $y = a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \sqrt{a^2-x^2}$, $x \in [-a; 0) \cup (0; a]$.

$$3. \quad y' = a \frac{-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}}{x^2} - \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^3+a^3}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}. \quad \text{Экстремумов нет. } y' < 0$$

$\forall x \in (-a; 0) \cup (0; a)$, функция убывает на всей области определения.

$$4. \quad y'' = -\frac{3x^2 \cdot x^2 \sqrt{a^2-x^2} - (x^3+a^3) \left(2x\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} \right)}{x^4(a^2-x^2)} = \frac{-a^2(x^3+3ax^2-2a^3)}{x^3(a^2-x^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{a(x+a)(x^2+2ax-2a^2)}{x^3(a^2-x^2)^{3/2}}. \quad y'' = 0: \quad x = -a \quad (\text{не подходит}); \quad x^2+2ax-2a^2 = 0,$$

$x = -a \pm \sqrt{a^2+2a^2} = a(-1 \pm \sqrt{3})$. Подходит $x = a(\sqrt{3}-1) \approx 0,73a$.

x	$(-a; 0)$	$(0; 0,73a)$	$0,73a$	$(0,73a; a)$
y''	-	+	0	-
y	$\cap$	$\cup$	пер.	$\cap$

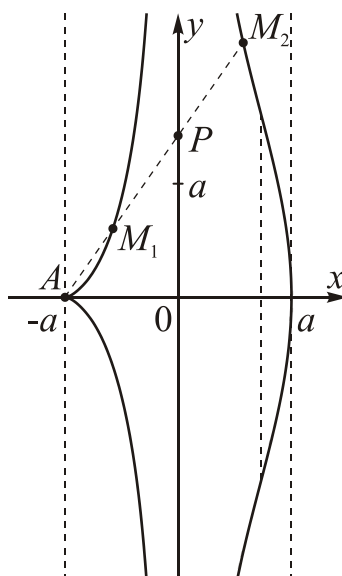
$$y_{\text{пер.}} = a \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-(1-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}-1} \approx 1,61a.$$

5. $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, значит $x = 0$ - вертикальная асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	$-a$	$-0,75a$	$-0,5a$	$-0,25a$	$0,25a$	$0,5a$	$0,75a$
y	0	$-0,22a$	$-0,87a$	$-2,91a$	$4,84a$	$2,60a$	$1,54a$

7. Строим график функции



58. $16y^2 = (x^2 - 4)^2(1 - x^2)$.

1. Функция определена при $-1 \leq x \leq 1$ и $x = \pm 2$, двузначная. График симметричен относительно осей координат. Имеет две изолированные точки: $(\pm 2; 0)$.

2. $y = \pm \frac{(x^2 - 4)\sqrt{1 - x^2}}{4}$. Берем $y = \frac{(x^2 - 4)\sqrt{1 - x^2}}{4}$.

$y' = \frac{3}{4} \cdot \frac{x(2 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$. $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{2}$ (не подходит); $y' = \infty$ при $x = \pm 1$.

x	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$
y'	-	0	+
y	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{\min} = y(0) = -1$.

3. $y'' = \frac{3}{4} \cdot \frac{2x^4 - 3x^2 + 2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$. $\forall x \in (-1; 1) \quad y'' > 0 \Rightarrow$ кривая вогнута. Точек перегиба

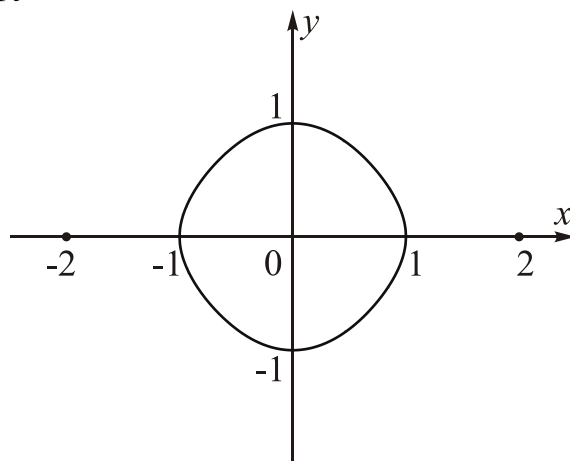
нет.

4. Асимптот нет.

5. Значения функции в дополнительных точках

x	0,25	0,5	0,75
y	-0,95	-0,81	-0,57

6. Строим график функции



Замечание. Для $y = -\frac{(x^2 - 4)\sqrt{1 - x^2}}{4}$ имеем верхнюю часть кривой.

59. $y^2 = (1 - x^2)^3$.

1. Функция определена при $-1 \leq x \leq 1$, двузначная. График симметричен относительно осей координат.

2. $y = \pm \sqrt{(1 - x^2)^3}$. Берем $y = \sqrt{(1 - x^2)^3}$.

3. $y' = -\frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2} \cdot 2x = -3x\sqrt{1-x^2}$. $y' = 0$ при $x = 0$.

x	$(-1;0)$	0	$(0;1)$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$

$y_{\max} = y(0) = 1.$

4. $y'' = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}(1-2x^2)$. $y'' = 0$ при $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,71$.

x	$\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	пер.	$\cap$	пер.	$\cup$

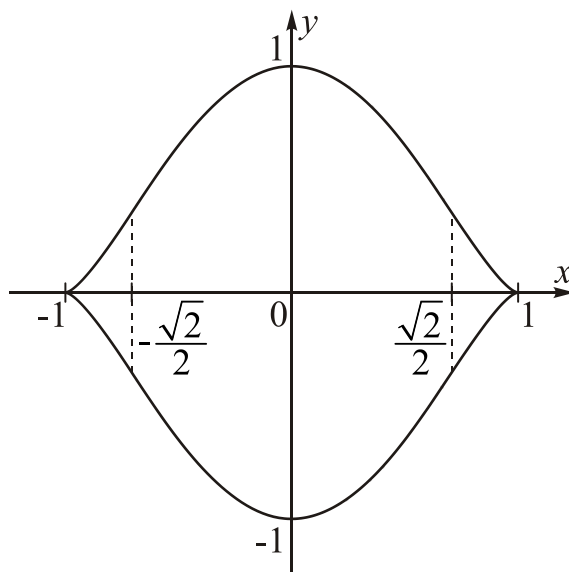
$y_{\text{пер}} = y\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,35.$

5. Асимптот нет.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,25	0,5	0,75
y	0,91	0,65	0,29

7. Строим график функции



Замечание. Для $y = -\sqrt{(1-x^2)^3}$ имеем нижнюю часть кривой.

60. $x^2 y^4 = (x^2 - 1)^3$.

1. $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1$ и $x \geq 1$, функция двузначная, график симметричен относительно координатных осей.

2. $y = \pm \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{x^2}$. Берем $y = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{x^2}$.

$$3. \quad y' = \frac{x(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}{x^4} = \frac{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}{x^3};$$

$\forall x \in (-\infty; -1) \quad y' < 0$ - функция убывает;

$\forall x \in (1; +\infty) \quad y' > 0$ - функция возрастает.

$$4. \quad y'' = \frac{3(2-x^2)}{x^4\sqrt{x^2-1}}. \quad y'' = 0 \text{ при } x = \pm\sqrt{2}.$$

x	$(-\infty; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; -1)$	$(1; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; +\infty)$
y''	-	0	+	+	0	-
y	$\cap$	пер.	$\cup$	$\cup$	пер.	$\cap$

$$y_{\text{пер}} = y(\pm\sqrt{2}) = \pm\frac{1}{2}.$$

5. Асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(x^2-1)^3}{x^6}} = 1;$$

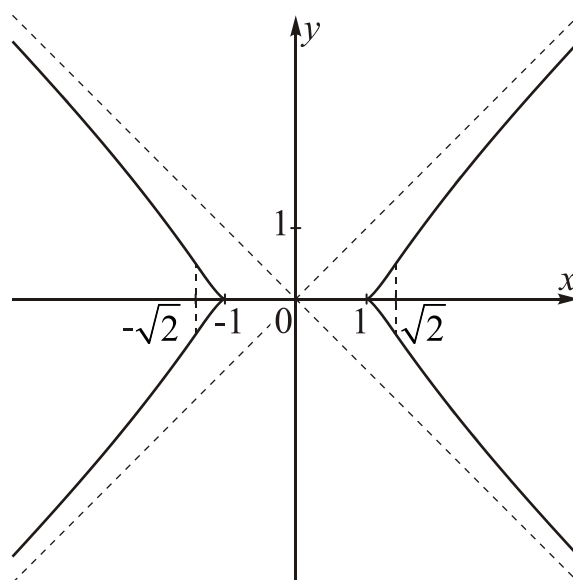
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(x^2-1)^3} - x^3}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{(x^2-1)^3} - x^3 \right) \left(\sqrt{(x^2-1)^3} + x^3 \right)}{x^2 \left(\sqrt{(x^2-1)^3} + x^3 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-1)^3 - x^6}{x^2 \left(\sqrt{(x^2-1)^3} + x^3 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 - x^6}{x^2 \left(\sqrt{(x^2-1)^3} + x^3 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 \left(\sqrt{(x^2-1)^3} + x^3 \right)} \quad (:x^5) = 0. \end{aligned}$$

$y = \pm x$ - наклонные асимптоты.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	2	2,5	3	3,5	4
y	1,30	1,93	2,51	3,08	3,63

7. Строим график функции



Замечание. Для $y = -\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{x^2}$ имеем нижнюю часть графика.

61. $y^2 = 2exe^{-2x}$.

1. $x \geq 0$, функция двузначная. График симметричен относительно оси Ox .

2. $y = \pm\sqrt{2exe^{-2x}}$. Берем $y = \sqrt{2exe^{-2x}}$.

3. $y' = \frac{e \cdot e^{-2x}(1-2x)}{\sqrt{2exe^{-2x}}} = \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot \frac{e^{-2x}(1-2x)}{\sqrt{xe^{-2x}}} = \sqrt{\frac{e}{2}} \cdot \frac{\sqrt{e^{-2x}}(1-2x)}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x}(1-2x)}{\sqrt{2x}}$. $y' = 0$ при $x = \frac{1}{2}$.

x	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$
y'	+	0	-	
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	

4. $y'' = \sqrt{\frac{e}{8}} \cdot \frac{e^{-2x}}{x^3} (4x^2 - 4x - 1)$. $y'' = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Берем $x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,21 \in [0; +\infty)$.

x	$(0; 1,21)$	1,21	$(1,21; +\infty)$	$y_{\text{пер}} = y\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\sqrt{2} + 1} \approx 0,77.$
y''	-	0	+	
y	$\cap$	пер.	$\cup$	

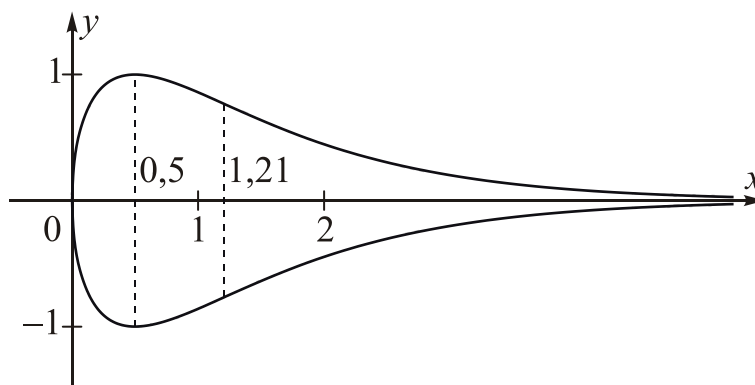
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2ex}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2ex}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2e} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e}}{e^x \cdot \sqrt{2x}} = 0 \Rightarrow$

$y = 0$ - горизонтальная асимптота (ось Ox).

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,25	1	1,5	2	2,5
y	0,91	0,86	0,64	0,45	0,30

7. Строим график функции



Замечание. Для $y = -\sqrt{2exe^{-2x}}$ имеем нижнюю часть кривой.

62. $y = e^{1/x} - x$.

1. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $y' = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} - 1$; $y' < 0$ для $\forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Экстремумов нет, функция всюду убывающая.

3. $y'' = \frac{2x+1}{x^4} e^{1/x}$. $y'' = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$.

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	$(0; +\infty)$
y''	-	0	+	+
y	$\cap$	пер.	$\cup$	$\cup$

$$y_{\text{пер}} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2} + \frac{1}{2} \approx 0,64.$$

4. Асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (e^{1/x} - x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} (e^{1/x} - x) = \infty \Rightarrow x = 0 - \text{вертикальная асимптота.}$$

Наклонная асимптота $y = kx + b$.

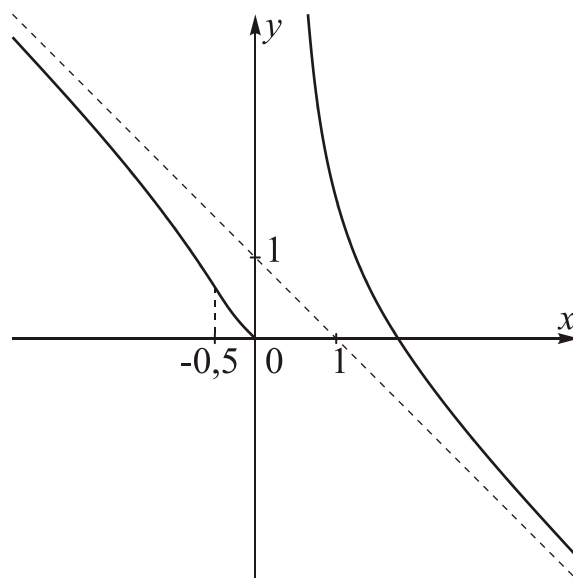
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot e^{1/x} - 1}{1} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{1/x} - x + x) = 1.$$

$y = -x + 1$ - наклонная асимптота.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	3,72	2,61	1,37	1,72	-0,35	-1,60

6. Строим график функции



63. $y = e^{\text{tg } x}$.

1. Функция определена всюду, кроме $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Период $T = \pi$.

2. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x}$. Для всех x из области определения функции $y' > 0$, экстремумов нет.

3. $y'' = \frac{e^{\operatorname{tg} x}(1 + \sin 2x)}{\cos^4 x}$. $1 + \sin 2x \geq 0$, поэтому $y'' \geq 0$ для всех x из области определения функции. Точек перегиба нет, кривая вогнута.

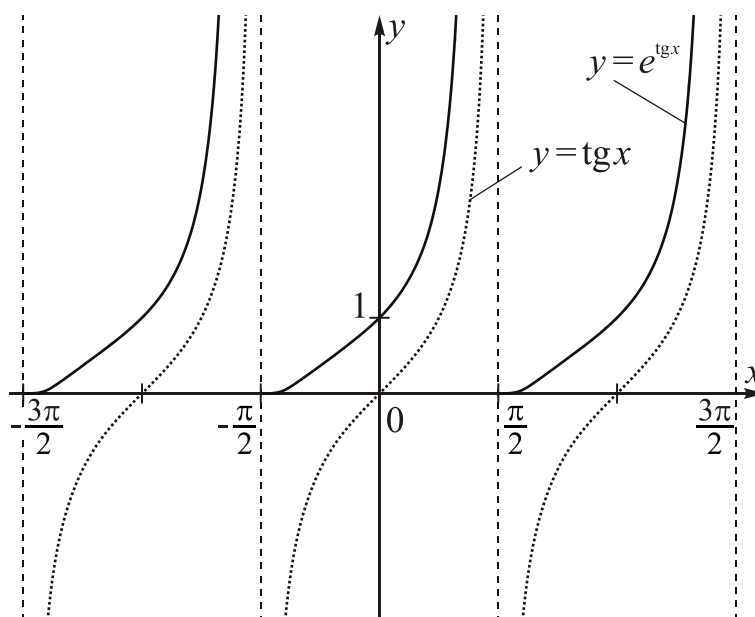
4. Асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi - 0} e^{\operatorname{tg} x} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi + 0} e^{\operatorname{tg} x} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi - \text{вертикальные асимптоты.}$$

5. Значение функции в дополнительных точках

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
y	0,18	0,37	0,56	1	1,78	2,72	5,65

6. Строим график функции



64. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$.

1. Функция определена на всей числовой оси. $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x) \Rightarrow$ график симметричен относительно оси Oy .

2. $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow$ точки экстремума удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} x = x$. Возьмем $x = 0$. Это точка максимума, т.к. при $-\pi < x < 0$ $y' > 0$, при $0 < x < \pi$ $y' < 0$.

3. $y = 0$ при $x = \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) – нули функции.

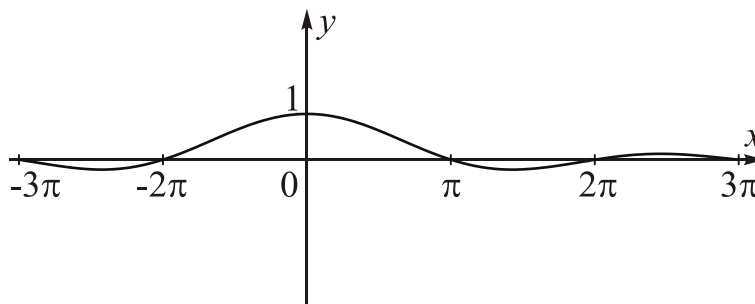
4. При $x \rightarrow \pm\infty$ график асимптотически приближается к оси Ox .

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
y	0,90	0,64	0,30	-0,18	-0,21	-0,13

7. Строим график функции



65. $y = 1 - xe^{-1/|x|-1/x}$.

1. Функция определена на всей числовой оси и $y = \begin{cases} 1 - xe^{-2/x}, & x > 0, \\ 1 - x, & x \leq 0. \end{cases}$

2. Пересечения с координатными осями: $x = 0$ при $y = 1$, $y = 0$ при $x \approx 2,36$.

3. $y' = -e^{-2/x} \left(\frac{2}{x} + 1 \right)$. $\lim_{x \rightarrow 0+0} y' = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{2}{x} + 1}{e^{2/x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2} e^{2/x}} = 0$;

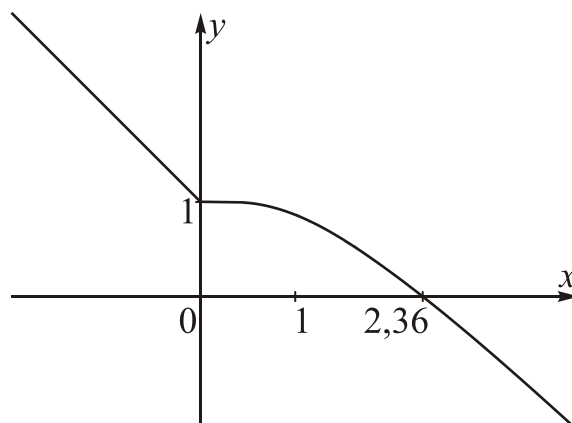
$y' = -1$. $y(0) = 1$, точка $(0;1)$ - угловая точка кривой, т.е. в ней существуют при проходе слева и справа две различные касательные.

4. $y'' = -\frac{4e^{-2/x}}{x^3} > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$ - кривая выпуклая.

5. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,5	1	2	3	4
y	0,99	0,86	0,26	-0,54	-1,43

6. Строим график функции



66. $y = x^2 - 4|x| + 3$.

1. Функция определена всюду. График симметричен относительно оси Oy .

2. Пересечения с координатными осями: $y = 0$ при $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ и $x = 3$; $y = 3$ при $x = 0$.

3. Для $x \geq 0$ $y = x^2 - 4x + 3$, $y' = 2x - 4$. $y' = 0$ при $x = 2$. $y'' = 2 > 0 \forall x \in [0; +\infty) \Rightarrow$ кривая вогнута и $x = 2$ - точка минимума, $y_{\min} = -1$.

4. $y(0) = 3$. Дадим $x = 0$ приращение $\Delta x < 0$:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 3 = (x^2 + 4x + 3) + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 4\Delta x.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta y = 2 \cdot 0 \cdot \Delta x + \Delta x(4 + \Delta x) < 0. \text{ Дадим } x = 0 \text{ приращение } \Delta x > 0: \\ (x=0) \\ (\Delta x < 0) \end{array} \right\}$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 3 = (x^2 - 4x + 3) + 2x \cdot \Delta x + \Delta x(\Delta x - 4).$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta y = 2 \cdot 0 \cdot \Delta x + \Delta x(4 + \Delta x) < 0. \\ (x=0) \\ (\Delta x > 0) \end{array} \right\}$$

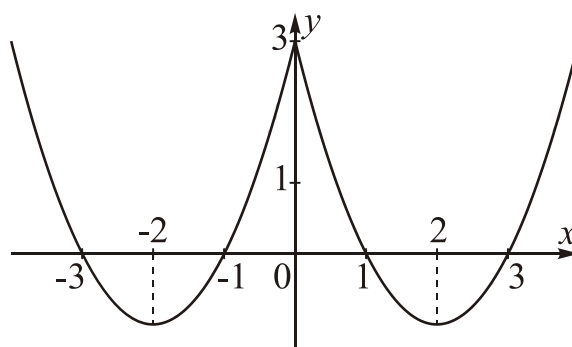
По определению $x = 0$ - точка максимума.

5. Для $x < 0$ $y = x^2 + 4x + 3$, $y' = 2x + 4$; $\lim_{x \rightarrow 0-0} y' = 4$; $\lim_{x \rightarrow 0+0} y' = -4 \Rightarrow (0; 3)$ - угловая точка графика с двумя разными касательными.

6. Значения функции в дополнительных точках:

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4
y	1,25	-0,75	-0,75	1,25	3

7. Строим график функции



§2. ГРАФИКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то исследование и построение кривой проводится аналогично тому, как это делалось для кривой $y = f(x)$.

1. Симметрия.

Если $x(t)$ - четная, а $y(t)$ - нечетная функции, то кривая симметрична относительно оси абсцисс.

Если $x(t)$ - нечетная, а $y(t)$ - четная функции, то кривая симметрична относительно оси ординат.

Если $x(t)$ и $y(t)$ - нечетные функции, то кривая симметрична относительно начала координат.

Однако, следует отметить, что это достаточные признаки, но не необходимые.

2. Точки пересечения с осями координат.

Из уравнения $y(t) = 0$ находим значения t , которые определяют точки пересечения кривой с осью абсцисс.

Из уравнения $x(t) = 0$ находим значения t , которые определяют точки пересечения кривой с осью ординат.

3. Интервалы возрастания и убывания функции.

