

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**А. Я. Казарєзов, А. Ф. Галь,
Ю. Є. Барабанова**

**ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ
ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ**

Підручник

Рекомендовано Вченою радою НУК

Миколаїв ♦ НУК ♦ 2018

УДК 005.511:656.61(075.8)

К 14

Автори:

А. Я. Казарезов, д-р техн. наук, професор;

А. Ф. Галь, канд. техн. наук, професор НУК імені адмірала Макарова;

Ю. Є. Барабанова, аспірантка НУК імені адмірала Макарова

Рецензенти:

В. О. Некрасов, д-р техн. наук, професор, зав. каф. теорії корабля і проектування суден НУК імені адмірала Макарова;

І. О. Іртишева, д-р екон. наук, професор, зав. каф. менеджменту НУК імені адмірала Макарова;

Ю. М. Харитонов, д-р техн. наук, професор, декан факультету морської інфраструктури НУК імені адмірала Макарова

*Рекомендовано Вченою радою НУК
імені адмірала Макарова як підручник
(протокол № 10 від 26.10.2018 р.)*

Казарезов А. Я.

К 14 Оптимізаційні моделі транспортної логістики : підручник / А. Я. Казарезов, А. Ф. Галь, Ю. Є. Барабанова. – Миколаїв : НУК, 2018. – 232 с.
ISBN 978–966–321–358–3

Підручник містить теоретичний матеріал, приклади, перелік рекомендованої літератури, завдання до кожної теми та підсумкові індивідуальні завдання. Розглянуто окремі типові моделі транспортної логістики.

Призначено для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

УДК 005.511:656.61(075.8)

© Казарезов А. Я., Галь А. Ф., Барабанова Ю. Є., 2018

© Національний університет кораблебудування

імені адмірала Макарова, 2018
ISBN 978–966–321–358–3

ВСТУП

Спеціалісти в галузі транспортної логістики повинні володіти знаннями й уміннями виконання прикладного економічного аналізу з використанням доступних математичних і програмних засобів. Однією з важливих дисциплін у підготовці таких фахівців є "Оптимізаційні моделі транспортної логістики". Дисципліна вивчається за вибором студентів.

Методи оптимізації за допомогою використання економіко-математичних моделей дозволяють визначати оптимальні варіанти транспортних потоків, транспортних одиниць, тарифів на перевезення. Економіко-математичні моделі планування транспортних процесів дають можливість вивчати і вимірювати вплив різних факторів на результати діяльності транспортних систем за допомогою імітування їх поведінки. Оптимізаційні моделі транспортної логістики дозволяють визначати оптимальні варіанти поведінки транспортної системи за певних умов зміни навколишнього середовища.

Мета вивчення дисципліни "Оптимізаційні моделі транспортної логістики" – оволодіти системою знань, принципів та методів з основ оптимізації економіко-математичних моделей транспортних систем і процесів.

Основні завдання курсу:

- ознайомитися з категорійним апаратом економіко-математичного моделювання та аналізу діяльності транспортних систем і їх елементів;

- вивчити наявні підходи до оптимізації моделей транспортних систем і процесів;
- набути практичних навичок використання методів оптимізації економіко-математичних моделей транспортних систем і процесів.

Базою дисципліни є знання, отримані студентами при вивченні фундаментальних економічних дисциплін: "Мікроекономіки", "Макроекономіки", "Вищої математики", "Теорії ймовірностей", "Статистики", "Проектування логістичних систем", "Управління ланцюгами поставок". Перші дві дисципліни забезпечують теоретичне підґрунтя при висуненні гіпотез щодо зв'язку між економічними явищами і процесами; три наступні забезпечують математичну основу дисципліни; дві останні безпосередньо використовують дисципліну "Оптимізаційні моделі транспортної логістики" та в свою чергу надають приклади реальних задач і ситуацій для вивчення і використання означеної дисципліни.

Дисципліна "Оптимізаційні моделі транспортної логістики" має прикладний характер. У теоретичному аспекті вона дозволяє студентам описувати складні логістичні транспортні процеси у формалізованому вигляді економіко-математичних моделей і здійснювати пошук оптимальних рішень. У прикладному аспекті – набути навичок побудови моделей транспортної логістики на основі фактичних даних і визначення оптимального варіанта рішення задачі транспортної логістики; сформувати у студентів навички проведення розрахунків з урахуванням змін навколишнього середовища транспортної системи.

При підготовці навчально-методичного посібника було використано існуючі навчальні, монографічні та періодичні джерела за авторством як вітчизняних, так і зарубіжних науковців. Матеріали до тем доповнено прикладами, які дозволяють студентам краще засвоїти складний матеріал.

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Посібник поділяється на такі частини:

- 1) економіко-математичне моделювання (теми 1, 2);
- 2) теоретичні основи пошуку оптимального рішення (теми 3–7);
- 3) оптимізація моделей транспортної логістики (теми 8–10).

Така структура посібника відповідає дисципліні "Оптимізаційні моделі транспортної логістики" та дозволяє навчитися застосовувати здобуті теоретичні знання на практиці для прийняття оптимальних рішень у транспортній логістиці.

Перевірити ступінь оволодіння студентами теоретичним матеріалом і практичними навичками з дисципліни дають змогу контрольні запитання та практичні завдання, наведені в посібнику. Для кращого засвоєння тем подано індивідуальні підсумкові завдання, що мають аналітично-розрахунковий характер. Деякі завдання вимагають використання ПЕОМ, зокрема таких програмних додатків, як Microsoft Excel, Math Cad тощо.

1. НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання логістичних систем

1.1. Сутність і види економічних моделей

1.2. Основні етапи економіко-математичного моделювання

1.1. Сутність і види економічних моделей

Економічні процеси, що відбуваються в суспільстві, здебільшого неповторні. Тому неможливо повернути історію та провести експеримент за інших умов або простежити вплив іншого управлінського рішення. При прийнятті відповідального управлінського рішення бажано мати можливість спрогнозувати наслідки цього рішення у найближчий час, а також на майбутнє.

Дослідження та прогнозування поведінки логістичних систем на практиці здійснюється шляхом економіко-математичного моделювання, тобто зображення логістичних процесів у вигляді моделей.

Єдиний шлях розв'язання проблеми – це експериментальне дослідження математичних моделей складних соціально-економічних систем. Іноді це дослідження називають імітаційним моделюванням, бо поведінка математичної моделі під

дією різноманітних зовнішніх факторів імітує поведінку соціально-економічного явища.

В інших випадках експериментальне дослідження математичних моделей складних систем має назву дослідження операцій, бо досліджується реакція математичної моделі, над якою здійснюються операції. У науковій літературі поняття дослідження операцій має широке значення.

Термін "моделювання" походить від французького "modeller" – ліпити (копію), тобто копіювати. Під моделлю в цьому випадку мається на увазі відображення логістичної системи (абстрактне або матеріальне), що може бути використане замість самої системи для вивчення її властивостей та можливих варіантів поведінки. Звідси випливає і поняття моделювання – це приблизне відображення реальної ситуації, об'єкта, що відображає його найзагальніші, найхарактерніші риси та абстрагується від дрібних деталей і характеристик.

При побудові моделей необхідно дотримуватись наступних вимог:

- поведінка, структура та функції моделі повинні бути адекватні модельованій логістичній системі;
- відхилення параметрів моделі в процесі її функціонування від відповідних параметрів модельованої логістичної моделі не повинні виходити за межі припустимої точності моделювання;
- результати дослідження моделі та її поведінки повинні виявити нові властивості модельованої логістичної системи, які не відзеркалено в первинних матеріалах, що використовуються для побудови даної моделі;
- модель повинна бути більш зручною, ніж її реальний аналог – логістична система.

Дотримання цих вимог дозволяє реалізувати якісно можливості моделювання, тобто:

- проведення дослідження на етапі проектування

логістичної системи для виявлення доцільності її створення та застосування;

- проведення дослідження без втручання в функціонування логістичної системи;
- визначення гранично припустимих значень обсягів матеріальних потоків та інших параметрів логістичної системи без ризику руйнування модельованої системи.

Основними напрямками використання і поширення економіко-математичних, у тому числі й логістичних, моделей при вивченні соціально-економічних явищ є такі:

- прогнозування розвитку національних економік. Наприклад, усі економічні, політичні та зовнішньополітичні реформи Радянського Союзу були об'єктами чисельних модельних експериментів ще за 10 років до епохи М.С. Горбачова. Вивчалися такі явища: введення гнучких цін, децентралізація управління, створення банків з капіталом ризику, введення промислових облігацій, фінансового ринку та конвертованої валюти. При моделюванні та прогнозуванні національної економіки створюються моделі логістичних систем міждержавних і внутрішньодержавних перевезень, міжнародного розподілу виробництва, міжнародних грошових потоків;
- створення важливих народногосподарських проектів, наприклад будівництво морів, каналів, атомних електростанцій, металургійних комбінатів, добування корисних копалин, перепрофілювання галузей виробництва, розробка і впровадження інформаційних систем різного призначення. На цьому напрямі економіко-математичного моделювання широко застосовуються логістичні моделі, що органічно вписуються у планування транспортних, інформаційних та фінансових потоків;
- створення моделей оборони країни і планування військових операцій. Оборонні відомства усіх держав та альянсів

з давніх часів і до сьогодні використовують логістичні моделі забезпечення та проведення військових операцій. Наприклад, військові події на Близькому Сході – "Буря у пустелі", операція у Сербії, останні захоплення Афганістану та Іраку – заздалегідь планувалися та моделювалися у Пентагоні;

- навчання та підготовка кадрів є новим напрямом використання логістичних моделей, що надають допомогу великим міжнародним компаніям.

Моделі логістичних систем більшість дослідників поділяє на два класи – ізоморфні та гомоморфні. Ізоморфні моделі повністю замінюють собою систему, що моделюється, та повторюють усі морфологічні особливості та реакції логістичної системи. Тому на практиці побудова та дослідження ізоморфної моделі складна, дорога та майже неможлива.

Практична більшість економіко-математичних моделей (ЕММ), що використовуються у логістиці, є гомоморфними. Гомоморфні моделі подібні до об'єкта моделювання у відношенні головних, найбільш характерних рис об'єкта, які є важливими для процесу моделювання. Інші риси побудови і діяльності об'єкта моделювання, що не мають значення з точки зору дослідження явища або процесу моделювання, ігноруються при гомоморфному моделюванні.

Гомоморфні моделі в свою чергу поділяються на матеріальні та абстрактно-концептуальні. Матеріальні моделі в логістиці, як і в економіці загалом, знаходять обмежене застосування внаслідок складності, тривалості у часі та значної вартості при використанні. Тому в логістиці здебільшого використовують абстрактно-концептуальні моделі. Недоліком абстрактно-концептуальних моделей є завжди ризик помилки моделювання внаслідок неадекватності моделі об'єкту моделювання.

Економічні моделі за принципом побудови поділяють на символічні та математичні. Символьні моделі побудовані на підставі певним чином організованих знаків, кодів, слів,

чисел, що зображають об'єкт моделювання. Результати символічного моделювання складніше обробляти, ніж результати математичного моделювання, тому математичне моделювання більш поширене.

Математичне моделювання в свою чергу поділяють на дві категорії – аналітичне моделювання й імітаційне. Аналітичне моделювання характеризує поведінку об'єкта дослідження математичними співвідношеннями. Співвідношення, що використовуються в аналітичному моделюванні, отримують внаслідок теоретичних досліджень або експериментів. Теоретичні співвідношення в аналітичному моделюванні дозволяють отримати високий рівень універсальності моделі, однак складність перевірки моделі в даному випадку є зворотнім боком універсальності. Експериментальні співвідношення у межах припустимого їх використання надають моделі високий рівень адекватності реальному об'єкту, однак знижують універсальність моделі. Джерелом емпіричних даних служить досвід інших країн, підприємств, суб'єктів господарювання тощо. Більш універсальним по відношенню до аналітичного моделювання є імітаційне моделювання.

Імітаційна модель – це відтворення розгортання у часі соціально-економічного явища або процесу, що моделюється. При імітаційному моделюванні вивчається перехід об'єкта моделювання з одного стану до іншого. Імітаційні моделі логістичних процесів достатньо складні та вимагають великого обсягу розрахунків, тому їх реалізація здійснюється за допомогою сучасної обчислювальної техніки. Імітаційні моделі широко застосовуються для прогнозування поведінки економічних об'єктів, при проектуванні підприємств, для навчання персоналу підприємства.

Протилежними до економіко-математичних методів у логістиці є експертні методи. Експертні методи засновані на

використанні досвіду, кваліфікації та творчого потенціалу фахівців з менеджменту. Експертні методи в логістиці знаходять достатньо широке поле застосування, з їх допомогою формують евристичні стратегії прийняття управлінських рішень.

Евристичні методи моделювання економічних процесів на відміну від математичних методів є набором типових рішень, що забезпечують нехай і оптимальний результат, але такий, що до нього достатньо близький. Евристичні методи у свою чергу поділяються на методи дослідження операцій та методи економічної кібернетики.

При використанні евристичних методів вихідний і прогностичний стани логістичної системи подають у вигляді набору узгоджених показників, які доступні для розуміння та аналізу. Залежно від способу використання показників стану системи розрізняють внутрішню та зовнішню евристичні стратегії.

Внутрішня евристична стратегія полягає у тому, що кожна ситуація розглядається як одне ціле шляхом аналізу значень узгоджених показників. Внутрішня стратегія може бути реалізована у двох варіантах. Перший варіант полягає у порівнянні можливих значень показників, які будуть досягнуті, з показниками поточного стану логістичної системи. Другий варіант внутрішньої евристичної стратегії містить порівняння показників поточного стану логістичної системи з граничними або нормативними величинами.

Зовнішня евристична стратегія полягає у тому, що виконується порівняння значень узгоджених показників стану системи в двох можливих ситуаціях логістичної системи в одному прогностичному часовому моменті або періоді, що дає можливість обрати оптимальний варіант евристичної стратегії з двох можливих.

З метою визначеності корисності різних методів дослідження операцій у науковій роботі було проведено опитування

дійсних членів Американського товариства дослідження операцій. Результати дослідження наведені нижче.

***Корисність методів дослідження операцій
у науковій роботі***

<i>Методи</i>	<i>Відносна цінність</i>
Теорія ймовірності і статистичні оцінки	0,182
Економічний аналіз і оцінка ефективності витрат	0,150
Імітаційне моделювання.....	0,143
Лінійне програмування	0,120
Теорія керування запасами	0,097
Теорія масового обслуговування (теорія черг)	0,085
Методи сіток (упорядкування операцій)	0,072
Моделі заміни	0,042
Теорія ігор	0,040
Динамічне програмування	0,031
Методи пошуку	0,020
Нелінійне програмування	0,018
Усього	1,00

Щоб з'ясувати як часто виробники застосовують методи дослідження операцій для внутрішньофірмового планування, було здійснено аналіз 1000 найбільших фірм США (табл. 1.1).

Таблиця 1.1. Частота використання методів дослідження операцій у виробництві

Методи	Частота використання	Дані у відсотках
Імітаційне моделювання	60	29
Лінійне програмування	43	21
Методи сіток	28	14
Теорія керування запасами	24	12
Нелінійне програмування	16	8
Динамічне програмування	8	4
Цілочислове програмування	7	3
Теорія масового обслуговування	7	3
Інші методи	12	6
Усього	205	100

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Американський прогнозіст Дж. Макгейл, який здійснив аналіз декількох сотень науково-дослідних установ, спеціально зайнятих розробкою прогнозів, подає таку інформацію щодо частоти використання методів прогнозування (табл. 1.2).

Таблиця 1.2. Частота використання методів прогнозування у науковій роботі, %

Методи	Наукові установи	Окремі вчені
Панельні опитування експертів	10,0	8,0
Екстраполяція	8,8	8,5
Індивідуальні експертні оцінки	8,7	8,2
Статистичні моделі	8,4	6,5
Мозкова атака	8,1	7,6
Складання сценаріїв	7,9	10,6
Імітаційні моделі	6,2	5,6
Історичні аналогії	5,9	7,7
Дельфійська техніка	5,5	5,6
Операціональні моделі	5,1	4,4
Матриці інтеркореляції	3,9	3,9
Причинно-наслідкові моделі	3,9	4,1
Методи сіток	2,8	2,7
Релевантні моделі (проблем і цілей)	2,4	2,5
Ігрові моделі	2,3	2,5
Контекстуальне картографування	2,1	2,4
Інші методи	2,2	2,4
Усього	100	100

Вартість моделювання соціально-економічних явищ і термін розробки економіко-математичної моделі залежать від складності моделі, обсягу первинної інформації та ще багатьох факторів. Так, досвід США показує, що для розробки найпростішої моделі потрібно 5–6 людино-місяців і коштує розробка приблизно 30 тис. дол. Середня вартість розробки приблизно 100 тис. дол., а витрати часу 6–12 людино-місяців. Вартість складніших моделей досягає 5–7 млн дол. У Радянському Союзі

модель транспортного потоку регіону коштувала приблизно 200 тис. крб. У зв'язку із запуском нових моделей на заводі "ВАЗ" виникла потреба в новому обладнанні, узгодженні зі старим обладнанням, перебудові структури і ритмів руху допоміжних конвеєрів і т. д. Довелося замовляти дослідження за кордоном, але саму модель фірма не продала. Ракетне командування США у 1968 році витратило на моделювання сценарію можливого нападу 74 млн дол.

1.2. Основні етапи економіко-математичного моделювання

Вирізняють такі основні етапи економіко-математичного моделювання складних соціально-економічних систем:

1. Складання економіко-математичної моделі соціально-економічної системи.
2. Розробку методики моделювання (планування експериментів з моделлю та статистичної обробки як емпіричних даних, так і отриманих результатів).
3. Створення чи пристосування програмного забезпечення.
4. Дослідження економіко-математичної моделі соціально-економічної системи, аналіз та узагальнення здобутих результатів.

Найчастіше використовують наступну послідовність складання математичної моделі системи:

- а) визначення задачі та її аналіз;
- б) визначення вимог до інформації;
- в) збирання та обробка інформації;
- г) висування гіпотез і припущень;
- д) установлення основного змісту моделі;
- е) визначення параметрів, змінних і критеріїв ефективності;
- ж) побудова структурної схеми моделі;
- з) побудова математичної моделі;

і) установлення послідовності (методології) розв'язування задачі.

Розглянемо більш детально етапи складання економіко-математичної моделі системи.

1. Визначення задачі та її аналіз

Визначення задачі складається з наступних елементів:

- твердження щодо існування та обґрунтованості задачі;
- переліку проблемних питань, пов'язаних та споріднених із розв'язуваною задачею;
- аналізу масштабності задачі та можливих меж її розташування;
- розбиття початкової задачі на окремі підзадачі.

2. Визначення вимог до інформації

Визначення вимог до інформації дає відповіді на запитання:

- яка інформація необхідна?
- де можна знайти інформацію?
- у якому вигляді подати інформацію?
- якими методами обробляти інформацію?

3. Збирання інформації

Збирання інформації охоплює низку наступних дій:

- перегляд літературних джерел;
- аналіз виробничих джерел інформації;
- опрацювання звітів;
- підготовку попередніх експериментальних даних;
- консультації зі спеціалістами та експертами;
- купівлю інформації.

4. Висування гіпотез і припущень

На етапі висування гіпотез і припущень ураховують наступні дані:

- обсяг наявної інформації;
- відповідність інформації вимогам задачі;
- підзадачі, для яких інформації не достатньо;
- ресурси для розв'язування задачі;
- очікувані результати моделювання.

5. Установлення основного змісту моделі

Установлення основного змісту моделі поєднує в собі три основні елементи: зовнішню задачу; внутрішню задачу; шляхи розв'язання проблеми.

Зовнішня задача з'ясовує: середовище, в якому функціонує об'єкт дослідження; взаємозв'язок між особою, яка приймає рішення, та об'єктом дослідження, а також середовищем; основні функції системи (об'єкта), які мають соціально-економічне значення.

Внутрішня задача з'ясовує: вплив факторів навколишнього середовища на існування та функціонування об'єкта, що вивчається; внутрішні взаємозв'язки системи; обмеження у функціонуванні об'єкта.

6. Визначення параметрів, змінних і критеріїв ефективності

Змінні моделі поділяються на вхідні (екзогенні) та вихідні (ендогенні). Вхідні змінні поділяються на задані та керуючі параметри.

Послідовність опису кожного параметра або змінної така:

- 1) вибір символу та назви;
- 2) з'ясування техніко-економічного значення параметра;
- 3) прийняття одиниці вимірювання;
- 4) встановлення діапазону зміни величини;
- 5) визначення джерела параметра або змінної.

Критерій ефективності (функція цілі) повинен об'єктивно відбивати суспільно-корисну значущість соціально-економічного явища або процесу, що вивчається.

Бажано, щоб критерій ефективності був один. Багатокритеріальне моделювання дуже складне і знаходиться за межами дисциплін, що вивчаються за магістерською програмою. Можливе поєднання декількох критеріїв у один комплексний складний критерій або переведення деяких з критеріїв у обмеження.

7. Побудова структурної схеми моделі

Логічна структура моделі – це впорядковане і наукове зображення процесу або явища, що вивчається. У структурній схемі моделі визначаються не лише дії, а й порядок їх виконання. Логічна схема передуює безпосередньому програмуванню.

Зазвичай логічна схема створюється за модульним (блочним) принципом, використовуючи за можливості стандартні блоки.

Іноді структурні схеми будують за ієрархічним принципом. Ієрархія будується за рівнем деталізації. На верхньому рівні – розрахунки за узагальненими показниками. На найнижчому рівні – безпосередні розрахунки.

8. Побудова математичної моделі

Побудова математичної моделі полягає в ідентифікації змінних задачі, з'ясуванні обмежень на змінні задачі, виборі цільової функції (мета) задачі та встановлення зв'язку між змінними задачі і цільовою функцією.

Ціль (або цільова функція) – кінцевий результат, який необхідно отримати шляхом вибору та реалізації керівних рішень, що впливають на досліджувану систему (процес, соціально-економічне явище). У виробничо-комерційній діяльності ціль – це максимізація прибутку або мінімізація витрат. Окремі складові системи (процесу, соціально-економічного явища) можуть бути протилежної думки стосовно цілі.

Наприклад, фірма має виробничий відділ та відділ збуту. Відділ збуту наповняє на збільшенні наявних запасів готової продукції з метою швидкого реагування на підвищення попиту. Виробничий відділ зацікавлений у зниженні запасів у зв'язку з необхідністю скорочення складських витрат. Задовольнити вимоги цих двох відділів одночасно неможливо. З точки зору фірми в цілому можливий тільки компроміс.

Якщо ціль визначена, то оптимальним вважається такий спосіб дій, який найбільше наближає фірму до поставленої цілі.

Виявлення множини припустимих альтернатив активної дії на систему (процес, соціально-економічне явище) – це головний момент аналізу проблемної ситуації. Необхідно з'ясувати повну множину керованих змінних економіко-математичної моделі. Важливим моментом є ідентифікація некерованих змінних. Ігнорування некерованих змінних може призвести до побудови неадекватної моделі та прийняття помилкових рішень.

Окремо необхідно розглянути обмеження, які накладаються на цільову функцію економіко-математичної моделі.

Велика кількість змінних та обмежень на перший погляд ускладнює або робить неможливою побудову моделі, однак при детальному аналізі з'ясовується, що тільки мала кількість змінних та обмежень суттєво впливають на поведінку системи. Тому на першому етапі побудови економіко-математичної моделі слід ідентифікувати домінуючі параметри, змінні та обмеження.

9. Установлення послідовності (методології) розв'язування задачі

Установлення послідовності (методології) розв'язання задачі передбачає:

- розподіл задачі на підзадачі;
- визначення методів розв'язання задачі та підзадач;
- розрахунок витрат часу, грошей та інших ресурсів;
- складання календарного та сіткового графіків виконання робіт.

Розглянемо приклади побудови економіко-математичних моделей соціально-економічних явищ або процесів.

Приклад 1. Задача про асортимент продукції

Фірма використовує три технологічні операції для виробництва трьох різновидів продукції. При виготовленні виробу 2 технологічна операція **б** не використовується. При виготовленні виробу 3 використовуються технологічні операції **а** і **б**.

На рис. 1.1 графічно подані схеми виготовлення продукції.

Технологічні операції використовують і для інших виробів, тому існують часові обмеження за операціями:

перша операція – 430 хв/добу;

друга операція – 460 хв/добу;

третя операція – 420 хв/добу.

Очікуваний прибуток від продажу виробів складає 3, 2, 5 доларів відповідно для одиниці першого, другого та третього виробів. Треба скласти план добового виробництва продукції, якій забезпечує найбільший прибуток.

Розв'язування задачі

Мовне формулювання задачі

Цільова функція – прибуток від реалізації продукції. Бажаний результат – максимізація прибутку.

Обмеження – час використання кожної технологічної операції не перевищує лімітів фонду часу.

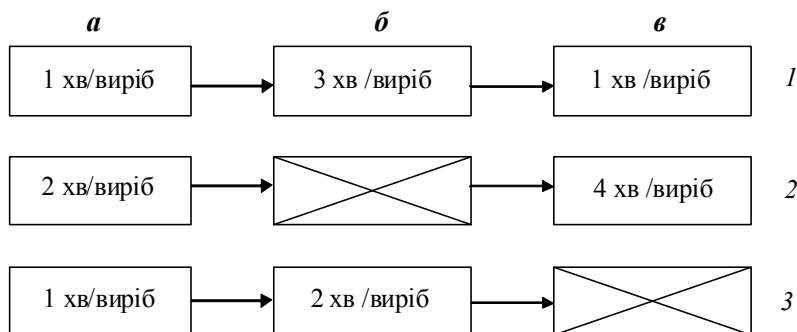


Рис. 1.1. Схеми технологічних операцій виготовлення продукції:

1, 2, 3 – різновиди продукції; а, б, в – технологічні операції

Математичне формулювання задачі

Уведемо змінні:

x_1 – кількість виробів 1;

x_2 – кількість виробів 2;

x_3 – кількість виробів 3;

x_j – кількість виробів "j", $j = 1, 2, 3$.

Цільова функція $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$ за умов

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 430; \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leq 460; \\ 1x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 420; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Приклад 2. Задача добового планування робіт автобусів

Досліджується можливість більш раціонального використання автобусів. У результаті аналізу з'ясовано, що потреба в автобусах є постійною у межах шістьох інтервалів, по чотирі години кожний.

Унаслідок обмежень на ремонт та обслуговування автобусів, а також обмежень на робочий день водія, використання автобуса на добу не може перевищувати 8 годин. Графік потреби в автобусах поданий на рис. 1.2.

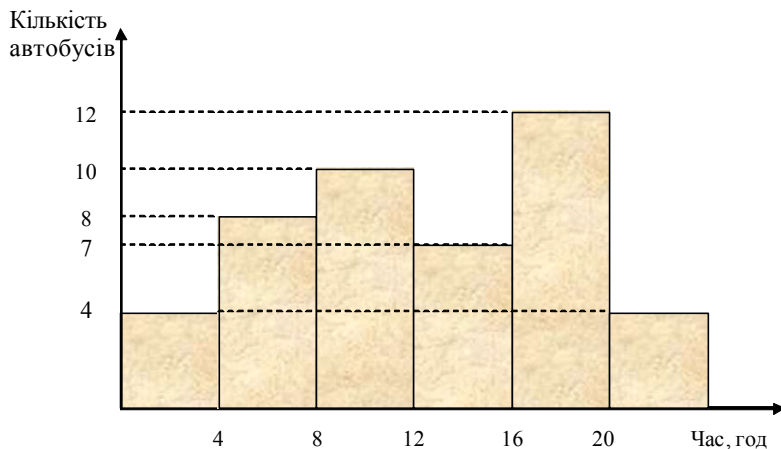


Рис. 1.2. Схема потреби в автобусах протягом доби

Розв'язування задачі

Мовне формулювання задачі

Цільова функція – треба визначити кількість автобусів у кожній зі змін за умов мінімальної потреби в них.

Обмеження – кількість автобусів повинна бути не менша, ніж необхідність забезпечення потреб у автобусах згідно з графіком.

Математичне формулювання задачі

Позначимо кількість автобусів, що виходять на лінію, відповідно

x_1 – у 0 годин;

x_2 – у 4 години;

x_3 – у 8 годин;

x_4 – у 12 годин;

x_5 – у 16 годин;

x_6 – у 20 годин,

тоді загальна кількість автобусів на добу складає

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min,$$

за умов обмежень

$$x_1 + x_6 \geq 4;$$

$$x_1 + x_2 \geq 8;$$

$$x_2 + x_3 \geq 10;$$

$$x_3 + x_4 \geq 7;$$

$$x_4 + x_5 \geq 12;$$

$$x_5 + x_6 \geq 4;$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, 6.$$

$$z = z(0, 10, 0, 12, 0, 4) = 26 \text{ автобусів.}$$

Аналіз моделей на чутливість

Аналіз моделей на чутливість виконують після знаходження оптимального рішення. Перевіряється чутливість оптимального рішення до зміни моделі. Існують три основні задачі аналізу моделі на чутливість.

Перша задача складається з двох питань:

1. На скільки можливо збільшити запас ресурсу з метою покращення оптимального значення?

2. На скільки можливо зменшити запас ресурсу за умов збереження оптимального значення цільової функції? Інакше кажучи, перевіряється чутливість моделі до змін правої частини (до змін обмежень). Активні та неактивні обмеження по-різному впливають на чутливість моделі. Вирішуються такі питання:

а) максимально припустимого збільшення дефіцитного ресурсу (активне обмеження);

б) максимально припустимого зменшення недефіцитного ресурсу (неактивне обмеження).

Надаємо зауваження до аналізу: зменшення дефіцитного ресурсу ні в якому випадку не покращує значення цільової функції.

Друга задача складається з одного питання – збільшення якого з дефіцитних ресурсів найбільш корисне?

Вартість додаткової одиниці ресурсу розраховується як відношення збільшення оптимального значення цільової функції до максимально припустимого збільшення обсягу ресурсу (найбільший коефіцієнт у цільовій функції перед дефіцитним ресурсом).

Третя задача складається з таких питань:

1. У яких межах можлива зміна коефіцієнта у цільовій функції за умов відсутності зміни оптимального рішення?

2. У яких межах треба змінити коефіцієнт у цільовій функції, щоб перетворити ресурс із недефіцитного у дефіцитний чи навпаки? (Зміна вартості ресурсу)

Цікавий приклад впливу зміни правої частини системи рівнянь на результати розв'язку системи розглянемо на системі двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11; & x_1 = 1; \\ 10x_1 + 101x_2 = 111; & x_2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11,1; & x_1 = 11,1; \\ 10x_1 + 101x_2 = 111; & x_2 = 0. \end{cases}$$

Рішення легко перевірити шляхом підстановки розв'язків у систему рівнянь. Система має назву погано обумовленої (недостатньо обумовленої) системи рівнянь. Модель виявилась занадто чутливою до правої частини системи рівнянь.

Контрольні запитання

1. У чому полягає сутність принципу гомоморфізму?
2. Що таке модель? Які її обмеження при застосуванні?
3. Що таке економіко-математичне моделювання?
4. Які умови застосування економіко-математичного моделювання, які його переваги і недоліки?
5. На чому ґрунтується можливість застосування моделей під час дослідження реальних систем?
6. Наведіть приклади моделей (фізичних, натурних, графічних, математичних) систем різноманітної природи.
7. Наведіть класифікацію математичних моделей, що найчастіше використовуються в економіці.
8. У чому полягають основні етапи економіко-математичного моделювання?
9. Чому моделювання є циклічним процесом?

Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі

- 2.1. Математичне програмування, його цілі та завдання
- 2.2. Задачі оптимізації
- 2.3. Приклади оптимізаційних задач

2.1. Математичне програмування, його цілі та завдання

Математичне програмування – це математична дисципліна, яка займається вивченням методів розв'язування, аналізу та використання задач зі знаходження екстремуму функції на множині допустимих варіантів функції.

Математичне програмування використовують при розв'язуванні практичних задач, у тому числі й економічних.

Загалом послідовність використання економіко-математичних моделей така:

- формулюється економічна проблема;
- створюється математична модель задачі, у якій логічні зв'язки економічної моделі перетворюються на математичні співвідношення (функції, рівняння, нерівності);
- розв'язується математична задача, перевіряється рішення;
- перекладається розв'язок на економічну мову й аналізується результат.

Математичне програмування – це частковий випадок системного аналізу при наявності однієї чітко вираженої мети, досягнення якої здійснюється за одним критерієм.

2.2. Задачі оптимізації

У загальному вигляді математичне формулювання задачі оптимізації виглядає таким чином:

- необхідно знайти найбільше число або найменше значення цільової функції $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$;
- якщо треба виконати умови $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$, де f, g_i – відомі функції; b_i – деякі дійсні числа, $n > m$.

Задачею оптимізації з точки зору економіки є знаходження таких значень змінних, що нададуть критерію ефективності діяльності максимальне чи мінімальне значення за умов виконання обмежень, які пов'язані зі змінними, за допомогою яких здійснюється управління діяльністю підприємства.

Конкретна мета, поставлена в економічній задачі, пояснюється цільовою функцією (критерієм ефективності), екстремум якої і треба знайти.

Обмеження відображають умови при розв'язанні економічної задачі, наприклад брак ресурсів, граничну вартість і таке інше. Змінні, з яких будується цільова функція та на які накладаються обмеження, використовують як "інструмент", за допомогою якого досягається той чи інший варіант цілі. Варіант, при якому змінні задовольняють усім обмеженням, називається припустимим (допустимим).

Задача математичного програмування полягає у тому, щоб з усіх допустимих варіантів значень інструментальних змінних (невдомих моделей) знайти такі, при яких функція цілі (критерій оптимальності) досягає екстремуму.

Розв'язком задачі є знаходження її оптимального рішення, або з'ясування його відсутності.

Функція цілі (критерій оптимальності) повинна об'єктивно характеризувати суспільно-корисну значимість суспільно-економічного явища або процесу. Критерій оптимальності можливо з'ясувати лише з економічної сутності проблеми – задача, яку розв'язує фахівець-економіст. Принципово неможливо визначити цільову функцію на етапі розв'язування задачі математиком. Так само все це стосується й обмежень задачі оптимізації.

Класифікація моделей задач математичного програмування залежить від властивостей функції мети та функції обмежень.

Якщо функція мети та всі функції обмежень лінійні, така задача математичного програмування називається задачею лінійного програмування; якщо ж хоча б одна з функцій нелінійна, така задача має назву задачі нелінійного програмування.

Якщо в математичній моделі враховується поетапно час, то це задача динамічного програмування; у іншому випадку – задача статичного програмування.

Залежно від того, який характер мають вихідні дані моделі – детермінований або стохастичний, – задачі називаються відповідно детермінованим і стохастичним програмуванням.

Серед задач нелінійного програмування особливо досконало досліджені задачі опуклого програмування – задачі знаходження екстремуму опуклої функції, заданої на опуклій замкненій множині. У свою чергу серед задач опуклого програмування найпростіші і найдосконаліше досліджені задачі квадратного програмування, у яких функція мети – квадратична, а обмеження – лінійні.

Якщо змінні задачі математичного програмування приймають тільки цілочислові значення, така задача має назву задачі цільового програмування; у іншому випадку – задачі неперервного програмування.

У задачі дробово-лінійного програмування цільова функція є співвідношенням двох лінійних функцій, а обмеження – лійними.

Якщо в задачі математичного програмування відсутні всі обмеження, така задача називається задачею безумовного програмування.

Як приклади економічних проблем, які доцільно розв'язати використовуючи методи та моделі математичного програмування, розглянемо ті, що наведені нижче.

2.3. Приклади оптимізаційних задач

2.3.1. Задача про планування випуску продукції малого підприємства

Планується виробляти жіночі та чоловічі костюми. На жіночий костюм потрібно 1 м вовни, 2 м шовку та 1 людино-тиждень працевитрат. На чоловічий костюм потрібно 3,5 м вовни, 0,5 м шовку та 1 людино-тиждень працевитрат.

Загалом підприємство має 350 м вовни, 240 м шовку та 150 людино-тижнів працевитрат. За попередньою домовленістю із замовником мають виробити не менше 110 жіночих та чоловічих костюмів загалом.

Акціонери, які вклали гроші у підприємство та сировину (тканину), вимагають прибуток не менше ніж 1400 грн.

Замовник купує жіночий костюм на 10 грн дорожче собівартості, чоловічий – на 20 грн.

Потрібно з'ясувати, скільки необхідно виготовити жіночих та чоловічих костюмів, щоб задовольнити усім вимогам та отримати найбільший прибуток.

Розв'язування задачі

Позначимо кількість жіночих костюмів, які потрібно виготовити, через x_1 ; кількість чоловічих – x_2 . Загальний прибуток (критерій оптимізації, мета, ціль) виробництва складає

$$z = f(x) = 10x_1 + 20x_2.$$

Витрати:

вовни $= 1x_1 + 3,5x_2$;

шовку $= 2x_1 + 0,5x_2$;

трудомісткості $= x_1 + x_2$.

Результати:

загальна кількість костюмів $x_1 + x_2$;

прибуток $10x_1 + 20x_2$.

Функціональні обмеження задачі мають вигляд:

обмеження ресурсів (вовна, шовк, трудомісткість)

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3,5x_2 &\leq 350; \\ 2x_1 + 0,5x_2 &\leq 240; \\ x_1 + x_2 &\leq 150; \end{aligned} \right\}$$

обмеження планового завдання (вартість, кількість)

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 110; \\ 10x_1 + 20x_2 &\geq 1400 \end{aligned} \right\}.$$

Нефункціональні обмеження в очевидне складають

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0; \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі математичного програмування у даному прикладі становить

$$x_1 = 70; \quad x_2 = 80; \quad f_{\max}(x) = 2300 \text{ грн.}$$

2.3.2. Задача про постачання вантажів від постачальників до замовників

Від трьох постачальників, розташованих у пунктах A_1, A_2, A_3 , до чотирьох замовників, розташованих у пунктах B_1, B_2, B_3, B_4 , треба перевезти однорідний вантаж. Наявність вантажу по пунктах постачальників: $A_1 = 50$ т, $A_2 = 40$ т, $A_3 = 20$ т.

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Потреба у вантажі: $B_1 = 30$ т, $B_2 = 25$ т, $B_3 = 35$ т, $B_4 = 20$ т.
Відстані між пунктами замовників та постачальників наведені у табл. 2.1.

Таблиця 2.1. Відстань між постачальниками та замовниками

Замовники B_j Постачальники A_i		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$i = 1$	A_1	C_{11} 3 x_{11}	C_{12} 2 x_{12}	C_{13} 4 x_{13}	C_{14} 1 x_{14}	$a_1 = 50$
$i = 2$	A_2	C_{21} 2 x_{21}	C_{22} 3 x_{22}	C_{23} 1 x_{23}	C_{24} 5 x_{24}	$a_2 = 40$
$i = 3$	A_3	C_{31} 3 x_{31}	C_{32} 2 x_{32}	C_{33} 4 x_{33}	C_{34} 4 x_{34}	$a_3 = 20$
Потреба, b_j		$b_1 = 30$	$b_1 = 25$	$b_1 = 35$	$b_1 = 20$	110

Розв'язування задачі

Позначимо x_{ij} – кількість вантажу, який буде перевезено з i -го пункту постачання у j -й пункт замовлення; C_{ij} – відстань від i -го постачальника до j -го замовника.

Мета: знайти варіант перевезення вантажів з найменшими витратами транспортного моменту $z = f(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 C_{ij} x_{ij}$.

Задача збалансована, тобто наявність вантажу дорівнює потребі у ньому: $\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i$, $i = 1, 2, 3$ – умова вивезення вантажу від кожного з трьох постачальників до чотирьох замовників;
 $\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ – умова отримання кожним замовником необхідної кількості вантажу.

Нефункціональні обмеження: $x_{ij} \geq 0$.

Розв'язок задачі складає:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 25; & x_{12} &= 5; & x_{14} &= 20; & x_{13} &= 0; \\ x_{21} &= 5; & x_{23} &= 35; & x_{22} &= 0; & x_{24} &= 0; \\ x_{31} &= 20; & x_{32} &= 0; & x_{33} &= 0; & x_{34} &= 0; \\ f_{\min}(x) &= 190 \text{ тис. км.} \end{aligned}$$

2.3.3. Задача про раціональний розкрій

Підприємство одержує прут сталевого прокату довжиною $l = 800$ см. Треба виготовити деталі трьох (i) різновидів: $l_1 = 250$ см, $a_1 = 150$ шт.; $l_2 = 190$ см, $a_2 = 140$ шт.; $l_3 = 100$ см, $a_3 = 48$ шт. Скласти раціональний план розкрою вихідного матеріалу (деталей) з найменшими відходами (залишками).

