

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

А. П. ГУРОВ, С. І. ОЛЬШЕВСЬКИЙ

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник

У двох частинах

Частина 1

Рекомендовано Методичною радою НУК

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ • НУК • 2016

УДК 681.5.01(075)
ББК 32.965-01я73
Г 95

Автори:

А. П. Гуров, канд. техн. наук, професор НУК;
С. І. Ольшевський, асистент

Рецензент В. Л. Тимченко, д-р техн. наук, професор

Гуров А. П.

Г 95 Теорія автоматичного керування : навчальний посібник : у 2 ч.
Ч. 1 / А. П. Гуров, С. І. Ольшевський. – Миколаїв : НУК, 2016. – 87 с.

Подано основи теорії автоматичного керування. Матеріал скомпонувано у порядку проходження відповідних розділів лекційного курсу, розділи супроводжуються прикладами розв'язків, тому посібник може бути корисним для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Призначено для студентів, які навчаються за напрямком 6.0507 "Електромеханіка".

УДК 681.5.01(075)
ББК 32.965-01я73

Навчальне видання

ГУРОВ Анатолій Петрович
ОЛЬШЕВСЬКИЙ Сергій Іванович

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Навчальний посібник

У двох частинах

Частина 1

Редактор *М. П. Сєвцова*
Комп'ютерне верстання *А. Й. Лихіна*
Коректор *М. О. Паненко*

© Гуров А. П., Ольшевський С. І., 2016
© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2016

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 5,1. Об'єм даних 1857 кб. Тираж 15 прим.
Вид. № 9. Зам. № 97.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025, e-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ВСТУП

Теорія автоматичного керування (ТАК) – галузь науки, що вивчає технічні системи за допомогою ідей та методів кібернетики. Основна задача керування технічним об'єктом – знайти та реалізувати за даних умов алгоритм керування, завдяки якому будуть виконуватися вимоги, висунуті до процесу. Вибір найраціональнішого алгоритму керування на основі існуючої інформації – яскраво виражена екстремальна задача. Таким чином, аналіз інформаційних процесів у системі з метою їх алгоритмізації та синтез систем керування, що реалізують цей алгоритм, є задачею теорії автоматичного керування.

Дисципліна "Теорія автоматичного керування" формує у майбутніх бакалаврів системне мислення і цілісне бачення явищ світу техніки, природи, соціального середовища, синтезує знання студентів з математики, фізики та інших природничих наук, дає наочні приклади їх конструктивного використання. За останні роки практика проектування і реалізації алгоритмів керування зазнала суттєвих змін, обумовлених інтенсифікацією виробничих технологій, актуалізацією проблем екології, революційним досягненням у галузі отримання, передачі та обробки інформації. Застосування розвинутих комп'ютерних програм моделювання та імітації, аналізу і синтезу систем керування в більшості випадків ліквідує обчислювальні проблеми, пов'язані з дослідженням та розробками таких систем. Розширення галузі застосування теорії автоматичного керування, кола задач, що розв'язуються на її основі, втілення нових технологій дослідження

та проектування систем керування потребує для навчання бакалаврів більшої кількості годин. Але, враховуючи те, що в системі підготовки бакалаврів і магістрів з електромеханіки передбачені наступні дисципліни: "Проектування дискретних та цифрових системи керування", де розглянуті питання аналізу і синтезу цих систем; "Дослідження операцій електромеханічних систем" з розглядом проблем керованості та спостережуваності, аналізу і синтезу оптимальних стохастичних та адаптивних систем, можна скоротити час для вивчення відповідних систем у курсі "Теорії автоматичного керування" і посилити розділи нелінійних систем, а також ті, які пов'язані з прикладами синтезу систем, що розглядаються у курсовому проектуванні з використанням обчислювальної техніки.

Робоча навчальна програма з ТАК базується на фундаментальних і прикладних дисциплінах, які входять до навчального плану Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова з підготовки бакалаврів Миколаївського інституту автоматики й електротехніки.

Дисципліна "Теорія автоматичного керування" вивчається після курсів вищої математики, фізики, теорії електричних і магнітних кіл.

З вищої математики використовуються наступні поняття:

- математичний аналіз;
 - диференціальне та інтегральне числення;
 - векторно-матричне числення;
 - ряди;
 - операційне числення;
 - з фізики –
 - механіка;
 - електрика;
 - з теорії електричних і магнітних кіл –
 - теорія кіл.
-
-

1. ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕЛЕМЕНТІВ ТА СИСТЕМ

Загальні поняття та визначення

Визначення математичних моделей (ММ) динамічних об'єктів – це математичний опис усіх процесів, що відбуваються в об'єкті, щодо вихідних і вхідних величин на основі законів фізики.

У загальному вигляді автоматична система (рис. 1.1) складається з об'єкта керування (ОК), автоматичного керуючого пристрою (АКП) та зворотних зв'язків (ЗЗ). При описі системи зазвичай вхідний вплив позначають як $X(t)$, вихідну величину як $Y(t)$, збурюючий вплив як $f(t)$, а похибку – $\varepsilon(t)$.

Під керуванням розуміють організацію відповідного впливу на керований об'єкт з метою досягнення необхідних змін його вихідної величини.

Будь-яка система повинна із заздалегідь заданою точністю відтворити те, що подано на вхід.

Збурюючі впливи $f(t)$ викликають відхилення вихідної величини від очікуваного значення. Їх поділяють на дві групи: координатні та параметричні.

Кожен елемент має інерційність. Це також призводить до відхилення вихідної величини.

Зворотний зв'язок (ЗЗ) – це канал передачі інформації з виходу системи на її вхід для порівняння із задавальним сигналом. Самі ЗЗ можуть бути позитивними та негативними, місцевими та головними, жорсткими і гнучкими.

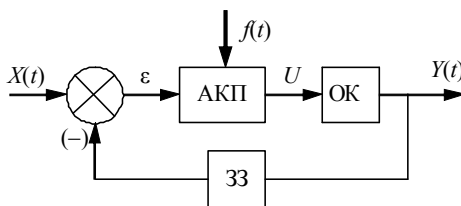


Рисунок 1.1 – Загальна структура автоматичної системи

Місцеві ЗЗ охоплюють окремі елементи, можуть бути довільного вигляду.

Головний ЗЗ охоплює систему у цілому. Він повинен бути негативним, жорстким, одиничним.

2. МЕТОДИКА СКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Лінеаризація та систематизація математичних моделей

Лінійна система складається із виключно лінійних елементів.

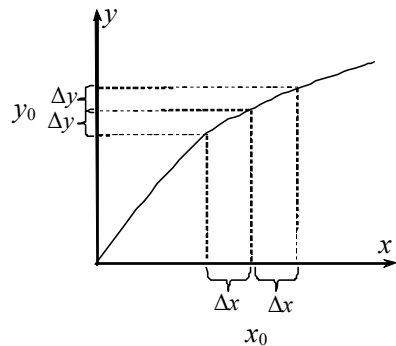
Насправді у природі не існує лінійних елементів і, відповідно, лінійних систем.

Вихідні математичні моделі лінеаризують.

Для визначення можливості лінеаризації використовують принцип малих відхилень.

Принцип малих відхилень: якщо малим відхиленням на вході відповідають малі відхилення на виході поблизу робочої точки, така нелінійність може бути розкладена в ряд Тейлора або Маклорена (рис. 2.1):

$$y = y_0 + \Delta y = y(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \\ + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots$$



2.2. Формалізація диференціальних рівнянь

Формалізація диференціальних рівнянь виконується у чотири етапи після виключення додаткових змінних:

- розділення змінних. Складові вихідної координати об'єднують у лівій частині рівняння, а від зовнішніх впливів – у правій;
- розташування членів рівняння у порядку зменшення степенів похідних змінних;

Рисунок 2.1 – До принципу малих відхилень

- позбавлення від коефіцієнта при нульовій похідній керованої величини;
- перехід від фізичних параметрів до динамічних:

k – коефіцієнт передачі, може мати різну розмірність;

T – стала часу, має розмірність [с], міра інерційності елемента.

Під канонічною формою диференціального рівняння системи елементів будь-якого об'єкта розуміють рівняння вигляду

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 \frac{d^m f}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_m f,$$

де x – вихідна (керована) величина; f – вхідна величина (зовнішній вплив);
 a_i, b_i – комбінації сталих часу.

У нормалізованому вигляді $a_n = 1$, а $b_m = k$.

Завдання для індивідуальної роботи наведені у Дод. 1.

Рекомендується наступний порядок дій:

- позначити струми гілок;
- скласти рівняння для входу і виходу схеми, її вузлів;
- видалити із рівнянь інтеграли струмів (шляхом диференціювання);
- вивести залежність виходу від входу з виключенням проміжних змінних (струмів);
- скомпонувати диференціальні рівняння у канонічну форму.