Вначале вычисляем производные x'_t и y'_t . Для тех точек кривой, вблизи которых кривая является графиком некоторой функции $y = f(x)$ вычисляем производную

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (1)$$

Находим значение параметра $t = t_1, t_2, \dots, t_k$, при которых хотя бы одна из производных x'_t или y'_t обращается в ноль или терпит разрыв. Такие значения t мы будем называть критическими значениями. По формуле (1) в

каждом из интервалов $(t_1, t_2); (t_2, t_3); \dots; (t_{k-1}, t_k)$, а следовательно, и в каждом из интервалов $(x_1, x_2); (x_2, x_3); \dots; (x_{k-1}, x_k)$ (где $x_i = x(t_i)$) определяем знак y'_t , тем самым определяем области возрастания и убывания.

Из условий $y'_t = 0$, $x'_t \neq 0$ определяем значения параметра t соответствующие точкам, в которых касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

Из условий $x'_t = 0$, $y'_t \neq 0$ определяем значения параметра t соответствующие точкам, в которых касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

4. Интервалы выпуклости и вогнутости.

Далее, вычисляем

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_t - x'_t y'_t}{(x'_t)^3}. \quad (2)$$

На основании формулы (2) определяем направление выпуклости и вогнутости кривой в каждой точке, т.е. находим значения t , удовлетворяющие систему уравнений

$$\begin{cases} x'_t y''_t - x'_t y'_t = 0, \\ x'_t \neq 0, \end{cases}$$

и проверяем, меняет ли вторая производная знак при прохождении через них.

5. Точки возврата.

В точке возврата должны выполняться равенства

$$x'(t) = 0 \text{ и } y'(t) = 0 \quad (x''_t y''_t - y''_t x''_t \neq 0),$$

т.е. в этой точке угловой коэффициент не определен.

6. Асимптоты кривой.

Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = a$, если одновременно выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = \infty.$$

Кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = b$, если одновременно выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = b.$$

Для определения наклонных асимптот $y = kx + b$ надо найти такое значение $t = t_1$ параметра, при котором $x = \infty$ и $y = \infty$. Если такое значение t найдено, то k и b определяем по формулам

$$k = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t \rightarrow t_1} (y(t) - kx(t)),$$

причем пределы, стоящие в правых частях этих формул, существуют.

Некоторые особенности построения выясним на примерах.

В задачах 67-71 исследовать функции, заданные параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, и начертить графики.

67. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.

1. $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t , а $y(x)$ - при всех x .

2. Если $y = 0 \Rightarrow t^3 - 3t + 1 = 0$, откуда $t_1 \approx 1,53$, $t_2 \approx -1,88$, $t_3 \approx 0,35$.

$x_1 = x(t_1) \approx 9,19$, $x_2 = x(t_2) \approx -11,28$, $x_3 = x(t_3) \approx 0,35$.

Если $x = 0 \Rightarrow t^3 + 3t + 1 = 0$, откуда $t_4 = -0,32$. $y_4 = y(t_4) \approx 1,93$

Таким образом, $M_1(9,19;0)$, $M_2(-11,28;0)$, $M_3(0,35;0)$ и $M_4(0;1,93)$ - точки пересечения с осями координат.

3. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $y'_x = 0$ при $t_{5,6} = \pm 1$. $x_5 = x(1) = 5$; $x_6 = x(-1) = -3$. $y_5 = y(1) = -1$;

$y_6 = y(-1) = 3$, т.е. точки $M_5(5;-1)$ и $M_6(-3;3)$ такие, что в них касательные параллельны оси Ox .

При $|t| < 1$ $y'_x < 0$, а при $|t| > 1$ $y'_x > 0$.

Область изменения t	Область изменения x	Область изменения y	Знак y'_x	$y = f(x)$
$-\infty < t < -1$	$-\infty < x < -3$	$-\infty < y < 3$	+	$\nearrow$
$-1 < t < 1$	$-3 < x < 5$	$3 < y < -1$	-	$\searrow$
$1 < t < +\infty$	$5 < x < +\infty$	$-1 < y < +\infty$	+	$\nearrow$

В точке $M_5(5;-1)$ кривая имеет min; в точке $M_6(-3;3)$ - max.

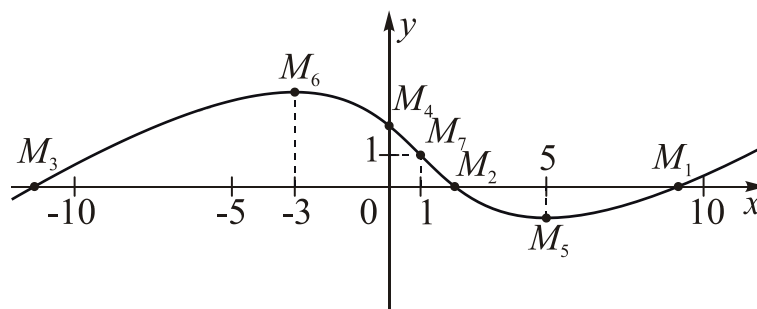
$$4. \quad y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3} = \frac{(3t^2 + 3)6t - (3t^2 - 3)6t}{27(t^2 + 1)^3} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}.$$

При $t < 0$ $y'' < 0$ - кривая выпукла; при $t > 0$ $y'' > 0$ - кривая вогнута; при $t = 0$ $M_7(1;1)$ - точка перегиба.

5. Если $t \rightarrow \infty$, то $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$, но $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - x(t)) = -6 \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty$.

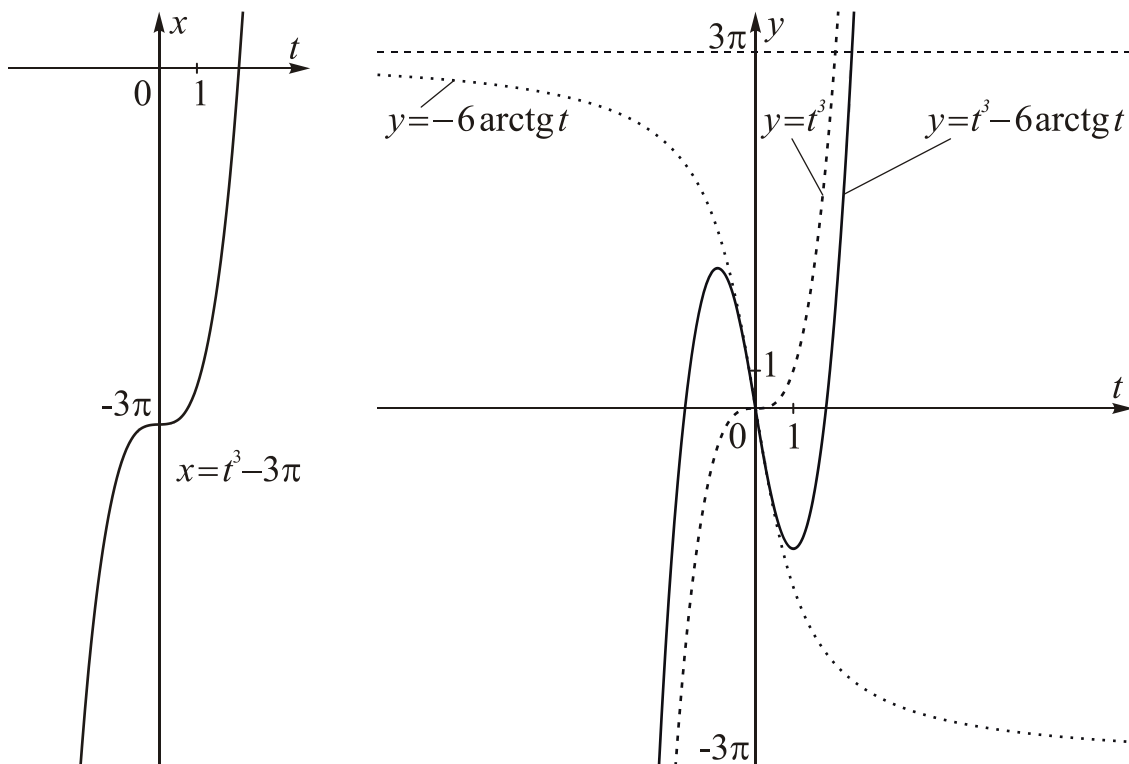
Асимптот нет.

6. Строим график функции



68. $x = t^3 - 3\pi$; $y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t$.

1. Строим графики функций $x = t^3 - 3\pi$ и $y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t$.



Область определения: $t \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений первой функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений второй функции: $y \in (-\infty; +\infty)$.

2. Точки пересечения с осями координат:

а) с осью Ox : $y = 0 \Rightarrow t^3 = 6 \arctg t$, $t_1 = 0$, $x_1 = x(t_1) = -3\pi \approx -9,43$, $M_1(-3\pi; 0)$;
 $t_2 \approx -1,86$, $x_2 = x(t_2) \approx -15,89$, $M_2(-15,89; 0)$; $t_3 \approx 1,86$, $x_3 = x(t_3) \approx -2,96$,
 $M_3(-2,96; 0)$;

б) с осью Oy : $x = 0 \Rightarrow t^3 = 3\pi$, $t_4 = \sqrt[3]{3\pi} \approx 2,11$; $y_4 = y(t_4) \approx 2,65 \Rightarrow M_4(0; 2,65)$.

3. Точки, в которых касательные параллельны осям координат:

а) Оси Ox : $y'_x = 0 \Rightarrow x'_y = 0 \Rightarrow \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 - \frac{6}{1+t^2}}{3t^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3t^2 - \frac{6}{1+t^2} = 0, \\ 3t^2 \neq 0. \end{cases}$ Решение

этой системы сводится к решению уравнения $t^4 + t^2 - 2 = 0$, действительные корни которого $t_5 = 1$ и $t_6 = -1$. $x_5 = x(t_5) = 1 - 3\pi \approx -8,43$,

$y_5 = y(t_5) = 1 - 6 \cdot \frac{\pi}{4} \approx -3,71$, $M_5(-8,43; -3,71)$; $x_6 = x(t_6) \approx -10,42$, $y_6 = y(t_6) \approx 3,71$,
 $M_6(-10,42; 3,71)$.

б) Оси Oy : $\frac{x'_t}{y'_t} = \frac{3t^2}{3t^2 - \frac{6}{1+t^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3t^2 = 0, \\ 3t^2 - \frac{6}{1+t^2} \neq 0. \end{cases}$ Решением этой системы

является значение $t = 0$, которое соответствует ранее найденной точке $M_1(-3\pi; 0)$.

Область изменения t	Область изменения x	Область изменения y	Знак y'_x	$y = f(x)$
$-\infty < t < -1$	$-\infty < x < -10,42$	$-\infty < y < 3,71$	+	↗
$-1 < t < 1$	$-10,42 < x < -8,83$	$3,71 > y > -3,71$	-	↘
$1 < t < +\infty$	$-8,83 < x < +\infty$	$-3,71 < y < +\infty$	+	↗

4. Вертикальных и горизонтальных асимптот нет, поскольку не существует таких значений t , при которых $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$ и $x \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow b$.

Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^3 - 6 \arctg t}{t^3 - 3\pi} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^3 - 6 \arctg t - t^3 + 3\pi) = 6\pi. \text{ Значит}$$

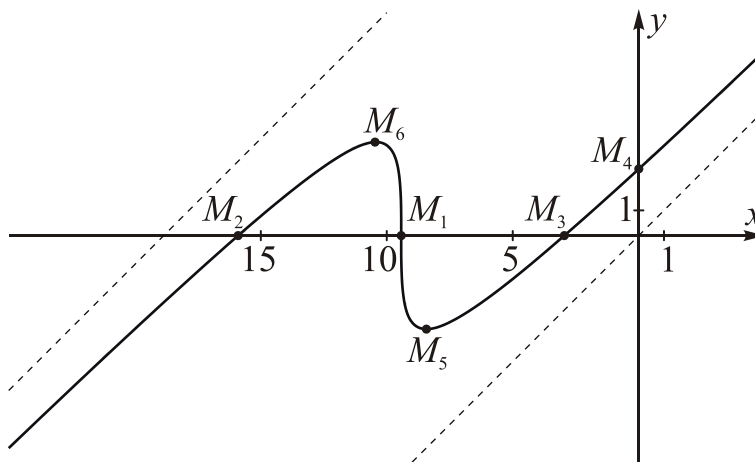
$y = x + 6\pi$ - наклонная асимптота. Если $x \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), то $k=1$, $b=0$ и

$y = x$ - вторая наклонная асимптота.

5. Значения функции в дополнительных точках:

t	-2	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2
x	-17,42	-12,80	-9,55	-9,30	-6,05	-1,42
y	-1,36	2,52	2,66	-2,66	-2,52	1,36

6. Строим график функции



69. $x = \frac{3t}{1+t^3}$; $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ (лист Декарта).

1. Область определения функции: при всех t , кроме $t = -1$.

$$\lim_{t \rightarrow -1-0} x = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3t}{1+t^3} = +\infty; \quad \lim_{t \rightarrow -1-0} y = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3t^2}{1+t^3} = -\infty; \quad \lim_{t \rightarrow -1+0} x = -\infty; \quad \lim_{t \rightarrow -1+0} y = +\infty.$$

2. При $t=0$, $x=0$ и $y=0$; при $t \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$; при $t \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$.

3. $x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$; $y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$. Критические значения t : $-1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Из последнего уравнения следует, что $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{t=0 \\ x=0 \\ y=0}} = 0$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{t=\infty \\ x=0 \\ y=0}} = \infty$.

Следовательно, начало координат кривая пересекает дважды, с касательной, параллельной оси Ox , и с касательной, параллельной оси Oy .

На основании этих данных составляем таблицу.

Область изменения t	Область изменения x	Область изменения y	Знак y'_x	$y = f(x)$
$-\infty < t < -1$	$0 < x < +\infty$	$0 > y > -\infty$	-	↘
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$+\infty > y > 0$	-	↘
$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < \sqrt[3]{4}$	$0 < y < \sqrt[3]{2}$	+	↗
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{4} > x > \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < y < \sqrt[3]{4}$	-	↘
$\sqrt[3]{2} < t < +\infty$	$\sqrt[3]{2} > x > 0$	$\sqrt[3]{4} < y < 0$	+	↗

Далее $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{\substack{t=\sqrt[3]{2} \\ x=\sqrt[3]{2} \\ y=\sqrt[3]{4}}} = 0 \Rightarrow M_1(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$ - в этой точке касательная к кривой

горизонтальна.

$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x=\sqrt[3]{4} \\ y=\sqrt[3]{2}}} = \infty \Rightarrow M_2(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$ - в этой точке касательная к кривой вертикальна.

4. Асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3t^2(1+t^3)}{3t(1+t^3)} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow -1-0} \left(\frac{3t^2}{1+t^3} + \frac{3t}{1+t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3t}{1-t+t^2} = -1.$$

$y = -x - 1$ - наклонная асимптота кривой при $x \rightarrow +\infty$.

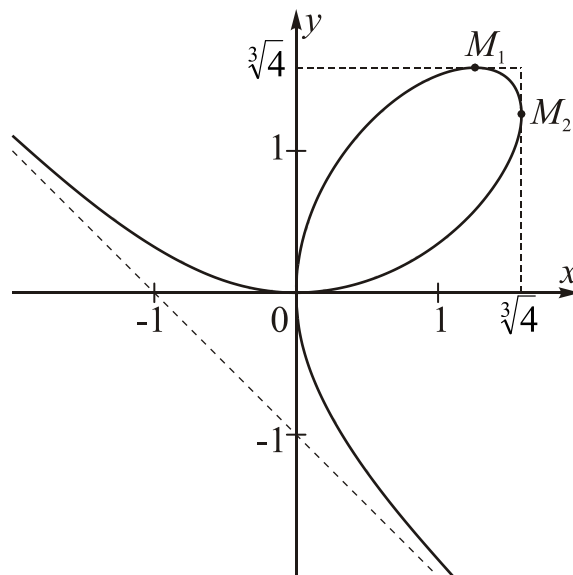
Аналогично при $x \rightarrow -\infty$ находим: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -1$; $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = -1$.

$y = -x - 1$ - наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

5. Значения функции в дополнительных точках:

t	-2	-0,5	1	0,5	2
x	0,86	-1,71	1,5	1,33	0,67
y	-1,71	0,86	1,5	0,67	1,33

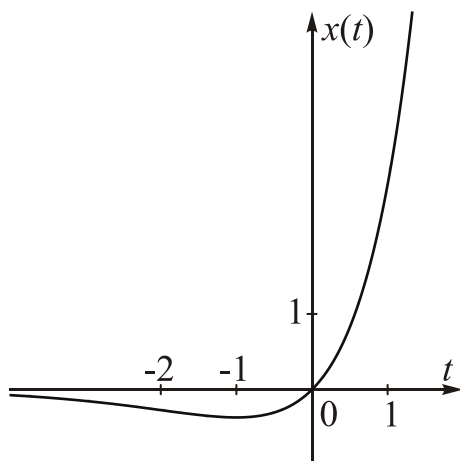
6. Строим график функции



$O(0;0)$ - угловая точка, с касательными – осями координат.

70. $x = te^t$; $y = te^{-t}$.

1. Строим графики функций $x = te^t$ и $y = te^{-t}$.

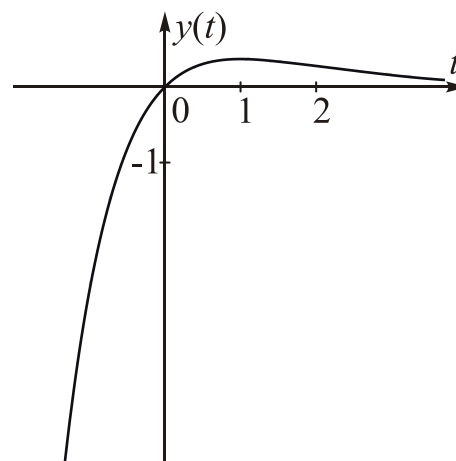


При $t \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 0$;

При $t = -1$ $x_{\min} = -e^{-1}$.

При $t \in (-\infty; +\infty)$ $x \in [-e^{-1}; +\infty)$,

$t = -2$ - точка перегиба.



При $t \rightarrow -\infty$ $y \rightarrow 0$;

При $t = 1$ $y_{\max} = e^{-1}$.

При $t \in (-\infty; +\infty)$ $y \in (-\infty; e^{-1}]$,

$t = 2$ - точка перегиба.

2. Исследуем функцию $y = y(x)$.

Область определения: $t \in (-\infty; +\infty)$. Область значений функций: $x \in [-e^{-1}; +\infty)$,
 $y \in (-\infty; e^{-1}]$.

3. Если $y = -x$ - прямая, относительно которой график функции симметричен, то если точка (x, y) принадлежит кривой, то и точка $(-x; -y)$ принадлежит этой же кривой.

Если $(x, y) = (te^t, te^{-t})$ принадлежит кривой, то $xy = t^2$. Тогда и $(-x; -y) = (-te^{-t}; -te^t)$ принадлежит той же кривой, т.к. $(-y)(-x) = xy = t^2$.

Значит график функции симметричен относительно прямой $y = -x$.

4. $x = 0$ и $y = 0$ только при $t = 0$, т.е. график пересекается с осями координат только в точке $M_1(0;0)$.

5. $x'_t = e^t(1+t)$; $y'_t = e^{-t}(1-t)$.

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{-t}(1-t)}{e^t(1+t)}$, $y'_x = 0$ при $t_2 = 1$ ($x_2 = e \approx 2,72$; $y_2 = e^{-1} \approx 0,37$). Значит в точке

$M_2(2,72; 0,37)$ касательная к кривой параллельна оси Ox .

$x'_y = \frac{x'_t}{y'_t} = \frac{e^t(1+t)}{e^{-t}(1-t)}$, $x'_y = 0$ при $t_3 = -1$ ($x_3 = -e^{-1} \approx -0,37$; $y_3 = -e \approx -2,72$). Значит в

точке $M_3(-0,37; -2,72)$ касательная к кривой параллельна оси Oy .

На основании этих данных составляем таблицу.

Область изменения t	Область изменения x	Область изменения y	Знак y'_x	$y = f(x)$
$-\infty < t < -1$	$0 > x > -e^{-1}$	$-\infty < y < -e$	-	$\searrow$
$-1 < t < 1$	$-e^{-1} < x < e$	$-e < y < e^{-1}$	+	$\nearrow$
$1 < t < +\infty$	$e < x < +\infty$	$e^{-1} > y > 0$	-	$\searrow$

6. $x''_t = e^t(2+t)$; $y''_t = -e^{-t}(2-t)$.

$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t} = \frac{2(t^2 - 2)}{e^{3t}(1+t)^3}$; $y''_{xx} = 0$ при $t_4 = \sqrt{2}$ и при $t_5 = -\sqrt{2}$. Таким образом,

$M_4(5,82; 0,34)$ и $M_5(-0,34; -5,81)$ являются точками перегиба.

При $t < -\sqrt{2}$ $y''_{xx} < 0$ (кривая выпукла); при $-\sqrt{2} < t < -1$ $y''_{xx} > 0$ (кривая вогнута); при $-1 < t < \sqrt{2}$ $y''_{xx} < 0$ (кривая выпукла); при $t > \sqrt{2}$ $y''_{xx} > 0$ (кривая вогнута).

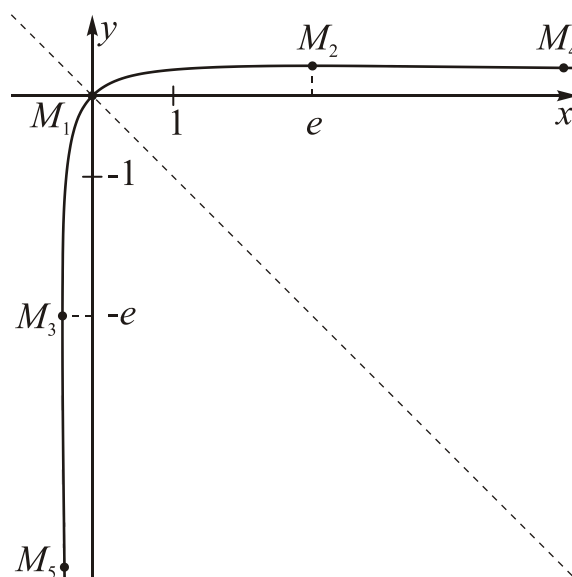
7. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = +\infty \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота.

$\lim_{t \rightarrow -\infty} x = 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow x = 0$ - вертикальная асимптота.

