

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Український державний морський технічний університет
імені адмірала Макарова

В.І. Павліщев

**ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ,
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ**

Рекомендовано Методичною радою УДМТУ
як методичні вказівки

Миколаїв 2004

УДК 517: 681.3

Павліщев В.І. Функції комплексних змінних, операційне числення: Методичні вказівки. – Миколаїв: УДМТУ, 2004. – 28 с.

Кафедра вищої математики

Методичні вказівки відповідають програмі курсу вищої математики у технічному вузі. Містять розділи теорії функції комплексних змінних та операційного числення. Наведені теоретичні питання, варіанти контрольної роботи, а також зразок виконання завдання.

Вказівки призначені для виконання контрольної роботи зі спецкурсу вищої математики студентами заочного відділення.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. А.М. Кузнецов

© Український державний морський
технічний університет, 2004

© Видавництво УДМТУ, 2004

1. Програма курсу

1. Комплексні числа. Подання комплексних чисел в алгебраїчній, показниковій та тригонометричній формі.

2. Дії над комплексними числами. Формула Муавра. Знаходження кореня n -ступеня з комплексного числа.

3. Поняття функції комплексної змінної.

4. Показникова та логарифмічна функції. Формула Ейлера.

5. Степенева функція. Тригонометричні та гіперболічні функції.

6. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коші–Рімана. Поняття аналітичної функції.

7. Геометричний зміст модуля та аргументу похідної. Поняття про конформне відображення.

8. Інтеграл від функції комплексної змінної. Його властивості.

9. Теорема Коші для одно- та многозв'язних областей.

10. Інтегральна формула Коші.

11. Існування похідних усіх порядків у аналітичній функції.

12. Ряд Тейлора. Розкладання аналітичної функції в ряд Тейлора.

13. Ряд Лорана. Кільце збіжності ряду.

14. Класифікація ізольованих особливих точок.

15. Лишок. Обчислення лишків.

16. Обчислення контурних інтегралів за допомогою лишків.

17. Перетворення Лапласа. Функція – оригінал та її зображення.

18. Властивості перетворення Лапласа.

19. Теорема подібності, зсуву, запізнювання.

20. Диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення.

21. Зображення елементарних функцій.

22. Методи відшукування оригіналу за заданим зображенням.

23. Розв'язання диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь операційним методом.

2. Розрахункові завдання

Задача № 1. Знайти всі значення кореня.

1.1. $\sqrt[4]{-1}$.

1.2. $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

1.3. $\sqrt[3]{1}$.

1.4. $\sqrt[3]{i}$.

1.5. $\sqrt[4]{1}$.

1.6. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

1.7. $\sqrt[3]{-1}$.

1.8. $\sqrt[3]{-i}$.

1.9. $\sqrt[4]{-16}$.

1.10. $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

1.11. $\sqrt[3]{8}$.

1.12. $\sqrt[3]{8i}$.

1.13. $\sqrt[4]{16}$.

1.14. $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$.

1.15. $\sqrt[3]{-8}$.

1.16. $\sqrt[3]{-8i}$.

1.17. $\sqrt[4]{-1/16}$.

1.18. $\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$.

1.19. $\sqrt[3]{1/8}$.

1.20. $\sqrt[3]{i/8}$.

1.21. $\sqrt[4]{1/16}$.

1.22. $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$.

1.23. $\sqrt[3]{-1/8}$.

1.24. $\sqrt[3]{-1/8}$.

1.25. $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$.

1.26. $\sqrt[3]{27}$.

1.27. $\sqrt[4]{1/256}$.

1.28. $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

1.29. $\sqrt[3]{i/27}$.

1.30. $\sqrt[4]{256}$.

Задача № 2. Визначити область, задану нерівностями.

2.1. $|z-1| \leq 1, |z+1| > 2$.

2.2. $|z+i| \geq 1, |z| < 2$.

2.3. $|z-i| \leq 2, \operatorname{Re} z > 1$.

2.4. $|z+1| \geq 1, |z+i| < 1$.

2.5. $|z+1| < 1, |z-i| \leq 1$.

2.6. $|z+i| \leq 2, |z-i| > 2$.