Розв'язування задачі

Побудуємо таблицю можливих варіантів крою (табл. 2.2).

Таблиця 2.2. Можливі варіанти розкрою

Номер способу (j)	b_{ij}			Залишок C_j	Кількість прибутків за j -м способом
	$l_1 = 250$	$l_2 = 190$	$l_3 = 100$		
$j = 1$	3	0	0	50	x_1
$j = 2$	2	1	1	10	x_2
$j = 3$	2	0	3	0	x_3
$j = 4$	1	2	1	70	x_4
$j = 5$	1	1	3	60	x_5
$j = 6$	1	0	5	50	x_6
$j = 7$	0	4	0	40	x_7
$j = 8$	0	3	2	30	x_8
$j = 9$	0	2	4	20	x_9
$j = 10$	0	1	6	10	x_{10}
$j = 11$	0	0	8	0	x_{11}
Необхідна кількість деталей	$a_1 = 150$	$a_2 = 140$	$a_3 = 48$	—	—
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$		

Позначимо: x_j – кількість одиниць (прутків) певного матеріалу, який буде розкрито за j -м варіантом (способом);

a_i – необхідна кількість деталей i -го різновиду (l_i – довжини);

C_j – залишок при розкрої одиниці певного матеріалу (прутка) за j -м способом (варіантом);

b_{ij} – кількість деталей i -го виду, яку отримують при виготовленні з одиниці первинного матеріалу (прутка) за j -м варіантом (способом).

Залишок від розкрою за j -м способом – $C_j x_j$, загалом

$$z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \min \text{ за умов, що}$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \geq a_i, i = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Найбільш трудомістка частина задачі – визначення способів (варіантів) розкрою, що знаходиться за формулою

$$\sum_{i=1}^m l_i b_{ij} + C_j = l, j = 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$0 \leq C_j \leq \min(l_i).$$

Цільова функція

$$z = 50x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 70x_4 + 60x_5 + 50x_6 + 40x_7 + 30x_8 + 20x_9 + 10x_{10} + 0x_{11} \rightarrow \min.$$

Обмеження:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_4 + x_5 + x_6 \geq 150; \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} \geq 140; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 2x_8 + 4x_9 + 6x_{10} + 8x_{11} \geq 48; \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, 11. \end{cases}$$

Розв'язок задачі складає

$$z^* = 2300, x^* = (18; 48; 0; 0; 0; 0; 23; 0; 0; 0; 0).$$

2.3.4. Задача комплексного розкрою деталей

На розкрій поступають варіанти заготовок ($t = 2$) обсягом b_i ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) кожного. Потрібно виготовити комплекти деталей, які налічують l_k штук по $l_1 = 1$; $l_2 = 2$ деталей виду. Кожна одиниця i -го (одного з двох) виду заготовки може бути розкrojена n_i ($i = 1, 2, \dots, n$) різними способами. При розкрої одиниці t -го матеріалу заготовки j -м способом отримаємо a_{ijk} одиниць k -ї деталі. Потрібно скласти програму виготовлення якомога більшої кількості комплектів деталей маючи вказані заготовки та задану комплектацію. Нехай заготовки ($t = 1$) A мають довжину 5 м, кількість $b_1 = 100$ штук; заготовки ($t = 2$) B мають довжину 4 м, кількість $b_2 = 175$ штук; деталі Д1 мають довжину 2,0 м, деталі Д2 – 1,25 м; до одного комплекту залучають одну ($l_1 = 1$) деталь Д1 та дві ($l_2 = 2$) деталі Д2. Потрібно виготовити якомога більшу кількість комплектів деталей.

Розв'язування задачі

Позначимо за x_{ij} кількість одиниць t -го різновиду заготовок, які розкроюються j -м способом, x – загальна кількість комплектів.

Побудуємо таблицю варіантів розкрою заготовок (табл. 2.3).

Таблиця 2.3. Варіанти розкрою заготовок

Варіанти заготовок	Довжина заготовки, м	Спосіб розкрою	Розмір деталі, м		Кількість заготовок b_i	План розкрою x_{ij}
			2 (Д1)	1,25 (Д2)		
$t = 1$	5 (A)	$j = 1$	1	2	$b_1 = 100$	x_{11}
		$j = 2$	2	0		x_{12}
		$j = 3$	0	4		x_{13}

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Продовж. табл. 2.3

Варіанти заготовок	Довжина заготовки, м	Спосіб розкрою	Розмір деталі, м		Кількість заготовок b_i	План розкрою x_{ij}
			2 (Д1)	1,25 (Д2)		
$t = 2$	4 (В)	$j = 1$	2	0	$b_2 = 175$	x_{21}
		$j = 2$	—	1		x_{22}
		$j = 3$	0	3		x_{23}
	Комплектність		$l_1 = 1$	$l_2 = 2$		

Цільова функція $z_1 = x \rightarrow \max$.

Обмеження:

- за кількістю заготовок:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 175;$$

- за комплексністю:

$$x_{11} + 2x_{12} + 0x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 0x_{23} \geq x;$$

$$2x_{11} + 0x_{12} + 4x_{13} + 0x_{21} + x_{22} + 3x_{23} \geq 2x;$$

$$x_{ij} \geq 0; x \geq 0.$$

Отриманий план складає

$$z^* = 264, x^* = (0; 0; 100; 132; 0; 43).$$

2.3.5. Задача про складання суміші

На підприємстві необхідно виготовити суміш, яка містить 30 % речовини Π_1 , 20 % речовини Π_2 , 40 % речовини Π_3 , 10 % речовини Π_4 . Для виготовлення суміші можна використовувати три різновиди сировини M_1, M_2, M_3 з різним співвідношенням речовин та з різною вартістю. Потрібно скласти суміш з мінімальною вартістю та наданим складом речовин. Вхідні дані наведені у табл. 2.4.

Таблиця 2.4. Первинні дані про суміш

Речовина	Сировина			Частка речовин у суміші
	М ₁	М ₂	М ₃	
П ₁	0,3	0,1	0,6	0,3
П ₂	0,1	0,2	0,2	0,2
П ₃	0,5	0,6	0,1	0,4
П ₄	0,1	0,1	0,1	0,1
Вартість за одиницю сировини	4	2	3	
	x_1	x_2	x_3	

Розв'язування задачі

Позначимо x_i – кількість використаної сировини M_i .

Цільова функція $z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$.

Обмеження:

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,1x_2 + 0,6x_3 \geq 0,3; \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 \geq 0,2; \\ 0,5x_1 + 0,6x_2 + 0,1x_3 \geq 0,4; \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 \geq 0,1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0.$$

Отриманий план: $z^* = 2,4$, $x^* = (0; 0,6; 0,4)$.

Контрольні запитання

1. Що таке математичне програмування? Які його етапи?
2. У чому полягає суть задачі оптимізації?
3. Наведіть приклади простих оптимізаційних задач.
4. Яка постановка задачі про планування випуску продукції малого підприємства?
5. Поясніть задачу про постачання вантажів від постачальників до замовників.
6. У чому сутність задачі комплексного розкрою деталей?
7. Які основні принципи розв'язання задачі про складання суміші?

Практичні завдання

1. Для виготовлення столів і шаф на підприємстві використовують два види деревини. Витрати деревини кожного виду на кожний предмет задано (табл. 2.5).

Таблиця 2.5. Витрати виду деревини залежно від типу виробу

Виріб	Сировина, м ³	
	I вид деревини	II вид деревини
Стіл	0,3	0,1
Шафа	0,12	0,2

Прибуток підприємства від виробництва одного стола становить 12 грн, а шафи – 15 грн. Скільки столів і шаф має виготовити підприємство, щоб забезпечити найвищу рентабельність, якщо в розпорядженні підприємства є 84 м³ деревини I виду та 88 м³ деревини II виду?

2. На дільниці цеху виготовляють деталі двох найменувань *A* та *B* за допомогою двох операцій на токарному та фрезерувальному верстатах. Витрати часу на обробку однієї деталі на кожному з верстатів (у годинах) задано в табл. 2.6.

Таблиця 2.6. Вихідні дані до задачі 2

Верстат	Деталь	
	<i>A</i>	<i>B</i>
Токарний	0,3	0,1
Фрезерувальний	0,16	0,4

За планом деталей *A* необхідно виготовити не менше 450 одиниць за місяць, а деталей *B* – не менше 180 одиниць. Скласти найкращу програму, коли відомо, що фонд часу *t* (тривалість роботи) кожного з верстатів становить: токарного – 170 год за місяць, а фрезерувального – 160 год.

3. Для відгодівлі корів на фермі в щоденний раціон кожної корови треба включати не менше 6 одиниць поживної речовини *A*, 8 одиниць поживної речовини *B* і 12 одиниць поживної речовини *C*. Для відгодівлі можна використати три види кормів. Дані про вміст поживних речовин в одному кілограмі кожного корму подано в табл. 2.7.

Таблиця 2.7. Вміст поживних речовин у кормі

Корм	Поживна речовина		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
№ 1	2	1	3
№ 2	1	2	4
№ 3	3	1,5	2

Треба скласти раціон, який відповідав би всім вимогам за поживністю і був би найдешевшим, коли відомо, що один кілограм корму № 1 коштує 2 грн, корму № 2 – 3 грн, корму № 3 – 2,5 грн.

4. Для виготовлення певного виробу потрібні три планки: одна завдовжки 2 м і дві по 1,5 м. Запас становить 400 рейок завдовжки 5 м кожна і 100 рейок завдовжки 6,5 м кожна.

Визначити, як різати всі ці рейки на планки, щоб одержати найбільшу кількість вказаних вище виробів?

5. Державне сільськогосподарське підприємство відвело три земельних масиви площею 5, 8 і 9 тис. га відповідно під посіви жита, пшениці й кукурудзи. Середню врожайність у кожному масиві подано в табл. 2.8.

Таблиця 2.8. Розподіл врожайності культур по масивах

Культура, ц/га	Земельний масив		
	Перший	Другий	Третій
Жито	20	18	17
Пшениця	30	25	28
Кукурудза	25	24	26

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

За 1 ц жита господарство одержує 20 у. о. (умовних одиниць), за 1 ц пшениці – 25 у. о., за 1 ц кукурудзи – 14 у. о.

Яку площу слід відвести господарству під кожен з культур і на якому масиві, щоб одержати максимальний прибуток, коли за планом передбачається зібрати не менше 19 000 ц жита, 158 000 ц пшениці та 300 000 ц кукурудзи?

Тема 3. Задача лінійного програмування та методи її розв'язування

3.1. Постановка задачі лінійного програмування

3.2. Геометрична інтерпретація множини допустимих розв'язків задачі лінійного програмування та графічний метод її розв'язання

3.3. Геометрична інтерпретація множин допустимих розв'язків для задач із трьома невідомими

3.4. Симплекс-метод

3.5. Критерій оптимальності за симплекс-таблицею

3.1. Постановка задачі лінійного програмування

Задачі лінійного програмування вивчені досконало. Це пояснюється тим, що більшість реальних економічних моделей зводиться до задачі лінійного програмування, внаслідок чого і методи розв'язування задач лінійного програмування найбільш поширені. У загальному вигляді розв'язання задачі лінійного програмування майже неможливо.

Загальною задачею лінійного програмування є задача знаходження максимального (мінімального) значення функції

$$z = \sum_{j=1}^n C_j x_j,$$

$$(z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n),$$

за умов функціональних обмежень:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i=1,2,3,...,k;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \leq b_k \end{array} \right\};$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i=k+1,k+2,...,m;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + ... + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right\};$$

нефункціональних обмежень: $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, n,$

де a_{ij} , b_i , C_i – задані постійні величини, $k \leq m$.

Цільову функцію можливо оптимізувати на $\max$ або на $\min$ – це не є принципово, бо у точці x^* функція $z = f(x^*)$ досягає мінімуму, а функція $z = -f(x^*)$ – максимуму.

Таким чином, ми завжди можемо мінімізувати цільову функцію не втрачаючи загальні підходи.

Цільова функція та всі функціональні обмеження, як ми вже бачили, мають лінійну форму відносно невідомих x_j , що й дає назву цій задачі математичного програмування – лінійне програмування.

Невідомі, які наявні в лінійній моделі, відповідно не функціональним обмеженням невід'ємні, що теж не обмежує за-

де $(x_i)^-$ – від'ємне значення.

- канонічну, якщо $k = 0$; $l = n$, де всі функціональні обмеження мають вигляд рівностей;
- стандартну (симетричну), у якій $k = m$; $l = n$, де всі функціональні обмеження мають вигляд нерівностей.

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до канонічної задачі шляхом перетворення функціональних обмежень нерівностей у обмеження рівності додаванням до нерівностей невідомих невід'ємних величин:

де $y_i \geq 0$; новим невідомим додають назви відповідно x_{n+1} , x_{n+2} , ..., x_{n+m} , отже

функціональні обмеження набувають вигляду

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_j = b_i, i=1,2,3,...,m;$$

[illegible]

Якщо знак нерівності $\geq$, то додаткові невідомі треба віднімати від лівої частини нерівності.

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до стандартної задачі лінійного програмування шляхом

віднімання з лівої частини рівняння додаткових невід'ємних невідомих величин.

Таким чином, ми навчилися зводити задачу лінійного програмування від мінімізації до максимізації; переходити від функціональних обмежень у вигляді нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки; замінювати невідомі від'ємні змінні на невід'ємні.

Уведені додаткові невідомі змінні мають чіткий економічний зміст. Так, наприклад, якщо в обмеженнях задачі лінійного програмування (нерівність) відбиваються витрати ресурсу та їх наявність, то додаткова змінна задачі (у формі рівняння) дорівнює обсягу невитраченого відповідного ресурсу.

Якщо змінна не є від'ємною, то її можливо замінити на дві невід'ємні:

$$x_i = U_i - V_i$$

Система обмежень у вигляді рівностей може бути:

- сумісна, якщо є хоча б одне рішення;
- несумісна, якщо ранг матриці $|a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n$ дорівнює (r) , а ранг розширеної матриці (доданий стовпчик b_i) більший ніж (r) ;
- надмірна, якщо одне з рівнянь можна отримати як лінійну комбінацію інших.

У системі n – кількість невідомих; m – кількість рівнянь.

Якщо система сумісна та не є надмірною, будемо вважати, що ранг її дорівнює (m) ; тоді m – базисні змінні; $(n - m)$ – вільні змінні, $m < n$.

Система у даному випадку має нескінченну кількість розв'язків, тому що ми маємо можливість надавати вільним змінним будь-які значення.

Рішення системи рівнянь (обмежень) має назву базисного рішення, якщо всі вільні змінні дорівнюють нулю. Сукупність значень невідомих (чисел) задачі математичного програмування, які задовольняють усім обмеженням задачі, називається припустимим рішенням або планом.

Сукупність усіх припустимих рішень системи рівнянь є опуклою множиною, або множина розв'язків задачі лінійного програмування є опуклою.

Базисне припустиме рішення задачі лінійного програмування відповідає одній з вершин або граней множини розв'язків.

Оптимальне рішення задачі лінійного програмування відповідає одному з базисних припустимих рішень, тобто досягається у вершині множини розв'язків, називається оптимальним планом задачі лінійного програмування.

3.2. Геометрична інтерпретація множини допустимих розв'язків задачі лінійного програмування та графічний метод її розв'язання

Приклад 3.1. Стандартна задача лінійного програмування

Розглянемо задачу лінійного програмування у формі стандартної задачі – з обмеженнями у вигляді нерівностей. Для наочності розглянемо простий випадок з двома невідомими змінними. Пригадаємо задачу про планування випуску продукції малим підприємством (рис. 3.1):

$$z(x) = 10x_1 + 20x_2, \quad z \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 \leq 350; (-l_1) \\ 2x_1 + 0,5x_2 \leq 240; (-l_2) \\ x_1 + x_2 \leq 150; (-l_3) \\ x_1 + x_2 \geq 110; (-l_4) \\ 10x_1 + 20x_2 \geq 1400; (-l_5) \\ x_1 \geq 0; (-l_6) \\ x_2 \geq 0; (-l_7) \end{cases}$$

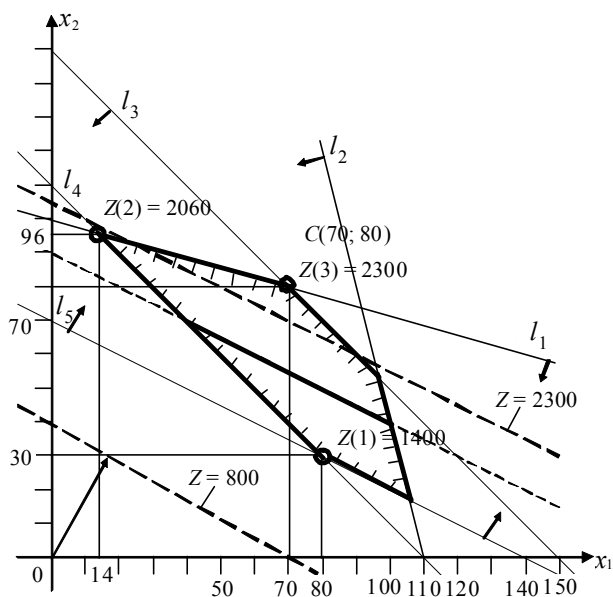


Рис. 3.1. Графічний розв'язок задачі

Нерівність-обмеження графічно відображається півплощиною, а границя – граничною прямою, рівняння якої утворюється перетворенням нерівності на рівняння:

$$l_2 \rightarrow 2x_1 + 0,5x_2 = 240;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 240/0,5 = 480; x_1 = 240/2 = 120, x_2 = 0;$$

$$l_3 \rightarrow x_1 + x_2 = 150;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 150; x_1 = 150, x_2 = 0;$$

$$l_4 \rightarrow x_1 + x_2 = 110;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 110; x_1 = 110, x_2 = 0;$$

$$l_5 \rightarrow 10x_1 + 20x_2 = 1400;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1400/20 = 70; x_1 = 1400/10 = 140, x_2 = 0.$$

Але точка (0;0) $10 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0 \geq 1400$ не відповідає нерівності, тому нам необхідна півплощина вище граничної прямої.

Таким чином, отримано багатокутник розв'язків, який завжди є опуклим.

З метою знаходження максимуму цільової функції $z = 10x_1 + 20x_2$ побудуємо лінію рівняння цільової функції прийнявши $z = 10x_1 + 20x_2 = 10$; $x_1 = 0$, $x_2 = 40$; $x_1 = 80$, $x_2 = 0$. Зростання цільової функції означає паралельне зміщення графіка функції вгору, доки остання точка не вийде за границю багатокутника розв'язків. Ця точка відповідає перетину прямих:

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 = 350; (-l_1) \\ x_1 + x_2 = 150; (-l_3) \end{cases}$$

$$x_1 = 70, x_2 = 80;$$

$$z_{\max}(x) = 10x_1 + 20x_2 = 10 \cdot 70 + 20 \cdot 80 = 2300 \text{ грн.}$$

Для знаходження мінімального значення цільової функції лінію рівняння потрібно зміщувати вниз, доки остання точка вийде за границю багатокутника розв'язків – це l_5 , усі точки якої є розв'язком задачі – нескінченна множина рішень.

У розглянутому випадку багатокутник розв'язків не тільки опуклий, а ще й замкнений. Можливі варіанти опуклого багатокутника розв'язків, який є необмежений, наведено на рис. 3.2.

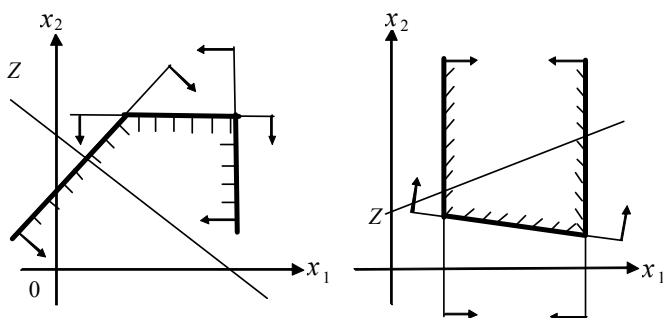
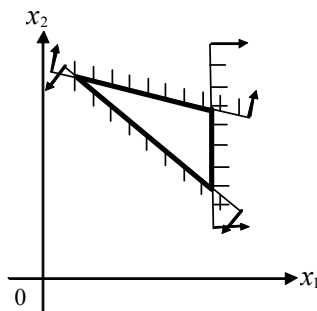


Рис. 3.2. Необмежені багатокутники розв'язків задачі лінійного програмування

У першому випадку можливо знайти максимальне значення цільової функції, а у другому – мінімальне значення. На рис. 3.3 наведений приклад багатокутника розв'язків несумісної системи обмежень – розв'язок задачі математичного програмування відсутній.

Рис. 3.3. Багатокутник розв'язків несумісної системи обмежень задачі лінійного програмування



3.3. Геометрична інтерпретація множин допустимих розв'язків для задач із трьома невідомими

Приклад 3.2. Стандартна задача лінійного програмування з трьома невідомими

Розглянемо задачу лінійного програмування у формі стандартної задачі. Знайдемо найбільше значення функції трьох невідомих змінних:

$$z(x) = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3, \quad z \rightarrow \max;$$

при обмеженнях

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6;$$

$$x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 8;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

Побудуємо область припустимих рішень системи лінійних нерівностей, прийнявши до уваги рівняння площин

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6; \quad (1)$$

$$x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8; (2)$$

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0.$$

Побудуємо сліди перетину площини $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ з кожною із площин $x_1 = 0$; потім $x_2 = 0, x_3 = 0$. Якщо $x_1 = 0$, то рівняння (1) набуває вигляду $3x_2 + 2x_3 = 6$ й у системі координат x_2, x_3 гранична пряма набуває такого вигляду, як показано на рис. 3.4.

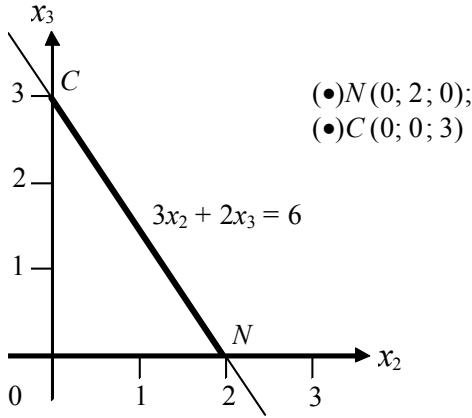


Рис. 3.4. Слід площини (1)

Відповідно рівняння (2) набуває вигляду $4x_2 + 8x_3 = 8$ і гранична пряма у координатах x_2 та x_3 набуває вигляду

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 6; \\ x_1 + 4x_2 = 8 \text{ (рис. 3.5).} \end{cases}$$

Аналогічно побудуємо сліди перетину площин (1) та (2) з площиною $x_3 = 0$ (рис. 3.6):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6; \\ x_1 + 8x_3 = 8. \end{cases}$$

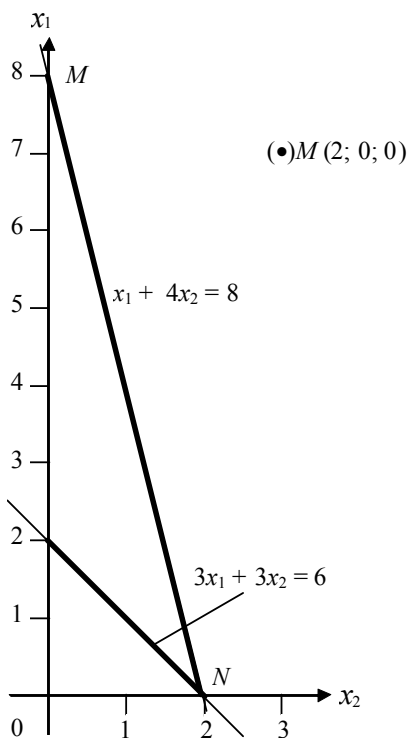


Рис. 3.5. Слід площини (2)

Знайдемо точку перетину R слідів площин (1) та (2) на координатній площині $x_1 O x_3$ (рис. 3.7):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 6; & x_3 = \frac{9}{11}; \\ x_1 + 8x_3 = 8; & x_1 = \frac{16}{11}. \end{cases}$$

$$R\left(\frac{16}{11}; 0; \frac{9}{11}\right).$$

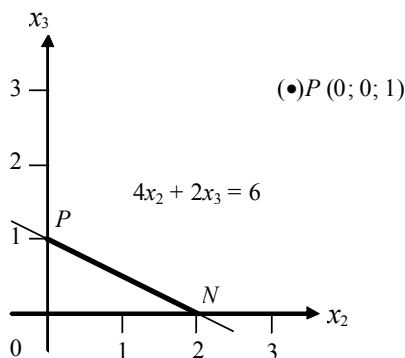


Рис. 3.6. Сліди площин (1) та (2)

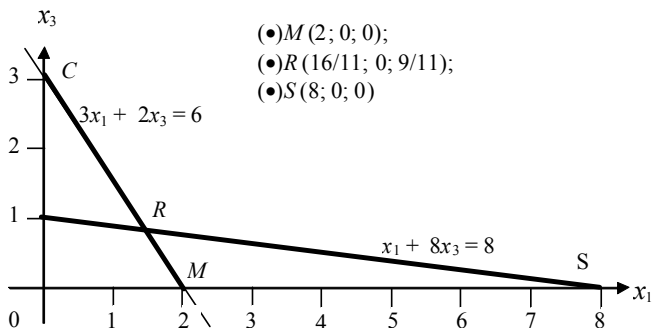


Рис. 3.7. Сліди площин (1) та (2)

Побудуємо аксонометричне зображення області припустимих рішень системи лінійних нерівностей (рис. 3.8).

Побудуємо вектор цільової функції $\bar{Z}(3; -6; 2)$. При пересуванні площини цільової функції $z = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$ у напрямку вектора $\bar{Z}(3; -6; 2)$ цільова функція зростатиме, а площина цільової функції залишить багатокутник розв'язків (область припустимих рішень) $MNOPR$ на грані MR ($3x_1 + 2x_3 = 6$) та площини цільової функції Z ($3x_1 - 6x_2 + 2x_3$). У випадку коли $x_2 = 0$, лінія площини цільової функції, по якій вона перетинається з площиною x_1Ox_3 , має рівняння $3x_1 + 2x_3 = \text{const}$.

Очевидно, що ця лінія паралельна ребру MR , а задача лінійного програмування має безліч оптимальних розв'язків, які відповідають точкам ребра MR .

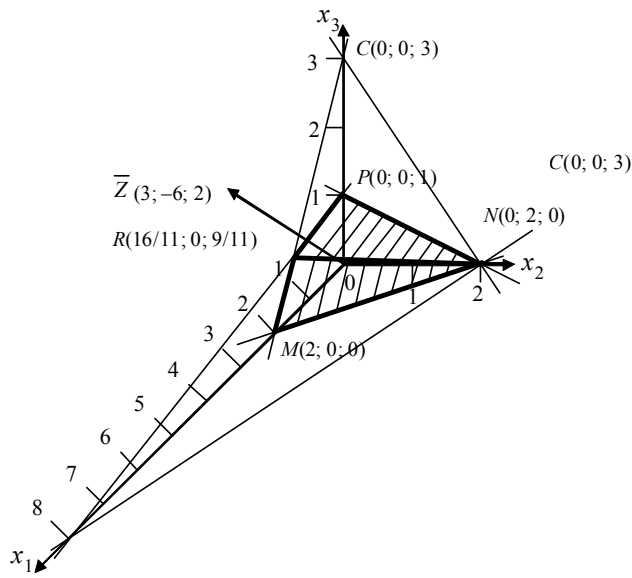


Рис. 3.8. Область припустимих рішень $MNOPR$

Найбільше значення цільової функції складає

$$z_{\max} = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 6; ((\cdot)M(2;0;0)).$$

Підрахуємо значення цільової функції в інших вершинах багатокутника розв'язків:

$$((\cdot)P(0;0;1)); z(P) = 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2;$$

$$((\cdot)N(0;2;0)); z(N) = 3 \cdot 0 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -12;$$

$$((\cdot)R\left(\frac{16}{11}; 0; \frac{9}{11}\right)); z(R) = 3 \cdot \left(\frac{16}{11}\right) - 6 \cdot 0 + 2 \cdot \left(\frac{9}{11}\right) = 6;$$

$$((\cdot)O(0;0;0)); z(O) = 0.$$

3.4. Симплекс-метод

Перша праця з лінійного програмування була надрукована Л.В. Канторовичем у 1939 році, але лише після відкриття Дж. Данцигом у 1947 році (деякі автори вказують на 1949 р.) симплекс-методу розв'язання задачі лінійного програмування до цього класу задач виникла зацікавленість. Симплекс-метод дає аналітичний розв'язок лінійної задачі математичного програмування.

Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування ґрунтується на переході від одного опорного плану до іншого таким чином, що кожного разу значення цільової функції зростає (за умов, що задача має оптимальний план та кожний із опорних планів не є надмірним). Під опорним планом розуміють невід'ємний базисний розв'язок задачі лінійного програмування. Нагадаємо: базисний план (розв'язок) – це рішення системи обмежень, у якому всі вільні змінні дорівнюють нулю, тобто геометрично базисний план відповідає одній з вершин або граней багатокутника розв'язків.

Стереометрично ідея методу полягає у тому, що:

- знаходять будь-яку вершину багатогранника розв'язків;
- рухаються вздовж того ребра, по якому функція зменшується (збільшується) до іншої вершини багатогранника розв'язків;
- мінімум (або максимум) функції знаходять при потрап-
лянні у вершину, з якої у всі боки функція зростає (або спадає).

Нагадаємо ще раз:

- вектор розв'язків, що задовольняє всім обмеженням, називається планом;
- план, що відповідає вершині багатогранника розв'язків (усі вільні змінні дорівнюють нулю), називається опорним планом;
- опорний план, що відповідає екстремальному значенню цільової функції, називається оптимальним планом.

Розглянемо використання симплекс-методу для вирішення задачі лінійного програмування на прикладі задачі про планування випуску продукції малим підприємством. У зв'язку з тим, що ця задача була розв'язана раніше і ми з'ясували, що функціональні планові обмеження виконуються автоматично, а також з метою спрощення пошуку, розглянемо тільки функціональні обмеження ресурсів:

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 \leq 350; \\ 2x_1 + 0,5x_2 \leq 240; \\ x_1 + x_2 \leq 150; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = f(x) = 10x_1 + 20x_2, \quad z \rightarrow \max;$$

$$(-z = -f(x) = -10x_1 - 20x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5; \quad z \rightarrow \min;).$$

Розв'язування задачі

Перетворимо функціональні обмеження-нерівності на обмеження-рівності шляхом уведення в обмеження-нерівності невід'ємних вільних невідомих y_1, y_2, y_3 (можна й x_3, x_4, x_5):

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 + y_1 = 350; (1) \\ 2x_1 + 0,5x_2 + y_2 = 240; (2) \\ x_1 + x_2 + y_3 = 150; (3) \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Перед початком виробництва $x_1 = x_2 = 0$, тоді

$$\begin{cases} y_1 = 350; (\text{вовна}) \\ y_2 = 240; (\text{шовк}) \\ y_3 = 150 \text{ (трудомісткість)} \end{cases}$$

Прибуток на початку становить $z = 10 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0$; кількість рівнянь-обмежень: $m = 3$; кількість невідомих: y_1, y_2, y_3, x_1, x_2 , $n = 5$; кількість вільних змінних: $(n - m) = 5 - 3 = 2$.

Базисне припустиме рішення задачі – це таке рішення, в якому всі вільні змінні дорівнюють нулю (вершина або грань багатокутника розв'язків). Тому початковий опорний план складає

$$x(1) = (0; 0; 350; 240; 150); \quad z(x(1)) = 0,$$

де $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ – вільні змінні, що відповідають рішенню задачі, коли продукція не виробляється. Надамо цю інформацію у вигляді симплекс-таблиці (табл. 3.1).

Таблиця 3.1. Перший опорний план задачі

x_1	x_2	b_i	
1	3,5	350	y_1 – вовняна тканина
2	0,5	240	y_2 – шовкова тканина
3	1	150	y_3 – наявність ресурсів в праці
10	20	0	$-z$ = доходи від виробництва

Цільова функція $z = 10x_1 + 20x_2 = 10 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0$; $-z = 0$.

Виробництво чоловічих костюмів x_2 дає більше доходів, отже почнемо його збільшувати залишаючи $x_1 = 0$, але існують обмеження. З першого рядка симплекс-таблиці (першого рівняння-обмеження на наявність вовняної тканини) чоловічих костюмів можна виготовити $350/3,5 = 100$ од.; з другого рядка симплекс-таблиці (другого рівняння-обмеження на наявність шовкової тканини) чоловічих костюмів можна виготовити $240/0,5 = 480$ од.; з третього рядка – $150/1 = 150$ од.

Визначальним є обмеження на вовняну тканину, тобто найбільша кількість чоловічих костюмів (за умов відсутності жіночих – $x_1 = 0$) дорівнює найменшому з трьох значень 100; 480; 150; $x_2 = 100$. Визначальний елемент симплекс-таблиці – коефіцієнт у першому рівнянні при другій вільній змінній (x_2), який дорівнює 3,5 та має назву центру (ключового елемента).

При виготовленні 100 чоловічих костюмів, тобто $x_2 = 100$, з першого рівняння-обмеження отримаємо ($x_1 = 0$)

$$\begin{cases} y_1 = 350 - 3,5x_2 - x_1; (1) \\ y_2 = 240 - 0,5x_2 - 2x_1; (2) \\ y_3 = 150 - x_2 - x_1; (3) \end{cases}$$

де $y_1 = 0$, тобто ресурсів вовняної тканини не буде;

з другого рівняння-обмеження отримаємо $y_2 = 240 - 0,5 \cdot 100 - 2 \cdot 0 = 190$ м шовкової тканини у запасах;

з третього рівняння-обмеження отримаємо $y_3 = 150 - 100 - 0 = 50$ людино-тижнів трудомісткості у запасах.

Прибуток складає $z = 10 \cdot 0 + 20 \cdot 100 = 2000$ грн; $-z = -2000$.

Цільова функція $z = 10x_1 + 20x_2$ через нові вільні змінні ($x_1 = 0$; $y_1 = 0$) має вигляд $z = 10x_1 + 20x_2 = 10x_1 + 2000 - 40/7y_1 - 40/7x_1 = 2000 - 40/7y_1 + 30/7x_1$, бо (з першого рівняння-обмеження) маємо

$$x_2 = 100 - y_1/3,5 - x_1/3,5.$$

Перетворимо систему рівнянь-обмежень замінюючи x_2 на вираз

$$\begin{cases} x_1 + 3,5(100 - y_1/3,5 - x_1/3,5) + y_1 = 350; (1') \\ 2x_1 + 0,5(100 - y_1/3,5 - x_1/3,5) + y_2 = 240; (2') \\ x_1 + (100 - y_1/3,5 - x_1/3,5) + y_3 = 150; (3') \\ x_2 + y_1/3,5 + x_1/3,5 = 100; (1'') \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y_2 = 190 - 13/7x_1 + 1/7y_1; (2') \\ y_3 = 50 - 5/7x_1 + 2/7y_1; (3') \\ x_2 = 100 - 2/7x_1 - 2/7y_1. (1'') \end{cases}$$

Другий опорний план задачі таким чином має вигляд

$$x(2) = (0; 100; 0; 190; 50; 100); z(x(2)) = 2000;$$

$$z(2) > z(1),$$

де $x_1 = 0$; $y_1 = 0$ – вільні змінні, що відповідають розв'язку задачі, якщо виробляються виключно чоловічі костюми ($x_2 = 100$). Знову надамо цю інформацію у вигляді симплекс-таблиці (табл. 3.2).

Таблиця 3.2. Другий опорний план задачі

	x_1	y_1	b_i	
$13/7 + 1/7 = 2$	$(13/7)(2)$	$(-1/7)(-1/2)$	190	y_2 – залишки вовняної тканини
$5/7 + 2/7 = 1$	$(5/7)(1)$	$(-2/7)(-1)$	50	y_3 – залишки ресурсів праці
$1 \cdot 1 - (2/7)2$	$(2/7)(1)$	$(2/7)(1)$	100	x_2 – виробництво чоловічих костюмів
$30/7 + 40/7 = 10$	$(30/7)(10)$	$(-40/7)(-20)$	-2000	$-z$ – цільова функція
$20 \cdot (2/7) = 40/7$	$z = 30/7x_1 - 40/7y_1 + 2000 = 2000 + (3/7) \cdot 0 - 40/7 \cdot 0 = 2000; -z = -2000$			

Кожен з елементів симплекс-таблиці має своє значення:

- у першому стовпчику (x_1) $13/7$ – кількість шовкової тканини, яка необхідна для виготовлення одного жіночого костюму;
- $5/7$ – необхідна кількість праці на виготовлення одного жіночого костюма;
- $30/7$ – прибуток від продажу одного жіночого костюма за рахунок зменшення кількості чоловічих костюмів на $2/7$;
- у другому стовпчику (y_1) збереження 1 м вовняної тканини (y_1) є результатом:
 - $1/7$ – збереження вовняної тканини $(-0,5)$;
 - $2/7$ – збереження ресурсів праці (-1) ;

40/7 – збиток від скорочення кількості чоловічих костюмів на 2/7 (–20).

Розглянувши цільову функцію $z = 2000 + 30/7x_1 - 40/7y_1$, бачимо, що збільшення виготовлення жіночих костюмів може збільшити прибуток, бо $x_1 \geq 0$.

Пригадуючи що $y_1 \geq 0$, знайдемо значення нової вільної змінної, яка задовольняє систему рівнянь-обмежень (2'), (3'), (1''), а також $y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, x_2 \geq 0$:

(2') дає, якщо $y_2 = 0, x_1 \approx 102$;

(3') дає, якщо $y_3 = 0, x_1 = 70$;

(1'') дає, якщо $x_2 = 0, x_1 = 350$.

Вільним є обмеження на ресурси праці: $x_1 = 70, y_1 = 0$ з рівняння (3').

Визначальний елемент симплекс-таблиці – коефіцієнт у рівнянні (3'), який дорівнює (5/7) і відіграє роль нового центру, або ключового елемента.

При виготовленні 70 жіночих костюмів, тобто $x_1 = 70$, з рівняння (3') отримаємо $y_3 = 0$ (нова базова змінна), тоді

$$y_3 = 50 - 5/7x_1 + 2/7y_1; (3')$$

$$x_1 = 70 - 7/5y_3 + 2/5y_1. (3'')$$

Відповідно прибуток складає $z = 2000 - 40/7y_1 + 30/7x_1 = 2000 - 40/7 \cdot 0 + (30/7)70 = 2300$ грн.

Перетворимо систему рівнянь-обмежень, замінюючи x_1 на його вираз і враховуючи, що нові базові змінні $y_1 = 0; y_3 = 0$:

$$\begin{cases} y_2 = 190 - 13/7(70 - 7/5y_3 + 2/5y_1) + 1/7y_1; (2'') \\ x_2 = 100 - 2/7(70 - 7/5y_3 + 2/5y_1) - 2/7y_1; (1''') \\ x_1 = 70 - 7/5y_3 + 2/5y_1, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y_2 = 60 + 13/5 y_3 - 21/35 y_1; (2'') \\ x_2 = 80 + 2/5 y_3 - 14/35 y_1; (1''') \\ x_1 = 70 - 7/5 y_3 + 2/5 y_1. (3'') \end{cases}$$

Перетворена цільова функція

$$\begin{aligned} z &= 2000 - 40/7 y_1 + 30/7 x_1 = 2000 - 40/7 y_1 + \\ &+ (30/7) \cdot (70 - 7/5 y_3 + 2/5 y_1) = 2300 - 6 y_3 - 4 y_1; \\ z &= 2300 - 6 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 2300; -z = -2300. \end{aligned}$$

Третій опорний план задачі має вигляд

$$\begin{aligned} x(3) &= (70; 80; 0; 60; 0); z(3) = 2300 \text{ грн}; \\ z(3) &> z(1), \end{aligned}$$

де $y_1 = 0$; $y_3 = 0$ – вільні змінні, що відповідають розв'язку задачі, якщо виробляються 70 жіночих та 80 чоловічих костюмів. Надамо цю інформацію у вигляді симплекс-таблиці (табл. 3.3).

Таблиця 3.3. Третій опорний план задачі (оптимальний)

y_3	y_1	Опорний розв'язок	
13/5	-21/35	60	y_2 – залишки шовкової тканини
2/5	-14/35	80	x_2 – кількість чоловічих костюмів
-5/7	2/5	70	x_1 – кількість жіночих костюмів
-6	-4	-2300	$-z$ – цільова функція

Отже, $z = -6 y_3 - 4 y_1 + 2300$; $-z = -2300$.