8. Значения функции в дополнительных точках:

t	-1,5	-1,25	-0,5	0,5	1,25	1,5
x	-0,33	-0,36	-0,30	0,82	4,36	6,72
y	-6,72	-4,36	-0,82	0,30	0,36	0,34

9. Строим график функции



71. $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ (кардиоида).

1. Область определения функции $t \in (-\infty; +\infty)$. Область значений первой функции: $x \in [-3a; 1,5a]$. Область значений второй функции:

$$y \in \left[-\frac{3\sqrt{3}a}{2}; \frac{3\sqrt{3}a}{2} \right].$$

2. Поскольку функции $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ периодические с периодом $T = 2\pi$, то и функция $y = y(x)$ - периодическая с периодом $T = 2\pi$.

3. Так как $x(t)$ - четная функция, а $y(t)$ - нечетная, то кривая симметрична относительно оси Ox , поэтому достаточно рассмотреть поведение функции на отрезке $[0; \pi]$ и отразить симметрично.

4. Пересечения с координатными осями:

а) ось Ox : $y = 0 \Rightarrow 2a \sin t - a \sin 2t = 0$, $2 \sin t (1 - \cos t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$ или $\cos t = 1$.

На отрезке $[0; \pi]$ первое уравнение имеет два корня $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$; второе –

один $t_1 = 0$. $x_1 = x(t_1) = 2a - a = a$, $x_2 = x(t_2) = -2a - a = -3a$. $M_1(a, 0)$ и $M_2(-3a, 0)$ - точки пересечения с осью Ox .

б) ось Oy : $x = 0 \Rightarrow 2a \cos t - a \cos 2t = 0$, $2 \cos^2 t - 2 \cos t - 1 = 0 \Rightarrow \cos t = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$
 $(\cos t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 1$ - не подходит). На отрезке $[0; \pi]$ это уравнение имеет корень
 $t_3 = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) \approx 1,95$. $y_3 = y(t_3) \approx 2,54a$. $M_3(0; 2,54a)$ - точка пересечения с осью Oy .

5. Находим производные:

$$x'_t = 2a \sin t (2 \cos t - 1), \quad y'_t = 2a (\cos t - \cos 2t).$$

$x'_t = 0$ при $\sin t = 0$ или $\cos t = \frac{1}{2}$. На отрезке $[0; \pi]$ эти уравнения имеют корни

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \pi \quad (\text{первое}) \quad \text{и} \quad t_4 = \frac{\pi}{3} \quad (\text{второе}). \quad x_4 = x(t_4) = \frac{3}{2}a, \quad y_4 = y(t_4) = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$M_2(-3a; 0)$ и $M_4\left(\frac{3a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ - точки в которых касательные к кривой параллельны оси Oy .

$y'_t = 0$ при $\cos t - \cos 2t = 0$, $2 \cos^2 t - \cos t + 1 = 0 \Rightarrow \cos t = 1$ и $\cos t = -\frac{1}{2}$. На отрезке $[0; \pi]$ эти уравнения имеют корни $t_1 = 0$ (первое) и $t_5 = \frac{2\pi}{3}$ (второе).

$$x_5 = x(t_5) = -\frac{1}{2}a, \quad y_5 = y(t_5) = \frac{3\sqrt{3}}{2}a. \quad M_5\left(-\frac{a}{2}; \frac{3\sqrt{3}a}{2}\right) \quad - \quad \text{точка} \quad \text{в} \quad \text{которой}$$

касательная к кривой параллельна оси Ox .

В точке $t_1 = 0$ $x'(t_1) = y'(t_1) = 0 \Rightarrow M_1(a, 0)$ - особая точка.

$$x''_t = 2a(2 \cos 2t - \cos t); \quad y''_t = 2a(2 \sin 2t - \sin t).$$

$$x'''_t = 2a \sin t - 8a \sin 2t; \quad y'''_t = 8a \cos 2t - 2a \cos t.$$

$$x'''_t y''_t - y'''_t x''_t = 4a^2 (\sin t - 4 \sin 2t) \cdot (2 \sin 2t - \sin t) - 4a^2 (4 \cos 2t - \cos t) \cdot (2 \cos 2t - \cos t) = \\ = 12a^2 (2 \cos t - 3). \quad \text{При } t_1 = 0 \quad x'''_t y''_t - y'''_t x''_t = -12a^2 \neq 0 \Rightarrow M_1(a, 0) \text{ - точка возврата.}$$

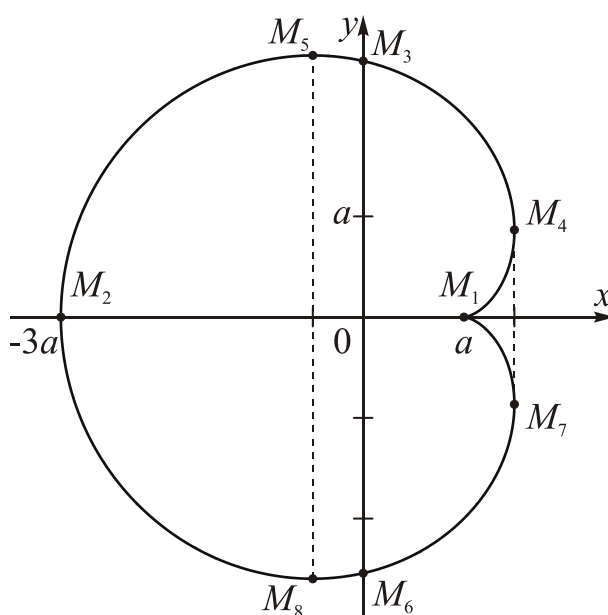
6. Значения функции в некоторых точках:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
x	a	$\sqrt{2}a$	a	$-2a$	$-3a$
y	0	$(\sqrt{2}-1)a$	$2a$	$(\sqrt{2}+1)a$	0

7. В силу симметрии графика относительно оси Ox : $M_6(0; -2,54a)$ - точка пересечения с осью Oy , в точке $M_7\left(\frac{3a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ касательная параллельна оси

Oy , в точке $M_8\left(-\frac{a}{2}; -\frac{3\sqrt{3}a}{2}\right)$ касательная параллельна оси Ox .

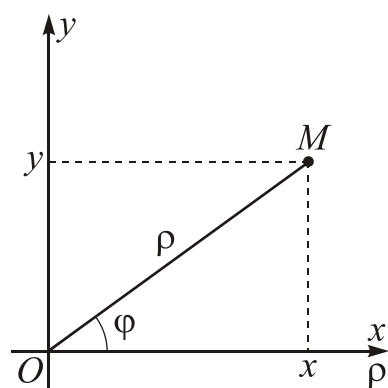
8. График функции симметричен относительно оси Ox .



§3. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Полярная система координат ставит в соответствие каждой точке M на плоскости пару чисел $(\rho; \varphi)$. Основными понятиями этой системы являются точка отсчета – *полюс* O – и луч, который берет начало в этой точке, – *полярная ось* Ox . Координата ρ – расстояние от точки до полюса, координата φ – угол между полярной осью и отрезком, соединяющим полюс и рассматриваемую точку M , который берется со знаком “+”, если угол от оси до отрезка OM вычисляется против часовой стрелки, и со



знаком “-” – по часовой стрелке. Для полюса $\rho = 0$ угол φ не определен. Если $(x; y)$ – координаты точки M в декартовой системе координат, а $(\rho; \varphi)$ –

в полярной, то очевидно, что
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

$(-\pi < \varphi \leq \pi \text{ или } 0 < \varphi \leq 2\pi)$.

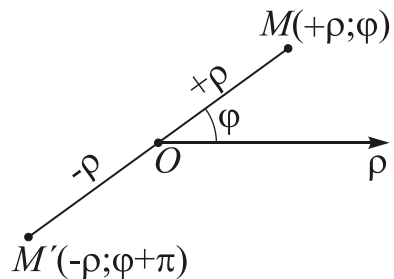
Формулы обратного перехода:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \arctg \frac{y}{x}, x > 0, \\ \varphi = \pi + \arctg \frac{y}{x}, x < 0, y > 0, \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

В определенной таким образом полярной системе координат полярный радиус $\rho \geq 0$, так как под ρ понимается расстояние от полюса O до точки M .

Однако на практике пользуются и такой системой координат, в которой полярный радиус ρ может принимать и отрицательные значения. В этом случае имеем так называемую *обобщенную* полярную систему координат. Если точка M имеет координаты $+\rho$ и φ ($M(+\rho; \varphi)$), то

координаты $-\rho$ и $\varphi + \pi$ ($M'(-\rho; \varphi + \pi)$) характеризует направление полярного радиуса, прямо противоположное тому, которое соответствует углу φ .



При решении задач будем указывать, какой из систем координат будем пользоваться.

Рассмотрим функцию вида

$$\rho = f(\varphi), \quad -\infty < \varphi < \infty.$$

Условимся отрицательные значения ρ откладывать в направлении $\varphi + \pi$, т.е. в направлении, противоположном направлению, которое определяется углом φ .

При построении кривой учитывают следующее.

1. Ограниченность.

Если $\rho = f(\varphi)$ - ограничена, т. е. значение $|\rho| \leq a$, то вся кривая находится внутри круга $\rho = a$.

2. Симметричность.

Если $f(-\varphi) = f(\varphi)$, то кривая симметрична относительно полярной оси; если $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$, то кривая симметрична относительно перпендикуляра к полярной оси (в полюсе); если $f(\pi + \varphi) = f(\varphi)$, то кривая симметрична относительно полюса.

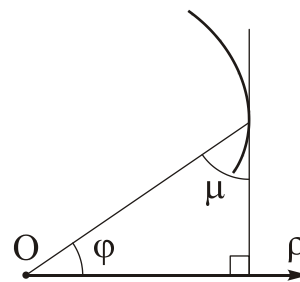
3. Экстремумы.

Исследование функции $\rho = f(\varphi)$ на экстремум производится обычным способом: если $f'(\varphi) = 0$, $\varphi = \varphi_1$, то: $f(\varphi_1)$ является $\rho_{\max}$, если $f'(\varphi)$ при переходе φ через значение φ_1 меняет знак с «+» на «-» или $f''(\varphi_1) < 0$; $f(\varphi_1)$ является $\rho_{\min}$, если $f'(\varphi)$ при переходе φ через значение φ_1 меняет знак с «-» на «+» или $f''(\varphi_1) > 0$.

4. Касательные.

Касательные к кривой в точках $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$ перпендикулярны к радиусу-вектору точки касания.

Для того чтобы найти на кривой $\rho = f(\varphi)$ точки, в которых касательная перпендикулярна к полярной оси, надо в формуле $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'}$ положить $\mu = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi$. Значения φ , найденные из этого уравнения, и



определяют искомые точки. Для того чтобы найти на кривой $\rho = f(\varphi)$ точки, в которых касательная параллельна к полярной оси, надо в формуле $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'}$ положить $\mu = k\pi - \varphi$.

5. Точки перегиба.

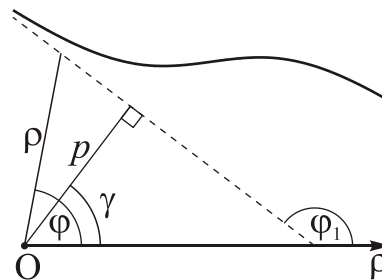
Если кривая имеет точки перегиба, то соответствующие значения φ должны быть корнями нечетной кратности уравнения

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho'' = 0.$$

6. Асимптоты.

Уравнение асимптоты в полярной системе координат:

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \gamma)},$$



где γ - угол, образованный перпендикуляром, опущенным на асимптоту из полюса, с полярной осью; p - длина этого перпендикуляра.

Для нахождения γ исследуют по уравнению заданной кривой, существует ли такое значение $\varphi = \varphi_1$, для которого соответствующее значение $\rho = \infty$. Если такое значение φ найдено, то кривая имеет бесконечную ветвь. Ищут

$$p = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_1} \frac{\rho^2}{\rho'}.$$

Если этот предел существует, то бесконечная ветвь имеет асимптоту. Если предел не существует, то бесконечная ветвь кривой не имеет асимптоты (является параболической ветвью кривой). Если $p > 0$, то

асимптота находится справа от радиуса-вектора, который простирается в бесконечность, если $p < 0$ - то слева.

Если при $\varphi \rightarrow +\infty$ или $\varphi \rightarrow -\infty$ $\lim f(\varphi) = 0$, то полюс является асимптотической точкой, т.е. точкой вокруг которой линия спирально закручивается.

Также при построении графика функции $\rho = f(\varphi)$ иногда бывает полезным вначале построить график соответствующей функции $y = f(x)$ и затем исследуют функцию $\rho = f(\varphi)$, сравнивая ее с соответствующей функцией $y = f(x)$.

В задачах 72-79 исследовать линии, уравнения которых заданы в полярных координатах. Если отдельно не указано, считаем $\rho \geq 0$.

72. $\rho = a \sin 3\varphi$.

1. Так как $|\sin 3\varphi| \leq 1$, то вся кривая расположена внутри круга радиуса a .
2. $f(\pi - \varphi) = a \sin(3\pi - 3\varphi) = a \sin 3\varphi = f(\varphi)$ - график симметричен относительно прямой перпендикулярной к полярной оси и проходящей через полюс.
3. $\sin 3\varphi$ - периодическая функция с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$, поэтому рассмотрим поведение функции на отрезке $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ и скопируем полученный график на отрезки $\left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ и $\left[\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$. Кроме того, интервал $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ рассматривать не будем, поскольку на нем $\rho < 0$.
4. $\rho'_{\varphi} = 3a \cos 3\varphi$. $\rho'_{\varphi} = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{6}$

φ	$\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$
ρ'	+	0	-
ρ	↗	max	↘

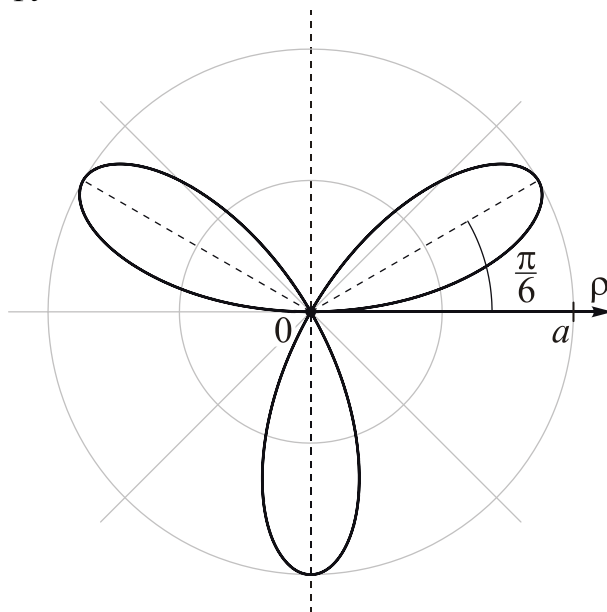
$\rho_{\max} = \rho\left(\frac{\pi}{6}\right) = a$

5. Найдем значения ρ при некоторых значениях φ :

φ	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	0	$0,5a$	$0,71a$	$0,87a$	$0,87a$	$0,71a$	$0,5a$	0

6. Полученная кривая называется розой и состоит из трех конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов ($\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{5}{6}\pi$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$) длиной a .

7. Строим график функции



73. $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$.

В этом примере будем использовать обобщенную полярную систему координат.

1. Область определения: все значения φ , кроме $\varphi = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Область значений функции: $(-\infty; +\infty)$.

2. $f(\pi + \varphi) = a \operatorname{tg}(\pi + \varphi) = a \operatorname{tg} \varphi = f(\varphi)$ - график симметричен относительно полюса. $f(-\varphi) = a \operatorname{tg}(-\varphi) = -a \operatorname{tg} \varphi = -f(\varphi)$ - график симметричен относительно перпендикуляра к полярной оси (в полюсе).

3. Функция периодическая с периодом $T = \pi$. Учтя симметрию и периодичность функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$, достаточно построить график функции для $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. $\rho'_{\varphi} = \frac{a}{\cos^2 \varphi} \neq 0$. $\rho'_{\varphi} > 0$ - функция всюду возрастающая.

5. Асимптоты функции. При $\varphi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ $\rho \rightarrow \infty$.

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{\rho'} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = a \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} = a; \quad \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\rho^2}{\rho'} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = a.$$

Для $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\gamma_1 = 0$, а для $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ $\gamma_2 = \pi$. $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \gamma)}$, т.е. кривая имеет две

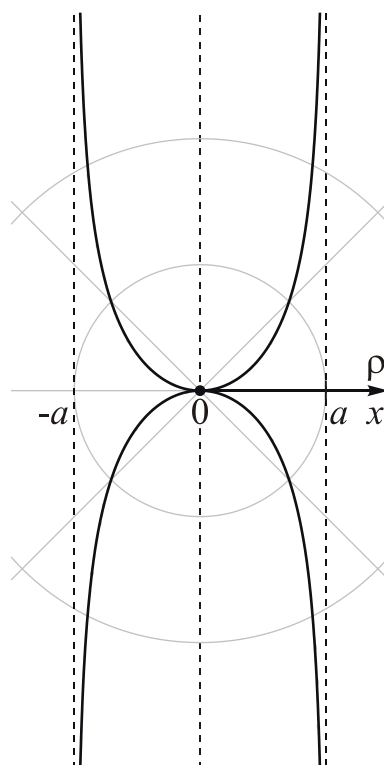
асимптоты: $\rho_1 = \frac{a}{\cos(\varphi - 0)} = \frac{a}{\cos \varphi}$ и $\rho_2 = \frac{a}{\cos(\varphi - \pi)} = \frac{-a}{\cos \varphi}$.

Если положить $x = \rho \cos \varphi$, получим уравнение асимптот в декартовой системе координат $x = \pm a$.

6. Найдем значения функции в некоторых дополнительных точках:

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
ρ	0	$0,27a$	$0,58a$	a	$1,73a$	$3,73a$

7. Строим график функции



74. $\rho = a(1 + \operatorname{tg} \varphi)$.

В этом примере будем использовать обобщенную полярную систему координат.

1. Кривая определена везде, кроме $\varphi = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $f(\pi + \varphi) = a(1 + \operatorname{tg}(\pi + \varphi)) = a(1 + \operatorname{tg}(\varphi)) = f(\varphi)$ - график симметричен относительно полюса.

3. Функция периодическая с периодом $T = \pi$. Таким образом, достаточно построить график функции на отрезке длиной в π . Для удобства возьмем $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ (на краях этого отрезка $\rho = 0$, т.е. график будет начинаться и оканчиваться в полюсе).

4. $\rho'_{\varphi} = \frac{a}{\cos^2 \varphi} \neq 0$. $\rho'_{\varphi} > 0$ везде кроме точки $\varphi = \frac{\pi}{2}$ - функция возрастающая.

$$5. \operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a(1 + \operatorname{tg} \varphi)}{a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Положим $\mu = k\pi - \varphi \Rightarrow -\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$, $\operatorname{tg}^3 \varphi + 2\operatorname{tg} \varphi + 1 = 0$ корень этого

уравнения $\operatorname{tg} \varphi_1 \approx -0,45$, что соответствует углу $\varphi_1 \approx -0,43$ рад $\approx -24,4^\circ$.

$\rho_1 \approx 0,55a$. В точке $M_1(0,55a; -0,43)$ касательная параллельна полярной оси.

Положим $\mu = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$, $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$, что

соответствует углу $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$. $\rho_2 = 2a$. В точке $M_2\left(2a; \frac{\pi}{4}\right)$ касательная

перпендикулярна полярной оси.

6. Асимптоты функции. При $\varphi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ $\rho \rightarrow \infty$.

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{\rho'} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{a^2(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2}{a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = a \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = a;$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\rho^2}{\rho'} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + 2\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = a.$$

Для $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\gamma_1 = 0$, а для $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ $\gamma_2 = \pi$. $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \gamma)}$, т.е. кривая имеет две

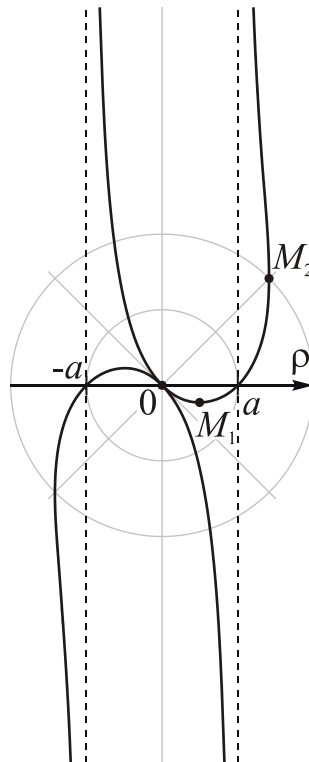
асимптоты: $\rho_1 = \frac{a}{\cos(\varphi - 0)} = \frac{a}{\cos \varphi}$ и $\rho_2 = \frac{a}{\cos(\varphi - \pi)} = \frac{-a}{\cos \varphi}$.

Если положить $x = \rho \cos \varphi$, получим уравнение асимптот в декартовой системе координат $x = \pm a$.

7. Найдем значения функции в некоторых дополнительных точках:

φ	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
ρ	0	0,42a	a	1,58a	2,73a	-0,73a	0

8. Строим график функции



Примечание: Этот график можно получить из предыдущего увеличением значений функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ на a .

75. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида).

1. Функция определена везде. Так как $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$, то $0 \leq \rho \leq 2a$.

2. $f(-\varphi) = a(1 + \cos(-\varphi)) = a(1 + \cos(\varphi)) = f(\varphi)$ - график симметричен относительно полярной оси.

3. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$. Таким образом, достаточно построить график функции на отрезке $[0; \pi]$ и отразить симметрично относительно полярной оси.