- 2.7. $|z-1-i| \leq 1$, $\operatorname{Im} z > 1$,
 $\operatorname{Re} z \geq 1$.
- 2.8. $|z-1+i| \geq 1$, $\operatorname{Re} z < 1$,
 $\operatorname{Im} z \leq -1$.
- 2.9. $|z-2-i| \leq 2$, $\operatorname{Re} z \geq 3$,
 $\operatorname{Im} z < 1$.
- 2.10. $|z-1-i| \geq 1$, $0 \leq \operatorname{Re} z < 2$,
 $0 < \operatorname{Im} z \leq 2$.
- 2.11. $|z+i| < 2$, $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$.
- 2.12. $|z-i| \leq 1$, $0 < \arg z < \pi/4$.
- 2.13. $|z-i| \leq 2$, $0 < \operatorname{Im} z < 2$.
- 2.14. $|z+i| > 1$, $-\pi/4 \leq \arg z < 0$.
- 2.15. $|z-1-i| < 1$, $|\arg z| \leq \pi/4$.
- 2.16. $|z| < 2$, $-\pi/4 \leq \arg(z-1) \leq \pi/4$.
- 2.17. $|z| \leq 1$, $\arg(z+i) > \pi/4$.
- 2.18. $1 < |z-1| \leq 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$,
 $\operatorname{Re} z < 1$.
- 2.19. $1 \leq |z-i| < 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$,
 $\operatorname{Im} z > 1$.
- 2.20. $|z| < 2$, $\operatorname{Re} z \geq 1$, $\arg z < \pi/4$.
- 2.21. $|z| > 1$, $-1 < \operatorname{Im} z \leq 1$,
 $0 < \operatorname{Re} z \leq 2$.
- 2.22. $|z-1| > 1$, $-1 \leq \operatorname{Im} z < 0$,
 $0 \leq \operatorname{Re} z < 3$.
- 2.23. $|z+i| < 1$, $-3\pi/4 \leq \arg z \leq -\pi/4$.
- 2.24. $|z-i| \leq 1$, $-\pi/2 < \arg(z-i) < \pi/4$.
- 2.25. $\bar{z}z < 2$, $\operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z > -1$.
- 2.26. $\bar{z}z \leq 2$, $\operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z > -1$.
- 2.27. $1 < \bar{z}z < 2$, $\operatorname{Re} z > 0$,
 $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$.
- 2.28. $|z-1| < 1$, $\arg z \leq \pi/4$,
 $\arg(z-1) > \pi/4$.
- 2.29. $|z-i| < 1$, $\arg z \geq \pi/4$,
 $\arg(z+1-i) \leq \pi/4$.
- 2.30. $|z-2-i| \geq 1$, $1 \leq \operatorname{Re} z < 3$,
 $0 < \operatorname{Im} z \leq 3$.

Задача № 3. Визначити вигляд кривої.

- 3.1. $z = 3 \sec t + i2 \operatorname{tg} t$.
- 3.2. $z = 2 \sec t - i3 \operatorname{tg} t$.
- 3.3. $z = -\sec t + i3 \operatorname{tg} t$.
- 3.4. $z = 4 \operatorname{tg} t - i3 \sec t$.
- 3.5. $z = 3 \operatorname{tg} t + i4 \sec t$.
- 3.6. $z = -4 \operatorname{tg} t - i2 \sec t$.

$$3.7. \quad z = 3 \operatorname{cosec} t + i3 \operatorname{ctg} t.$$

$$3.8. \quad z = 4 \operatorname{cosec} t - i2 \operatorname{ctg} t.$$

$$3.9. \quad z = \operatorname{ctg} t - i2 \operatorname{cosec} t.$$

$$3.10. \quad z = -\operatorname{ctg} t + i3 \operatorname{cosec} t.$$

$$3.11. \quad z = 3 \operatorname{ch} 2t + i2 \operatorname{sh} 2t.$$

$$3.12. \quad z = 2 \operatorname{ch} 3t - i3 \operatorname{sh} 3t.$$

$$3.13. \quad z = 5 \operatorname{sh} 4t + i4 \operatorname{ch} 4t.$$

$$3.14. \quad z = -4 \operatorname{sh} 5t - i5 \operatorname{ch} 5t.$$

$$3.15. \quad z = \frac{2}{\operatorname{ch} 2t} + i4 \operatorname{th} 2t.$$

$$3.16. \quad z = \frac{4}{\operatorname{ch} 4t} + i2 \operatorname{th} 4t.$$

$$3.17. \quad z = \operatorname{th} 5t + \frac{5i}{\operatorname{ch} 5t}.$$

$$3.18. \quad z = \frac{1}{\operatorname{sh} t} - i \operatorname{cth} t.$$

$$3.19. \quad z = 2e^{it} + \frac{1}{2e^{it}}.$$

$$3.20. \quad z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}.$$

$$3.21. \quad z = -2e^{it} + \frac{1}{e^{it}}.$$

$$3.22. \quad z = 2e^{2it} - \frac{1}{e^{2it}}.$$

$$3.23. \quad z = \frac{1+t}{1-t} + i \frac{2+t}{2-t}.$$

$$3.24. \quad z = \frac{t-1+it}{t(t-1)}.$$

$$3.25. \quad z = \frac{1+i}{1-t} + \frac{t}{1-t} (2-4i).$$

$$3.26. \quad z = \frac{2+t}{2-t} + i \frac{1+t}{1-t}.$$

$$3.27. \quad z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4). \quad 3.28. \quad z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1).$$

$$3.29. \quad z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4). \quad 3.30. \quad z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5).$$

Задача № 4. Відновити аналітичну в околі точці z_0 функцію $f(z)$ за відомою її дійсною $u(x, y)$ або уявною частиною $v(x, y)$ і значенням $f(z_0)$.

