

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

В. С. Блінцов, Ж. Ю. Буруніна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З ДИСЦИПЛІНИ
«ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ»

Рекомендовано Методичною радою НУК



ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА

2026

УДК 681.5(076)

Б69

Укладачі:

В. С. Блінцов, д-р техн. наук, професор;

А. П. Бурунін, ст. викладач

Рецензент:

П. Є. Михаліченко, д-р техн. наук, професор кафедри автоматики та електроустаткування Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова

Рекомендовано Методичною радою НУК

Блінцов В. С.

Б69 Методичні вказівки з дисципліни «Дослідження операцій електромеханічних систем» / В. С. Блінцов, Ж. Ю. Буруніна. – Миколаїв : НУК, 2026. – 48 с.

Уміщено теоретичний мінімум, алгоритми виконання завдань та вимоги до аналізу результатів оптимізації реальних об'єктів.

Призначено для керівництва самостійною, практичною та лабораторною роботою студентів спеціальності G3.

УДК 681.5(076)

© В. С. Блінцов, Ж. Ю. Буруніна, 2026

© Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, 2026

ВСТУП

Сучасний етап розвитку електроенергетики, електротехніки та електромеханіки характеризується впровадженням інтелектуальних систем керування (*Smart Grid*, енергоефективні автоматизовані електроприводи, відновлювані джерела енергії), що потребує від майбутнього інженера вміння приймати обґрунтовані та оптимальні технічні рішення. Дисципліна «Дослідження операцій електромеханічних систем» є теоретичним та практичним фундаментом для формування таких навичок, забезпечуючи студентів інструментарієм математичного моделювання та системного аналізу.

Ці методичні вказівки призначені для керівництва самостійною, практичною та лабораторною роботою студентів спеціальності G3. Вони містять теоретичний мінімум, алгоритми виконання завдань та вимоги до аналізу результатів оптимізації реальних об'єктів.

1. Мета та завдання дисципліни

Метою вивчення дисципліни є формування у майбутніх фахівців системного інженерного мислення, засвоєння методології дослідження операцій та набуття практичних навичок побудови й аналізу математичних моделей для оптимізації процесів в електромеханічних та електроенергетичних системах різного призначення.

Основними завданнями дисципліни є:

вивчення математичних методів оптимізації (лінійне, нелінійне та динамічне програмування, теорія графів;

навчання студентів формалізації реальних інженерних задач у вигляді математичних моделей (визначення цільової функції, керованих змінних та системи обмежень);

освоєння сучасного програмного забезпечення (MATLAB, Python, MS Excel) для чисельного розв'язання оптимізаційних задач;

формування вміння інтерпретувати отримані математичні результати у конкретні технічні та техніко-економічні рішення.

2. Роль оптимізації та математичного моделювання в галузі

В умовах дефіциту енергоресурсів, жорстких екологічних вимог та ринкової конкуренції традиційні інженерні підходи, засновані лише на інтуїції або типових проєктних рішеннях, часто виявляються неефективними. Оптимізація та математичне моделювання в електротехніці дозволяють:

Знижувати енерговитрати: знаходити оптимальні закони керування електроприводами та оптимальні графіки навантаження, мінімізуючи втрати енергії.

Зменшувати капіталовкладення: розраховувати мінімально достатні, але надійні параметри електрообладнання (масу, габарити, переріз кабелів, потужність компенсаторів).

Керувати ризиками: приймати виважені рішення щодо модернізації чи ремонту обладнання в умовах невизначеності (стохастичний характер споживання, коливання цін на ринку електроенергії).

Математична модель виступає як безпечний та дешевий «цифровий двійник» електромеханічної системи, на якому можна досліджувати будь-які (навіть критичні або аварійні) режими роботи.

3. Компетенції та результати навчання

Виконання завдань, наведених у цих методичних вказівках, безпосередньо спрямоване на формування у студентів низки загальних (ЗК) та спеціальних (фахових) компетентностей (СК), передбачених освітньою програмою спеціальності 141:

Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (вміння виділити головні чинники в роботі електромеханічної системи та відкинути другорядні при побудові моделі).

Здатність використовувати інформаційні та комунікаційні технології для розв'язання складних інженерних задач.

Здатність проєктувати, моделювати та досліджувати характеристики систем електропостачання, електроприводу та автоматизації з використанням критеріїв оптимізації.

Програмні результати навчання (ПРН):

Після виконання циклу робіт студент повинен:

знати: класифікацію методів дослідження операцій; принципи побудови критеріїв ефективності (цільових функцій); математичний апарат оптимізації.

вміти: ставити задачу оптимізації для конкретного електромеханічного об'єкта; реалізовувати алгоритми розв'язку в програмних середовищах; оцінювати адекватність і чутливість отриманих моделей.

4. Загальні вимоги до виконання, оформлення та захисту звітів

Ефективність навчання залежить від дотримання чіткого регламенту виконання робіт. Студент допускається до чергової роботи лише за умови виконання попередньої та наявності теоретичної підготовки.

Виконання роботи:

Кожен студент виконує індивідуальне завдання згідно з виданим викладачем варіантом. Самостійне обрання чи заміна варіанта не допускається.

Розрахунки та моделювання проводяться у вказаному викладачем програмному середовищі. Студент має детально розібратися в алгоритмі, а не просто отримати кінцевий результат.

Оформлення звіту:

Звіт оформлюється в електронному або друкованому вигляді (відповідно до вимог кафедри) на аркушах формату А4 з дотриманням вимог ДСТУ щодо оформлення текстової документації.

Обов'язкова структура звіту:

1. Титульний аркуш (за встановленим зразком).
2. Мета роботи та вихідні дані індивідуального варіанта.
3. Математичне формулювання задачі (опис цільової функції, змінних та обмежень).
4. Хід виконання роботи (скріншоти програмного коду / моделей / вікон розрахунків, графіки, проміжні таблиці).
5. Результати оптимізації (фінальні значення критеріїв та параметрів).
6. **Висновки** (найважливіша частина, де студент дає фізичне й техніко-економічне пояснення отриманого оптимуму, оцінює його ефективність порівняно з неоптимальним режимом).

Захист звіту:

Оформлений звіт подається викладачу на перевірку у встановлені робочою програмою терміни. За несвоєчасну здачу звітів підсумкова оцінка може бути знижена.

Під час захисту студент повинен продемонструвати розуміння суті використаного методу оптимізації, пояснити отримані графіки / результати та відповісти на контрольні питання, наведені наприкінці кожної теми.

Розділ 1

МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЕЛЕКТРОМЕХАНІЦІ

Тема 1. Оптимальний розподіл навантаження між паралельно працюючими агрегатами (лінійне програмування)

1. Мета роботи

Навчитися формалізувати інженерні задачі електромеханіки у вигляді математичних моделей лінійного програмування (ЛП); опанувати методику побудови цільової функції витрат енергії та системи обмежень за потужністю й технологічними параметрами; набути практичних навичок розв'язання оптимізаційних задач за допомогою симплекс-методу в автоматизованих середовищах розрахунків (MS Excel / MATLAB / Python).

2. Теоретичні відомості

У промисловості часто експлуатуються станції (насосні, компресорні, вентиляторні), що складаються з кількох паралельно працюючих агрегатів, які працюють на загальну магістраль (мережу). Оскільки агрегати можуть мати різні характеристики, ККД та номінальні потужності, виникає задача розподілу загального навантаження станції між окремими одиницями обладнання так, щоб сумарні витрати електроенергії були мінімальними.

Якщо енергетичні характеристики агрегатів (залежність споживаної потужності $P_{\text{спож}}$ від корисного навантаження P) у робочому діапазоні можна апроксимувати лінійними функціями, то така задача описується методами **лінійного програмування**.

2.1. Математична формалізація задачі

Нехай на станції паралельно працює n агрегатів. Керованими змінними задачі є навантаження кожного i -го агрегату: x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

2.2.1. Цільова функція (мінімум споживаної потужності або витрат енергії):

$$F(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i + d_i \rightarrow \min,$$

де c_i – питомі витрати електроенергії на одиницю навантаження i -го агрегату (коефіцієнт пропорційності);

d_i – постійні витрати енергії i -го агрегату на холостому ході (якщо агрегат увімкнено). При незмінному складі працюючого обладнання константи d_i не впливають на точку оптимуму, тому критерій спрощується до:

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min.$$

2.1.2. Система обмежень:

Обмеження за заданою сумарною продуктивністю (баланс потужності): Сума навантажень усіх агрегатів повинна чітко забезпечувати поточну потребу системи (задане загальне навантаження $P_{\text{заг}}$):

$$\sum_{i=1}^n x_i = P_{\text{заг}}.$$

Технологічні обмеження на діапазон регулювання:
Кожен i -й агрегат через конструктивні та теплові обмеження електродвигуна не може працювати з навантаженням, меншим за мінімально допустиме $P_{\min,i}$ або більшим за максимальне (номінальне) $P_{\max,i}$:

$$P_{\min,i} \leq x_i \leq P_{\max,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.2. Суть симплекс-методу

Симплекс-метод – це універсальний алгебраїчний ітераційний метод розв’язання задач лінійного програмування. Завдання зводиться до канонічної форми (усі обмеження, окрім невід’ємності змінних, записуються у вигляді рівностей шляхом введення додаткових балансових змінних).