При складанні рівнянь використовуються закони Кірхгофа та закон Ома для частки електричного кола (падіння напруги на елементі під дією струму крізь цей елемент):

$$U_R = R \cdot i; \quad U_C = \frac{1}{C} \cdot \int i dt; \quad U_L = L \frac{di}{dt}.$$

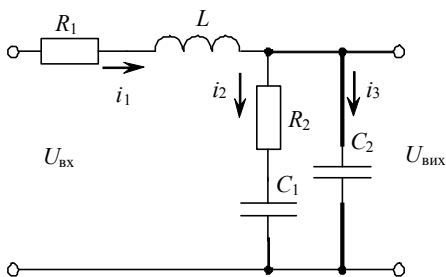


Рисунок 2.2 – Приклад задачі для індивідуального завдання 1

На рис. 2.2 наведено приклад типової задачі для індивідуального завдання 1: за схемою пасивного чотириполісника отримати диференціальне рівняння у канонічній формі.

Позначимо струми гілок схеми:

- i_1 – гілка, що складається із R_1 та L ;

- i_2 – гілка, що складається із R_2 та C_1 ;
 - i_3 – гілка, що складається із C_2 .
- Сума струмів i_2 та i_3 дає струм i_1 :

$$i_1 = i_2 + i_3. \quad (2.1)$$

Рівняння для входу схеми:

$$U_{\text{вх}} = R_1 \cdot i_1 + L \cdot \frac{di_1}{dt} + U_{\text{вих}}. \quad (2.2)$$

Рівняння для виходу схеми:

$$U_{\text{вих}} = R_2 \cdot i_2 + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_2 dt; \quad (2.3)$$

$$U_{\text{вих}} = \frac{1}{C_2} \cdot \int i_3 dt. \quad (2.4)$$

Маємо два рівняння для виходу – відповідно до двох гілок зі струмами i_2 та i_3 . Обидва рівняння мають струми під інтегралами – диференціюємо:

$$\frac{dU_{\text{вих}}}{dt} = R_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot i_2;$$

$$\frac{dU_{\text{вих}}}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot i_3.$$

Знаходимо струми i_2 , i_3 :

$$i_2 = C_1 \cdot \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} - R_2 \cdot C_1 \cdot \frac{di_2}{dt};$$

$$i_3 = C_2 \cdot \frac{dU_{\text{вих}}}{dt}.$$

Оскільки $\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$, маємо:

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} - C_2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2};$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = (C_1 + C_2) \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} - R_2 C_1 \left(\frac{di_1}{dt} - C_2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} \right).$$

Звідси виражаємо $\frac{di_1}{dt}$:

$$\frac{di_1}{dt} = C_2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} - \frac{1}{R_2 C_1} i_1.$$

Підставляємо отримане $\frac{di_1}{dt}$ у рівняння (2.2) та виражаємо i_1 :

$$U_{\text{вх}} = R_1 i_1 + L C_2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + L \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} - \frac{L}{R_2 C_1} i_1 + U_{\text{вих}};$$

$$i_1 = \frac{R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} U_1 - \frac{L C_2 R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} - \frac{L R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} - \frac{R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} U_{\text{вих}}.$$

Беремо похідну отриманого рівняння та підставляємо у рівняння (2.2), приводимо отриманий результат до нормалізованого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} = & \frac{R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} - \frac{L C_2 R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{d^3 U_{\text{вих}}}{dt^3} - \frac{L R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1} \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} - \\ & - \frac{R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{LLC_1C_2R_2}{R_1R_2C_1-L} \frac{d^3U_{\text{вих}}}{dt^3} + \frac{LC_2R_1R_2C_1+LL(C_1+C_2)}{R_1R_2C_1-L} \frac{d^2U_{\text{вих}}}{dt^2} + \\
& + \frac{LR_1(C_1+C_2)+LR_2C_1}{R_1R_2C_1-L} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} + \frac{L}{R_1R_2C_1-L} U_{\text{вих}} = \\
& = \frac{LR_2C_1}{R_1R_2C_1-L} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} + \frac{L}{R_1R_2C_1-L} U_{\text{вх}}; \\
& LC_1C_2R_2 \frac{d^3U_{\text{вих}}}{dt^3} + (C_2R_1R_2C_1+L(C_1+C_2)) \frac{d^2U_{\text{вих}}}{dt^2} + \\
& + (R_1(C_1+C_2)+R_2C_1) \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} + U_{\text{вих}} = R_2C_1 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} + U_{\text{вх}}.
\end{aligned}$$

Вводимо заміни:

$$\begin{aligned}
T_1^3 &= LC_1C_2R_2; \\
T_2^2 &= C_2R_1R_2C_1+L(C_1+C_2); \\
T_3 &= R_1(C_1+C_2)+R_2C_1; \\
T_4 &= R_2C_1.
\end{aligned}$$

Остаточнo диференціальне рівняння у нормалізованому вигляді запишеться так:

$$T_1^3 \frac{d^3U_{\text{вих}}}{dt^3} + T_2^2 \frac{d^2U_{\text{вих}}}{dt^2} + T_3 \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} + U_{\text{вих}} = T_4 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} + U_{\text{вх}}. \quad (2.5)$$

2.3. Векторно-матрична форма математичних моделей

В основі векторно-матричної форми лежить подання диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + b_{11}U_1 + \dots \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + b_{21}U_1 + \dots \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + b_{n1}U_1 + \dots \end{cases}$$

$$\dot{X} = AX + BU,$$

$\dot{X}$ – вектор-матриця похідних координат:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix}.$$

X – вектор-матриця;

A і B – матриці коефіцієнтів:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{23} & \dots & b_{3m} \end{bmatrix}.$$

Існує інший вид векторно-матричної форми – структурне подання рівнянь (рис. 2.3).

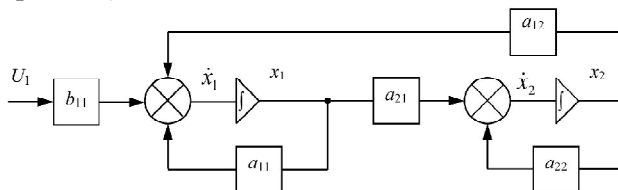


Рисунок 2.3 – Структурне подання векторно-матричної форми ММ

Якщо диференційне рівняння вихідних координат не вдалося написати, то додають рівняння виходу:

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$Y = C^T X.$$

2.4. Перехід від векторно-матричної форми до канонічної і навпаки

Канонічна форма має наступний вигляд:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = bU.$$

Для переходу від канонічної форми до векторно-матричної використовують метод зниження порядків рівняння $x = x_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = -\frac{a_n}{a_0} x_1 - \frac{a_{n-1}}{a_0} x_2 - \frac{a_{n-2}}{a_0} x_3 - \dots - \frac{a_4}{a_0} x_{n-1} + \frac{b}{a_0} U; \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + bU.$$

Як приклад візьмемо ту саму задачу, що і минулого разу.

Для розв'язання задачі необхідно виразити з системи диференціальних рівнянь похідні через інші параметри. Для цього складемо початкову систему рівнянь:

$$\begin{cases} U_{\text{вх}} = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + U_{\text{вих}} \\ U_{\text{вих}} = R_2 i_2 + \frac{1}{C_1} \int i_2 dt \\ U_{\text{вих}} = \frac{1}{C_2} \int i_3 dt \\ i_1 = i_2 + i_3. \end{cases}$$

Як бачимо, маємо змогу вільно виразити $\frac{di_1}{dt}$, а також $\frac{di_2}{dt}$ через похідну вихідної характеристики, яка легко виражається через струм i_3 :

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L} U_{\text{вх}} + \frac{1}{L} U_{\text{вих}} - \frac{R_1}{L} i_1 \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} i_3 - \frac{1}{R_2 C_1} i_2 \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L} U_{\text{вх}} - \frac{R_1}{L} i_1 - \frac{1}{L} U_{\text{вих}} - \frac{1}{R_2 C_2} i_3 + \frac{1}{R_2 C_1} i_2 \\ \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_3 \end{cases}$$

За наявними даними будуюмо схему, зображену на рис. 2.4.

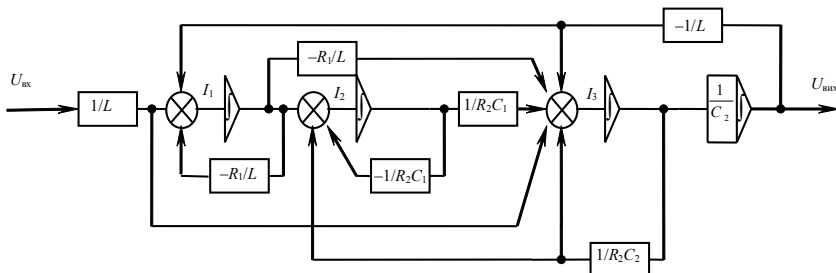


Рисунок 2.4 – Схема векторно-матричної форми подання моделі

3. ОПЕРАТОРНА ФОРМА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Сутність операторного методу полягає у переході від функцій часу $[f(t)]$, які називаються оригіналами, до функцій комплексної змінної $[f(p)]$, які називаються зображеннями.

Існує кілька видів перетворення, але найбільш поширеними є перетворення Лапласа і як його окремий випадок – перетворення Фур'є.

L – процедура перетворення (її символ):

$$L\{x(t)\},$$

де $x(t)$ – функція-оригінал:

$$x(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt.$$

Оператор p – незалежна комплексна змінна:

$$p = d + j\omega,$$

де d – ціла частина; ω – коефіцієнт при уявній частині.

