

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

В.Ф. Лебедєва, Н.І. Попова, Н.А. Руденко

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як методичні вказівки*

Миколаїв 2004

Лебедєва В.Ф., Попова Н.І., Руденко Н.А. Операційне числення: Методичні вказівки. – Миколаїв: НУК, 2004. – 48 с.

Кафедра вищої математики

Методичні вказівки присвячені одній із важливіших тем вищої математики – операційному численню, літератури з якої дуже мало. В першій частині в стислій формі, але з необхідними поясненнями, наведено основні теореми операційного числення. В другій частині, що присвячена практичному застосуванню засобів операційного числення, розв'язано багато задач, наведено геометричні ілюстрації. Є також приклади для самостійного розв'язання.

Вважаємо, що вихід з друку методичних вказівок буде вчасним і корисним як для студентів Інституту автоматики та електроніки, так і для молодих викладачів.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. А.М. Кузнецов

1. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1.1. Основні поняття операційного числення

Операційне числення застосовується при вивченні теоретичних основ радіотехніки та електроніки, теорії автоматичного управління та інших спеціальних дисциплін, для розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними.

В основі операційного числення лежить так зване перетворення Лапласа. Нехай існує деяка функція $f(t)$ незалежної змінної t і дано комплексне число $p = \sigma + i\tau$. Функція $f(t)$ перетворюється в функцію $F(p)$ за формулою

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Для того, щоб функція $F(p)$ була визначена, необхідно, щоб інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ існував для деякої області значень p . А для

цього функція $f(t)$ повинна задовольняти такі умови:

функція $f(t)$ – неперервна або кусково-неперервна на всій числовій осі;

функція $f(t) = 0$ для всіх $t < 0$;
існують два числа $M > 0$ і $s \geq 0$, такі що для всіх $t > 0$ $|f(t)| < Me^{st}$.

Число s називається показником зростання функції $f(t)$. Це означає, що $f(t)$ за абсолютною величиною може зростати не швидше деякої наперед заданої показникової функції e^{st} .

Функція $f(t)$, що задовольняє ці умови, називається **оригіналом**. Оригіналами являються обмежені функції, наприклад $f(t) = \sin t$; $f(t) = \cos t$. Функція $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, зростає повільніше показникової функції, тому що $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\alpha}{e^{st}} = 0$.

Функція $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ називається **зображенням**. Те, що

функція $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$, позначається $f(t) \rightarrow F(p)$.

Важливо з'ясувати, в якій області комплексної площини функція $F(p)$ буде визначеною, тобто в якій області інтеграл Лапласа збігається. На це питання відповідає наступна теорема.

Теорема 1. Для кожного оригіналу $f(t)$ зображення $F(p)$ існує в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, де s_0 – показник зростання $f(t)$ і є в цій півплощині аналітичною функцією.

Ця теорема може бути проілюстрована геометрично таким чином. Якщо через точку s_0 даної осі (рис. 1) провести пряму, паралельну уявній осі, то інтеграл

$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ збігається всюди в області, яка росташована праворуч від цієї прямої. Тобто, тільки дійсна частина p вирішує збіжність інтеграла Лапласа. Уявна частина зовсім не має значення.

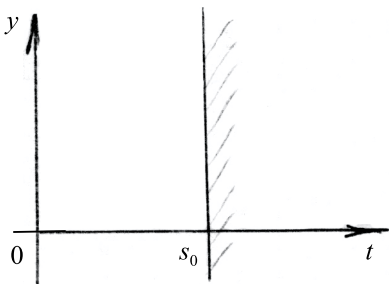


Рис. 1

ласті, яка росташована праворуч від цієї прямої. Тобто, тільки дійсна частина p вирішує збіжність інтеграла Лапласа. Уявна частина зовсім не має значення.

Сукупність усіх оригіналів $f(t)$ називається простором оригіналів, а сукупність усіх зображень $F(p)$ – простором зображень.

Наслідок. Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником росту s_0 , то $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Цей наслідок є необхідною умовою існування зображення.

Теорема 2. Будь-якому оригіналу відповідає єдине зображення.

Справедливою є обернена теорема: якщо дві функції $\phi(t)$ і $\psi(t)$ у півплощині, де $\operatorname{Re} p > s_0$, мають одне і те ж зображення $F(p)$, то ці функції тотожно рівні в точках їх неперервності.

1.2. Зображення деяких функцій

1.2.1. Одинична функція

Функція $\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$ називається одиничною функцією Хевісайда.

Графік її наведено на рис. 2. Застосуємо до неї перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1 \cdot dt.$$

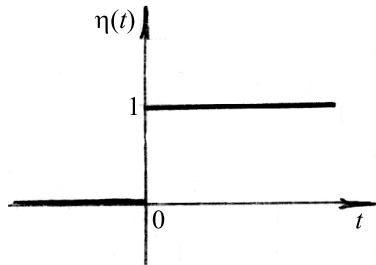


Рис. 2

1. Нехай p – дійсне число.
Тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

2. Нехай p – комплексне число, яке має вигляд $p = \sigma + i\tau$. Тоді

$$e^{-pt} = e^{(-\sigma - i\tau)t} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\tau t} = e^{-\sigma t}(\cos \tau t + i \sin \tau t);$$

$$|e^{-pt}| = |e^{-\sigma t}| \cdot |\cos \tau t + i \sin \tau t| = e^{-\sigma t}.$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt = \lim_{b \rightarrow 0} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow 0} \left(-\frac{e^{-pb}}{p} + \frac{1}{p} \right).$$

Якщо $\sigma > 0$, то $\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-pb} p}{p} \right) = 0$ і $F(p) = \frac{1}{p}$. Таким чином, $\eta(t) \rightarrow (\operatorname{Re} p > 0)$.

1.2.2. Показникова функція e^{at}

Для того, щоб функція e^{at} була оригіналом, її необхідно помножити на одиничну функцію Хевісайда $\eta(t)$. Тоді функція $f(t) = e^{at} \cdot \eta(t)$ матиме вигляд

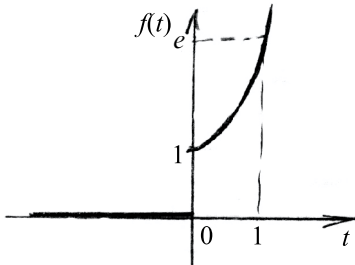


Рис. 3

$$e^{at} \cdot \eta(t) = \begin{cases} e^{at}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Графік цієї функції наведено на рис. 3.

Надалі будемо писати e^{at} , розуміючи $e^{at}\eta(t)$.

1. Нехай a і p – дійсні числа. Тоді

$$\begin{aligned} e^{at} &\rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-p)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p} \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-p)b}}{a-p} - \frac{1}{a-p} \right] = \begin{cases} \frac{1}{p-a}, & p > a; \\ \infty, & p < a. \end{cases} \end{aligned}$$

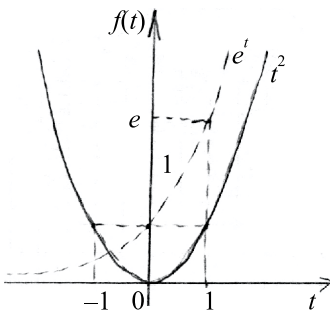


Рис. 4

2. Якщо p і a – комплексні, то інтеграл збігається і має те ж значення, якщо $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$. Отже,

$$e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a).$$

1.2.3. Функція $f(t) = t^2$

Перевіримо, чи є ця функція оригіналом (рис. 4). На $(-\infty; \infty)$ ця функ-

ція неперервна; $t^2 < e^t$ при $t \rightarrow \infty$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{e^t} = 0$, тобто e^t зростає швидше, ніж t^2 .

Але $t^2 \neq 0$ при $t < 0$. Помножимо $f(t) = t^2$ на $\eta(t)$:

$$f_1(t) = f(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Нова функція $f_1(t)$ є оригіналом (рис. 5).

Надалі всі функції, які задовольняють умови оригіналу, будемо вважати помноженими на $\eta(t)$.