$$4.1. \quad u = x^2 - y^2 + x, \quad f(0) = 0.$$

$$4.2. \quad u = x^3 - 3xy + 1, \quad f(0) = 1.$$

$$4.3. \quad v = e^x (y \cos y + x \sin y), \quad f(0) = 0. \quad 4.4. \quad u = x^2 - y^2 - 2y, \quad f(0) = 0.$$

$$4.5. \quad u = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y, \quad f(0) = 2.$$

$$4.6. \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(1) = 1 + i.$$

$$4.7. \quad v = e^{-y} \sin x + y, \quad f(0) = 1.$$

$$4.8. \quad v = e^x \cos y, \quad f(0) = 1 + i.$$

- 4.9. $v = -\frac{y}{(x+y)^2 + y^2}, f(0) = 1.$ 4.10. $v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2.$
- 4.11. $u = e^{-y} \cos x, f(0) = 1.$ 4.12. $u = y - 2xy, f(0) = 0.$
- 4.13. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i.$ 4.14. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1.$
- 4.15. $v = 3x^2 y - y^3 - y, f(0) = 0.$ 4.16. $v = 2xy + y, f(0) = 0.$
- 4.17. $v = 3x^2 y - y^3, f(0) = 1.$ 4.18. $u = e^x (x \cos y - y \sin y),$
 $f(0) = 0.$
- 4.19. $v = 2xy + 2x, f(0) = 0.$ 4.20. $u = 1 - \sin y \cdot e^x, f(0) = 1 + i.$
- 4.21. $v = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, f(0) = 2.$ 4.22. $v = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$
- 4.23. $u = e^{-y} \cos x + x, f(0) = 1.$ 4.24. $v = e^{-y} \sin x, f(0) = 1.$
- 4.25. $u = \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + y^2}, f(0) = 1.$ 4.26. $u = x / (x^2 + y^2) + x,$
 $f(1) = 2.$
- 4.27. $v = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0.$ 4.28. $u = -2xy - 2y, f(0) = i.$
- 4.29. $v = 2xy - 2y, f(0) = 1.$ 4.30. $u = x^3 - 3xy^2 - x, f(0) = 0.$

Задача № 5. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної за даною кривою.

- 5.1. $\int_{AB} \bar{z} dz; AB: \{y = x^2; z_A = 0; z_B = 1 + i\}.$
- 5.2. $\int_L (z + 1)e^z dz; L: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$
- 5.3. $\int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz; AB - \text{відрізок прямої, } z_A = 0, z_B = 2 + 2i.$

$$5.4. \int_{AB} (z^2 + 7z + 1)dz; \text{ } AB - \text{відрізок прямої, } z_A = 1, z_B = 1 - i.$$

$$5.5. \int_{ABC} |z|dz; \text{ } ABC - \text{ламана, } z_B = -1 + i, z_C = 1 + i.$$

$$5.6. \int_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1)dz; \text{ } AB - \text{відрізок прямої, } z_A = 1, z_B = i.$$

$$5.7. \int_{AB} z^{-3} dz; \text{ } AB - \text{відрізок прямої, } z_A = 0, z_B = 1 + i.$$

$$5.8. \int_{ABC} z^3 e^{z^4} dz; \text{ } ABC - \text{ламана, } z_A = i, z_B = 1, z_C = 0.$$

$$5.9. \int_{ABC} \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz; \text{ } AB: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}, \text{ } BC - \text{відрізок, } z_B = 1, z_C = 2.$$

$$5.10. \int_{ABC} (z^2 + \cos z)dz; \text{ } ABC - \text{ламана, } z_A = 0, z_B = 1, z_C = i.$$

$$5.11. \int_L \frac{\bar{z}}{z} dz; \text{ } L - \text{межа області: } \{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

$$5.12. \int_{ABC} (\operatorname{ch} z + \cos iz); \text{ } ABC - \text{ламана, } z_A = 0, z_B = -1, z_C = i.$$

$$5.13. \int_L |z| \bar{z} dz; \text{ } L: \{|z|=4, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

$$5.14. \int_L (\operatorname{ch} z + z)dz; \text{ } L: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

$$5.15. \int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz; \text{ } L: \{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

$$5.16. \int_{AB} (3z^2 + 2z)dz; \text{ } AB: \{y=x^2, z_A=0, z_B=1+i\}.$$

$$5.17. \int z \operatorname{Re} z^2 dz; \text{ } L: \{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

- 5.18. $\int_{ABC} (z^2 + 1)dz$; ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = -1 + i$, $z_C = i$.
- 5.19. $\int_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz$; AB – відрізок прямої, $z_A = 1 + i$, $z_B = 0$.
- 5.20. $\int_L (\sin iz + z)dz$; $L: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.
- 5.21. $\int_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz$; AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + 2i$.
- 5.22. $\int_{AB} (2z + 1)dz$; $AB: \{y = x^3, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.
- 5.23. $\int_{ABC} z \bar{z} dz$; $AB: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ AB – відрізок прямої,
 $z_B = 1, z_C = 0$.
- 5.24. $\int_L (\cos iz + 3z^2)dz$; $L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- 5.25. $\int_L |z| dz$; $L: \{|z| = \sqrt{2}, 3\pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4\}$.
- 5.26. $\int_{ABC} (z^9 + 1)dz$; ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$, $z_C = i$.
- 5.27. $\frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \bar{z} dz$.
- 5.28. $\int_{ABC} (\sin z + z^5)dz$; ABC – ламана, $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = 2i$.
- 5.29. $\int_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz$; AB – відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$.
- 5.30. $\int_L (z^3 + \sin z)dz$; $L: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Задача № 6. Знайти всі лоранові розкладання даної функції по степенях z .