У перетвореннях Фур'є з оператора Лапласа видалена речовинна частина:

$$(d = 0; \quad p = j\omega).$$

3.1. Властивості перетворень Лапласа

1. Властивість лінійності: $L\{ax_1'(t) + bx_2(t)\} = aL\{x_1(t)\} + bL\{x_2(t)\}.$

2. Властивість диференціювання: $L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = p^n x(p).$

3. Властивість інтегрування: $L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = p^n x(p).$

4. Зв'язок початкових та кінцевих значень: $x(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} px(p)$
 $x(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} px(p).$

Існують також зворотні перетворення Лапласа (Фур'є), які дозволяють за відомою функцією зображення знайти функцію-оригінал:

$$x(t) = L^{-1}\{x(p)\} = \int_{-d-j\omega}^{d+j\omega} x(p)e^{pt} dp.$$

3.2. Поняття передаточної функції. Властивості передаточної функції

Під передаточною функцією розуміють відношення вихідної координати, перетвореної за Лапласом, до вхідної координати при нульових початкових умовах:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (3.1)$$

Знаменник передаточної функції (3.1) є *характеристичним поліномом* системи. Якщо його прирівняти до нуля, отримаємо *характеристичне рівняння* САК.

Властивості передаточної функції:

1) передаточна функція є дрібно-раціональною функцією відносно p (чисельник менше знаменника);

2) усі коефіцієнти – дійсні, речовинні числа, оскільки визначаються через параметри реальних елементів;

3) корені чисельника та знаменника у загальному вигляді є комплексними числами, попарно-сполученими;

4) для реальних систем корені знаменника повинні бути від'ємними, речовинними або комплексними числами з від'ємними речовинними частинами.

Як приклад візьмемо ту саму задачу (рис. 2.2), що й минулого разу.

Для того щоб знайти передаточну функцію $W(p)$, необхідно знайти $Z_{\text{вх}}$ та $Z_{\text{вих}}$:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{Z_{\text{вих}}(p)}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2};$$

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_{\text{вих}} = Z_2.$$

Z_1 та Z_2 знаходимо із заданої схеми:

$$Z_1 = R_1 + Lp;$$

$$Z_2 = \frac{\left(R_2 + \frac{1}{C_1 p}\right) \cdot \frac{1}{C_2 p}}{R_2 + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p}} = \frac{R_2 C_1 p + 1}{p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2)} = Z_{\text{вих}}.$$

Отже,

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + Z_2 = \frac{(R_1 + Lp) \cdot p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2) + R_2 C_1 p + 1}{p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2)}.$$

Знаходимо $W(p)$:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n};$$

$$W(p) = \frac{Z_{\text{вих}}(p)}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{(R_2 C_1 p + 1)}{p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2)} \times \\ \times \frac{p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2)}{(R_1 + Lp)(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2) + R_2 C_1 p + 1};$$

$$W(p) = \frac{R_2 C_1 p + 1}{LR_2 C_1 C_2 p^3 + [R_1 R_2 C_1 C_2 + L(C_1 + C_2)]p^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1)p + 1}.$$

Вводимо заміни:

$$T_1^3 = LC_1 C_2 R_2;$$

$$T_2^3 = C_2 R_1 R_2 C_1 + L(C_1 + C_2);$$

$$T_3 = R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1;$$

$$T_4 = R_2 C_1.$$

Тоді остаточно:

$$W(p) = \frac{T_4 p + 1}{T_1^3 p^3 + T_1^2 p^2 + T_3 p + 1}.$$

Використовуючи перехід $p \rightarrow \frac{d}{dt}$ і враховуючи, що $W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}$,

можливо виконати перехід до рівняння (2.5). У тому разі, якщо всі перетворення були виконані вірно, результати повинні збігатися.

3.3. Еквівалентні перетворення структурних схем

Структурна схема САК у найпростішому випадку будується з елементарних динамічних ланок. Але кілька елементарних ланок можуть бути замінені одною зі складною передаточною функцією. Для цього існують правила еквівалентного перетворення структурних схем. Розглянемо можливі методи перетворення.

1. Послідовне з'єднання (рис. 3.1) – вихідна величина попередньої ланки подається на вхід наступної.

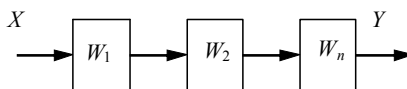


Рисунок 3.1 – Послідовне з'єднання ланок

При цьому можна записати, що

$$y_1 = W_1 \cdot y_0; y_2 = W_2 \cdot y_1; \dots; y_n = W_n \cdot y_{n-1} \Rightarrow \\ y_n = W_1 \cdot W_2 \dots W_n \cdot y_0 = W_{\text{екв}} \cdot y_0,$$

$$\text{де } W_{\text{екв}} = \prod_{i=1}^n W_i.$$

Таким чином ланцюг послідовно з'єднаних ланок перетворюється на еквівалентну ланку з передаточною функцією, рівною добутку передаточних функцій окремих ланок.

2. Паралельно-узгоджене (рис. 3.2) з'єднання – на вхід кожної ланки подається один і той самий сигнал, а вихідні сигнали додаються.

Тоді

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n = \\ = (W_1 + W_2 + \dots + W_n) y_0 = W_{\text{екв}} \cdot y_0,$$

$$\text{де } W_{\text{екв}} = \sum_{i=1}^n W_i.$$

Тобто, ланцюг ланок, з'єднаний паралельно-узгоджено, перетворюється на ланку з передаточною функцією, рівною сумі передаточних функцій окремих ланок.

3. Паралельно-зустрічне з'єднання (рис. 3.3) – ланка, охоплена додатним або від'ємним зворотним зв'язком. Фрагмент ланцюга, по якому йде сигнал у зворотному напрямі по відношенню до системи у цілому, називається ланцюгом зворотного зв'язку з передаточною функцією W_{33} . Окремий випадок зворотного зв'язку – повний (100%-й) зворотний зв'язок, при якому $W_{33} = 1$.

При цьому для зворотного зв'язку

$$y = W_{\text{п}} u; y_1 = W_{33} y; u = y_0 - y_1,$$

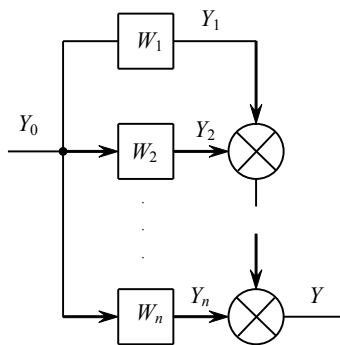


Рисунок 3.2 – Паралельно-узгоджене з'єднання ланок

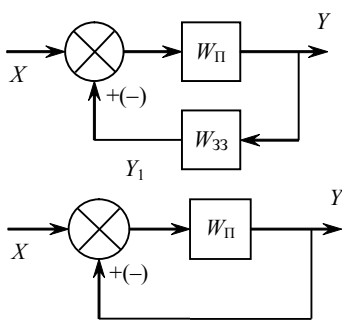


Рисунок 3.3 – Паралельно-зустрічне з'єднання ланок

тому

$$y = W_{\Pi} y_0 - W_{\Pi} y_1 = W_{\Pi} y_0 - W_{\Pi} W_{33} y \Rightarrow$$

$$y(1 + W_{\Pi} W_{33}) = W_{\Pi} y_0 \Rightarrow y = W_{\text{екв}} y_0,$$

де $W_{\text{екв}} = \frac{W_{\Pi}}{1 \pm W_{\Pi} W_{33}}$ (від'ємний (+) та додатний (-) 33).

Якщо $W_{33} = 1$, то зворотний зв'язок називається одиночним, тоді

$$W_{\text{екв}} = W / (1 \pm W_{\Pi}).$$

Якщо багатоконтурна система має перехресні зв'язки, то для розрахунку еквівалентної передаточної функції необхідні додаткові правила.

4. При переносі суматора через ланку (рис. 3.4) у напрямі сигналу необхідно додати ланку із передаточною функцією тієї ланки, через яку переноситься суматор.

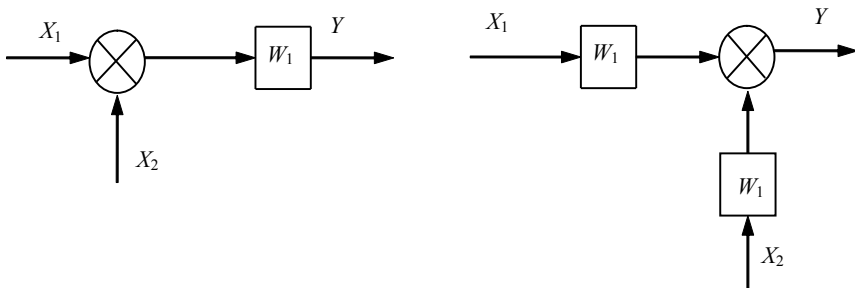


Рисунок 3.4 – Перенос суматора через ланку

Якщо суматор переноситься проти напрямку сигналу, то додається ланка з передаточною функцією, зворотною від передаточної функції ланки, через яку переносимо суматор (рис. 3.5).