4. $\rho'_\varphi = -a \sin \varphi$. $\rho'_\varphi = 0$ при $\varphi = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

φ	...	$(-\pi; 0)$	0	$(0; \pi)$	π	$(\pi; 2\pi)$	...
ρ'		+	0	-	0	+	
ρ		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$$\rho_{\max} = \rho(0) = 2a;$$

$$\rho_{\min} = \rho(\pi) = 0.$$

$$5. \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a(1 + \cos \varphi)}{-a \sin \varphi} = \frac{1 + \cos \varphi}{-\sin \varphi}.$$

$$\text{Положим } \mu = k\pi - \varphi \Rightarrow -\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 + \cos \varphi}{-\sin \varphi}, \quad \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1 + \cos \varphi}{-\sin \varphi}, \quad \sin^2 \varphi = \cos \varphi + \cos^2 \varphi,$$

$2\cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1 = 0$ корни этого уравнения $\cos \varphi_1 = \frac{1}{2}$ и $\cos \varphi_2 = -1$, что на отрезке $[0; \pi]$ соответствует углам $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi_2 = \pi$. $\rho_1 = \rho(\varphi_1) = \frac{3a}{2}$, $\rho_2 = \rho(\varphi_2) = 0$. В точках $M_1\left(\frac{3a}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$ и $M_2(0, \pi)$ касательная параллельна полярной оси.

$$\text{Положим } \mu = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1 + \cos \varphi}{-\sin \varphi}, \quad \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 + \cos \varphi}{-\sin \varphi},$$

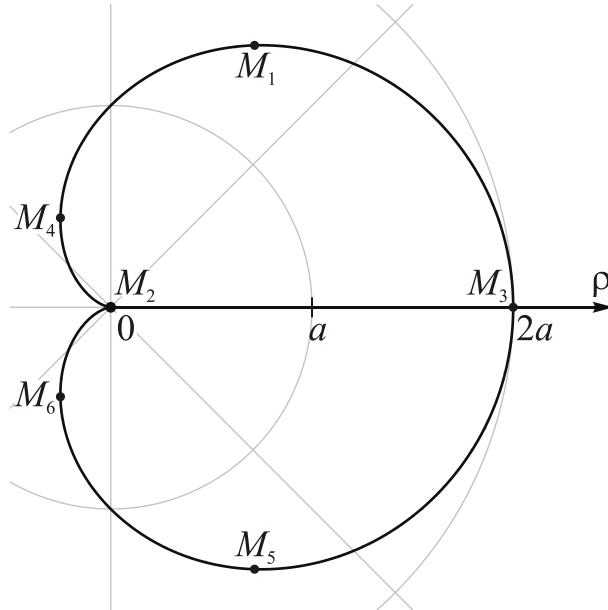
$-\sin \varphi \cos \varphi = \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi$, $\sin \varphi(1 + 2\cos \varphi) = 0 \Rightarrow \sin \varphi_3 = 0$ и $\cos \varphi_4 = -\frac{1}{2}$, что на отрезке $[0; \pi]$ соответствует углам $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = \frac{2\pi}{3}$. $\rho_3 = \rho(\varphi_3) = 2a$, $\rho_4 = \rho(\varphi_4) = \frac{a}{2}$. В точках $M_3(2a; 0)$ и $M_4\left(\frac{a}{2}; \frac{2\pi}{3}\right)$ касательная перпендикулярна полярной оси.

6. Найдем значения функции в некоторых дополнительных точках:

φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
ρ	$1,87a$	$1,71a$	a	$0,29a$	$0,13a$

7. В силу симметрии графика относительно полярной оси имеем: в точке $M_5\left(\frac{3a}{2}; \frac{5\pi}{3}\right)$ касательная параллельна полярной оси, в точке $M_6\left(\frac{a}{2}; \frac{4\pi}{3}\right)$ касательная перпендикулярна полярной оси.

8. Строим график функции



76. $\rho = 1 + 2 \cos \varphi$ (улитка Паскаля).

В этом примере будем использовать обобщенную полярную систему координат.

1. Функция определена для всех значений φ . Так как $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$, то $-1 \leq \rho \leq 3$.
2. $f(-\varphi) = 1 + 2 \cos(-\varphi) = 1 + 2 \cos(\varphi) = f(\varphi)$ - график симметричен относительно полярной оси.
3. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$. Учитывая периодичность и симметрию, достаточно построить график функции на отрезке $[0; \pi]$ и отразить симметрично относительно полярной оси.
4. $\rho'_{\varphi} = -2 \sin \varphi$. $\rho'_{\varphi} = 0$ при $\varphi = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

φ	...	$(-\pi; 0)$	0	$(0; \pi)$	π	$(\pi; 2\pi)$	...
ρ'		+	0	-	0	+	
ρ		↗	max	↘	min	↗	

$$\rho_{\max} = \rho(0) = 3;$$

$$\rho_{\min} = \rho(\pi) = -1.$$

$$5. \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1 + 2 \cos \varphi}{-2 \sin \varphi}.$$

$$\text{Положим} \quad \mu = k\pi - \varphi \quad \Rightarrow \quad -\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 + 2 \cos \varphi}{-2 \sin \varphi}, \quad \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1 + 2 \cos \varphi}{-2 \sin \varphi},$$

$$2 \sin^2 \varphi = \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi, \quad 4 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 2 = 0 \quad \text{корни этого уравнения}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}, \quad \text{что на отрезке } [0; \pi] \text{ соответствует углам}$$

$\varphi_1 \approx 0,94$ рад $\approx 53,6^\circ$ и $\varphi_2 \approx 2,57$ рад $\approx 147,5^\circ$. $\rho_1 = \rho(\varphi_1) = 1 + 2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \approx 2,17$, $\rho_2 = \rho(\varphi_2) = 1 + 2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \approx -0,69$. В точках $M_1(2,17; 0,94)$ и $M_2(-0,69; 2,57)$ касательная параллельна полярной оси.

Положим $\mu = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1 + 2 \cos \varphi}{-2 \sin \varphi}$, $\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 + 2 \cos \varphi}{-2 \sin \varphi}$,

$-2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi$, $\sin \varphi(1 + 4 \cos \varphi) = 0 \Rightarrow \sin \varphi_{3,4} = 0$ и $\cos \varphi_5 = -\frac{1}{4}$,

что на отрезке $[0; \pi]$ соответствует углам $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = \pi$, $\varphi_5 \approx 1,82$ рад $\approx 104,5^\circ$.

$\rho_3 = \rho(\varphi_3) = 3$, $\rho_4 = \rho(\varphi_4) = -1$, $\rho_5 = \rho(\varphi_5) = \frac{1}{2}$. В точках $M_3(3; 0)$, $M_4(-1; \pi)$ и $M_5(0,5; 1,82)$ касательная перпендикулярна полярной оси.

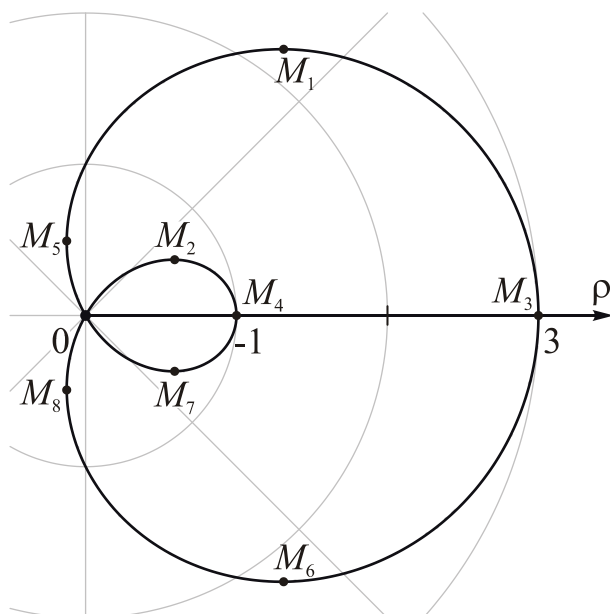
6. Найдем значения функции в некоторых дополнительных точках:

φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
ρ	2,73	2,41	2	1	0	-0,41	-0,73

7. В силу симметрии графика относительно полярной оси: в точках $M_6(2,17; -0,94)$ и $M_7(-0,69; -2,57)$ касательная параллельна полярной оси, в точке $M_8(0,5; -1,82)$ касательная перпендикулярна полярной оси.

8. Так как $\rho = 0$ при $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ и $\varphi = \frac{4\pi}{3}$, то полюс является узловой точкой.

9. Строим график функции



77. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$ (жезл).

1. $\varphi > 0$.

2. $\rho'_{\varphi} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\varphi^{-3/2}$, $\forall \varphi \in (0; +\infty)$ $\rho'_{\varphi} < 0$ - на всей области определения функция убывает.

3. Асимптоты функции. При $\varphi \rightarrow 0$ $\rho \rightarrow \infty$.

$$\rho = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\rho'} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{\varphi}}{-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi^3}}} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} -2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\varphi} = 0. \quad \text{Таким образом, при } \varphi \rightarrow 0$$

кривая имеет асимптотой полярную ось.

4. Так как $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}} = 0$, то полюс является *асимптотической точкой*

кривой, т.е. кривая спирально закручивается вокруг полюса.

5. Точки перегиба находим из уравнения $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$.

$$\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}, \quad \rho'_{\varphi} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\varphi^{-3/2}, \quad \rho'' = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\varphi^{-5/2}. \quad \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{\pi}{4\varphi^3}(4\varphi^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

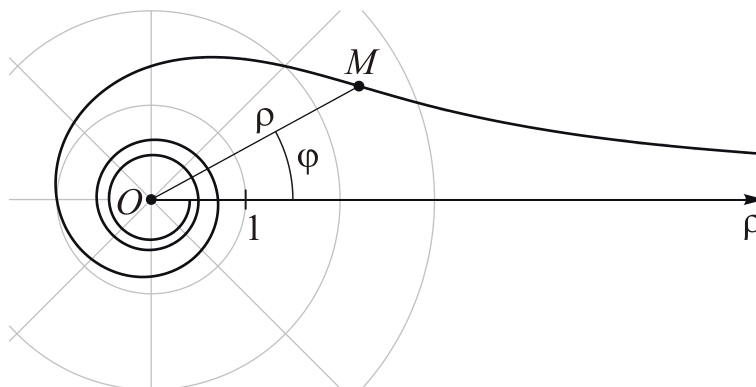
$$\varphi = \frac{1}{2} \text{ рад}; \quad \rho = \sqrt{2\pi}. \quad \text{Итак, точка } M\left(\sqrt{2\pi}; \frac{1}{2}\right) - \text{точка перегиба (при переходе}$$

$$\text{через нее меняется знак выражения } \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''), \text{ при этом } \varphi = \frac{1}{2} \text{ рад} \approx 28^\circ.$$

6. Значения функции в дополнительные точках:

φ	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
ρ	3	2,45	2	1,73	1,41	1,15	1	0,82	0,71	0,63	0,58	0,53	0,5

7. Строим график функции



Замечание. То, что полярная ось является асимптотой, можно показать

$$\text{иначе: } \lim_{\varphi \rightarrow 0} ML = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \sqrt{\pi} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \sqrt{\pi} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\cos \varphi}{\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}} = 2\sqrt{\pi} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sqrt{\varphi} \cos \varphi = 0.$$

$$78. \rho = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{\pi}.$$

1. $\rho \geq 0$ при $\varphi \geq 0$.

2. $\left| \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{\pi} \right| < \frac{\pi}{2}$, следовательно $\rho < 1$, т.е. график функции полностью лежит в круге единичного радиуса.

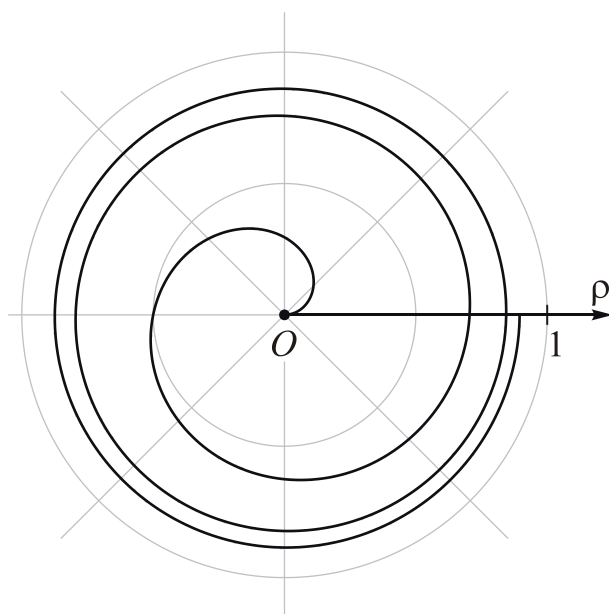
3. $\rho'_{\varphi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2}{\pi^2}} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi^2 + \varphi^2}$. $\rho'_{\varphi} > 0 \quad \forall \varphi \Rightarrow$ функция возрастает на всей области определения.

4. $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \rho = \frac{2}{\pi} \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{\pi} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1$, т.е. спираль асимптотически приближается к окружности $\rho = 1$.

5. Значения функции в некоторых точках:

φ	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	360°	450°	540°	720°
ρ	0,11	0,16	0,21	0,30	0,41	0,5	0,57	0,63	0,71	0,76	0,80	0,84

6. Строим график функции



79. $\rho = \sqrt{1-t^2}$, $\varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}$.

1. Существует при $-1 \leq t \leq 1$, при этом $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, т.е. кривая расположена целиком правее оси ординат.

2. Исключая параметр t , получим $\varphi = \arcsin \sqrt{1-t^2} + \rho$.

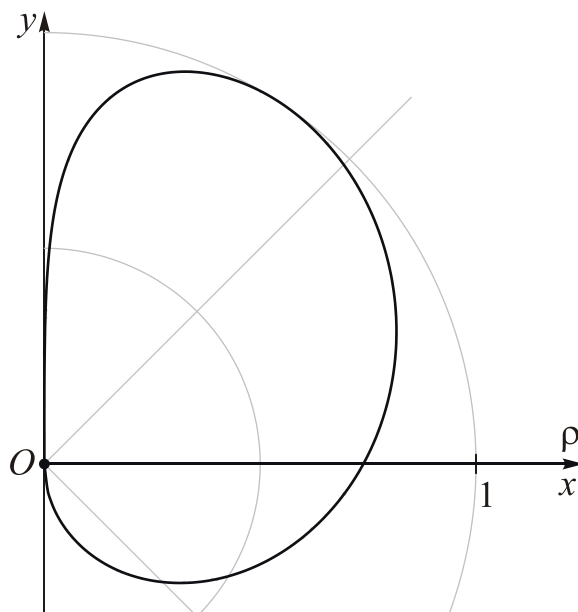
3. При $t=0$: $\rho=1$, $\varphi=1$ рад. Это максимальное значение ρ , т.е. $\rho_{\max}=1$, что непосредственно видно из уравнения ρ .

При $t=\pm 1$ $\rho=0$; $\varphi(-1)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$; $\varphi(1)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, т.е. кривая касается оси ординат.

4. Значения функции в некоторых точках:

t	-1	-0,75	-0,5	0,5	0,75	-0,85
φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-0,19 \approx -11^\circ$	$0,35 \approx 20^\circ$	$1,39 \approx 30^\circ$	$1,51 \approx 87^\circ$	$-0,32 \approx -18^\circ$
ρ	0	0,66	0,87	0,87	0,66	0,53

5. Строим график функции



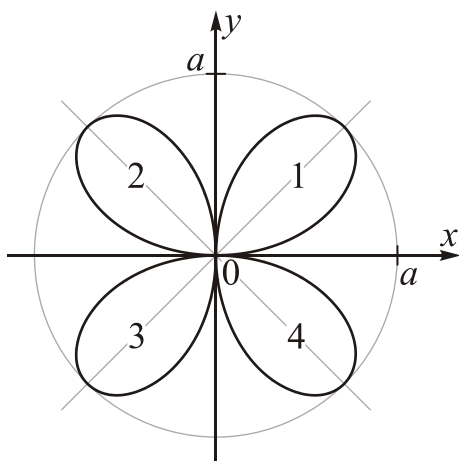
§4. ГРАФИКИ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

В задачах 80-83 исследовать и построить линии, предварительно приведя их уравнения к полярным координатам или представив в параметрической форме.

80. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$.

$x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$. Тогда $\rho^6 = 4a^2 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \Rightarrow \rho^2 = a^2 \sin^2 2\varphi$, $\rho = a \sin 2\varphi$ - четырехлепестковая роза. Если же считать $\rho \geq 0$, то получаем двухлепестковую розу (лепестки 1 и 3).

Строим график функции



81. $(x^2 + y^2)x = a^2 y$.

$x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$. Рассмотрим обобщенную полярную систему координат, когда ρ может быть любым.

$$\rho^3 \cos \varphi = a^2 \rho \sin \varphi, \quad \rho^2 = a^2 \operatorname{tg} \varphi, \quad \rho = \pm a \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}.$$

При $\varphi \rightarrow 0$ $\rho \rightarrow 0$, при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $\rho \rightarrow \infty$. Ось Oy - является вертикальной асимптотой ($x = 0$). Рассматриваем $\rho = a \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}$, тогда $\rho' = \frac{a}{2\sqrt{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \cos \varphi}$;

$$\rho'' = a \frac{-1 + 4 \sin^2 \varphi}{4\sqrt{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi}.$$

Точка перегиба должна удовлетворять дифференциальное уравнение:

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0. \quad (1)$$

Подставляем ρ , ρ' и ρ'' в (1):

$$a \frac{4\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 4\sin^2 \varphi + 3}{4\sin \varphi \cos^3 \varphi} = 0; \quad 4\sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) - 4\sin^2 \varphi + 3 = 0; \quad -\sin^4 \varphi + \frac{3}{4} = 0;$$

$$\sin \varphi = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \approx 0,931. \quad \varphi \approx 69^\circ; \quad \rho = 1,6a. \quad \text{Значит } M(69^\circ; 1,6a) - \text{точка перегиба.}$$

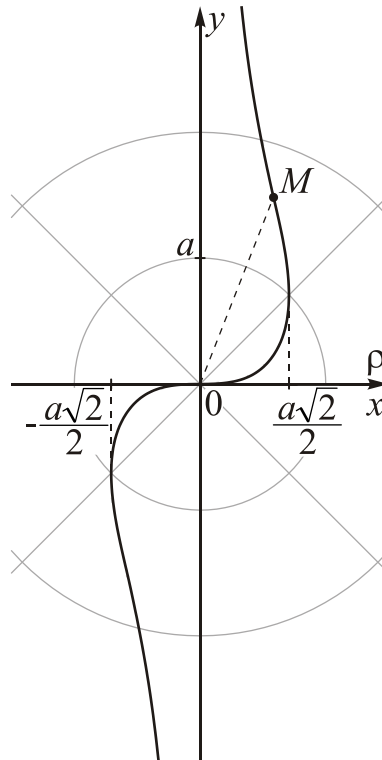
Уравнению (1) удовлетворяет точка $O(0;0)$.

При построении учитываем и $\rho < 0$.

$$x = a\sqrt{\operatorname{tg} \varphi} \cos \varphi, \quad x'_\varphi = a \frac{1 - \sin 2\varphi}{2\sqrt{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \cos \varphi}. \quad x'_\varphi = 0 \text{ при } \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ (точка max). Отсюда}$$

$$\text{следует, что } x = a \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и линия целиком лежит в интервале } -a \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq a \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Строим график функции



$$\mathbf{82.} \quad x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$$

1. Кривая симметрична относительно осей координат, прямых $y = x$ и $y = -x$.

2. Кривую лучше представить в параметрическом виде, положив $y = tx$ ($t \geq 0$):

$$x = a\sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}; \quad y = at\sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}.$$

$$3. \quad x'_t = a \frac{(1-2t^2-t^4)t}{x(t)(1+t^4)^2}; \quad y'_t = a \frac{1+2t^2-t^4}{x(t)(1+t^4)^2}.$$

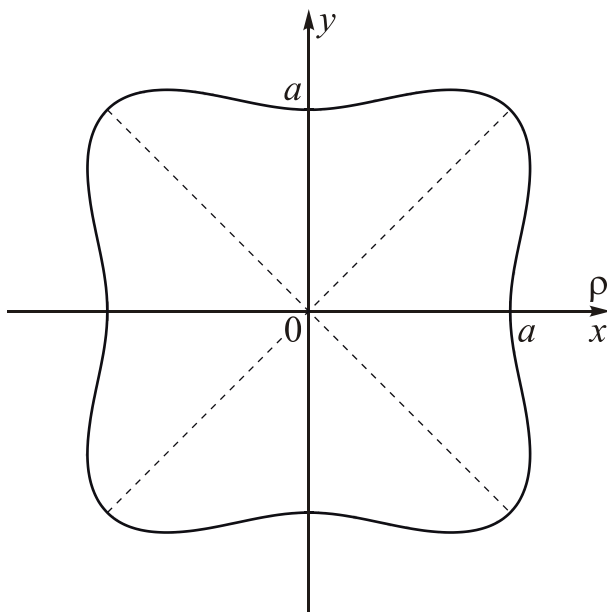
$$x'_t = 0 \text{ при } t=0 \text{ и } t=\sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0,64$$

t	$(-0,64;0)$	0	$(0;0,64)$	0,64	$(0,64;+\infty)$	$x_{\min} = x(0) = a;$
x'_t	-	0	+	0	-	$y_{\min} = y(0) = 0;$
$x(t)$		min		max		$x_{\max 1} = x(0,64) \approx 1,10a;$
						$y_{\max 1} = y(0,64) \approx 0,71a.$

$$y'_t = 0 \text{ при } t = \sqrt{\sqrt{2}+1} \approx 1,55$$

t	$(0,64;1,55)$	1,55	$(1,55;+\infty)$	$x_{\max 2} = x(1,55) \approx 0,71a;$
y'_t	+	0	-	$y_{\max 2} = y(1,55) \approx 1,10a.$
$y(t)$		max		

4. Строим график функции



$$83. \quad (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2.$$

$x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$. Тогда $\rho^2 \cdot \rho^4 \cos^2 2\varphi = 4\rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$, $\rho^2 = \operatorname{tg}^2 2\varphi \Rightarrow \rho = \operatorname{tg} 2\varphi$ (ветряная мельница).

Уравнение наклонной асимптоты функции $y = f(x)$, заданной в декартовых координатах, определяется формулой $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ а

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx).$$

В нашем случае функция задана в полярных координатах, значит при $x \rightarrow \infty$ и $\rho \cos \varphi \rightarrow \infty$. Если учесть, что $\cos \varphi$ функция ограниченная, получим $\rho \rightarrow \infty$.