Збільшити прибуток неможливо у зв'язку з тим, що вільні змінні ($y_i > 0$), що наявні у цільовій функції, мають від'ємні коефіцієнти, у той час як самі вони додатні. Отриманий план $x(3)$ є оптимальним:

$$x = (x_1^* = 70; x_2^* = 80; y_1 = 0; y_2^* = 60; y_3 = 0).$$

Залишки шовкової тканини складають 60 м, прибуток складатиме 2300 грн, якщо буде виготовлено 70 жіночих та 80 чоловічих костюмів.

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Дефіцитні (критичні) ресурси – це ресурси, які використані повністю, у нашому випадку це вовна та працевитрати.

Надамо звичайний вигляд симплекс-таблиці розв'язку задачі (табл. 3.4 – 3.6).

Таблиця 3.4. Перша ітерація

i	Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Симплекс $\theta = b_i/a_{ij}$	Контроль
1	x_3	1 a_{11}	3,5 a_{12}	1 a_{13}	0 a_{14}	0 a_{15}	350	$350/3,5 = 100$	355,5
2	x_4	2 a_{21}	0,5 a_{22}	0 a_{23}	1 a_{24}	0 a_{25}	240	$240/0,5 = 480$	243,5
3	x_5	1 a_{31}	1 a_{32}	0 a_{33}	0 a_{34}	1 a_{35}	150	$150/1 = 150$	153
4	$z(x)$	10 C_1	20 C_2	0 C_3	0 C_4	0 C_5	0	–	30

Відповідно $z(x) = (-z); z(x) - C_0 - C_1x_1 - C_2x_2 - C_3x_3 - C_4x_4 - C_5x_5 = 0$;

$z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + C_5x_5 = 0 + 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 10x_1 + 20x_2$;

$(-z) = -10x_1 - 20x_2; \quad z \rightarrow \min.$

Таблиця 3.5. Друга ітерація

j	1	2	3	4	5				
i	Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	Симплекс $\theta = b_i/a_{ij}$	Контроль
1	x_2	2/7	1	2/7	0	0	100	$100/(2/7) = 350$	$101\frac{4}{7}$
2	x_4	13/7	0	-1/7	1	0	190	$190/(13/7) \approx 102$	$192\frac{5}{7}$
3	x_5	5/7	0	-2/7	0	1	50	$50/(5/7) = 70$	$51\frac{3}{7}$
4	$z(x)$	30/7	0	-40/7	0	0	-2000	–	$-2001\frac{3}{7}$

Таким чином, $x_2 = 100 - 2/7x_1 - 2/7x_3$; $z(x) + 30/7x_1 - 40/7x_3 = -2000$;

$$z = 10x_1 + 20(100 - 2/7x_1 - 2/7x_3) = 2000 + 30/7x_1 - 40/7x_3;$$

$$-z(x) = -2000 + 40/7x_3 - 30/7x_1 = -2000.$$

Таблиця 3.6. Третя ітерація

	<i>j</i>	1	2	3	4	5			
<i>i</i>	Базисні змінні	x_1 (жіночі)	x_2 (чоловічі)	x_3 (вовна)	x_4 (шовк)	x_5 (праця)	b_i	Симплекс $\theta = b_i/a_{ij}$	Конт- роль
1	x_2 (чоловічі)	0	1	2/5	0	-2/5	80	—	81
2	x_4 (шовк)	0	0	3/5	1	-13/5	60	—	59
3	x_1 (жіночі)	1	0	-2/5	0	7/5	70	—	72
4	$z(x)$	0	0	-4	0	-6	—	—	
							2300		

Отже,

$$x_1 = 70 + 2/5x_3 - 7/5x_5; z(x) - 4x_3 - 6x_5 = -2300;$$

$$z = 2000 + 30/7(70 + 2/5x_3 - 7/5x_5) - 40/7x_5 = 2300 - 6x_5 - 4x_3;$$

$$-z = -2300 + 6x_5 + 4x_3 = -2300; x_3 = x_5 = 0.$$

У цільовій функції всі вільні змінні від'ємні – опорний план є оптимальним:

$$x^* = (70; 80; 0; 60; 0).$$

Задача розв'язана:

$$z^*_{\max} = -(-z)_{\min} = 2300.$$

Необмеженість задачі лінійного програмування виникає, коли в якомусь стовпчику змінних у випадку мінімізації $C_j > 0$, всі елементи таблиці $a_{ij} \leq 0$; у випадку максимізації $C_j < 0$, і всі $a_{ij} \leq 0$. Це означає, що область припустимих розв'язків задачі не обмежена знизу (мінімізація) або зверху (максимізація).

Графічну інтерпретацію симплекс-методу подано на рис. 3.9.

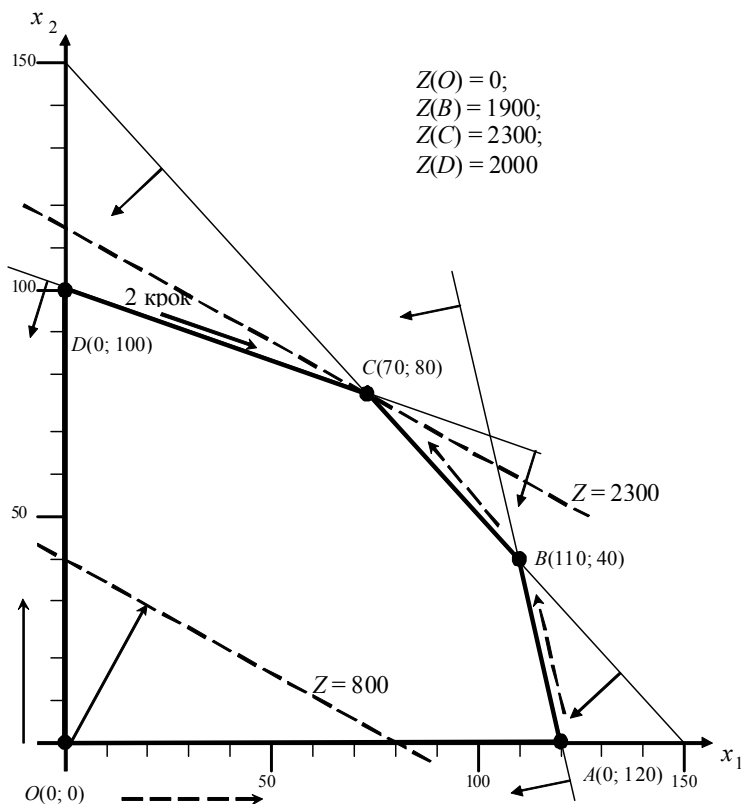


Рис. 3.9. Графічна інтерпретація симплекс-методу

3.5. Критерій оптимальності за симплекс-таблицею

Опорний план є оптимальним, якщо форма мінімізується (або максимізується) і у рядку цільової функції відсутні додатні числа (або від'ємні числа), за винятком стовпчика опорного розв'язку (b_i).

Коефіцієнти рядка цільової функції інтерпретують як приріст цільової функції при збільшенні вільної невідомої на одиницю. Приріст додатній, якщо коефіцієнт від'ємний, і навпаки від'ємний, якщо коефіцієнт додатний.

Стовпчик j є вирішальним, коли в ньому оцінка коефіцієнта при відомій у цільовій функції найбільша за модулем, тобто $|C_j| = \max$.

Змінну x_i у вирішальному рядку знаходять за співвідношенням $\min\{b_i/a_{ij}\} = \theta$, ($a_{ij} > 0$; $b_i \geq 0$), яке має назву симплекса, що і дає в свою чергу назву методу. Відповідний елемент a_{ij} має назву ключового елемента, або центру таблиці.

Вільну змінну, яка відповідає вирішальному стовпчику, залучають до базисних змінних, а базисну змінну, яка відповідає мінімальному симплексу, відповідно перетворюють на вільну змінну.

Елементи симплексного рядка нової таблиці дорівнюють елементам старої таблиці, поділеним на a_{ij} – ключовий елемент (центр). Усі інші елементи вирішального стовпчика прирівнюють до 0 (за виключенням ключового, який дорівнює одиниці) шляхом жорданового перетворення; це стосується також цільової функції.

Нескінченна множина оптимальних планів можлива, якщо у рядку цільової функції оптимального плану хоча б одна вільна змінна має нульову оцінку (обмеження паралельне цільовій функції). Оптимальне рішення у цьому випадку вироджене, тобто ранг системи рівнянь-обмежень більший за кількість не нульових координат вектора розв'язків.

Послідовність використання симплекс-методу:

- звести задачу лінійного програмування до задачі мінімізації у канонічній формі (обмеження-рівняння; $b_i \geq 0$);
- поділити змінні на базисні та вільні й отримати базисне припустиме рішення (базисні змінні невід'ємні; вільні змінні дорівнюють нулю);
- знайти вираз базисних змінних та цільової функції через вільні змінні;

- за знаком коефіцієнтів при невідомих ($C_j \leq 0$) у цільовій функції з'ясувати, чи є рішення оптимальне $z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ ($C_j \geq 0$ – мінімізація); або яку вільну змінну можливо підвищити від нуля та перевести у базис і відповідно яку базисну змінну перевести у вільну змінну;
- знайти мінімальне додатне співвідношення b_i вільних членів рівнянь-обмежень до коефіцієнтів a_{ij} при новій вільній змінній, тобто з'ясувати, яку базисну змінну необхідно перевести у вільні змінні;
- перетворити умови-обмеження та цільову функцію у вираз залежно від нових вільних змінних.

Приклад 3.3

Розглянемо розв'язання задачі лінійного програмування, якщо в обмеженнях є нерівності двох напрямків. Потрібно максимізувати функцію

$$z = 4x_1 + 2x_2 - x_3,$$

за умов обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 8; \\ x_2 + x_3 \leq 10; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30. \end{cases}$$

Перетворимо першу нерівність за допомогою змінної x_4 :

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 8.$$

До цих трьох обмежень додамо штучні змінні y_1, y_2, y_3 (x_5, x_6, x_7).

Цільова функція набуває вигляду

$$z = 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4;$$

обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 8; \\ 0x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0y_1 + y_2 + 0y_3 = 10; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0y_1 + 0y_2 + y_3 = 30. \end{cases}$$

Вектори утворюють тривимірний базис у загальному семивимірному просторі $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_1(0); y_2(1); y_3(0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кількість невідомих $n = 7$; обмежень $m = 3$; вільних змінних $n - m = 7 - 3 = 4$.

Базові змінні y_1, y_2, y_3 ; вільні змінні x_1, x_2, x_3, x_4 . Базове опорне рішення $x(0; 0; 0; 0; 1; 1; 1), z(x) = 0$.

Розв'язок задачі подамо у вигляді табл. 3.7.

Таблиця 3.7. Розв'язання задачі симплекс-методом

Номер ітерації	i	Базисні змінні	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	b_i	$\theta = b_i/a_{ij}$
I (1)	1	y_1	1	1	1	-1	1	0	0	8	8/1
	2	y_2	0	1	1	0	0	1	0	10	10/0
	3	y_3	1	1	2	0	0	0	1	30	30/1
	4	$-z$	4	2	-1	0	0	0	0	0	-
II (2)	1	x_2	1	1	1	-1	1	0	0	8	-8/1
	2	y_2	-1	0	0	1	-1	1	0	2	2/1
	3	y_3	0	0	1	1	-1	0	1	22	22/1
	4	$-z$	2	0	-3	2	-2	0	0	-16	-
III (3)	1	x_2	0	1	1	0	0	1	0	10	10/0
	2	x_4	-1	0	0	1	-1	1	0	2	2/-1
	3	y_3	1	0	1	0	0	-1	1	20	20/1
	4	$-z$	4	0	-3	0	0	-2	0	-20	-
IV (4)	1	x_2	0	1	1	0	0	1	0	10	10/1
	2	x_4	0	0	1	1	-1	0	1	22	22/0
	3	x_1	1	0	1	0	0	-1	1	20	20/-1
	4	$-z$	0	0	-7	0	0	2	-4	-100	-
V (5)	1	y_2	0	1	1	0	0	1	0	10	-
	2	x_4	0	0	1	1	-1	0	1	22	-
	3	x_1	1	1	2	0	0	0	1	30	-
	4	$-z$	0	-2	-9	0	0	0	-4	-120	-

Таким чином,

$$x^* = (30; 0; 0; 22; 0; 10; 0); z = 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \cdot 30 = 120;$$

$$z = 120 - 2x_2 - 9x_3 - 4y_3 = 120.$$

Приклад 3.4. Метод штучного запасу

Розглянемо на прикладі задачі про мале підприємство. Запишемо задачу у формі основної задачі: знайти максимум функції $z = 10x_1 + 20x_2$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 + x_5 = 350; (1) \\ 2x_1 + 0,5x_2 + x_6 = 240; (2) \\ x_1 + x_2 + x_7 = 150; (3) \\ x_1 + x_2 - x_3 = 110; (4) \\ 10x_1 + 20x_2 - x_4 = 1400; (5) \\ x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, \dots, 7. \end{cases}$$

Розглянемо вектори при невідомих:

1	3,5	0	0	1	0	0
2	0,5	0	0	0	1	0

$$P_1 = (1); P_2 = (1); P_3 = (0); P_4 = (0); P_5 = (0); P_6 = (0); P_7 = (1).$$

1	1	-1	0	0	0	0
10	20	0	-1	0	0	0

Невідомих $n = 7$.

Обмежень $m = 5$.

Вільних змінних $n - m = 2$.

Базисних $7 - 2 = 5$.

Серед векторів $P_1, P_2, \dots, P_7$ тільки три одиничних, хоча для утворення базис-простору потрібно п'ять. Тому в лівій частині (4) та (5) додамо по одній штучній змінній x_8 та x_9 . Поширена задача лінійного програмування матиме такий вигляд:

знайти максимум функції

$$z = 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + \\ + 1x_7 - Mx_8 - Mx_9; \rightarrow \max,$$

де M – деяке достатньо велике невід'ємне число, за умов

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3,5x_2 + x_5 = 350; (1) \\ 2x_1 + 0,5x_2 + x_6 = 240; (2) \\ x_1 + x_2 + x_7 = 150; (3) \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_8 = 110; (4) \\ 10x_1 + 20x_2 - x_4 + x_9 = 1400; (5) \\ x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, \dots, 9; n = 9; m = 5. \end{array} \right.$$

Поширена задача має опорний план $z = (0; 0; 0; 0; 350; 240; 150; 110; 1400)$, визначений системою п'яти одиничних векторів P_5, P_6, P_7, P_8, P_9 . Перетворена система рівнянь-обмежень у векторній формі має вигляд

$$P_0 = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_9 P_9;$$

350

240

де $P_0 = (150).$

110

1400

Цільова функція

$$z = 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + \\ + 0x_7 - Mx_8 - Mx_9; \rightarrow \max$$

$$(z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + C_5x_5 + C_6x_6 + \\ + C_7x_7 - Mx_8 - Mx_9).$$

Розв'язок:

$$z^* = (70; 80; 40; 900; 0; 60; 0);$$

$$(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7);$$

$$z^* = 23000 - 4x_5 - 6x_7;$$

$$z^* = 23000; x_1 = 70; x_2 = 80.$$

Таблиця 3.8. Симплекс-таблиця

Номер ітерації	Коефіцієнти			C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	P_0/a_{ij} Симплекс b_i/a_{ij}
	i	Базис	C_6	$P_0(b_i)$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
1	1	P_5	0	350	1	3,5	0	0	1	0	0	0	100
	2	P_6	0	240	2	0,5	0	0	0	1	0	0	480
	3	P_7	0	150	1	1	0	0	0	0	1	0	150
	4	P_8	$-M$	110	1	1	-1	0	0	0	0	1	110
(m)	5	P_9	$-M$	1400	10	20	0	-1	0	0	0	0	70
(m+1)	6			0	-10	-20	0	0	0	0	0		
(m+2)	7			-1510	-11	-21	1	1	0	0	0	0	0
2	1	P_5	0	105	-0,75	0	0	0,175	1	0	0	0	-
	2	P_6	0	205	1,75	0	0	0,025	0	1	0	0	117
	3	P_7	0	80	0,5	0	0	0,05	0	0	1	0	160
	4	P_8	$-M$	40	0,5	0	-1	0,05	0	0	0	1	80
	5	P_2	20	70	0,5	1	0	-0,05	0	0	0	0	140
	6			1400	0	0	0	-1	0	0	0	0	
	7			-40	-0,5	0	0	-0,05	0	0	0	0	

Продовж. табл. 3.8

Номер ітерації	Коефіцієнти				C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	P_0/a_{ij} Симплекс
	i	Базис	C_6	$P_0(b_i)$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	b_i/a_{ij}
3	1	P_4	0	600	-429	0	0	1	5,714	0	0	0		—
	2	P_6	0	190	1,86	0	0	0	-0,143	1	0	0		102
	3	P_7	0	50	0,715	0	0	0	-0,286	0	1	0		70
	4	P_8	-M	10	0,715	0	-1	0	-0,286	0	0	1		14
	5	P_2	20	100	0,286	1	0	0	0,286	0	0	0		350
	6			2000	5,72	20	0	0	5,72	0	0	0		
	7			-10	-0,715	0	1	0	0,286	0	0	-1		
4	1	P_4	0	660	0	0	-6	1	4	0	0		—	
	2	P_6	0	164	0	0	-2,6	0	0,6	1	0		—	
	3	P_7	0	40	0	0	1	0	0	0	1		—	
	4	P_1	10	14	1	0	-1,4	0	-0,4	0	0		—	
	5	P_2	20	96	0	1	0,4	0	0,4	0	0		—	
	6			2060	0	0	-6	0	4	0	0		—	
5	1	P_4	0	900	0	0	0	1	4	0	6		—	
	2	P_6	0	60	0	0	0	0	0,6	1	-2,6		—	
	3	P_3	0	40	0	0	1	0	0	0	1		—	
	4	P_1	10	70	1	0	0	0	-0,4	0	1,4		—	
	5	P_2	20	80	0	1	0	0	0,4	0	-0,4		—	
	6			2300	0	0	0	0	4	0	6		—	

Порядок заповнення таблиці

Перша ітерація:

1. Рядок $P_1, P_2, \dots, P_n$ відповідає коефіцієнтам лінійної форми, яка аналізується на максимум (x) (поширена задача).
2. У стовпчику C_6 записують ті ж самі коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, які відповідають базовим змінним поширеної задачі.
3. У стовпчику P_0 надають значення невід'ємних компонент опорного плану (праві частини рівнянь – обмеження поширеної задачі).
4. Матриця P_j відповідає матриці коефіцієнтів рівнянь-обмежень ($m \times n$).
5. Рядок $(m+1)$, у нашому випадку (6), та $(m+2)$ – відповідно (7) заповнюють таким чином:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -15 \ 10 \cdot M \\ \hline \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{у рядок } (m+2) = 7; \\ \text{у рядок } (m+1) = 6. \end{array}$$

Стовпчик $P_0 = \sum_{i=1}^m C_i b_i$ – скалярний добуток (P_0 та C_6) – отримаємо два значення.

Стовпчики $P_1, P_2, \dots, P_n$ заповнюють за формулою (C_6 та P_j) – C_j , наприклад

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 1 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} - 20 = -M - 20M - 20 = -20 - 21M$$

(20 – рядок $(m+1)$, $21M$ – рядок $(m+2)$).

6. У рядку $(m + 2)$ знаходять найменше значення з урахуванням знака від'ємного числа (у нашому випадку, -21) і відповідний стовпчик $(P_2) P_j$. Цей вектор буде введено у баланс на наступній ітерації.

7. Знаходять вектор, який буде вилучено з базису, а також симплексне відношення для невід'ємних коефіцієнтів стовпчика $(P_2) P_j$: $\theta = \frac{b_i}{a_{ij}}$, $(1400/20 = 70)$ та обирається рядок, який відповідає $\theta_{\min}$ (5-й рядок у нашому прикладі).

На перетині стовпчика P_j та рядка, який відповідає $\theta_{\min}$, знаходиться ключовий елемент a_{ji} .

Наступна ітерація:

1. Заповнюють рядок, який відповідає новій базисній змінній (P_j) , (P_2) . У стовпчику C_6 записують коефіцієнт C_j ($C_2 = 20$).

2. Рядок нової базисної змінної перетворюють з попереднього таким чином, щоб коефіцієнт $a_{ij} = 1$ (у нашому випадку, ділимо на 20).

3. Інші рядки базисних змінних перетворюють за допомогою жорданового методу та рядка нової базисної змінної таким чином, щоб у стовпчику $P_j(P_2)$ утворився одиничний вектор.

4. Далі рухаються за схемою першої ітерації, починаючи з п'ятого пункту.

Висновки до четвертої ітерації:

1. Після вилучення з базису всіх штучних векторів переходять на рядок $(m + 1)$.

2. Якщо з базису вилучені не всі штучні вектори, а рядок $(m + 2)$ не містить від'ємних величин, тоді задача не має розв'язку.

3. Якщо всі штучні змінні вилучені з базису, а рядок $(m + 1)$ не має від'ємних величин, то це означає, що знайдений максимум.

В оптимальному рішенні задачі критичним ресурсам відповідають вектори вільних змінних, бо вектори базисних змінних відповідають ресурсам, які не дорівнюють нулеві, тобто ресурси не використані повністю.

Розглянемо економічний зміст отриманих результатів:

I. Дефіцитні (критичні) ресурси – вовна (P_5) та трудомісткість (P_7), які використані повністю; недефіцитний ресурс – шовк (P_6) – залишок 60 метрів.

II. Обмеження на кількість костюмів не є критичним, бо загальний вибір костюмів (P_3) на 40 одиниць більше обмеження $70 + 80 = 150 - 110 = 40$; обмеження на прибуток (P_4) теж не є критичним, бо загальний прибуток на 900 одиниць більше обмеження $2300 - 1400 = 900$.

III. Збільшення на одиницю критичного ресурсу на вовну (P_5) збільшує прибуток на 4 грошові одиниці; збільшує кількість чоловічих костюмів на 0,4; зменшує кількість жіночих на -0,4; утворює залишки шовку на 0,6 одиниць:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 150; \\ x_1 + 3,5x_2 = 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 69,6; & \Delta x_1 = 69,6 - 70 = -0,4; \\ x_2 = 80,4; & \Delta x_2 = 80,4 - 80 = 0,4. \end{cases}$$

Залишок шовку від жіночого костюму $(0,4) + 2 \cdot 0,4 = 0,8$ метру. Витрати шовку на чоловічий костюм $(0,4) - 0,5 \cdot 0,4 = -0,2$ метру. Загальний залишок шовкової тканини $0,8 - 0,2 = 0,6$ метру.

Зміна загального прибутку складає $z(69,6; 80,4) = 10 \cdot 69,6 + 20 \cdot 80,4 = 2304$; $\Delta z = 2304 - 2300 = 4$ грошові одиниці.

IV. Збільшення на одиницю критичного ресурсу на працевитрати (P_7) збільшує прибуток на 6 грошових одиниць; збільшує кількість жіночих костюмів на 1,4 одиниці; зменшує

кількість чоловічих костюмів на $-0,4$ одиниці; вимагає додаткового шовку $-2,6$ одиниць:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 150 + 1 = 151; \\ x_1 + 3,5x_2 = 350; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 71,4; \quad \Delta x_1 = 71,4 - 70 = -1,4; \\ x_2 = 79,6; \quad \Delta x_2 = 79,6 - 80 = 0,4; \end{cases}$$

Залишок шовку від чоловічого костюму $(0,4) + 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$ метру. Витрати шовку на жіночий костюм $(1,4) - 1,4 \cdot 2 = -2,8$ метру. Загальний брак шовкової тканини $0,2 - 2,8 = -2,6$ метру.

V. При виготовленні нового виробу (дитячий костюм), на який потрібно вовни $0,5$ метру (P_5); шовку $0,3$ метру (P_6); працевитрат $0,4$ людино-тижні (P_7), витрати на один додатковий дитячий костюм складають $\Delta z = 0,5 \cdot 4 + 0,3 \cdot 0 + 0,4 \cdot 6 = 4,4$ грошові одиниці.

Таким чином, є сенс реалізувати цей дитячий костюм на $4,4$ одиниці або більше його собівартості. У цьому випадку рівень прибутковості буде збережено.

VI. Для того щоб реалізувати ресурси замість виробництва, ціна на них повинна бути більша ніж собівартість на вовну на 4 одиниці, на шовк на 0 одиниць, на працевитрати на 6 одиниць.

За цих умов рівень прибутковості буде дорівнювати попередньому.

Зауваження: усі ці міркування мають сенс, доки отриманий розв'язок задачі не зсувається в іншу вершину багатокутника розв'язків. Наприклад, після реалізації 60 метрів шовку обмеження на шовк стає критичним і надалі шовк потрібно реалізувати дорожче собівартості, щоб зберегти рівень прибутковості.

Контрольні запитання

1. У чому сутність задач лінійного програмування? Що таке цільова функція? Наведіть приклади з економіки.
2. Що таке базисне рішення, припустиме рішення та оптимальне рішення?
3. Як графічно відображається система обмежень для задачі лінійного програмування?
4. Які особливі випадки графічного зображення розв'язків систем обмежень задачі лінійного програмування ви можете назвати?
5. У чому сутність симплексного методу? Що таке опорний план?
6. Як розв'язується задача лінійного програмування стереометрично?
7. Чим відрізняється розв'язок задач симплексним методом?
8. Як визначити критерій оптимальності за симплекс-таблицею?
9. Яка послідовність використання симплекс-методу?

Практичні завдання

1. Розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0. \end{cases}$$

Визначте, скільки розв'язків має система?

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 11x_4 = -4. \end{cases}$$

3. Знайти графічним методом максимум лінійної функції $z = x_1 + 4x_2$ за умови, що невідомі x_1 і x_2 задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. Нехай задано систему лінійних нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайти графічним методом мінімум лінійної функції $z = 2x_1 + 3x_2$.



Тема 4. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

4.1. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряжених задач лінійного програмування

4.2. Економічна інтерпретація двоїстості задачі лінійного програмування

4.3. Співвідношення невідомих прямої та двоїстої задачі

4.4. Економічна і математична постановка транспортної задачі. Умови існування розв'язку транспортної задачі

4.5. Застосування діагонального методу та методу найменшої відстані для розв'язання транспортної задачі

4.6. Застосування двоїстої задачі до транспортної

4.1. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряжених задач лінійного програмування

Дві задачі лінійного програмування називаються взаємодвоїстими, якщо виконуються такі умови:

1. Матриці системи обмежень двох задач є транспонованими відносно одна одної.

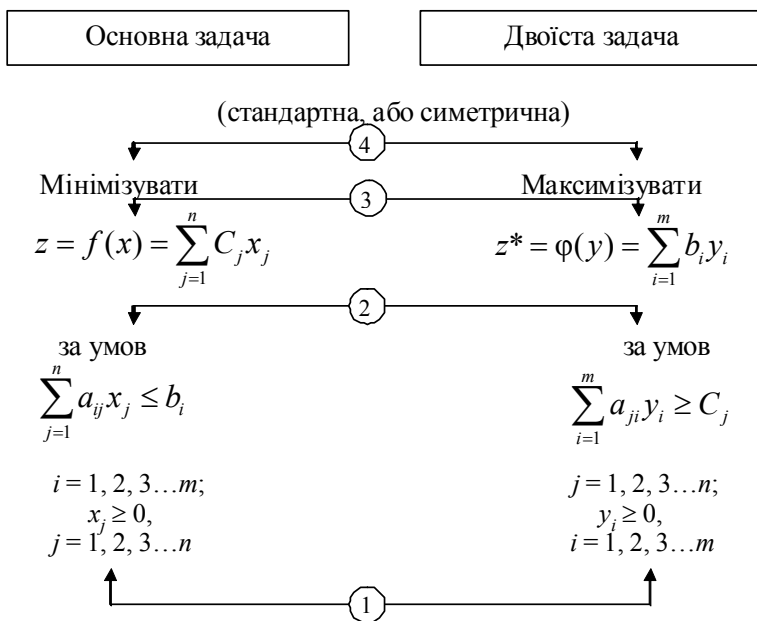
2. Система обмежень складається з нерівностей, які в обох задачах направлені в протилежні боки.

3. Коефіцієнти оптимізуючої форми однієї задачі є вільними членами системи обмежень другої задачі і навпаки.

4. Форми в обох задачах оптимізуються протилежно: перша – на максимум, друга – на мінімум.

Зв'язок розв'язків взаємно-спряжених задач лінійного програмування полягає у тому, що розв'язуючи симплексним методом одну з них, автоматично отримують розв'язок другої задачі. Оптимальні розв'язки двоїстих задач збігаються.

Наведемо приклади основної (вихідної) та двоїстої (до вихідної) задачі.



Ось чому стандартна задача лінійного програмування має другу назву – симетрична (канонічна форма основної задачі, стандартна – двоїстої).

Основна задача
(мінімізувати)

$$z = f(x) = \sum_{j=1}^n C_j x_j,$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i,$$

$i = 1, 2, 3 \dots m;$

$x_j \geq 0,$

$j = 1, 2, 3 \dots n.$

n -змінних,

m -обмежень

Двоїста задача
(максимізувати)

$$z^* = \varphi(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i,$$

за умов

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \geq C_j,$$

$j = 1, 2, 3 \dots n;$

$y_i \geq 0,$

$i = 1, 2, 3 \dots m.$

m -змінних,

n -обмежень

$$z_{\min} = f_{\min}(x) \equiv z^*_{\max} = \varphi_{\max}(y).$$

4.2. Економічна інтерпретація двоїстості задачі лінійного програмування

Приклад 4.1. Виробнича задача

Підприємство може виготовити три різновиди продукції. Обсяг ресурсів обмежений, вартість продукції та витрати на кожен з різновидів продукції відомі і наведені у табл. 4.1.

Таблиця 4.1. Ресурси підприємства

Ресурси	Продукція, x_j			Обсяг ресурсів	Вартість одиниці ресурсу y_i
	x_1	x_2	x_3		
Робоча сила, людино-години	15 a_{11}	20 a_{12}	25 a_{13}	1200 a_{14}	$y_1(x_4)$
Сировина, т	2 a_{21}	3 a_{22}	2,5 a_{23}	150 a_{24}	$y_2(x_5)$
Енерговитрати, кВт-годин	35 a_{31}	60 a_{32}	60 a_{33}	3000 a_{34}	$y_3(x_6)$
Вартість одиниці продукції	300 C_1	250 C_2	450 C_3	—	—

Потрібно знайти кількість кожного з різновидів продукції, які забезпечують найбільшу вартість загальної продукції.

Розв'язування задачі

Запишемо економіко-математичні моделі прямої та двоїстої задачі: позначимо x_j – кількість одиниць j -ї продукції; y_i – вартість одиниці i -го ресурсу, тоді маємо:

Пряма задача	Двоїста задача
Цільова функція задач	
$\max z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3$	$\min z^* = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3$
Функціональні обмеження	
$15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \leq 1200;$	$15y_1 + 2y_2 + 35y_3 \geq 300;$
$2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \leq 150;$	$20y_1 + 3y_2 + 60y_3 \geq 250;$
$35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \leq 3000$	$25y_1 + 2,5y_2 + 60y_3 \geq 450$
Нефункціональні обмеження	
$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$	$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0$
Розв'язок задачі	
$z(x^*) = z(60; 0; 12; 0; 0; 180) =$ $= 23400;$	$z^*(y^*) = z^*(12; 60; 0; 0; 170; 0) =$ $= 23400;$
$x_1 = 60; x_2 = 0; x_3 = 12;$	$y_1 = 12; y_2 = 60; y_3 = 0;$
$x_4 = 0; x_5 = 0; x_6 = 180$	$y_4 = 0; y_5 = 170; y_6 = 0$

Задачу двоїстості за Л.В. Канторовичем сформулюємо таким чином: якою повинна бути ціна y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих запасах b_i та прибутках від одиниці продукції C_j мінімізувались загальні витрати

$$z^* = \varphi(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \text{ або у нашому прикладі } z^* = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3?$$

Змінні y_i розглядають як ціни, але вони мають назву неявних, облікових, об'єктивно-зумовлених. Вартість ресурсів,

що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, x_i , становить

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq C_j.$$

З економічної точки зору вартість ресурсів, використаних на виготовлення одиниці продукції, не може бути меншою, ніж вартість самої одиниці продукції, інакше це означає існування вартості частини одиниці продукції. Для якої завгодно виробничої програми вартість виробленої продукції не перевищує загальної вартості наявних ресурсів.

Проаналізуємо отримані результати. Розв'язок прямої задачі вказує на те, що першого виду продукції x_1 необхідно виробити 60 одиниць, третього виду продукції x_3 12 одиниць, другий вид продукції виробляти не потрібно ($x_2 = 0$).

Використані повністю ресурси робочої сили ($x_4 = 0$) та сировини ($x_5 = 0$). Залишок енерговитрат складає $x_6 = 180$ кВт-годин. Розв'язок двоїстої задачі вказує на те, що перший ($y_1 > 0$) та другий ($y_2 > 0$) ресурси використані повністю, третій маємо в надлишку ($y_3 = 0$). Додавання першого обмеженого ресурсу на одиницю збільшує цільову функцію прямої задачі на 12 одиниць (зростає вартість, бо $y_1 = 12$), додавання другого обмеженого ресурсу на одиницю збільшує цільову функцію $z(x)$ на 60 одиниць ($y_2 = 60$). Збільшення третього ресурсу (необмеженого) не викликає змін цільової функції. Виробництво продукції першого та третього видів продукції не є збитковим, якщо $y_4 = 0$, $y_6 = 0$; якщо $y_5 = 170$, то виготовлення одиниці другого виду продукції викликає збиток у розмірі 170 грошових одиниць. Перевіримо це таким чином: вартість ресурсів на другу продукцію складає

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 = 20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 420,$$

одночасно вартість другого виробу складає 250, тобто збиток дорівнює $420 - 250 = 170$ грн.

Арифметична перевірка задач

Основна задача

$15 \cdot 60 + 20 \cdot 0 + 25 \cdot 12 = 1200$	$x_4 = 0$	$y_1 = 12 > 0$
$2 \cdot 60 + 3 \cdot 0 + 2,5 \cdot 12 = 150$	$x_5 = 0$	$y_2 = 60 > 0$
$35 \cdot 60 + 60 \cdot 0 + 60 \cdot 12 = 2820 < 3000$	$x_6 = 180 > 0$	$y_3 = 0$

Двоїста задача

$15 \cdot 12 + 2 \cdot 60 + 35 \cdot 0 = 300$	$y_4 = 0$	$x_1 = 60 > 0$
$20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 420 > 250$	$y_5 = 170 > 0$	$x_2 = 0$
$25 \cdot 12 + 2,5 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 450$	$y_6 = 0$	$x_3 = 12 > 0$

Стійкість оптимальних планів прямої та двоїстої задач обумовлена зміною обмежень Δb_i та ΔC_j , які не викликають порушення умов оптимуму. У нашому прикладі $\Delta b_3 < 180$; відповідно $\Delta C_2 < 170$; $\Delta b_2 = \Delta b_1 = 0$. Це означає, що збільшення без обмежень та зменшення менш ніж на 180 енерговитрат не змінює оптимального плану задачі.

В оптимальному плані двоїстої задачі значення змінної (y_i^*) чисельно дорівнює частковій похідній функції $\varphi_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ за аргументом y_i^* , тобто

$$\frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*.$$

Це співвідношення вказує на те, що зміна b_i викликає зміну $\varphi_{\max}$, яка визначається зміною y_i^* . З наведеного вище прикладу можна зробити наступний висновок: коли обмеження не є критичним, тоді зміна ресурсу b_i в околиці оптимального плану не викликає зміни цільової функції. Тому важливо визначити інтервали зміни кожного з вільних членів системи обмежень основної задачі або коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі, в яких оптимальний план двоїстої задачі не змінюється. Це має місце для усіх значень $(b_i + \Delta b_i)$, при

яких стовпчик вектора P_0 останньої симплекс-таблиці розв'язання основної задачі не містить від'ємних чисел, тобто коли серед компонентів вектора

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \dots \\ b_n + \Delta b_n \end{pmatrix}$$

відсутні від'ємні значення. Матриця B^{-1} зворотна матриці B , яка утворена з компонентів векторів базису, що визначає оптимальний план основної задачі лінійного програмування.

Таким чином, якщо знайдено оптимальне рішення основної задачі лінійного програмування, тоді не важко провести аналіз стійкості двоїстих оцінок відносно зміни b_i , оцінити ступінь впливу зміни b_i на оптимальне значення цільової функції основної задачі, а також обрати найбільш ефективний варіант можливих змін b_i .

Приклад 4.2. Двоїста задача

Розглянемо зразок побудови та розв'язання двоїстої задачі на прикладі задачі з двома невідомими та двома обмеженнями.

Пряма задача

$$z = 3x_1 + 2x_2; \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 + 2x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Двоїста задача

$$z^* = 6y_1 + 4y_2; \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \geq 3; \\ y_1 + 2y_2 \geq 2; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2.$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 = 3; (1) \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 2; (2) \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

$z = (0; 0; 6; 4)$ –
базисне припустиме рішення.

Базисні невідомі:

$$x_3 = 6; x_4 = 4.$$

Вільні змінні:

$$x_1 = 0; x_2 = 0.$$

$$z^* = 3x_1 + 2x_2 = 7, 2;$$

$$x_1^* = 1, 6; x_2^* = 1, 2$$

$$z^* = (0; 0; -3; -2) -$$

базисне неприпустиме рішення.

Базисні невідомі:

$$y_3 = -3; y_4 = -2.$$

Вільні змінні:

$$y_1 = 0; y_2 = 0.$$

$$-z^* = -6y_1 - 4y_2; \rightarrow \max.$$

За умов обмежень:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 = 3; (1) \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 2; (2) \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

$$z^* = (0; 0; -3; -2).$$

$$z^* = 6y_1 + 4y_2 = 7, 2;$$

$$y_1^* = 0, 8; y_2^* = 0, 6$$

Розв'язування двоїстої задачі (перший крок)

З рівнянь-обмежень знайдемо одну з вільних змінних, яку залучимо в базисне з метою отримання припустимого базисного рішення. Нехай це буде y_1 , тоді

$$y_3 = -3 + 3y_1 + y_2 = 0;$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3; y_2 = y_3 = 0; y_1 = 1; (1)$$

$$y_4 = -2 + y_1 + 2y_2 = 0;$$

$$y_1 = 2 - 2y_2 + y_4; y_2 = y_4 = 0; y_1 = 2; (2)$$

обираємо вільні змінні $y_2 = y_3 = 0$;

базисні змінні $y_1; y_4$:

$$y_4 = -2 + \left(1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3\right) + 2y_2 = -1 + \frac{5}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3; (2)$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3; (1)$$

надамо вираз цільової функції через нові вільні змінні $y_2 = y_3 = 0$:

$$-z^* = -6 \left(1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \right) - 4y_2 = -6 - 2y_2 - 2y_3; \rightarrow \max.$$

$-z^* = (1; 0; 0; -1)$ – неприпустиме базисне рішення, бо $y_4 = -1$.

Розв'язування двоїстої задачі (другий крок)

Залучимо до базису вільну змінну y_2 з рівняння-обмеження (2):

$$y_4 = -1 + \frac{5}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 = 0; (2)$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4; y_3 = 0; y_4 = 0; \\ y_1 = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4 \right) + \frac{1}{3}y_3 = \frac{4}{5} + \frac{6}{15}y_3 - \frac{1}{5}y_4; (1) \end{cases}$$

$$-z^* = -6 - 2 \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4 \right) - 2y_3 =$$

$$= 7,2 - 1,6y_3 - 1,2y_4 \rightarrow \max$$

$$-Z^* = (0,8; 0,6; 0; 0);$$

базисні змінні: $y_1 = 4/5; y_2 = 3/5$;

вільні змінні: $y_3 = y_4 = 0$.

Припустимо базисне рішення, $-1,6$ та $-1,2$ – від'ємні величини і збільшувати $-z^*$ нема куди, тому це максимальне значення:

$$-z^* = -7,2, \quad -z^* = 7,2 \rightarrow \min$$

$$z_{\min}^* = (0,8; 0,6; 0; 0)$$

$$(z_{\min}^*(y_1; y_2; y_3; y_4)).$$

Розв'язування прямої задачі

$$x_1 = 1,6; x_2 = 1,2;$$

$$z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 1,6 + 2 \cdot 1,2 = 7,2,$$

$$z_{\max} = (1,6; 1,2; 0; 0)$$

$$(z_{\max} = (x_1, x_2, x_3, x_4));$$

$$z = 7,2 - 0,8 x_3 - 0,6 x_4 \rightarrow \max$$

Пряма задача	x_1	x_2	x_3	x_4
Двоїста задача	y_1	y_2	y_3	y_4

Графічний розв'язок прямої та двоїстої задач наведений на рис. 4.1.