Геометричний зміст методу полягає в цілеспрямованому переборі вершин багатогранника розв’язків (області допустимих значень) у напрямку зменшення (або збільшення) значення цільової функції. Оскільки оптимум лінійної задачі завжди лежить в одній із вершин (або на грані) опуклої області обмежень, алгоритм гарантовано знаходить глобальний мінімум за скінченну кількість кроків. На практиці обчислення реалізуються через симплекс-таблиці або вбудовані матричні пакети ПЗ.

3. Завдання на виконання

3.1. Постановка інженерної задачі

Насосна станція промислового підприємства забезпечує подачу води в загальну мережу. На станції встановлено 3 паралельні насосні агрегати з асинхронними електродвигунами.

Необхідно оптимізувати розподіл навантаження між ними для забезпечення загального заданого споживання води $Q_{\text{заг}}$ за мінімальних сумарних витрат активної потужності двигунів $P_{\text{сум}}$.

3.2. Вихідні дані за варіантами

Параметри агрегатів та індивідуальні завдання наведені у табл. 1 (конкретні числові значення беруться з Додатка А відповідно до номера студента у списку групи).

Таблиця 1 – Параметри агрегатів та індивідуальні завдання

Параметр / Агрегат	Агрегат 1 (x_1)	Агрегат 2 (x_2)	Агрегат 3 (x_3)
Питомі витрати енергії, c_i (кВт/(м ³ /год))	c_1	c_2	c_3
Мінімальна продуктивність, $Q_{min, i}$ (м ³ /год)	$Q_{min, 1}$	$Q_{min, 2}$	$Q_{min, 3}$
Максимальна продуктивність, $Q_{max, i}$ (м ³ /год)	$Q_{max, 1}$	$Q_{max, 2}$	$Q_{max, 3}$
Загальне навантаження станції:	$\text{multicolumn}\{3\}\{c\}\{Q_{заг} \text{ (м}^3\text{/год)}\}$ (об'єднання трьох колонок у рядок)		

3.3. Порядок виконання роботи

Ознайомитися з теоретичними відомостями та отримати індивідуальні вихідні дані у викладача.

Скласти математичну модель задачі: записати лінійну цільову функцію $F(x_1, x_2, x_3)$ та систему нерівностей і рівностей, що описують обмеження.

Провести аналітичний розв'язок графічним методом (якщо задача зведена до 2-х змінних після підстановки балансу) або за допомогою спрощеного ручного симплекс-алгоритму для розуміння логіки процесу.

Реалізувати модель у програмному середовищі:

Варіант А (MS Excel): Ввести матрицю коефіцієнтів, скористатися надбудовою «Пошук рішення» (*Solver*), обрати «Пошук рішення лінійних задач симплекс-методом».

Варіант Б (MATLAB): Застосувати функцію `linprog` з Optimization Toolbox.

Варіант В (Python): Використати функцію `scipy.optimize.linprog` з бібліотеки SciPy.

Зафіксувати оптимальні значення навантажень x_1^* , x_2^* , x_3^* та мінімальну споживану потужність $F_{\min}$.

Виконати аналіз чутливості розв'язку (оцінити, як зміниться критерій оптимальності при зміні загального навантаження $Q_{\text{заг}}$ на $\pm 10\%$).

4. Зміст звіту

Звіт з лабораторної роботи має містити такі розділи:

1. **Титульний аркуш** встановленого зразка.
2. **Мета роботи** та вихідні дані індивідуального варіанта.
3. **Математична модель задачі:** чітко виписана цільова функція та система обмежень з підставленими числовими коефіцієнтами.

4. **Програмна реалізація:** скріншоти вікна налаштувань «Пошуку рішення» в Excel або лістинг коду (MATLAB/Python) з коментарями.

5. **Результати розрахунків:** таблиця з отриманими оптимальними значеннями навантажень для кожного агрегату та сумарної потужності.

6. **Аналіз чутливості:** результати розрахунків для зміненого навантаження ($Q_{\text{заг}} \pm 10\%$).

7. **Висновки:** техніко-економічна оцінка отриманого результату. Порівняння оптимального розподілу з рівномірним (коли $x_1 = x_2 = x_3 = Q_{\text{заг}}/3$). Розрахунок досягнутого відсотка енергозбереження.

5. Контрольні питання

1. Які інженерні задачі в електромеханічних системах можна віднести до задач лінійного програмування?

2. Дайте визначення цільової функції, допустимого розв'язку та оптимального розв'язку задачі ЛП.

3. Чому оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування завжди міститься на границі (у вершині) області допустимих розв'язків?

4. Які фізичні обмеження електромеханічного обладнання формують систему нерівностей у задачах розподілу навантаження?

5. Опишіть геометричний та алгебраїчний зміст кроків симплекс-методу.

6. Що показують «тіньові ціни» (двоїсті оцінки) при аналізі стійкості (чутливості) плану ЛП, і як їх використати для оцінки ефективності роботи станції?

7. Як впливає обмеження невід'ємності змінних ($x_i \geq 0$) на побудову математичної моделі реальних електротехнічних пристроїв?

Тема 2. Оптимізація параметрів електромеханічних пристроїв за критерієм мінімуму маси або вартості (нелінійне програмування)

1. Мета роботи

Освоєння теоретичних основ та набуття практичних навичок застосування методів нелінійної оптимізації (градієнтних методів та методу Ньютона) для розв'язання задач проєктування електромеханічних пристроїв; навчитися враховувати нелінійні чинники (магнітне насичення, геометричні обмеження) при побудові цільових функцій маси або вартості; опанувати інструменти числової оптимізації у сучасних програмних середовищах.

2. Теоретичні відомості

Проеєктування електромеханічних пристроїв (трансформаторів, електричних машин) є багатокритеріальною інженерною задачею. Традиційні методи розрахунку базуються на

виборі емпіричних коефіцієнтів і послідовних наближеннях, що не гарантує досягнення найкращого техніко-економічного результату.

Застосування математичного програмування електромеханічних пристроїв дозволяє знайти екстремум (мінімум маси, об'єму чи вартості) при чіткому виконанні технічних вимог.

Оскільки взаємозв'язки між геометричними розмірами, магнітними та електричними індукціями, а також втратами енергії в електромеханічних системах мають складний нелінійний характер, такі задачі описуються методами **нелінійного програмування (НП)**.

2.1. Нелінійні чинники та цільова функція

Головними причинами нелінійності математичних моделей в електромеханіці є:

1. Геометричні залежності: Об'єми та, відповідно, маси активних матеріалів (міди/алюмінію обмоток та електротехнічної сталі осердя) є нелінійними функціями геометричних розмірів (наприклад, добуток площі поперечного перерізу на довжину магнітопроводу, що залежить від радіусів, ширин та висот пазів/вікон).

2. Магнітне насичення: Зв'язок між напруженістю магнітного поля H та магнітною індукцією B визначається нелінійною кривою намагнічування сталі $B = f(H)$. Втрати в сталі та магнітний опір ділянок кола нелінійно зростають при насиченні, що критично впливає на ККД і струм холостого ходу.

Математична постановка задачі НП:

Мінімізувати цільову функцію (наприклад, масу активних матеріалів M або повну вартість пристрою C):

$$F(X) \rightarrow \min$$

за умов виконання обмежень у вигляді нелінійних нерівностей:

$$g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

та граничних обмежень на керовані змінні (геометричні розміри тощо):

$$x_{min,i} \leq x_i \leq x_{max,i}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

де $X = [x_1, x_2, \dots, x_k]^T$ – вектор оптимізованих параметрів (геометричні розміри, густина струму, магнітна індукція).

2.2. Методи нелінійної оптимізації

Для пошуку локального чи глобального мінімуму нелінійних функцій використовують ітераційні числові методи.