Знайдемо зображення функції $f(t) = t^2$:

$$\begin{aligned} t^2 &\rightarrow \int_0^{\infty} t^2 e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^2 e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^2 & du = 2t dt \\ dv = e^{-pt} dt & v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[t^2 \left(-\frac{1}{p} \right) e^{-pt} \Big|_0^b + \frac{2}{p} \int_0^b t e^{-pt} dt \right] = \left| \begin{array}{ll} u = t & du = dt \\ dv = e^{-pt} dt & v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{t^2}{p} e^{-pt} \Big|_0^b + \frac{2}{p} \left(-\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^b + \frac{1}{p} \int_0^b e^{-pt} dt \right) \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{t^2}{p} e^{-pt} \Big|_0^b - \frac{2}{p^2} t e^{-pt} \Big|_0^b + \frac{2}{p^2} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \Big|_0^b \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\underbrace{-\frac{b^2 p - pb}{p}}_0 + 0 - \underbrace{\frac{2be^{-pb}}{p^2}}_0 + 0 - \underbrace{\frac{2}{p^3} e^{-pb}}_0 + \frac{2}{p^3} e^{-p \cdot 0} \right) = \frac{2}{p^3}. \end{aligned}$$

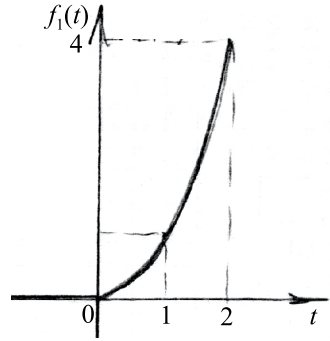


Рис. 5

Таким чином, $t^2 \rightarrow \frac{2}{p^3}$.

1.2.4. Гамма-функція

Гамма-функція визначається інтегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

$\Gamma(\alpha)$ є неперервною функцією від $\alpha > 0$.

Розглянемо $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt.$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\Gamma(\alpha+1) = -(e^{-t} t^{\alpha}) \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \alpha \Gamma(\alpha).$$

Отже $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$. Це формула зведення для гамма-функції.

Якщо $\alpha = n$, де n – натуральне число, то $\Gamma(n+1) = n(n-1) \times \dots \times (n-2) \dots 2 \Gamma(1)$, або $\Gamma(n+1) = n!$, тому що

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -\frac{1}{e^t} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

1.2.5. Степенева функція t^{α} , $\alpha > 1$

За означенням зображення отримаємо

$$\begin{aligned} F(P) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha} dt = \left| \begin{array}{l} pt = u \\ dt = \frac{du}{p} \end{array} \right| = \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{\alpha}}{p^{\alpha}} \frac{du}{p} = \\ &= \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha} du = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1), \quad \alpha+1 > 0. \end{aligned}$$

Таким чином, $t^\alpha \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$. $t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$ для всіх натуральних n .

1.3. Властивості перетворення Лапласа

У випадках застосування операційного числення задача спочатку формулюється для функції змінної t . Ця задача перетворюється на нову, яку сформульовано для змінної p . Крім таблиці співвідношень між оригіналами та їх зображеннями необхідно знати і правила зображення операцій.

Властивість однорідності

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і a – комплексне число, то

$$af(t) \rightarrow \alpha F(p).$$

Властивість додавання

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, то

$$f(t) + \varphi(t) \rightarrow F(p) + \Phi(p).$$

Властивість лінійності

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$ й a, b – сталі, то

$$af(t) + b\varphi(t) \rightarrow aF(p) + b\Phi(p).$$

Приклади. Користуючись властивістю лінійності та знаючи,

що $e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p - \alpha}$, знайдемо зображення функцій:

$$1. \sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) \rightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{p^2 + 1};$$

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1};$$

$$2. \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1};$$

$$\cos t \rightarrow \frac{p}{p^2+1};$$

$$3. \operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1};$$

$$\operatorname{sh} t \rightarrow \frac{1}{p^2-1};$$

$$4. \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2-1};$$

$$\operatorname{ch} t \rightarrow \frac{p}{p^2-1}.$$

1.4. Теорема подібності (зображення функції зі змінним масштабом)

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то $f(at) \rightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{P}{a}\right)$; $a > 0$.

Доведення:

$$\begin{aligned} f(at) &\rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} f(at) dt = \left| \begin{matrix} at = \tau \\ a dt = d\tau \end{matrix} \right| = \int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}\tau} f(\tau) \frac{d\tau}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{P}{a}\right). \end{aligned}$$

Отже, $f(at) \rightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{P}{a}\right)$; $a > 0$.

Приклади. Користуючись теоремою подібності, знайдемо зображення функцій:

$$1. \sin at \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{p^2 + a^2}; \quad \sin at \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2};$$

$$2. \cos at \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + a^2}; \quad \cos at \rightarrow \frac{p}{p^2 + a^2};$$

$$3. \operatorname{sh} at \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1} = \frac{a}{p^2 - a^2}; \quad \operatorname{sh} at \rightarrow \frac{a}{p^2 - a^2};$$

$$4. \operatorname{ch} at \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - a^2}; \quad \operatorname{ch} at \rightarrow \frac{p}{p^2 - a^2}.$$

1.5. Теорема запізнення (зміщення в аргументі оригіналу)

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і t_0 – додатне число, то

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-t_0 p} F(p).$$

Доведення. За означенням оригіналу маємо

$$f(t - t_0) \rightarrow \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ f(t - t_0), & t \geq t_0. \end{cases}$$

Зсовуючи графік функції $f(t)$ (рис. 6) праворуч на t_0 , отримаємо графік функції (рис. 7):

$$f(t - t_0) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt = \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t - t_0) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0) dt.$$

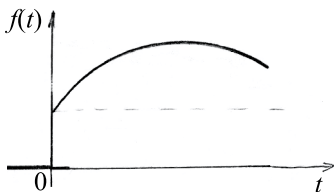


Рис. 6

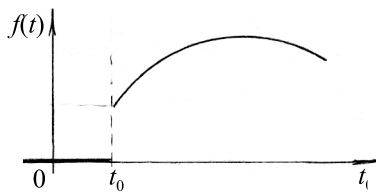


Рис. 7

Інтеграл від 0 до t_0 дорівнює 0, тому що $f(t-t_0)=0$ при $t < t_0$.
Тому

$$\begin{aligned} f(t-t_0) &\rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \left| \begin{array}{l} t-t_0 = \tau \\ dt = d\tau \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+t_0)} f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-pt_0} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \\ &= e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = e^{-pt_0} F(p), t_0 > 0. \end{aligned}$$

Множення зображення на e^{-pt_0} зсуває графік оригіналу $f(t)$ вправо на t_0 . Ця геометрична властивість зміщення відома в фізиці як запізнення явища на час t_0 .

Застосовуючи теореми подібності та запізнення, можна знайти зображення оригіналу $f(at-t_0)$, де $a > 0$, $t_0 > 0$.

Нехай $f(t) \rightarrow F(p)$, тоді $f(at) \rightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Знайдемо зображення:

$$f(at-t_0) = f\left[a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right] \rightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) e^{-\frac{t_0}{a}p}, \quad a > 0, \quad t_0 > 0.$$

Маємо $f(at - t_0) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) e^{-\frac{t_0}{a} p}$, $a > 0$, $t_0 > 0$.

Приклади. Знайти зображення функцій:

$$1. \sin(wt - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{w} t} \cdot \frac{w}{p^2 + w^2};$$

$$2. \sin(wt - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{w} t} \cdot \frac{w}{p^2 + w^2};$$

$$3. \operatorname{sh}(wt - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{w} t} \cdot \frac{p}{p^2 - w^2};$$

$$4. \operatorname{ch}(wt - \varphi_0) \rightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{w} t} \cdot \frac{p}{p^2 - w^2}.$$

Теорема запізнення є зручним методом знаходження зображення кусково-неперервної функції.

Приклад. Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ n, & n \leq t \leq n+1; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

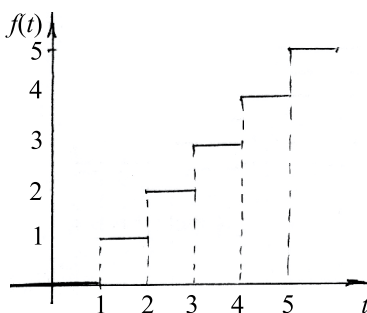


Рис. 8

Східчасту функцію $f(t)$ (рис. 8) можна записати у вигляді $f(t) = \eta(t - 1) - \eta(t - 2) + 2\eta(t - 2) - 2\eta(t - 3) + \dots + (n - 1)\eta[t - (n - 1)] - (n - 1)\eta(t - n) + n\eta(t - n) + \dots$ або $f(t) = \eta(t - 1) + \eta(t - 2) + \eta(t - 3) + \dots + \eta(t - n) + \dots$

Зображення $F(p)$ для функції $f(t)$ має вигляд

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-3p}}{p} + \dots + \frac{e^{-np}}{p} + \dots = \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{-p}}{1 - e^{-p}}.$$

$$\text{Отже, } f(t) \rightarrow \frac{1}{p} \frac{e^{-p}}{1 - e^{-p}}.$$

1.6. Теорема випередження

Теорема. Якщо $f(t) > F(p)$ і t_0 – додатне число, то

$$f(t+t_0) \rightarrow e^{t_0 p} \left(F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right).$$

Доведення. Графік функції $f(t+t_0)$ (рис. 10) отримано зміщенням графіка функції $f(t)$ (рис. 9) ліворуч на відрізок t_0 .