$$6.1. \frac{z-2}{2z^3+z^2-z}.$$

$$6.2. \frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}.$$

$$6.3. \frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}.$$

$$6.4. \frac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}.$$

$$6.5. \frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}.$$

$$6.6. \frac{3z-36}{z^1+3z^3-18z^2}.$$

$$6.7. \frac{7z-98}{2z^2+7z^2-49z}.$$

$$6.8. \frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}.$$

$$6.9. \frac{9z-162}{2z^2+9z^2-81z}.$$

$$6.10. \frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}.$$

$$6.11. \frac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}.$$

$$6.12. \frac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}.$$

$$6.13. \frac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}.$$

$$6.14. \frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}.$$

$$6.15. \frac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}.$$

$$6.16. \frac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}.$$

$$6.17. \frac{z+2}{z+z^2-2z^3}.$$

$$6.18. \frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}.$$

$$6.19. \frac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}.$$

$$6.20. \frac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}.$$

$$6.21. \frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}.$$

$$6.22. \frac{3z+36}{18z^2+3z^2-z^4}.$$

$$6.23. \frac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}.$$

$$6.24. \frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}.$$

$$6.25. \frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}.$$

$$6.26. \frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}.$$

$$6.27. \frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}.$$

$$6.28. \frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}.$$

$$6.29. \frac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}.$$

$$6.30. \frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}.$$

Задача № 7. Обчислити інтеграл.

$$7.1. \oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)}.$$

$$7.2. \oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)}.$$

$$7.3. \oint_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}.$$

$$7.4. \oint_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)} dz.$$

$$7.5. \quad \oint_{|z-3|=1/2} \frac{e^z dz}{\sin z}.$$

$$7.7. \quad \oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz.$$

$$7.9. \quad \oint_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz.$$

$$7.11. \quad \oint_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)} dz.$$

$$7.13. \quad \oint_{|z|=1} \frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi} dz.$$

$$7.15. \quad \oint_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz.$$

$$7.17. \quad \oint_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z+2}{4z^2+\pi z} dz.$$

$$7.19. \quad \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z} dz.$$

$$7.21. \quad \oint_{|z|=\pi/2} \frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)} dz.$$

$$7.23. \quad \oint_{|z-i|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz.$$

$$7.25. \quad \oint_{|z-3/2|=1} \frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)} dz.$$

$$7.27. \quad \oint_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2+\pi)^2}{i \sin z} dz.$$

$$7.6. \quad \oint_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z} dz.$$

$$7.8. \quad \oint_{|z-3/2|=2} \frac{2z|z-1|}{\sin z} dz.$$

$$7.10. \quad \oint_{|z-1/2|=1} \frac{is(z-i)}{\sin \pi z} dz.$$

$$7.12. \quad \oint_{|z-1/2|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz.$$

$$7.14. \quad \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2} dz.$$

$$7.16. \quad \oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2} dz.$$

$$7.18. \quad \oint_{|z+3/2|=1} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z} dz.$$

$$7.20. \quad \oint_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z \sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)} dz.$$

$$7.22. \quad \oint_{|z|=1} \frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)} dz.$$

$$7.24. \quad \oint_{|z|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z} dz.$$

$$7.26. \quad \oint_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z(z-\pi)\left(z+\frac{\pi}{3}\right)} dz.$$

$$7.28. \quad \oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz.$$

$$7.29. \oint_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z \sin z} dz.$$

$$7.30. \oint_{|z-3/2|=2} \frac{z^3 + \sin 2z}{\sin \frac{z}{2} (z-\pi)} dz.$$

Задача № 8. Розв'язати диференціальне рівняння, що задовольняє початкові умови $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

$$8.1. \quad 2y'' - y' = \frac{e^t}{(1 + e^{t/2})^2}.$$

$$8.2. \quad y'' - y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

$$8.3. \quad y'' - y' = \frac{e^{2t}}{(1 + e^t)^2}.$$

$$8.4. \quad y'' + 2y' + y = \frac{te^{-t}}{t+1}.$$

$$8.5. \quad y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}.$$

$$8.6. \quad y'' - y = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

$$8.7. \quad y'' + y' = \frac{e^t}{(1 + e^t)^2}.$$

$$8.8. \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t^2 + 1}.$$

$$8.9. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

$$8.10. \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

$$8.11. \quad y'' - 4y = \operatorname{th}^2 2t.$$

$$8.12. \quad y'' + 2y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

$$8.13. \quad y'' + y' = \frac{1}{(1 + e^t)^2}.$$

$$8.14. \quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(2t+1)^2}.$$

$$8.15. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t+1}.$$

$$8.16. \quad y'' - y' = \frac{e^t}{1 + e^t}.$$

$$8.17. \quad y'' - 2y' = \frac{e^t}{\operatorname{ch} t}.$$

$$8.18. \quad y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3 + e^t}.$$

$$8.19. \quad y'' + y' = \frac{1}{1 + e^t}.$$

$$8.20. \quad y'' - y' = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} t}.$$

$$8.21. \quad y'' - 4y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}.$$

$$8.22. \quad y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}.$$

$$8.23. \quad y'' + y' = \frac{e^t}{1 + e^t}.$$

$$8.24. \quad y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

$$8.25. \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{(t+1)^2}.$$

$$8.26. \quad y'' - y = \operatorname{th} t.$$

$$8.27. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1 + t^2}.$$

$$8.28. \quad y'' - y = \operatorname{th}^2 t.$$

$$8.29. \quad y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t.$$

$$8.30. \quad y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Задача № 9. Операційним методом розв'язати задачу Коші.