Гradientні методи (Першого порядку)

Базуються на обчисленні градієнта цільової функції $\nabla F(X)$, який вказує напрямок найшвидшого зростання функції. Для мінімізації рух здійснюється у протилежному напрямку (анти-градієнта) з певним кроком α :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha \cdot \nabla F(X^{(k)}).$$

Для задач із обмеженнями застосовують модифікації, такі як *метод проєкції градієнта*, або *метод умовного градієнта*, де траєкторія пошуку коригується при досягненні меж допустимості області.

Метод Ньютона (другого порядку)

Використовує не лише перші похідні (градієнт), а й матрицю других частинних похідних – **матрицю Гессе (Гессіан) $H(X)$** . Це дозволяє врахувати кривину поверхні цільової функції.

Ітераційне рівняння має вигляд:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - [H(X^{(k)})]^{-1} \cdot \nabla F(X^{(k)}).$$

Метод Ньютона має квадратичну швидкість збіжності поблизу екстремуму (збігається значно швидше за градієнтні методи), проте вимагає великих обчислювальних витрат на кожному кроці для розрахунку та обернення матриці других похідних. На практиці для задач проєктування часто використовують квазіньютонівські методи (наприклад, алгоритм

BFGS) або метод послідовного квадратичного програмування (SQP).

3. Завдання на виконання

3.1. Постановка інженерної задачі (на вибір викладача/студента)

Варіант 1: Оптимізація геометричних розмірів осердя силового трансформатора. Необхідно знайти такі розміри вікна магнітопроводу (висоту H_e та ширину B_e) і діаметр стрижня d , які забезпечують мінімальну масу активних матеріалів за умови заданої номінальної потужності $S_{\text{ном}}$ та обмежень на максимальну індукцію в сталі $B_{\text{ст}}$ і густину струму в обмотках j .

Варіант 2: Оптимізація геометрії статора асинхронного двигуна.

Необхідно визначити оптимальне співвідношення між внутрішнім діаметром статора D , довжиною осердя L та розмірами пазу статора для мінімізації вартості активних частин двигуна при забезпеченні заданого електромагнітного моменту $M_{\text{см}}$ та обмеженні на коефіцієнт корисної дії (ККД).

3.2. Вихідні дані за варіантами

Конкретні числові значення параметрів (номінальна потужність/момент, марка сталі, обмеження щодо нагріву, вартісні коефіцієнти міді та сталі) наведені в Додатку А.

3.3. Порядок виконання роботи

1. Отримати індивідуальне завдання та вихідні дані.
2. Побудувати математичну модель пристрою:

Виразити площі перерізу магнітопроводу та обмоток через шукані геометричні розміри.

Записати цільову функцію маси:

$$M(X) = M_{\text{сталі}}(X) + M_{\text{міді}}(X),$$

або вартості

$$C(X) = c_{\text{ст}} M_{\text{сталі}}(X) + c_{\text{мд}} M_{\text{міді}}(X).$$

Сформувати нелінійні обмеження (забезпечення магнітного потоку без надмірного насичення сталі за кривою намагнічування, обмеження на допустимі втрати та геометричні співвідношення).

3. Реалізувати розв’язання задачі в програмному середовищі за допомогою вбудованих числових методів:

у **MS Excel**: Використати надбудову «Пошук рішення» (*Solver*), обравши метод розв’язання нелінійних задач *GRG2* (узагальнений градієнтний метод).

у **MATLAB**: Використати функцію *fmincon* з Optimization Toolbox (алгоритми *sqr* або *interior-point*).

у **Python**: Використати *scipy.optimize.minimize* з методом *SLSQP* або *Trust-Region*.

4. Порівняти швидкість збіжності та точність результатів при використанні різних методів (наприклад, порівняти стандартний градієнтний алгоритм та квазіньютонівський метод, якщо це дозволяє обране ПЗ).

5. Визначити оптимальний вектор геометрії X^* та мінімальне значення цільової функції.

4. Зміст звіту

Звіт має містити такі обов’язкові розділи:

1. **Титульний аркуш** та мета роботи.
2. **Вихідні дані** індивідуального варіанта (параметри проєктованого пристрою).

3. **Математична модель НП**: аналітичний опис цільової функції та обмежень-нерівностей з урахуванням нелінійної апроксимації кривої намагнічування сталі.

4. **Опис ходу розрахунків**: скріншоти налаштувань алгоритмів оптимізації, графіки процесу збіжності (зменшення

значення цільової функції залежно від номера ітерації), якщо це передбачено середовищем моделювання.

5. Результати роботи: оптимальні геометричні розміри пристрою, значення індукції та густини струму в точці оптимуму.

6. Висновки: аналіз отриманої геометрії (наприклад, як вплинуло співвідношення цін на сталь і мідь на кінцеву форму пристрою); оцінка ефективності оптимізації порівняно з базовим (типовим) варіантом геометрії.

5. Контрольні питання

1. Чим зумовлена нелінійність задач оптимізації параметрів електричних машин та трансформаторів?

2. Яким чином у математичній моделі враховується явище магнітного насичення сталі?

3. У чому полягає принципова відмінність між градієнтними методами та методами другого порядку (методом Ньютона)?

4. Що таке матриця Гессе (Гессіан) і яку роль вона відіграє в оцінці швидкості збіжності методу Ньютона?

5. Які наслідки для алгоритму оптимізації має наявність кількох локальних мінімумів у нелінійній цільовій функції? Як перевірити, чи знайдено глобальний оптимум?

6. Як впливають обмеження на нагрів обмоток (допустима густина струму) на область допустимих розв'язків при оптимізації геометрії статора?

7. Поясніть фізичний зміст ситуації, коли в точці оптимуму одне з нелінійних обмежень (наприклад, за індукцією) перетворилося на жорстку рівність.

Розділ 2

ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ТА КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ

Тема 3. Оптимальне за швидкодією та енерговитратами керування електроприводом (Динамічне програмування)

Мета роботи: вивчення принципів багатокрокового прийняття рішень (принципу оптимальності Беллмана) та методів варіаційного числення для синтезу оптимальних законів керування; набуття практичних навичок побудови оптимальних за швидкодією та енерговитратами тахограм руху електромеханічних систем із урахуванням технологічних та фізичних обмежень.

1. Теоретичні відомості

1.1. Принцип оптимальності Беллмана в задачах керування електроприводами

Динамічне програмування – це математичний метод, призначений для оптимізації багатокрокових процесів прийняття рішень. В основі методу лежить принцип оптимальності Беллмана.

Довідково про принцип оптимальності Беллмана:

Річард Беллман (англ. *Richard Bellman*) – видатний американський математик, який у 1950-х роках винайшов **метод динамічного програмування** та сформулював один із фундаментальних принципів сучасної теорії керування – **принцип оптимальності Беллмана**.

Суть принципу оптимальності можна сформулювати так:

Якими б не були початковий стан системи та початкове рішення (керування), подальші рішення повинні бути оптимальними щодо стану, який виникне в результаті першого рішення.

Приклад

Нехай треба спланувати найкоротший автомобільний маршрут з Києва до Львова через Житомир та Рівне.

Принцип Беллмана говорить: якщо загальний маршрут Київ $\rightarrow$ Житомир $\rightarrow$ Рівне $\rightarrow$ Львів є найкоротшим (оптимальним), то його частина Рівне $\rightarrow$ Львів **обов'язково** є найкоротшим шляхом між Рівним та Львовом. Не може бути так, що для всього маршруту цей шлях найкращий, а окремо – ні.

Як працює метод (рівняння Беллмана)

Замість того, щоб намагатися розв'язати одну велику і складну задачу для всього проміжку часу (наприклад, розрахувати траєкторію ракети чи електропривода на 10 хвилин вперед), метод Беллмана розбиває її на багато маленьких кроків (етапів) і розв'язує задачу **з кінця**.

Математично це виражається через **рівняння Беллмана** (або функціональне рівняння динамічного програмування):

$$W_k(X_k) = \min_{u_k} \{ L_k(X_k, u_k) + W_{k+1}(X_{k+1}) \},$$

де X_k – стан системи на поточному кроці k ;

u_k – керування (рішення), яке ми приймаємо зараз;

$L_k(X_k, u_k)$ – «миттєві втрати» або витрати на поточному кроці (наприклад, спалене паливо чи витрачена енергія за 1 секунду);

$W_{k+1}(X_{k+1})$ – мінімально можливі витрати на **всі наступні кроки** (від кроку $k + 1$ до самого кінця), якщо ми опинимося в стані X_{k+1} ;

$W_k(X_k)$ – сумарна оптимальна «вартість» усього залишку шляху.