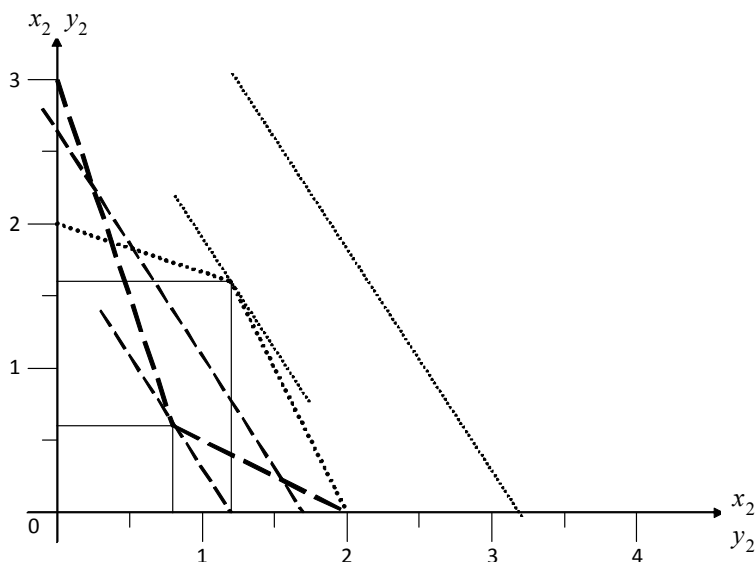


Рис. 4.1. Графічний розв'язок прямої та двоїстої задач

4.3. Співвідношення невідомих прямої та двоїстої задачі

Приклад 4.3

Розглянемо побудову та розв'язок двоїстої задачі на прикладі малого підприємства.

Математична модель основної задачі:

$$z = f(x) = 10x_1 + 20x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 \leq 350; (1) \\ 2x_1 + 0,5x_2 \leq 240; (2) \\ x_1 + x_2 \leq 150; (3) \\ x_1 + x_2 \geq 110; -x_1 - x_2 \leq -110; (4) \\ 10x_1 + 20x_2 \geq 1400; -10x_1 - 20x_2 \leq -1400; (5) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

Математична модель двоїстої задачі:

$$z^* = \varphi(y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 - 110y_4 - 1400y_5; \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 - 10y_5 \geq 10; \\ 3,5y_1 + 0,5y_2 + y_3 - y_4 - 20y_5 \geq 20; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, 5.$$

Перетворимо двоїсту задачу з задачі мінімізації на задачу максимізації:

$$-z^* = -\varphi(y) = -350y_1 - 240y_2 - 150y_3 + 110y_4 - 1400y_5; \rightarrow \max.$$

За умов обмежень

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 - y_3 + y_4 + 10y_5 + y_6 \leq -10; (1) \\ -3,5y_1 - 0,5y_2 - y_3 + y_4 + 20y_5 - y_7 \leq -20; (2) \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, 7.$$

Розв'яжемо задачу двоїстим симплекс-методом у табл. 4.2.

Розв'язок:

$$-z^* = -2300 - 4y_1 - 6y_3; -z^* = (0; 60; 0; 40; 900; 70; 80)$$

$$z^* = 2300; y_6 = 70; y_7 = 80.$$

Таблиця 4.2. Симплекс-таблиця

№ ітерації	i	Базис	C ₆	P ₀ (b _i)	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	-P _i /a _{ij}
					P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	СМПЛ.
					-350	-240	-150	110	1400	-M	-M	-P _i /a _{ij}
1	1	P ₆	-M	-10	-1	-2	-1	1	10	1	0	-
	2	P ₇	-M	-20	3,5	-0,5	-1	1	20	0	1	100
	3			0	350	240	150	-110	-1400	0	0	
2	2	P ₁	-350	5,7143	1	0,1429	0,2857	-0,2857	-5,7143	0	-0,2857	-
	1	P ₆	-M	-4,2857	0	-1,8571	-0,7143	0,7143	4,2857	1	-0,2857	70
	3			-2000	0	190	50	-10	600	0	100	
3	2	P ₁	-350	4	1	-0,6	0	0	-4	0,4	-0,4	
	1	P ₃	-150	6	0	2,6	1	-1	-6	-1,4	0,4	
	3			-2300	0	60	0	40	900	70	80	

Приклад 4.4

$$z = f(x) = 10x_1 + 20x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 \leq 350; (1) \\ 2x_1 + 0,5x_2 \leq 240; (2) \\ x_1 + x_2 \leq 150; (3) \\ x_1 + x_2 \geq 110; (4) \\ 10x_1 + 20x_2 \geq 1400; (5) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

Перетворимо задачу на задачу з обмеженнями типу " $\leq$ " (max):

$$\begin{cases} x_1 + 3,5x_2 \leq 350; (1) \\ 2x_1 + 0,5x_2 \leq 240; (2) \\ x_1 + x_2 \leq 150; (3) \\ -x_1 - x_2 \leq -110; (4) \\ -10x_1 - 20x_2 \leq -1400; (5) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

$$z = 10x_1 + 20x_2 \rightarrow \max. (0)$$

Побудуємо двоїсту задачу лінійного програмування:

$$z^* = \varphi(y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 - 110y_4 - 1400y_5; \rightarrow \min$$

за умов обмежень

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 - 10y_5 \geq 10; \\ 3,5y_1 + 0,5y_2 + y_3 - y_4 - 20y_5 \geq 20; \\ y_i \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, 5. \end{cases}$$

Перетворимо обмеження на рівняння

$$z^* = \varphi(y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 - 110y_4 - 1400y_5; \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 - 10y_5 - y_6 = 10; \\ 3,5y_1 + 0,5y_2 + y_3 - y_4 - 20y_5 - y_7 = 20; \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 - 10y_5 - y_6 + y_8 = 10; \\ 3,5y_1 + 0,5y_2 + y_3 - y_4 - 20y_5 - y_7 + y_9 = 20; \\ y_i \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, 9. \end{cases}$$

$$z^* = \varphi(y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 - 110y_4 - 1400y_5 + 0 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7; \rightarrow \min.$$

Замість пошуку $\min z^*$ знайдемо $\max(-z^*)$, бо $z_{\max}^* = -z_{\min}^*$:

$$\begin{aligned} -z^* &= -\varphi(y) = -350y_1 - 240y_2 - 150y_3 + 110y_4 + \\ &+ 1400y_5 + 0 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7 - My_8 - My_9; \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Розв'яжемо задачу симплекс-методом у табл. 4.3.

Розв'язок:

$$-z^* = -2300 - 4y_1 - 6y_3; \quad -z^* = (0; 60; 0; 40; 900; 70; 80; 0; 0)$$

$$(-z^* = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9))$$

$$z^* = 2300; y_6 = 70; y_7 = 80.$$

86 Таблица 4.3. Симплекс-таблица

№ итераций	Коэффициенты		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	P_0/a_{ij}
	i	Базис	$P_0(b_i)$	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	Симплекс
1	1	P_8	$-M$	10	1	2	1	-1	-10	-1	0	10
	2	P_9	$-M$	20	0,5	1	-1	-1	-20	0	-1	1
	3	P_8	$-M$	0	350	240	150	-110	-1400	0	0	0
	4	P_8	$-M$	-30	-4,5	-2,5	-2	-2	30	1	1	0
2	1	P_8	$-M$	4,2857	0	-1,857	0,7143	-0,7143	-4,2857	-1	0,2857	1
	2	P_1	-350	5,7143	1	0,1429	0,2857	-0,2857	-5,7143	0	-0,2857	0
	3	P_8	$-M$	-2000	0	190	50	-10	600	0	100	0
	4	P_8	$-M$	-4,2857	0	-1,857	-0,7143	0,7143	4,2857	1	-0,2857	-1
3	1	P_2	-240	2,3079	0	1	0,3846	-0,3846	-2,3079	-0,5385	0,1539	-0,5385
	2	P_1	-350	5,3845	1	0	0,2310	-0,2310	-5,3845	0,077	-0,308	-0,407
	3	P_8	$-M$	-2440	0	0	63,15	63,15	1040	102,3	70,9	-102,3
	4	P_8	$-M$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	1	P_3	-150	6	0	2,6	1	-1	-6	-1,4	0,4	-0,4
	2	P_1	-350	4	1	-0,6	0	0	-4	0,4	-0,4	-0,4
	3	P_8	$-M$	-2300	0	60	0	40	900	70	80	-80

4.4. Економічна і математична постановка транспортної задачі. Умови існування розв'язку транспортної задачі

Класична транспортна задача, яку вже розглядали раніше, полягає у пошуку оптимального плану перевезень однорідного вантажу з m -пунктів відправлення $A_1, A_2, \dots, A_m$, у яких знаходиться відповідно $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць вантажу у n -пунктів призначення $B_1, B_2, \dots, B_n$, у кожний з яких потрібно завезти відповідно $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць вантажу з пункту A_i відправлення у пункт B_j призначене, відоме і складає C_{ij} .

Потрібно скласти такий план перевезень, при якому загальна вартість перевезень була б мінімальною і були б задоволені потреби споживачів.

Будемо вважати, що задача збалансована (закрита), тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Незбалансована задача (відкрита) зводиться до збалансованої шляхом введення фіктивних постачальників або фіктивних споживачів залежно від дефіциту потреб чи запасів. Вартість перевезень (відстань) від фіктивних постачальників або до фіктивних споживачів вважають рівною нулю.

Для математичної постановки транспортної задачі позначимо x_{ij} – кількість одиниць вантажу, яку потрібно перевезти з пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j , щоб план перевезень був оптимальним.

Ураховуючи вартість перевезень одиниці вантажу C_{ij} , загальна вартість перевезення вантажу з пункту A_i до пункту B_j складає $C_{ij}x_{ij}$. Загальна вартість перевезень усього вантажу становить

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}x_{ij}; \rightarrow \min.$$

Система обмежень складається виходячи з передумови, що загальна сума запасів, вивезених з m -пунктів, дорівнює загальній сумі потреб у i -му пункті:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n;$$

загальна кількість вантажу, вивезеного з i -го пункту, дорівнює наявності вантажу в i -му пункті:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

за умов, що кількість одиниць вантажу, вивезених з пункту A_i до пункту B_j , невід'ємна:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

задача збалансована:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Математична постановка транспортної задачі полягає у знаходженні невід'ємних значень розв'язків системи рівнянь-обмежень, які забезпечують мінімальне значення лінійної форми $z(x_{ij})$.

Умовою існування розв'язку транспортної задачі (наявності оптимального плану) є збалансованість транспортної задачі. Якщо усі a_i та b_j – цілі числа, тоді розв'язок транспортної задачі – оптимальний вектор, що має цілі чисельні координати.

Ранг матриці системи функціональних обмежень транспортної задачі визначається за формулою $r = m + n - 1$, де m – кількість пунктів відправлення; n – кількість пунктів споживання, бо за умов виконання збалансованості транспортної задачі кількість лінійно незалежних рівнянь-обмежень на одне менше загальної кількості рівнянь. Таким чином, кількість

базисних невідомих у транспортній задачі дорівнює завжди $m + n - 1$, а кількість вільних невідомих $mn - (m + n - 1)$.

Отже, транспортна задача є задачею лінійного програмування у канонічній формі з деякими особливостями:

- коефіцієнти при невідомих у всіх рівняннях-обмеженнях дорівнюють одиниці;
- кожна невідома змінна зустрічається лише у двох функціональних рівняннях-обмеженнях, тому матриця коефіцієнтів при невідомих змінних x_{ij} побудована з одиниць та нулів; кожен стовпчик матриці нараховує дві одиниці, а інші елементи – нулі;
- система рівнянь-обмежень транспортної задачі симетрична відносно усіх змінних x_{ij} .

Послідовність розв'язання транспортної задачі відповідає послідовності розв'язання звичайної задачі лінійного програмування:

1. Визначається опорний план (припустиме базисне рішення) транспортної задачі.
2. З'ясовується оптимальність опорного плану.
3. Здійснюється перехід від одного опорного плану до іншого або завершується задача оптимізації.

Розглянемо послідовно розв'язання транспортної задачі на прикладі, який був наведений раніше.

4.5. Застосування діагонального методу та методу найменшої відстані для розв'язання транспортної задачі

Існує багато методів, за допомогою яких можливо розв'язати транспортну задачу. Розглянемо два найпростіші – метод північно-західного кута (діагональний метод) та метод найменшої відстані (найменшої вартості перевезень).

Сутність **діагонального методу** полягає у тому, що починаючи з якогось кута таблиці, послідовно заповнюють клітини таблиці, по черзі задовольняють споживачів, а також послідовно вичерпуючи запаси постачальників. Розглянемо використання методу на прикладі.

Приклад 4.5. Метод північно-західного кута (діагональний метод)

Задовільним потребу першого споживача B_1 за рахунок першого постачальника A_1 , тобто відвеземо 30 одиниць вантажу; у першого постачальника залишиться 20 одиниць вантажу. Викреслимо перший стовпчик. Якби у першого постачальника не вистачило вантажу, потребу першого замовника (споживача) задовольнили б за рахунок ще й другого постачальника, а викреслили б перший рядок.

Залишок від першого постачальника передамо другому споживачу B_2 , але щоб його задовольнити (бо ресурси першого постачальника вже вичерпані) використаємо для споживача B_2 5 одиниць вантажу від другого постачальника A_1 ; і таким чином заповнимо всю таблицю.

Якщо виявиться, що кількість заповнених (базисних) клітин буде меншою за ранг $m - n - 1$, то навмання обрані вільні клітини (вільні змінні) заповнюють нулями (умовні поставання), щоб кількість базових клітин дорівнювала $m - n - 1$.

Розв'язок задачі за допомогою методу північно-західного кута подано на рис. 4.2.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	30				50 20
A_2					40
A_3					20
b_j	30	25	35	20	110

а

	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20			20
A_2	5			40 35
A_3				20
b_j	25	35	20	80 55

б

	B_3	B_4	a_i
A_2	35		35
A_3			20
b_j	35	20	55 20

в

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	40
A_3	3	2	4	20	20
b_j	30	25	35	20	110

г

Рис. 4.2. Розв'язок задачі методом північно-західного кута:
а – перша ітерація; **б** – друга ітерація; **в** – третя ітерація;
г – четверта ітерація

Базисне припустиме рішення (опорний план) становить

$$x_{11} = 30; x_{12} = 20; x_{14} = 0; x_{22} = 5; x_{23} = 35; x_{34} = 20;$$

$$z(x_{ij}) = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 35 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 20 = 260.$$

Приклад 4.6. Метод найменшої відстані (найменшої вартості перевезень)

Метод найменшої відстані характеризується послідовністю заповнення клітин таблиці – у першу чергу заповнюють клітини, де відстань (вартість) перевезень на кожному етапі є мінімальною.

Розглянемо використання методу на попередньому прикладі.

Найменша вартість перевезень у клітинах A_1B_4 та A_2B_3 . Оберемо одну з них – A_1B_4 , у яку запишемо 20 одиниць вантажу; у першого постачальника залишиться 30 одиниць вантажу, а четвертий замовник буде задовільнений повністю. Викреслимо четвертий стовпчик. Здійснимо перевезення A_2B_3 – 35 одиниць вантажу; у другого постачальника залишиться 5 одиниць; та викреслимо третій стовпчик.

На наступному етапі здійснимо перевезення A_3B_2 – 20 одиниць та A_1B_2 – 5 одиниць вантажу і викреслимо другий стовпчик. Можливості постачальника A_3 використані повністю, тому викреслимо третій рядок. У постачальників A_1 та A_2 залишилось 25 та 5 одиниць відповідно.

На останньому етапі здійснимо перевезення A_1B_1 – 25 одиниць; A_2B_1 – 5 одиниць і таким чином заповнимо всю таблицю (рис. 4.3).

Базисне припустиме рішення (опорний план) становить

$$x_{11} = 25; x_{12} = 5; x_{14} = 20;$$

$$x_{21} = 5; x_{23} = 35; x_{34} = 20;$$

$$z(x_{ij}) = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 20 = 190;$$

$$190 < 260.$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1				20	50 30
A_2					40
A_3					20
b_j	30	25	35	20	110 90

a

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1			35	30
A_2				40 5
A_3				20
b_j	30	25	35	90 55

б

	B_1	B_2	a_i
A_1		5	30 25
A_2			5
A_3		20	20
b_j	30	25	55 30

в

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	2	4	1	50
	25	5		20	
A_2	2	3	1	5	40
	5		35		
A_3	3	2	4	4	
		20			20
b_j	30	25	35	20	110

г

Рис. 4.3. Розв'язок задачі методом найменшої відстані:
a – перша ітерація; **б** – друга ітерація; **в** – третя ітерація;
г – четверта ітерація

4.6. Застосування двоїстої задачі до транспортної

Для з'ясування оптимальності опорного плану розглянемо двоїсту задачу до транспортної задачі.

Уведемо двоїсті змінні $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; ($i = 1, 2, \dots, m$) до m перших обмежень задачі, а також $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$; ($j = 1, 2, \dots, n$) до n останніх обмежень задачі, які відповідають обмеженням на кількість вантажу $A_1, A_2, \dots, A_m$ ($i = 1, 2, \dots, m$), що постачається, та вантажу, який споживається, $B_1, B_2, \dots, B_n$ ($j = 1, 2, \dots, n$) відповідно. Нові введені змінні у двоїстій задачі до транспортної мають назву потенціалів, тому іноді й метод загалом має назву методу потенціалів. За правилом двоїстих задач система обмежень двоїстої до транспортної задачі має вигляд

$$\alpha_i + \beta_j \leq C_{ij}, (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

де $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$ – для базисних клітинок; $\alpha_i + \beta_j \leq C_{ij}$ – для вільних клітинок (невідомих x_{ij}).

Цільова функція

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sum_1^m a_i \alpha_i + \sum_1^n b_j \beta_j; \rightarrow \max.$$

Приклад 4.7

Для того щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб обмеження двоїстої задачі виконувались як рівності. Повернемося до опорного плану прикладу транспортної задачі, отриманого діагональним методом (табл. 4.4).

Таблиця 4.4. Опорний план транспортної задачі

Змінні		$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 1$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$\alpha_1 = 0$	A_1	$c_{11}=3$ $x_{11}=30$	$c_{12}=2$ -20 $x_{12}=20$	$c_{13}=4$ x_{13}	$c_{14}=1$ +20 $x_{14}=0$	50
$\alpha_2 = 1$	A_2	$c_{21}=2$	$c_{22}=3$ 5	$c_{23}=1$ 35	$c_{24}=5$	40
$\alpha_3 = 3$	A_3	$c_{31}=3$	$c_{32}=2$ +20 x_{32}	$c_{33}=4$	$c_{34}=4$ -20 $x_{34}=20$	20
b_i		30	25	35	20	110

Для базисних невідомих система обмежень двоїстої задачі має вигляд

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \leq 3; (C_{11} = 3); \\ \alpha_1 + \beta_2 \leq 2; (C_{12} = 2); \\ \alpha_1 + \beta_4 \leq 1; (C_{14} = 1); \\ \alpha_2 + \beta_2 \leq 3; \\ \alpha_2 + \beta_3 \leq 1; \\ \alpha_3 + \beta_4 \leq 4. \end{cases}$$

Ранг системи дорівнює $(n + m - 1)$.

Загалом маємо 6 рівнянь та 7 невідомих. Одну з невідомих маємо назвати, наприклад, $\alpha_1 = 0$, тоді: $\beta_1 = 3$; $\beta_2 = 2$; $\beta_4 = 1$; $\alpha_2 = 1$; $\beta_3 = 0$; $\alpha_3 = 3$.

Розрахуємо обмеження двоїстої задачі для вільних невідомих (вільних клітинок):

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_3 \leq 4; 0 \leq 4; \\ \alpha_2 + \beta_1 \leq 2; 4 \leq 2; \quad \leftarrow \\ \alpha_2 + \beta_4 \leq 5; 2 \leq 5; \\ \alpha_3 + \beta_1 \leq 3; 6 \leq 3; \quad \leftarrow \\ \alpha_3 + \beta_{23} \leq 2; 5 \leq 2; \quad \leftarrow \\ \alpha_3 + \beta_4 \leq 4; 3 \leq 4. \end{array} \right.$$

План не є оптимальним, тому що не виконуються друга, четверта та п'ята умови.

Здійснення переходу від одного опорного плану до іншого. З метою переходу до нового опорного плану визначимо базисну змінну, яку потрібно перевести у вільну, та навпаки вільну змінну, яку потрібно перевести у базисну.

Вільну змінну знайдемо в одній із клітинок, де порушується умова-обмеження: або A_2B_1 , або A_3B_1 , або A_3B_2 . Оберемо клітинку A_3B_2 . Вільну невідому змінну x_{32} , яка дорівнювала нулю, потрібно збільшити і перевести у базисну. Це можливо зробити за рахунок зменшення до нуля (переведення у вільну змінну) будь-якої з базисних змінних.

Але щоб рішення було припустимим (план опорним) та ще й кращим за попереднє, необхідно не порушувати умови – обмеження основної (транспортної) задачі та підвищувати вільну змінну за рахунок базової, яка "коштує" більше (C_{ij} базової змінної повинно бути більше, ніж обраної вільної, $C_{ij} \geq C_{32} = 2$). Коли підвищимо x_{32} за рахунок x_{34} , то зменшимо вартість перевезень, бо $C_{34} = 4 > C_{32} = 2$.

Умова-обмеження на наявність вантажу у третього постачальника не порушується, але порушені умови-обмеження у другого та четвертого споживачів. Щоб виконати ці умови, від базового значення невідомої x_{12} до базового значення невідомої x_{14} уздовж першого рядка передамо відповідну кількість вантажу, не порушуючи умови-обмеження на наявність вантажу у першого постачальника.

Невідомі змінні x_{12} та x_{14} залишаються базовими змінними, у той час як x_{34} перетворюється на вільну змінну ($x_{34} = 0$) та одночасно базовою змінною стає x_{32} , яка була вільною. Умови-обмеження не порушено, вартість перевезень зменшена, ітерація завершена, нове припустиме рішення має такий вигляд, як показано у табл. 4.5.

Таблиця 4.5. Другий опорний план транспортної задачі

$\alpha_i \backslash \beta_j$	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 1$
$\alpha_1 = 0$	3 -5 30	2 +5 0	4	1 20
$\alpha_2 = 1$	2 +5 x_{21}	3 -5 5	1 35	5
$\alpha_3 = 0$	3	2 20	4	4

Нові значення потенціалів α та β знайдені з рівнянь-обмежень для нових базових змінних, ураховуючи що

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \leq 3; \\ \alpha_1 + \beta_2 \leq 2; \\ \alpha_2 + \beta_2 \leq 3; \\ \alpha_2 + \beta_3 \leq 1; \\ \alpha_3 + \beta_2 \leq 2; \\ \alpha_1 + \beta_4 \leq 1, \end{cases}$$

де $\alpha_1 = 0$; $\beta_1 = 3$; $\beta_2 = 2$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 0$; $\beta_4 = 1$.

Для вільної невідомої змінної (x_{21})

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 3 \leq 2; \\ \alpha_2 + \beta_{1j} \leq C_{21} \end{array} \right\} - \text{не виконується умова, бо } 4 > 2; \text{ так,}$$

рішення загалом не є оптимальним. Знову утворимо цикл перерахунку. Нове припустиме рішення подане у табл. 4.6.

Таблиця 4.6. Третій опорний план транспортної задачі (оптимальне рішення транспортної задачі)

$\alpha_i \backslash \beta_j$	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 1$	a_i
$\alpha_1 = 0$	3 25	2 5	4	1 20	50
$\alpha_2 = -1$	2 5	3	1 35	5	40
$\alpha_3 = 0$	3	2 20	4	4	20
b_i	30	25	35	20	110

Для кожної вільної змінної (вільної клітинки) виконується $\alpha_i + \beta_j \leq C_{ij}$, тобто знайдено оптимальне рішення

$$\varphi_{\min} = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 20 = 190.$$

Циклом перерахунку називається замкнена ламана лінія, яка починається у вільній клітині (вільній змінній), що перетворюється на базисну клітинку (змінну); інші вершини логічної лінії розміщені в базисних клітинках (одна з яких перетворюється на вільну). Відрізки ламаної лінії розташовані вздовж рядків та стовпчиків матриці перевезень. Жодна з трьох сусідніх вершин (базові змінні) не лежить на одній прямій. Вільній клітинці (змінній) надається знак "+", іншим по черзі "-" та "+". У зв'язку з тим, що у будь-якому рядку і стовпчику

присутня однакова кількість додатних і від'ємних вершин циклу, зсув по циклу перерахунку на постійне число перетворює один розв'язок системи обмежень транспортної задачі в інший розв'язок (інше припустиме рішення) тієї самої задачі. Зсув можливий не більш як на найменше базове значення, що є у циклі перерахунку.

Приклад 4.8. Незбалансована (відкрита) транспортна задача

Розглянемо приклад розв'язання транспортної задачі, яка є незбалансованою (відкритою).

При виконанні однієї з умов

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j;$$

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

маємо незбалансовану модель.

У першому випадку створюється фіктивний $(m + 1)$ поставальник із запасами

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i,$$

усі тарифи на перевезення вважають нульовими:

$$C_{m+1, j} = 0; j = 1, 2, \dots, n.$$

У другому випадку створюється фіктивний $(n + 1)$ замовник з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j,$$

$$C_{i, n+1} = 0; i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Розглянемо конкретний приклад, дані якого наведені в табл. 4.7.

Таблиця 4.7 . Незбалансована задача

Запаси	Замовлення				
	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1		0			60
A_2					100
A_3			2	1	70
b_j	0	5	0	5	230
					220

Уведемо фіктивного замовника

$$b_5 = \sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{j=1}^4 b_j = 230 - 220 = 10;$$

$$C_{i5} = 0; i = 1, 2, 3.$$

Опорний план задачі побудуємо у таблиці за методом мінімальної вартості (табл. 4.8).

Таблиця 4.8. Опорний план

		$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 5$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 3$	$\beta_5 = -4$	
	Замовник Постачальник	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
$\alpha_1=0$	A_1	4 15	10	5	3 45	0	60
$\alpha_2=2$	A_2	6 30	7	2 70	8	0	100
$\alpha_3=4$	A_3	8 5	9 55	12	11	0 10	70
	b_j	50	55	70	45	10	230

Перевіримо опорний план на оптимальність методом потенціалів. Для базисних клітинок $(m + n - 1) = 3 + 5 - 1 = 7$ побудуємо рівняння потенціалів

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = 4; \beta_1 = 4; \\ \alpha_1 + \beta_4 = 3; \beta_4 = 3; \\ \alpha_2 + \beta_1 = 6; \alpha_2 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_3 = 2; \beta_3 = 0; \\ \alpha_3 + \beta_1 = 8; \alpha_3 = 4; \\ \alpha_3 + \beta_2 = 9; \beta_2 = 5; \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0; \beta_5 = -4; \\ \alpha_1 = 0. \end{array} \right.$$

Для всіх вільних клітинок (вільних змінних) перевіримо нерівності

$$\alpha_i + \beta_j \leq C_{ij};$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_2 = 0 + 5 \leq 10; \\ \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 0 \leq 5; \\ \alpha_1 + \beta_5 = 0 + (-4) \leq 0; \\ \alpha_2 + \beta_2 = 2 + 5 \leq 7; \\ \alpha_2 + \beta_4 = 2 + 3 \leq 8; \\ \alpha_2 + \beta_5 = 2 + (-4) \leq 0; \\ \alpha_3 + \beta_3 = 4 + 0 \leq 12; \\ \alpha_3 + \beta_4 = 4 + 3 \leq 11. \end{array} \right.$$

Матриця $C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

і від'ємних значень не має.

Виконання умов-обмежень стосовно всіх вільних клітинок (невідомих) дозволяє стверджувати, що план перевезень є оптимальним. Вартість перевезень становить

$$z^*_{\min} = 4 \cdot 15 + 3 \cdot 45 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 55 + 0 \cdot 10 = 1050;$$

$$x^* = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 30 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Приклад 4.9

Розглянемо приклад створення циклу перерахування незбалансованої транспортної задачі. Опорний план задачі поданий у табл. 4.9.

Таблиця 4.9. Опорний план задачі

		$\beta_1=4$	$\beta_2=5$	$\beta_3=0$	$\beta_4=3$	$\beta_5=-4$	
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
Постачальник \ Замовник	A_1	15			45		60
	A_2	30		70			100
	A_3	5	55			10	70
	b_j	50	55	70	45	10	230
	α_i	0	2	4			

Рівняння потенціалів для базисних клітин

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 1; \beta_2 = 1; \\ \alpha_1 + \beta_3 = 2; \beta_3 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_1 = 3; \beta_1 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_3 = 3; \alpha_2 = 1; \\ \alpha_3 + \beta_1 = 4; \alpha_3 = 2; \\ \alpha_3 + \beta_4 = 2; \beta_4 = 0; \\ \alpha_4 + \beta_4 = 0; \alpha_4 = 0; \\ \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Для всіх вільних клітин рівняння потенціалів має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 2 \leq 4; \\ \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 0 \leq 5; \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 + 1 \leq 2; \\ \alpha_2 + \beta_4 = 1 + 0 \leq 7; \\ \alpha_3 + \beta_2 = 2 + 1 \leq 4; \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2 + 2 \leq 5; \\ \alpha_4 + \beta_1 = 0 + 2 \leq 0; \\ \alpha_4 + \beta_2 = 0 + 1 \leq 0; \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0 + 2 \leq 0. \end{array} \right.$$

Матриця $C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

останній рядок матриці містить від'ємні значення.

Оберемо, наприклад, вільну клітинку $i = 4, j = 3, C_{43} = -2$ і перетворимо вільну x_{43} на базисну шляхом створення циклу перерахунку. У клітинку $(4, 3)$ надамо знак $(+)$ і створимо між цією клітинкою та іншими базисними замкнений цикл перерахунку:

$$\begin{array}{ccccccc} (4,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,1) \rightarrow (3,4) \rightarrow (4,4) \rightarrow (4,3), \\ (+) \quad (-) \quad (+) \quad (-) \quad (+) \quad (-) \quad (+) \end{array}$$

який зображений у таблиці.

Побудуємо нову таблицю, яка містить новий опорний план, та перевіримо його на оптимальність (табл. 4.10).

Таблиця 4.10. Новий опорний план задачі

	Замовник Постачальник	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 0$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$\alpha_1 = 0$	A_1	4	1	2	5	40
$\alpha_2 = 1$	A_2	3	2	3	7	60
$\alpha_3 = 2$	A_3	4	4	5	2	90
$\alpha_4 = 0$	A_4	0	0	0	0	10
	b_j	45	35	55	65	200

Перевіримо опорний план на оптимальність. Базисні клітинки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_2 = 1; \beta_2 = 1; \\ \alpha_1 + \beta_3 = 2; \beta_3 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_1 = 3; \beta_1 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_3 = 3; \alpha_2 = 1; \\ \alpha_3 + \beta_1 = 4; \alpha_3 = 2; \\ \alpha_3 + \beta_4 = 2; \beta_4 = 0; \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0; \alpha_4 = -2; \\ \alpha_1 = 0. \end{array} \right.$$

Для всіх вільних клітинок:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_2 = 0 + 2 \leq 4; \\ \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 0 \leq 5; \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 + 1 \leq 2; \\ \alpha_2 + \beta_4 = 1 + 0 \leq 7; \\ \alpha_3 + \beta_2 = 2 + 1 \leq 4; \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2 + 2 \leq 5; \\ \alpha_4 + \beta_1 = -2 + 2 \leq 0; \\ \alpha_4 + \beta_2 = -2 + 1 \leq 0; \\ \alpha_4 + \beta_4 = -2 + 0 \leq 0. \end{array} \right.$$

Матриця $C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

від'ємних значень немає.

Оптимальний план знайдено.

Приклад 4.10. Задача, яка може бути зведена до транспортної

На підприємстві є три типи верстатів A_1, A_2, A_3 , кожен з яких може виробляти чотири різновиди виробів B_1, B_2, B_3, B_4 . Фонд робочого часу верстатів складає a_1, a_2, a_3 . Собівартість виробів та продуктивність верстатів подані у табл. 4.11. Необхідно виготовити $b_1 = 1200$ одиниць виробів B_1 , $b_2 = 900$ одиниць виробів B_2 , $b_3 = 840$ одиниць відповідно. Скласти план завантаження обладнання, при якому собівартість продукції мінімальна (табл. 4.11).

Таблиця 4.11. Собівартість виробів та продуктивність верстатів

Тип верстата	Фонд часу a_i	Собівартість				Продуктивність			
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	90	2	1	3	1	24	30	18	42
A_2	220	3	2	4	1	12	15	9	21
A_3	180	6	3	5	2	8	10	6	14
Кількість виробів b_i						1200	900	1800	840

Розв'язування задачі

Позначимо x_{ij} – кількість годин, які верстат A_i витрачає на виготовлення виробу B_j .

Цільова функція

$$z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 2x_{34}; \rightarrow \min.$$

Функціональні обмеження:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 220; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180; \\ 24x_{11} + 12x_{21} + 8x_{31} = 1200; \\ 30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{33} = 900; \\ 18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800; \\ 42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840. \end{cases}$$

Нефункціональні обмеження $x_{ij} \geq 0$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$.

Контрольні запитання

1. У чому сутність двоїстої задачі лінійного програмування? У чому полягає її відмінність від основної задачі лінійного програмування?
2. Формування двоїстої задачі лінійного програмування, її економічна інтерпретація.
3. Як будуються та розв'язуються двоїсті задачі з двома невідомими та двома обмеженнями?
4. Яке співвідношення невідомих прямої та двоїстої задачі?
5. Економічна постановка транспортної задачі.
6. Математична постановка транспортної задачі.
7. Діагональний метод розв'язування транспортної задачі.
8. Метод найменшої відстані для розв'язування транспортної задачі.
9. Застосування двоїстої задачі до транспортної.

Практичні завдання

1. Вихідною задачею є знайти мінімум лінійної функції $z = -x_4 + x_5$ при обмеженнях

$$\begin{aligned}x_1 + x_4 + x_5 &= 2, \\x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 7, \\x_3 - x_4 - 3x_5 &= 2, \\x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5),\end{aligned}$$

для якої $\vec{C} = (0, 0, 0, -1, 1)$, $\vec{B} = (2, 7, 2)$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайти максимум лінійної функції для двоїстої задачі
 $g = 2w_1 + 7w_2 + 2w_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} w_1 \leq 0, \\ w_2 \leq 0, \\ w_3 \leq 0, \\ w_1 + 2w_2 - w_3 \leq -1, \\ w_1 + 3w_2 - 3w_3 \leq 1. \end{cases}$$

2. Умова транспортної задачі подана у таблиці.

Постачальник і його запаси		Споживач і його попит		
		B_1	B_2	B_3
		70	115	80
A_1	45	2	3	1
A_2	130	4	1	5
A_3	90	2	8	9

A_1, A_2, A_3 – це пункти відправлення або три постачальника відповідно з 45, 130 та 90 одиницями вантажу. B_1, B_2, B_3 – це три пункти призначення або три споживачі з попитом у 70, 115 та 80 одиниць вантажу. Вартість перевезень у кожний пункт подана в клітинках. Складіть оптимальний план перевезень, що передбачає мінімальну вартість перевезень.

Тема 5. Цілочислове програмування

- 5.1. Постановка задачі цілочислового програмування
- 5.2. Метод Гоморі
- 5.3. Метод "гілок і меж"
- 5.4. Приклади цілочислових економічних задач
- 5.5. Задачі дробово-лінійного програмування: постановка та методи розв'язання

5.1. Постановка задачі цілочислового програмування

До цілочислового програмування відносять задачі про призначення, найкоротший шлях і т. ін. У реальних задачах часто цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька змінних. Такі задачі називають **частково цілочисловими**.

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень, наприклад коли йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських підприємствах тощо, тобто коли така вимога впливає з особливостей технології виробництва. До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень – 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні).

Приклад 5.1

Інвестиційна компанія може вкласти кошти у три різні підприємства. Ефективність кожного проекту оцінено згідно з тим, що його реалізація можлива за чотирьох умов. Дані про ці проекти наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1. Дані про проекти

Проект	Змінна	Умови реалізації проектів			
		y_1	y_2	y_3	y_4
1	x_1	8	15	21	4
2	x_2	10	16	18	6
3	x_3	12	14	17	7
Імовірнісні оцінки реалізації проектів		0,2	0,1	0,4	0,3

Кожна змінна може набувати лише двох значень – 1 або 0, тобто інвестиційна компанія вкладає або не вкладає кошти у відповідне підприємство.

Загальна задача цілочислового програмування записується так:

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max(\min) \quad (5.1)$$

за умов, що

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (5.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.3)$$

$$x_j - \text{цілі} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (5.4)$$

Для знаходження оптимального розв'язку цілочислових задач застосовують спеціальні методи. Найпростішим мето-

дом розв'язування цілочислової задачі є знаходження її оптимального розв'язку як задачі, що має лише неперервні змінні, з подальшим округленням останніх. Такий підхід часто є виправданим. Нехай, наприклад, у результаті розв'язування задачі про поєднання галузей у сільськогосподарському підприємстві було з'ясовано, що воно потребує 1235,6 корів. Округливши це значення корів до 1236, не припустимося значної похибки. Проте в деяких випадках такі спрощення призводять до істотних неточностей. Якщо, скажімо, у результаті розв'язування як неперервної задачі про сушильний цех, що може бути обладнаний агрегатами трьох типів, отримали $x_1 = 2,6$; $x_2 = 4,3$ і $x_3 = 0,7$, то будь-які округлення недопустимі.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують дві основні групи методів:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового "звуження" області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими *послабленими обмеженнями*, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, багатокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

- а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);
- б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків,

тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод "гілок і меж". Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідженням кожної окремої частини багатокутника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

5.2. Метод Гоморі

Нехай маємо задачу цілочислового програмування (5.1)–(5.4). Для її розв'язування можна скористатися ітеративним методом Гоморі. Суть його полягає у наступному:

1. Знаходять розв'язок послабленої задачі, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних – (5.1)–(5.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (5.1)–(5.4).

2. Якщо в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} \cdot x_j \geq \{b_j\},$$

де символ $\{\}$ позначає дробову частину числа.

Для визначення дробової частини будь-якого числа від цього числа віднімають цілу його частину – найбільше ціле число, що не перевищує даного. Цілу частину числа позначають символом $[]$. Наприклад: $[1,3] = 1$; $[-1,3] = -2$; $\{1,3\} = 1,3 - 1 = 0,3$; $\{-1,3\} = -1,3 - (-2) = 2 - 1,3 = 0,7$.

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Здобуту розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо розв'язок не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Досвід показує, що процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільнозбіжний. Істотними є також похибки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

Приклад 5.2

Сільськогосподарське підприємство планує створити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2 , маючи для цього 100 тис. грн і можливість придбати устаткування типів A і B . Техніко-економічну інформацію про ці два види устаткування подано в табл. 5.2.

Таблиця 5.2. Техніко-економічна інформація про устаткування

Техніко-економічний показник	Устаткування		Ресурс
	A	B	
Вартість, тис. грн	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн/рік	350	150	–

Розв'язування задачі

Нехай x_1 і x_2 – кількість комплектів устаткування відповідно типу A і B .

Запишемо економіко-математичну модель:

$$Z = 350x_1 + 150x_2 \rightarrow \max,$$

$$25x_1 + 10x_2 \leq 100,$$

$$40x_1 + 20x_2 \leq 190,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$x_1 \text{ і } x_2 - \text{цілі.}$$

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Симплексна таблиця набуде наступного вигляду (табл. 5.3).

Таблиця 5.3. Симплекс-таблиця (умовно-оптимальний план)

$X_{\text{баз}}$	$C_{\text{баз}}$	План	350	150	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
$Z_j - C_j \geq 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження вигляду

$$\text{ду } \sum_{j=1}^n \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_j\} :$$

$$\{1\}x_1 + \{0\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \geq \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

$$\text{Оскільки } \left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}, \left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}, \left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \text{ то додаткове}$$

обмеження набирає вигляду

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Зведемо його до канонічної форми, введемо штучну змінну та отримаємо

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 \geq \frac{1}{2}.$$

Приєднавши здобуте обмеження до останньої симплексної таблиці з умовно-оптимальним планом, отримаємо табл. 5.4.

Таблиця 5.4. Симплекс-таблиця (цілочисловий оптимальний план)

$X_{\text{баз}}$	$C_{\text{баз}}$	План	350	150	0	0	0	$-M$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	$-M$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	-1	1
$Z_j - C_j \geq 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв'язуючи наведену задачу, остаточно знаходимо цілочисловий оптимальний план: $x^*(x_1 = 2; x_2 = 5)$, $z_{\max} = 1450$.