$$9.1. \quad \begin{aligned} y'' + 4y &= \sin 2t, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

$$9.2. \quad \begin{aligned} y'' - 2y' - 3y &= 2t, \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

$$9.3. \quad \begin{aligned} y'' + y' + y &= t^2 + t, \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = -3. \end{aligned}$$

$$9.4. \quad \begin{aligned} 2y'' + 5y' &= 29 \cos t, \\ y(0) &= -1, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

$$9.5. \quad \begin{aligned} y'' - y' - 6y &= 2, \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

$$9.6. \quad \begin{aligned} y'' + 4y &= 8 \sin 2t, \\ y(0) &= 3, \quad y'(0) = -1. \end{aligned}$$

$$9.7. \quad \begin{aligned} y'' + 4y' + 4y &= t^3 e^{2t}, \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 2. \end{aligned}$$

$$9.8. \quad \begin{aligned} y'' + 4y &= 4e^{2t} + 4t^2, \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 2. \end{aligned}$$

$$9.9. \quad \begin{aligned} y'' + 4y &= 3 \sin t + 10 \cos 3t, \\ y(0) &= -2, \quad y'(0) = 3. \end{aligned}$$

$$9.10. \quad \begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= 12e^{3t}, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 6. \end{aligned}$$

$$9.11. \quad \begin{aligned} y'' + 3y' - 10y &= 47 \cos 3t - \sin 3t, \\ y(0) &= 3, \quad y'(0) = -1. \end{aligned}$$

$$9.12. \quad \begin{aligned} y'' + 2y' + 10y &= 2e^{-t} \cos 3t, \\ y(0) &= 5, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

$$9.13. \quad \begin{aligned} y'' - 2y' &= e^t (t^2 + t - 3), \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 2. \end{aligned}$$

$$9.14. \quad \begin{aligned} y'' + y' - 2y &= e^{-t}, \\ y(0) &= -1, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

$$9.15. \quad \begin{aligned} y'' - y &= 4 \sin t + 5 \cos 2t, \\ y(0) &= -1, \quad y'(0) = -2. \end{aligned}$$

$$9.16. \quad \begin{aligned} y'' + y &= 2 \cos t, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

$$9.17. \quad y'' + y = 6e^{-t}, \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

$$9.18. \quad y'' - 3y' + 2y = 2e^t \cos \frac{t}{2}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$9.19. \quad y'' + y' = t^2 + 2t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.$$

$$9.20. \quad y'' - y' = t^2, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$9.21. \quad y'' + y' + y = 7e^{2t}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

$$9.22. \quad y'' - y = \cos 3t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$9.23. \quad y'' - 9y = \sin t - \cos t, \\ y(0) = -3, \quad y'(0) = 2.$$

$$9.24. \quad y'' + y' - 2y = -2(t^2 + 1), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$9.25. \quad 2y'' - y' = \sin 3t, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

$$9.26. \quad y'' + 2y' = 2 + e^t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$9.27. \quad y'' + y = \operatorname{sh} t, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

$$9.28. \quad y'' + 2y' = \sin t / 2, \\ y(0) = -2, \quad y'(0) = 4.$$

$$9.29. \quad y'' - 3y' + 2y = e^t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$9.30. \quad y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Задача № 10. Розв'язати операційним методом систему диференціальних рівнянь.

$$10.1. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3; \end{cases} \\ x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.2. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y; \end{cases} \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

$$10.3. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$10.4. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.5. \quad \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$10.6. \quad \begin{cases} \dot{x} = 3y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.7. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$10.9. \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.11. \quad \begin{cases} \dot{x} = y + 3, \\ \dot{y} = x + 2; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.13. \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$10.15. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.17. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$10.19. \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

$$10.21. \quad \begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$$

$$10.23. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y; \end{cases} \\ x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.8. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1; \end{cases} \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$$

$$10.10. \quad \begin{cases} \dot{x} = 4x + 3, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases} \\ x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.12. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$10.14. \quad \begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = 3x + 1; \end{cases} \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

$$10.16. \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$10.18. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.20. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.22. \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2; \end{cases} \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

$$10.24. \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$10.25. \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x; \end{cases} \\ x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$$

$$10.26. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$$

$$10.27. \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$$

$$10.28. \quad \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -\frac{3}{2}x + y; \end{cases} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$10.29. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1; \end{cases} \\ x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$$

$$10.30. \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = \frac{5}{2}x - y + 2; \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