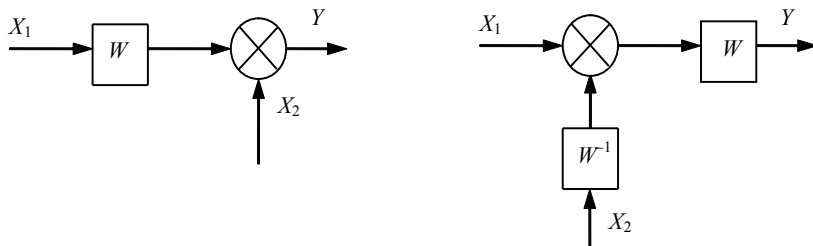


Рисунок 3.5 – Перенос суматора проти напрямку сигналу

5. При перенесенні вузла через ланку (рис. 3.6) у напрямку сигналу додається ланка із передаточною функцією ланки, через яку переносимо вузол. Якщо вузол переноситься проти напрямку сигналу, то додається ланка із передаточною функцією, через яку переноситься вузол.

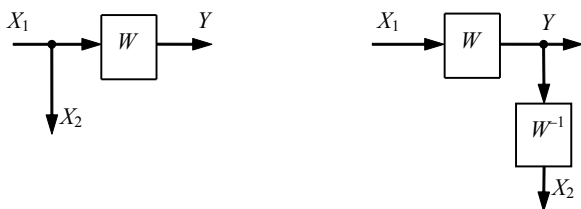


Рисунок 3.6 – Перенос вузла через ланку

6. Для вузлів та суматорів можливі взаємні перестановки: вузли можна міняти місцями; суматори також можна міняти місцями; при переносі вузла через суматор необхідно додати зрівнювальний елемент або суматор (рис. 3.7).

У всіх випадках переносу елементів структурної схеми виникають нееквівалентні фрагменти зв'язку, тому потрібно бути обачним у місцях зняття вихідного сигналу.

При еквівалентних перетвореннях однієї і тієї ж структурної схеми можуть бути отримані різні передаточні функції системи по різних входах і виходах.

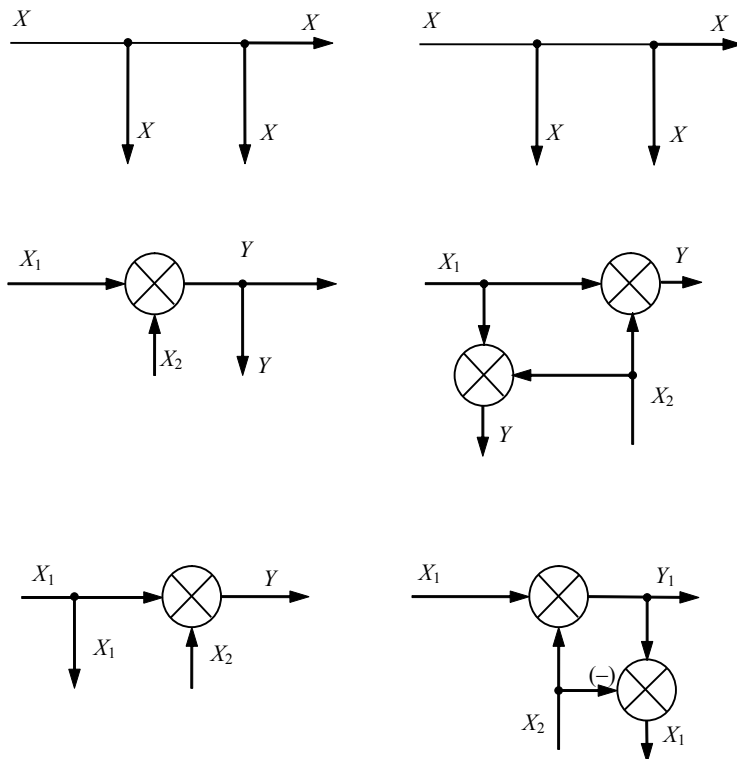


Рисунок 3.7 – Взаємні перестановки вузлів і суматорів

Варіанти завдань наведені у Додатку 2.

Для повнішого засвоєння матеріалу розглянемо приклад. Треба перетворити схему, зображену на рис. 3.8.

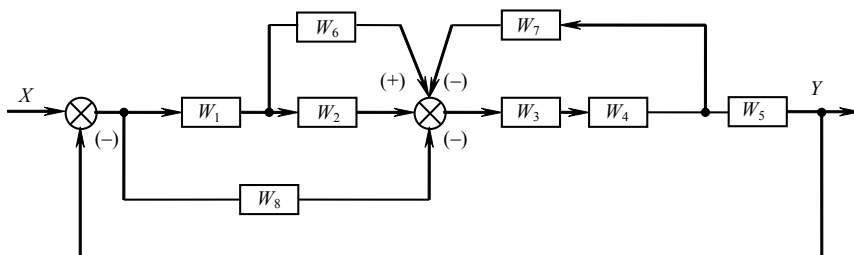


Рисунок 3.8 – Приклад для перетворення

Блоки W_6 , W_2 утворюють паралельний зв'язок, тому запишемо, що $W_1 = W_2 + W_6$.

Блоки W_3 , W_4 з'єднані послідовно та охоплені зворотним зв'язком через блок W_7 : $W_{II} = \frac{W_3 W_4}{1 + W_3 W_4 W_7}$ (рис. 3.9).

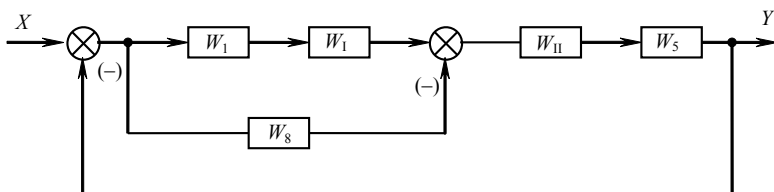


Рисунок 3.9 – Перша стадія

Блоки W_1 і W_1 із блоком W_8 утворюють паралель: $W_{III} = W_1 W_1 - W_8$ (рис. 3.10).

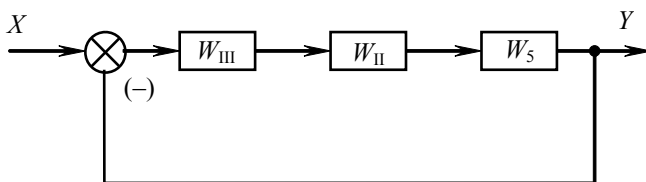


Рисунок 3.10 – Кінцева стадія

І, нарешті, отримуємо еквівалентну передаточну функцію розімкненої та замкненої систем:

$$W_P = W_{III} W_{II} W_5,$$

$$W_3 = \frac{W_{III} W_{II} W_5}{1 + W_{III} W_{II} W_5}.$$

4. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

4.1. Загальні положення

Перетворення Фур'є є окремим випадком перетворення Лапласа при $p = j\omega$. При цьому виконується заміна змінної x одночасним переходом від зображень до частотних характеристик.

Формальний перехід відбувається при заміні оператора Лапласа p на змінну $j\omega$, де j – уявна одиниця, а ω – колова частота. Усі теореми та властивості перетворення Лапласа справедливі і для перетворення Фур'є (в частотній ділянці).

Передаточну функцію $W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ називають частотною, або

комплексною (КПФ).

Частотна передаточна функція $W(j\omega)$ є комплексною функцією від змінної ω . Її, як і будь-яке комплексне число, можна записати в алгебраїчній та показниковій формах:

$$W(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

де $u(\omega) = \operatorname{Re}\{W(j\omega)\}$ – дійсна частина КПФ, яка називається *дійсною частотною функцією*; графік цієї функції називається *дійсною частотною характеристикою* (ДЧХ);

$v(\omega) = \operatorname{Im}\{W(j\omega)\}$ – уявна частина КПФ, яка називається *уявною частотною функцією*, а її графік – *уявною частотною характеристикою* (УЧХ);

$A(\omega) = |W(j\omega)|$ – модуль КПФ – *амплітудна частотна функція*,

причому $A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)}$. Графік цієї функції називають *амплітудною частотною характеристикою* (АЧХ);

$\varphi(\omega) = \text{Arg}\{W(j\omega)\}$ – аргумент КПФ, який називають *фазовою частотною функцією*:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{v(\omega)}{u(\omega)}.$$

Графік цієї функції називається *фазовою частотною характеристикою* (ФЧХ).

Фізичне значення АЧХ і ФЧХ.

Якщо на вхід системи подати гармонічний сигнал частоти ω : $x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, то на виході отримаємо гармонічний сигнал тієї ж частоти ω : $y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, амплітуда і початкова фаза якого може відрізнятися від амплітуди та початкової фази вхідного сигналу (рис. 4.1).