5.3. Метод "гілок і меж"

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування є метод "гілок і меж". Спочатку, як у випадку методу Гоморі, розв'язується послаблена (відкиданням умови цілочисловості) задача.

З цією метою застосовується симплексний метод.

Нехай потрібно знайти x_j – цілочислову змінну, значення якої x_j^* в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Тоді можна стверджувати, що в інтервалі $\left(\left[x_j^* \right], \left[x_j^* \right] + 1 \right)$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо $x_j^* = 2,3$, отримуємо інтервал $(2,3)$, де, очевидно, немає x_j , яке набуває цілого значення.

Значенню $x_j^* = -2,3$ відповідає інтервал $(-3; -2)$, де також не існує цілого значення x_j . Отже, допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей:

$$x_j \leq \left[x_j^* \right] \text{ або } x_j \geq \left[x_j^* \right] + 1.$$

Приписавши кожному з цих нерівностей до задачі з послабленими обмеженнями, отримаємо дві не пов'язані між собою задачі, тобто початкову задачу цілочислового програмування (5.1)–(5.4) розіб'ємо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв'язуватимемо дві такі задачі: перша

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min) \quad (5.5)$$

за умов, що

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (5.6)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.7)$$

$$x_j - \text{цілі}, \quad (5.8)$$

$$x_j \leq [x_j^*]; \quad (5.9)$$

друга задача

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (5.10)$$

за умов, що

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i \quad (5.11)$$

$$(i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.12)$$

$$x_j - \text{цілі}, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (5.13)$$

$$x_j \geq [x_j^*] + 1, \quad (5.14)$$

де x_j^* – компонент розв'язку задачі (5.1)–(5.4).

Далі симплекс-методом розв'язуємо послаблені задачі (5.6)–(5.9) і (5.10)–(5.14), тобто з відкиданням обмежень (5.8) і (5.13). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задач (5.1)–(5.4). Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беремо задачу з найбільшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки – з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий план – оптимальний.

Розв'язування цілочислових задач методом "гілок і меж" можна значно прискорити, приєднавши обмеження виду (5.9) і (5.14) до останньої симплекс-таблиці не початкової (5.1)–(5.4), а відповідних задач.

Розв'яжемо методом "гілок і меж" приклад 5.2.

Відкинувши умову цілочисловості, отримаємо розв'язок

$x_1 = 1, x_2 = 7\frac{1}{2}$. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задоволь-

няти одну з нерівностей: $x_2 \leq \left\lfloor 7\frac{1}{2} \right\rfloor = 7$ або $x_2 \geq \left\lceil 7\frac{1}{2} \right\rceil + 1 = 8$.

Далі приєднуємо до задачі кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисловості, і розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі.

Для першої (з обмеженням $x_2 \leq 7$) оптимальним буде розв'язок $x_1^1 = 1, 2, x_2^1 = 7, Z_{\max}^1 = 1470$, а для другої (з обмеженням $x_2 \geq 8$) $x_1^2 = 0, 75, x_2^2 = 8, Z_{\max}^2 = 1462, 5$.

Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, узявши для наступного розгалуження першу задачу, оптимальний план якої дає більше значення функціоналу.

Далі розв'язуємо задачу, приєднуючи до неї обмеження $x_1 \leq 1$ і $x_1 \geq 2$, звідки й знаходимо оптимальний план X^* ($x_1 = 2; x_2 = 5$), $Z_{\max} = 1450$, що збігається з розв'язком, отриманим за методом Гоморі.

5.4. Приклади цілочислових економічних задач

Приклад 5.3. Задача лінійного розкрою

У цеху розрізають пруті завдовжки 6 м на заготовки довжиною 1,4; 2 і 2,5 м. Усього в цеху є 200 прутів. Потрібно отримати не менше 40, 60 і 50 заготовок довжиною відповідно 1,4; 2 і 2,5 м.

Побудувати загальну і числову модель лінійного розкрою. За критерій оптимізації є сенс узяти мінімум відходів.

Розв'язування задачі

Нехай i ($i \in I$) – вид заготовки. Кожний прут можна розрізати різними j ($j \in J$) способами.

Скористаємося такими позначеннями:

a_{ij} – вихід заготовок i -го виду в разі розрізування прута j -м способом;

c_j – відходи в разі розрізування прута j -м способом;

A – кількість наявних прутів;

B_i, D_i – відповідно нижня і верхня межі потреби в i -й заготовці;

x_j – кількість прутів, які розрізані за j -м варіантом.

Запишемо загальну економіко-математичну модель лінійного розкрою.

Критерій оптимальності

$$\min Z = \sum_{j \in J}^n c_j x_j$$

за умов, що

$$B_i \leq \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq D_i \quad (i \in I),$$

$$\sum_{j \in J} x_j \leq A,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J),$$

$$x_j - \text{цілі} \quad (j \in J).$$

Побудуємо числову економіко-математичну модель розрізання прутів, розглянувши можливі варіанти такого розрізання (табл. 5.5).

Таблиця 5.5. Варіанти розрізування прутів

Довжина заготовки, м	Варіанти розрізування прутів						
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1,4	4	–	–	1	1	2	2
2	–	3	–	1	2	1	–
2,5	–	–	2	1	–	1	1
Довжина відходів, м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7

Бажано щоб у множину увійшли всі можливі варіанти, навіть такі, які на перший погляд здаються неефективними, наприклад x_6 .

Запишемо числову економіко-математичну модель розрізання прутів:

$$Z = 0,4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0,1x_4 + 0,6x_5 + 1,2x_6 + 0,7x_7 \rightarrow \min$$

за таких умов:

а) щодо кількості заготовок завдовжки 1,4 м:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40;$$

2 м:

$$3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60;$$

2,5 м:

$$2x_3 + x_4 + 1,2x_6 + x_7 \geq 50;$$

б) щодо кількості наявних прутів:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 200;$$

в) щодо невід'ємності змінних:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0;$$

г) щодо цілочисловості змінних:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 - \text{цілі числа.}$$

Пропонуємо розв'язати цю задачу одним із методів цілочислового програмування.

5.5. Задачі дробово-лінійного програмування: постановка та методи розв'язання

Загальною задачею дробово-лінійного програмування називається задача знаходження максимального (мінімального) значення функції

$$z = \frac{\sum_{j=1}^n C_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \frac{z_1}{z_2}; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

за умов функціональних обмежень

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; i = 1, 2, 3, \dots, m;$$

якщо $C_j; d_j; b_i; a_{ij}$ – постійні числа,

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j > 0;$$

та нефункціональних обмежень:

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Зведення задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування здійснюється введенням позначення

$$y_0 = \left(\sum_{j=1}^n d_j x_j \right)^{-1}$$

та нових змінних

$$y_j = y_0 x_j; j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Знаходиться максимум функції

$$z = \sum_{j=1}^n C_j y_j; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

за таких умов:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0; i = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^n d_j y_j = 1; y_j \geq 0; y_0 \geq 0.$$

Приклад 5.4. Задача дробово-лінійного програмування

Виробництво двох різновидів пального (бензин *A* та бензин *B*) здійснюється на трьох типах технологічного обладнання. Термін обробки на кожному з типів обладнання кожного з різновидів пального наданий у табл. 5.6.

Таблиця 5.6. Витрати часу на виготовлення пального

Тип обладнання	Витрати часу на 1 м ³ пального	
	Бензин (<i>A</i>)	Бензин (<i>B</i>)
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Витрати на виробництво 1 м ³ пального, у. г. о.	2	3

Обладнання I та III типів підприємство може використувати не більше 26 та 39 годин. Обладнання типу II доцільно використовувати не менше 4 годин.

Потрібно визначити, скільки тонн кожного різновиду пального потрібно виготовити підприємству, щоб собівартість тонни пального була мінімальна.

Розв'язування задачі

Припустимо, що підприємство виготовляє x_1 тонн бензину A та x_2 тонн бензину B . Загальні витрати на виробництво складають $2x_1 + 3x_2$, собівартість тонни пального складає

$$z = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}.$$

Обмеження на час використання обладнання складають

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 26; \text{(I)} \\ x_1 + x_2 \geq 4; \text{(II)} \\ 12x_1 + 3x_2 \leq 39. \text{(III)} \end{cases}$$

Позначимо $y_0 = (x_1 + x_2)^{-1}$ та введемо нові змінні:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2};$$

$$y_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}.$$

Цільова функція набуває вигляду

$$z' = 2y_1 + 3y_2; z' \rightarrow \min;$$

обмеження:

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 - 26y_0 \leq 0; \text{(I)} \\ y_1 + 2y_2 - 4y_0 \geq 0; \text{(II)} \\ 12y_1 + 3y_2 - 39y_0 \leq 0; \text{(III)} \\ y_1 + y_2 = 1. \text{(IV)} \end{cases}$$

Перетворимо нерівності на рівняння

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 - 26y_0 + y_3 = 0; (I) \\ y_1 + 2y_2 - 4y_0 - y_4 = 0; (II) \\ 12y_1 + 3y_2 - 39y_0 + y_5 = 0; (III) \\ y_1 + y_2 = 1. (IV) \end{cases}$$

З метою утворення штучного базису додамо у рівняння (II) невід'ємну змінну y_6 :

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 - 26y_0 + y_3 = 0; (I) \\ y_1 + 2y_2 - 4y_0 - y_4 + y_6 = 0; (II) \\ 12y_1 + 3y_2 - 39y_0 + y_5 = 0; (III) \\ y_1 + y_2 = 1. (IV) \end{cases}$$

Опорний план задачі

$$x = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0);$$

$$x = (y_0; y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6).$$

$$y_3; y_5; y_6 \text{ — базові змінні,}$$

$$y_0; y_1; y_2; y_4 \text{ — вільні змінні.}$$

У опорному розв'язку вільні змінні завжди дорівнюють нулю.

Цільова функція

$$z' = \frac{5}{26}y_0 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 0y_3 + \frac{16}{13}y_4 + 0y_5 + 0y_6 \rightarrow \min.$$

Розв'яжемо задачу лінійного програмування максимізації симплекс-методом:

$$z'' = \frac{5}{26}y_0 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + 0y_3 - \frac{16}{13}y_4 + 0y_5 + 0y_6 \rightarrow \max.$$

Побудуємо багатокутник розв'язків задачі (рис. 5.1).

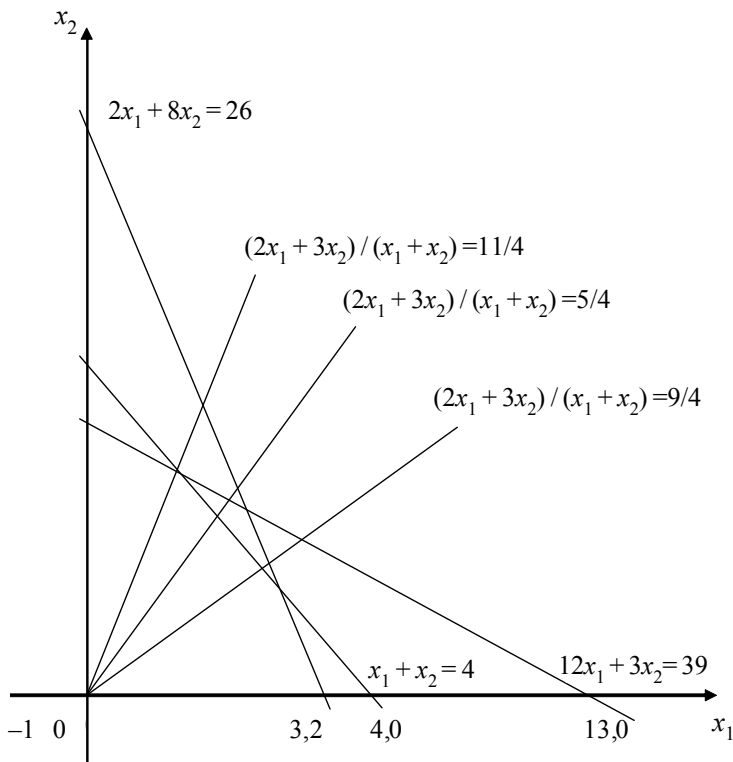


Рис. 5.1. Графічний розв'язок задачі дробово-лінійного програмування

З рівняння (IV) отримуємо $y_2 = -y_1 + 1$; після перетворення система обмежень матиме вигляд

$$\begin{cases} 26y_0 + 6y_1 - y_3 = 8; \\ 4y_0 + y_1 + y_4 - y_6 = 2; \\ 39y_0 - 9y_1 - y_5 = 3. \end{cases}$$

Контрольні запитання

1. Дайте визначення цілочисловим та частково цілочисловим задачам лінійного програмування.
2. Яка постановка загальної задачі цілочислового програмування?
3. Які методи застосовуються для розв'язку задач цілочислового програмування?
4. У чому сутність методів відтинання?
5. Розкрийте сутність комбінаторних методів.
6. Метод Гоморі. Розв'язання задач методом Гоморі.
7. Метод "гілок і меж". Розв'язання задач методом "гілок і меж".
8. Наведіть приклади цілочислових економічних задач.
9. У чому полягають особливості задач дробово-лінійного програмування?

Практичні завдання

1. Розв'яжіть задачу цілочислового програмування методом Гоморі.

Для придбання нового обладнання підприємство виділяє 19 г. о. Обладнання має бути розміщене на площі, що не перевищує 16 м^2 . Підприємство може замовити обладнання двох видів: машини типу А вартістю 2 г. о., що вимагають виробничої площі 4 м^2 і що забезпечують продуктивність за зміну 8 т продукції, і машини типу В вартістю 5 г. о., що займають площу 1 м^2 і забезпечують продуктивність за зміну 6 т продукції. Необхідно скласти оптимальний план придбання обладнання, що забезпечує максимальну загальну продуктивність.

2. Розв'яжіть задачу цілочислового програмування методом "гілок і меж". Знайдіть максимум функції $F = 2x_1 + x_2$ за таких умов:

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24,$$

$$3x_1 - 3x_2 + x_4 = 4,$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_5 = 3,$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 5)$$

$$x_j - \text{цілі} \ (j = 1, 5).$$

3. Розв'яжіть задачу дробово-лінійного програмування

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$z = \frac{2x_1 + x_2}{1,5x_1 + x_2 + 4} \rightarrow \max.$$

Тема 6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

6.1. Сутність та особливості задач нелінійного програмування

6.2. Геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування

6.3. Математичний апарат економіста для розв'язання задач нелінійного програмування

6.4. Квадратичне програмування

6.1. Сутність та особливості задач нелінійного програмування

У задачах лінійного програмування, які розглядалися раніше, всі невідомі входили у першому ступені як до системи обмежень, так і до цільової функції. Тому ці задачі були досить простими у постановці і за методами розв'язування.

Зрозуміло, що ряд економічних задач допускає такі математичні моделі, до яких невідомі або деяка їх частина входять нелінійно. Наприклад, нехай критерієм оптимальності є собівартість одиниці виробленої продукції. Очевидно, що вона залежить від розміру підприємства. Так, зі збільшенням обсягу продукції собівартість її зменшується. Проте таке зменшення не безмежне. Настає такий момент, коли внутрішні витрати підприємства починають зростати (збільшуються витрати на перевезення, збереження продукції тощо), що у свою чергу

призводить до збільшення собівартості. Функція, яка і спадає, і зростає, вже не може бути лінійною. Крім того, якщо врахувати в моделях лінійного програмування інші можливі випадки, то ці моделі трансформуються також у нелінійні. Наприклад, припустивши, що в задачі про використання ресурсів обсяг реалізації впливає на прибуток, маємо цільову функцію з нелінійністю.

Отже, лінійні моделі ми можемо вважати першим наближенням реальної задачі. У тих випадках, коли існує широкий вибір допустимих планів і наше уявлення про характер оптимального зв'язку не зовсім повне, лінійні моделі можуть бути неадекватними.

У більшості випадків нелінійність моделі обумовлюється, як правило, структурними співвідношеннями економічного процесу або непропорційністю зміни витрат, випуску продукції, показників якості.

У задачі нелінійного програмування функція цілі та функції обмежень нелінійні відносно змінних і не обов'язково є неперервними функціями. Загальна задача нелінійного програмування формулюється таким чином: знайти максимум (мінімум) цільової функції

$$z = z(x_1; x_2 \dots x_n; c_1; c_2; \dots c_j \dots c_p)$$

при виконанні обмежень, що накладаються на змінні проектування x_i :

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots x_n) &\leq b_1, \\ g_2(x_1, x_2, \dots x_n) &\leq b_2, \\ g_3(x_1, x_2, \dots x_n) &\leq b_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ g_m(x_1, x_2, \dots x_n) &\leq b_m \\ x_1 &> 0, \\ x_2 &> 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n &> 0, \end{aligned}$$

де z – цільова функція, що нелінійна відносно x_i ; x_i – змінна проектування; g_k – нелінійна функція відносно x_i ; c_j , b_k – постійні коефіцієнти.

Якщо коефіцієнти c , b або частина з них мають імовірнісний характер, така задача математичного програмування має назву стохастичної задачі оптимізації. У тому випадку коли до параметрів задачі потрапляє час або інша подібна монотонна змінна, таку задачу оптимізації називають задачею динамічного програмування.

Однією з основних особливостей задач нелінійного програмування є можливість різними способами задавати цільову функцію. Якщо в лінійному випадку вона була суворо монотонною і досягала свого оптимального значення лише у вершині багатокутника розв'язку, то тут картина зовсім інша. Наприклад, навіть графік функції однієї змінної свідчить про те, що вона вже має багато локальних максимумів.

Друга особливість задач нелінійного програмування впливає із порушення властивості опуклості багатокутника розв'язків задач лінійного програмування. Легко навести приклади задач, де область розв'язків задачі нелінійного програмування буде багатозв'язною.

Серед задач нелінійного програмування досліджені лише окремі часткові задачі. Для загальних задач нелінійного програмування побудовані окремі алгоритми. У більшості випадків оптимізація задач нелінійного програмування здійснюється за допомогою числових методів розрахунку з використанням обчислювальної техніки. Важливим частковим випадком задачі нелінійного програмування є задача квадратичного програмування.

У задачі квадратичного програмування функція цілі квадратична відносно змінних проектування. Задача квад-

ратичного програмування має один локальний мінімум, що співпадає з глобальним та може не мати обмежень.

Загальна задача квадратичного програмування формулюється наступним чином: знайти максимум (або мінімум) квадратичної цільової функції. Відсутність обмежень дозволяє використовувати для пошуку оптимуму апарат безумовної оптимізації.

6.2. Геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування

Для більшої наочності проілюструємо ці випадки графічно. Розглянемо випадок задачі з двома змінними з обмеженнями-нерівностями.

Приклад 6.1. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 + 5$$

за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Система обмежень лінійна, тому область розв'язків складається з багатокутника розв'язків.

Неважко помітити, що цільову функцію можна записати таким чином:

$$z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2.$$

Отже, z є квадратом радіуса кола. При фіксованому z маємо коло з центром у точці, а найбільше концентричне коло буде проходити через точку багатокутника розв'язків. Тому

$$z_{\max} = (6 - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 29.$$

Аналогічно $z_{\min} = (1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = 0$. У такому випадку найменше значення функції міститься в області розв'язків, а найбільше – на її границі. Якщо в цьому ж прикладі розглянути функцію $z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$, то

$$z_{\max} = (4 - 0)^2 + (4 - 0)^2 = 32,$$

$$z_{\min} = \left(\frac{4 + 4 - 6}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

Приклад 6.2. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 8$$

за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 x_2 \leq 3, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ 0 \leq x_2 \leq 6. \end{cases}$$

Область розв'язків є незв'язною – складається з двох окремих частин. Маємо два однакових локальних мінімуми. Координати цих точок можна знайти як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4; \\ x_1 x_2 \leq 3, \\ x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \\ x_1 = 1, \quad x_2 = 3. \end{cases}$$

$$z_{\min} = 1 - 4 \cdot 1 + 3 - 4 \cdot 3 + 8.$$

Легко перевірити, що маємо і два локальні максимуми:

$$z(M) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 8 = 13, \quad z(C) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 8 = 20.$$

6.3. Математичний апарат економіста для розв'язання задач нелінійного програмування

6.3.1. Умови оптимальності функції

Розглянемо умови оптимальності цільової функції. Припустимо, що цільова функція $z(x)$ двічі неперервно диференційована. Для того щоб вона мала безумовний локальний мінімум, необхідно, щоб усі її часткові похідні в точці x^* перетворювалися на нуль (x^* – точка локального мінімуму):

$$\nabla z(x^*) = 0.$$

Будь-яку точку x^* , в якій виконується вказана умова, називають стаціонарною точкою функції $z(x^*)$. Однак стаціонарними будуть також і точки максимуму, і сідлові точки (точки перегину для функції однієї змінної), де немає ні максимуму, ні мінімуму.

Вимога дорівнювати нулеві градієнта цільової функції називається необхідною умовою оптимальності першого порядку. Ця умова має відношення до перших часткових похідних цільової функції; умова утворює систему n -рівнянь для визначення n компонентів вектора x .

Для визначення характеру стаціонарної точки необхідно знайти матрицю других часткових похідних цільової функції (матрицю Гессе)

$$\nabla^2 z(x^*) = H(x^*).$$

Якщо матриця $H(x^*)$ двічі неперервно диференційованої функції $z(x)$ у стаціонарній точці x^* не є від'ємною, то функція $z(x)$ у цій точці має безумовний локальний мінімум. Ця умова є необхідною умовою оптимальності другого порядку. Необхідні умови оптимальності використовуються для того, щоб довести не оптимальність точки. Для доведення її (точки) оптимальності використовуються достатні умови.

Цільова функція задачі квадратичного програмування має один екстремум. Таку цільову функцію називають унімодальною цільовою функцією. Цільова функція задачі нелінійного програмування в загальному випадку має декілька екстремумів і таку цільову функцію називають мультимодальною цільовою функцією.

Якщо на цільову функцію накладаються обмеження (умови), то екстремум такої цільової функції називається умовним екстремумом. Якщо на цільову функцію не накладаються обмеження (умови), то екстремум такої цільової функції називається безумовним, або дійсним екстремумом.

Нагадаємо з математики:

$$\nabla z(x^*) = 0,$$

$$\frac{\partial z(x^*)}{\partial x_i} = 0,$$

де ∇ – оператор набла; $i = 1, 2, \dots, n$,
наприклад

$$z(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 100.$$

$$\nabla z(x) = \begin{vmatrix} 2x_1 & -4 \\ 2x_2 & -8 \\ 2x_3 & -12 \end{vmatrix}; \quad \nabla z(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix};$$

$$\nabla z(x) = 0 \text{ при } x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6,$$

$$\bar{x}^* = 2i + 4j + 6k,$$

$$\nabla^2 z(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 z(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix};$$

$$\nabla^2 z(x) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Матриця додатно визначена, якщо вона додатна для усіх значень x , за винятком $x = 0$, що можливо тільки за умови, якщо додатні усі власні значення неособливої матриці даної форми. Симетрична матриця додатно визначена, якщо додатні її головні мінори.

Функція $z(x)$ має локальний мінімум у точці x_0 , якщо існує деяка додатна величина δ , така, що коли $|x - x_0| < \delta$, то $z(x) \geq z(x_0)$, тобто існує околиця точки x_0 , така, що для усіх значень x в околиці цієї точки значення $z(x)$ більше за $z(x_0)$. Функція $z(x)$ має глобальний мінімум у точці x^* , якщо для усіх значень x виконується нерівність $z(x) \geq z(x^*)$. Визначення локального та глобального максимумів аналогічні попереднім.

Функція, що неперервна в деякій обмеженій замкненій зоні, обов'язково має в цій зоні глобальні мінімум та максимум. Ці значення досягаються або в точках екстремуму, що знаходяться всередині зони, або в точках, що знаходяться на межі зони.

Розривна функція або неперервна в незамкненій зоні може не мати ні найменшого, ні найбільшого значення.

Власним значенням (характеристичним числом, власним числом) матриці A називається коефіцієнт d , на який помножуються координати вектора V у рівнянні

$$(A - DE)V = 0,$$

де A – матриця; E – вектор; V – власний вектор.

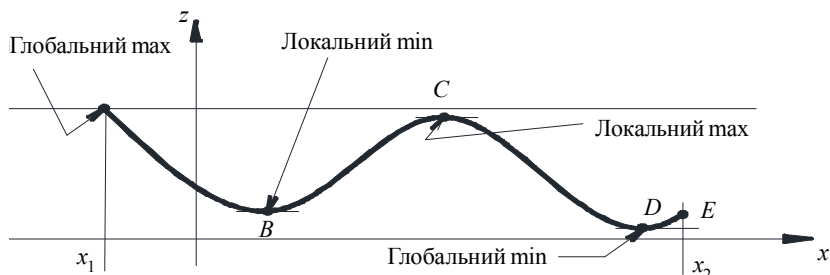


Рис. 6.1. Схема пошуку оптимума:
(*) B, C, D – точки екстремуму; x_1, x_2 – границі пошуку

Матриця $A(n, n)$ n -го порядку в загальному випадку має n різних власних чисел, що є коренями характеристичного рівняння матриці

$$\text{Det}(A - dE) = 0,$$

яке зображається у розгорнутому вигляді так:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - d) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - d) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - d) \end{vmatrix} = 0.$$

Головні мінори матриці A мають вигляд

$$\nabla_1 = a_{11}; \quad \nabla_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \nabla_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots$$

Необхідною та достатньою умовою додатно визначеної симетричної матриці є

$$\nabla_1 > 0; \quad \nabla_2 > 0; \quad \dots \quad \nabla_n > 0.$$

У нашому прикладі

$$\text{Det}(\nabla^2 z - xE) = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} (2-d) & 0 & 0 \\ 0 & (1-d) & 0 \\ 0 & 0 & (2-d) \end{vmatrix} = 0,$$

або $(2-d)^3 = 0$, де $d_1 = d_2 = d_3 = 2$.

Усі власні значення матриці $\nabla^2 z$ та й сама матриця додатні в точці x^* , що дозволяє стверджувати, що точка x^* є точкою оптимуму (або максимуму) функції $z(x)$.

Головні мінори матриці мають вигляд

$$\nabla_1 = 2 > 0; \quad \nabla_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0; \quad \nabla_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Головні мінори матриці додатні, що, як і в попередньому випадку, дозволяє стверджувати, що точка x^* є точкою оптимуму функції $z(x)$.

6.3.2. Скалярне поле

Скалярним полем називається плоска просторова зона, з кожною точкою якої пов'язане певне значення деякої скалярної величини. Визначення поля скалярної величини z дорівнює завданню скалярної (числової) функції $z = z(x_i)$. Лінією

рівня плоского скалярного поля називається сукупність точок площини, в якій функція цього поля має однакові значення.

Лінії рівня визначаються рівнянням $z(x_i) = c$ ($z(x_1, x_2) = c$). Поверхнею рівня просторового скалярного поля називається сукупність точок простору, в якому функція цього поля має однакові значення. Через кожну точку поля проходить тільки одна поверхня (лінія) рівня. Поверхня рівня визначається рівнянням

$$z(x) = c \quad (z(x_1, x_2, x_3) = c).$$

Похідною функції $z(x_i)$ в точці M по напрямленню l називається межа, до якої прагне відношення $z(M) - z(M_1)$ до величини відрізка MM_1 , якщо точка M_1 спрямована до точки M , залишаючись на прямій l :

$$\frac{\partial z}{\partial l} = z'_l = \lim_{MM_1 \rightarrow 0} \frac{z(M) - z(M_1)}{MM_1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial x_3} \cos \gamma = \bar{z} \cdot \bar{l},$$

де $\bar{z} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2}; \frac{\partial z}{\partial x_3} \right\}$ – нормальний вектор до поверхні рівня;

$\bar{l} = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ – одиничний вектор напрямлення l .

Похідна функції z по напрямку лінії рівня (дотичній до лінії рівня) та похідна функції $z(x_1, x_2, x_3)$ по напрямленню будь-якої лінії, що лежить на поверхні рівня (за будь-яким напрямленням, що дотична до поверхні рівня) дорівнює нулеві. Похідні функції по додатних напрямленнях осей координат дорівнюють її частковим похідним.

Гradientом функції $z(x_i)$ поля $z(x_i)$ називається вектор

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial x_3} \bar{k}.$$

Напрямок вектора $\text{grad } z$ у кожній точці поля $z(x_i)$ співпадає з напрямом нормалі до поверхні (лінії) рівня, що проходить через цю точку.

Похідна функції по напрямку градієнта

$$\frac{\partial z(x_i)}{\partial l_{\text{gr}}} = \text{grad } z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2}.$$

Градієнт – це вектор швидкості найшвидшого зростання функції.

Приклад

Є функція

$$z(x_i) = \frac{10}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}.$$

У якому напрямку повинна рухатись точка M при переході крізь точку $M_1(2; 0, 1)$, щоб функція $z(x)$ зменшувалась з найбільшою швидкістю?

Знайдемо часткові похідні $z(x_i)$ функції.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial \left(\frac{10}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1} \right)}{\partial x_1} = \frac{-20x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{a}{x_1^2 + b} \right)}{\partial x_1} &= \frac{a \partial \left(\frac{1}{x_1^2 + b} \right)}{\partial x_1} = \frac{a \partial \left[(x_1^2 + b)^{-1} \right]}{\partial x_1} = \\ &= a \cdot \left[-1(x_1^2 + b)^{-2} \cdot \frac{\partial (x_1^2 + b)}{\partial x_1} \right] = \frac{-a}{(x_1^2 + b)^2} \cdot 2x_1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{-2ax_1}{(x_1^2 + b)^2} = \frac{-20x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2};$$

$$a = 10; \quad b = x_2^2 + x_3^2 + 1,$$

$$\text{grad } z(x_i) = \frac{-20}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1)^2} (x_1 \bar{i} + x_2 \bar{j} + x_3 \bar{k}).$$

У точці $M_1(2; 0; 1)$ $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 2,$

$$\begin{aligned} \text{grad } z(M_1) &= \frac{-20}{(2^2 + 0^2 + 1^2)^2} (2 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 1 \cdot \bar{k}) = \\ &= 1,11 \cdot \bar{i} - 0,556 \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

Напрямок найбільшої швидкості зменшення функції протилежний $\text{grad } z(M_1)$ і дорівнює

$$-\text{grad } z(M_1) = 1,11 \cdot \bar{i} + 0,556 \cdot \bar{k}.$$

6.4. Квадратичне програмування

У задачі квадратичного програмування функція цілі квадратична відносно змінних проектування. Задача квадратичного програмування має локальний мінімум, що співпадає з глобальним та може не мати обмежень.

У загальному вигляді задача квадратичного програмування формулюється наступним чином: знайти максимум (або мінімум) квадратичної цільової функції

$$z = \sum c_i x_i + \sum_{ij=1}^n d_{ij} x_i x_j,$$

де z – цільова функція; x_i – змінні проектування; $i, j = 1, 2, \dots, n$; c_i, d_{ij} – числові константи.

Обмеження, що накладаються на цільову функцію, якщо вони існують, лінійні та виглядають так:

$$y_k = \sum a_{ik} x_i \{ \leq, =, \geq \} b_k \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

де b_k – числові константи.

Зона припустимих значень, що формується обмеженнями, опукла або зводиться до неї (обмеження лінійні). Якщо цільова функція опукла (квадратична залежність), то наявність обмежень не є обов'язковою. Відсутність обмежень дозволяє для пошуку оптимуму використовувати апарат безумовної мінімізації.

6.4.1. Задача конструювання (приклад)

Для прикладу розглянемо задачу виготовлення портової ємності для рідких вантажів.

З листового матеріалу необхідно сконструювати циліндричну портову ємність для рідких вантажів таким чином, щоб маса ємності була мінімальною, а місткість ємності складала не менше 1000 м³. Схема ємності подана на рис. 6.2.

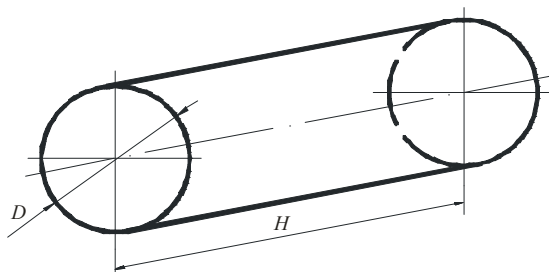


Рис. 6.2. Схема ємності

Маса ємності пропорційна площі її поверхні діаметром D та висоті ємності H :

$$S = 2 \frac{\pi D^2}{4} + \pi D H = 0,5 \pi D^2 + \pi D H = \pi D \left(\frac{D}{2} + H \right).$$

Об'єм ємності

$$V = \frac{\pi D^2 H}{4} = 0,25 \pi D^2 H.$$

Вочевидь задача сформульована таким чином: знайти значення незалежних змінних $x_1(D)$ і $x_2(D)$, при яких функція цілі $z(S)$ досягає максимуму при обмеженнях, що накладаються на незалежні змінні у вигляді

$$0,25 \pi x_1^2 x_2 \geq 1000.$$

Визначимо стаціонарні точки функції цілі

$$z(x_1, x_2) = 0,5 \pi x_1^2 + \pi x_1 x_2$$

з умови, що

$$\nabla z(x^*) = 0.$$

Визначимо часткові похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \pi x_1 + \pi x_2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \pi x_2 + 0.$$

Отже,

$$\nabla z(x^*) = \begin{vmatrix} (\pi x_1 + \pi x_2) \\ (\pi x_2 + 0) \end{vmatrix} = 0.$$

Отримана система має тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = 0$, що не є корисним. У чому помилка? Необхідно звернути увагу на обмеження, що накладаються на незалежні змінні.

Обмеження має нелінійний характер. Сенс обмеження полягає у тому, що ємність повинна бути більше 1000 м^3 . Маса ємності природно буде більшою, якщо ємність буде більша. В задачі необхідно визначити оптимальне співвідношення між висотою ємності та її діаметром при розмірі ємності в 1000 м^3 .

Тоді висота ємності знайдеться за формулою

$$H = \frac{V}{0,5\pi D^2},$$

а площа поверхні ємності

$$S = 0,5\pi D^2 + \frac{V}{0,25D}.$$

Після виконаних перетворень задача квадратичного програмування з обмеженнями зводиться до задачі квадратичного програмування без обмежень.

Функція цілі має вигляд

$$z(x) = a_1 x^2 + a_2 \frac{1}{x},$$

де $x = D$ – діаметр ємності, $a_1 = 0,5\pi$, $a_2 = \frac{1000}{0,25}$ – числові константи.

Визначимо стаціонарну точку цільової функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2a_1 x + a_2 \frac{(-1)}{x^2} = 0.$$

Тоді

$$x^* = \sqrt[3]{\frac{a_2}{2a_1}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{0,25 \cdot 2 \cdot 0,5\pi}} = 10,8 \text{ м } (x > 0).$$

Для визначення характеру стаціонарної точки знайдемо другу похідну цільової функції:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a_1 + a_2 \cdot 2x^{-3} = 2 \cdot 0,5\pi + \frac{1000}{0,25} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^3}$$

при $x^* = 10,8$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, як при будь-якому значенні $x > 0$.

Таким чином, функція цілі в точці x^* має безумовний локальний мінімум, який для квадратичної цільової функції є одночасно і глобальним.

Висновок: правильне формулювання задачі оптимізації дозволило перевести нелінійне обмеження, що накладається на змінні проектування, в цільову функцію. Цільова функція значно спростилась, а квадратична задача оптимізації з обмеженнями перетворилась на квадратичну задачу оптимізації без обмежень.

Контрольні запитання

1. Яка загальна постановка задачі нелінійного програмування?
2. Чим задачі нелінійного програмування відрізняються від задач лінійного програмування?
3. Які економічні проблеми формуються як задачі нелінійного програмування? Наведіть приклади.
4. Яка графічна інтерпретація задач нелінійного програмування?

Практичні завдання

1. Знайдіть область розв'язків задачі нелінійного програмування графічним методом. Обмеження задані функціями $f = -x_1 + x_2 + 1$; $f_1 = (x_1 - 2)^2 - x^2 - 1$; $f_2 = -2,25x_1 + 4,5x_2 - 13,5$; $f_3 = 4 - (x_1 - 4)^2 - (x_2 - 1)^2$.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x_1^2 - x_1 + 2x_2^2 - 0,5x_2 + 3$ за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 3x_1^2 - 2x_1 - 6x_2 + 1,5x_2^2 - 1$ за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 x_2 \leq 11, \\ 0 \leq x_1 \leq 7, \\ 0 \leq x_2 \leq 4. \end{cases}$$

Тема 7. Ітераційні методи пошуку оптимуму задачі нелінійного програмування

- 7.1. Постановка задачі
- 7.2. Градієнтні методи
- 7.3. Приклад пошуку мінімуму функції
- 7.4. Аналітичне дослідження функції
- 7.5. Пошук локального мінімуму функції методом найшвидшого спуску
- 7.6. Метод координатного спуску
- 7.7. Метод спірального координатного спуску
- 7.8. Метод штрафних функцій
- 7.9. Динамічне програмування
- 7.10. Метод сіток (метод співставної оцінки варіантів)

7.1. Постановка задачі

Для пошуку мінімуму цільової функції задачі нелінійного програмування найчастіше використовують ітераційний процес (процес повторення, від лат. *iteratio* – повторення).

Мінімізується функція $z(x_1)$, що визначена у n -вимірному просторі. Для того щоб наблизитись до точки екстремуму x^* , необхідно з вихідної точки пошуку x_k рухатись у напрямку зменшення функції

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot P_k,$$

де x_k – вихідна точка; x_{k+1} – наступна точка; α_k – числовий множник, що визначає розмір кроку в напрямку зменшення функції; P_k – вектор, що визначає напрям руху.

Використовуючи розклад функції $z(x_i)$ в ряд Тейлора в околиці точки x_i , отримаємо

$$z(x_i) = z(x_k) + \alpha_k \left(\frac{\partial z}{\partial P_k}, P_k \right) + \frac{\alpha_k^2}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial P_k^2}, P_k \right) + \dots$$

Залежно від кількості членів розподілу функції в ряд Тейлора способи пошуку мінімуму поділяються на прямі та побічні. Прямі методи (методи нульового порядку) засновані на обчисленні тільки цільової функції.

Побічні методи пошуку мінімуму цільової функції використовують значення цільової функції та значення її похідних. Побічні методи пошуку мінімуму першого порядку використовують значення цільової функції та значення її першої похідної. Побічні методи пошуку мінімуму другого порядку використовують ще і значення другої похідної.

7.2. Градієнтні методи

Градієнтні методи використовують для вибору напрямку руху з точки x_k до точки x_{k+1} при пошуку мінімуму функції $z(x_i)$. У зв'язку з тим що градієнт – це вектор швидкості найбільшого зростання функції, то при пошуку мінімуму функції слід рухатись у протилежному напрямку. В кожній точці значення градієнта буде знаходитися знову, тобто знову буде знаходитись напрям швидшої зміни функції (збільшення або зменшення). Такий спосіб пошуку мінімуму і дав назву методу – метод найшвидшого спуску (за аналогією зі спуском з гори).

Координати точки наступного наближення визначаються за формулою

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \frac{\partial z}{\partial l_{gr}},$$

де $\alpha_k > 0$; l_{gr} – напрямлення градієнта функції; $z = z(x_i)$ – функція, що мінімізується.

У координатній формі процес має вигляд

$$x_{k+1}^i = x_k^i - \alpha_k \cdot \frac{\partial z(x_k)}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Метод найшвидшого спуску є одним із широко застосовуваних методів пошуку мінімуму функції без обмежень. Алгоритм методу пошуку мінімуму має такий вигляд:

1. Обирається деяке довільне значення α_k та вихідна точка x_k ; $z(x_k)$.

2. Визначається наступна точка x_{k+1}

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \cdot \frac{\partial z(x_k)}{\partial l_{grk}}.$$

3. Розраховується значення функції в точці

$$z(x_{k+1}) = z \left(x_k - \alpha_k \cdot \frac{\partial z(x_k)}{\partial l_{grk}} \right).$$

4. Виконується перевірка нерівності

$$z(x_k) - z(x_{k+1}) \leq \varepsilon \cdot \alpha_k,$$

де ε – довільно обрана константа, що пов'язана з необхідною точністю розрахунків

$$0 < \varepsilon < 1.$$

5. Якщо нерівність виконується, то значення α_k зберігається для подальших розрахунків, якщо ні, то множник α_k зменшується.

6. Розрахунок завершується, якщо виконана умова локального мінімуму функції

$$z(x) \geq z(x_0) \text{ для } |x - x_0| < \delta,$$

де δ – деяка додатна величина.

7.3. Приклад пошуку мінімуму функції

Дана функція $z(x_i) = 6x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Необхідно знайти значення x_1^*, x_2^* , при яких функція $z(x_i^*)$ має мінімальне значення.