Зміщена частина графіку $f(t)$, яка відповідає інтервалу $-t_0 < t < 0$, перетворюється у відрізок осі t , а зрізана частина графіка функції $f(t)$ при $t > 0$ є графіком функції $f(t+t_0)$ (див. рис. 10).

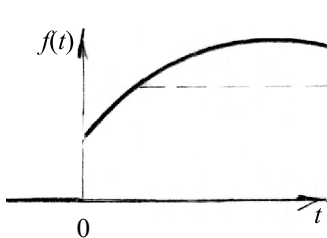


Рис. 9

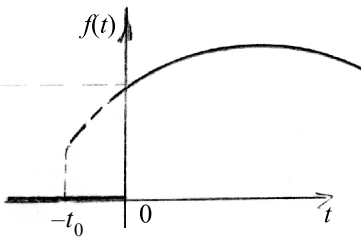


Рис. 10

Тоді зображення має вигляд

$$\begin{aligned} f(t+t_0) &\rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t+t_0) dt = \left| \begin{matrix} t+t_0 = u \\ dt = du \end{matrix} \right| = \int_{t_0}^{\infty} e^{-p(u-t_0)} f(u) du = \\ &= e^{pt_0} \left(\int_{t_0}^0 e^{-pu} f(u) du + \int_0^{t_0} e^{-pu} f(u) du + F(p) \right). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$f(t+t_0) \rightarrow e^{pt_0} \left[F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right].$$

1.7. Теорема зміщення (затухання)

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, p_0 – комплексне число, то

$$e^{p_0 t} f(t) \rightarrow F(p + p_0).$$

Доведення. Знайдемо зображення функції:

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-p_0 t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+p_0)t} f(t) dt = F(p + p_0).$$

Таким чином,

$$e^{-p_0 t} f(t) \rightarrow F(p + p_0) \quad (\operatorname{Re} p > s_0 - \operatorname{Re} p_0).$$

Теорема зміщення застосовується при вивченні фізичних явищ, пов'язаних із затухаючими коливаннями.

Приклади. Користуючись теоремою зміщення, знайдемо зображення таких функцій:

$$1. \quad e^{-at} \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2};$$

$$2. \quad e^{-at} \cos \omega t \rightarrow \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2};$$

$$3. \quad e^{-at} \operatorname{sh} \omega t \rightarrow \frac{\omega}{(p+a)^2 - \omega^2};$$

$$4. \quad e^{-at} \operatorname{ch} \omega t \rightarrow \frac{p+a}{(p+a)^2 - \omega^2}.$$

1.8. Диференціювання оригіналу

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і функція $f'(t)$ є оригіналом, то $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$, де $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

Доведення. $f'(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt$.

Інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{-pt} & du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t) dt & v = f(t) \end{array} \right| = \\ &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \end{aligned}$$

за означенням оригіналу $|f(t)e^{-pt}| < Me^{s_0 t} e^{-st} = Me^{(s_0-s)t}$, де $s = \operatorname{Re} p$, $s > s_0$, тому $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} = 0$ і $f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = -f(0)$. Таким чином,

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0).$$

Якщо похідні вищих порядків функцій $f(t)$ є оригіналами, то із виразу $f(t) \rightarrow F(p)$ випливає

$$\begin{aligned} f''(t) &\rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0); \\ f'''(t) &\rightarrow p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0). \end{aligned}$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Приклад. Знайти зображення диференціального виразу $4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8$ за таких початкових умов: $x'(0) = 2$; $x(0) = 5$.

Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала маємо:

$$\begin{aligned} x'(t) &\rightarrow pX(p) - 5; \\ x''(t) &\rightarrow p^2 X(p) - 5p - 2. \end{aligned}$$

Звідки за властивістю лінійності отримаємо

$$\begin{aligned} & 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8 \rightarrow \\ & \rightarrow 4p^2 X(p) - 20p - 8 + 2pX(p) - 10 - X(p) + \frac{8}{p} = \\ & = (4p^2 + 2p - 1)X(p) - 18 + \frac{8}{p} - 20p. \end{aligned}$$

Отже,

$$4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8 \rightarrow (4p^2 + 2p - 1) \cdot X(p) - 18 + \frac{8}{p} - 20p.$$

1.9. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та їх систем

Дано диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t).$$

Знайти розв'язок цього рівняння, який задовольняє такі початкові умови: $x(0) = c_1$; $x'(0) = c_2$.

Припустимо, що невідома функція $x(t)$, її похідні $x'(t)$ і $x''(t)$ та функція $f(t)$ є оригіналами. Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$; $f(t) \rightarrow F(p)$. Тоді за властивістю диференціювання оригінала маємо

$$\begin{aligned} x'(t) & \rightarrow pX(p) - c_1; \\ x''(t) & \rightarrow p^2 X(p) - c_1 p - c_2. \end{aligned}$$

За властивістю лінійності

$$\begin{aligned} & x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) \rightarrow \\ & \rightarrow p^2 X(p) - c_1 p - c_2 + a_1 p X(p) - c_1 a_1 + a_2 X(p). \end{aligned}$$

Оскільки $f(t) \rightarrow F(p)$, то в просторі зображень маємо рівняння

$$(p^2 + a_1 p + a_2) \cdot X(p) - c_1 p - c_2 - c_1 a_1 = F(p).$$

Це рівняння називається операторним рівнянням диференціального рівняння із заданими початковими умовами. Операторне рівняння є алгебраїчним рівнянням відносно функції $X(p)$. Знаходимо цю функцію:

$$X(p) = \frac{F(p) + c_1 p + c_2 + a_1 c_1}{p^2 + ap + a_2}.$$

$X(p)$ є розв'язком диференціального рівняння в просторі зображень. За зображенням $X(p)$ знаходимо функцію $x(t)$ або в таблиці перетворень Лапласа, або за теоремами операційного числення.

Приклад. Операторним методом знайти розв'язок диференціального рівняння $x''(t) + 9x(t) = 1$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.

Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$, тоді $x'(t) \rightarrow pX(p)$; $x''(t) \rightarrow p^2X(p)$; $1 \rightarrow \frac{1}{p}$.

В просторі зображень отримуємо рівняння

$$p^2 X(p) + 9X(p) = \frac{1}{p}.$$

Звідки $X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 9)}$ або $X(p) = \frac{1}{9} \frac{1}{p} - \frac{1}{9} \frac{p}{p^2 + 9}$; $\frac{1}{9} \frac{1}{p} \rightarrow \frac{1}{9}$; $-\frac{1}{9} \frac{p}{p^2 + 9} \rightarrow -\frac{1}{9} \cos 3t$.

Отже, розв'язком диференціального рівняння, який задовольняє дані початкові умови, є функція $x(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \cos 3t$.

1.10. Інтегрування оригіналу

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то функція $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

є також оригіналом і $\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}$.

Доведення. Функція $\varphi(t)$ задовольняє умови 1 і 2 функції-оригіналу. Перевіримо, чи виконується умова 3:

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \int_0^t M e^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s_0} e^{s_0 \tau} \Big|_0^t = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) < M_1 e^{s_0 t},$$

де $M_1 = \frac{M}{s_0}$.

Отже, $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ є оригіналом з показником росту s_0 .

Нехай $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, тоді за теоремою диференціювання оригіналу маємо

$$\varphi'(t) \rightarrow p\Phi(p), \varphi(0) = 0.$$

Оскільки, $\varphi'(t) = f(t)$, то $F(p) = p\Phi(p)$. Звідки $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Таким чином, $\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}$.

Приклади

1. Знайти зображення степеневі функції з цілим показником

$$1 \rightarrow \frac{1}{p}. \text{ Тоді } \int_0^t 1 d\tau \rightarrow \frac{1}{p}; \quad t \rightarrow \frac{1}{p^2}; \quad \int_0^t \tau d\tau \rightarrow \frac{1}{p^3}; \quad \frac{t^2}{2} \rightarrow \frac{1}{p^3}; \quad t^2 \rightarrow \frac{2!}{p^3}.$$

Інтегруючи функцію t^2 , отримаємо $\int_0^t \tau^2 d\tau \rightarrow \frac{2}{p^4}; \quad \frac{t^3}{3} \rightarrow \frac{2}{p^4};$

$$t^3 \rightarrow \frac{3!}{p^4}.$$

Інтегрування оригіналу зведено в просторі зображень до ділення на p .

Таким чином, отримуємо:

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

2. Знайти оригінал функції $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$.

Розглянемо функцію $\frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t$, тоді

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} \rightarrow \int_0^t \sin \tau d\tau = -\cos \tau \Big|_0^t = -\cos t + 1.$$

Отже, $\frac{1}{p(p^2 + 1)} \rightarrow 1 - \cos t$.