Розрахунок іде з кінця до початку, оскільки чисельний алгоритм Беллмана працює у зворотному часі. На останньому кроці (фініші) чітко відомо, чого хочемо досягти (наприклад, зупинити двигун чи посадити літак, тобто майбутні витрати $W_N = 0$).

1. Знаючи фініш, робиться один крок назад і обчислюється, як найкраще зробити цей останній крок.

2. Робиться ще крок назад. Тепер відомо оптимальний шлях для двох останніх кроків.

3. Обчислення повторюються, поки не дійдемо до самого початку (старту).

Коли досягається початок, маємо готову «мапу оптимальних рішень» для будь-якої ситуації на кожному етапі.

Принцип оптимальності Беллмана широко застосовується в:

теорії автоматичного керування – для оптимального керування роботами, квадрокоптерами та електроприводами;

економіці та фінансах – для планування інвестицій, керування запасами на складах, розрахунку фінансових ризиків;

GPS-навігації та мережах – для пошуку найкоротшого шляху в графах (алгоритм Дейкстри та алгоритм Беллмана-Форда);

штучному інтелекті (мережі Q-learning) – для сучасних технологій навчання з підкріпленням (наприклад, Reinforcement Learning), на яких базуються нейромережі, що грають у шахи або керують безпілотними авто.

У задачах керування електроприводом безперервний процес руху (розгону, гальмування, позиціонування) розбивається на N кроків (інтервалів часу Δt). Стан системи на кожному

кроці k описується вектором стану $X_k = [\omega_k, \psi_k]^T$ (де ω – кутова швидкість, ψ – кут повороту або шлях), а керуючим впливом є U_k (напруга, струм або момент двигуна).

Мінімізується загальний критерій ефективності (функціонал якості):

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(X_k, U_k) \rightarrow \min.$$

Рівняння Беллмана для зворотного обходу (від кінця до початку) має вигляд:

$$W_k(X_k) = \min_{U_k} \{f_0(X_k, U_k) + W_{k+1}(X_{k+1})\},$$

де $W_k(X_k)$ – функція Беллмана (мінімальні «втрати» від кроку k до кінця процесу).

1.2. Формування оптимальних тахограм за критерієм швидкодії

Задача оптимізації за швидкодією полягає в мінімізації часу переходу системи з початкового стану $\omega(0) = 0$ у кінцевий $\omega(t_k) = \omega_{\text{ном}}$ за мінімальний час:

$$J = \int_0^{t_k} dt \rightarrow \min.$$

Відповідно до принципу максимуму Понтрягіна та динамічного програмування, якщо обмеження накладено на струм (момент) двигуна ($|I| \leq I_{\text{доп}}$), то оптимальним є релейне керування («bang-bang control»). Двигун повинен працювати з максимально можливим моментом.

Довідково про «bang-bang control»:

Bang-bang control (або релейне керування) – це один із найпростіших і найпоширеніших типів автоматичного

керування. Його суть полягає в тому, що керуючий елемент (наприклад, перемикач) має лише два крайні положення: повністю увімкнено або повністю вимкнено (максимум або мінімум).

Система постійно перемикається між цими двома режимами залежно від того, чи досягнуто бажаного значення.

Приклад bang-bang контролю – це звичайний домашній термостат для обігрівача:

1. Користувач виставляє бажану температуру на $+22^{\circ}\text{C}$ (це – мета керування, setpoint).
2. Якщо температура падає до $+21^{\circ}\text{C}$, термостат видає сигнал «Холодно!» і вмикає обігрівач на повну потужність («Bang» номер один).
3. Обігрівач працює, кімната нагрівається. Як тільки температура досягає, наприклад, $+23^{\circ}\text{C}$, термостат видає сигнал «Жарко!» і повністю вимикає обігрівач («Bang» номер два).
4. Температура починає падати і цикл повторюється.

При такому керуванні виникає проблема «гістерезису» (Hysteresis):

- якби термостат реагував миттєво і вмикався рівно на 22°C , то через природні коливання повітря він вмикався б і вимикався щосекунди. Це б швидко вивело з ладу реле або компресор;

- щоб цього не сталося, у bang-bang контроль додають гістерезис («зону нечутливості») – певний діапазон навколо цільової точки; наприклад, обігрівач увімкнеться лише при 21°C , а вимкнеться при 23°C . Різниця у 2 градуси і є зоною нечутливості (гістерезисом), який захищає обладнання від надто частого перемикавання.

Переваги та недоліки bang-bang контролю

Переваги	Недоліки
<i>Простота: просте проєктування та реалізація (потрібен лише датчик і двопозиційне реле).</i>	<i>Невідповідність точній цілі: система ніколи не перебуває точно на цільовій позначці, вона завжди «коливається» навколо неї.</i>
<i>Дешевизна: компоненти коштують значно менше, ніж для складних PID-контролерів.</i>	<i>Знос обладнання: постійні різкі увімкнення/вимкнення створюють механічне та електричне навантаження.</i>
<i>Швидкість: система миттєво реагує на відхилення, вмикаючи максимальну потужність.</i>	<i>Енергоефективність: іноді підтримувати стабільну середню потужність вигідніше, ніж постійно запускати систему на максимум.</i>

Окрім побутових обігрівачів та кондиціонерів, bang-bang контроль використовується в:

холодильниках (компресор або працює на повну, або вимкнений);

насосах для води (насос вмикається, коли бак порожній, і вимикається, коли він повний);

космічних апаратах (для економії палива мікродвигуни орієнтації таких апаратів часто працюють короткими, максимальними імпульсами увімкнено/вимкнено).

Проте для реальних систем (наприклад, ліфти, шахтні підйомники, тяговий привод та ін.) таке керування є неприпустимим через виникнення значних ривків ($\rho = da/dt = d^2\omega/dt^2$), що призводить до ударних навантажень у механічних передачах.

Тому вводяться обмеження на першу та другу похідну швидкості, а оптимальна тахограма стає трапецієподібною або S-подібною (із закругленнями).

1.3. Оптимізація за енерговитратами та врахування обмежень на нагрів

При оптимізації за енерговитратами критерій мінімізує втрати енергії в обмотках двигуна (втрати на нагрів), які пропорційні квадрату струму (моменту) за час циклу $t_{\text{ц}}$:

$$J = \int_0^{t_{\text{ц}}} I^2(t) dt \rightarrow \min.$$

Якщо обмеження на швидкість та прискорення відсутні, варіаційне числення дає лінійний закон зміни швидкості (стале прискорення).

Проте реальний синтез ускладнюється двома типами обмежень:

1. **Обмеження на струм (комутаційні):** $I(t) \leq I_{\text{макс}}$.
2. **Обмеження на нагрів (термічні):** еквівалентний струм за цикл не повинен перевищувати номінальний:

$$I_{\text{екв}} = \sqrt{\frac{1}{t_{\text{ц}}} \int_0^{t_{\text{ц}}} I^2(t) dt} \leq I_{\text{ном}}.$$

Динамічне програмування дозволяє врахувати ці обмеження безпосередньо при побудові кроків, відсікаючи траєкторії, де струм або температура перевищують задані межі.

2. Завдання на виконання

Необхідно розрахувати та побудувати оптимальну за швидкістю або енерговитратами траєкторію розгону механізму (згідно з варіантом: **Варіант А** – тяговий електропривод електротранспорту; **Варіант Б** – шахтна підйомна установка).

Вихідні дані за варіантами (приклад структури див. у табл. 2).

Порядок виконання роботи:

Дискретизація простору станів: Розрахувати крок за часом Δt та розбити діапазон швидкостей від 0 до ω_k на N інтервалів.

Побудова графа станів: Для кожного кроку визначити можливі переходи, що задовольняють обмеженню за струмом $I \leq I_{\text{макс}}$.

Таблиця 2 – Вихідні дані за варіантами

Параметр	Одиниці виміру	Варіант А	Варіант Б	Варіант В
Тип механізму	–	Тяговий	Підйомник	Тяговий
Маса (приведена), m ($J_{\text{пр}}$)	кг (кг·м ²)	12000	4500	15000
Кінцева швидкість, $v_{\text{к}}$ ($\omega_{\text{к}}$)	м/с (рад/с)	16.6	8.0	22.2
Максимальний струм, $I_{\text{макс}}$	А	250	180	300
Допустимий ривок, $\rho_{\text{доп}}$	м/с ³	0.5	1.2	0.6

Розрахунок локальних втрат: Для кожного переходу обчислити витрати енергії (або часу).

Рекурентний процедурний аналіз (алгоритм Беллмана): Рухаючись від кінцевого стану до початкового, визначити умовні оптимальні керування.