$\rho = \operatorname{tg} 2\varphi$, следовательно, $\rho \rightarrow \infty$, если $2\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$, или $\varphi = \frac{\pi}{4}(2k+1)$. В полярной системе координат $0 \leq \varphi < 2\pi$, поэтому $\rho \rightarrow \infty$, если $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Найдем значения k и b при соответствующих значениях φ :

$$k_1 = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{y}{x} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\rho \cos \varphi}{\rho \sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} \varphi = 1;$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} (y - k_1 x) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\rho \sin \varphi - \rho \cos \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \rho (\sin \varphi - \cos \varphi) = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2\varphi (\sin \varphi - \cos \varphi) = [\infty \cdot 0] = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\varphi \cdot (\sin \varphi - \cos \varphi)}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin 2\varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{-1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

$$k_2 = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{y}{x} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \operatorname{ctg} \varphi = -1;$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}} (y - k_2 x) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}} (\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \rho (\sin \varphi + \cos \varphi) = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \operatorname{tg} 2\varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) = [\infty \cdot 0] = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin 2\varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

$$k_3 = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \frac{y}{x} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \operatorname{ctg} \varphi = 1;$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{5\pi}{4}} (y - k_3 x) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{5\pi}{4}} (\rho \sin \varphi - \rho \cos \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \operatorname{tg} 2\varphi (\sin \varphi - \cos \varphi) = [\infty \cdot 0] = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \frac{-\sin 2\varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

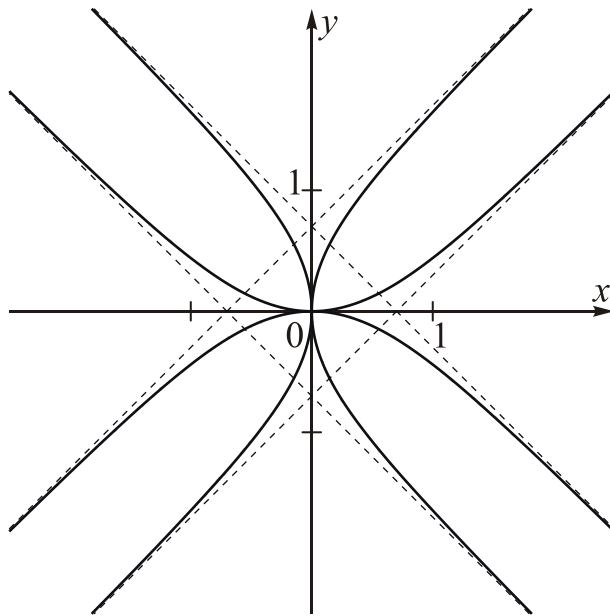
$$k_4 = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{7\pi}{4}} \frac{y}{x} = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{7\pi}{4}} \operatorname{ctg} \varphi = -1;$$

$$b_4 = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{7\pi}{4}} (y - k_4 x) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{7\pi}{4}} (\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{7\pi}{4}} \operatorname{tg} 2\varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{7\pi}{4}} \frac{\sin 2\varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Т.е. прямые $y = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -x + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ - наклонные асимптоты кривой $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 4x^2 y^2$.

Кривая симметрична относительно координатных осей.



§5. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАНЫХ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДЕЛОВ

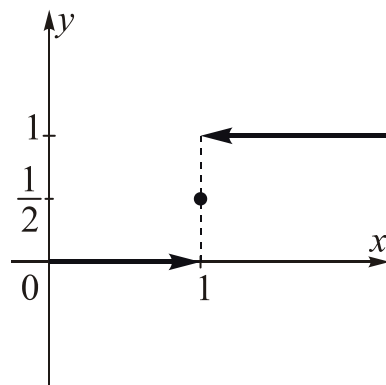
При построении графика функции, заданной с помощью предела, необходимо предварительно вычислить соответствующий предел.

$$84. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \geq 0.$$

Если $x = 0$, то $y = 0$; если $x = 1$, то $y = \frac{1}{2}$. При $0 < x < 1$ $x^n \rightarrow 0$, если $n \rightarrow \infty$, а значит $y = 0$. При $x > 1$ $x^n \rightarrow \infty$, если $n \rightarrow \infty$, а значит $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} = 1$.

$x = 1$ - точка разрыва. Итак,

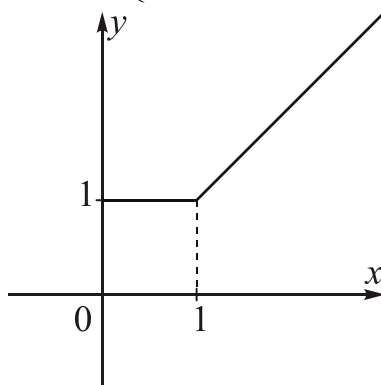
$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



$$85. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}, \quad x \geq 0.$$

При $x = 0$ и $x = 1$ $y = 1$. При $0 < x < 1$ $x^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $y = 1$. Рассмотрим $x > 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x^n)^{1/n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{1/n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{nx^n} + \dots\right)^{1/n} = x$. Итак,

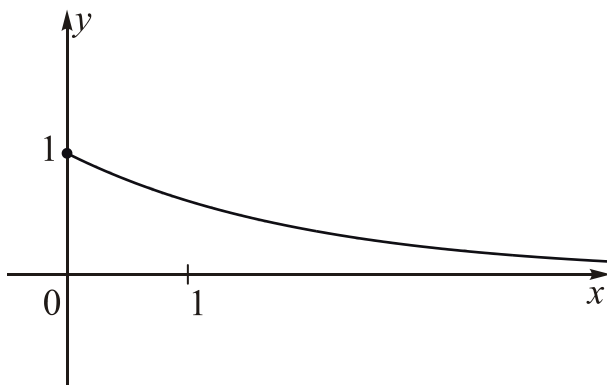
$$y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$



$$86. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{\frac{x}{n}} \right)^n.$$

Очевидно, что $x \geq 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{\frac{x}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2 \sqrt{\frac{x}{n}} \right)^{n/2} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \left(-\sin^2 \sqrt{\frac{x}{n}} \right) \right)^{-\frac{1}{\sin^2 \sqrt{\frac{x}{n}}}} \right)^{-\sin^2 \sqrt{\frac{x}{n}} \cdot \frac{n}{2}} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \sqrt{\frac{x}{n}} \cdot \frac{n}{2}} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \cdot n}{n \cdot 2}} = e^{-x/2}.$$

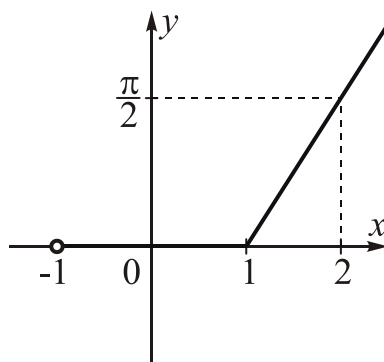


$$87. y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n.$$

При $x > 1$ и $n \rightarrow \infty$ $x^n \rightarrow \infty$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n = (x-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x^n = (x-1) \frac{\pi}{2}; \text{ при } -1 < x \leq 1 \text{ и } n \rightarrow \infty \quad x^n \rightarrow 0,$$

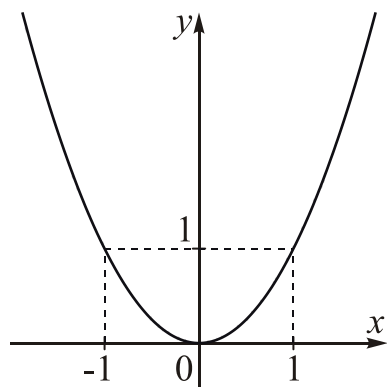
поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n = 0$, при $x \leq -1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n$ не существует.



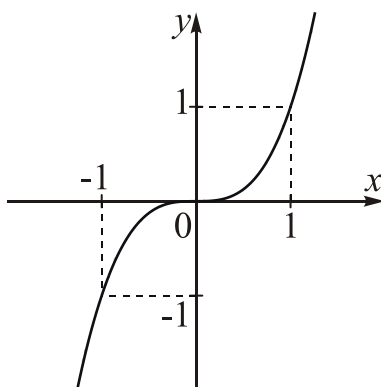
§6. КРИВЫЕ ДЛЯ СПРАВОК (НЕ ВОШЕДШИЕ В §§1-5)

1. Степенная функция.

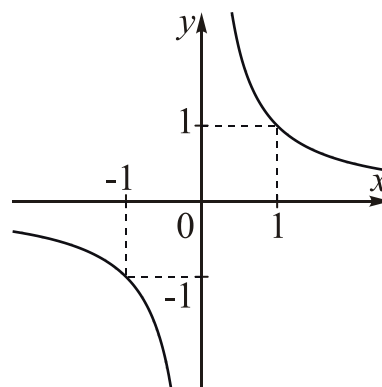
$y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Область определения и графики функции зависят от значения α .



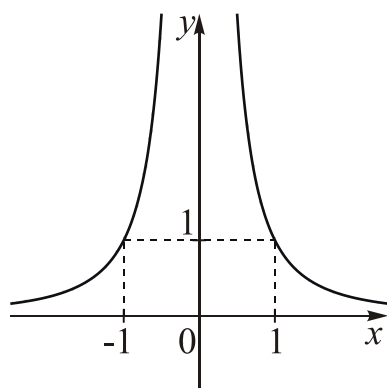
а) $y = x^2$;



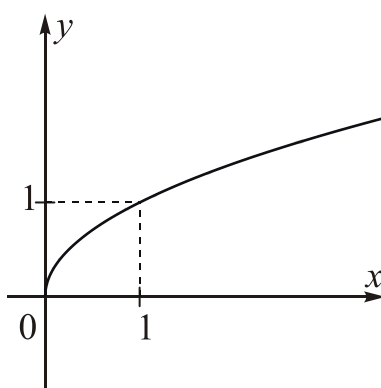
б) $y = x^3$;



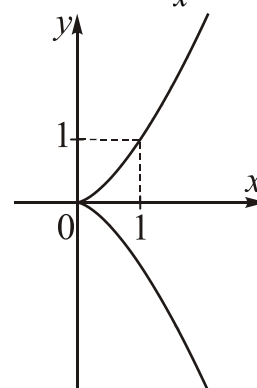
в) $y = \frac{1}{x}$;



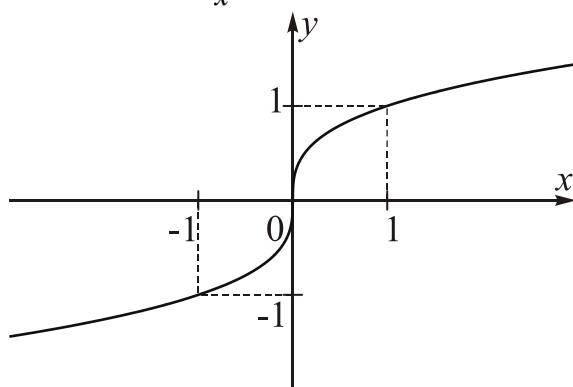
г) $y = \frac{1}{x^2}$;



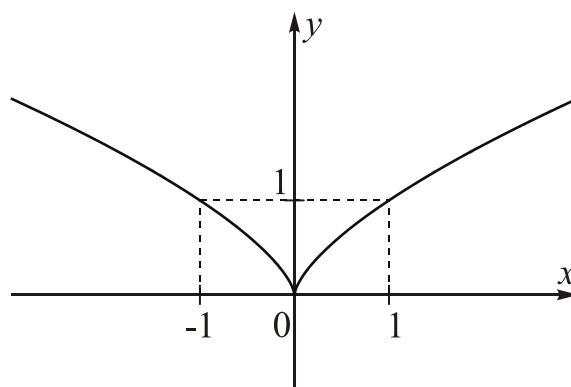
д) $y = \sqrt{x}$;



е) $y^2 = x^3$;



ж) $y = \sqrt[3]{x}$.



з) $y = x^{2/3}$;

2. Показательная функция, гиперболические функции, цепная линия.

а) Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

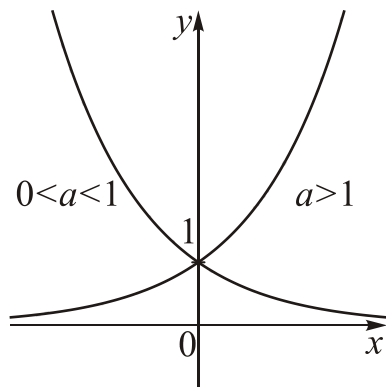
б) Гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

в) Гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

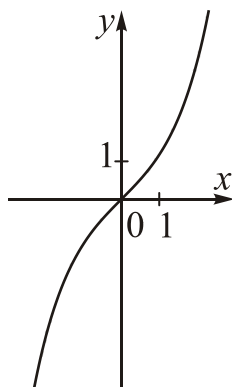
г) Гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;

д) Гиперболический котангенс $y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$;

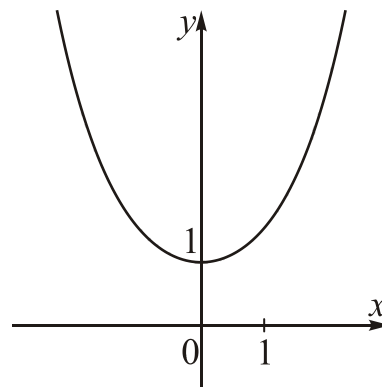
е) Цепная линия $y = \frac{a}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2})$.



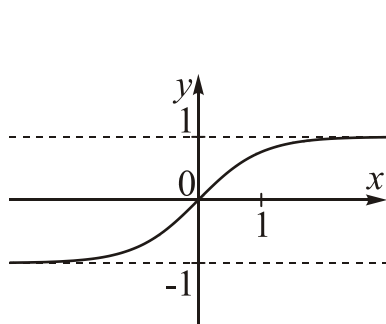
а) $y = a^x$;



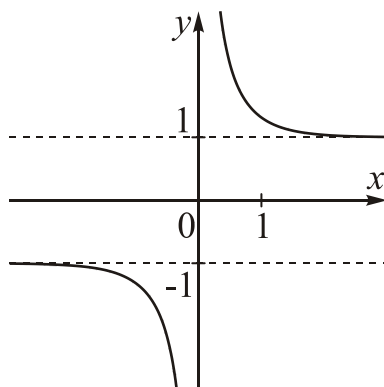
б) $y = \operatorname{sh} x$;



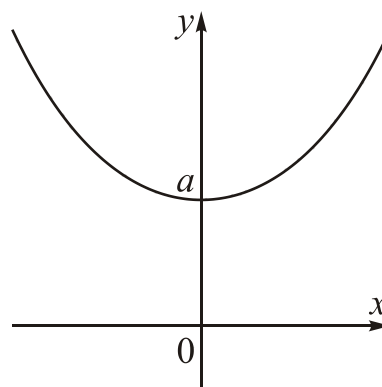
в) $y = \operatorname{ch} x$;



г) $y = \operatorname{th} x$;



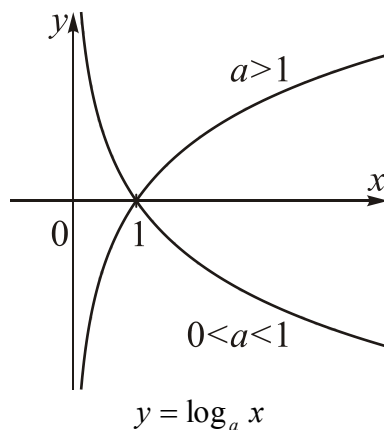
д) $y = \operatorname{cth} x$;



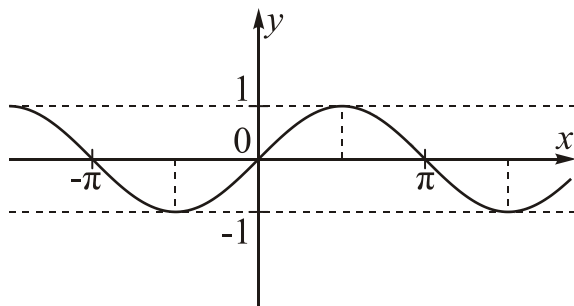
е) $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$.

3. Логарифмическая функция.

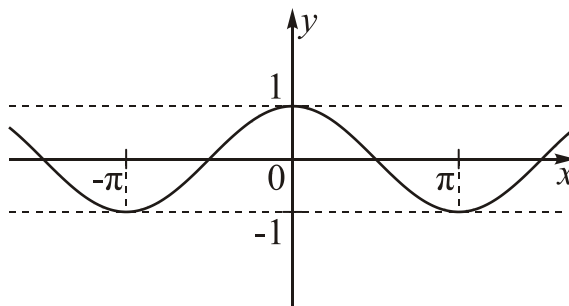
$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$



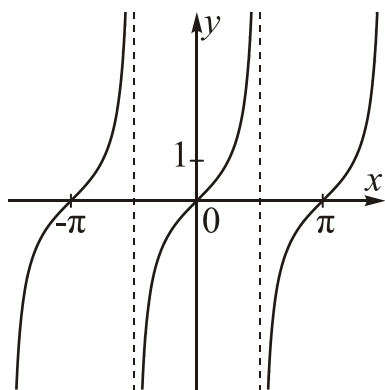
4. Тригонометрические функции



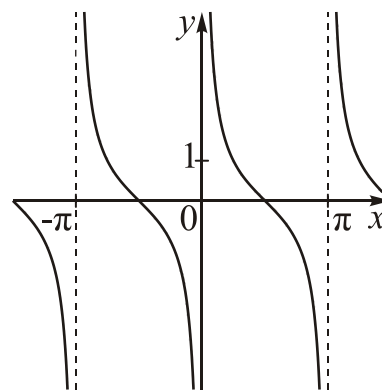
а) $y = \sin x$;



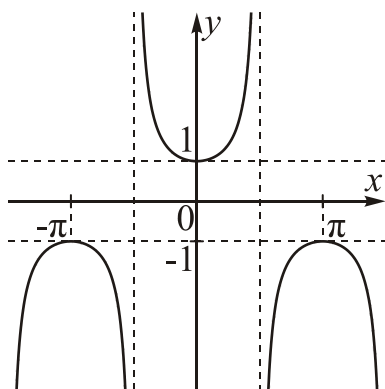
б) $y = \cos x$;



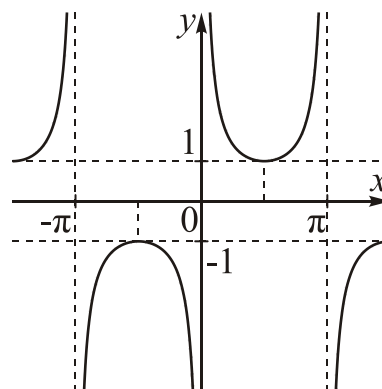
в) $y = \operatorname{tg} x$;



г) $y = \operatorname{ctg} x$.

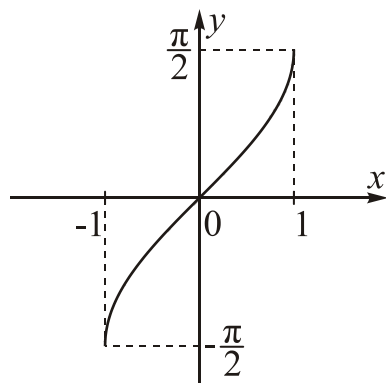


д) $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$;

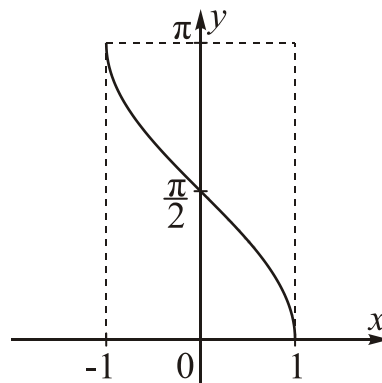


е) $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

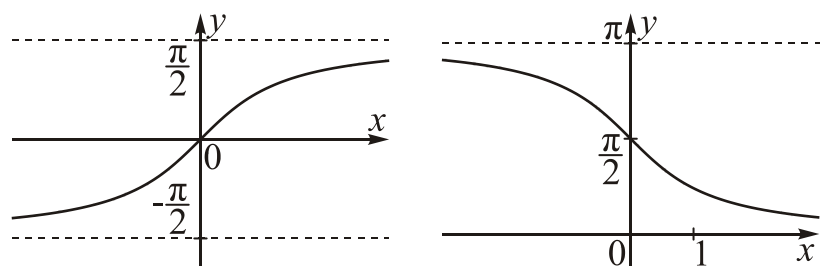
5. Обратные тригонометрические функции



а) $y = \arcsin x, |x| \leq 1$;

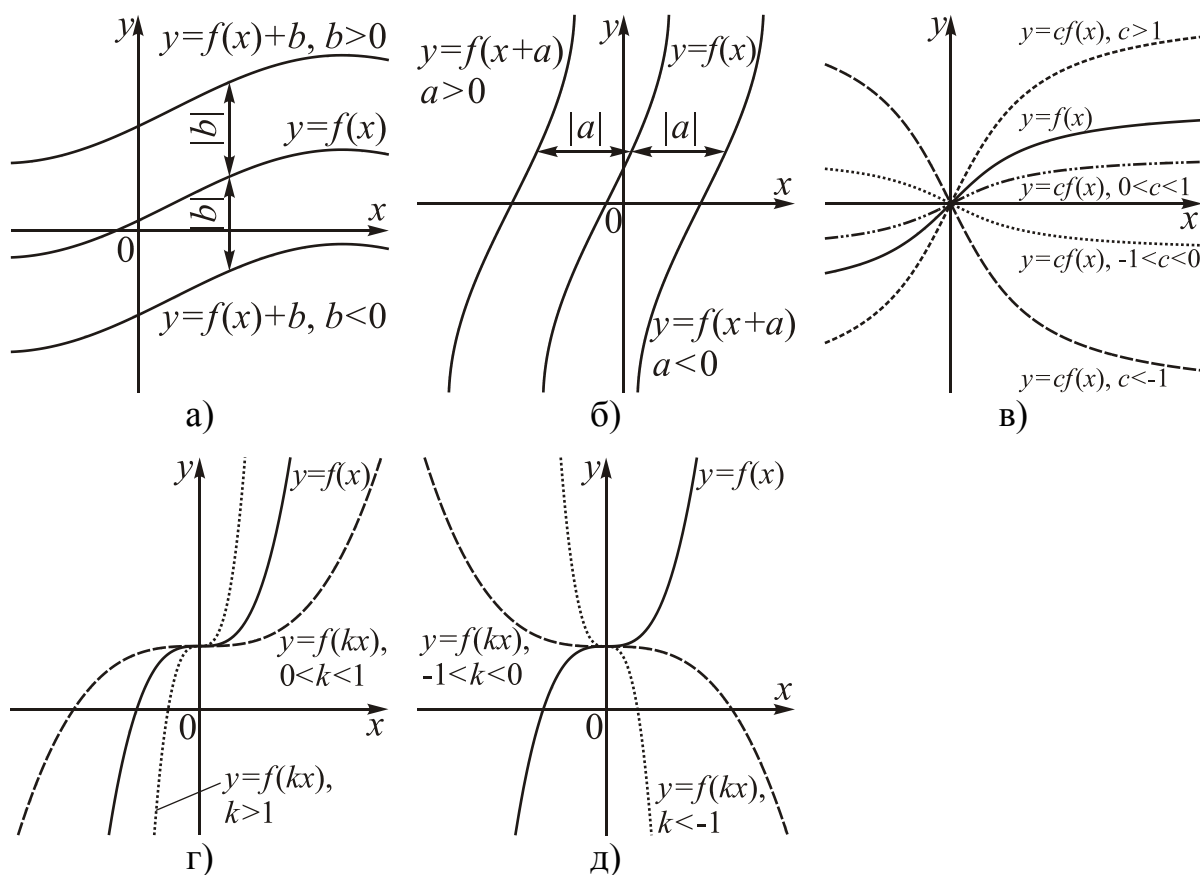


б) $y = \arccos x, |x| \leq 1$;



В) $y = \operatorname{arctg} x, -\infty < x < +\infty$; Г) $y = \operatorname{arcctg} x, -\infty < x < +\infty$.