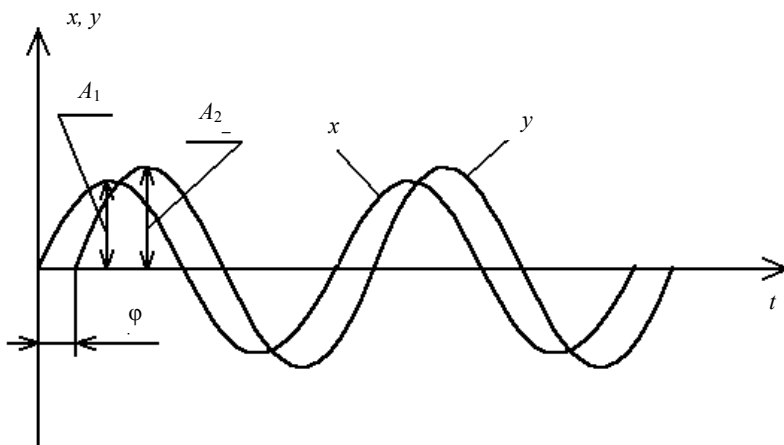


Рисунок 4.1 – До пояснення фізичного змісту частотних характеристик

АЧХ – це залежність зміни відношення амплітуди вихідного сигналу A_2 до амплітуди вхідного сигналу A_1 від частоти ω вхідного сигналу, тобто

$$A(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)}.$$

ФЧХ – це залежність зсуву по фазі між вхідним та вихідним сигналами від частоти ω вхідного сигналу, тобто

$$\varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega).$$

Саму частотну передаточну функцію $W(j\omega)$ називають також *амплітудно-фазовою частотною функцією*, а її графік на комплексній площині – *амплітудно-фазовою частотною характеристикою* (АФЧХ).

На комплексній площині (рис. 4.2) $W(j\omega)$ визначає вектор $\overline{OC}$, довжина якого дорівнює $A(\omega)$, а аргумент (кут між вектором та дійсною позитивною напіввіссю) – $\varphi(\omega)$.

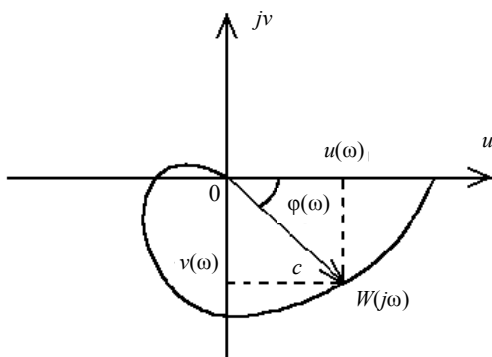


Рисунок 4.2 – Амплітудно-фазова частотна характеристика

Крива, яку описує кінець вектора $W(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ , називається АФЧХ.

Окрім перелічених частотних характеристик (АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ДЧХ, УЧХ), при аналізі та синтезі САК широко застосовуються також логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ):

ЛАЧХ – логарифмічна амплітудна частотна характеристика;

ЛФЧХ – логарифмічна фазова частотна характеристика;

ЛЧХ – це ті ж частотні характеристики системи, але побудовані в іншій системі координат:

– по осі абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі: на поділці, що відповідає значенню $\lg(\omega)$, пишуть значення ω ; одиницею виміру служить *декада* – інтервал, на якому частота змінюється у десять раз;

– по осі ординат значення $A(\omega)$ відкладають у децибелах (дБ), а значення $\varphi(\omega)$ – у градусах.

Логарифмічною амплітудною частотною характеристикою САК називають АЧХ цієї системи, виражену у децибелах та побудовану в логарифмічному масштабі частот.

ЛАЧХ та АЧХ пов'язані співвідношенням

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|.$$

Логарифмічною фазовою частотною характеристикою САК називають залежність фази φ , виражену в градусах чи радіанах, від частоти у логарифмічному масштабі.

Системи координат, в яких будуються ЛАЧХ та ЛФЧХ, показані на рис. 4.3.

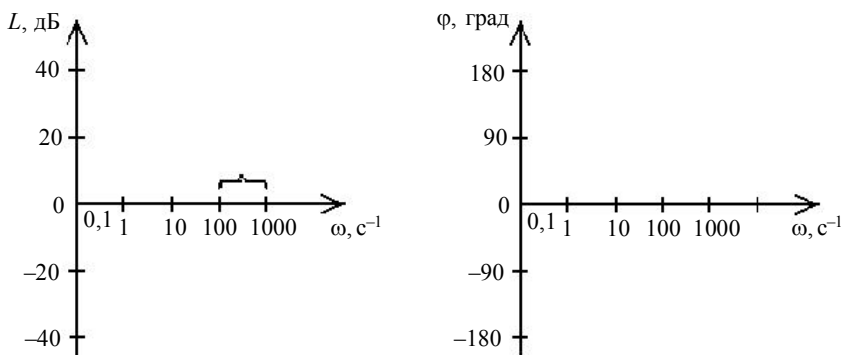


Рисунок 4.3 – Системи координат логарифмічних частотних характеристик ЛАЧХ та ЛФЧХ

Логарифмічні характеристики мають переваги перед звичайними АЧХ та ФЧХ: вони більш наочні та прості у побудові.

Отже, після вивчення попереднього матеріалу можна зробити такий **висновок**.

Класичний метод дослідження лінійних САК ґрунтується на складанні та подальшому розв'язуванні диференціальних рівнянь, які пов'язують вихідну координату $y(t)$ із вхідним впливом $x(t)$. Диференціальні рівняння – це *перша форма математичної моделі САК*. Через складність реальних систем складання та розв'язання цих рівнянь є труднощом задачею, що потребує застосування ЕОМ.

Мета дослідження спрощується при введенні *другої форми математичної моделі* – передаточної функції за Лапласом, оскільки перетворення Лапласа дозволяє замінити диференціальні рівняння на алгебраїчні.

Третя форма математичної моделі – частотні характеристики – дозволяє розв'язувати алгебраїчні рівняння графічно, що також спрощує задачу. Крім того, частотні характеристики дають ясне фізичне тлумачення властивостей системи.

4.2. Характеристики типових структурних ланок

4.2.1. Поняття динамічної ланки

Реальні САК – це дуже складні системи, до складу яких входять різноманітні елементи. Це робить задачу аналізу та синтезу САК дуже складною. Тому до курсу ТАК вводиться поняття *динамічної ланки* – математичної частини системи (незалежно від фізичної природи та конструкції), що описується рівнянням певного типу. Це дозволяє звести багато різних реальних елементів САК до обмеженого числа типових ланок, а всі реальні САК розглядати як системи, що складаються зі з'єднаних між собою типових ланок.

Оскільки рівняння реальних елементів складаються на основі законів, виражених рівняннями не вище другого ступеня (закони Кірхгофа, другий закон Ньютона і т. д.), то вони не можуть мати ступінь вище другого. Тому *типовою динамічною ланкою* називають частину системи, яку можна описати диференціальним рівнянням не вище другого ступеня.

До такого визначення можна підійти й математично.

У передаточній функції (3.1) системи коефіцієнти a_i та b_i визначаються параметрами цієї системи, тому вони можуть бути тільки дійсними, а значить, співмножники чисельника та знаменника можна розкласти на лінійні та квадратичні множники наступного вигляду:

$$k; \quad kp; \quad \frac{k}{p}; \quad \frac{k}{ap+b}; \quad \frac{k}{ap^2+bp+c}; \quad ap+b; \quad ap^2+bp+c.$$

Тому передаточну функцію $W(p)$ можна записати як добуток простих множників та простих дробів.

Звідси можна дати ще одне визначення елементарної або типової динамічної ланки: *типовою динамічною ланкою* називається елемент системи, передаточна функція якого має вигляд простого множника чи простого дробу.

У курсі ТАК виділяють: пропорційну, інтегруючу, диференціальну, аперіодичну, коливальну, консервативну, форсуючу першого та другого ступеня, ланку запізнення та деякі інші (немінімально-фазові) ланки. Розглянемо основні ланки та їх характеристики.

4.2.2. Пропорційна ланка

Пропорційною (підсилювальною, безінерційною) називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k \cdot x(t).$$

Використовуючи властивості перетворення Лапласа, запишемо операційне рівняння:

$$U_{\text{вих}}(p) = k \cdot U_{\text{вх}}(p).$$

Звідси передаточна функція ланки за Лапасом

$$W(p) = U_{\text{вих}}(p)/U_{\text{вх}}(p) = k.$$

Комплексна передаточна функція та частотні функції ланки мають вигляд:

$$W(j\omega) = k; \quad u(\omega) = 0; \quad v(\omega) = k;$$

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} = k;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(v(\omega)/u(\omega)) = 0.$$

На рис. 4.4 побудовано відповідні частотні характеристики.

Часові функції та відповідні характеристики (рис. 4.5) мають вигляд:

$$h(t) = k \cdot 1(t); \quad \omega(t) = \dot{h}(t) = k \cdot \delta(t) = \delta(t).$$

Для пропорційної ланки характерна відсутність накопичувачів енергії, і тому вона миттєво копіює вхідний сигнал, змінюючи його по величині у k разів.

Прикладами елементів, які можуть бути описані пропорційною ланкою, є редуктори, трансформатори, підсилювачі тощо.

Ідеальних підсилювальних елементів не існує, але таким можна вважати елемент, інерційність якого не відбивається на поведінці САК.