Побудова прямого ходу: Знайти оптимальну траєкторію $[X_0, X_1, \dots, X_N]$ та відповідну їй тахограму $\omega(t)$.

Аналіз нагріву: Обчислити $I_{\text{екв}}$ для отриманої тахограми та перевірити умову перевірки нагріву двигуна.

3. Зміст звіту

Звіт з лабораторної (комп'ютерної) роботи має бути виконаний на аркушах формату А4 (або в електронному вигляді) і містити такі розділи:

1. **Титульний аркуш** із зазначенням дисципліни, теми роботи, авторів та варіанта.

2. **Мета роботи** та вихідні дані заданого варіанта.

3. **Розрахунково-теоретична частина:** Опис математичної моделі електромеханічної системи, рівняння Беллмана для обраного критерію оптимізації.

4. **Блок-схема алгоритму** розрахунку або текст програми (Python / MATLAB / Mathcad).

5. **Графічна частина:** * Оптимальна тахограма руху $\omega(t)$ або $v(t)$;

- Графік зміни моменту (струму) двигуна $M(t)$ або $I(t)$;
- Графік прискорення $a(t)$.

6. **Розрахунок інтегральних показників:** Енерговитрати за цикл, час розгону, перевірочний розрахунок на нагрів ($I_{\text{екв}}$).

7. **Висновки:** Аналіз отриманих результатів, оцінка впливу обмежень (наприклад, як обмеження ривка збільшило час розгону).

4. Контрольні питання

1. У чому полягає сутність принципу оптимальності Р. Беллмана? Чому алгоритм розрахунку починається з кінцевого стану системи?

2. Які переваги має метод динамічного програмування порівняно з класичним варіаційним численням при оптимізації електроприводів?

3. Який вигляд має оптимальна за швидкодією тахограма при жорсткому обмеженні на струм двигуна і відсутності обмежень на ривок?

4. Чому в тягових електроприводах та підйомних механізмах обмеження ривка (da/dt) є критично важливим? Як воно впливає на форму тахограми?

5. Яким чином у методі динамічного програмування враховуються нелінійності електромеханічної системи (наприклад, насичення магнітного кола або залежність коефіцієнта тертя від швидкості)?

6. Як зміняться оптимальні діаграми струму та швидкості, якщо пріоритет критерію оптимізації змістити з мінімуму часу (швидкодія) на мінімум втрат (енергоефективність)?

7. Поясніть фізичний зміст перевірки двигуна за еквівалентним струмом ($I_{\text{екв}}$). Чому не можна оцінювати нагрів лише за максимальним струмом?

Приклад розв'язку задачі за Темою 3 «Оптимальне за швидкодією та енерговитратами керування електроприводом (Динамічне програмування)».

Вступ. Для розв'язання задачі оптимального за швидкодією та енерговитратами керування електроприводом метод **динамічного програмування Беллмана (DP)** є одним із найефективніших числових підходів. На відміну від принципу максимуму Понтрягіна, який дає аналітичну структуру (наприклад, bang-bang керування), числове динамічне програмування дозволяє врахувати будь-які нелінійності, обмеження на фазові координати та керування.

1. Математична модель електропривода

Зазвичай електропривод постійного струму або спрощена модель асинхронного привода в зорі описується системою диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(M - M_c) \\ \frac{dM}{dt} = \frac{1}{T_e}(k_m u - M) \end{cases},$$

де ω – кутова швидкість (фазова координата x_1);

M – момент двигуна (фазова координата x_2);

u – напруга керування (керуючий вплив);

J, T_e, k_m, M_c – момент інерції, електромагнітна стала часу, коефіцієнт моменту та момент опору відповідно.

У векторній формі для дискретного часу (крок Δt):

$$X_{k+1} = f(X_k, u_k).$$

2. Формулювання критерію оптимальності (функціоналу)

Задача є **двокритеріальною** (швидкодія + енерговитрати), тому застосовують метод лінійного згортання критеріїв:

$$I = \int_0^{t_f} (\alpha + \beta u^2) dt \rightarrow \min.$$

У дискретній формі для N кроків:

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha + \beta u_k^2) \Delta t \rightarrow \min,$$

якщо $\alpha = 1, \beta = 0$ – задача чистої швидкодії (мінімум часу);

якщо $\alpha = 0, \beta = 1$ – задача мінімуму втрат енергії;

при $\alpha > 0, \beta > 0$ – компромісне керування.

Обмеження: $|u_k| \leq U_{\max}$ (обмеження на напругу інвертора/джерела).

$|\omega_k| \leq \omega_{\max}, |M_k| \leq M_{\max}$ (конструктивні обмеження).

3. Чисельна реалізація методом динамічного програмування

Чисельний розв'язок методом Беллмана розбивається на дискретну сітку за станом і часом та виконується у **зворотному часі** (від кінця до початку).

Крок 1: Дискретизація простору станів

Створюється просторова сітка для фазових координат:

Швидкість: $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ з кроком $\Delta\omega$ (всього N_ω точок).

Момент: $M \in [M_{min}, M_{max}]$ з кроком ΔM (всього N_M точок).

Час: розбивається на інтервали Δt від $k = 0$ до $k = N$.

Крок 2: Задання кінцевих умов (термінальна функція)

На останньому кроці $k = N$ необхідно, щоб привод прийшов у задану точку (наприклад, $\omega_{target}, M_{target}$). Задаємо матрицю кінцевих втрат $W_N(\omega, M)$:

$$W_N(\omega, M) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega = \omega_{target}, M = M_{target} \\ \infty, & \text{в іншому випадку} \end{cases}.$$

Крок 3: Зворотний хід (рекурентне рівняння Беллмана)

Рухаючись від $k = N - 1$ назад до $k = 0$, для кожної точки сітки стану (ω_i, M_j) шукаємо таке керування u , яке мінімізує поточні витрати плюс майбутні оптимальні витрати:

$$W_k(\omega_i, M_j) = \min_{u \in U} \left\{ (\alpha + \beta u^2) \Delta t + \tilde{W}_{k+1}(\omega_{next}(u), M_{next}(u)) \right\}.$$

Важливо (інтерполяція): Точка стану $(\omega_{next}(u), M_{next}(u))$, розрахована за рівнянням руху привода для конкретного u , майже ніколи не потрапляє точно у вузол нашої сітки на кроці $k + 1$.

Тому значення $\tilde{W}_{k+1}$ обчислюється за допомогою **двовимірної лінійної інтерполяції** між сусідніми вузлами сітки.

Під час цього процесу для кожного вузла сітки на кожному кроці k зберігається оптимальне значення керування: $u^{opt}_k(\omega_i, M_j)$.

Довідково про двовимірну лінійну інтерполяцію:

Двовимірна лінійна інтерполяція (або просто білінійна інтерполяція) – це математичний метод, який дозволяє знайти приблизне значення якоїсь величини (наприклад, температури, висоти або, як у нашому випадку, майбутніх

енерговитрат W_{k+1}) у точці, яка лежить між чотирма відомими точками на площині.

Якщо звичайна (одновимірна) лінійна інтерполяція шукає точку на прямій лінії між двома сусідніми значеннями, то двовимірна працює на площині (у квадраті або прямокутнику).

Приклад. Маємо дані з чотирьох метеостанцій, які утворюють квадрат на карті. Необхідно дізнатися температуру в точці, яка розташована всередині цього квадрата, але трохи ближче до північного сходу. Білінійна інтерполяція якраз і дозволяє «зважити» відстані до всіх чотирьох станцій і вирахувати максимально точну температуру для цього села.

Математично метод працює «крок за кроком» і називається білінійним, оскільки він виконує звичайну лінійну інтерполяцію **тричі: двічі по одній осі й один раз по іншій.**

Нехай наша шукана точка P має координати (x, y) і лежить всередині прямокутника, утвореного відомими точками Q_{11} , Q_{21} , Q_{12} , Q_{22} .

1. **Крок 1 (інтерполяція по горизонталі, вісь X):** Спочатку ми шукаємо проміжні значення на верхній та нижній лініях прямокутника строго над і під нашою точкою P . Знаходимо уявну точку R_1 (між двома нижніми кутами) та точку R_2 (між двома верхніми кутами).

2. **Крок 2 (інтерполяція по вертикалі, вісь Y):** Тепер у нас є дві нові точки R_1 та R_2 , які утворюють вертикальну лінію, що проходить прямо через нашу шукану точку P . Ми робимо третю (останню) лінійну інтерполяцію вже між R_1 та R_2 і отримуємо остаточне значення в точці $P(x, y)$.