6. Известен график функции $y = f(x)$. На рис. а, б, в, г показаны преобразования этого графика.



а) График функции $y = f(x) + b$ получаем из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси Oy на величину b .

б) График функции $y = f(x + a)$ получаем из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Ox на величину a .

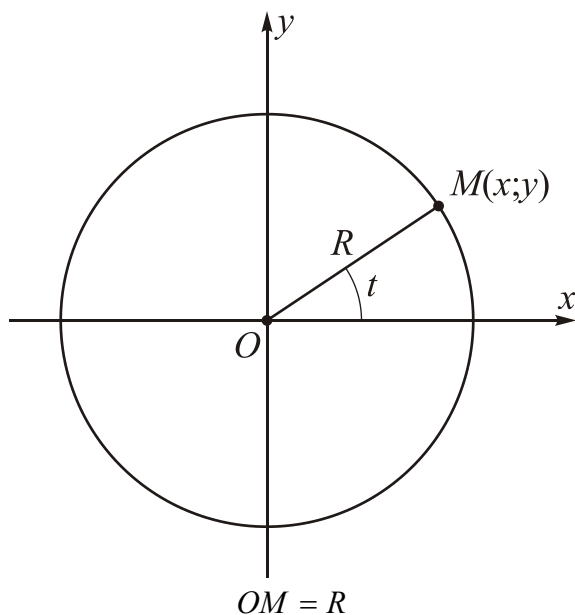
в) График функции $y = cf(x)$ ($c \neq 0$) получаем из графика функции $y = f(x)$ при $0 < c < 1$ путем сжатия в $\frac{1}{c}$ разов ординат последнего, а при $c > 1$ путем растяжения в c разов его ординат с сокращением

соответствующих абсцисс. Если $-\infty < c < 0$, то график $y = cf(x)$ есть зеркальное отображение графика $y = -cf(x)$ относительно оси Ox .

г), д) График функции $y = f(kx)$ ($k \neq 0$) получаем из графика функции $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ увеличением в $\frac{1}{k}$ разов абсцисс его точек, а при $1 < k < +\infty$ уменьшением в k разов абсцисс его точек с сокращением их ординат. Если $-\infty < k < 0$, то график $y = f(kx)$ есть зеркальное отображение графика $y = f(-kx)$ относительно оси Oy .

7. Окружность

Окружностью называется множество точек на плоскости, расстояния которых от данной точки плоскости (центр окружности) равняется постоянному числу (радиус).



Уравнение в декартовых координатах: $x^2 + y^2 = R^2$.

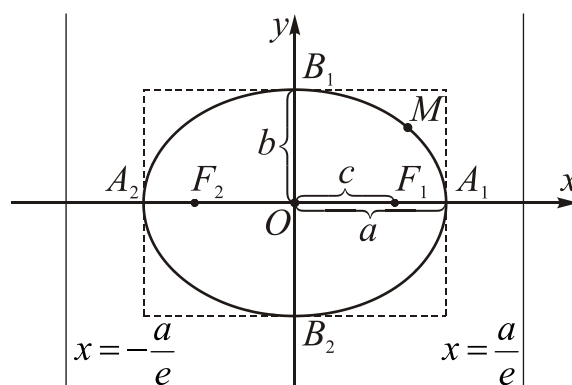
Уравнения в параметрической форме: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$.

Уравнение в полярных координатах: $\rho = R$.

8. Эллипс

Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых

фокусами, есть величина постоянная и большая расстояния между фокусами.



$$F_1M + F_2M = 2a, \quad a = \text{const}$$

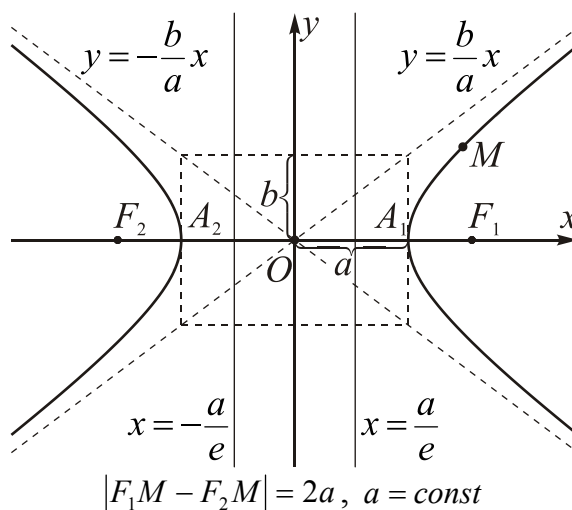
$A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ - вершины эллипса; $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ - фокусы эллипса.

Уравнение в декартовых координатах: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; a - большая полуось; b - малая полуось ($b < a$); c - фокальная полуось; $c^2 = a^2 - b^2$; эксцентриситет $e = \frac{c}{a}$, $0 < e < 1$; уравнения директрис: $x = \pm \frac{a}{e}$.

Уравнение в параметрической форме: $x = a \cos t$; $y = b \sin t$.

9. Гипербола

а) *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости модуль разности расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и меньшая расстояния между фокусами.

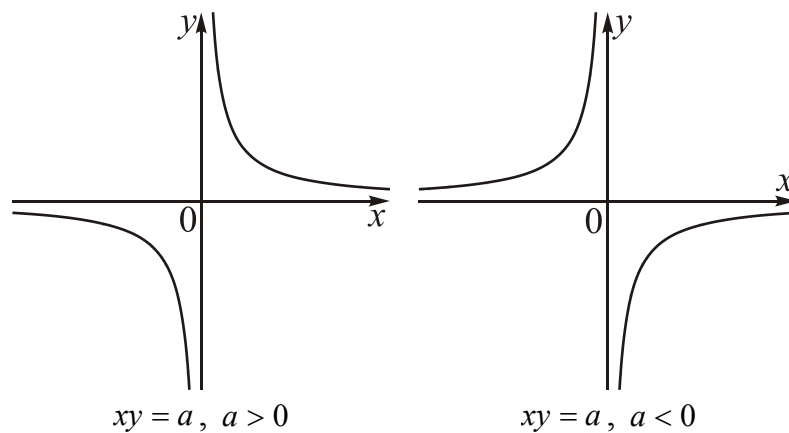


$$|F_1M - F_2M| = 2a, \quad a = \text{const}$$

Уравнение в декартовых координатах: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; a – действительная полуось; b – мнимая полуось; c – фокальная полуось; $c^2 = a^2 + b^2$; эксцентриситет $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$; уравнения директрис: $x = \pm \frac{a}{e}$; уравнения асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

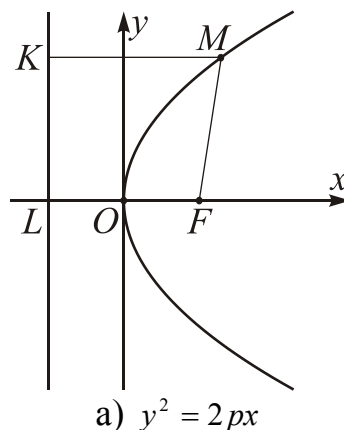
Уравнения в параметрической форме: $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.

б) Равносторонняя гипербола



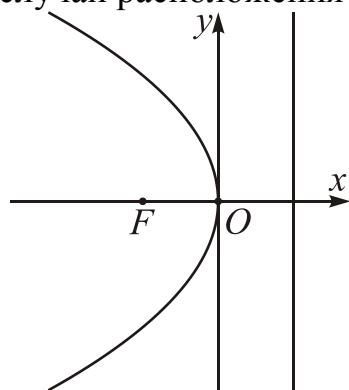
10. Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

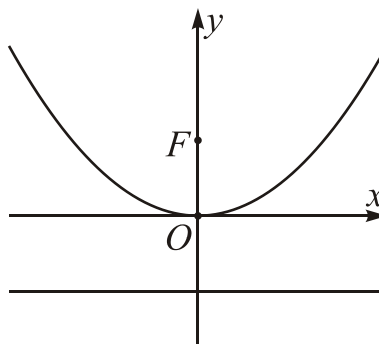


$FM = MK$, $O(0;0)$ – вершина параболы; $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус параболы; KL – директриса параболы; $p = FL$ – параметр параболы; эксцентриситет $e = 1$; уравнение директрисы: $x = -\frac{p}{2}$.

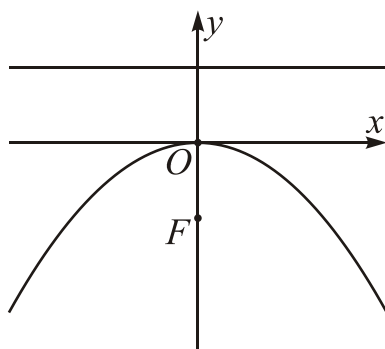
Другие случаи расположения параболы:



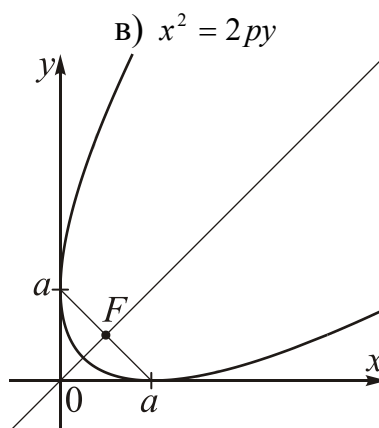
б) $y^2 = -2px$



в) $x^2 = 2py$



г) $x^2 = -2py$

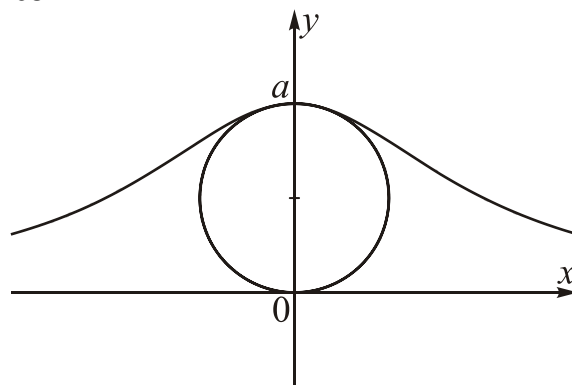


д) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$

Замечание

Полярное уравнение, общее по форме для эллипса, одной ветви гиперболы и параболы, имеет вид $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$, где ρ , φ – полярные координаты произвольной точки линии, p – фокальный параметр (половина фокальной хорды, перпендикулярной к её оси). Для параболы p есть расстояние от фокуса до директрисы, для эллипса и гиперболы $p = \frac{b^2}{a}$.

11. Локон Анъези



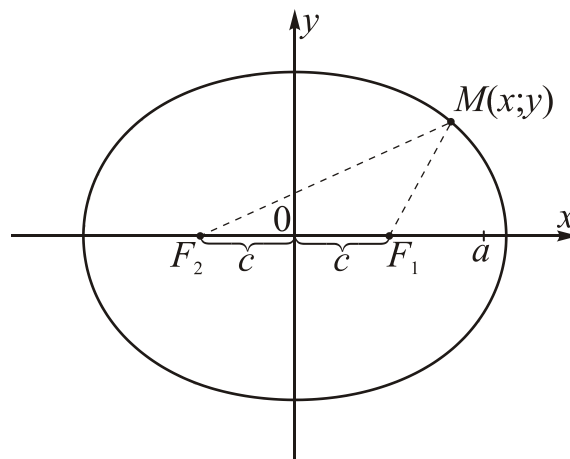
$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

Замечание

Площадь под кривой вчетверо больше площади круга диаметра a . О построении кривой можно прочесть, например, в [9], стр. 470.

12. Овал Кассини

Это множество точек на плоскости, произведение расстояний которых до двух фиксированных точек $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ есть постоянная величина a^2 .



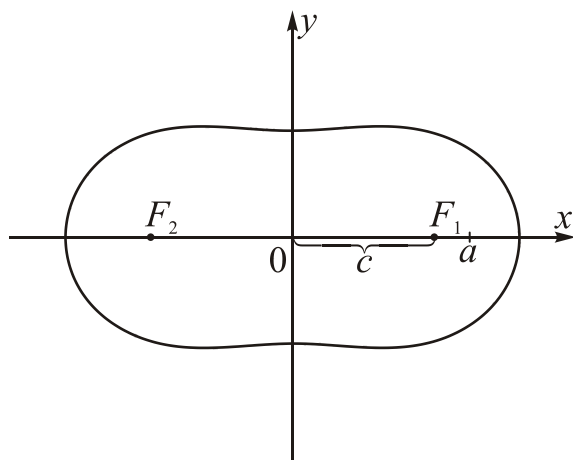
а) $F_1M \cdot F_2M = a^2$

Уравнение в декартовых координатах: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$.

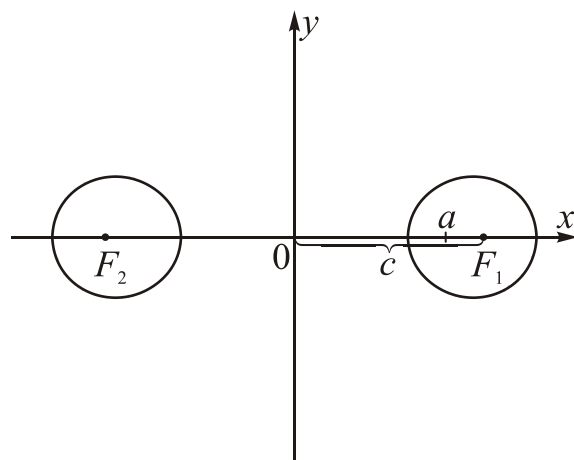
Уравнение в полярных координатах:

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}.$$

Форма кривой зависит от отношения $\frac{a}{c}$. На рис. а изображена кривая для $a > c\sqrt{2}$.



б) $c < a < c\sqrt{2}$

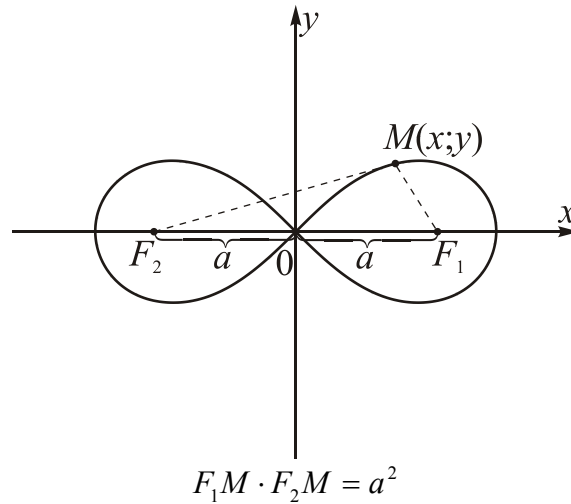


в) $a < c$

При $a = c$ кривая называется лемнискатой (см. ниже).

13. Лемниската Бернулли

Это множество точек на плоскости, произведение расстояний которых до двух фиксированных точек $F_1(-a;0)$ и $F_2(a;0)$ есть постоянная величина a^2 (частный случай овала Кассини).



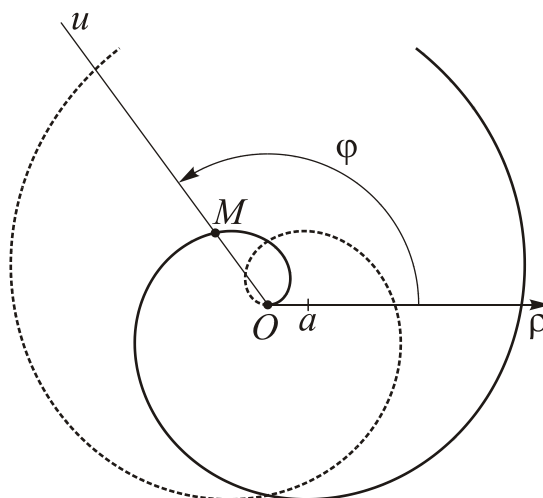
Уравнение в декартовых координатах: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

Уравнение в полярных координатах: $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

14. Спираль Архимеда

Луч u , в начальном положении совпадающий с полярной осью Op , вращается вокруг полюса O с постоянной угловой скоростью ω . Точка M , имеющая начальное положение в O , движется по лучу u с постоянной скоростью v . Траектория, описываемая при этом точкой M , называется спиралью Архимеда.

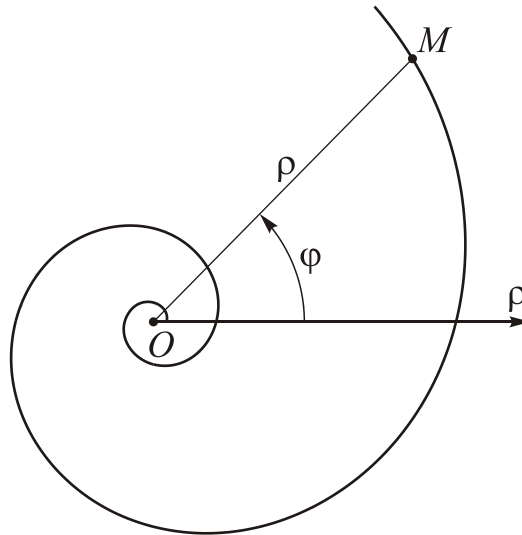
φ – угол между осью Op и лучом u .



Сплошная ветвь соответствует положительным значениям φ , пунктирная – отрицательным.

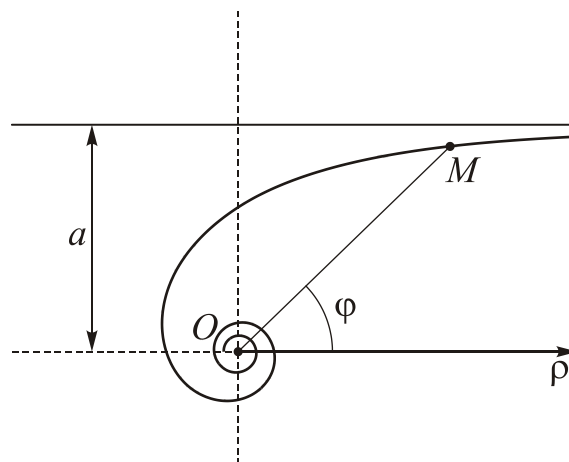
Если обозначить $\frac{v}{\omega} = a$, уравнение спирали Архимеда в полярных координатах будет иметь вид: $\rho = a\varphi$.

15. Логарифмическая спираль



Уравнение в полярных координатах: $\rho = e^{a\varphi}$ или $\ln \rho = a\varphi$. Для кривой, изображенной на рисунке, $a > 0$.

16. Гиперболическая спираль



Уравнение в полярных координатах: $\rho = \frac{a}{\varphi}$.

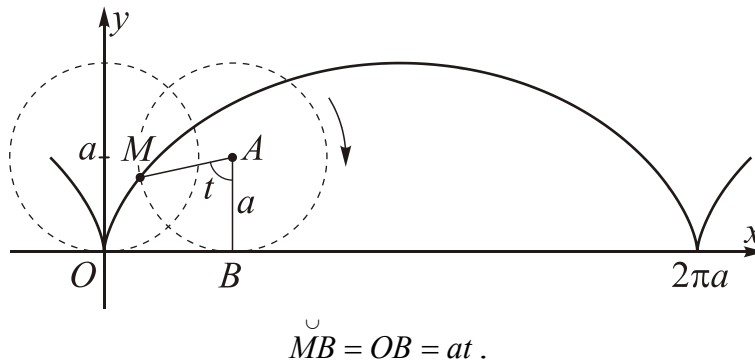
17. Циклоида

Циклоидой называется кривая, описываемая точкой, отстоящей на фиксированном расстоянии от центра круга, катящегося без скольжения по данной кривой – направляющей циклоиды.

Циклоида обыкновенная.

Направляющая кривая – прямая линия.

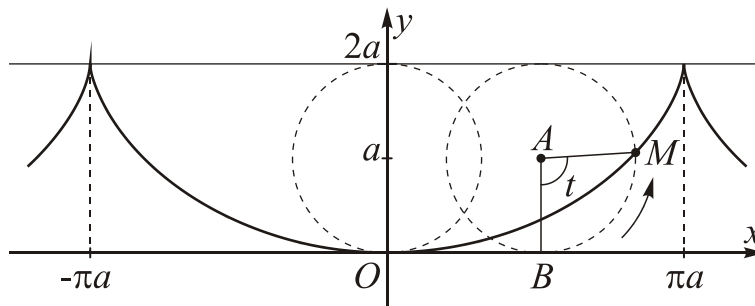
а) Точка M , катящейся по оси Ox окружности, в начале движения совпала с началом координат O .



Уравнение в декартовых координатах: $y = a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}.$

Уравнение в параметрических координатах: $x = a(t - \sin t),$
 $y = a(1 - \cos t).$

б) Точка M , катящейся по прямой $y = 2a$ окружности, в начале движения совпала с началом координат O .