1.11. Диференціювання зображення

Теорема. Якщо $F(p) \rightarrow f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$F'(p) \rightarrow -tf(t);$$

$$F''(p) \rightarrow (-1)^2 t^2 f(t);$$

.....

$$F^{(n)}(p) \rightarrow (-1)^n t^n f(t) \quad (\operatorname{Re} p > s_1 > s_0).$$

Цю теорему можна формулювати так: операції диференціювання у просторі зображень відповідає операція множення оригіналу на аргумент з від'ємним знаком у просторі оригіналів.

Приклади. Користуючись теоремою про диференціювання зображень, знайти зображення функцій te^{at} , $t \cos t$ і $t \sin at$.

1. Оскільки $e^{at} \rightarrow \frac{1}{p-a}$, то $(-t)e^{at} \rightarrow \left(\frac{1}{p-a}\right)'$, звідки випливає

$$te^{at} \rightarrow \frac{1}{(p-a)^2}.$$

$$2. \cos at \rightarrow \frac{p}{p^2 + a^2}; \quad -t \cos at \rightarrow \left(\frac{p}{p^2 + a^2}\right)' = \frac{a^2 - p^2}{(p^2 + a^2)^2};$$

$$t \cos at \rightarrow \frac{a^2 - p^2}{(p^2 + a^2)^2}.$$

$$3. \sin at \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2}; \quad -t \sin at \rightarrow \left(\frac{a}{p^2 + a^2}\right)' = -\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2};$$

$$t \sin at \rightarrow \frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}.$$

1.12. Інтегрування зображення

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ і інтеграл $\int_p^\infty F(p) dp$ збіга-

ється в півплощині $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, то $\int_p^\infty F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}$, $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$.

Це означає, що операції інтегрування у просторі оригіналів відповідає операція ділення на аргумент у просторі зображень.

Приклад. Знайти зображення інтегрального синуса

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau.$$

Оскільки $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$, то за теоремою інтегрування зображення маємо

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p \frac{1}{p}.$$

Далі за теоремою інтегрування оригінала отримаємо

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{1}{p}.$$

1.13. Згортка оригіналів

Згортою неперервних функцій $\varphi(t)$ і $f(t)$ (позначається $\varphi(t) * f(t)$)

називається інтеграл $\varphi * f = \int_0^t \varphi(\tau) f(t - \tau) d\tau$.

Згортка, це така дія, що парі функцій із деякої множини ставить у відповідність визначену функцію із цієї множини.

Приклад. Знайти згортку функцій $\varphi(t) = e^t$ і $f(t) = t$.

Маємо

$$e^t * t = \int_0^t e^\tau (t - \tau) d\tau = t \int_0^t e^\tau d\tau - \int_0^t \tau e^\tau d\tau = (te^\tau - e^\tau \cdot \tau + e^\tau)_0^t = e^t - t - 1.$$

Отже, $e^t * t = e^t - t - 1$.

Згортка функцій підпорядковується переставному закону: $\varphi * t = t * \varphi$, тобто

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau = \int_0^t \varphi(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Теорема. Якщо $\varphi(t)$ і $f(t)$ – оригінали, то згортка функцій $f * \varphi$ теж є функцією-оригіналом.

Доведення. Функція $f * \varphi$ задовольняє умови 1 і 2 означення оригіналу. Доведемо, що функція $f * \varphi$ задовольняє і умову 3 функції-оригіналу.

Оскільки $|f(t)| < M_1 e^{s_1 t}$ і $|\varphi(t)| < M_2 e^{s_2 t}$, позначимо $M_0 = \max(M_1; M_2)$, $s_0 = \max(s_1; s_2)$, маємо $|f(t)| < M_0 e^{s_0 t}$; $|\varphi(t)| < M_0 e^{s_0 t}$ і $|f * \varphi| = \left| \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \right| < \int_0^t |f(\tau)| \cdot |\varphi(t-\tau)| d\tau < M_0^2 \int_0^t e^{s_0 \tau} \times e^{s_0(t-\tau)} d\tau = M_0^2 t e^{s_0 t} < M_0^2 e^{(s_0+1)t}$ тобто згортка зростає не швидше за експоненту.

Отже, згортка оригіналів теж є оригіналом.

1.14. Теорема множення

Теорема. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, то $f * \varphi \rightarrow F(p) * \Phi(p)$.

Доведення. Знайдемо зображення функції:

$$f * \varphi = \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \rightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \right) dt.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \right) dt$$

як подвійний інтеграл по області, зображений на рис. 11.

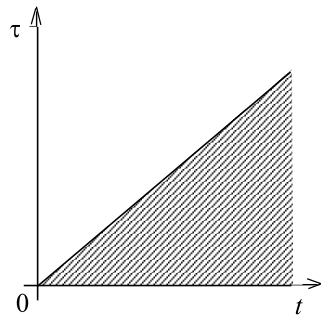


Рис. 11

Подвійний інтеграл

$$\iint_D e^{-pt} f(\tau) \varphi(t-\tau) dt d\tau$$

збігається абсолютно, тому можна змінити порядок інтегрування:

$$f * \varphi = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} \varphi(t-\tau) dt.$$

Замінемо $t - \tau = u$, отримуємо

$$f * \varphi \rightarrow \int_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-pu} \varphi(u) du = F(p) \Phi(p).$$

Отже, $f * \varphi \rightarrow F(p) \Phi(p)$.

Приклад. Знайти оригінал, якщо зображення $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$.

Відомо, що $\frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t$; $\frac{p}{p^2 - 1} \rightarrow \operatorname{cht}$, тому

$$\frac{p}{p^4 - 1} = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 1)} \rightarrow \int_0^t \sin \tau \operatorname{ch}(t - \tau) d\tau = \int_0^t \operatorname{ch} \tau \sin(t - \tau) d\tau.$$

1.15. Інтеграл Дюамеля

Теорема. Якщо $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0)$, $f(t) \rightarrow F(p)$, $\varphi(t) \rightarrow \Phi(p)$, то

$$p\Phi(p)F(p) \rightarrow f(0)\varphi(t) + \int_0^t f'(\tau)\varphi(t-\tau) d\tau.$$

Доведення. Запишемо вираз $pF(p)\Phi(p)$ у вигляді

$$pF(p)\Phi(p) = f(0)\Phi(p) + (pF(p) - f(0))\Phi(p) \rightarrow f(0)\varphi(t).$$

Із властивості диференціювання оригінала отримуємо

$$pF(p) - f(0) \rightarrow f'(t).$$

Із теореми множення зображень випливає, що

$$(pF(p) - f(0))\Phi(p) \rightarrow f'(t) * \varphi(t),$$

тобто

$$(pF(p) - f(0))\Phi(p) \rightarrow \int_0^t f'(t) \varphi(t - \tau) d\tau \quad \text{або}$$

$$pF(p)\Phi(p) \rightarrow f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(t) f'(t - \tau) d\tau.$$

Цю формулу можна записати так:

$$p\Phi(p)F(p) \rightarrow f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(t) f'(t - \tau) d\tau.$$

Приклад. Знайти оригінал, якщо зображенням є функція

$$\frac{1}{p^3(p^2 + 1)}. \quad \text{Маємо } \frac{1}{p^3(p^2 + 1)} = p \frac{1}{p^4} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

$$\text{Припустимо } F(p) = \frac{1}{p^4} \rightarrow \frac{t^3}{6} = f(t); \quad \Phi(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t = \varphi(t).$$

$$\text{Тоді за формулою Дюамеля маємо } \frac{1}{p^3(p^2 + 1)} \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 \sin \tau d\tau.$$

Інтегруючи двічі частинами, знаходимо оригінал зображення:

$$\frac{1}{p^3(p^2 + 1)} \rightarrow \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

1.16. Граничні теореми

Теорема 1. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, $f(t)$ є функція-оригінал й існує $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

Доведення. Із рівності $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ випливає $|F(p)| < \frac{M}{s - s_0}$, оскільки $|f(t)| < M e^{s_0 t}$. Тому $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow 0} F(p) = 0$, якщо p прямує до нескінченності таким чином, що його дійсна частина $\operatorname{Re} p - s$ прямує до нескінченності. Якщо точка $p = \infty$ не є особливою частиною функції $F(p)$, то прямування $p \rightarrow \infty$ не залежить від шляху, тобто $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$. Оскільки функція $f(t)$ є оригінал, то $f(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$, де $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$. Таким чином, $\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p) - f(0)] = 0$, або $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

Тобто початкове значення оригіналу $f(0)$ можна знайти за його зображенням $F(p)$ за допомогою граничного співвідношення:

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Теорема 2. Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, $f'(t)$ є функція-оригінал й існує $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, то $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

Доведення. Оскільки функція $f'(t)$ – оригінал, то $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$ або $\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt \rightarrow pF(p) - f(0)$. В останній рівності перейдемо до границі, якщо $p \rightarrow 0$, тобто

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \int_0^{\infty} \lim_{p \rightarrow 0} e^{-pt} f'(t) dt = \int_0^{\infty} f'(t) dt =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0)$$

або

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0).$$

$$\text{Таким чином, } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0)$$

або

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

Отже, для неперіодичних процесів встановлене значення оригіналу $f(\infty)$ можна знайти за його зображенням за допомогою граничного співвідношення $f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$.