Двовимірна лінійна інтерполяція широко використовується: **при обробці зображень та у комп'ютерній графі**: коли необхідно масштабувати (збільшувати) картинку або текстуру в грі; при цьому пікселі розтягуються і щоб зображення не ставало «кубиками», відеокарта використовує білінійну інтерполяцію для згладжування кольорів між сусідніми пікселями;

у геоінформаційних системах (ГІС): для побудови 3D-моделей рельєфу або карт висот;

у чисельних методах (динамічне програмування): коли система прораховує траєкторію електропривода і опиняється між вузлами розрахункової сітки, цей метод допомагає знайти точне значення функції накопичених втрат.

4. Прямий хід (формування траєкторії)

Після того, як матриці оптимальних керувань для всіх кроків обчислені, виконується моделювання системи вперед у часі від відомого початкового стану $X_0 = (\omega_0, M_0)$:

1. Для поточного стану X_k зчитується значення $u_k = u^{opt}_k(X_k)$ (з використанням інтерполяції, якщо стан між вузлами).
2. Розраховується наступний стан системи: $X_{k+1} = f(X_k, u_k)$.
3. Процес повторюється від $k = 0$ до $k = N - 1$.

Характер отриманого розв'язку

При вагових коефіцієнтах швидкодії ($\alpha \gg \beta$): числовий розв'язок покаже класичну картину, близьку до *bang-bang control*. Алгоритм видасть максимальну напругу $+U_{\max}$ для розгону, а потім у чітко розрахований момент перемкнеться на максимальне гальмування $-U_{\max}$, щоб загасити швидкість і момент точно в цільовій точці.

При компромісному керуванні ($\beta > 0$): керування втратить релейний характер; замість стрибків від $+U_{\max}$ до $-U_{\max}$ графік напруги матиме плавніші переходи (експоненційні або лінійні ділянки), що дозволить значно знизити теплові втрати в обмотках двигуна (I^2R) за рахунок незначного збільшення часу перехідного процесу.

Розділ 3

ТЕОРІЯ ГРАФІВ ТА МЕРЕЖЕВІ МОДЕЛІ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

Тема 4. Трасування та оптимізація кабельних і розподільчих мереж цеху / підстанції

1. Мета роботи та вивчення теми

Теоретична: Засвоєння математичного апарату теорії графів як інструменту для моделювання топології складних систем електропостачання (СЕС).

Практична: Оволодіння алгоритмами пошуку найкоротших шляхів (Дейкстри, Флойда-Воршелла) та побудови мінімальних кістякових дерев (Пріма, Краскала) для мінімізації капітальних витрат і втрат потужності при проектуванні розподільчих мереж.

2. Теоретичні відомості

2.1. Представлення топології систем електропостачання у вигляді графів

Будь-яка електрична мережа (цеху, району, підстанції) може бути описана математичною моделлю у вигляді **графа** $G = (V, E)$, де:

V – множина **вершин (вузлів)**, що відповідають джерелам живлення (ГПП, ТП), розподільчим пунктам (РП), шинам цехових підстанцій або окремим електроприймачам;

E – множина **ребер (дуг)**, що моделюють лінії електропередачі (кабельні або повітряні лінії, шинопроводи).

Для розв'язання задач оптимізації використовуються **зважені графи**, де кожному ребру $(u, v) \in E$ ставиться у відповідність певна вага $w(u, v)$. Залежно від критерію оптимізації, вага може означати:

1. Геометричну довжину траси (L , м або км).
2. Активний/повний опір ділянки мережі (R або Z , Ом).
3. Кошторисну вартість спорудження лінії (K , грн).

Матрична форма представлення графа в ЕОМ здійснюється через **матрицю суміжності** A або **матрицю ваг (відстаней)** D :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

де $d_{ij} = w(i, j)$, якщо вузли i та j з'єднані, $d_{ij} = 0$ при $i = j$;
 $d_{ij} = \infty$, якщо прямого зв'язку немає.

2.2. Мінімізація довжини ліній та втрат напруги

При проєктуванні внутрішньозаводських мереж постають дві базові оптимізаційні задачі:

1. Мінімізація капітальних витрат (довжини мережі): зниження сумарної довжини кабельних трас для радіальних мереж без вимог щодо резервування. Математично це зводиться до пошуку **мінімального кістякового дерева (МКД)** – зв'язного підграфа, який об'єднує всі вузли без утворення циклів і має мінімальну суму ваг ребер:

$$\sum_{(u,v) \in T} w(u, v) \rightarrow \min.$$

2. Мінімізація втрат напруги та забезпечення надійності: Визначення найкоротших / найменш опірних шляхів від джерела живлення до віддалених споживачів. Втрата напруги ΔU в лінії пропорційна її опору (і, відповідно, довжині):

$$\Delta U = \frac{P \cdot R + Q \cdot X}{U_n}.$$

Мінімізація траси за допомогою алгоритмів пошуку найкоротшого шляху дозволяє утримати відхилення напруги в межах допустимих $\pm 5\%$.

3. Математичний апарат: алгоритми оптимізації

А. Алгоритми побудови мінімального кістякового дерева (МКД)

АЛГОРИТМ ПРИМА: *Принцип* – росте з однієї вершини. На кожному кроці вибирається ребро найменшої ваги, що з'єднує вже побудоване дерево з новою вершиною, яка ще не входить до дерева.

Ефективність: Краще працює на щільних графах (де багато зв'язків між вузлами).

Алгоритм Пріма (Prim's algorithm) – це алгоритм у теорії графів, який знаходить **мінімальне кістякове дерево (МКД)** для зв'язного зваженого неорієнтованого графа.

Це означає, що алгоритм знаходить такий підграф (дерево), який об'єднує всі вершини початкового графа, не утворює циклів і має мінімально можливу суму ваг ребер.

У контексті електротехніки цей алгоритм ідеально підходить для проєктування магістральних кабельних мереж цеху (судна), де потрібно з'єднати всі розподільчі пункти з мінімальними витратами на кабель.

1. Основна ідея та принцип роботи

Алгоритм працює за принципом **«росту з однієї вершини»**. Ми починаємо з будь-якого одного вузла і крок за кроком додаємо до нашого дерева по одному ребру.

На кожному кроці ми шукаємо найкоротше (найлегше) ребро, яке з'єднує вже побудовану частину дерева з будь-якою ще не охопленою раніше вершиною.

Покроковий запуск (Лобовий алгоритм):

1. Ініціалізація: Вибираємо довільну стартову вершину v і включаємо її до множини вершин майбутнього дерева V_{new} . Усі інші вершини залишаються у множині V_{old} .

2. Крок жадібності: Розглядаємо всі ребра, які з'єднують вершини з V_{new} із вершинами з V_{old} . Вибираємо серед них ребро (u, w) з **мінімальною вагою**.

3. Розширення: Додаємо вибране ребро до дерева, а вершину w переносимо з V_{old} до V_{new} .

4. Умова зупинки: Повторюємо кроки 2 та 3, доки множина V_{new} не міститиме всі вершини графа (тобто поки не з'єднаємо всі вузли).

2. Покроковий приклад розрахунку

Нехай маємо граф електричної мережі з 4 вузлів (1 – це трансформаторна підстанція, 2, 3, 4 – розподільчі щити) із наступними відстанями (вагами ребер):

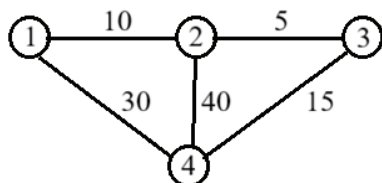
$$(1-2) = 10 \text{ м}$$

$$(1-3) = 30 \text{ м}$$

$$(2-3) = 5 \text{ м}$$

$$(2-4) = 40 \text{ м}$$

$$(3-4) = 15 \text{ м}$$



Виконання алгоритму:

Крок 1: Нехай стартова вершина – вузол 1.

$$V_{new} = \{1\}.$$

Доступні ребра з вузла 1: $(1-2)$ з вагою 10 та $(1-4)$ з вагою 30.

Вибір: Найменша вага у ребра $(1-2) = 10$. Додаємо його.

Тепер $V_{new} = \{1, 2\}$.

Крок 2: Шукаємо ребра, що йдуть від вузлів $\{1, 2\}$ до інших вузлів $\{3, 4\}$.

Доступні ребра: $(1-4) = 30$, $(2-3) = 5$, $(2-4) = 40$.

Вибір: Найменша вага у ребра (2–3) = 5. Додаємо його.

Тепер $V_{new} = \{1, 2, 3\}$.

Крок 3: Шукаємо ребра від $\{1, 2, 3\}$ до останнього вузла $\{4\}$.