3. Розв'язання типового варіанта

Задача 1. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

Розв'язок. Комплексне число $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ подамо в тригонометричній формі $\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1;$$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$. Оскільки $y > 0$ і $x < 0$, то кут φ із другої чверті і

дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, тобто $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Маємо $-\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Корені n -го ступеня з комплексного числа визначаються за формулою

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

У нашому випадку

$$\sqrt[4]{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi/3 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi/3 + 2k\pi}{4}, \quad k=0, 1, 2, 3.$$

Вважаючи $k=0$, знайдемо перший корінь:

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}.$$

При $k=1$ знайдемо другий корінь:

$$z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При $k=2$ знайдемо третій корінь:

$$z_3 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}.$$

При $k=3$ знайдемо четвертий корінь:

$$z_4 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 2. Визначити область, задану нерівностями $|z-i| \leq 2$, $\operatorname{Re} z > 1$.

Розв'язок. Нерівність $|z-i| \leq 2$ визначає коло з центром у точці i та радіусом 2, включаючи межу – коло.

Друга нерівність – $\operatorname{Re} z > 1$ – визначає напівплощину вправо від прямої $x=1$. Пряма не включається в напівплощину.

Перетинання кола та напівплощини будуть визначати шукану область (рис. 1, заштрихована область).

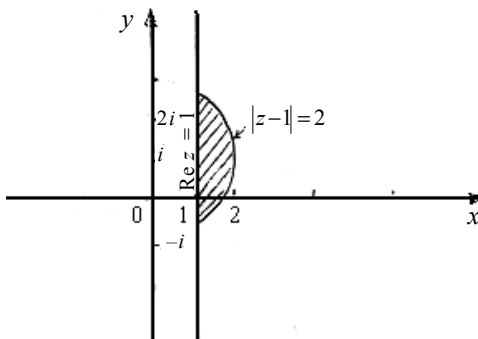


Рис. 1

Задача 3. Визначити тип кривої $z = 3\operatorname{tg} t + i4\sec t$.

Розв'язок. Оскільки $z = x + iy$, то маємо
$$\begin{cases} x = 3\operatorname{tg} t, \\ y = 4\sec t = \frac{4}{\cos t}. \end{cases}$$

Виключимо параметр t з отриманої системи рівнянь:

$$y = \frac{4}{\cos t} \Rightarrow \cos t = \frac{4}{y};$$

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{y}\right)^2} = \frac{\sqrt{y^2 - 16}}{y};$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sqrt{y^2 - 16}}{y} \cdot \frac{y}{4} = \frac{\sqrt{y^2 - 16}}{4}.$$

Підставимо значення $\operatorname{tg} t$ у перше рівняння системи:

$$x = 3\operatorname{tg} t = \frac{3\sqrt{y^2 - 16}}{4}.$$

Звідси, підносячи до квадрату, маємо

$$x^2 = \frac{9}{16}(y^2 - 16) \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Одержали рівняння гіперболи з півосями $a = 3$ і $b = 3$. Зробимо креслення гіперболи (рис. 2).

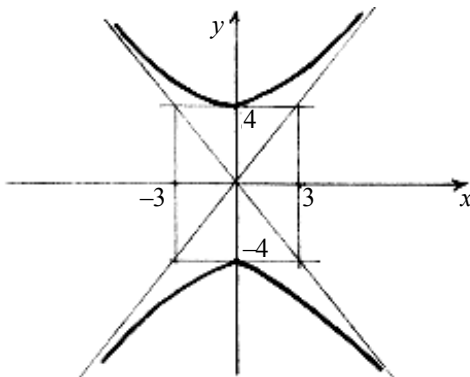


Рис. 2

Задача 4. Відновити аналітичну в околиці точки $z_0 = 0$ функцію $f(z)$ за відомою її дійсною частиною $u(x, y) = 2e^x \cos y$ і додатковою умовою $f(0) = 2$.

Розв'язок. Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x} = (2e^x \cos y)'_x = 2e^x \cos y$, для чого використо-

вуємо умови Коші–Рімана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Згідно з першою умовою, повинно бути $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, так що $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$.

Звідси $v(x, y) = \int 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ поки невідома функція.

Знаходимо $\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y + \varphi'(x)$. Використовуючи другу умову Коші–Рімана одержимо

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y.$$

Звідси $\varphi'(x) = 0$, а виходить $\varphi(x) = c$, де $c = \text{const}$.

Отже, $v(x, y) = 2e^x \sin y + c$. Шукана функція:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + c).$$

Використовуємо додаткову умову $f(0) = 2$, тобто

$$2e^0 \cos 0 + i(2e^0 \sin 0 + c) = 2 \text{ чи } 2 + ic = 2, \text{ звідси } c = 0.$$

$$f(z) = 2e^x \cos y + i2e^x \sin y = 2e^x (\cos y + i \sin y) = 2e^x \cdot e^{iy} = 2e^z,$$

отже, $f(z) = 2e^z$.

Задача 5. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної за даною кривою $\int_{AB} (1 + i - 2\bar{z}) dz$, AB – відрізок прямої, $z = 0$, $z = 1 + i$.

Розв'язок. Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді $u + iv = 1 + i - 2\bar{z} = 1 + i - 2(x - iy) = (1 - 2x) + i(1 + 2y)$. Тут $u = 1 - 2x$, $v = 1 + 2y$.