Побудуємо графіки функції $z(x_i)$ при її фіксованих значеннях (рис. 7.1).

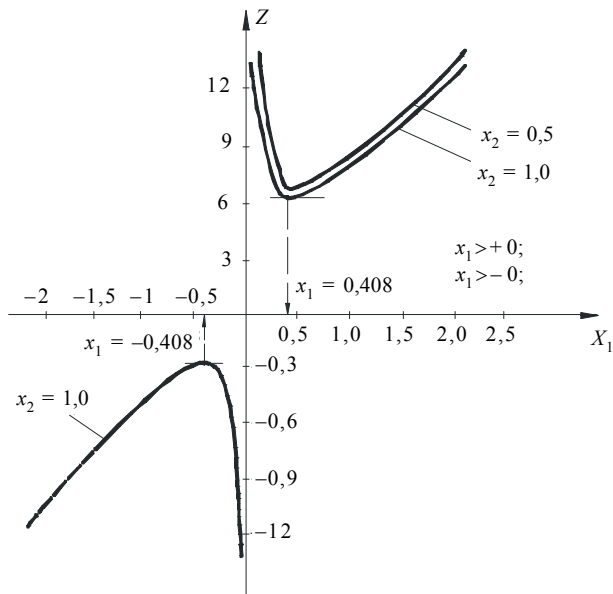


Рис. 7.1. Лінії рівня при $x_2 = 0,5; 1,0; 1,5$
 $x_2 = 0,5; 1,0; 1,5;$

$$\begin{aligned}x_2 = 0,5 \quad z(x_2 = 0,5; x_1) &= 6x_1 + 0,5 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{0,5} = \\&= 6x_1 + \frac{1}{x_1} + 2,5;\end{aligned}$$

$$x_2 = 1,0 \quad z(x_1; x_2 = 1,0) = 6x_1 + \frac{1}{x_1} + 2,0;$$

$$x_2 = 1,5 \quad z(x_1; x_2 = 1,5) = 6x_1 + \frac{1}{x_1} + 2,17).$$

Побудуємо графіки функції $z(x_i)$ при інших фіксованих значеннях (рис. 7.2).

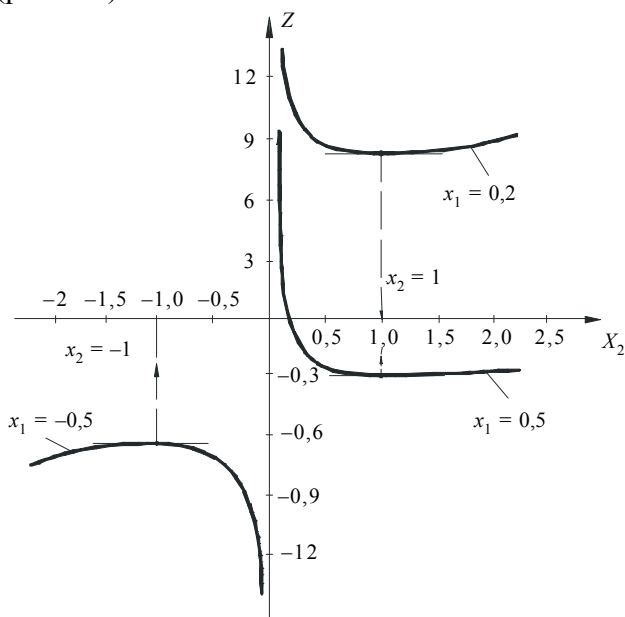


Рис. 7.2. Лінії рівня при $x_1 = -0,5; 0,2$

$$x_1 = -0,5; \quad x_1 = 0,2.$$

$$x_1 = -0,5; \quad z(-0,5; x_2) = x_2 + \frac{1}{x_2} - 5;$$

$$x_1 = 0,2; \quad z(0,2; x_2) = x_2 + \frac{1}{x_2} + 6,2.$$

Залежно від чверті площини x_1, x_2 , функція $z(x_i)$ має різну форму. За допомогою отриманих перетинів функції побудуємо загальний її вигляд.

Площини ZOX_1 та ZOX_2 є асимптотичними площинами для функції $z(x_i)$. У кожній чверті простору є одна стаціонарна точка (рис. 7.3). У першій чверті – точка мінімуму, в третій – максимуму; в другій та четвертій – точки перегину функції.

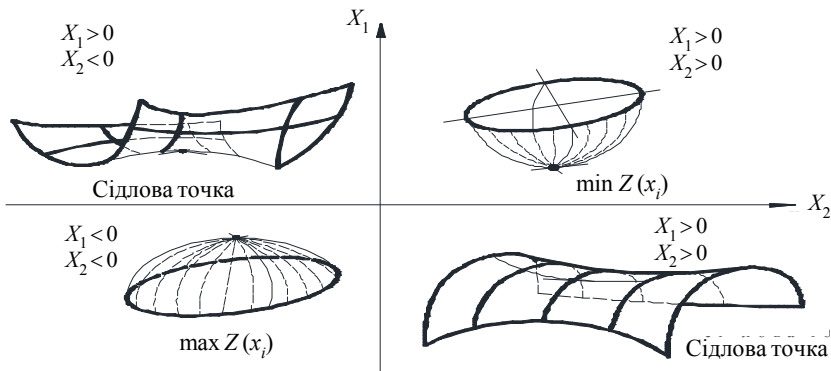


Рис. 7.3. Стаціонарні точки

7.4. Аналітичне дослідження функції

Виконаємо аналітичне дослідження функції

$$z(x_i) = 6x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 6 - \frac{1}{x_1^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 1 - \frac{1}{x_1^2}.$$

Визначимо стаціонарні точки з умови $\nabla z(x^*) = 0$:

$$\nabla z = \begin{vmatrix} 6 - \frac{1}{x_1^2} \\ 1 - \frac{1}{x_2^2} \end{vmatrix} = 0, \text{ звідки}$$

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{6}} = \pm 0,408,$$

$$x_2 = \pm \sqrt{1} = \pm 1,0.$$

Розрахуємо матрицю Гессе:

$$\nabla^2 z(x_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}; & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}; & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = (-1)(-2)x_1^{-3} = \frac{2}{x_1^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

$$\nabla^2 z(x_i) = \begin{vmatrix} \frac{2}{x_1^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{x_2^3} \end{vmatrix} = \frac{4}{(x_1 x_2)^3}.$$

Таким чином, $\nabla^2 z > 0$, якщо $x_1 > 0, x_2 > 0$ або якщо $x_1 < 0, x_2 < 0$, що дозволяє стверджувати, що точки $x_0^*(0, 408; 1, 0;)$ та $x^*(-0, 408; -1, 0)$ є точками локального екстремуму: $\nabla^2 z < 0$, якщо $x_1 > 0, x_2 < 0$ або якщо $x_1 < 0, x_2 > 0$, що дозволяє стверджувати, що точки $x^0(0, 408; -1, 0)$ та $x^0(-0, 408; 1, 0)$ є точками перегину функції (точками сідла).

Значення функції в точках екстремуму

$$z(0, 408; 1, 0) = 6 \cdot 0, 408 + \frac{1}{0, 408} + 1 + \frac{1}{1} = 6, 898,$$

$$\begin{aligned} z(-0, 408; -1, 0) &= 6 \cdot (-0, 408) + \frac{1}{-0, 408} + \\ &+ (-1) + \frac{1}{-1} = -6, 898. \end{aligned}$$

Для класифікації точок екстремуму необхідно обчислити декілька значень функції в околиці точки x^* та перевірити умови

$$z(x^*) \leq z(x^* + \Delta x) - \min,$$

$$z(x^*) \geq z(x^* + \Delta x) - \max$$

при Δx достатньо малої величини.

Точка (1) $x^* (0,408; 1,0)$, $z(x^*) = 6,898$,

$$x_1 = 0,5; x_2 = 1,2; z(0,5; 1,2) = 7,03,$$

$$x_1 = 0,3; x_2 = 0,8; z(0,3; 0,8) = 7,18,$$

$z(x^*)$ – точка мінімуму.

Точка (2) $x^* (-0,408; 1,0)$, $z(x^*) = -6,898$,

$$x_1 = -0,5; x_2 = -1,2; z(-0,5; -1,2) = -7,03,$$

$$x_1 = 0,3; x_2 = -0,8; z(-0,3; -0,8) = -7,18,$$

$z(x^*)$ – точка максимуму.

Точка (3) $x^* (0,408; -1,0)$, $z(x^*) = 2,899$,

$$x_1 = 0,5; x_2 = -1,0; z(0,5; -1,5) = 2,83,$$

$$x_1 = 0,5; x_2 = -1,5; z(0,5; -1,5) = 2,83,$$

$z(x^*)$ – точка сідла.

Точка (4) $x^* (-0,408; 1,0)$, $z(x^*) = -2,899$, точка (4) аналогічна точці (3) – точка сідла.

7.5. Пошук локального мінімуму функції методом найшвидшого спуску

Визначимо методом найшвидшого спуску локальний мінімум функції

$$z(x_1, x_2) = 6x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

За вихідну точку візьмемо точку

$$x_k \{x_k^1; x_k^2\} = x_k \{4; 2\}.$$

Нехай $\alpha_k = 0,5$, тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 6 - \frac{1}{x_1^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 1 - \frac{1}{x_2^2},$$

$$z(x_k) = 6 \cdot 4 + \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{2} = 26,75,$$

$$\frac{\partial z(x_k)}{\partial x_1} = 6 - \frac{1}{4^2} = 5,94,$$

$$\frac{\partial z(x_k)}{\partial x_2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 0,75,$$

$$\text{grad } z(x_k) = 5,94 \bar{i} + 0,75 \bar{j},$$

$$x_{k+1}^1 = x_k^1 - \alpha_k \frac{\partial z(x_k)}{\partial x_1} = 4 - 0,5 \cdot 5,94 = 1,03,$$

$$x_{k+1}^2 = x_k^2 - \alpha_k \cdot \frac{\partial z(x_k)}{\partial x_2} = 2 - 0,5 \cdot 0,75 = 1,625,$$

$$z(x_{k+1}) = 6 \cdot 1,03 + 1,625 + \frac{1}{1,03} + \frac{1}{1,625} = 9,04 < z(x_k),$$

$$\frac{\partial z(x_{k+1})}{\partial x_1} = 6 - \frac{1}{1,03^2} = 5,06,$$

$$\frac{\partial z(x_{k+1})}{\partial x_2} = 1 - \frac{1}{1,625^2} = 0,621,$$

$$\text{grad } z(x^{k+1}) = 5,06 \bar{i} + 0,621 \bar{j}, \quad \text{прийmemo } \alpha_{j+1} = 1,$$

$$x_{k+2}^1 = x_{k+1}^1 - \alpha_{k+1} \frac{\partial z(x_{k+1})}{\partial x_1} = 1,03 - 0,1 \cdot 5,06 = 0,524,$$

$$x_{k+2}^2 = x_{k+1}^2 - \alpha_{k+1} \frac{\partial z(x_{k+1})}{\partial x_1} = 1,625 - 0,1 \cdot 0,621 = 1,56.$$

Слід зауважити, що на другому кроці спуску зменшена величина α_{k+1} ; індекс у незалежної змінної x_1 перенесено вгору, бо нижній індекс використано для позначення точки.

Тоді

$$z(x_{k+2}) = 6 \cdot 0,524 + 1,56 + \frac{1}{0,524} + \frac{1}{1,56} = 7,25 < z(x_{k+1}),$$

$$\frac{\partial z(x_{k+2})}{\partial x_1} = 6 - \frac{1}{0,524^2} = 2,35,$$

$$\frac{\partial z(x_{k+2})}{\partial x_2} = 1 - \frac{1}{1,56^2} = 0,589,$$

$$\text{grad } z(x_{k+2}) = 2,35 \cdot \bar{i} + 0,589 \cdot \bar{j},$$

$$x_{k+3}^1 = x_{k+2}^1 - \alpha_{k+1} \frac{\partial z(x_{k+1})}{\partial x_1} = 0,524 - 0,1 \cdot 2,35 = 0,289,$$

$$x_{k+3}^2 = x_{k+2}^2 - \alpha_{k+1} \frac{\partial z(x_{k+2})}{\partial x_2} = 1,56 - 0,1 \cdot 0,589 = 1,5,$$

$$z(x_{k+3}) = 6 \cdot 0,289 + 1,5 + \frac{1}{0,289} + \frac{1}{1,5} = 7,36 > z(x_{k+2}),$$

що свідчить про необхідність зменшити крок спуску; прийме-
і $\hat{\alpha}_{k+2} = 0,05$ та здійснимо знову обчислення:

$$x_{k+3}^1 = 0,524 - 0,05 \cdot 2,35 = 0,407,$$

$$x_{k+3}^2 = 1,56 - 0,05 \cdot 0,589 = 1,53,$$

$$z(x_{k+3}) = 6 \cdot 0,407 + 1,53 + \frac{1}{0,407} + \frac{1}{1,53} = 7,08 < z(x_{k+1}),$$

$$\frac{\partial z(x_{k+3})}{\partial x_1} = 6 - \frac{1}{0,407^2} = -0,0368,$$

$$\frac{\partial z(x_{k+3})}{\partial x_2} = 1 - \frac{1}{1,53^2} = 0,573,$$

$$\text{grad } z(x_{k+3}) = -0,0368 \cdot \bar{i} + 0,573 \cdot \bar{j},$$

$$x_{k+4}^1 = 0,407 - 0,05(-0,0368) = 0,409,$$

$$x_{k+4}^2 = 1,53 - 0,05 \cdot (0,573) = 1,5,$$

$$z(x_{k+4}) = 6 \cdot 0,409 + 1,5 + \frac{1}{0,409} + \frac{1}{1,5} = 7,06 < z(x_{k+3}).$$

Значення $x_{k+...}^1$ за наступних наближень буде коливатися біля $x_1^* = 0,408$.

Величина $x_{k+...}^1$ буде наближатися до $x_{k...}^* = 1$ та наблизиться до останнього після великої кількості наближень достатньо добре.

Графічно пошук мінімуму функції $z = 6x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ методом найшвидшого спуску наведено на рис. 7.4.

Пошук мінімуму функції $z = 6x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ методом найшвидшого спуску дозволяє зробити деякі висновки.

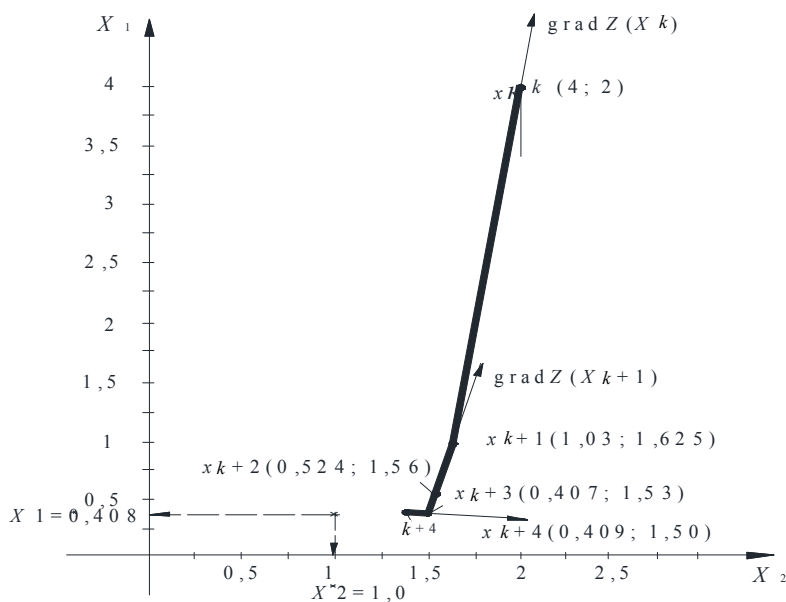


Рис. 7.4. Пошук мінімуму функції методом найшвидшого спуску

Метод найшвидшого спуску – побічний метод першого порядку (використовує першу похідну). Аналогічно класифікується метод пошуку класичним способом за допомогою похідних першого та другого порядків – побічний метод другого порядку.

Метод найшвидшого спуску є дієвим при пошуку локального мінімуму функції, що швидко змінюється (великі значення градієнта). Сходимість методу залежить від вдалого вибору кроку спуску (α_k) та вихідної точки пошуку. Метод дозволяє знайти найближчий до вихідної точки локальний мінімум, проте не дозволяє отримати відповідь на питання: функція унімодальна або мультимодальна.

Метод застосовується до неперервних диференційованих функцій широкого класу. Модифікації даного методу знаходять

широке використання при мінімізації функцій як з обмеженнями, так і без обмежень.

Оптимальне значення функції $z(x^*) = 6,9$, знайдене градієнтним методом $z(x_{k+4}) = 7,04$, відрізняється від знайденого методом найшвидшого спуску на 2,3 %, ($z(x_{k+3}) = 7,08 - 2,6$ %; $z(x_{k+2}) = 7,25 - 5$ %).

Значення x_{k+3}^1 та x_{k+4}^1 практично не відрізняються від знайденого аналітично. В той час як значення $x_{k+4}^2 = 1,5$ на 50 % відмінне від дійсного значення $x_2^* = 1,0$, знайденого методом похідних, що пояснюється пологістю функції $z(x_i)$ в околиці точки x^* у площині перетину ZOX_2 .

7.6. Метод координатного спуску

Розглянемо сутність методу на прикладі пошуку мінімуму функції трьох змінних $z = z(x_1, x_2, x_3)$:

1. Обирається вихідна точка $x_k \{x_k^1, x_k^2, x_k^3\}$.
2. Фіксується значення двох координат $x_2 = x_k^2, x_3 \neq x_k^3$.
3. Функція цілі перетворюється в функцію однієї змінної $z = z(x_1)$.
4. Обчислюється мінімум функції однієї змінної x_{k+1}^1 .

Таким чином, здійснюється перехід у точку $(k+1)$ з координатами $x_{k+1} \{x_{k+1}^1, x_k^2, x_k^3\}$, тобто виконано крок у напрямку, паралельному осі x_1 . Значення функції зменшилось.

З точки x_{k+1} виконується крок у напрямку, паралельному осі x_2 у точку $(k+2)$ з координатами $x_{k+2} \{x_{k+1}^1, x_{k+2}^2, x_k^3\}$.

Потім відбувається спуск у точку $x_{k+3} \{x_{k+1}^1, x_{k+2}^2, x_{k+3}^3\}$.

Цикл спусків по координатах завершено. Необхідність подальшого руху до мінімуму визначається як і в градієнтному методі.

Метод спуску по координатах простий та легко програмується, але збігається повільно, а при наявності ярів на функції цілі метод збігається погано.

7.7. Метод спірального координатного спуску

Метод спірального координатного спуску відрізняється від розглянутого вище (методу координатного спуску) тим, що по кожній із координат здійснюється крок, як у градієнтному методі. Величина кроку змінюється кожного разу при переході від пошуку мінімуму по одній змінній до пошуку мінімуму по другій змінній. У тривимірному просторі процес пошуку мінімуму нагадує спуск в ущелину по спіралі, що дало назву методу. Зазвичай цей метод дає деяке скорочення часу пошуку мінімуму порівняно з методом координатного спуску.

7.8. Метод штрафних функцій

Метод штрафних функцій є одним із найбільш простих і широко відомих методів розв'язування задачі математичного програмування. Ідея методу полягає в приблизному зведенні задачі мінімізації функції з обмеженнями до задачі мінімізації функції без обмежень. До функції цілі додається допоміжна функція, що відбирається таким чином, щоб вона співпадала із заданою мінімізованою функцією всередині зони припустимих значень і швидко зростала поза зоною.

Задача формулюється таким чином: мінімізувати функцію з обмеженнями $g_j(x_i) > 0$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

Функція без обмежень

$$F(x) = z(x) + P(x),$$

де $P(x)$ – штрафна функція.

Штрафна функція $P(x)$

$$P(x) = r \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(x)},$$

де r – додатна величина.

Тоді функція має вигляд

$$F(x) = z(x) + r \sum_{g=1}^m \frac{1}{g_i(x)}.$$

Вплив штрафної функції $P(x)$ полягає в створенні "гори з крутими схилами" уздовж границі зони обмежень.

Приймаючи r достатньо малою величиною для того щоб вплив $P(x)$ був малим в точці мінімуму, є можливість зробити точку мінімуму функції $F(x)$ без обмежень співпадаючу з точкою мінімуму функції $z(x)$ з обмеженнями.

Приклад. Мінімізувати функцію $z(x) = x$ при обмеженнях $g = x - 2 \geq 0$; ($x^* = 2$, $z(x^*) = 2$).

Розглянемо функцію без обмежень:

$$F(x) = x + r \cdot \frac{1}{x - 2}.$$

Знайдемо мінімум функції:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = 1 - \frac{r}{(x - 2)^2} = 0,$$

$$(x - 2)^2 = r; \quad x = 2 \pm \sqrt{r},$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = \frac{r}{(x - 2)^3} > 0,$$

якщо $x = 2 + \sqrt{r}$; $x^* = 2 + \sqrt{r}$; $z(x^*) \rightarrow 2 + \sqrt{r}$.

Якщо $r \rightarrow +0$, $x^* \rightarrow 2$, $z(x^*) \rightarrow 2 + 0$.

Графічно схему пошуку мінімуму функції наведено на рис. 7.5.

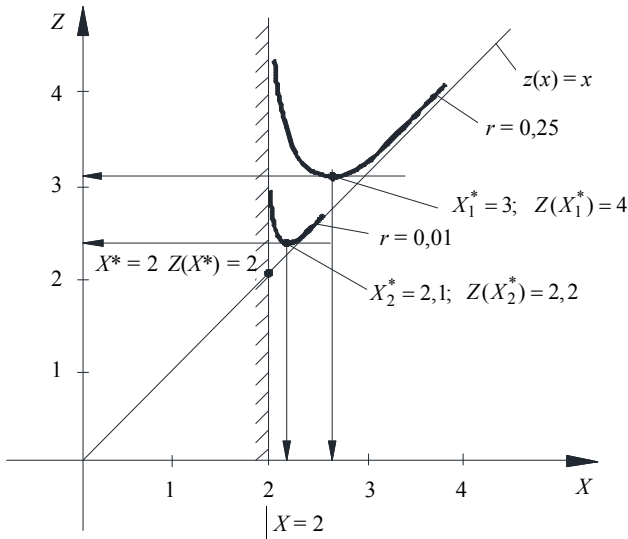


Рис. 7.5. Пошук мінімуму функції

7.9. Динамічне програмування

Динамічне програмування є особливим розрахунковим методом оптимізації, що дозволяє подати процес оптимізації у вигляді послідовності окремих кроків. Основою цього методу є принцип оптимальності, який стверджує, що яким би не був шлях досягнутого стану системи, наступні рішення повинні належати оптимальній програмі для частини шляху, що залишилась, починаючи з досягнутого стану системи.

Розглянемо використання методу динамічного програмування на прикладі задачі про вибір маршруту підводного апарата.

Приклад. Вибір маршруту підводного апарата

Вибір маршруту підводного апарата полягає у визначенні зміни глибини занурення та швидкості руху апарата.

Підводний апарат знаходиться на глибині H_0 занурення і має швидкість руху V_0 ; необхідно перевести апарат на глибину H_k та отримати швидкість V_k . Для спрощення задачі приймемо несприятливе припущення: $H_k > H_0$; $V_k > V_0$.

Відомі витрати електроенергії для підйому (або спуску) апарата з однієї глибини на іншу та витрати електрики для зміни швидкості руху апарата при постійній глибині занурення.

Припустимо, що процес занурення та набору швидкості складається з декількох кроків, на кожному з яких підводний апарат збільшує тільки глибину занурення або тільки швидкість руху (рис.7.6).

Стан апарата визначається параметрами V, H . Фазовий простір – двовимірний простір VOH . Фазові траєкторії переводять апарат з точки S_0 у точку S_k .

Поділимо зростання глибини занурення $(H_k - H_0)$ на n_1 рівних частин $\Delta H = \frac{H_k - H_0}{n_1}$, а зростання швидкості – на n_2 рівних частин $\Delta V = \frac{V_k - V_0}{n_2}$.

Процес переходу з точки S_0 у точку S_k буде складатися з $m = n_1 + n_2$ кроків. Витрати електроенергії на перехід з точки S_0 у точку S_k визначаться як

$$z = \sum_{i=1}^m g_i,$$

де V – витрати електроенергії при переході з точки i_{-1} у точку i .

Кожній траєкторії переходу з точки S_0 в точку S_k відповідають власні витрати електроенергії. Необхідно обрати оптимальну траєкторію, для якої витрати електроенергії будуть мінімальні.

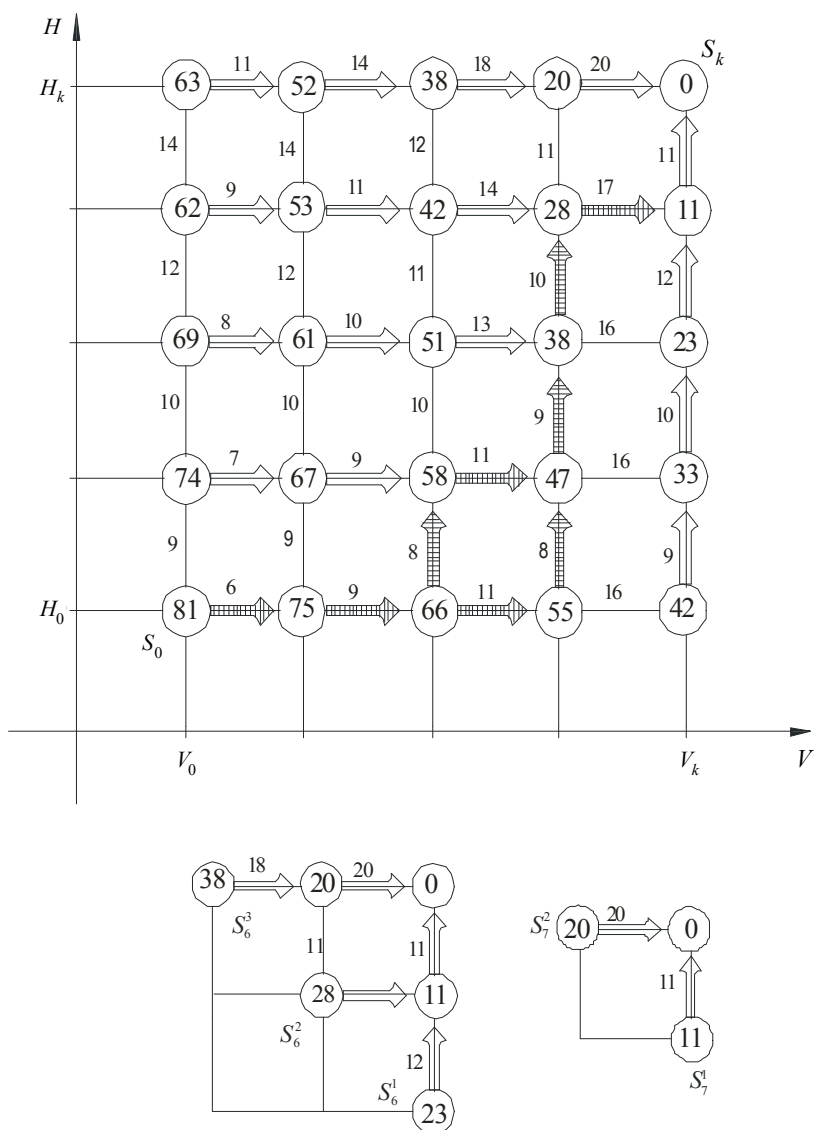


Рис. 7.6. Схема руху підводного апарата:
 $\Rightarrow$ – оптимальний шлях

Припустимо, що $n_1 = n_2 = 4$, $m = 8$. Витрати електроенергії g_i для кожного переходу вказані на рис. 7.6.

Наприкінці передостаннього кроку ($m - 1$), сьомий крок – точка S , що зображає підводний апарат на фазовій площині, може знаходитись або в точці S_7^1 , або в точці S_7^2 , з яких апарат за один крок може перейти в точку S_k , причому в єдиний спосіб.

Навколо кожної точки стану апарата вказано мінімальні втрати електроенергії, що треба здійснити для переходу в точку S_k . Стрілкою позначено напрям, у якому треба рухатись точці S , якщо вона потрапить у дане місце фазової площини.

Перейдемо до вибору оптимального напрямку руху по фазовій площині на передостанньому кроці (сьомому). Для цього розглянемо усі варіанти попереднього для нього (шостого) кроку, з яких за два кроки можливо потрапити в точку S_k . Таких варіантів три – точки S_6^1 , S_6^2 , S_6^3 . Перехід з точок S_6^1 та S_6^3 у точку S_k за два кроки можливо виконати лише одним способом. У колах навколо точок S_6^1 та S_6^3 запишемо цифри, що показують витрати електроенергії, необхідні для переходу з однієї точки в іншу.

Стрілки навколо кола вказують напрям, яким повинна рухатись точка S , якщо вона потрапить у дане місце фазової площини. З точки S_6^2 у точку S_k можливо потрапити двома способами: праворуч і вгору або вгору і праворуч. У першому випадку витрати електроенергії сягають $17 + 11 = 28$ одиниць, у другому $11 + 20 = 31$ одиниця.

Найменші витрати електроенергії будуть при русі праворуч–вгору (цей маршрут позначимо стрілкою). Далі за аналогією оптимізується п'ятий крок, розглядаються точки, з яких можливо за три кроки перейти в точку S_k .

Продовжуючи процес, потрапляємо в точку S_0 , де всередині кола буде вказано найменші витрати електроенергії. Стрілки (вони заштриховані) показують оптимальний шлях занурення та набору швидкості для підводного апарата.

7.10. Метод сіток (метод співставної оцінки варіантів)

7.10.1. Постановка задачі

Пошук мінімуму функції методом сіток відноситься до прямих методів нульового порядку.

Сутність методу полягає в тому, що межі зміни незалежних змінних поділяються на певну кількість інтервалів. У $(n + 1)$ -вимірному просторі будується n -вимірна сітка. Кожному вузлу сітки відповідає набір n -змінних проектування, яким відповідає значення (однозначне) цільової функції. Розраховані таким чином значення цільової функції порівнюються між собою та обирається найменше з розрахованих значень, котре і вважається мінімумом цільової функції.

Інтервали розподілу незалежних змінних (зона припустимих значень незалежних змінних) визначаються з аналізу фізичної сторони задачі та статистичних даних про подібні об'єкти дослідження. Крок зміни незалежних змінних (крок сітки) слід обрати таким, щоб функція цілі монотонно змінювалась у проміжку між вузлами.

При розподілі кожної з незалежних змінних на m -інтервалів число вузлів сітки (загальна кількість комбінацій незалежних змінних – кількість разів підрахунок цільової функції)

$$C_{m,n} = (m + 1)^n,$$

де $C_{m,n}$ – число вузлів сітки; n – кількість незалежних змінних; m – кількість інтервалів, на яку розподіляються межі варіації змінних проектування.

Число варіантів у методі сіток дорівнює послідовному добутку числа варіантів по кожній з незалежних змінних.

Наприклад, кількість варіантів у сітці при чотирьох незалежних змінних ($n = 4$), що приймають по шість значень кожна в своєму інтервалі оптимізації ($k = 6$), становить

$$C_{nk} = 6^4 = 1296.$$

Кількість варіантів у сітці при чотирьох незалежних змінних (x_1, x_2, x_3, x_4), якщо кожна з них приймає відповідно (3; 4; 5; 3) значень, дорівнює

$$C(x) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 180.$$

Зі збільшенням кількості незалежних змінних та числа інтервалів їх варіації кількість варіантів і відповідно обсяг розрахунків значно зростають. Однак метод сіток не вимагає знаходження похідних цільової функції, що є його головною перевагою у порівнянні з багатьма іншими методами.

При оптимізації методом співставної оцінки транспортних засобів, наприклад суден, судна вибирають не довільно, а на підставі певної системи – методу співставлення систематизованих варіантів.

Метод був запропонований Л.М. Ногидом під назвою методу варіації. При реалізації методу задають вихідні значення змінних параметрів і орієнтуються на заздалегідь пророблений варіант судна.

Параметри цього варіанта судна приймають за вихідні, а змінні параметри усіх інших варіантів назначають шляхом збільшення або зменшення аналогічних величин основного варіанта. Виходячи з точності та чутливості математичної моделі транспортного засобу, вважається, що суміжні значення змінних параметрів повинні відрізнятися один від одного на 6–10 %, а діапазон граничних значень змінних величин (обмеження) повинен перекривати очікувану зону значень кожного з них.

При співставленні варіантів фіксують або водотоннажність судна (спосіб постійного водотоннажу), або головні розміри судна (спосіб постійних головних розмірів), або вантажопідйомність судна (спосіб постійної вантажопідйомності) та розраховують критерій якості для кожного з варіантів.

З сітки варіантів обирають один, який відповідає найкращому значенню критерію оптимізації. Цей варіант і вважають оптимальним. Вигляд таблиці методу співставної оцінки систематизованих варіантів для судна наведено нижче в табл. 7.1.

Таблиця 7.1. Таблиця методу співставної оцінки

V_1						V_2						V_3					
m_1		m_2		m_3		m_1		m_2		m_3		m_1		m_2		m_3	
δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2
$(L/B)_1$	$(L/B)_2$	$(L/B)_1$	$(L/B)_2$	$(L/B)_1$	$(L/B)_2$	$(L/B)_1$	$(L/B)_2$	$(L/B)_1$	$(L/B)_2$	$(L/B)_1$	$(L/B)_2$	$(L/B)_1$	$(L/B)_2$	$(L/B)_1$	$(L/B)_2$	$(L/B)_1$	$(L/B)_2$
l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Примітки: V – швидкість ходу судна; m – норма вантажних робіт по судну; δ – коефіцієнт повноти об'ємної водотоннажності; (L/B) – співвідношення головних розмірів, e – критерій якості судна. Чотири незалежних змінних ($V, m, \delta, (L/B)$) приймають відповідно кількість значень (3; 3; 2; 2). Кількість варіантів складає $C = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$.

7.10.2. Приклад оптимізації проектних параметрів судна методом співставної оцінки систематизованих варіантів

Скласти алгоритм оптимізації вантажопідйомності та швидкості ходу танкера-постачальника для забезпечення суден паливом на відстані 1000 миль від берега.

Вартість експлуатації танкера

$$C = CD, \text{ дол.},$$

де D – водотоннажність танкера, т; C – вимірник витрат, дол./т.

$$C = (10 + 250 / (25 + D / 1000)) \cdot \left(0,3 \cdot \left(\frac{V_s}{10} \right)^{1,3} + 0,7 \right).$$

Корисний ефект від експлуатації танкера визначається як

$$Q = P_{ur} \cdot V_s,$$

де V_s – швидкість ходу танкера, вузли.

Вказівка: діапазон варіації незалежних змінних

$$10000 \leq P_{ur} \leq 25000, \text{ т}; \quad 10 \leq V_s \leq 25.$$

Математична модель танкера-постачальника

Коефіцієнт утилізації водотоннажності судна по чистій вантажопідйомності

$$\eta_r = \frac{P_{ur}}{D}$$

визначається за формулою

$$\eta_r = \eta_0 + 0,07 \cdot I_n \left(\frac{P_{ur}}{1000} + 0,24 \right) + \Delta \eta_r,$$

де $\eta_0 = 0,44$ – базовий коефіцієнт утилізації водотоннажності судна (з $V_s = 10$ вуз і $Z = 1200$ миль) по чистій вантажопідйомності, що залежить від типу судна; $\Delta \eta_r$ – поправка до коефіцієнта утилізації, що визначається за формулою

$$\Delta \eta_r = a_{zy} \left(1 - \left(\frac{V_s}{16} \right)^3 \right) + a_r \left(1 - \frac{z}{12000} \left(\frac{V_s}{16} \right)^2 \right),$$

де z – дальність плавання, милі; $a_{zy} = 0,04$, $a_r = 0,09$ – часткові коефіцієнти (вимірники) маси енергетичної установки та запасів пального, мастила, котельної води в повній водотоннажності судна, що залежать від типу енергетичної установки. Підставивши вихідні дані та значення коефіцієнтів η_0 , a_{zy} , a_r , отримаємо коефіцієнт утилізації вантажопідйомності по водотоннажності:

$$\eta_r = 0,44 + 0,07 l_n \left(\frac{P_{ur}}{1000} + 0,24 \right) + 0,04 \left(1 - \left(\frac{V_s}{16} \right)^3 \right) + 0,09 \left(1 - \frac{2000}{12000} \cdot \left(\frac{V_s}{16} \right)^2 \right).$$

Будемо мінімізувати вартість експлуатації танкера при постійному корисному ефекті: $Q = P_{ur} V_s = 25000 \frac{\text{Т} \cdot \text{МИЛЬ}}{\text{ГОД}}$.

Складемо таблицю для співставної оцінки варіантів танкера-постачальника при постійному корисному ефекті. Приймемо чотири варіанти чистої вантажопідйомності судна (табл. 7.2). Порівняльна характеристика варіантів судна наведена у табл. 7.3.

Таблиця 7.2. Вартість експлуатації танкера-постачальника, тис. дол.

Чиста вантажопідйомність P_{ur} , т	Швидкість ходу V_s , вузли			
	10	15	20	25
25 000	462			
16 700		428		
12 500			434	
10 000				489

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Таблиця 7.3. Порівняльна характеристика варіантів судна

Характеристика	Варіанти			
	1	2	3	4
Швидкість ходу V_s , вузли	10	15	20	25
Вантажопідйомність, т	25 000	16 700	12 500	10 000
Водотоннажність, т	32 100	23 400	19 300	18 400
η_r	0,780	0,713	0,647	0,544
C , дол./т	14,4	18,3	22,5	26,6
Вартість експлуатації, тис. дол.	462	428	434	489

Тема 8. "Універсальні" критерії оптимізації транспортних об'єктів

- 8.1. Критерій Бубнова
- 8.2. Критерій Шейніна
- 8.3. Критерій Міля
- 8.4. Критерій Боїнг-Вертол
- 8.5. Критерій Нормана
- 8.6. Критерій Дж. Куваса
- 8.7. Критерій Семенова

8.1. Критерій Бубнова

Критерій професора Бубнова І.Г. дозволяє проектувати транспортний засіб при наявності схожого засобу (прототипу) з детальною інформацією про останній. У даному методі задача оптимізації замінюється задачею знаходження таких змін характеристик засобу-прототипу, при яких можливо отримати мінімальні варіації основних параметрів засобу за умов досягнення необхідного ефекту.

Наприклад, при оптимальному проектуванні судна потрібно отримати мінімальну водотоннажність D (або вартість побудови K , або суму зведених витрат $C + EK$). Математична модель задачі має вигляд

$$d D \rightarrow \min,$$

$$d \left(\sum P_i + P \right) = d D,$$

$$dh = d z_m - d z_g,$$

де P_i – статті вагового навантаження судна-прототипу; P – вантажопідйомність судна-прототипу; h – метацентрична висота; z_m – підвищення метацентру; z_g – підвищення центру ваги.

Перше рівняння віддзеркалює вимоги мінімізації приросту водотоннажності. Друге та третє рівняння – рівняння мас (рівняння існування та рівняння початкової остійності, що складені у вигляді прирощення по відношенню до навантаження та метацентричної висоти судна-прототипу).

Прийнявши за головні невідомі довжину, ширину та занурення судна, І.Г. Бубнов отримав рівняння

$$n_1 d L + n_2 d B + n_3 d T \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left[\sum_i P_i \right]}{\partial L} d L + \frac{\partial \left[\sum_i P_i \right]}{\partial B} d B + \\ & + \frac{\partial \left[\sum_i P_i \right]}{\partial T} d T + d P = D \left(\frac{\partial L}{L} + \frac{\partial B}{B} + \frac{\partial T}{T} \right); \end{aligned}$$

$$d h = k_L \frac{d L}{L} + k_B \frac{d B}{B} + k_T \frac{d T}{T} - d z_g,$$

де n, k – коефіцієнти, що визначаються за даними судна-прототипу без змін розмірів та форми корпусу, але з попереднім корегуванням навантаження прототипу, враховуючи від-

мінність судна, що проектується, від прототипу в вихідних характеристиках, механізмах, пристроях. Похідні статей маси по водотоннажності визначаються аналогічно коефіцієнтам.