Доступні ребра: (2–4) = 40, (3–4) = 15.

(Ребро 1-4 вже не розглядаємо, бо обидва його кінці в середині нашого дерева – це створило б контур).

Вибір: Найменша вага у ребра (3–4) = 15. Додаємо його.

Тепер $V_{new} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Результат: Побудовано мінімальне кістякове дерево з ребер (1–2), (2–3) та (3–4).

Сумарна довжина кабелю: $10 + 5 + 15 = 30$ м.

3. Складність алгоритму та реалізація

Ефективність алгоритму залежить від структур даних, які використовуються для пошуку мінімального ребра:

Проста реалізація (через матрицю суміжності*): На кожному кроці перебираються всі варіанти. Часова складність становить $O(V^2)$. Вона є оптимальною для **щільних графів** (де кожна підстанція має зв'язок майже з усіма іншими).

Реалізація за допомогою двійкової купи (Binary Heap) та списку суміжності: дозволяє швидше знаходити мінімум. Складність алгоритму становить $O(E \log V)$, де E – кількість ребер, V – кількість вершин.

Це найкращий вибір для **розріджених графів** (протяжних лінійних мереж).

*** Довідково про матрицю суміжності**

Це один з найпростіших способів представлення графа (мережі) у вигляді квадратної таблиці (матриці) в математиці та програмуванні.

Вона показує, які саме вершини графа з'єднані між собою ребрами (лініями).

Тобто, це «карта зв'язків» графа, де рядки і стовпці – це його вузли, а числа на їхньому перетині вказують на наявність або відсутність зв'язку.

Нехай ми маємо граф із n вершин. Тоді матриця суміжності A буде мати розмір $n \times n$ (однакова кількість рядків та стовпців).

Елемент матриці, який стоїть на перетині i -го рядка та j -го стовпця (позначимо його як a_{ij}), визначається так:

$a_{ij} = 1$, якщо між вершиною i та вершиною j є **ребро**;

$a_{ij} = 0$, якщо між ними **немає зв'язку**.

Приклад для неорієнтованого графа:

Нехай маємо мережу з 3-х комп'ютерів (вузли 1, 2, 3). Комп'ютер 1 з'єднаний з 2 та 3. Комп'ютери 2 та 3 між собою не з'єднані.

Матриця суміжності для цієї мережі матиме такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 1$ та $a_{21} = 1$ – бо є кабель між 1 та 2;

$a_{23} = 0$ – бо між 2 та 3 кабелю немає.

На головній діагоналі (a_{11} , a_{22} , a_{33}) стоять нулі, оскільки комп'ютер не з'єднаний сам із собою (немає петель).

Особливості для різних типів графів

Неорієнтовані графи (двосторонній зв'язок) – якщо лінія працює в обох напрямках (як звичайний кабель або дорога з двостороннім рухом), матриця завжди буде **симетричною** відносно головної діагоналі ($a_{ij} = a_{ji}$).

Орієнтовані графи (односторонній зв'язок) – якщо зв'язок спрямований (наприклад, вентиль, що пропускає струм лише в один бік), то матриця може бути несиметричною; якщо стрілка йде від 1 до 2, то $a_{12} = 1$, але $a_{21} = 0$.

Зважені графи (мережі з електричними опорами) – у реальних електромережах чи картах замість одиниць (1) записують конкретну **вагу ребра** (довжину кабелю в метрах,

опір в $O_{\max}$ тощо). Замість нулів (0), де зв'язку немає, часто ставлять нескінченність (∞), щоб алгоритмам пошуку було зрозуміло, що цим шляхом пройти не можна. Така матриця також називається **матрицею ваг або відстаней**.

Переваги та недоліки використання матриці суміжності

Переваги:

Миттєва перевірка зв'язку – щоб дізнатися, чи з'єднані вузол i та вузол j , комп'ютеру достатньо зробити лише один запит до пам'яті – перевірити значення a_{ij} (це відбувається за константний час $O(1)$).

Простота реалізації: Легко запрограмувати за допомогою звичайного двовимірного масиву.

Недоліки:

Неефективне використання пам'яті – матриця завжди вимагає n^2 комірок пам'яті. Якщо на судні встановлено 1000 датчиків, але кожен з'єднаний лише з одним сусіднім (всього 1000 дротів), матриця все одно займе $1000 \times 1000 = 1000000$ комірок. Більшість із них будуть заповнені марними нулями. Такі графи називають **розрідженими**.

При моделюванні систем електропостачання (СЕР) матриця суміжності (або її модифікації) є фундаментом для: розрахунку струмів короткого замикання.

аналізу потокорозподілу потужності в замкнених мережах. програмування логіки релейного захисту та автоматики (РЗА), щоб алгоритм розумів, який вимикач знеструмить пошкоджену ділянку.

4. Порівняння: алгоритм Пріма проти алгоритму Краскала

Хоча обидва алгоритми вирішують одну і ту саму задачу (пошук МКД) і дають однакову фінальну сумарну вагу, стратегії у них різні:

Критерій порівняння	Алгоритм Пріма	Алгоритм Краскала
Принцип побудови	Дерево росте безперервно з однієї початкової точки.	Ребра вибираються хаотично по всьому графу за принципом від найменшого до найбільшого.
Проміжна стадія	Завжди є одним зв'язним деревом (фрагментом структури).	Може створювати окремі «острівці» (ліс дерев), які з'єднуються лише наприкінці.
Коли ефективніший	На щільних графах ($E \approx V^2$) з великою кількістю зв'язків.	На розріджених графах ($E \approx V$), де зв'язків відносно мало.

5. Значення для електротехнічних систем

В інженерних розрахунках алгоритм Пріма є базовим для мінімізації матеріаломісткості.

Якщо потрібно спроектувати освітлювальну мережу цеху або підключити датчики системи АСУ ТП, де не вимагається кільцеве резервування, використання алгоритму Пріма гарантує, що ви витратите найменшу можливу кількість метрів дорогого мідного чи алюмінієвого кабелю.

АЛГОРИТМ КРАСКАЛА: *Принцип:* Спочатку всі ребра графа сортуються за зростанням ваги. Потім ребра по черзі додаються до каркаса за умови, що вони не утворюють цикл (замкнений контур) з уже вибраними ребрами.

Ефективність: Ідеальний для розріджених графів (магістральні або протяжні цехові мережі).

Б. Алгоритми пошуку найкоротшого шляху

Алгоритм Дейкстри:

Принцип: алгоритм знаходить найкоротші шляхи від **однієї заданої вершини** (наприклад, Головної знижувальної підстанції – ГПП) до всіх інших вершин графа.

Працює виключно з невід'ємними вагами ребер.

Алгоритм Флойда-Воршелла: *принцип:* динамічне програмування, що знаходить найкоротші шляхи між **усіма парами вершин** графа одночасно. Корисний для аналізу міжсистемних зв'язків та кільцевих схем розподілу.

4. Завдання на виконання: Оптимізація схеми внутрішньозаводського електропостачання

Постановка задачі: Цех машинобудівного заводу має Головну цехову підстанцію (вузол № 1, ГПП) та 5 розподільчих пунктів (РП-2, РП-3, РП-4, РП-5, РП-6), які живлять технологічні лінії. Необхідно виконати трасування кабельної мережі.

Вихідні дані (Матриця відстаней D між вузлами, в метрах):

Вузли	1 (ГПП)	2 (РП)	3 (РП)	4 (РП)	5 (РП)	6 (РП)
1	0	15	25	∞	∞	∞
2	15	0	10	12	22	∞
3	25	10	0	∞	18	28
4	∞	12	∞	0	14	∞
5	∞	22	18	14	0	16
6	∞	∞	28	∞	16	0

Порядок виконання роботи:

1. Побудувати топологічну схему (граф) мережі за заданою матрицею відстаней.

2. **Задача А:** Застосувати алгоритм Пріма або Краскала для побудови магістрально-радіальної мережі мінімальної довжини (мінімізація капіталовкладень в кабель). Обчислити сумарну довжину.

3. **Задача Б:** Застосувати алгоритм Дейкстри для знаходження найкоротших трас від ГПП (вузол 1) до кожного РП (мінімізація втрат напруги при радіальному живленні).

4. Порівняти отримані конфігурації мереж, зробити висновок щодо техніко-економічного компромісу (надійність/вартість).