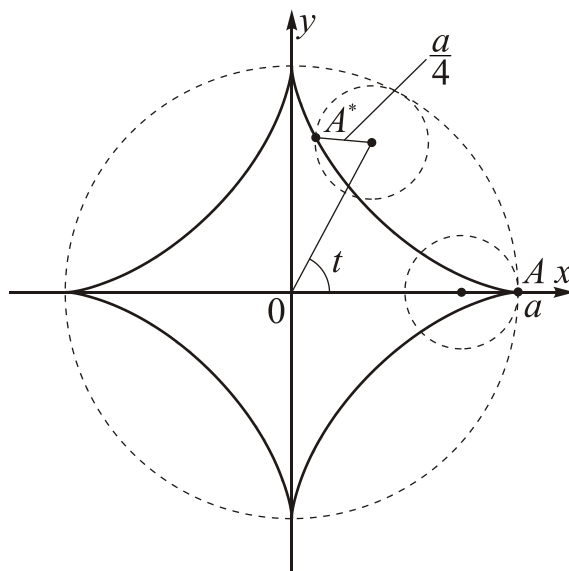


Уравнение в декартовых координатах: $y = a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) + \sqrt{2ay - y^2}.$

Уравнение в параметрических координатах: $x = a(t + \sin t),$
 $y = a(1 - \cos t).$

18. Астроида

Это кривая, которая получается как траектория некоторой точки окружности радиуса $\frac{a}{4}$, катящейся без скольжения по другой окружности радиуса a (причем меньшая окружность все время остается внутри большей).

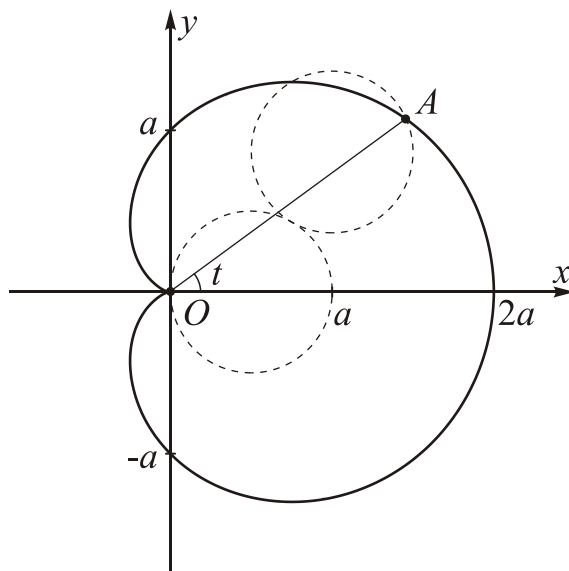


Уравнение в декартовых координатах: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Уравнение в параметрических координатах: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$,
 $0 \leq t \leq 2\pi$.

19. Кардиоида

Это кривая, которая получается как траектория точки, лежащей на окружности круга радиуса a ($a > 0$), катящейся по окружности неподвижного круга с тем же радиусом.



Уравнение в декартовых координатах: $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2 y^2 = 0$.

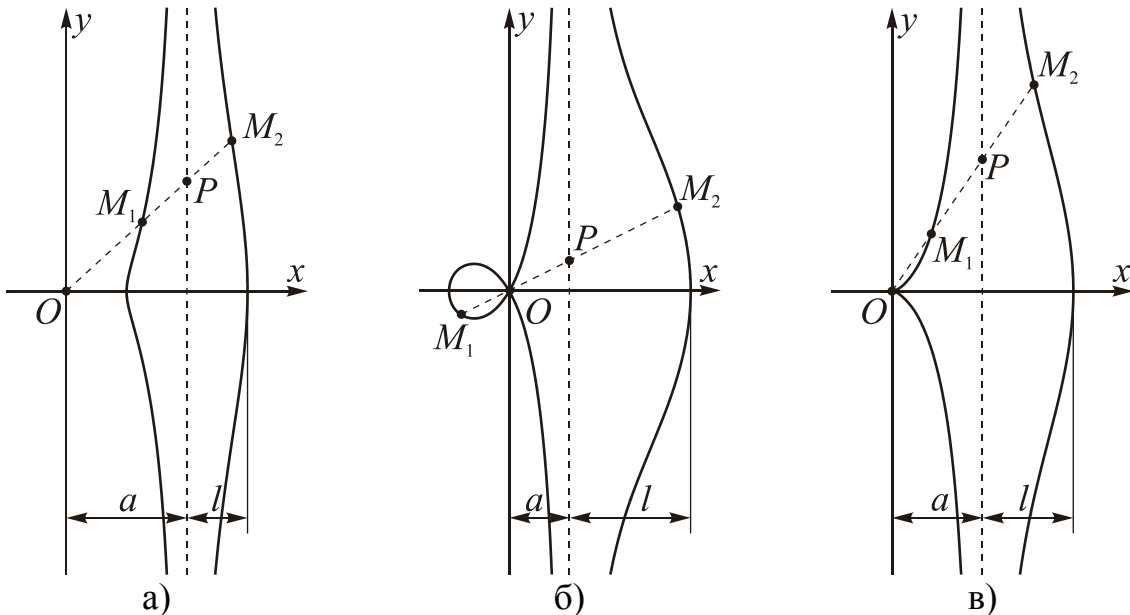
Уравнение в параметрических координатах: $x = a \cos t (1 + \cos t)$,
 $y = a \sin t (1 + \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Уравнение в полярных координатах: $\rho = a(1 + \cos \varphi)$

20. Конхоида Никомеда

Конхойдой данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиус-вектора каждой точки данной кривой на постоянный отрезок l . Если уравнение кривой в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, то уравнение ее конхойды $\rho = f(\varphi) \pm l$.

Конхоида Никомеда – конхоида прямой $x = a$ относительно точки O .



Конхоида Никомеда: а) $l < a$; б) $l > a$; в) $l = a$. Во всех случаях выполняется равенство $OM = PO \pm l$.

При $l < a$ точка O – изолированная точка кривой (в этом случае точка O в параметрическом представлении не содержится); при $l > a$ точка O – узловая точка кривой; при $l = a$ точка O – точка возврата.

Уравнение в декартовых координатах: $(x - a)^2(x^2 + y^2) - l^2 y^2 = 0$, $a > 0$, $l > 0$.

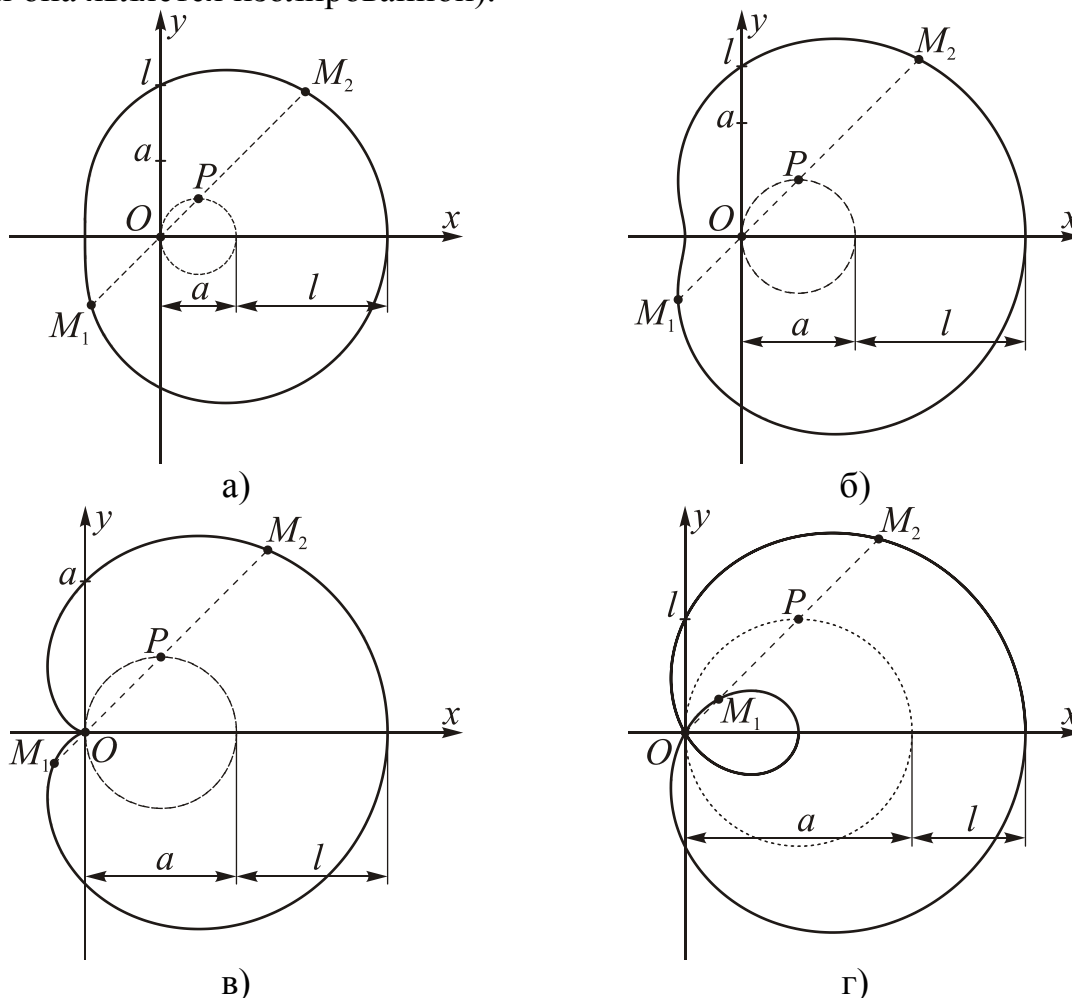
Уравнение в параметрических координатах: $x = a + l \cos t$,
 $y = a \tan t + l \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ – правая ветвь, $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ – левая ветвь.

Уравнение в полярных координатах: $\rho = \frac{a}{\cos \varphi} + l$ – правая ветвь,

$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} - l$ – левая ветвь.

21. Улитка Паскаля

Улитка Паскаля – конхоида окружности с радиусом $\frac{a}{2}$ и центром $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ относительно O (при таком определении не учитывается точка O если она является изолированной).



Улитка Паскаля: а) $l \geq 2a$; б) $a < l < 2a$; в) $a = l$; г) $l < a$. Во всех случаях выполняется равенство $OM = OP \pm l$.

Уравнение в декартовых координатах: $(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$, $a > 0$, $l > 0$.

Уравнение в полярных координатах: $\rho = a \cos \varphi + l$ (при $a < l$ точка O не включается).

Уравнение в параметрических координатах: $x = a \cos^2 t + l \cos t$, $y = \cos t \sin t + l \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ (при $a < l$ точка O не включается).

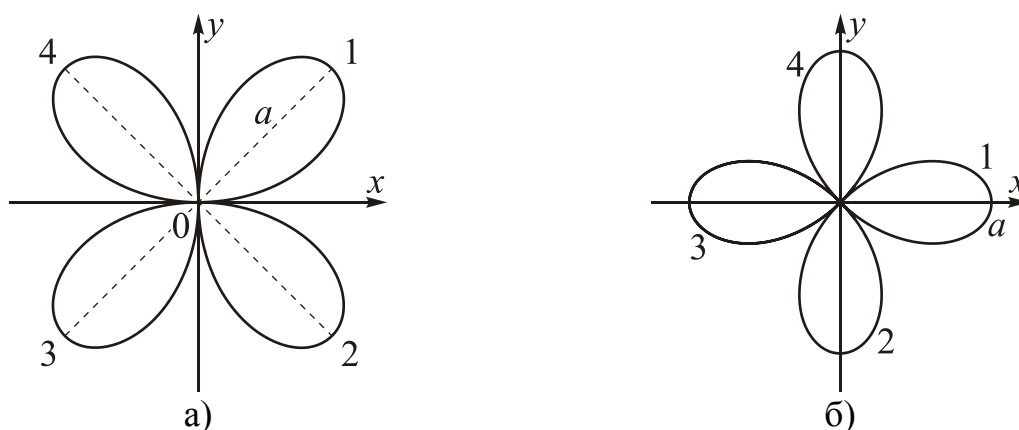
При $a < l$ O – изолированная точка кривой, при $a > l$ O – узловая точка с двумя касательными, при $a = l$ O – точка возврата.

При $a = l$ кривая называется кардиоидой.

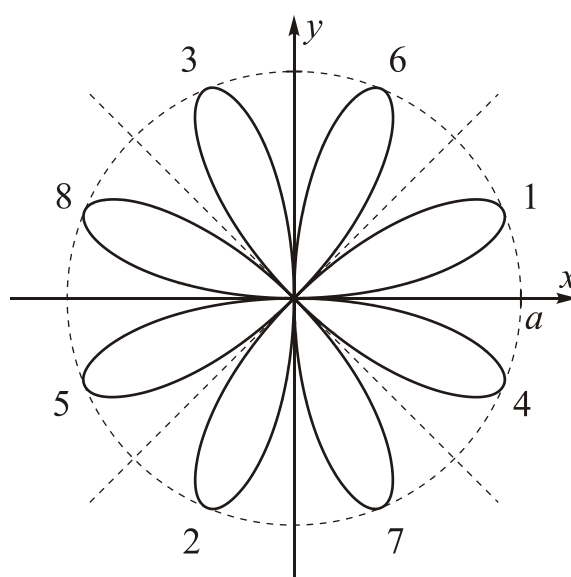
22. Розы

Кривые вида $\rho = a \sin k\varphi$ или $\rho = a \cos k\varphi$, где a и k – положительные постоянные, называются *розами*. Так как $|\sin k\varphi| \leq 1$ и $|\cos k\varphi| \leq 1$, то вся кривая расположена внутри круга радиуса a . В силу того, что $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$ – периодические функции, роза состоит из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a .

Если $|k|$ – целое число, то роза состоит из $2k$ лепестков при k четном (или из k лепестков, если ограничиваться $\rho \geq 0$) и из k лепестков при k нечетном.

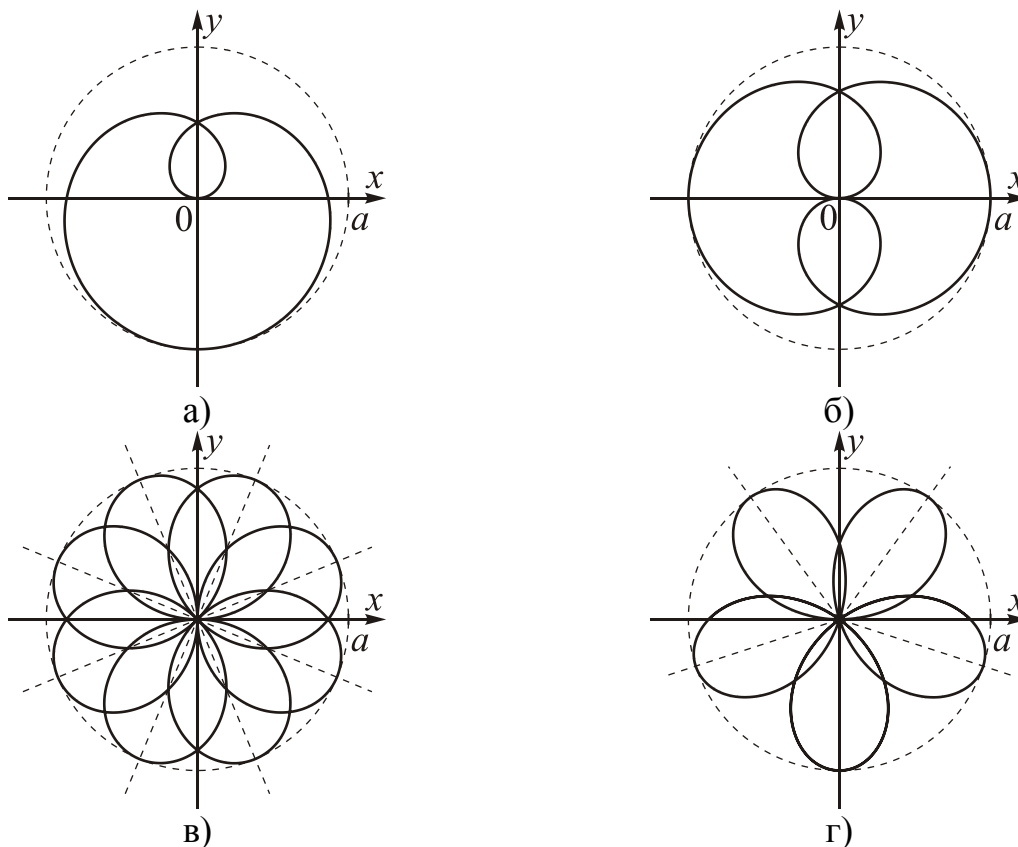


Четырехлепестковые розы: а) $\rho = a \sin 2\varphi$; б) $\rho = a \cos 2\varphi$. При $\rho \geq 0$ получим двухлепестковые розы – лепестки 1 и 3.



Восьмилепестковая роза $\rho = a \sin 4\varphi$. При $\rho \geq 0$ получим четырехлепестковую розу – лепестки 1, 3, 5 и 7.

Если $k = \frac{m}{n}$ (рациональное число), то роза состоит из m лепестков, когда m и n нечетные, и из $2m$ лепестков, когда одно из этих чисел является четным; при этом лепестки частично перекрываются.

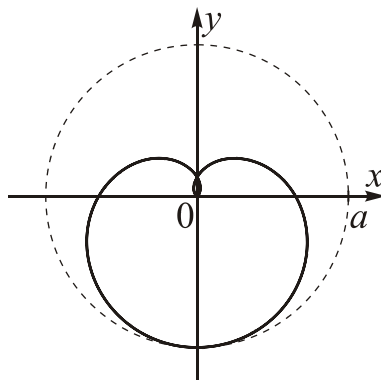


Розы $\rho = a \sin k\varphi$, где $k = \frac{m}{n}$ рациональное число: а) $\rho = a \sin \frac{\varphi}{3}$; б) $\rho = a \sin \frac{\varphi}{2}$;

в) $\rho = a \sin \frac{4\varphi}{3}$; г) $\rho = a \sin \frac{5\varphi}{3}$.

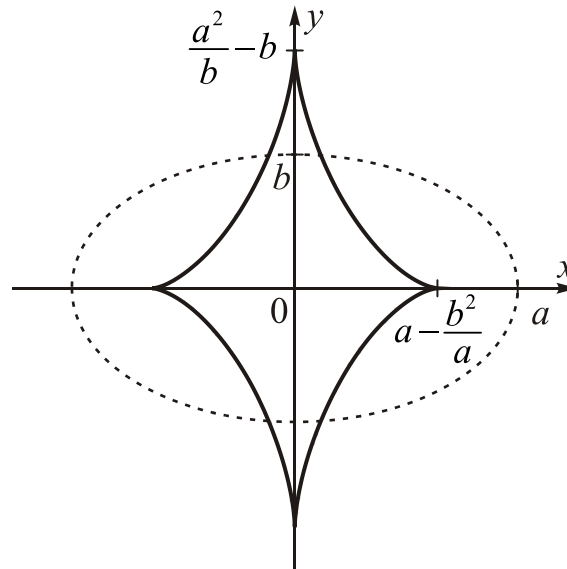
Если k – иррациональное число, то роза состоит из бесконечного множества пересекающихся лепестков.

23. Кривая $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$



24. Эволюта эллипса

Эволюта данной кривой – кривая, состоящая из центров кривизны для всех точек данной кривой.



Если эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то уравнение его эволюты:

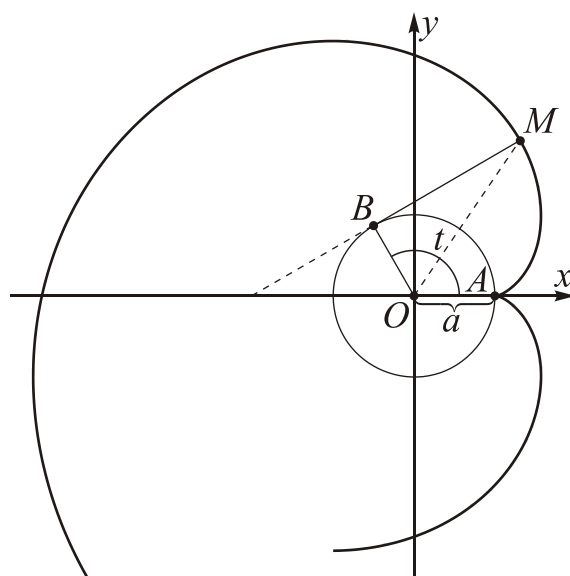
а) в декартовых координатах $\left(\frac{x}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}$;

б) в параметрической системе координат $y = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3 t$,
 $x = \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \sin^3 t$.

25. Эвольвента круга

По отношению к своей эволюте данная кривая называется эвольвентой (инволютой, разверткой).

Укажем на следующий механический способ построения эвольвенты для окружности. Нить, намотанная на окружность $x^2 + y^2 = a^2$, наматывается так, что в точке B , где нить отделяется от окружности, она остается касательной к ней. Тогда линия, описываемая концом нити, если начальным положением конца является точка $A(a; 0)$, где $a > 0$, называется эвольвентой.



$$BM = \overset{\frown}{AB} = at$$

Уравнение в параметрических координатах: $x = a(\cos t + t \sin t)$,
 $y = a(\sin t - t \cos t)$.

§7. ГРАФИКИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Специальными функциями обычно называют функции, которые в общем случае нельзя выразить через элементарные функции. Большинство из них являются решением дифференциальных уравнений специального вида и могут быть представлены в виде интегралов.

Рассмотрим некоторые из них, которые наиболее часто встречаются в инженерной практике.

1. Интегральная показательная функция — специальная функция, определяемая интегралом:

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad (x < 0).$$

При положительных аргументах функция вычисляется как главное значение интеграла в смысле Коши:

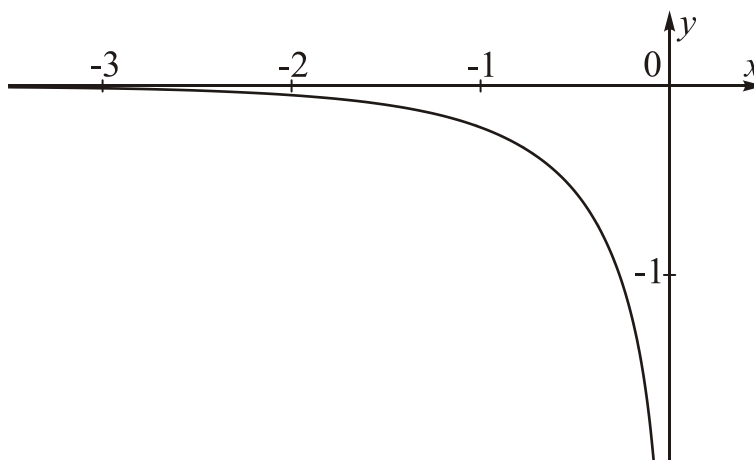
$$\operatorname{Ei}(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right), \quad (x > 0).$$

Функция $\operatorname{Ei}(x)$ представляется в виде ряда

$$\operatorname{Ei}(x) = \gamma + \ln(-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot n}, \quad (x < 0),$$

где γ — постоянная Эйлера-Маскерони, $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$, $\gamma \approx 0,57721566$.