1.17. Обчислення деяких невластних інтегралів

Нехай функція $f(t)$ є оригіналом $f(t) \rightarrow F(p)$. Тоді

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p} \quad \text{і} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(t) dt.$$

Згідно з другою граничною теоремою

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{F(p)}{p} \right],$$

тобто

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} F(p).$$

Приклад 1. Відомо, що $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$, тоді

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2 + 1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^{\infty} = \operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} p = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} \sin t}{t} dt.$

Знайдемо зображення підінтегральної функції

$$e^{-at} \sin t \rightarrow \frac{1}{(p+a)^2 + 1}.$$

Користуючись властивістю інтегрування зображення, маємо

$$\frac{e^{-at} \sin t}{t} \rightarrow \int_p^{\infty} \frac{dp}{(p+a)^2 + 1}; \quad \frac{e^{-at} \sin t}{t} \rightarrow \operatorname{arctg}(p+a) \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+a);$$

$$\int_0^t \frac{e^{-a\tau} \sin \tau}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+a)}{p}.$$

Користуючись другою граничною теоремою, маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{-a\tau} \sin \tau}{\tau} d\tau = \lim_{p \rightarrow 0} p; \quad \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+a)}{p} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}.$$

Отже, $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} \sin t}{t} dt = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}.$

2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

2.1. Основні поняття операційного числення. Властивості операційного числення. Основні теореми

2.1.1. Теоретичні питання

1. Яка функція називається оригіналом?
2. Яка функція називається зображенням?
3. Як визначається одинична функція Хевісайда?
4. Які властивості має перетворення Лапласа?
5. Сформулювати теорему існування зображення.
6. Сформулювати необхідну умову існування зображення.
7. Сформулювати теорему єдиності зображення.
8. В чому полягає теорема подібності?
9. В чому полягає теорема зміщення (в аргументі зображення)?
10. Що таке згортка функцій, згортка оригіналів?
11. В чому полягає теорема множення?

12. Відомо, що $f(t) \rightarrow F(P)$. Чому дорівнює оригінал $\int_P^{\infty} F(P) dP$?

13. Відомо, що $f(t) \rightarrow F(P)$. Чому дорівнює оригінал $F(P)$?

14. В якій області $\int_0^{\infty} e^{-Pt} f(t) dt$ збіжний?

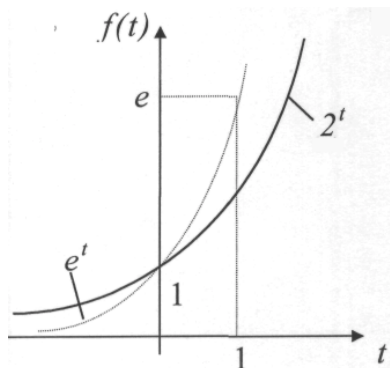
15. Чи можна диференціальне рівняння замінити алгебраїчним?

2.1.2. Розв'язування типових задач

Перевірити, які з наведених функцій є оригіналами.

1. $f(t) = 2^t$.

Функція $f(t)$ є оригіналом



за наступних умов:

$f(t)$ визначена і кусково-неперервна;

$f(t) = 0$, якщо $t < 0$;

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}.$$

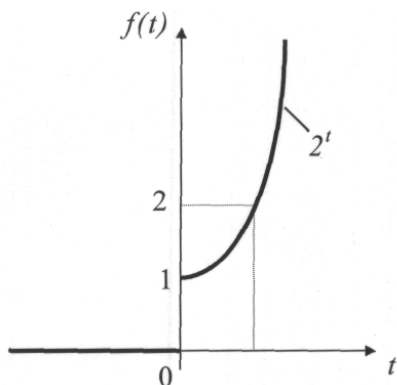
Для функції $f(t) = 2^t$:

$f(t) = 2^t$ неперервна на всій числовій осі;

$2^t \neq 0$ при $t < 0$;

$$2^t < e^t.$$

Помножимо функцію $f(t) = 2^t$ на одиничну функцію Хевісайда $\eta(t)$:



$$f(t)\eta(t) = 2^t \eta(t) = \begin{cases} 2^t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Нова функція $2^t \eta(t)$ є оригіналом.

$s_0 = 1$, M – довільне число, більше або рівне одиниці.

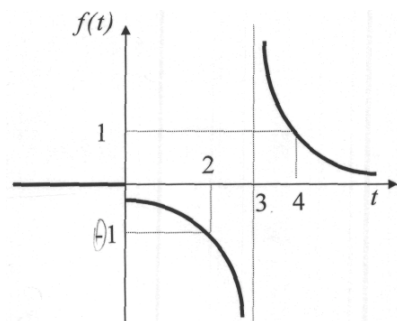
$$2. \quad f(t) = \frac{1}{t-3} \eta(t).$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-3}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$f(t)$ має точку нескінченного розриву $t = 3$. При $t \rightarrow 3$ функція необмежена, тому ця функція не є оригіналом.

$$3. \quad f(t) = e^{2t} \sin 3t \eta(t).$$

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin 3t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



Функція визначена на всій числовій осі.

$f(t) = 0$ для $t < 0$ за умовою; для довільних $t \left| e^{2t} \sin 3t \right| \leq e^{2t}; s_0 = 2; M \geq 1$.

Функція $e^{2t} \sin 3t \eta(t)$ є оригіналом.

Користуючись означенням, знайти зображення даних функцій.

4. $f(t) = 4t^2 - 2t + 3$.

Цю функцію і всі подальші будемо вважати помноженими на $\eta(t)$.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} f(t) dt;$$

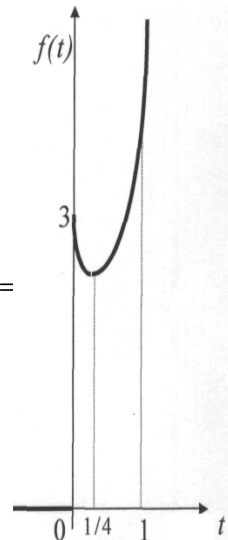
$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} (4t^2 - 2t + 3) dt \left| \begin{array}{l} u = 4t^2 - 2t + 3 \quad du = (8t - 2) dt \\ dv = e^{-Pt} \quad v = -\frac{1}{p} e^{-Pt} \end{array} \right| =$$

$$= \left(-\frac{1}{p} e^{-Pt} (4t^2 - 2t + 3) \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-Pt} (8t - 2) dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 8t - 2 \quad du = 8 dt \\ dv = e^{-Pt} dt \quad v = -\frac{1}{p} e^{-Pt} \end{array} \right| =$$

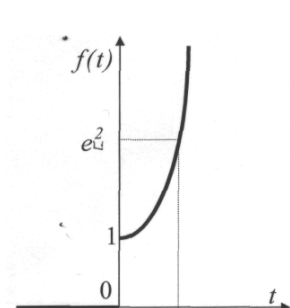
$$= -\frac{4t^2 - 2t + 3}{pe^{Pt}} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{p} e^{-Pt} (8t - 2) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} 8e^{-Pt} dt \right) =$$

$$= -\frac{4t^2 - 2t + 3}{pe^{Pt}} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{p^2} \cdot \frac{8t - 2}{e^{Pt}} \Big|_0^{\infty} - \frac{8}{p^3} e^{-Pt} \Big|_0^{\infty} =$$



$$= -0 + \frac{3}{p} - 0 - \frac{2}{p^2} - 0 + \frac{8}{p^3} = \frac{3p^2 - 2p + 8}{p^3};$$

$$4t^2 - 2t + 3 \rightarrow \frac{8}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p}; \quad 4t^2 - 2t + 3 = 4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\frac{3}{4}.$$

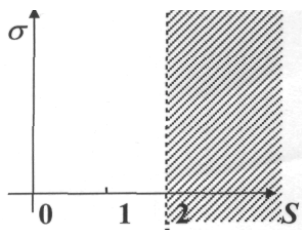


$$5. f(t) = e^{2t}.$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} e^{2t} dt = \int_0^{\infty} e^{(2-P)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(P-2)t} dt =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(P-2)t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p-2} e^{-(P-2)t} \right) \Big|_0^a =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p-2} e^{-(P-2)a} + \frac{1}{p-2} \right) =$$