Обчислення інтеграла від функції $f(z)$ зводиться до обчислення кри-

вольнінних інтегралів за формулою

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy.$$

У нашому випадку

$$\int_{AB} (1 + i + 2\bar{z}) dz = \int_{AB} (1 - 2x) dx - (1 + 2y) dy + i \int_{AB} (1 + 2y) dx + (1 - 2x) dy.$$

Рівняння прямої AB , що проходить через точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$, буде

$$y = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad dy = dx.$$

Тому

$$\begin{aligned} \int_{AB} (1 + i + 2\bar{z}) dz &= \int_0^1 [(1 - 2x) - (1 + 2x)] dx + i \int_0^1 [(1 + 2x) + (1 - 2x)] dx = \\ &= - \int_0^1 4x dx + i \int_0^1 2 dx = -2x^2 \Big|_0^1 + i 2x \Big|_0^1 = -2 + 2i. \end{aligned}$$

Задача 6. Знайти всі лоранові розкладання функції $f(z) = \frac{2z + 1}{z^4 + z^3 - 2z^2}$

по ступенях z .

Розв'язок. Знайдемо корені знаменника:

$$z^4 + z^3 - 2z^2 = z^2(z^2 + z - 2) = 0.$$

Корені $z_1 = 0$; $z_2 = -2$; $z_3 = 1$. Знаменник можна розкласти:

$$z^4 + z^3 - 2z^2 = z^2(z + 2)(z - 1).$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, подамо функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2(z + 2)(z - 1)} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z + 2} + \frac{1}{z - 1} \right).$$

Функція має три особливі точки: $z_1 = 0$; $z_2 = -2$; $z_3 = 1$.

Отже, маємо три "кільця" з центром у точці $z_0 = 0$, у кожному з яких $f(z)$ є аналітичною (рис. 3):

$0 < |z| < 1$ – коло без центру (область I);

$1 < |z| < 2$ – кільце (область II);

$2 < |z| < +\infty$ – зовнішність кола $|z| = 2$ (область III).

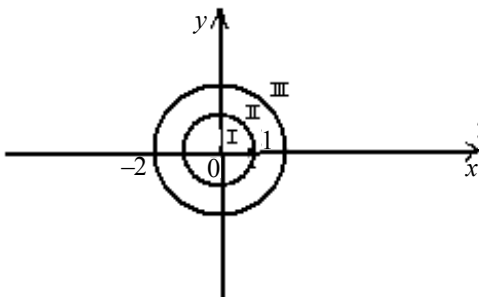


Рис. 3

Розглянемо область I: $|z| < 1$.

У ній $\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)$, як сума нескінченної гео-

метричної прогресії зі знаменником $q = z$, $|q| = |z| < 1$. Другий дріб

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots \right), \text{ тут } q = -\frac{z}{2}, \quad |q| < 1.$$

Функція

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} \right) = \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 + \dots \right) = -\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z} - \frac{7}{8} - \frac{15}{16}z - \dots \end{aligned}$$

Отже, в області I функція розкладається:

$$f(z) = -\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z} - \frac{7}{8} - \frac{15}{16}z + \dots$$

Розглянемо область II: $1 < |z| < 2$.

У цій області

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right), \text{ тут } q = \frac{1}{z}, \quad |q| < 1.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} \right) = \frac{1}{z^2} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots \right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} \left(\dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots \right) = \dots + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{8} - \frac{z}{16} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } f(z) = \dots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{8} - \frac{z}{16} + \dots$$

Розглянемо область III: $|z| > 2$.

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots \right), \quad q = -\frac{2}{z}, \quad |q| < 1.$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right), \quad q = \frac{1}{z}, \quad |q| < 1.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z^3} \left(2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{7}{z^3} + \dots \right) = \left(-\frac{7}{z^3} + \dots \right) = \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \frac{5}{z^5} - \frac{7}{z^6} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } f(z) = \dots - \frac{7}{z^6} + \frac{5}{z^5} - \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^3} \dots$$

Задача 7. Обчислити інтеграл $\oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz$.

Розв'язок. Інтеграл по замкненому контуру обчислюється за формулою

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

Підінтегральна функція $f(z) = \frac{ze^z}{\sin z}$ в колі $|z-1|=3$ має дві особливі точки: $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$. Тому $\sin 0 = 0$ і $\sin \pi = 0$ (рис. 4).

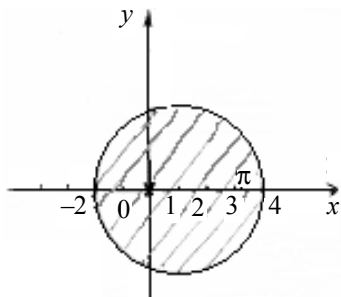


Рис. 4

Лишок в точці $z_1 = 0$ обчислимо за формулою

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \operatorname{res}_{z_1} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)} = \frac{ze^z}{\cos z} \Big|_{z=0} = \frac{0e^0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0;$$

лишок у точці $z_2 = \pi$ – за формулою

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \frac{ze^z}{\cos z} \Big|_{z=\pi} = \frac{\pi e^\pi}{\cos \pi} = -\pi e^\pi.$$

Отже, $\oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz = \operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_\pi f(z) = 0 - \pi e^\pi = -\pi e^\pi.$

Задача 8. Розв'язати рівняння

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Розв'язок. Спочатку розв'яжемо задачу Коші $y_1'' - y_1 = 1, y_1(0) = y_1'(0) = 0$.