График функции $\operatorname{Ei}(x)$:



2. Интегральный логарифм — специальная функция, определяемая интегралом

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}.$$

При $x \geq 1$ интеграл расходится в точке $t = 1$; в этом случае под интегралом понимается главное значение несобственного интеграла.

Для устранения сингулярности при $x = 1$ иногда применяется **сдвинутый интегральный логарифм**:

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Это две функции связаны соотношением:

$$\text{Li}(x) - \text{li}(x) = \text{li}(2) \approx 1,04516378.$$

Интегральный логарифм и интегральная показательная функция связаны соотношением:

$$\text{li}(x) = \text{Ei}(\ln x).$$

Имеют место следующие соотношения:

- $\text{Ei}(x) = \text{li}(e^x), \quad (x < 0);$
- $\text{Ei}(\ln x) = \text{li}(x), \quad (x < 1);$
- $\text{Ei}(\pm ix) = \text{Ci}(x) \pm i \text{Si}(x) \mp \frac{\pi i}{2}, \quad (x > 0).$

Интегральный логарифм имеет единственный положительный ноль в точке $\mu \approx 1,451369234883$ (число Рамануджана - Солднера).

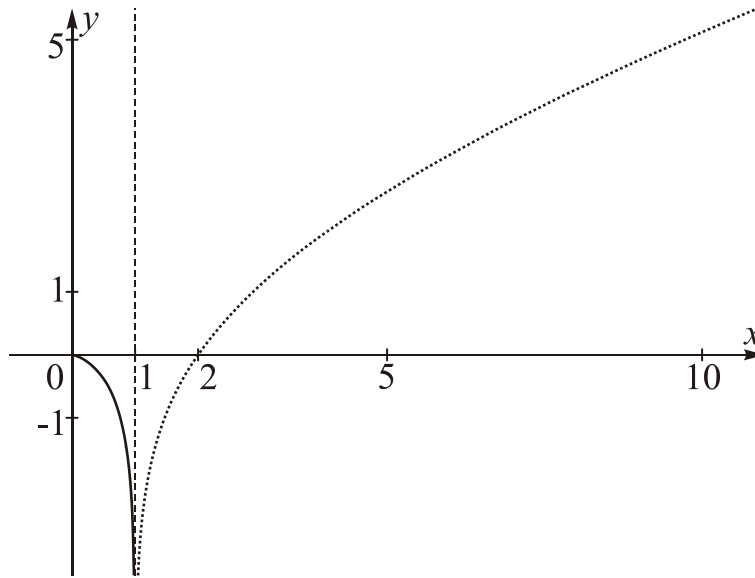
Разложение в ряд следующее: из тождества, связывающего $\text{li}(x)$ и $\text{Ei}(\ln x)$ следует ряд:

$$\text{li}(x) = \text{Ei}(\ln x) = \gamma + \ln \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n \cdot n!}.$$

Быстрее сходится ряд, выведенный Сринивасой Рамануджаном:

$$\text{li}(x) = \gamma + \ln \ln x + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\ln x)^n}{2^{n-1} n!} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2k+1}.$$

Графики функций $\text{li}(x)$ (—) и $\text{Li}(x)$ (.....):



3. Интегральный синус — специальная функция, определяемая интегралом:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Иногда также пользуются обозначением $\text{si}(x)$:

$$\text{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \text{Si}(x) - \frac{\pi}{2}.$$

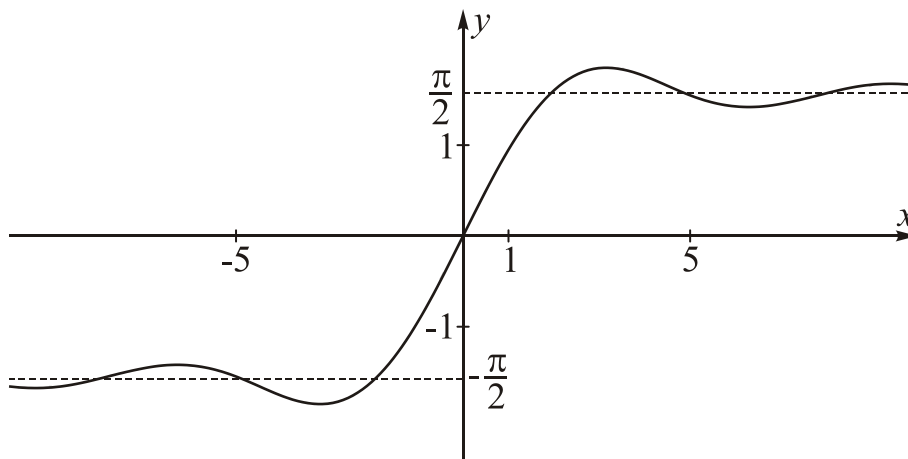
Также, интегральный синус может быть определён через интегральную показательную функцию $\text{Ei}(x)$ по аналогии с синусом:

$$\text{si}(x) = \frac{1}{2i} (\text{Ei}(ix) - \text{Ei}(-ix)).$$

Свойства

- Функция нечетная: $\text{Si}(-x) = -\text{Si}(x)$.
- Функция имеет следующие асимптоты: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Si}(x) = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Si}(x) = -\frac{\pi}{2}$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{si}(x) = \pi$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{si}(x) = 0$.
- Функция имеет локальные экстремумы в точках $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$.
- Разложение в ряд: $\text{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}$.

График функции $\text{Si}(x)$:



4. Интегральный косинус — специальная функция, определяемая интегралом:

$$\text{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad \text{или} \quad \text{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt, \quad (x > 0).$$

Также возможно определение интегрального косинуса через интегральную показательную функцию по аналогии с обычным косинусом:

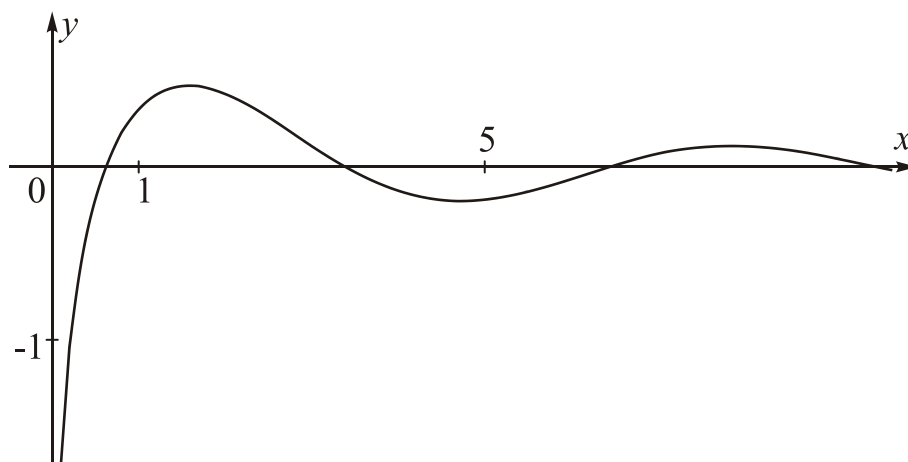
$$\text{Ci}(x) = \frac{1}{2} (\text{Ei}(ix) + \text{Ei}(-ix)).$$

Свойства

Интегральный косинус может быть представлен в виде ряда:

$$\text{Ci}(x) = \gamma + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)! \cdot 2n}.$$

График функции $\text{Ci}(x)$:



5. Функция ошибок - это неэлементарная функция, возникающая в теории вероятностей, статистике и теории дифференциальных уравнений в частных производных. Она определяется как

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

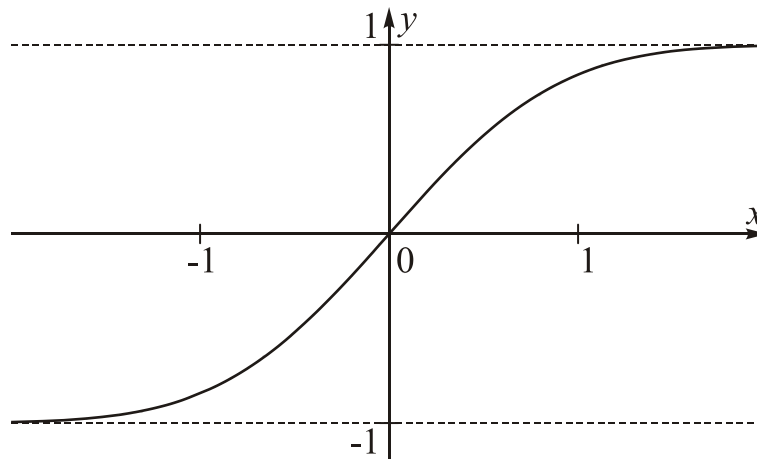
Дополнительная функция ошибок, обозначаемая $\operatorname{erfc}(x)$ (иногда применяется обозначение $\operatorname{Erf}(x)$) определяется через функцию ошибок:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

Свойства

- Функция ошибок нечётна: $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$
- Для любого комплексного x выполняется $\operatorname{erf}(\bar{x}) = \overline{\operatorname{erf}(x)}$, где черта обозначает комплексное сопряжение числа x .
- Функция ошибок не может быть представлена через элементарные функции, но, разлагая интегрируемое выражение в ряд Тейлора и интегрируя почленно, мы можем получить её представление в виде ряда:
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^9}{4! \cdot 9} - \dots \right).$$
- Это равенство выполняется (и ряд сходится) как для любого вещественного x , так и на всей комплексной плоскости.
- Функция ошибок на бесконечности равна единице; однако это справедливо только при приближении к бесконечности по вещественной оси.
- Производная функции ошибок выводится непосредственно из определения функции:
$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$
- $$\int_0^x \operatorname{erf}(x) dx = x \operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-x^2} - 1).$$

График функции $\operatorname{erf}(x)$:



Применение

Если набор случайных чисел подчиняется нормальному распределению со стандартным отклонением σ , то вероятность, что число отклонится от среднего не более чем на a , равна $\text{erf}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right)$.

Функция ошибок и дополнительная функция ошибок встречаются в решении некоторых дифференциальных уравнений, например, уравнения теплопроводности с граничными условиями описываемыми функцией Хевисайда.

6. Гамма-функция - математическая функция, которая расширяет понятие факториала на поле комплексных чисел. Обычно обозначается $\Gamma(z)$.

Если вещественная часть комплексного числа z положительна, то Гамма-функция определяется через интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\text{Re } z > 0).$$

Связанные определения

Иногда используется альтернативная запись, так называемая **пи-функция**, зависящая от гамма-функции следующим образом: $\Pi(z) = \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

В интеграле выше, определяющем гамма-функцию, пределы интегрирования фиксированы. В **неполной гамма-функции** допускается,

чтобы верхний либо нижний предел интегрирования был переменным. Неполную гамма-функцию часто обозначают как гамма-функцию от двух аргументов: $\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$.

Свойства

– Функциональные уравнения:

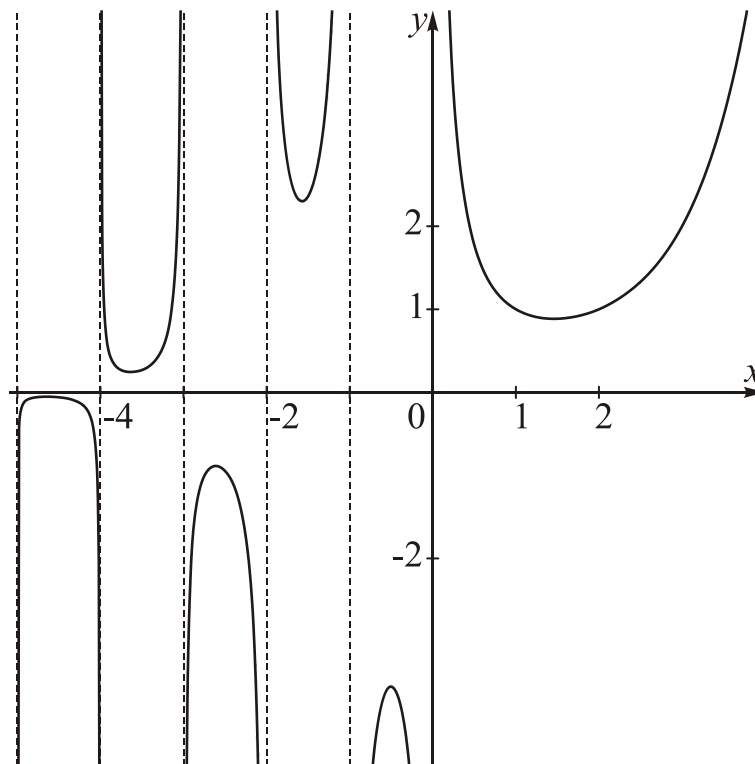
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}; \quad \Gamma(-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{z \sin \pi z};$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}.$$

– Некоторые значения гамма-функции: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$

($n = 0, 1, 2, \dots$).

График гамма-функции:



7. Полные эллиптические интегралы первого и второго рода

определяются соответственно так:

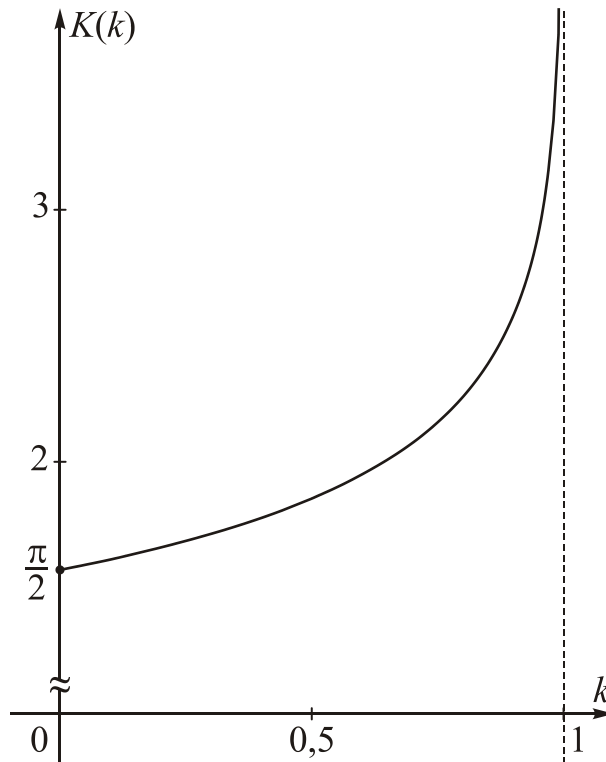
$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k \sin^2 \varphi}} \quad \text{и} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Вычислить их можно путем разложения в ряд:

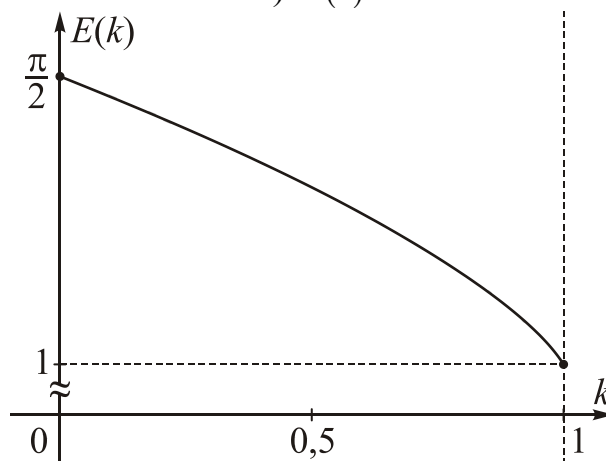
$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right)^2 k^{2n}; \quad E(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right) \frac{k^{2n}}{1-2n}.$$

Частные случаи: $K(0) = \frac{\pi}{2}$; $K(1) = \infty$; $E(0) = \frac{\pi}{2}$; $E(1) = 1$;

Графики



а) $K(k)$



б) $E(k)$

8. Функции Бесселя.

Уравнение

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2) y = 0$$

называется дифференциальным уравнением Бесселя. Его решениями являются:

- $J_{\pm\alpha}(z)$ - функции Бесселя первого рода;
- $Y_{\alpha}(z)$ - функции Бесселя второго рода (также называемые функциями Неймана, обозначаемые через $N_{\alpha}(z)$);
- $H_{\alpha}^{(1)}, H_{\alpha}^{(2)}$ - функции Бесселя третьего рода (также называемые функциями Ханкеля первого и второго рода соответственно).

α – произвольное вещественное число, называемое порядком.

Наиболее часто используемые функции Бесселя – функции целых порядков.

Функциями Бесселя первого рода, являются решения, конечные в точке $x = 0$ при целых или неотрицательных α . Можно определить эти функции с помощью разложения в ряд Тейлора около нуля (или в более общий степенной ряд при нецелых α):

$$J_{\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha},$$

где $\Gamma(z)$ - это гамма-функция.

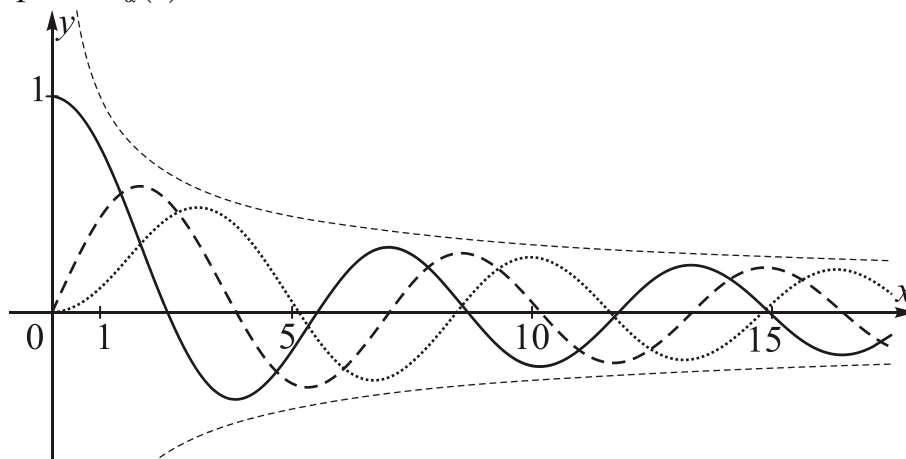
При $\alpha = 0$ $J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

$\alpha = 1$ $J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$ - функция Бесселя первого рода первого порядка;

$\alpha = 2$ $J_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2}$ - функция Бесселя первого рода второго порядка.

График функции Бесселя похож на синусоиду, колебания которой затухают пропорционально $\frac{1}{\sqrt{x}}$, хотя на самом деле нули функции расположены не периодически.

Графики $J_\alpha(x)$ для $\alpha = 0, 1, 2$:



$J_0(x)$ (—), $J_1(x)$ (- - - -), $J_2(x)$ (.....), $\pm 1/\sqrt{x}$ (- - - - -).

Если α не является целым числом, функции $J_\alpha(x)$ и $J_{-\alpha}(x)$ линейно независимы и, следовательно, являются решениями уравнения. Но если α целое, то верно следующее соотношение:

$$J_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha J_\alpha(x).$$

Оно означает, что в этом случае функции линейно зависимы. Тогда вторым решением уравнения станет функция Бесселя второго рода (см. ниже).

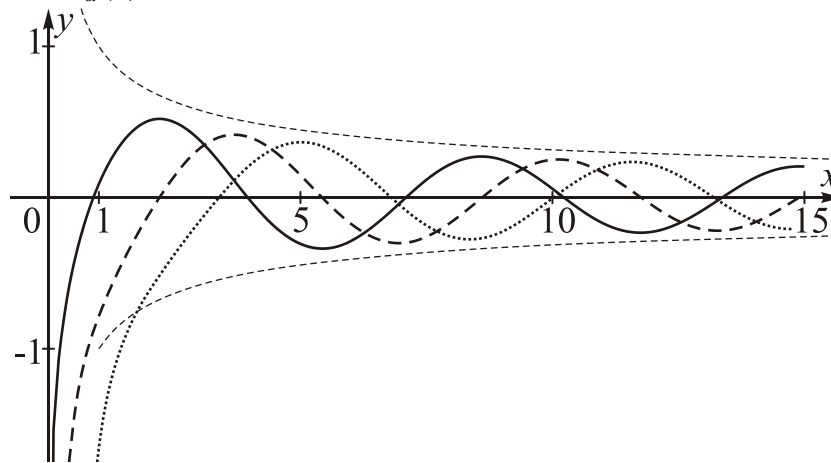
Функции Неймана. Функции Неймана — решения $Y_\alpha(x)$ уравнения Бесселя, бесконечные в точке $x = 0$.

Эти функции связаны с $J_\alpha(x)$ следующим соотношением:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)},$$

где в случае целого α берётся предел по α , вычисляемый, например, с помощью правила Лопиталя.

Графики $Y_\alpha(x)$ для $\alpha = 0, 1, 2$:



$Y_0(x)$ (—), $Y_1(x)$ (- - - -), $Y_2(x)$ (.....), $\pm 1/\sqrt{x}$ (- - - - -).

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб: Профессия, 2002. – 432 с.
2. *Броништейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
3. *Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И.* Графики функций. Справочник. – К.: Наукова думка, 1979. – 320 с.
4. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. – М.: Наука, 1975. – 368 с.
5. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1977. – 872 с.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука. 1974. – 832 с.
7. *Кузнецов А.Н., Батрак Ю.А., Иванова А.Г.* Интеграл по мере в техническом вузе. – Николаев: 1988. – 68 с.
8. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965. – 424 с.
9. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов: В 2 т. – М.: Наука, 1985. – Т.1. – 576 с.
10. *Райхмист Р.Б.* Графики функций. – М.: Высшая школа, 1991. – 160 с.
11. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 420 с.
12. *Рыбасенко В.Д., Рыбасенко И.Д.* Элементарные функции. Формулы. Таблицы. Графики. – М.: Наука, 1987. – 414 с.
13. *Савелов А.А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). – М.: ГИТТЛ, 1960. – 260с.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. /Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
§1. Общее исследование функций и линий в декартовых координатах	4
§2. Графики параметрически заданных функций	76
§3. Графики функций в полярной системе координат	88
§4. Графики неявно заданных функций	102
§5. Графики функций, заданных с помощью пределов	107
§6. Кривые для справок (не вошедшие в §§1-5)	109
§7. Графики некоторых специальных функций	128
Использованная литература	138