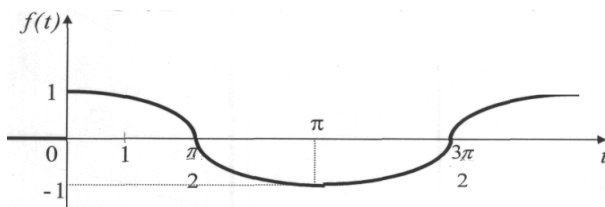


$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{(p-2)e^{(P-2)a}} + \frac{1}{p-2} \right) = \frac{1}{p-2}.$$

Якщо $\operatorname{Re}(p-2) > 0$, тобто $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} 2$,

$$\text{тоді } e^{2t} \rightarrow \frac{1}{p-2}.$$

$$6. f(t) = \cos t.$$



$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} \cos t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-Pt} \cos t dt.$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} \int e^{-Pt} \cos t dt &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & du = -\sin t dt \\ dv = e^{-Pt} dt & v = -\frac{1}{p} e^{-Pt} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{p} e^{-Pt} \cos t - \frac{1}{p} \int e^{-Pt} \sin t dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sin t & du = \cos t dt \\ dv = e^{-Pt} & v = -\frac{1}{p} e^{-Pt} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{p} e^{-Pt} \cos t - \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{p} e^{-Pt} \sin t + \frac{1}{p} \int e^{-Pt} \cos t dt \right) = \\ &= -\frac{1}{p} e^{-Pt} \cos t + \frac{1}{p^2} e^{-Pt} \sin t - \frac{1}{p^2} \int e^{-Pt} \cos t dt. \\ \int e^{-Pt} \cos t dt + \frac{1}{p^2} \int e^{-Pt} \cos t dt &= -\frac{1}{p} e^{-Pt} \cos t + \frac{1}{p^2} e^{-Pt} \sin t. \\ \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) \int e^{-Pt} \cos t dt &= e^{-Pt} \left(-\frac{1}{p} \cos t + \frac{1}{p^2} \sin t \right). \\ \int e^{-Pt} \cos t dt &= \frac{p^2}{1+p^2} e^{-Pt} \cdot \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} \sin t - \cos t \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(p) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int e^{-Pt} \cos t dt = \frac{p}{1+p^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-Pt} \cdot \left(\frac{1}{p} \sin t - \cos t \right) \right) \Big|_0^b = \\
&= \frac{p}{1+p^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-Pb} \left(\frac{1}{p} \sin b - \cos b \right) - e^0 \left(\frac{1}{p} \sin 0 - \cos 0 \right) \right) = \\
&= \frac{p}{1+p^2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} \frac{\sin b}{e^{Pb}} - \frac{\cos b}{e^{Pb}} + 1 \right) = \frac{p}{1+p^2} \cdot 1 = \frac{p}{1+p^2}.
\end{aligned}$$

Пояснення: $|\sin b| \leq 1$, $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \cdot \frac{\sin b}{e^{Pb}} = 0$;

$$|\cos b| \leq 1, \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \cdot \frac{\cos b}{e^{Pb}} = 0.$$

Отже, $\cos t \rightarrow \frac{p}{1+p^2}$.

Користуючись властивостями перетворення Лапласа та основними теоремами, знайти зображення даних функцій.

7. $f(t) = 3 \sin 2t - 2 \cos 5t$.

$$\sin 2t \rightarrow \frac{2}{p^2 + 2^2} = \frac{2}{p^2 + 4}; \quad \cos 5t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 25};$$

$$F(p) = 3 \frac{2}{p^2 + 4} - 2 \frac{2p}{p^2 + 25} = \frac{6}{p^2 + 4} - \frac{2p}{p^2 + 25}.$$

8. $f(t) = \cos^2 t$.

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t; \quad \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p};$$

$$\cos 2t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 2^2} = \frac{p}{p^2 + 4}.$$

$$F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} = \frac{p^2 + 4 + p^2}{2p(p^2 + 4)} = \frac{2(2 + p^2)}{2p(p^2 + 4)}; \quad F(p) = \frac{2 + p^2}{p(p^2 + 4)}.$$

$$9. f(t) = \sin 5t \cdot \cos 3t.$$

$$\sin 5t \cdot \cos 3t = \frac{1}{2}(\sin 8t + \sin 2t) = \frac{1}{2}\sin 8t + \frac{1}{2}\sin 2t;$$

$$\sin 8t \rightarrow \frac{8}{p^2 + 64}; \quad \sin 2t \rightarrow \frac{2}{p^2 + 4}.$$

$$F(p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{p^2 + 64} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 4} = \frac{4}{p^2 + 64} + \frac{1}{p^2 + 4} = \frac{4p^2 + 16 + p^2 + 64}{(p^2 + 64)(p^2 + 4)};$$

$$F(p) = \frac{5p^2 + 80}{(p^2 + 64)(p^2 + 4)}.$$

$$10. f(t) = t^2 e^t + \sin 3t + 4 \operatorname{ch} 2t - 5.$$

$$t^2 \rightarrow \frac{2!}{p^{2+1}} = \frac{2}{p^3}; \quad \sin 3t \rightarrow \frac{3}{p^2 + 9}; \quad \operatorname{ch} 2t \rightarrow \frac{p}{p^2 - 4}; \quad t^2 e^t \rightarrow \frac{2}{(p-1)^3}.$$

$$F(p) = \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{3}{p^2 + 9} + \frac{4p}{p^2 - 4} - \frac{5}{p}.$$

Знайти оригінал і побудувати його графік.

$$11. F(p) = 2e^{-p} \frac{1}{p^3} = e^{-p} \frac{2}{p^3}.$$

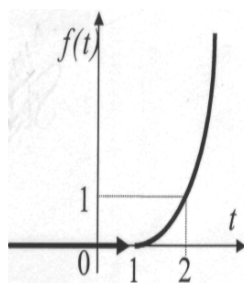
На основі теореми запізнення $f(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} F(p)$;

$$\tau = 1; \quad \frac{2}{p^3} \rightarrow t^2.$$

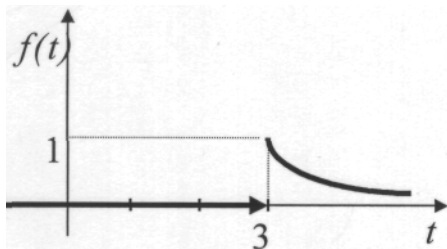
$$e^{-p} \frac{2}{p^3} \rightarrow (t-1)^2; \quad f(t) = (t-1)^2.$$

$$f(t)\eta(t) = (t-1)^2 \eta(t-1).$$

$$12. F(p) = \frac{e^{-3p}}{p+2}.$$



За теоремою записання $F(p) = e^{-3P} \frac{1}{p+2}$; $\tau = +3$;



$$\frac{1}{p+2} \rightarrow e^{-2t};$$

$$e^{-3P} \frac{1}{p+2} \rightarrow e^{-2(t-3)};$$

$$f(t) = e^{-2(t-3)} \eta(t-3).$$

2.2. Диференціювання оригіналу та зображення (розв'язання типових задач)

Користуючись правилом диференціювання оригіналу, знайти зображення даних виразів.

1. $3x'''(t) - 2x''(t) + 5$ за умов $x(0) = -1$; $x'(0) = 2$; $x''(0) = -3$.

Якщо $x(t)$ є функція-оригінал і має зображення $X(p)$, то

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0);$$

$$x''(t) \rightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0);$$

$$x'''(t) \rightarrow p^3 X(p) - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0).$$

На основі властивості лінійності маємо

$$3(p^3 X(p) - p^2(-1) - p \cdot 2 - (-3)) - 2(p^2 X(p) - p(-1) - 2) + 5 \frac{1}{p} =$$

$$= 3p^3 X(p) + 3p^2 - 6p + 9 - 2p^2 X(p) - 2p + 4 + \frac{5}{p} =$$

$$= X(p)(3p^3 - 2p^2) + 3p^2 - 4p + 13 + \frac{5}{p};$$

$$3x'''(t) - 2x''(t) + 5 \rightarrow (3p^3 - 2p^2)X(p) + 3p^2 - 4p + 13 + \frac{5}{p}.$$

2. $f(t) = \cos^2 t$; $f(0) = 1$; $f(t) \rightarrow F(p)$.

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= pF(p) - f(0); \\
 f'(t) &= 2 \cos t (-\sin t) = -\sin 2t; \quad -\sin 2t \rightarrow -\frac{2}{p^2 + 4}. \\
 &-\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p) - 1. \\
 1 - \frac{2}{p^2 + 4} &= pF(p); \quad \frac{p^2 + 2}{p^2 + 4} = pF(p); \\
 F(p) &= \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}; \quad \cos^2 t = \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}.
 \end{aligned}$$

Користуючись властивостями перетворення Лапласа, таблицею оригіналів та зображень, знайти оригінали за даним зображенням.

$$3. F(p) = \frac{p^2 + 3}{(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Розв'язання. $F(p)$ являє собою правильний раціональний дріб, його можна представити у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{p^2 + 3}{(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}.$$

Корені знаменника $p_1 = -1$; $p_2 = -2$; $p_3 = -3$ дійсні різні, тому елементарні дроби будуть першого типу.