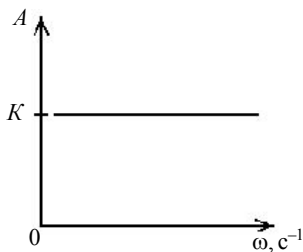
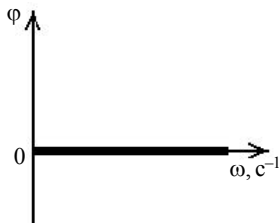
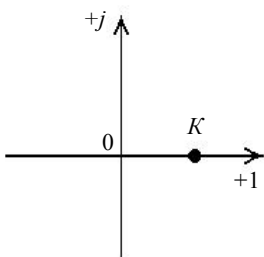
**a****б****в**

Рисунок 4.4 – Частотні характеристики пропорційної ланки:

a – АЧХ; **б** – ФЧХ; **в** – АФЧХ

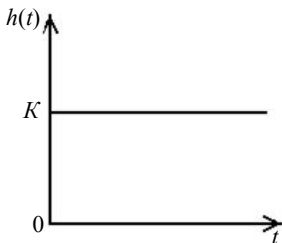
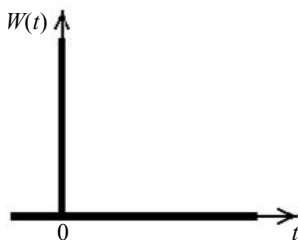
**a****б**

Рисунок 4.5 – Характеристики пропорційної ланки:

a – перехідна; **б** – імпульсна перехідна

4.2.3. Диференціальна ланка

Диференціальною називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}.$$

Вихідний сигнал пропорційний швидкості зміни вхідного сигналу. Операційне рівняння та передаточна функція ланки:

$$U_{\text{вих}}(p) = k \cdot p \cdot U_{\text{вх}}(p); \quad W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = k \cdot p.$$

Частотні функції мають такий вигляд:

$$W(j\omega) = k \cdot j\omega; \quad u(\omega) = 0; \quad v(\omega) = k\omega;$$

$$A(\omega) = k\omega; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{k\omega}{0} = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Зсув фази не залежить від частоти і дорівнює $\pi/2$. АФЧХ ланки збігається з позитивною уявною піввіссю.

Частотні характеристики побудовано на рис. 4.6.

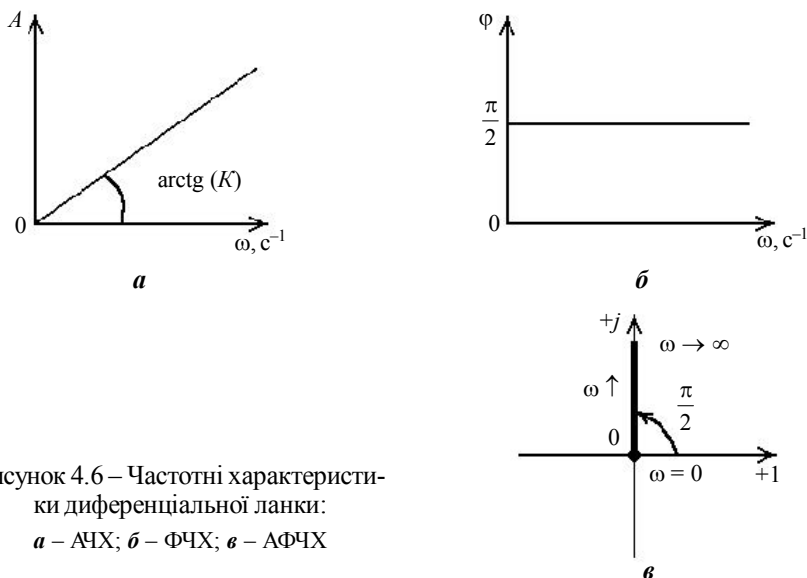


Рисунок 4.6 – Частотні характеристики диференціальної ланки:

a – АЧХ; $б$ – ФЧХ; $в$ – АФЧХ

Запишемо логарифмічну амплітудну частотну характеристику ланки:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k\omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega;$$

$$\text{при } \omega = 1 \quad L(\omega) = 20 \lg k \quad (\text{дБ});$$

$$\text{при } \omega = 10 \quad L(\omega) = 20 \lg k + 20 \quad (\text{дБ});$$

$$\text{при } \omega = 100 \quad L(\omega) = 20 \lg k + 40 \quad (\text{дБ}),$$

тобто ЛАЧХ являє собою пряму, що проходить через точку з координатами $\omega = 1$; $L(\omega) = 20 \lg k$ та має ухил $+20$ дБ/дек (плюс двадцять децибел на декаду). Це вказує на те, що логарифмічна амплітуда збільшується на 20 дБ за одну декаду (рис. 4.7).

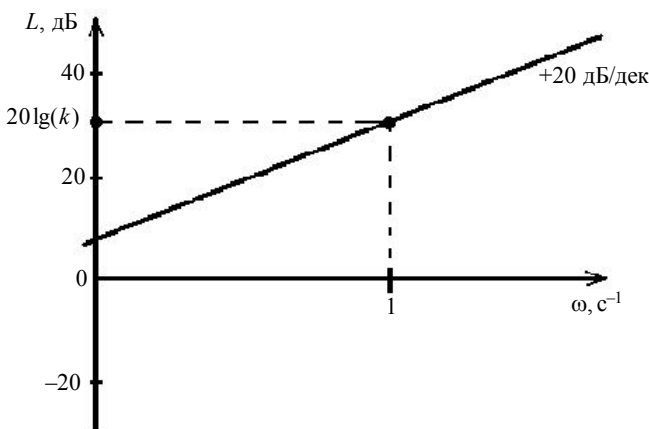


Рисунок 4.7 – ЛАЧХ диференціальної ланки

Часові функції та характеристики диференціальної ланки (рис. 4.8):

$$h(t) = k \frac{dl(t)}{dt} = k \cdot \delta(t); \quad w(t) = k \cdot \dot{\delta}(t).$$

Прикладами диференціальних ланок можуть бути спідометр, тахогенератор (якщо вхідна величина – кут повороту вала).

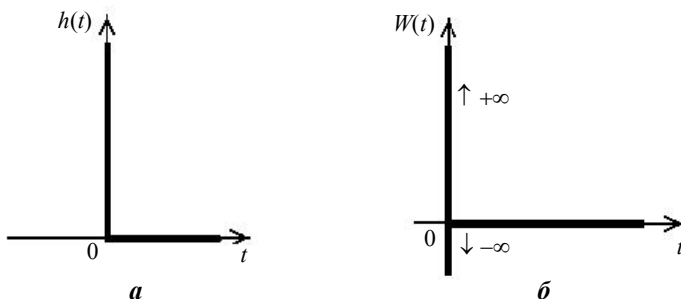


Рисунок 4.8 – Характеристики диференціальної ланки:

a – перехідна; *б* – імпульсна перехідна

4.2.4. Інтегруюча ланка

Інтегруючою називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k \int_0^t x(t) dt.$$

Звідси передаточна функція ланки:

$$U_{\text{вих}}(p) = k \cdot \frac{U_{\text{вх}}(p)}{p}; \quad W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{p}.$$

КПФ та частотні функції мають наступний вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}; \quad u(\omega) = 0; \quad v(\omega) = -\frac{k}{\omega};$$

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} = \frac{k}{\omega};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(-\frac{k}{\omega \cdot 0}\right) = -\arctg(\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Зсув фази не залежить від частоти і дорівнює $\pi/2$. АФЧХ ланки співпадає з негативною уявною піввіссю:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega,$$

тобто ЛАЧХ являє собою пряму, що проходить через точку з координатами $\omega = 1$; $L(\omega) = 20 \lg k$ та має ухил -20 дБ/дек (мінус двадцять децибел на декаду). Вона перетинає вісь частот при $\omega = k$ (рис. 4.9, з).

Часові функції ланки:

$$h(t) = k \int_0^t 1(t) dt = k \cdot t; \quad w(t) = \dot{h}(t) = k \cdot 1(t).$$

Відповідні їм характеристики інтегруючої ланки побудовані на рис. 4.9.

Інтегруючі ланки відповідають елементам, в яких при постійному вхідному впливі встановлюється постійна швидкість зміни вихідної координати: безінерційний двигун постійного струму з незалежним збудженням (ДПС НЗ), якщо вихідна величина – кут повороту; редуктор, у якого вхідна величина – кутова швидкість, а вихідна – кут повороту вала.