Для того щоб повне навантаження "виправленого" прототипу відповідало новим параметрам, тобто вміщувалось у попередню водотоннажність, Бубнов І.Г. запропонував зменшити незалежні від водотоннажності маси настільки, наскільки збільшилось навантаження від зміни параметрів. Прототип транспортного засобу Бубнов І.Г. запропонував вважати близьким, якщо виконується співвідношення

$$\frac{dL}{L}; \frac{dB}{B}; \frac{dT}{T} \leq 0,10 \div 0,15.$$

8.2. Критерій Шейніна

Професор Шейнін В.М. запропонував критерій транспортної ефективності гвинтокрила:

$$t_{\text{тр.эф}} = k_v \cdot \frac{G_{\text{гр}} \cdot L \cdot V_k}{G_{\text{п.с}} \cdot G_{\text{т}}},$$

$$t_{\text{тр.эф}} = k_v \frac{G_{\text{тр}} V_k}{G_{\text{п.с}} g},$$

де L – відстань (дальність польоту), км; k_v – коефіцієнт; $G_{\text{гр}}$ – вага корисного вантажу, $G_{\text{п.с}}$ – вага порожнього спорядженого транспортного засобу, т; $G_{\text{т}}$ – вага пального, т; g – відносні витрати пального, т/км,

$$V_p = k_v V_k,$$

V_k – крейсерська швидкість, км/год; V_p – швидкість гвинтокрила за розкладом, км/год, обчислена з урахуванням витрат часу на маневрування по землі, на набір висоти та зниження.

8.3. Критерій Міля

Професор Міль М.Л. розглядав два літаючі апарати з однаковою продуктивністю, використовуючи як критерій оптимізації величину $L_{\text{зр}}$, що дорівнює умовній еквівалентній відстані, котру може пролетіти розглядуваний літаючий апарат, якщо корисне навантаження загалом буде замінено на пальне (гранична дальність польоту):

$$L_{\text{зр}} = G_{\text{пн}} \cdot V_{\text{к}} \cdot 10^{-3} (G_{\text{тч}} = G_{\text{пн}} \cdot 10^3 / g) \text{ км},$$

де $G_{\text{пн}}$ – повне навантаження (вантаж + пальне), тс.; $G_{\text{тч}}$ – годинні витрати пального, кгс/год; g – кілометрові витрати пального, кгс/км.

Міль М.Л. запропонував ще один критерій – кількість пального, що необхідно витратити для виконання транспортної роботи в один тонно-кілометр:

$$G_L = \frac{10^3 \cdot G_{\text{т}}}{G_{\text{гр}} L}, \left[\frac{\text{кгс}}{\text{тс} \cdot \text{км}} \right],$$

де L – відстань (дальність польоту); $G_{\text{т}}$ – паливо, потрібне для польоту на відстань L , кгс; $G_{\text{гр}}$ – маса перевезеного вантажу, т.

8.4. Критерій Боїнг-Вертол

На фірмі "Боїнг-Вертол" з 1971 року при розробці гвинтокрилів втілюється концепція: "проектування під задану вартість". Старий принцип фірми "проектуй правильно – роби конструкцію легкою" доповнився новим: "проектуй під задану вартість, інакше все пропало".

Стверджується, що при традиційному проектуванні планер гвинтокрила мав щільність деталей ($z_n / G_{\text{гр}}$) 6,2 деталі на 1 кг. Новий принцип дозволив зменшити вартість планера не менше ніж на 40 %.

8.5. Критерій Нормана

8.5.1. Коефіцієнт Нормана

Коефіцієнтом професора Нормана називається коефіцієнт зміни (варіації) водотоннажності:

$$\eta_n = \frac{\Delta D}{\Delta P(D_0) + \Delta P_{\text{нз}}},$$

де D_0 – первісне значення водотоннажності; $\Delta P_{\text{нз}}$ – зміна незалежних мас судна; ΔD – прирощення водотоннажності; $\Delta P(D_0)$ – прирощення мас, залежних від водотоннажності;

$$\eta_n = \frac{1}{1 - \frac{d P_1(D)}{d D}},$$

$P_1 = P(D) + P_{\text{нз}}$, ($P_1 = D$); $P(D)$ – частина вагового навантаження, що може бути надана як функція від водотоннажності; $P_{\text{нз}}$ – частина вагового навантаження, що приймається як така, що не залежить від водотоннажності.

Таким чином,

$$\Delta D = \eta_n [\Delta P(D_0) + \Delta P_{\text{нз}}].$$

Формула визначає закон зміни водотоннажності при малих змінах параметрів проектування (вимірників мас і тактико-технічних елементів судна), інакше кажучи це диференціальна форма рівняння навантаження (рівняння мас, рівняння існування).

8.5.2. Залежність маси окремих розділів навантаження від основних характеристик судна

Навантаження по розділу "корпус" розраховується як

$$P_k = g_k L B H,$$

або

$$P_k = g'_k (L B H)^{2/3} = g''_k (D)^{2/3},$$

де L, B, H – головні розміри судна; D – водотоннажність судна;

g_k, g'_k, g''_k – вимірники маси корпусу.

Формула Арнотта

$$P_k = g_k \cdot \delta^{1/3} \cdot L^{2/3} \cdot B \cdot H^{1/2},$$

Формула Л.М. Ногида

$$P_k = g_k \cdot \delta^{1/3} \cdot L^{5/4} \cdot B^{3/4} \cdot H^{1/2}.$$

Існує низка приблизних формул для розрахунку вагового навантаження "маса металевго корпусу" за окремими статтями.

Навантаження по розділах "пристрої суднові" та "суднові системи" розраховується для близького прототипу за формулами

$$P_y = g_y \cdot D, \quad P_y = g'_y L B H,$$

$$P_c = g_c \cdot D, \quad P_c = g'_c L B H.$$

При значній різниці у водотоннажності прототипу і проєктованого судна

$$P_y = g_y \cdot D^{2/3}, \quad P_y = g'_y (L B H)^{2/3},$$

$$P_c = g_c \cdot D^{2/3}, \quad P_c = g'_c (L B H)^{2/3}.$$

Навантаження за розділом "енергетична установка" розраховується залежно від потужності останньої:

$$P_m = P_m N,$$

де N – потужність силової установки; P_m – вимірник ваги силової установки.

Потужність силової установки визначається за формулою

$$N = \frac{D^{2/3} V^3}{C_a},$$

де C_a – адміралтейський коефіцієнт; V – швидкість ходу судна.

Адміралтейський коефіцієнт визначається по близькому прототипу однотипної за конструкцією енергетичної установки.

Навантаження за розділами "електроенергетична система", "внутрішньосудновий зв'язок", "озброєння" розраховуються аналогічно розділу "пристрої":

$$P_3 = p_3 D, \quad P_3 = p'_3 (L B H),$$

а при великій розбіжності у водотоннажності судна-прототипу та того судна, що проектується

$$P_3 = p_3 D^{2/3}, \quad P_3 = p'_3 (L B H).$$

Масу озброєння слід визначати по номенклатурі та кількості предметів озброєння.

Навантаження по розділу "запас водотоннажності" введено для компенсації перевантаження судна, що виникає внаслідок перевантаження окремих конструкцій. При наявності близького прототипу запас водотоннажності приймають рівним 1–2 %, при відсутності – 4–5 % від водотоннажності порожнем.

$$P_{3.B} = p_{3.B} D,$$

$$P_{3.B} = p_{3.B} (L B H).$$

Навантаження по розділу "екіпаж, провізія, вода, витратні матеріали та рідкі вантажі" розраховуються аналогічно розділу "пристрої":

$$P_{\text{эк}} = p_{\text{эк}} D, \quad P_{\text{эк}} = p'_{\text{эк}} (L B H),$$

або

$$P_{\text{эк}} = p_{\text{эк}} D^{2/3}, \quad P_{\text{эк}} = p'_{\text{эк}} (L B H)^{2/3}$$

залежно від співвідношення водотоннажності спроектованого судна та прототипу.

Навантаження по розділу "перевозимий вантаж" має назву вантажопідйомність:

$$P_r = \eta_r D,$$

де η_r – коефіцієнт використання (утилізації) водотоннажності по вантажопідйомності.

Навантаження по розділу "запаси пального, мастила, води" розраховується за формулою

$$P_T = k_T k_M p_T r \frac{D^{2/3} V^2}{C_a},$$

де $k_T = \frac{P_{TT} + P_{TM} + P_{TW}}{P_{TT}}$; P_{TT} – маса пального; P_{TM} – маса масти-

ла; P_{TW} – маса води; k_T – слід уточнювати по прототипу з аналогічним типом силової установки; k_M – коефіцієнт морського запасу; p_T – відносні витрати палива, що залежать від типу силової установки; r – дальність плавання.

Типи силової установки:

- паротурбінна – g_T , 0,13–0,17 кг/(к.с. · год);
- газотурбінна – 0,12 – 0,17;
- дизельна – 0,11 – 0,14.

(У книзі Ашика В.В. друкарська помилка – кг/(кВт · год).

8.5.3. Часткові коефіцієнти Нормана

Межі використання формули Нормана не досліджені. На практиці, на думку професора В.В. Ашика, припустимо хороші результати отримують при варіації водотоннажності до 20 % від D_0 . Для визначення коефіцієнта η_n розраховують похідну функції $P_1(D)$ по водотоннажності D при значеннях $D = D_0$, тобто розраховують η_n для прототипу.

При зміні навантаження, розмірів судна (головних невідомих), форми корпусу судна коефіцієнт Нормана становить

$$\eta_n = \frac{\frac{\Delta \delta}{\delta} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta T}{T}}{\frac{1}{\eta_\delta} \cdot \frac{\Delta \delta}{\delta} + \frac{1}{\eta_L} \cdot \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{\eta_B} \cdot \frac{\Delta B}{B} + \frac{1}{\eta_T} \cdot \frac{\Delta T}{T}},$$

де η_δ , η_L , η_B , η_T – часткові коефіцієнти; δ – коефіцієнт повноти водотоннажності; L , B , T – головні розміри судна; Δ – прирощення величини,

$$\eta_\delta = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_1(D_0)}{\partial \delta} \cdot \frac{\delta}{D_0}},$$

$$\eta_L = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_1(D_0)}{\partial L} \cdot \frac{L}{D_0}},$$

$$\eta_B = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_1(D_0)}{\partial B} \cdot \frac{B}{D_0}},$$

$$\eta_T = \frac{1}{1 - \frac{\partial P_1(D_0)}{\partial T} \cdot \frac{T}{D_0}}.$$

Часткові коефіцієнти дозволяють бачити, як змінюється водотоннажність D_0 залежно від зміни кожної з величин δ , L , B , H . При проектуванні бажано змінювати ту величину, якій відповідає мінімальний коефіцієнт Нормана, однак при цьому можливе порушення обмежень, що накладаються на змінні проектування та обчислені змінні.

Примітка: коефіцієнти Нормана, обчислені по навантаженню "виправленого" (за тактико-технічним завданням) прототипу дають високу точність при різниці з прототипом (за габаритами) до 50 % .

8.6. Критерій Дж. Куваса

Критерій професора Дж. Куваса з технічного університету м. Тронхейм передбачає виконання запланованого обсягу перевезень за умов мінімальних зведених витрат (або відносних комплексних зведених витрат"):

$$e = \frac{KE + C}{Q},$$

де K – будівельна вартість судна (капіталовкладення); E – нормативний коефіцієнт економічної ефективності; C – річні експлуатаційні витрати по судну; Q – річний обсяг перевезень.

У випадку необхідності забезпечення найбільшого ефекту при заданому рівні витрат Дж. Куvas пропонує розглядати рентабельність, що визначається формулою (тобто річний прибуток поділяється на річне повернення капітальних вкладень)

$$r = \frac{P - C}{K \cdot E},$$

де P – валовий дохід за рік експлуатації судна; C – річні експлуатаційні витрати по судну;

$$H = \varphi Q - KE,$$

φ – фрахтова ставка; Q – річний обсяг перевезень; E – нормативний коефіцієнт економічної ефективності; K – будівельна вартість судна (капіталовкладення).

Дж. Куvasом доведено (рис. 8.1), що оптимум по прибутках

$$\text{Пр} = \varphi Q - k E - C = \varphi Q - 3$$

(при оптимізації параметрів вантажного судна по швидкості руху) відповідає більшому значенню швидкості, ніж оптимум по зведених витратах

$$3 = KE + C.$$

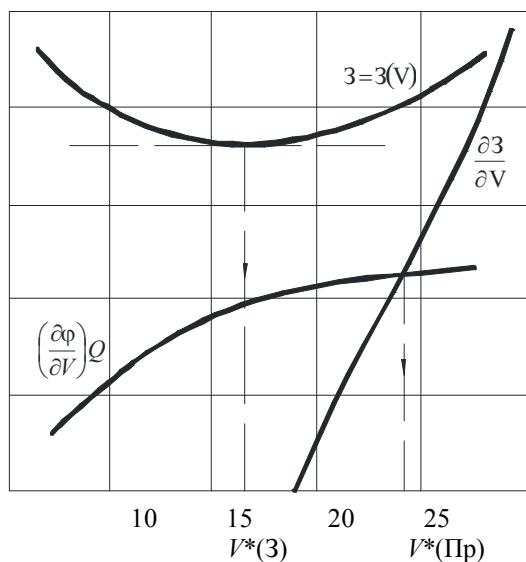


Рис. 8.1. Залежність витрат і прибутків судна від швидкості руху:

V – швидкість руху судна; $V^*(3)$ – оптимальна швидкість руху судна, що відповідає мінімуму зведених витрат; $V^*(Пр)$ – оптимальна швидкість руху судна, що відповідає найбільшому прибутку

При цьому Дж. Куvas уважав, що зі зростанням швидкості руху судна ($V^*(3)$) зростає також його фрахтова ставка ϕ . Таке твердження правильне в більшості випадків і це твердження можна довести рівнянням

$$\frac{\partial 3}{\partial V} = 0.$$

Швидкість $V^*(3)$ знайдена з рівняння

$$\frac{\partial (Пр)}{\partial V} = Q \frac{\partial \phi}{\partial V} - \frac{\partial 3}{\partial V} = 0,$$

якщо є надійні статистичні дані.

Рис. 8.1 ще раз підтверджує думку, що залежно від функції цілі будуть різними значення оптимальної швидкості руху суд-

на. Для спрощення розгляду задачі передбачалось, що задача оптимізації не має обмежень.

8.7. Критерій Семенова

Професор Семенов Ю.Н. рекомендує для оцінки ступеня досконалості транспортного засобу по відношенню до кращих засобів аналогічного призначення інтегральний критерій

$$k = \frac{\sum_{i=1}^s k_i g_i}{\sum_{i=1}^s \varphi_i},$$

де k_i – відносний параметр покращення i -го показника якості;
 φ_i – функція, нормуюча вагу i -го відносного параметра якості;
 S – кількість параметрів.

Фактично інтегральний критерій Семенова Ю.Н. належить до методів багатокритеріальної оптимізації. Коефіцієнти k_i мають різну вагу, що визначається місцем у ранжованій послідовності. Ранжована послідовність формується на підставі експертних оцінок. Функції φ_i нормують вагу відносних параметрів залежно від місця в ранжованій послідовності. Для визначення функції φ_i Семенов Ю.Н. запропонував наступні умови:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1, 0, \\ \varphi_{i \rightarrow 1} = 0. \end{cases}$$

Послідовність відносних параметрів ранжується по значенням натурального ряду чисел, а нормуюча функція визначається за формулою

$$\varphi_i = \frac{i}{2^{i-1}},$$

де $i = 1, 2, 3 \dots$

Значення нормуючої функції φ_i залежно від номера відносно параметра i наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1. Значення нормуючої функції

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ_i	1,0	1,0	0,75	0,5	0,31	0,187	0,11	0,062	0,035	0,0195

Залежно від значення критерію проект судна оцінюється наступним чином:

$k \geq 1,6$ – дуже перспективний проект судна;

$k = 1,3 \dots 1,59$ – перспективний проект судна;

$k = 1,1 \dots 1,29$ – малоперспективний проект судна;

$k = 1,0 \dots 1,09$ – не перспективний проект судна;

$k \leq 1$ – проект розроблено на рівні прототипів або гірше ніж прототипи.

Приклад. Використання критерію Семенова Ю.Н.

Необхідно оцінити ступінь інженерно-технічної досконалості проекту судна стосовно кращого зразка за допомогою сімох показників. Ранжована послідовність показників сформована в результаті анкетування групи експертів. Дані по проекту судна та кращому з існуючих зразків наведено в табл. 8.2.

Таблиця 8.2. Порівняльні дані проекту та судна-прототипу

Найменування показника	Показники		Відносний параметр k_i	φ_i	$k_i \varphi_i$
	прототип	проект			
Перевозоздатність за навігацію, тис. т	100	130	1,3	1,0	1,3
Приведені витрати по судну, млн. грош. од.	7,0	5,0	1,4	1,0	1,4
Коефіцієнт утилізації по вантажопідйомності	0,45	0,575	1,3	0,75	0,975
Пропульсивний коефіцієнт	0,65	0,715	1,1	0,5	0,55
Вимірник маси корпусу	0,234	0,18	1,3	0,31	0,403
Відносні витрати пального, т/к.с.	0,15	0,15	1,0	0,187	0,187
Чисельність екіпажу судна, чол.	36	–	1,1	0,11	0,121

Таким чином,

$$K = \frac{1,3 + 1,4 + 0,975 + 0,55 + 0,403 + 0,187 + 0,121}{1 + 1 + 0,75 + 0,5 + 0,31 + 0,187 + 0,11} = 1,28.$$

Висновок – проект судна кращий за прототип.

Приклад. Співставлення групи суден

Повчальним є приклад співставлення групи суховантажних суден побудови 1960–1970 років. Основні характеристики суден наведено в табл. 8.3.

Таблиця 8.3. Основні характеристики суден

Основні Характеристи- ки суден	Назва судна							
	Позначення	Одиниця вимірювання	"Варнемонде"	"Омск"	"Выборг"	"Пула"	"Иркутск"	"Новгород"
Довжина (найбільша)	L	м	150,37	154,75	150,7	159,42	151,45	150,85
Довжина між перпендику- лярами	L	м	140,1	143,0	140,0	148,38	140,0	138,0
Ширина по КВЛ	B	м	21,8	21,0	20,0	21,24	20,3	20,6
Висота борту	H	м	13,6	12,5	11,6	12,65	11,9	12,0
Занурення по КВЛ	T	м	8,84	9,37	8,91	9,72	8,80	9,0
Водотоннаж- ність з вантажем	D	т	18560	20480	17900	20510	18030	17893
Дедвейт	DW	т	12347	14851	12575	14390	12882	13650
Швидкість (експлуата- ційна)	V_e	м/с (вуз)	8,23 (16,0)	7,87 (15,3)	7,46 (14,5)	8,75 (17,0)	8,23 (16,0)	8,49 (16,5)
Потужність головного двигуна (екс- плуатаційна)	N_e	кВт (кС)	7645 (10400)	7870 (10700)	6178 (8400)	7870 (10700)	6987 (9500)	7061 (9600)

Продовж. табл. 8.3

Основні характеристики суден	Назва судна							
	Позначення	Одиниця вимірювання	"Варнемюнде"	"Омск"	"Выборг"	"Пула"	"Иркутск"	"Новгород"
Підводна поверхня корпусу	Ω	м ²	4134	4465	4117	4517	4 127	4069
Вантажомісткість по зерну	$P_{\text{с}}$	т	1 1574	13885	11800	13430	11230	12360
Вантажомісткість по автішках	$P_{\text{м}}$	шт	302	283	249	310	288	313
Коефіцієнт конструктивної нерівномірності трюмів	—	—	0,850	0,765	0,893	0,778	0,852	0,808
Група судна при завантаженні штучних вантажів	—	—	VI	VI	VII	VI	V	V
Група судна при завантаженні/вивантаженні зерна	—	—	IV	V	VI	V	IV	IV
Балансова вартість	$S_{\text{б}}$	тис. крб.	5450	3911	4939	6823	6 253	6722
Вартість утримання на ходу в закордонному плаванні	$S_{\text{х}}$	крб./добу	4632	4316	4019	4800	4 447	4589
Вартість утримання на стоянці в закордонному плаванні	$S_{\text{ст}}$	крб./добу	2587	2285	2436	2756,5	2 640	2762
Вартість утримання в ремонті	$S_{\text{рем}}$	крб./добу	1379	993	1188	1482	1 417	1499

Розрахунок виконано для лінії Владивосток – Нагоя – Брисман – Владивосток. Протяжність лінії складає 9650 миль. У напрямку Нагоя – Брисман перевозяться легкові автівки, а з Брисмана до Владивостоку – зерно з відносним вантажним об'ємом $\mu = 1,29 \text{ м}^3/\text{т}$.

Вказані перевезення здійснювались фактично. Норма вантажних робіт прийнята за наказом ММФ СРСР № 171 від 8 серпня 1980 р. Фрахтові ставки за перевезення: $S_{\text{м}} = 66,025$ інв. крб. за легкову машину та $S_3 = 19,06$ інв. крб. за 1 т зерна. Один долар США коштував приблизно 0,66 інвалютних крб.

Швидкохідність суден оцінювалася за показником

$$C = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\Omega V^3}{N_e},$$

де ρ – масова щільність морської води, $\text{т}/\text{м}^3$; Ω – підводна поверхня корпусу судна, м^2 ; V – швидкість ходу судна, $\text{м}/\text{с}$; N_e – потужність головного двигуна, кВт.

Вплив швидкохідності на якість судна визначається за формулою

$$P_x = \frac{V D}{N_e},$$

де D – водотоннажність судна, т.

Критерієм при оцінці місткості судна прийнято фрахт (сумарні доходи) за перевезення вантажу. Вагомість кожного з відносних показників визначалась за впливом зміни на 1 % кількості вантажу на величину фрахту. Якість функціонування судна складається з наступних якостей: швидкохідність (m_x), вантажомісткість ($m_{\text{вм}}$), пристосованість до обробки вантажів ($m_{\text{го}}$). Розрахунок цих якостей виконано в табл. 8.4–8.6. Розрахунок якості функціонування суден виконано в табл. 8.7.

Таблиця 8.4. Відносний показник швидкохідності

Параметр	Назва судна					
	"Варнемюнде"	"Омск"	"Выборг"	"Тула"	"Иркутск"	"Новгород"
$C = \frac{\rho \cdot \Omega \nu^3}{2 \cdot N_e}$	151,11	141,45	141,43	196,31	168,42	180,21
$K_x = \frac{C_i}{C_6}$	0,785	0,725	0,720	1,0	0,858	0,918
$P_x = \frac{\nu D}{N_e}$	28,55	29,28	30,90	32,59	30,37	30,76
$P_{\text{отн}}^x = \frac{P^x i}{P_6^x}$	0,876	0,898	0,948	1,0	0,932	0,944

Таблиця 8.5. Визначення показника вантажомісткості

Параметр	Назва судна					
	"Варнемюнде"	"Омск"	"Выборг"	"Тула"	"Иркутск"	"Новгород"
Відносний показник вантажомісткості по автівах $P_{\text{отн}}^M = \frac{P_i^M}{P_{\text{мах}}^M} = \frac{P_i^M}{313}$	0,965	0,904	0,796	0,990	0,920	1,0
Відносний показник вантажомісткості по зерну $P_{\text{отн}}^3 = \frac{P_i^3}{P_{\text{мах}}^3} = \frac{P_i^3}{13855}$	0,835	1,0	0,852	0,969	0,811	0,892
Зміна фрахту при зміні місткості по автівах на 1 %	0,083	0,006	0,068	0,074	0,082	0,081
Зміна фрахту при зміні місткості по зерну на 1 %	0,917	0,934	0,932	0,926	0,918	0,919
$m_M = 0,076 \cdot P_{\text{отн}}^M$	0,073	0,068	0,060	0,074	0,070	0,076
$m_3 = 0,924 \cdot P_{\text{отн}}^3$	0,772	0,924	0,787	0,895	0,749	0,824
$k_{\text{вм}} = m_M + m_3$	0,845	0,992	0,847	0,970	0,819	0,900

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Таблиця 8.6. Визначення показника пристосованості до вантажообробки

Параметр	Назва судна					
	"Варнемонде"	"Омск"	"Выборг"	"Пула"	"Иркутск"	"Новгород"
Пристосованість до вантажообробки автівок $P_{\text{пр}}^{\text{м}}$	0,816	0,816	1,0	0,816	0,694	0,694
Пристосованість до вантажообробки зерна $P_{\text{пр}}^3$	0,667	0,845	1,0	0,845	0,667	0,667
$k_{\text{ю}} = P_{\text{пр}}^{\text{м}} \cdot m_{\text{м}} + P_{\text{пр}}^3 \cdot m_3$	0,688	0,959	1,0	0,959	0,671	0,671

Таблиця 8.7. Розрахунок якості функціонування суден

Параметр	Одиниця вимірювання	Назва судна					
		"Варнемонде"	"Омск"	"Выборг"	"Пула"	"Иркутск"	"Новгород"
Зміна при зміні швидкості на 1 % $\frac{\Phi_p}{T_p}$	%	0,66	0,67	0,72	0,818	0,828	0,825
Зміна при зміні місткості на 1 %	%	1,009	1,009	0,010	1,009	1,009	1,009
Зміна при зміні пристосованості до вантажообробки	%	0,069	0,067	0,047	0,071	0,073	0,081
$m_{\text{х}} = 0,376 \cdot P_{\text{огн}}^{\text{х}}$	—	0,329	0,338	0,356	0,376	0,350	0,355
$m_{\text{вм}} = 0,562 \cdot k_{\text{вм}}$	—	0,445	0,523	0,446	0,511	0,432	0,474
$m_{\text{го}} = 0,062 \cdot k_{\text{го}}$	—	0,025	0,035	0,036	0,035	0,024	0,024
$k_{\text{ф}}$	—	0,799	0,896	0,838	0,922	0,806	0,853

Таблиця 8.8. Визначення економічності суден

Параметр	Одиниця вимірювання	Назва судна					
		"Варнеміонде"	"Омск"	"Выборг"	"Пула"	"Иркутск"	"Новгород"
$P^x = \frac{S_x}{DW_e} \cdot 10^3$	$\frac{\text{крб}}{\text{т} \cdot \text{м} \cdot \text{миль}}$	0,977	0,791	0,918	0,815	0,899	0,849
$P^{\text{ст}} = \frac{S_{\text{сп}}}{DW_e} \cdot 10^3$	$\frac{\text{крб}}{\text{т} \cdot \text{м} \cdot \text{миль}}$	0,546	0,419	0,557	0,470	0,534	0,511
$P^{\text{рем}} = \frac{S_{\text{рем}}}{DW_e} \cdot 10^3$	$\frac{\text{крб}}{\text{т} \cdot \text{м} \cdot \text{миль}}$	0,291	0,182	0,271	0,252	0,286	0,277
$P_{\text{отн}}^x = \frac{P_{\text{min}}^x}{P_i^x}$	—	0,810	1,0	0,862	0,967	0,830	0,932
$P_{\text{отн}}^{\text{ст}} = \frac{P_{\text{min}}^{\text{ст}}}{P_i^{\text{ст}}}$	—	0,767	1,0	0,752	0,891	0,785	0,820
$P_{\text{отн}}^{\text{рем}} = \frac{P_{\text{min}}^{\text{рем}}}{P_i^{\text{рем}}}$	—	0,625	1,0	0,672	0,722	0,636	0,657
$m^x = 0,618 \cdot P_{\text{отн}}^x$	—	0,50	0,618	0,553	0,598	0,544	0,576
$m_{\text{ст}} = 0,30 \cdot P_{\text{отн}}^{\text{ст}}$	—	0,23	0,30	0,226	0,267	0,236	0,246
$m_{\text{рем}} = 0,082 \cdot P_{\text{отн}}^{\text{рем}}$	—	0,051	0,082	0,055	0,059	0,052	0,054

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

Продовж. табл. 8.8

Параметр	Одиниця вимірювання	Назва судна					
		"Варнемонде"	"Омск"	"Выборг"	"Пула"	"Иркутск"	"Новгород"
Економічність експлуатації: $P_{\text{экс}} = m_{\text{х}_i} + m_{\text{ст}_i} + m_{\text{рем}_i}$	—	0,781	1,0	0,814	0,924	0,832	0,876
$P^{\text{стр}} = \frac{S_6}{DW_e}$	$\frac{\text{крб}}{\text{т} \cdot \text{м} \cdot \text{миль}}$	1,149	0,717	1,128	1,162	1,264	1,244
Відносні показники: $P_{\text{отн}}^{\text{стр}} = \frac{P_{\text{мін}}^{\text{стр}}}{P_i^{\text{стр}}}$	—	0,624	1,0	0,635	0,617	0,567	0,576
$K_{\text{экс}} = 0,719 \cdot P_{\text{экс}}$	—	0,516	0,661	0,538	0,611	0,550	0,579
$K_{\text{стр}} = 0,281 \cdot P_{\text{отн}}^{\text{стр}}$	—	0,212	0,339	0,216	0,209	0,192	0,195
$k_{\text{эк}}$	—	0,728	1,0	0,754	0,820	0,742	0,774

Вагомість кожної з якостей функціонування визначається за її впливом на співвідношення

$$\frac{\Phi_p}{T_p} = \frac{P_m S_m + P_3 S_3}{T_x + T_{\text{пр}} + T_{\text{го}}} \frac{\text{інв. крб.}}{\text{доб.}},$$

де Φ_p – фрахт за рейс; S_m , S_3 – фрахт за перевезення однієї автівки та однієї тонни зерна відповідно; T_x , $T_{\text{пр}}$, $T_{\text{го}}$ – ходовий час, час простоїв, час під вантажними операціями відповідно; P_m , P_3 – вантажомісткість судна по автівках і зерну відповідно.

При визначеності економічності суден приймаються до уваги витрати, пов'язані з будівництвом ($k_{\text{стр}}$) і експлуатацією

судна ($k_{\text{экс}}$). Вагомість кожного з факторів визначається нормативним терміном експлуатації судна. Інтегральний показник якості судна визначається як підсумок економічності судна та його якості функціонування. Вагомість кожного з факторів прийнята однаковою, бо доходи судна прямо пропорційні його функціональності, а витрати – його економічності (табл. 8.9).

Таблиця 8.9. Інтегральний показник якості судна

Показник	Назва судна					
	"Варнемюнде"	"Омск"	"Выборг"	"Пула"	"Иркутск"	"Новгород"
$0,5 \cdot K_{\text{ф}}$	0,400	0,448	0,419	0,461	0,403	0,426
$0,5 \cdot K_{\text{экс}}$	0,364	0,500	0,377	0,410	0,371	0,387
$I_{\text{як}}$	0,764	0,918	0,796	0,871	0,774	0,816

З розгляду табл. 8.9 слід зауважити, що кращим із розглянутих суден є судно типу "Омск". Найвищі функціональні якості у суден типу "Пула", однак низька будівельна вартість суден типу "Омск" робить ці судна кращими. Серед якостей функціонування суден найбільшу вагомість мають місткість судна (0,562) та швидкохідність (0,376); пристосованість судна до вантажообробки незначною мірою впливає на якість судна (0,062).

Метод багатокритеріальної оцінки Семенова відрізняється від методів інших авторів тим, що вагові коефіцієнти для кожного часткового критерію визначаються розрахунковим шляхом виходячи з умов експлуатації та будівництва судна.

Тема 9. Математична модель судна

- 9.1. Класифікація математичних моделей судна
- 9.2. Укрупнена математична модель транспортного судна
- 9.3. Обмеження на місткість судна
- 9.4. Обмеження з умов непотопності судна
- 9.5. Обмеження з початкової остійності судна
- 9.6. Обмеження за масами суден

9.1. Класифікація математичних моделей судна

Математична модель судна пов'язує властивості та характеристики судна з його елементами та дозволяє розрахувати економічні показники діяльності судна. За допомогою математичної моделі судна можливо обчислити значення обмежень та цільової функції через значення незалежних змінних, що дозволяє розв'язати задачу оптимального проектування судна.

Одну з класифікацій математичних моделей судна запропонував А.Н. Вашедченко. За обсягом розрахунків та креслень моделі поділяються на детальні (мікромоделі) та укрупнені (макромоделі). За повнотою інформації моделі поділяються на повні та скорочені.

Детальні моделі містять велику кількість розрахунків та креслень а також достатню кількість наближень для визначення окремих елементів та характеристик судна. Укрупнені моделі суден містять великі розрахунково-графічні блоки та побудовані на малій кількості наближень для визначення головних елементів та характеристик судна.

Повними називаються моделі, в яких наявні всі розрахунки та графічні матеріали, що є необхідними для визначення основних елементів судна. Інші моделі мають назву скорочених.

9.2. Укрупнена математична модель транспортного судна

В укрупненій математичній моделі судна розглядаються чотири обмеження: місткість, непотопність, початкова остійність і баланс мас. Інші якості судна забезпечуються при розв'язанні задач оптимізації нижчого рівня (міцність, остійність на великих кутах нахилу, плавність хитавиці, швидкохідність і т. п.).

Як головні невідомі в укрупненій математичній моделі вантажного судна розглядають: коефіцієнт загальної повноти, співвідношення довжини та ширини судна, співвідношення ширини та занурення судна, коефіцієнт повноти конструктивної ватерлінії, кількість обертів і діаметр гребного гвинта.

9.3. Обмеження на місткість судна

Об'єм основного корпусу судна, визначений за теоретичним кресленням, становить

$$W_{\Pi} \geq \frac{P_r \cdot \mu_r \cdot k_r}{k_u \cdot k_{\text{л}} \cdot \eta_w},$$

де P_r – маса чистого вантажу (вантажопідйомність); μ_r – відносна вантажна кубатура вантажу; k_r – частка вантажу, розташованого під верхньою палубою судна; $k_{\text{л}}$ – коефіцієнт збільшення місткості трюмів за рахунок об'єму комінгсів люків; k_u – коефіцієнт використання теоретичного об'єму вантажних приміщень; η_w – коефіцієнт утилізації теоретичного об'єму основного корпусу.

Коефіцієнти, що містяться у формулах, можуть бути вираховані за результатами апроксимації даних по побудованим суднам:

$$\eta_w = \frac{\alpha_w}{\sqrt[3]{\delta} (0,4 + (P_r \cdot \mu_r)^{-0,25})},$$

де δ – коефіцієнт повноти водотоннажності;

$$\alpha_w = \begin{cases} 0,26 - \text{накатні судна,} \\ 0,27 - \text{контейнеровози,} \\ 0,30 - \text{універсальні суховантажники,} \\ 0,35 - \text{танкери і навалочники;} \end{cases}$$

$$k_u = \begin{cases} 0,92 - \text{твіндеки без пілерсів та перебірок,} \\ 0,88 - \text{твіндеки з пілерсами та перебірками,} \\ 0,96 - \text{суховантажники з навалочними вантажами} \\ \text{або чисті навалочники;} \end{cases}$$

$$k_{\text{л}} = 1 + \frac{0,567}{\frac{P_r}{1000} + 2,43},$$

k_r – приймається залежно від архітектурно-конструктивного типу судна:

$$k_r = \begin{cases} 1,0 - \text{навалочники без постійного палубного вантажу,} \\ \text{танкери, газовози,} \\ 0,7 - \text{лісовози,} \\ 0,6 - \text{контейнеровози;} \end{cases}$$

μ_r – залежить від роду вантажу:

$$\mu_r [\text{м}^3 / \text{т}] = \begin{cases} 1...2,4 - \text{м'ясо, риба,} \\ 4,5...5,5 - \text{банани,} \\ 0,6 - \text{руда,} \\ 1,2 - \text{нафтопродукти,} \\ 1,3...1,6 - \text{зерно,} \\ 2,3...2,6 - \text{ліс.} \end{cases}$$

Надана нерівність може бути перетворена для співвідношення двох головних невідомих

$$\left(\frac{H}{T} \right) \geq 1 + (\delta / \alpha k_\alpha) \left(1,04 \frac{\mu_r \cdot \eta_r}{\eta_w} \cdot \frac{k_T}{k_U \cdot k_L} - 1 \right),$$

де H – висота борту судна; T – занурення судна; δ – коефіцієнт повноти водотоннажності; α – коефіцієнт повноти ватерлінії; k_α – коефіцієнт розвалу бортів; η_r – коефіцієнт утилізації водотоннажності,

$$\eta_r = \mu_0 + 0,07 \ln \left(\frac{P_r}{1000} + 0,24 \right) + \Delta \eta_r,$$

$$\eta_0 = \begin{cases} 0,26 - \text{накатне судно,} \\ 0,36 - \text{універсальний суховантажник,} \\ 0,44 - \text{нафтонавалочник,} \\ 0,46 - \text{нафторудовоз;} \end{cases}$$

$$\Delta \eta_r = a_{\text{эу}} \left(1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^3 \right) + a_m \left(1 - \frac{z}{z_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right),$$

$$V_0[\text{вузли}] = \begin{cases} 16 - \text{танкер, навалочник,} \\ 18 - \text{суховантажник,} \\ 22 - \text{контейнеровоз, накатне судно,} \end{cases}$$

$Z_0 = 12\,000$ миль; Z – дальність плавання судна; V – швидкість ходу судна; $a_{\text{эу}}, a_m$ – частка енергоустановки і запасів пального в водотоннажності судна, приймається за даними судна-прототипу або за статистичними даними;

$$k_\alpha = 0,5 \cdot \left[1 + (1 + 0,7 \mu_r \eta_r + 0,16)^{0,98/\sqrt{\delta}-1} \right],$$

$$\alpha = \begin{cases} a \left[1 - \frac{0,41}{1 + 100 \exp(-0,25 F_r)} \right]^{2/3} & \text{при } 0 \leq F_r \leq 0,35; \\ a(0,529 + 0,192 F_r) & \text{при } 0,35 \leq F_r \leq 0,5; \\ a \cdot 0,723 & \text{при } 0,5 \leq F_r \leq 1,0; \end{cases},$$

де

$$\alpha = \begin{cases} 1,06 - \text{при } V\text{-подібних шпангоутах,} \\ 1,04 - \text{при } UV\text{-подібних шпангоутах,} \\ 1,01 - \text{при } U\text{-подібних шпангоутах.} \end{cases}$$

$$\delta = 1 - \frac{0,48}{1 + 100 \exp(-24 F_r)},$$

де $F_r = \frac{0,164V}{\sqrt{L}}$ – число Фруда; V – швидкість ходу судна;

L – довжина судна між перпендикулярами, на котру в свою чергу накладаються обмеження з умови доброго сходження на хвилю:

$$L \geq \left(5 + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{P_r}{\eta_r}} \right) \sqrt[3]{V}.$$

Формулою для δ користуються, якщо вказана величина не включена до складу незалежних змінних.

9.4. Обмеження з умов непотопності судна

Класифікаційні товариства регламентують запас плавучості судна через висоту надводного борту, що дозволяє записати ще одне обмеження на співвідношення головних невідомих задачі оптимізації проектного судна:

$$\left(\frac{H}{T} \right) \geq 1 + \frac{\beta \cdot k_{\omega} \cdot \mu_v}{\frac{\alpha k_a}{l_3} - k_B},$$

де β – коефіцієнт повноти мідель-шпангоута; k_{ω}, k_{β} – коефіцієнти; μ_v – коефіцієнт проникання відсіку; $l_3 = \frac{L_3}{L}$ – відносна довжина відсіку затоплення; L_3 – довжина відсіку затоплення,

$$\beta = 1 - 3,5 \left(1 - \frac{\delta}{a} \right)^{2,5},$$

$$k_{\omega} = 2 - \exp(0,31 \cdot l_p \cdot (1 - \varphi)),$$

φ – коефіцієнт поздовжньої повноти $\left(\varphi = \frac{\delta}{\beta} \right)$,

$$k_B = 2 - \exp(0,31 \cdot \bar{l}_3 (1 - \alpha)),$$

$$\mu_\nu = \begin{cases} 0,6 - \text{суховантажний трюм,} \\ 0,8 - \text{трюм накатного судна,} \\ 0,85 - \text{машинне відділення, електростанція,} \\ 0,95 - \text{житлові приміщення.} \end{cases}$$

Якщо довжина відсіку затоплення не задана, то обмеження на співвідношення головних розмірів може бути перетворене так:

$$\left(\frac{H}{T} \right) \geq 1 + \frac{\chi \delta}{\alpha \cdot k_\alpha},$$

де χ – відносний запас плавучості,

$$\chi = \begin{cases} 0,24 \dots 0,32 - \text{суховантажні судна,} \\ 0,28 \dots 0,38 - \text{наливні судна.} \end{cases}$$

Таким чином, більші за розміром судна мають менший запас плавучості.

9.5. Обмеження з початкової остійності судна

Початкова остійність судна характеризується поперечною початковою метацентричною висотою судна, на яку накладаються обмеження зверху та знизу. Нижня межа метацентричної висоти обумовлена аварійною остійністю, верхня межа – вимогами плавучості та хитавиці судна.