За методом невизначених коефіцієнтів маємо

$$p^2 + 3 = A(p+2)(p+3) + B(p+1)(p+3) + C(p+1)(p+2).$$

$$\begin{array}{l|l}
 p = -1 & 4 = 2A \rightarrow A = 2; \\
 p = -2 & 7 = -B \rightarrow B = -7; \\
 p = -3 & 12 = 2C \rightarrow C = 6.
 \end{array}$$

$$\text{Тоді } F(p) = \frac{p^2 + 3}{(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{2}{p+1} + \frac{-7}{p+2} + \frac{6}{p+3}$$

або

$$F(p) = 2\frac{1}{p+1} - 7\frac{1}{p+2} + 6\frac{1}{p+3}.$$

Відповідь: $f(t) = 2e^{-t} - 7e^{-2t} + 6e^{-3t}$.

$$4. F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}.$$

Розв'язання

$$\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p+2}.$$

Корені дійсні: $p_1 = p_2 = 0$; $p_3 = 1$; $p_4 = -2$.

Корінь $p = 0$ другої кратності.

$$p+1 = Ap(p-1)(p+2) + B(p-1)(p+2) + Cp^2(p+2) + Dp^2(p-1).$$

$$p=0 \quad \left| \quad 1 = -2B \rightarrow B = -\frac{1}{2}; \right.$$

$$p=1 \quad \left| \quad 2 = 3C \rightarrow C = \frac{2}{3}; \right.$$

$$p=-3 \quad \left| \quad -1 = -12D \rightarrow D = \frac{1}{12}. \right.$$

Прирівняємо коефіцієнти при p^3 :

$$p^3 \quad \left| \quad 0 = A + C + D; \quad 0 = A + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \rightarrow A = -\frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{-8-1}{12} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}.\right.$$

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} = \frac{-\frac{3}{4}}{p} + \frac{-\frac{1}{2}}{p^2} + \frac{\frac{2}{3}}{p-1} + \frac{\frac{1}{12}}{p+2}$$

або

$$F(p) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p+2}.$$

$$\text{Відповідь: } f(t) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{12}e^{-2t}.$$

$$5. F(p) = \frac{2p^2 - 4p + 8}{(p-2)^2(p^2 + 4)}.$$

Розв'язання

$$\frac{2p^2 - 4p + 8}{(p-2)^2(p^2 + 4)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{(p-2)^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 4}.$$

$p_1 = p_2 = 2$ – корені кратні. p_3, p_4 – пара спряжених комплексних коренів.

За методом невизначених коефіцієнтів

$$2p^2 - 4p + 8 = A(p-2)(p^2 + 4) + B(p^2 + 4) + (Cp + D)(p-2)^2.$$

$$p = 2 \quad \left| \begin{array}{l} 8 = 8B \rightarrow B = 1. \end{array} \right.$$

Більше дійсних коренів немає, тому прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях p , починаючи зі старшого:

$$p^3 \quad 0 = A + C \rightarrow A = -C;$$

$$p^2 \quad 2 = -2A + B - 4C + D \rightarrow 2 = 2C + 1 - 4C + D;$$

$$p \quad -4 = 4A + 4C - 4D \rightarrow -4 = -4C + 4C - 4D.$$

Обчислимо коефіцієнти:

$$\begin{cases} B=1; & B=1; \\ A=-C; & D=1; \\ D-2C=1; & 1-2C=1 \rightarrow C=0; \\ -4D=-4; & A=0. \end{cases}$$

Тоді маємо

$$F(p) = \frac{2p^2 - 4p + 8}{(p-2)^2(p^2 + 4)} = \frac{0}{p-2} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{0p+1}{p^2 + 4}$$

або

$$F(p) = \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{p^2 + 4}.$$

$$\frac{1}{(p-2)^2} \rightarrow te^{2t}; \quad \frac{1}{p^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{p^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 2^2} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Відповідь: $f(t) = te^{2t} + \frac{1}{2} \sin 2t$.

6. $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$.

Розв'язання. В цьому випадку можна в знаменнику виділити повний квадрат і звести до однієї з формул таблиці зображень:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5} = \frac{1}{p^2 + 2p + 4 - 4 + 5} = \frac{1}{(p+2)^2 + 1}.$$

Відповідь: $\frac{1}{(p+2)^2 + 1} \rightarrow e^{-2t} \sin t$.

7. $F(p) = \frac{2-p}{p^2 - 2p + 5}$.

Розв'язання

$$F(p) = \frac{2-p}{p^2 - 2p + 5} = \frac{2-p}{p^2 - 2p + 1 - 1 + 5} = \frac{2-p}{(p-1)^2 + 4} = \frac{2-p}{(p-1)^2 + 2^2}.$$

Перепишемо $F(p)$ в такому вигляді:

$$F(p) = -\frac{(p-1)-1}{(p-1)^2 + 2^2} = -\frac{p-1}{(p-1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{(p-1)^2 + 2^2}.$$

Відповідь: $f(t) = -e^t \cos 2t + \frac{1}{2} e^t \sin 2t$.

2.3. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та їх систем

Знайти частинний розв'язок рівняння, який задовольняє задані початкові умови

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{-2t}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Нехай функція $y(t)$ є оригінал і має своїм зображенням функцію $Y(p)$: $y(t) \rightarrow Y(p)$.

Тоді

$$y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$y''(t) \rightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p).$$

$$e^{-2t} \rightarrow \frac{1}{p+2}.$$

Із простору оригіналів перейдемо у простір зображень:

$$p^2Y(p) = 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p+2}.$$

Розв'язування диференціального рівняння зведено до розв'язування лінійного рівняння відносно $Y(p)$:

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{1}{p+2};$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+2)(p^2 - 3p + 2)} = \frac{1}{(p+2)(p-2)(p-1)}.$$

На основі теореми єдиності зображення можна знайти єдиний оригінал $y(t)$, що відповідає даному зображенню:

$$\frac{1}{(p-1)(p+2)(p-2)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-1}.$$

Корені $p_1 = -2$; $p_2 = 2$; $p_3 = 1$ дійсно різні.

$$1 = A(p-2)(p-1) + B(p-1)(p+2) + C(p+2)(p-2).$$

$$p = -2 \quad \left| \begin{array}{l} 1 = 12A \rightarrow A = \frac{1}{12}; \end{array} \right.$$

$$p = 2 \quad \left| \begin{array}{l} 1 = 4B \rightarrow B = \frac{1}{4}; \end{array} \right.$$

$$p = 1 \quad \left| \begin{array}{l} 1 = -3C \rightarrow C = -\frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

$$Y(p) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p-1}.$$

Відповідь: $y(t) = \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{3}e^t.$

2. $x'' + 4x' + 5x = 0$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t)$ є оригінал і має своїм зображенням функцію $X(p)$.

$$x(t) \rightarrow X(p);$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$x''(t) \rightarrow p^2X(p) = px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1.$$

Перейдемо в поле зображень. Рівняння має вигляд

$$p^2X(p) - 1 + 4pX(p) + 5X(p) = 0;$$

$$X(p)(p^2 + 4p + 5) = 1;$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}.$$

За зображенням знайдемо оригінал $x(t)$:

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5} = \frac{1}{p^2 + 4p + 4 - 4 + 5} = \frac{1}{(p+2)^2 + 1}.$$

Відповідь: $x(t) = e^{-2t} \sin t.$

Знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, яка задовольняє задані початкові умови.