Складемо допоміжне рівняння

$$p^2 \bar{y}_1(p) - \bar{y}_1(p) = \frac{1}{p},$$

звідси

$$\bar{y}_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)} = \frac{p}{p^2 - 1} - \frac{1}{p}.$$

За таблицею зображень обчислюємо $y_1(x) = \operatorname{ch} x - 1$.

Розв'язок рівняння знаходимо за формулою

$$y(x) = \int_0^x f(\tau) y_1'(x - \tau) d\tau,$$

де $f(x)$ – його права частина.

Отже,

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+e^\tau} \operatorname{sh}(x - \tau) d\tau = \int_0^x \frac{e^{x-\tau} - e^{-x+\tau}}{2(1+e^\tau)} d\tau = \frac{e^x}{2} \int_0^x \frac{e^{-\tau} d\tau}{1+e^\tau} - \\ &- \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x \frac{de^\tau}{1+e^\tau} = \operatorname{sh} x \cdot \ln \frac{e^x + 1}{2} + \frac{1}{2} (-xe^x + e^x - 1). \end{aligned}$$

Задача 9. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= \sin x, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

Розв'язок. Складемо допоміжне рівняння, отримане перетворенням Лапласа лівої та правої частини даного диференціального рівняння:

$$\left[p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y'(0)\right] + 2[p\bar{y}(p) - y(0)] + 5\bar{y}(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\text{чи } \bar{y}(p)(p^2 + 2p + 5) = \frac{1}{p^2 + 1} + 1.$$

Звідси

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)} + \frac{1}{p^2 + 2p + 5} = \frac{p^2 + 2}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

Дріб розкладемо на суму простих дробів:

$$\frac{p^2 + 2}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{Cp + D}{p^2 + 2p + 5}.$$

Числа A, B, C, D знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів:

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{10}, \quad D = 1.$$

Тоді

$$\bar{y}(p) = \frac{-\frac{p}{10} + \frac{1}{5}}{p^2 + 1} + \frac{\frac{p}{10} + 1}{p^2 + 2p + 5} = -\frac{1}{10} \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{10} \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 4}.$$

За таблицею зображень маємо

$$y(x) = -\frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + \frac{1}{10} e^{-x} \cos 2x + \frac{9}{20} e^{-x} \sin 2x.$$

Задача 10. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases}$$

яка задовольняє початкові умови при $t = 0, x = 0$ і $y = 0$.

Розв'язок. У зображенні система має вигляд:

$$\begin{cases} (3p + 2)\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) = \frac{1}{p}, \\ p\bar{x}(p) + (4p + 3)\bar{y}(p) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, маємо

$$\begin{cases} \bar{x}(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{33}{10(11p+6)}, \\ \bar{y}(p) = -\frac{1}{(11p+6)(p+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6} \right). \end{cases}$$

За знайденими зображеннями у таблиці знаходимо шукані розв'язки:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}, \\ y(t) = \frac{1}{5} \left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t} \right). \end{cases}$$

Таблиця оригіналів та їх зображень

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$	Примітки
1	$\sigma_0(t)$	$\frac{1}{p}$	
2	e^{at}	$\frac{1}{p-\alpha}$	
3	e^{-at}	$\frac{1}{p+\alpha}$	
4	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$	
5	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$	
6	$\text{sh } wt$	$\frac{w}{p^2 - w^2}$	
7	$\text{ch } wt$	$\frac{p}{p^2 - w^2}$	

Продовж. таблиці

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$	Примітки
8	$e^{-at} \sin wt$	$\frac{w}{(p + \alpha)^2 + w^2}$	
9	$e^{-at} \cos wt$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + w^2}$	
10	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	
11	$e^{-at} t^n$	$\frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$	
12	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$	
13	$t \sin wt$	$\frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}$	
14	$t \cos wt$	$\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$	
15	$f(\alpha \cdot t)$	$\frac{1}{\alpha} F(p/\alpha)$	Теорема подібності
16	$e^{-at} f(t)$	$F(p + \alpha)$	Теорема зсуву
17	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$	Диференціювання оригіналу
18	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$	
19	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$	Інтегрування оригіналу
20	$\delta(t)$	1	Функція Дирака
21	$f(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$	Теорема запізнювання

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Высшая математика. Специальные главы / *П.И. Чинаев* и др. – К.: Вища школа, 1981. – 368 с.
3. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
4. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / *Г.И. Кручкович* и др. – М.: Высшая школа, 1970. – 511 с.
5. Специальный курс высшей математики для вузов / *В.Ф. Живержеев* и др. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.
6. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / *И.Г. Араманович* и др. – М.: Наука, 1968. – 390 с.
7. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / *М.Л. Краснов* и др. – М.: Наука, 1981. – 304 с.