Початкова поперечна метацентрична висота пов'язана з головними невідомими задачі оптимізації залежністю

$$h = \frac{k_s \cdot \alpha^2 \cdot B^2}{12 \cdot \delta \cdot T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{1/2} T - \xi_g H,$$

де k_s – коефіцієнт, враховуючий асиметричність ватерлінії;
 ξ_g – відносна апліката центру тяжіння судна при повному вантажі;

$$k_s = \begin{cases} 0,74 + 0,80 \alpha - 0,55 \alpha^2 - \text{опукла ватерлінія,} \\ 0,60 + 1,20 \alpha - 0,80 \alpha^2 - S\text{-подібна ватерлінія;} \end{cases}$$

$$\xi_g = \begin{cases} 0,65 + 0,14 e^{-0,2d} - \text{суховантажні судна,} \\ 0,57 + 0,21 e^{0,09d} - \text{суховантажі при перевезенні зерна,} \\ 0,52 + 0,10 e^{-0,02d} - \text{танкери з танками ізольованого} \\ \quad \text{баласту,} \\ 0,49 + 0,10 e^{-0,02d} - \text{танкери без ізольованого баласту.} \end{cases}$$

Обмеження, що накладаються на метацентричну висоту, необхідно подати у вигляді обмежень на співвідношення ширини до занурення судна:

$$\left(\frac{B}{T}\right) = \frac{\frac{h}{B} + \sqrt{\left(\frac{h}{B}\right)^2 + \frac{K_s \alpha^2}{3\delta} \left(\xi_g \frac{H}{T} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)\right)^{0,5}}}{\frac{k_s \cdot \alpha^2}{6\delta}}.$$

Аналіз чутливості співвідношення $\left(\frac{B}{T}\right)$ від $\left(\frac{h}{B}\right)$, виконаний А.Н. Вашедченком, показав, що помилка в оцінці h на 10 % призводить до помилки в оцінці $\left(\frac{B}{T}\right)$ на 2 %. Мінімальне значення $\left(\frac{h}{B}\right)$, припустиме з точки зору аварійної остій-

ності, складає $\left(\frac{h}{B}\right)_{\min} = 0,035$, максимальне значення, припустиме з точки зору плавності хитавиці складає

$$\left(\frac{h}{B}\right)_{\max} = \begin{cases} 0,05 - \text{суховантажні судна,} \\ 0,08 - \text{танкери,} \\ 0,11 - \text{навалочники.} \end{cases}$$

Обмеження по остійності, перетворені в обмеження по співвідношенню $\left(\frac{B}{T}\right)$, мають вигляд

$$\frac{0,035 + \sqrt{b_{\min}^2 - 4ac}}{2a} \leq \left(\frac{B}{T}\right) \frac{b_{\max} + \sqrt{b_{\max}^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\text{де } b_{\min} = \left(\frac{h}{B}\right)_{\min}; \quad b_{\max} = \left(\frac{h}{B}\right)_{\max}; \quad a = -\frac{k_s \alpha^2}{12\delta}; \quad c = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{1/2} - \xi_g \frac{H}{T}.$$

Двостороння нерівність для співвідношення $\left(\frac{B}{T}\right)$ утримує це співвідношення в дуже вузьких межах. Рекомендується як обмеження приймати рівність $\left(\frac{B}{T}\right)$ наближеною до верхньої межі.

9.6. Обмеження за масами суден

Навантаження судна можна надати як суму ряду складових:

$$D = P_{inv} + \sum P_i,$$

де P_{inv} – незалежні від водотоннажності (D) маси, відомі по вихідних даних; D – водотоннажність судна; P_i – маси, залежні від водотоннажності, проектних параметрів та заданих величин (швидкість ходу, дальність плавання).

В укрупненій математичній моделі змінні маси поділяють на 7 категорій:

$$\sum P_i = P_{\text{мк}} + P_{\text{об}} + P_{\text{эу}} + P_{\text{т}} + P_{\text{сн}} + P_{\text{з.в}},$$

де $P_{\text{мк}}$ – маса металевого корпусу; $P_{\text{об}}$ – маса обладнання; $P_{\text{эу}}$ – маса енергетичної установки; $P_{\text{т}}$ – маса пального; $P_{\text{сн}}$ – маса спорядження; $P_{\text{з.в}}$ – запас водотоннажності,

$$P_{\text{мк}} = g_{\text{мк}} \cdot \delta_{\text{п}} \cdot LBH,$$

$$g_{\text{мк}} = \left(0,7 + 0,026 \frac{L}{H} \right) \left(1 + \frac{27,5}{0,001 \delta_{\text{н}} LBH + 20} \right) \cdot A_1 A_2 A_3 A_4,$$

$$g_0 [\text{т} / \text{м}^3] = \begin{cases} 0,1 - \text{навалочник, накатне судно,} \\ 0,08 - \text{танкер, суховантажник,} \\ 0,07 - \text{газовоз,} \\ 0,09 - \text{контейнеровоз,} \end{cases}$$

$$\delta_r = \delta \left(\frac{T}{H} \right) + \alpha \cdot k_{\alpha} \cdot \left(1 - \left(\frac{T}{H} \right) \right),$$

$$A_1 = \begin{cases} 1,0 - \text{судно з мінімальним надводним бортом,} \\ 0,96 - \text{шельтердечне судно;} \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} 1,0 - \text{однопалубне,} \\ 1,06 - \text{двопалубне,} \\ 1,12 - \text{трипалубне;} \end{cases}$$

$$A_3 = \begin{cases} 1,0 - \text{гладкопалубне судно (без надбудови)}, \\ 1,02 - \text{відносна довжина надбудови } l_n / L = 0,2; \\ 1,03 - \text{відносна довжина надбудови } l_n / L = 0,4; \end{cases}$$

$$A_4 = \begin{cases} 1,02...1,08 - \text{льодовий клас Л4, Л3, Л2,} \\ 1,02...1,08 - \text{льодовий клас УЛ, Л1,} \\ 1,2 - \text{льодовий клас УЛА.} \end{cases}$$

$$P_{об} = g_{об} \cdot \left(\frac{0,97}{\delta} \cdot \frac{H}{T} \right)^{2/3} \cdot D^{2/3},$$

$$g_{об} = a_{об} - 0,69(LBH)^{0,83},$$

$$a_{об} = \begin{cases} 3,52 - \text{ліхтеровоз, суховантажник,} \\ 3,62 - \text{нафторудовоз, навалочник,} \\ 3,91 - \text{танкер,} \\ 3,2 - \text{газовоз, накатне судно,} \\ 3,14 - \text{контейнеровоз.} \end{cases}$$

При переході до обмеження по масі обладнання слід пам'ятати про співвідношення

$$LBH = \frac{D_0}{1,35\delta} \left(\frac{H}{T} \right),$$

$$P_{зв} = g_{зв} \cdot N,$$

$$g_{зв} = \begin{cases} 1,2N^{-0,25} - \text{малообертовий дизель,} \\ 1,0N^{-0,25} - \text{середньообертовий дизель,} \\ 1,96N^{-0,333} - \text{парова турбіна,} \\ 1,16N^{-0,333} - \text{газова турбіна,} \end{cases}$$

Формула еквівалентна формулі Папмеля з пропульсивним коефіцієнтом близько 0,6:

$$N = \frac{k_{\text{снд}} \cdot D^{2/3} V^3}{50,1 \cdot l},$$

де $k_{\text{снд}} = 0,45 = \frac{1,7}{l + \exp(7,8 - 22,5 F_r)}$; $l = L / V^{1/3}$ – відносна

довжина судна; V – об'ємна водотоннажність; v – швидкість ходу судна,

$$P_T = k_{\text{мз}} \cdot k_{\text{см}} \cdot g_{\text{гд}} \cdot N \cdot \frac{z}{v} = g_T N \cdot \frac{z}{v},$$

де $k_{\text{мз}} = 1,1 \dots 1,12$ – коефіцієнт морського запасу; $k_{\text{см}}$ – коефіцієнт, враховуючий витрати на судові потреби на ходу та стоянці судна; $g_{\text{гд}}$ – відносні витрати пального головним двигуном. Осереднене значення g_T залежить від типу силової установки і складає:

$$g_m \left[\frac{\text{Т}}{\text{кВт} \cdot \text{год}} \right] = \begin{cases} 238 \cdot 10^{-6} - \text{малообертовий дизель,} \\ 258 \cdot 10^{-6} - \text{середньообертовий дизель,} \\ 3,18 \cdot 10^{-4} \left(\exp(-0,302 \cdot N \cdot 10^{-6}) \right) - \text{газова} \\ \text{турбіна з регенерацією,} \\ 332 \cdot 10^{-6} \exp(-12 \cdot N \cdot 10^{-6}) - \text{парова} \\ \text{турбіна з проміжним перегрівом пару,} \\ 379 \cdot 10^{-6} \exp(-2,6 \cdot N \cdot 10^{-6}) - \text{парова} \\ \text{турбіна з відбором насиченого пару,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{сн}} &= 0,01D, \\ P_{\text{з.в}} &= 0,01D. \end{aligned}$$

Рівняння мас (існування) судна за прийнятих розрахункових формул виглядає як

$$\begin{aligned}
 D - g_0 \left(0,7 + 0,026 \frac{L}{H} \right) & \left(1 + \frac{27,5}{0,00097 \frac{\delta_r}{\delta} \cdot \frac{P_r}{\eta_r} \cdot \left(\frac{H}{T} \right) + 20} \right) \times \\
 & \times A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot 0,00097 \frac{\delta_r}{\delta} \cdot \left(\frac{H}{T} \right) \cdot D - \\
 - \left(\left(a_{об} - 0,69 \left(\frac{0,956H}{T} \right)^{0,083} \right) \times \left(\frac{P_r}{\eta_r} \right)^{0,083} \right) & \left(\frac{0,0956H}{T} \right)^{2/3} + \\
 + \frac{k_{снд} v^2}{50,1l} (g_T \cdot z + g_{zy} v) & \times D^{2/3} - 0,2 D - P_r,
 \end{aligned}$$

а після приведення коефіцієнтів наступним чином:

$$D - n_{10} \cdot D - n_{20} \cdot D^{2/3} - P_r = 0,$$

де

$$\begin{aligned}
 n_{10} &= g_0 \left(0,7 + 0,026 \left(\frac{L}{H} \right) \right) \left(1 + \frac{27,5}{0,00097 \frac{\delta_r}{\delta} \cdot \frac{P_r}{\eta_r} \cdot \left(\frac{H}{T} \right) + 20} \right) \times \\
 & \times A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot 0,00097 \frac{\delta_r}{\delta} \cdot \left(\frac{H}{T} \right); \\
 n_{20} &= \left(a_{об} - 0,667 \left(\frac{H}{T} \right)^{0,083} \cdot \left(\frac{P_r}{\eta_r} \right)^{0,083} \cdot \left(\frac{H}{T \cdot \delta} \right)^{2/3} + \frac{k_{снд} v^2}{50,1l} g_T z + g_{zy} v \right).
 \end{aligned}$$

Вашедченко А.Н. рекомендує більш компактний спосіб використання рівняння мас невідправленого прототипу:

– виправляють усі статті навантаження, окрім незалежних вагових складових прототипу, згідно із завданням по швидкості, дальності плавання v_s , z , льодовому класу, відношенню L/H , відносній довжині надбудови, типу енергетичної установки, рухомо-стерновому комплексу;

– підраховують коефіцієнти $n_{10}^{\text{исп}}$ та $n_{20}^{\text{исп}}$;

– у рівняння $n_{10}^{\text{исп}} \cdot D - n_{20}^{\text{исп}} \cdot D^{2/3} + P_{\text{inv}} = 0$ підставляють чисту вантажопідйомність проектного судна та розв'язують рівняння

$$D_0 = P_{ur} / \eta_{\text{утил}},$$

де $\eta_{\text{утил}}$ – припустимо брати приблизно;

$$D = \frac{\frac{1}{3} n_{20} \cdot D_0^{2/3} + P_{\text{inv}}}{n_{10} - \frac{2}{3} n_{10} / D_0^{1/3}}.$$

Межі зміни тактико-технічних даних і навантаження практично не обмежені.



Тема 10. Аналіз результатів оптимізації

10.1. Діапазон оптимальних значень незалежної змінної

10.2. Оцінка околиці оптимуму

10.3. Вплив "зовнішніх факторів"

10.1. Діапазон оптимальних значень незалежної змінної

Погляди інженера-проектувальника та оптимізатора-теоретика на проблему точності рішення задачі оптимізації можуть бути проілюстровані рис. 10.1.

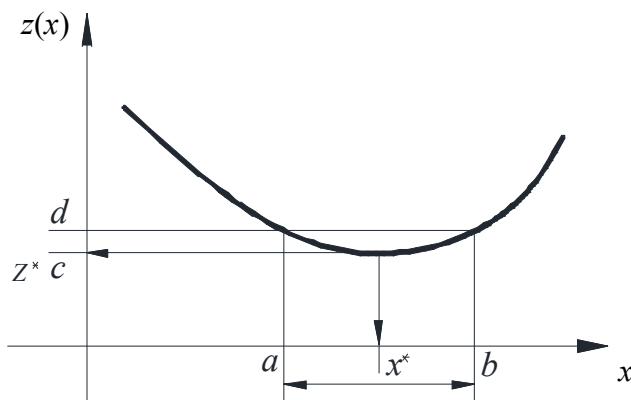


Рис. 10.1. Погляди інженера та математика на оптимум

З рисунка можна побачити, що при зміні функції в інтервалі cd оптимізована змінна проектування X змінюється в діапазоні ab .

Якщо інтервал cd є припустимим для цільової функції $z(x)$, то інтервал ab прийнято називати діапазоном оптимальних значень незалежної змінної проектування.

Зазвичай у прикладних задачах оптимізації необхідно отримати такий результат, щоб цільова функція прийняла мінімальне значення або близьке до нього значення. В багатьох випадках значення функції навколо мінімуму слабо залежить від змінних проектування, однак необхідно знаходити координати точки оптимуму з високою точністю, що має не тільки теоретичний, але й практичний сенс.

Наприклад, незалежні змінні – це розміри деталі, а функція цілі є показником якості конструкції. Якщо знайшли мінімум функції точно, то ми знаходимося в точці X . Варіації незалежних змінних мають сенс допусків на точність обробки деталі. Таким чином, при точному обчисленні координат мінімуму можливо призначити більші допуски на виготовлення деталі, тобто зменшити вартість обробки деталі.

З девізу "Ціль розрахунків – не є числа, а порозуміння", слід зазначити, що людина, яка повинна цього порозуміння досягти, зобов'язана знати, як виконуються обчислення. Якщо людина не розуміє, що робиться при обчисленні, то мало ймовірно, що вона знайде серед розрахунків щось цінне. Людина бачить тільки голі цифри, а сенс розрахунків залишається прихованим від неї. У Еддінгтона є історія про людину, яка пішла ловити рибу сіткою з вічком певного розміру. Побачивши, що серед упійманих риб є тільки малі, вона вирішила, що це найменші риби в морі, допустивши помилку при врахуванні методу ловлі риби. Те ж саме і при розрахунках – те, що отримано внаслідок розрахунків, залежить від вихідної інформації та того, що з нею робиться при розрахунках. Якщо

не розуміти проміжні процеси оптимізації, то легко переплутати ефекти від розрахунків оптимізації з ефектами математичної моделі, при побудові якої використані певні припущення та спрощення при формулюванні задачі оптимізації.

10.2. Оцінка околиці оптимуму

Оцінка околиці оптимуму, або оцінка наслідків відступлення від формального оптимального рішення необхідна з двох причин. По-перше, реальна практика створення оптимального транспортного засобу, наприклад судна, значно складніша будь-яких математичних моделей і результатів їх оптимізації. Тому вирішальна роль у прийнятті оптимального рішення, як і завжди в економіці, належить відповідним фахівцям. Це означає, що фахівець повинен мати можливість оцінити не тільки заздалегідь передбачені відхилення від оптимального рішення, а ще й мати можливість оперативної оцінки будь-яких інших можливих змін по відношенню до оптимального рішення.

По-друге, надання фахівцю одночасно з оптимальним рішенням даних про околицю оптимуму дозволяє усунути психологічний бар'єр "точкового розв'язку".

Розв'язок задачі про околицю оптимуму можна отримати як наслідок дослідження оцінки обмежень на основі перетворення вихідної задачі оптимізації до лінійної.

10.3. Вплив "зовнішніх факторів"

Вплив зміни "зовнішніх факторів" при оптимізації елементів суден та інших транспортних засобів у багатьох випадках оптимізації не враховується. Однак більшість авторів вказує на необхідність врахування впливу "зовнішніх факторів" на оптимальне рішення задачі.

Доводити впливовість зміни вихідних даних експлуатаційного характеру ("зовнішніх факторів") на оптимальне рішення задачі немає необхідності. Від інтенсивності вантажних робіт, фрахтових ставок, масогабаритних характеристик вантажу та т. п. залежать ефективність, характеристики та елементи транспортного засобу.

Об'єктивним методом врахування мінливості "зовнішніх факторів" задачі оптимізації є перехід до ймовірнісної оцінки ефективності суден.

Вплив мінливості "зовнішніх факторів" на оптимальне рішення близько пов'язаний з питанням про моральне старіння суден та кораблів. Буде слушним нагадати відповідь О.М. Крилова на питання "чи не застаріють кораблі за час побудови?". Зазвичай вимагають, щоб корабель був найпотужнішим у світі на час свого проектування.

О.М. Крилов відповів наступним чином: "... наші лінійні кораблі застаріють не за чотири роки своєї побудови, а завтра. Хтось, починаючи проектувати лінійний корабель завтра, повинен взяти до уваги і наш корабель і проектувати корабель сильніший за наш. Не про один день необхідно турбуватися, а передбачити, що можливо проектувати корабель так, щоб він якомога довше залишався боєздатним і потужним. Ось що покладено в основу проектування наших лінійних кораблів. Минуло 25 років з того часу (1908 р.), як ці лінійні кораблі вступили до строю. Всі іноземні "однолітки" наших кораблів давно перетворені в брухт, наші ж гордо плавають по водах Балтики і Чорного моря".

Деякі з лінійних кораблів цієї серії брали участь у Другій світовій війні.

2. ПІДСУМКОВІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Розв'яжіть наведені задачі лінійного програмування, використовуючи теоретичний і практичний матеріал з тем 1–6. Варіант завдання обирається згідно зі списком у журналі.

Варіант № 1

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = x_1 + x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = x_1 + x_2 + x_3$ при

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Варіант № 2

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = -2x_1 - 3x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq -1, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = x_4 - x_5$ при

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 5, \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Варіант № 3

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = -x_1 - x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -15, \\ 4x_1 - x_2 \geq 20, \\ 3x_1 + x_2 \geq 30, \\ x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$ при

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Варіант № 4

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = 2x_1 + 3x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0, \\ 4x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Варіант № 5

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = 2x_1 - 5x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Варіант № 6

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = -2x_1 + 5x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Варіант № 7

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $\min = -x_1 - 10x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = 5x_1 + 2x_2 - x_3$ при

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Варіант № 8

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5$ та обмежень

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4, 5). \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$ при

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Варіант № 9

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = x_1 + x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ -5x_1 + x_6 = 0, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

Варіант № 10

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = -2x_1 - 3x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq -1, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ при

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Варіант № 11

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = -x_1 - x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -15, \\ 4x_1 - x_2 \geq 20, \\ 3x_1 + x_2 \geq 30, \\ x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Варіант № 12

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = 2x_1 + 3x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0, \\ 4x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$ при

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Варіант № 13

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = 2x_1 - 5x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ -5x_1 + x_6 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

Варіант № 14

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = -2x_1 + 5x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = x_4 - x_5$ при

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 5, \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Варіант № 15

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = -x_1 - 10x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = 5x_1 + 2x_2 - x_3$ при

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Варіант № 16

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5$ та обмежень

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5). \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ при

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Варіант № 17

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = x_1 + x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Максимізувати лінійну функцію $z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Варіант № 18

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = -2x_1 - 3x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq -1, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$ при

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Варіант № 19

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\max} = -x_1 - x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -15, \\ 4x_1 - x_2 \geq 20, \\ 3x_1 + x_2 \geq 30, \\ x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Варіант № 20

1) Застосувавши графічний метод, скласти оптимальний план для заданої функції $z_{\min} = 2x_1 + 3x_2$ та обмежень

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0, \\ 4x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2) Розв'язати задачу симплексним методом. Мінімізувати лінійну функцію $z = x_1 + x_2 + x_3$ при

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. **Акулич, И. Л.** Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособ. для студентов экономических спец. вузов / И. Л. Акулич. – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с.

2. **Бугір, М. К.** Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі [Текст] : посіб. для студентів вищих навчальних закладів / М. К. Бугір. – К. : Видавничий центр "Академія", 1998. – 272 с.

3. **Гетьманцев, В. Д.** Лінійна алгебра і лінійне програмування [Текст] : навч. посібник / В. Д. Гетьманцев. – К. : Либідь, 2001. – 256 с.

4. Справочник по математике для экономистов [Текст] / В. Е. Барбогумов, В. И. Ермаков, Н. Н. Кривенцова [и др.] ; под ред. В. Н. Ермакова. – М. : Высшая школа, 1997. – 384 с.

5. **Хемминг, Р. В.** Численные методы / Р. В. Хемминг. – М. : Наука, 1972. – 400 с.

Додаткова

6. **Ашик, В. В.** Проектирование судов [Текст] : учебник / В. В. Ашик. – Л. : Судостроение, 1985. – 320 с.

7. **Банди, Б.** Методы оптимизации. Вводный курс [Текст] / Б. Банди; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.

8. **Бронников, А. В.** Морские транспортные суда: основы проектирования [Текст] : учеб. пособие / А. В. Бронников. – Л. : Судостроение, 1984. – 352 с.

9. **Букалов, В. М.** Проектирование атомных подводных лодок [Текст] / В. М. Букалов, А. А. Нарусбаев. – Л. : Судостроение, 1968. – 334 с.

10. **Вашедченко, А. Н.** Автоматизированное проектирование судов [Текст] : учеб. пособ. / А. Н. Вашедченко. – Л. : Судостроение, 1985. – 164 с.

11. Вертолеты. Расчет и проектирование [Текст] : в 2-х кн. Кн. 2 / М. Л. Миль, А. В. Некрасов, А. С. Браверман [и др.]. – М. : Машиностроение, 1967. – 423 с.

12. Высшая математика. Специальные главы [Текст] / П. И. Чинаев, А. А. Черенков, Н. А. Минин, А. Ю. Перевозников. – К. : Высшая школа, 1977. – 368 с.

13. **Грешилов, А. А.** Как принять наилучшее решение в реальных условиях [Текст] / А. А. Грешилов. – М. : Радио и связь, 1991. – 320 с.

14. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2-х ч. Ч. 1 : учеб. пособ. для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1996. – 304 с.

15. **Доугерти, К.** Введение в эконометрику [Текст] / К. Доугерти ; пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 1997. – 402 с.

16. **Захаров, И. Г.** Теория компромиссных решений при проектировании корабля [Текст] / И. Г. Захаров. – Л. : Судостроение, 1980. – 240 с.

17. Исследование операций в экономике [Текст] : учеб. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

18. **Калиткин, Н. Н.** Численные методы [Текст] / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

19. **Краев, В. И.** Экономические обоснования при проектировании морских судов [Текст] / В. И. Краев. – Л. : Судостроение, 1981.

20. **Крылов, А. Н.** Мои воспоминания [Текст] / А. Н. Крылов. – Л. : Судостроение, 1984. – 480 с.

21. **Мажид, К. И.** Оптимальное проектирование конструкций [Текст] / К. И. Мажид ; пер. с англ. – М. : Высшая школа, 1979. – 237 с.

22. **Мазаракі, А. А.** Математичне програмування в Excel [Текст] : навч. посіб. / А. А. Мазаракі, Ю. А. Толбатов. – К. : Четверта хвиля, 1998. – 208 с.

23. **Ногид, Л. М.** Проектирование морских судов [Текст] / Л. М. Ногид. – Л. : Судостроение, 1976. – 208 с.

24. **Пашин, В. М.** Оптимизация судов [Текст] / В. М. Пашин. – Л. : Судостроение, 1983. – 296 с.

25. **Пашин, В. М.** Вероятностная оценка экономической эффективности судов [Текст] / В. М. Пашин, Ю. Н. Поляков. – Л. : Судостроение, 1976.

26. **Пшеничный, Б. Н.** Численные методы в экстремальных задачах [Текст] / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М. : Наука, 1975. – 319 с.

27. **Раков, А. И.** Особенности проектирования промышленных судов (определение основных характеристик) [Текст] / А. И. Раков. – Л. : Судостроение, 1966. – 144 с.

28. **Родионов, А. А.** Математические методы проектирования оптимальных конструкций судового корпуса [Текст] / А. А. Родионов. – Л. : Судостроение, 1990. – 248 с.

29. **Семенов, Ю. Н.** Методы принятия решений в проектировании судов [Текст] : учебное пособие / Ю. Н. Семенов. – Л. : ЛКИ, 1983. – 90 с.

30. **Таха, Х.** Введение в исследование операций [Текст] : в 2-х кн. / Х. Таха. – М. : Мир, 1985. – 496 с.

31. **Хог, Э.** Прикладное оптимальное проектирование : механические системы и конструкции [Текст] / Э. Хог, Я. Аро-ра. – М. : Мир, 1983. – 478 с
 32. **Холоша, В. И.** Проектирование и эксплуатация сухо-грузных судов [Текст] / В. И. Холоша. – Л. : Судостроение, 1984. – 216 с.
 33. **Худяков, Л. Ю.** Исследовательское проектирование кораблей [Текст] / Л. Ю. Худяков. – Л. : Судостроение, 1980. – 240 с.
 34. **Шейнин, В. М.** Весовая и транспортная эффектив-ность пассажирских самолетов [Текст] / В. М. Шейнин. – М. : Оборонгиз, 1962. – 363 с.
 35. **Юдин, Д. Б.** Задачи и методы стохастического про-граммирования [Текст] / Д. Б. Юдин. – М., 1979. – 345 с.
-

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ	6
Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання логістичних систем	6
1.1. Сутність і види економічних моделей	6
1.2. Основні етапи економіко-математичного моделю- вання	14
Контрольні запитання	23
Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі	24
2.1. Математичне програмування, його цілі та завдання	24
2.2. Задачі оптимізації	25
2.3. Приклади оптимізаційних задач	27
Контрольні запитання	34
Практичні завдання	35
Тема 3. Задача лінійного програмування та методи її розв'язування	38
3.1. Постановка задачі лінійного програмування	38
3.2. Геометрична інтерпретація множини допустимих розв'язків задачі лінійного програмування та графічний метод її розв'язання	42
3.3. Геометрична інтерпретація множин допустимих розв'язків для задач із трьома невідомими	45

3.4. Симплекс-метод	50
3.5. Критерій оптимальності за симплекс-таблицею	59
<i>Контрольні запитання</i>	71
<i>Практичні завдання</i>	71
Тема 4. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач	73
4.1. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряжених задач лінійного програмування	73
4.2. Економічна інтерпретація двоїстості задачі лінійного програмування	75
4.3. Співвідношення невідомих прямої та двоїстої задачі ...	83
4.4. Економічна і математична постановка транспортної задачі. Умови існування розв'язку транспортної задачі	87
4.5. Застосування діагонального методу та методу найменшої відстані для розв'язання транспортної задачі	89
4.6. Застосування двоїстої задачі до транспортної	92
<i>Контрольні запитання</i>	104
<i>Практичні завдання</i>	104
Тема 5. Цілочислове програмування	107
5.1. Постановка задачі цілочислового програмування	107
5.2. Метод Гоморі	110
5.3. Метод "гілок і меж"	113
5.4. Приклади цілочислових економічних задач	116
5.5. Задачі дробово-лінійного програмування: постановка та методи розв'язання	119
<i>Контрольні запитання</i>	124
<i>Практичні завдання</i>	124
Тема 6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем	126
6.1. Сутність та особливості задач нелінійного програ- мування	126
6.2. Геометрична інтерпретація задач нелінійного програ- мування	129

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

6.3. Математичний апарат економіста для розв'язання задач нелінійного програмування	131
6.4. Квадратичне програмування	138
<i>Контрольні запитання</i>	142
<i>Практичні завдання</i>	142
Тема 7. Ітераційні методи пошуку оптимуму задач нелінійного програмування	144
7.1. Постановка задачі	144
7.2. Градієнтні методи	145
7.3. Приклад пошуку мінімуму функції	147
7.4. Аналітичне дослідження функції	149
7.5. Пошук локального мінімуму функції методом найшвидшого спуску	152
7.6. Метод координатного спуску	157
7.7. Метод спірального координатного спуску	158
7.8. Метод штрафних функцій	158
7.9. Динамічне програмування	160
7.10. Метод сіток (метод співставної оцінки варіантів)	164
Тема 8. "Універсальні" критерії оптимізації транспортних об'єктів	170
8.1. Критерій Бубнова	170
8.2. Критерій Шейніна	172
8.3. Критерій Міля	173
8.4. Критерій Боінг-Вертол	173
8.5. Критерій Нормана	174
8.6. Критерій Дж. Куваса	179
8.7. Критерій Семенова	181
Тема 9. Математична модель судна	191
9.1. Класифікація математичних моделей судна	191
9.2. Укрупнена математична модель транспортного судна	192
9.3. Обмеження на місткість судна	192
9.4. Обмеження з умов непотопності судна	196

9.5. Обмеження з початкової остійності судна	197
9.6. Обмеження за масами суден	199
Тема 10. Аналіз результатів оптимізації	205
10.1. Діапазон оптимальних значень незалежної змінної ...	205
10.2. Оцінка околиці оптимуму	207
10.3. Вплив "зовнішніх факторів"	207
2. ПІДСУМКОВІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	209
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	221

Навчальне видання

КАЗАРЄЗОВ Анатолій Якович
ГАЛЬ Анатолій Феодосійович
БАРАБАНОВА Юлія Євгенівна

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЛОГІСТИКИ

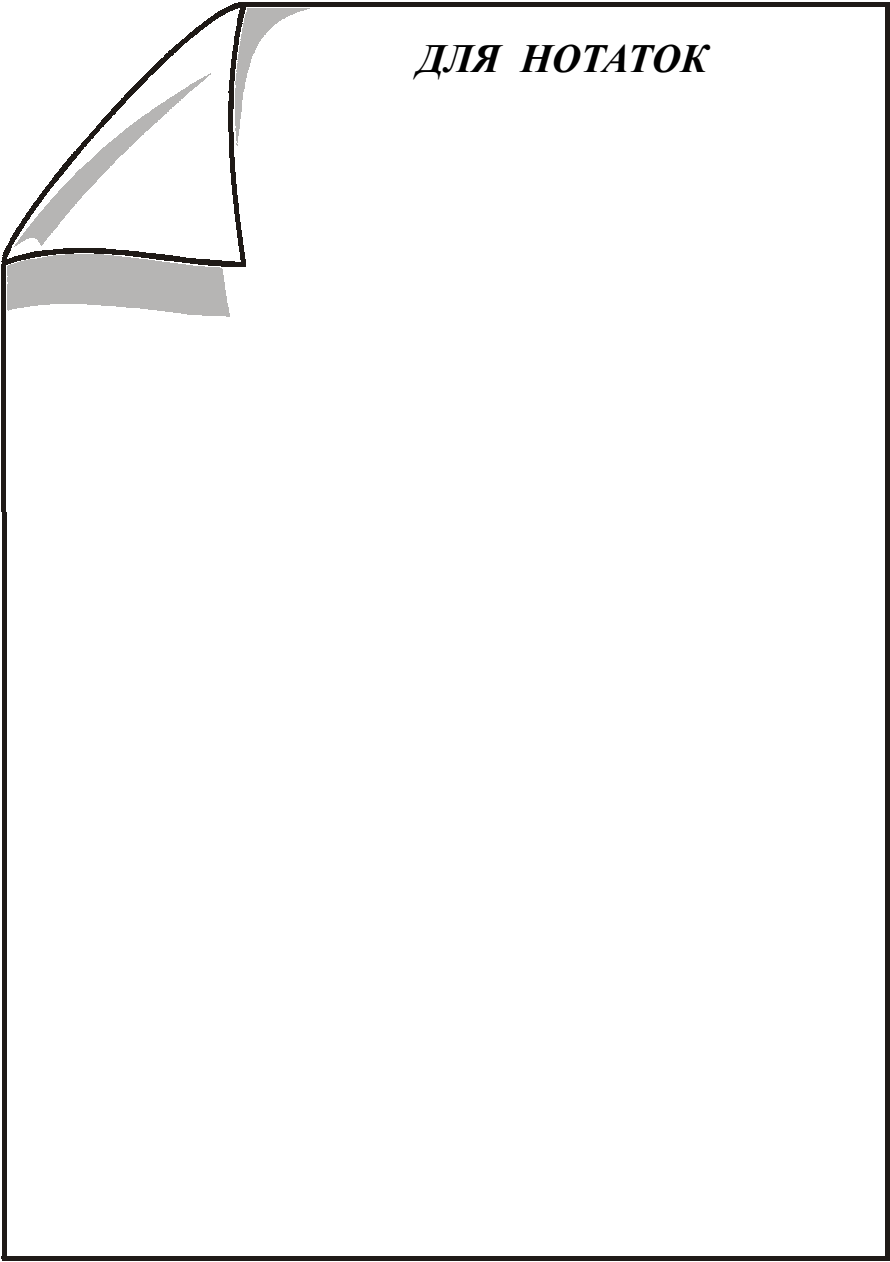
Підручник

Редактор *А. О. Максименко*
Комп'ютерне верстання *А. В. Платонова*
Коректор *М. О. Паненко*

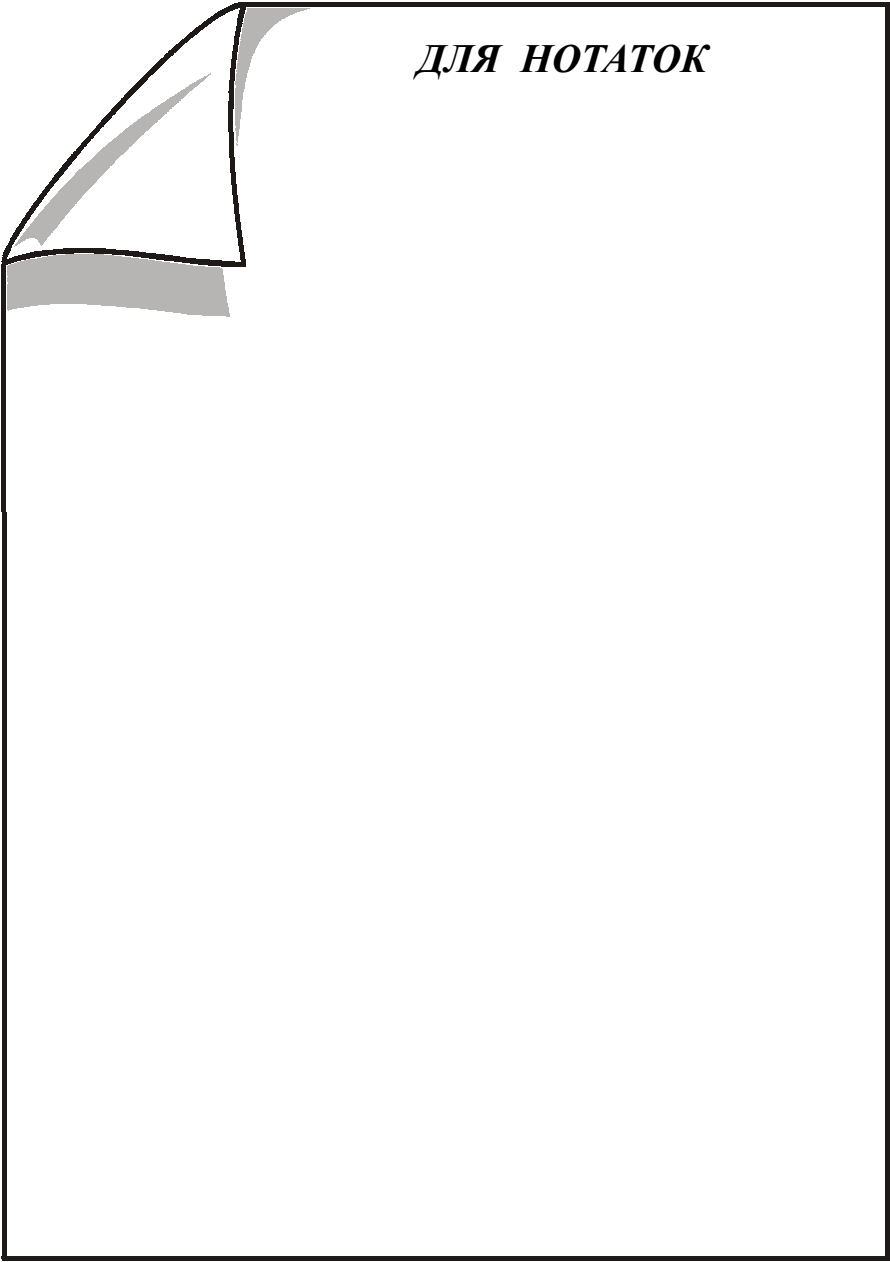
Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 13,5. Тираж 100 прим. Вид. № 8. Зам. № 136.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

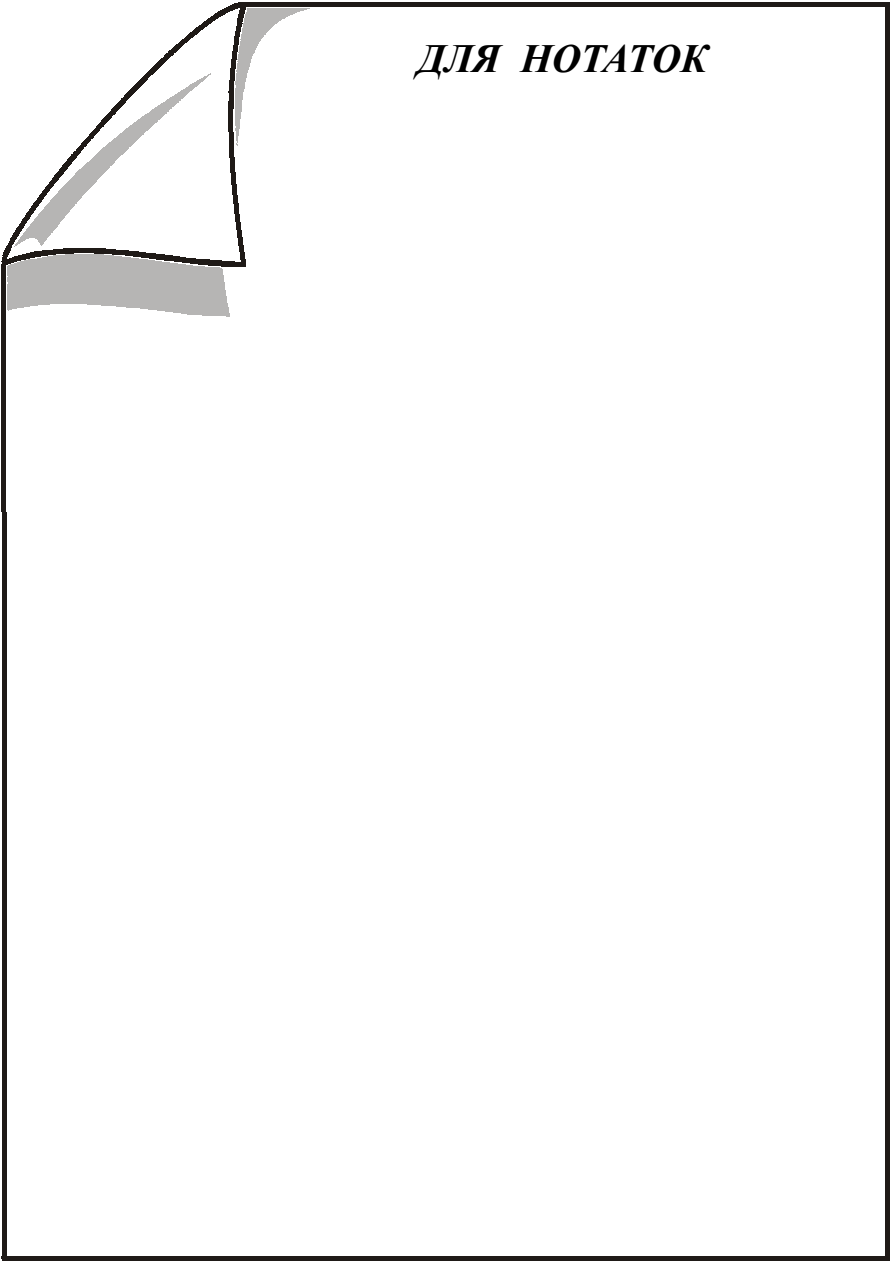
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.



ДЛЯ ЗАДАТОК



ДЛЯ ЗАДАТОК



ДЛЯ ЗАДАТОК