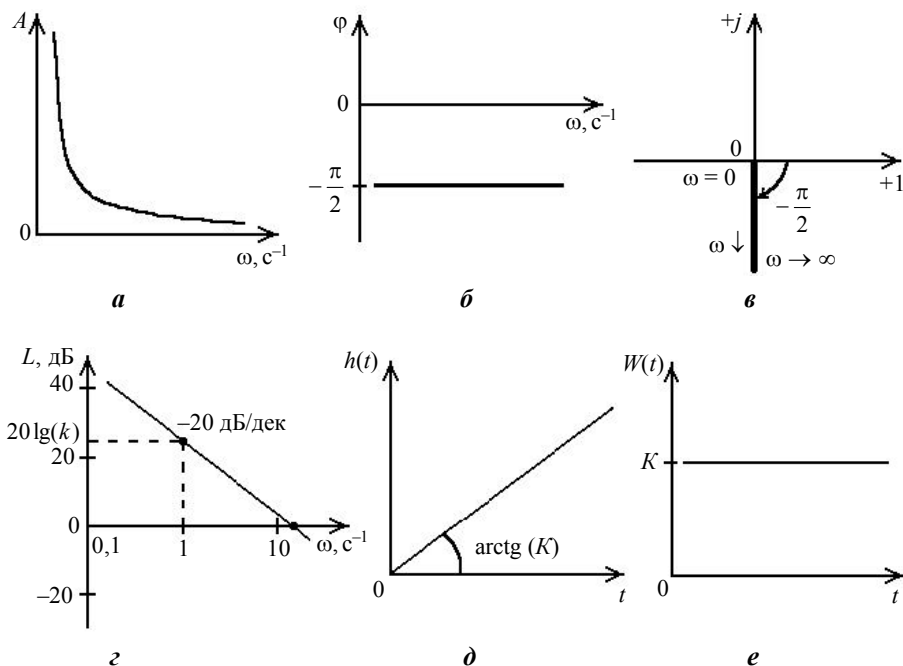


Рисунок 4.9 – Частотні та часові характеристики інтегруючої ланки:

a – АЧХ; *б* – ФЧХ; *в* – АФЧХ; *з* – ЛАЧХ; *д* – перехідна; *е* – імпульсна перехідна

4.2.5. Аперіодична ланка

Аперіодичною називається ланка, яка описується рівнянням першого ступеня:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t).$$

Цю ланку називають також інерційною. Вона характеризується двома параметрами: сталою часу T (інерційні властивості ланки) та коефіцієнтом передачі k (підсилювальні властивості).

Операційне рівняння має вигляд:

$$T \cdot p \cdot U_{\text{вих}}(p) + U_{\text{вих}}(p) = k \cdot U_{\text{вх}}(p), \quad (T \cdot p + 1) \cdot U_{\text{вих}}(p) = k \cdot U_{\text{вх}}(p).$$

Звідси передаточна функція ланки

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{T \cdot p + 1}.$$

Частотні функції ланки мають наступний вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega} = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$u(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \quad v(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = -\arctg(T\omega);$$

$$\text{при } \omega = 0 \quad \varphi(\omega) = 0;$$

$$\text{при } \omega \rightarrow \infty \quad \varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{при } \omega = \frac{1}{T} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{4}.$$

АФЧХ ланки являє собою півколо діаметра k .

Побудуємо ЛАЧХ аперіодичної ланки:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2};$$

при $\omega \ll 1/T$ (ділянка низьких частот) під коренем можна знехтувати другим доданком, а при $\omega \gg 1/T$ (ділянка високих частот) – першим доданком, тобто:

$$L_1(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg 1 = 20 \lg k \text{ – горизонтальна пряма;}$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega \text{ – пряма з ухилом } -20 \text{ дБ/дек.}$$

Обидві прямі перетинаються в точці, яку можна знайти із виразу

$$L_1(\omega) = L_2(\omega), \text{ тобто}$$

$$20 \lg k = 20 \lg k - 20 \lg T\omega.$$

Звідси

$$\lg T\omega = 0; \quad T\omega = 1; \quad \omega = \frac{1}{T}.$$

Частота $\omega = 1/T$, в якій перетинаються дві прямі (асимптоти), називається *частотою спряження*.

Побудована при таких припущеннях ЛАЧХ називається асимптотичною. Вона є наближеною. Точна та наближена ЛАЧХ найбільше відрізняються в частоті спряження (відхилення досягає 3 дБ).

Частота, при якій ЛАЧХ перетинає вісь частот ($L = 0$ дБ), називається *частотою зрізу* $\omega_{\text{зр}}$. Для цієї частоти маємо:

$$L(\omega_{\text{зр}}) = 20 \lg A(\omega_{\text{зр}}) = 20 \lg \frac{A_2(\omega_{\text{зр}})}{A_1(\omega_{\text{зр}})} = 0;$$

звідси $A_2/A_1 = 1$, тобто $A_2 = A_1$.

На частоті зрізу амплітуди вхідного та вихідного сигналів рівні між собою.

Логарифмічна фазова частотна характеристика асимптотично наближається до нуля при $\omega \rightarrow 0$ та до $-\pi/2$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Частотні характеристики ланки наведено на рис. 4.10.

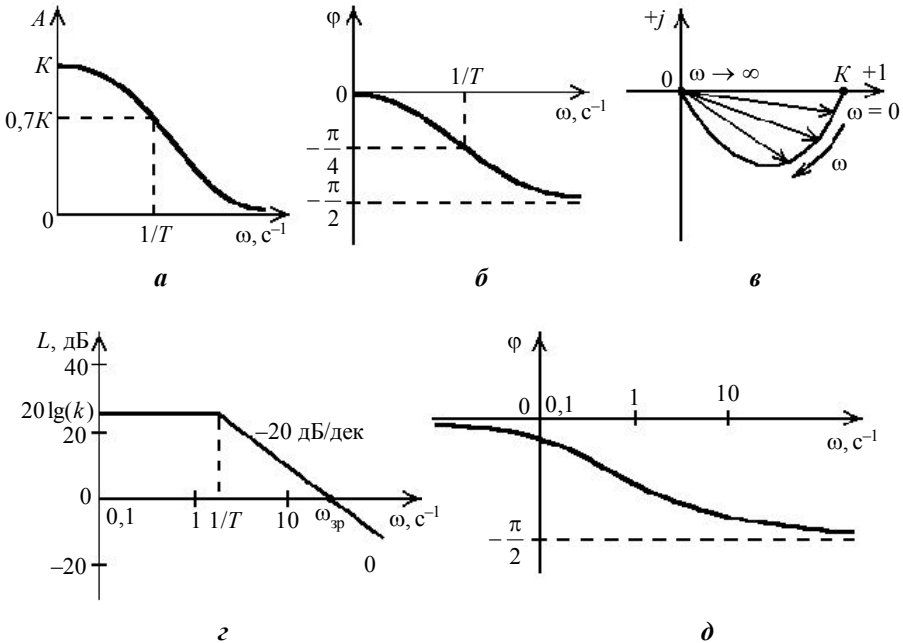


Рисунок 4.10 – Частотні характеристики аперіодичної ланки:

а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФЧХ; з – ЛАЧХ; д – ЛФЧХ

Розв'язуючи диференціальне рівняння ланки при $X = 1(t)$ та нульових початкових умовах $y(0) = 0$, отримаємо перехідну функцію ланки:

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}); \quad w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-t/T}.$$

Перехідна характеристика (рис. 4.11) являє собою експоненціальну криву, усталене значення якої дорівнює коефіцієнту k .

Аперіодична ланка відповідає елементам САК, які містять хоча б один накопичувач енергії (ємність, індуктивність, пружина, рухома маса тощо).

Чим більша величина T , тим повільніше відбувається розсіювання енергії в аперіодичній ланці.

Прикладами можуть служити RC -ланцюжок, LC -ланцюжок, ДПС НЗ великої потужності (з великою електромеханічною сталою часу T_m), якщо вихідна величина – кутова швидкість вала двигуна.

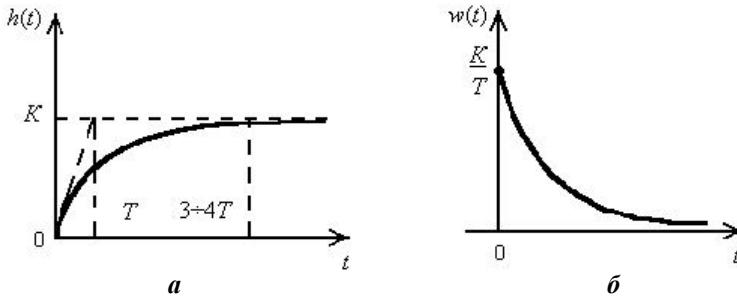


Рисунок 4.11 – Характеристики аперіодичної ланки:

a – перехідна; *б* – імпульсна перехідна

4.2.6. Коливальна ланка

Коливальною називається ланка, яка описується рівнянням другого ступеня

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t);$$

де ξ (ксі) – коефіцієнт згасання або демпфування. Для коливальної ланки $0 < \xi < 1$.

Операційне рівняння має такий вигляд:

$$T^2 p^2 U_{\text{вих}}(p) + 2\xi T p U_{\text{вих}}(p) + U_{\text{вих}}(p) = k \cdot U_{\text{вх}}(p);$$

$$U_{\text{вих}}(p) \cdot (T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) = k \cdot U_{\text{вх}}(p).$$

Передаточна функція ланки

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j\omega}; \quad A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}};$$

при $\omega = 1/T$ $A(\omega) = \frac{k}{2\xi}$, тобто для різних значень коефіцієнта затухання ξ

на частоті $\omega = 1/T$, яку називають резонансною, амплітуда набуває значень від $k/2$ до ∞ :

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \quad \text{при } \omega \leq 1/T;$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \quad \text{при } \omega \leq 1/T,$$

тобто при $\omega \rightarrow \infty$ $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi$.

Сукупність АЧХ ланки наведена на рис. 4.12, *a*.

Асимптотична ЛАЧХ може бути побудована аналогічно ЛАЧХ апериодичної ланки:

$$L_1(\omega) = 20 \lg k \quad \text{при } \omega \ll \frac{1}{T};$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg k - 40 \lg T\omega \quad \text{при } \omega \gg \frac{1}{T} - \text{пряма з нахилом } -40 \text{ дБ/дек.}$$

На частоті спряження $\omega = 1/T$ при малих значеннях коефіцієнта затухання асимптотична ЛАЧХ дуже відрізняється від точної ЛАЧХ.