5. Зміст звіту

Звіт виконується на листах формату А4 (або в електронному вигляді) і має містити:

1. **Титульний лист** встановленого зразка.
2. **Метоу роботи** та вихідні дані (матрицю ваг згідно з варіантом).
3. **Графічне представлення** початкового графа мережі.
4. **Покрокове розгортання алгоритмів:**
 - Таблиці або ітераційні кроки виконання алгоритму Дейкстри.
 - Послідовність вибору ребер для алгоритмів МКД.
5. **Графічні схеми** оптимізованих мереж (схема мінімального каркаса та схема найкоротших шляхів).
6. **Розрахункову частину:** порівняння сумарної довжини кабелів для обох випадків.
7. **Висновки:** аналіз доцільності впровадження конфігурацій з точки зору мінімізації втрат напруги та економії матеріалів.

6. Контрольні питання

1. Що таке «зважений граф» і які фізичні параметри систем електропостачання можуть виступати як ваги ребра?
2. У чому полягає відмінність між цільовими функціями алгоритму Дейкстри та алгоритму Краскала при проєктуванні кабельних мереж?
3. Які технічні обмеження (наприклад, за напругою чи струмом) слід враховувати, якщо оптимізація топології за довжиною призводить до надмірного завантаження однієї з магістралей?

4. Чому алгоритм Дейкстри не може бути використаний у графах, де присутні від'ємні ваги ребер? Чи можливі від'ємні ваги в задачах електроенергетики?

5. Поясніть, яким чином матриця суміжності відображає наявність двостороннього (резервного) живлення цехового розподільчого пункту.

6. Який з алгоритмів (Пріма чи Краскала) є більш ефективним для комп'ютерного розрахунку великих об'єднаних енергосистем із низькою щільністю зв'язків? Обґрунтуйте відповідь.

ДОДАТКИ

Додаток А

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Таблиця А.1. Вихідні дані до Теми 1 «Оптимальний розподіл навантаження між паралельно працюючими агрегатами»

Для всіх варіантів прийняти кількість насосних агрегатів $n = 3$. Одиниця вимірювання питомих витрат енергії c_i – кВт/(м³/год), продуктивності насосів та загального навантаження станції ($Q_{\min}$, $Q_{\max}$, $Q_{\text{заг}}$) – м³/год.

Таблиця А.1 – Вихідні дані до Теми 1 «Оптимальний розподіл навантаження між паралельно працюючими агрегатами»

Варіант	c_1	c_2	c_3	$Q_{\min,1}$	$Q_{\max,1}$	$Q_{\min,2}$	$Q_{\max,2}$	$Q_{\min,3}$	$Q_{\max,3}$	$Q_{\text{заг}}$
1	0,32	0,35	0,38	20	100	30	120	40	150	220
2	0,41	0,39	0,45	40	150	40	150	50	200	310
3	0,28	0,31	0,29	15	80	20	100	25	120	170
4	0,52	0,48	0,50	50	200	60	250	50	220	450
5	0,36	0,34	0,33	30	120	30	130	30	140	260
6	0,47	0,51	0,46	45	180	40	160	50	210	380
7	0,25	0,27	0,30	10	70	15	90	20	110	150
8	0,38	0,42	0,39	35	140	35	140	40	170	290
9	0,44	0,40	0,42	50	220	50	220	60	260	490
10	0,31	0,29	0,34	25	110	25	115	30	135	230

Правило перевірки коректності моделі: Перед початком розрахунків перевірте виконання аналітичного обмеження технічної спроможності станції:

$$Q_{\text{заг}} \leq Q_{\text{max},1} + Q_{\text{max},2} + Q_{\text{max},3}.$$

Таблиця А.2. Вихідні дані до Теми 2 «Оптимізація геометричних розмірів осердя трансформатора» (Варіант проєкту 1)

Для всіх варіантів частота мережі $f = 50$ Гц. Марка електротехнічної сталі – 3413 (E330). Одиниці вимірювання: номінальна потужність $S_{\text{ном}}$ – кВА; максимальна індукція $B_{\text{ст}}$ – Тл; густина струму j – А/мм²; вартість сталі $c_{\text{ст}}$ та міді $c_{\text{мд}}$ – /кг.

Таблиця А.2 – Вихідні дані до Теми 2

Варіант	Потужність, $S_{\text{ном}}$	Тип охолодження	Макс. індукція, $B_{\text{ст}}$	Густина струму, j	Вартість сталі, $c_{\text{ст}}$	Вартість міді, $c_{\text{мд}}$
1	100	Природне масляне	1,60	2,8	2,5	8,5
2	160	Природне масляне	1,62	2,9	2,5	8,5
3	250	Природне масляне	1,65	3,0	2,6	9,0
4	400	Примусове (дугтя)	1,68	3,2	2,6	9,0
5	630	Примусове (дугтя)	1,70	3,4	2,7	9,5
6	1000	Примусове (дугтя)	1,72	3,5	2,7	9,5
7	63	Сухий трансформатор	1,45	1,8	2,4	8,0
8	160	Сухий трансформатор	1,50	2,0	2,5	8,5
9	1600	Примусова циркуляція	1,74	3,6	2,8	10,0
10	2500	Примусова циркуляція	1,75	3,8	2,8	10,0

Таблиця А.3. Вихідні дані до Теми 2 «Оптимізація геометрії статора асинхронного двигуна» (Варіант проєкту 2)

Для всіх варіантів двигуни трифазні, чотириполюсні ($2p = 4$), частота $f = 50$ Гц. Одиниці вимірювання: номінальний момент $M_{\text{ем}} - \text{Н}\cdot\text{м}$; лінійне навантаження $A - \text{А/см}$; мінімально допустимий ККД $\eta_{\text{min}} - \%$.

Таблиця А.3 – Вихідні дані до Теми 2 «Оптимізація геометрії статора асинхронного двигуна» (Варіант проєкту 2)

Варіант	Момент, $M_{\text{ем}}$	Лінійне навантаження, A	ККД, η_{min}	Напруга живлення, U_1 (В)	Клас ізоляції паза
1	25	280	82,5	220/380	Клас F
2	40	300	84,0	220/380	Клас F
3	63	320	85,5	380/660	Клас F
4	100	340	87,0	380/660	Клас F
5	160	360	88,5	380/660	Клас H
6	250	390	90,0	380/660	Клас H
7	400	420	91,2	380/660	Клас H
8	630	450	92,5	6000	Клас F (високовольтна)
9	1000	480	93,5	6000	Клас F (високовольтна)
10	1600	510	94,2	6000	Клас F (високовольтна)

Номер варіанта обирається студентом за погодженням із викладачем (як правило, відповідає порядковому номеру студента в журналі академічної групи).

Завдання з Теми 2 видається у вигляді одного з двох підваріантів (або трансформатор, або асинхронний двигун).

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Трохимчук Р. М. *Теорія графів : навч. посіб.* Київ : ВПЦ «Київський університет», 2021. 239 с.
2. Зайченко Ю. П. *Дослідження операцій : підручник.* 7-е вид., перероб. і доп. Київ : Видавничий Дім «Слово», 2018. 488 с.
3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Рівест Р., Штайн К. *Вступ до алгоритмів.* К.І.С., 2019. 1288 с. (Переклад з англ.).
4. Сулейманов В. М., Чижевський В. В. *Електричні системи та мережі : підручник.* Київ : Каравела, 2020. 420 с.
5. Малахов С. В., Кузнецов О. А. *Моделювання та оптимізація в електромеханічних системах : навч. посібник.* Харків : НТУ «ХП», 2022. 184 с.
6. Праховник А. В., Попов В. А. *Оптимізація систем електропостачання : навч. посібник.* Київ : НТУУ «КП», 2017. 256 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Розділ 1	
Методи лінійного та нелінійного програмування в електромеханіці.....	7
Тема 1. Оптимальний розподіл навантаження між паралельно працюючими агрегатами (лінійне програмування).....	7
Тема 2. Оптимізація параметрів електромеханічних пристроїв за критерієм мінімуму маси або вартості (нелінійне програмування).....	12
Розділ 2	
Динамічне програмування та керування електроприводами.....	18
Тема 3. Оптимальне за швидкодією та енерговитратами керування електроприводом (Динамічне програмування).....	18
Розділ 3	
Теорія графів та мережеві моделі в електротехнічних системах.....	32
Тема 4. Трасування та оптимізація кабельних і розподільчих мереж цеху / підстанції.....	32
Додатки.....	43
Додаток А. Варіанти індивідуальних завдань.....	43
Рекомендована література.....	46

Навчальне видання

БЛІНЦОВ Володимир Степанович
БУРУНІНА Жанна Юріївна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З ДИСЦИПЛІНИ
«ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ»

Комп'ютерне верстання *Н. М. Ковальчук*
Коректор *О. Є. Вакула*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 2,79. Вид. № 9. Зам. № 2206-60.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54007
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.