3.
$$\begin{cases} x' + y = 0; \\ y' - 2x - 2y = 0, \end{cases} \quad \text{якщо } x(0) = 1; y(0) = 1.$$

Розв'язання. Нехай функції $x(t)$ та $y(t)$ є оригінали і мають своїми зображеннями функції $X(p)$ та $Y(p)$:

$$x(t) \rightarrow X(p); \quad x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$y(t) \rightarrow Y(p); \quad y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Перейдемо до системи рівнянь в полі зображень:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = 0; \\ pY(p) - 1 - 2X(p) - 2Y(p) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} pX(p) + Y(p) = 1; \\ -2X(p) + Y(p)(p-2) = 1; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 1 \\ -2 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 2p + 2; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = p-2-1 = p-3;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} p & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = p+2.$$

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad X(p) = \frac{p-3}{p^2-2p+2} = \frac{(p-1)-2}{(p^2-2p+1)+1} = \\ &= \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - 2 \cdot \frac{1}{(p-1)^2+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad Y(p) = \frac{p+2}{p^2-2p+2} = \frac{(p-1)+3}{(p-1)^2+1} = \\ &= \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + 3 \cdot \frac{1}{(p-1)^2+1}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t; \quad y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t.$

Перевірка

$$x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t;$$

$$y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t.$$

$$x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t - 2e^t \sin t - 2e^t \cos t = -e^t \cos t - 3e^t \sin t;$$

$$y'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t + 3e^t \sin t + 3e^t \cos t = 4e^t \cos t + 2e^t \sin t.$$

$$\begin{aligned} x'(t) + y(t) &= e^t \cos t - e^t \sin t - 2e^t \sin t - 2e^t \cos t + e^t \cos t + 3e^t \sin t = \\ &= -e^t \cos t + e^t \cos t - 3e^t \sin t + 3e^t \sin t = 0; \end{aligned}$$

$$y'(t) - 2y = 4e^t \cos t + 2e^t \sin t - 2e^t \cos t + 4e^t \sin t - 2e^t \cos t - 6e^t \sin t = 0 + 0 = 0.$$

Відповідь:

$$x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t;$$

$$y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t.$$

Знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початкові умови.

$$4. \begin{cases} y' - 2y - 4z = \cos t; \\ z' + y + 2z = \sin t, \end{cases} \quad \text{якщо } y(0) = 0; z(0) = 0.$$

Розв'язання. Нехай $y(x)$ і $z(x)$ є оригінали:

$$y(t) \rightarrow Y(p);$$

$$y'(t) \rightarrow pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$z(t) \rightarrow Z(p);$$

$$z'(t) \rightarrow pZ(p) - z(0) = pZ(p).$$

$$\cos t \rightarrow \frac{p}{1+p^2}; \quad \sin t \rightarrow \frac{p}{1+p^2}.$$

$$\begin{cases} pY(p) - 2Y(p) - 4Z(p) = \frac{p}{1+p^2}; \\ pZ(p) + Y(p) + 2Z(p) = \frac{p}{1+p^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} Y(p)(p-2) - 4Z(p) = \frac{p}{1+p^2}; \\ Y(p) + Z(p)(p+2) = \frac{p}{1+p^2}. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -4 \\ 1 & p+2 \end{vmatrix} = p^2 - 4 + 4 = p^2;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} \frac{p}{1+p^2} & -4 \\ \frac{p}{1+p^2} & p+2 \end{vmatrix} = \frac{p(p+2)}{1+p^2} + \frac{4}{1+p^2} = \frac{p^2 + 2p + 4}{1+p^2};$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} p-2 & \frac{p}{1+p^2} \\ 1 & \frac{p}{1+p^2} \end{vmatrix} = \frac{p-2}{1+p^2} - \frac{p}{1+p^2} = \frac{p-2-p}{1+p^2} = \frac{-2}{1+p^2};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^2(1+p^2)}; \quad Z(p) = \frac{\Delta z}{\Delta} = -\frac{2}{p^2(1+p^2)}.$$

$$\frac{p^2 + 2p + 4}{p^2(1+p^2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C_p + D}{1+p^2};$$

$p_1 = p_2 = 0$; p_3, p_4 – пара комплексних спряжених коренів.

$$p^2 + 2p + 4 = Ap(1+p^2) + B(1+p^2) + (C_p + D)p^2.$$

$$p = 0 \quad 4 = 0 \rightarrow B = 4;$$

$$p_3 \quad \begin{vmatrix} 0 = A + C \rightarrow C = -A; C = -2; \end{vmatrix}$$

$$p_2 \quad \begin{vmatrix} 1 = B + D \rightarrow D = 1 - B; D = 1 - 4 = -3; D = -3; \end{vmatrix}$$

$$p \quad \begin{vmatrix} 2 = A \rightarrow A = 2. \end{vmatrix}$$

$$Y(p) = 2\frac{1}{p} + 4\frac{1}{p^2} + \frac{-2p-3}{1+p^2} = 2\frac{1}{p} + 4\frac{1}{p^2} - 2\frac{p}{1+p^2} - 3\frac{p}{1+p^2};$$

$$y(t) = 2 \cdot 1 + 4t - 2 \cos t - 3 \sin t.$$

$$Z(p) = -\frac{2}{(1+p^2)p^2} = -2\frac{1}{(1+p^2)p^2} = -2\frac{(1+p^2)-p^2}{(1+p^2)p^2} = -2\frac{1}{p^2} + 2\frac{1}{1+p^2};$$

$$z(t) = -2t + 2 \sin t.$$

Відповідь: $y(t) = 2 + 4t - 2 \cos t - 3 \sin t$; $z(t) = -2t + 2 \sin t$.

3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Перевірити, які з наведених функцій є оригіналами.

1. $f(t) = e^{(2+4i)t} \eta(t)$. 2. $f(t) = \operatorname{tg} t \eta(t)$.

Користуючись означенням, знайти зображення функцій.

3. $f(t) = \sin t$. 4. $f(t) = e^{-3t}$.

5. $f(t) = 2t + 3$. 6. $f(t) = \operatorname{sh} 2t$.

Користуючись властивостями перетворення Лапласа та теоремами, знайти зображення даних функцій.

7. $f(t) = \cos^3 t$. 8. $f(t) = \operatorname{sh} 3t$.

9. $f(t) = \operatorname{sh} 2t \sin 3t$. 10. $f(t) = e^t \cos t$.

11. $f(t) = \sin 2t \cos 3t$. 12. $f(t) = \cos 3t \cos 5t$.

Знайти оригінал і побудувати графік.

13. $F(p) = \frac{2e^{-2p}}{p^3}$. 14. $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$.

Користуючись властивостями перетворення Лапласа, таблицею оригіналів та зображень, знайти оригінали за даними зображеннями.

15. $F(p) = \frac{5p^2 + 6p - 16}{4p^2(p-2)}$. 16. $F(p) = \frac{5p^3 - 4p^2 + 12p - 8}{p(p-1)(p^2 + 1)}$.

17. $F(p) = e^{-p} \cdot \frac{5p-3}{4p^2-4}$. 18. $F(p) = e^{-5p} \cdot \frac{3p-3}{4p^2-4p-8}$.

19. $F(p) = \frac{p+3}{p^2+6p+11}$. 20. $F(p) = \frac{4p^2-6p+4}{p(p-1)^2}$.

Користуючись правилами диференціювання та інтегрування оригіналу знайти зображення функцій.

21. $f(t) = t^2 \cos t$. 22. $f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t)$.

23. $f(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}$. 24. $f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

25. $x'' - 2x' - 3x = e^{3t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

26. $x'' - 2x' + x = 4$; $x(0) = 4$; $x'(0) = 2$.

27. $y'' - 9y = 2 - x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

28. $y'' - y = \sin x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

29. $x'' + 2x' + x = t^2$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$.

30. $x'' - x' = te^t$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$.

Знайти частинні розв'язки систем диференціальних рівнянь.

31.
$$\begin{cases} x' = x - y; \\ y' = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1; y(0) = 0.$$

32.
$$\begin{cases} y' = 3z - y; \\ z' = y + z + e^t, \end{cases} \quad y(0) = 0; z(0) = 0.$$

33.
$$\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}; \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases} \quad x(0) = 1; y(0) = 3.$$

ЗМІСТ

1. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ	3
1.1. Основні поняття операційного числення	3
1.2. Зображення деяких функцій	5
1.2.1. Одинична функція	5
1.2.2. Показникова функція e^{at}	6
1.2.3. Функція $f(t) = t^2$	6
1.2.4. Гамма-функція	8
1.2.5. Степенева функція t^α , $\alpha > 1$	8
1.3. Властивості перетворення Лапласа	9
1.4. Теорема подібності (зображення функції зі змінним масштабом)	10
1.5. Теорема запізнення (зміщення в аргументі оригіналу)	11
1.6. Теорема випередження	14
1.7. Теорема зміщення (затухання)	15
1.8. Диференціювання оригіналу	15
1.9. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та їх систем	17
1.10. Інтегрування оригіналу	18
1.11. Диференціювання зображення	20
1.12. Інтегрування зображення	21
1.13. Згортка оригіналів	22
1.14. Теорема множення	23
1.15. Інтеграл Дюамеля	24
1.16. Граничні теореми	26
1.17. Обчислення деяких невластних інтегралів	27
2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ	29
2.1. Основні поняття операційного числення. Властивості операційного числення. Основні теореми	29
2.1.1. Теоретичні питання	29
2.1.2. Розв'язування типових задач	29
2.2. Диференціювання оригіналу та зображення (розв'язання типових задач)	36
2.3. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та їх систем	40
3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	46