Частотні характеристики наведені на рис. 4.12.

Розв'язуючи диференціальні рівняння ланки при $x = 1(t)$ та нульових початкових умовах ($y(0) = 0; \dot{y}(0) = 0$), отримаємо перехідну функцію ланки:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \varphi_0) \right),$$

$$\text{де } \alpha = \frac{\xi}{T}; \quad \beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}; \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}.$$

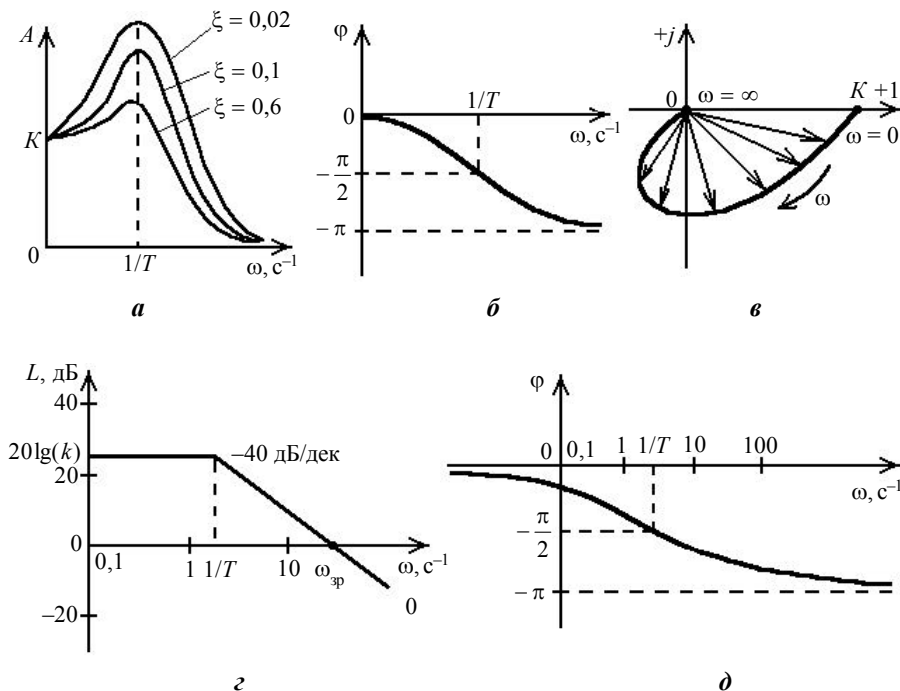


Рисунок 4.12 – Частотні характеристики коливальної ланки:

а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФЧХ; г – ЛАЧХ; д – ЛФЧХ

Перехідна характеристика має вигляд затухаючих коливань, установлене значення яких дорівнює коефіцієнту k (рис. 4.13).

Імпульсна перехідна функція ланки

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t.$$

Характеристики наведено на рис. 4.13.

До коливальних ланок належать елементи САК, що містять два накопичувачі енергії, в одному з яких накопичується потенціальна енергія, а в іншому – кінетична. Окрім того, має бути елемент, що розсіює цю енергію, тобто канал, по якому накопичувачі обмінюються енергією. Мірою витрати енергії у каналі обміну і є коефіцієнт затухання ξ : зі збільшенням витрат збільшується ξ ; зі зменшенням ξ збільшується коливальність процесу.

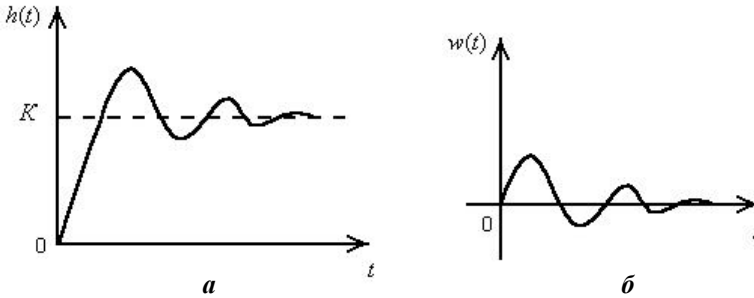


Рисунок 4.13 – Характеристики коливальної ланки:

a – перехідна; *б* – імпульсна перехідна

Приклади пристроїв, що описуються коливальною ланкою, наведені на рис. 4.14.

На рис. 4.14,*а* L – накопичувач кінетичної енергії; C – накопичувач потенціальної енергії; R – елемент, на якому розсіюється енергія (теплова).

На рис. 4.14,*б* зображено ДПС НЗ малої потужності, в якого електромеханічна стала часу T_m досить мала порівняно з електромагнітною T_e : $T_m < 4 T_e$.

На рис. 4.14,*в* зображено пружину Π_p – накопичувач потенціальної енергії; масу, що рухається; m – накопичувач кінетичної енергії. Розсіювання відбувається у демпфері D .

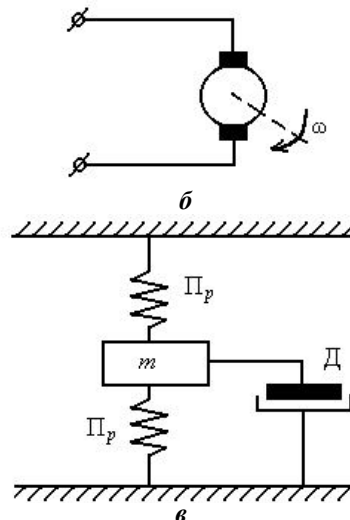
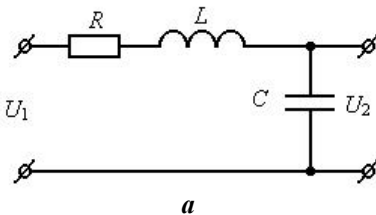


Рисунок 4.14 – Приклади елементів, що відповідають коливальній ланці

4.2.7. Консервативна ланка

Якщо опір каналу обміну енергії дорівнює нулю, тобто $\xi = 0$, то коливальна ланка вироджується у консервативну (резонансну) ланку, рівняння якої має наступний вигляд:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = k \cdot x(t).$$

Цьому рівнянню відповідає передаточна функція:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}.$$

Частотні функції ланки:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}; \quad u(\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}; \quad v(\omega) = 0;$$

$$A(\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}; \quad \varphi(\omega) = 0 \quad \text{при } \omega \leq \frac{1}{T};$$

$$\varphi(\omega) = -\pi \quad \text{при } \omega > \frac{1}{T}.$$

Із цих виразів видно, що АЧХ на частоті $\omega = 1/T$ має розрив, а ФЧХ – східчасто змінює своє значення з 0 на $-\pi$ (рис. 4.15).

Перехідна функція ланки

$$h(t) = k(1 - \cos \omega_1 t); \quad \omega_1 = 1/T.$$

Перехідна характеристика (рис. 4.16) має вигляд незатухаючих гармонічних коливань.

Імпульсна перехідна функція

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} \cdot \sin \frac{t}{T}.$$

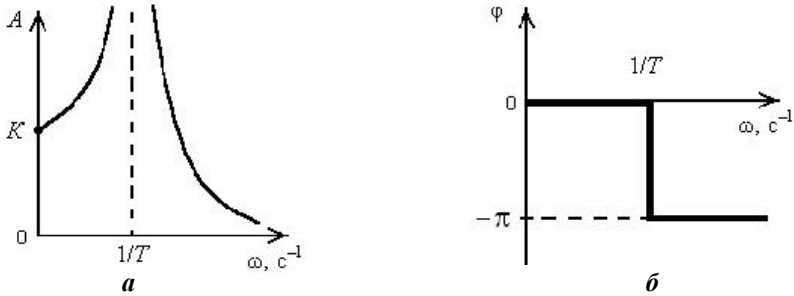


Рисунок 4.15 – Частотні характеристики консервативної ланки

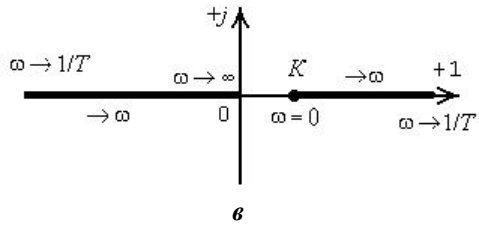


Рисунок 4.16 – Характеристики консервативної ланки:

a – перехідна; *б* – імпульсна перехідна

4.2.8. Аперіодична ланка другого ступеня

Якщо коефіцієнт згасання $\xi \geq 1$, то передаточну функцію коливальної ланки можна привести до вигляду

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

$$\text{де } T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

Цю ланку можна уявити як послідовне з'єднання двох аперіодичних ланок першого ступеня, тому воно не належить до числа елементарних ланок.

Зазначимо, що аперіодичною ланкою другого ступеня може бути описаний ДПС НЗ середньої потужності, для якого $T_m \geq 4T_e$.

4.2.9. Форсуюча ланка

Форсуючою називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k \cdot \left(T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right).$$

Звідси знаходимо передаточну функцію:

$$U_{\text{вих}}(p) = k(T \cdot p \cdot U_{\text{вх}}(p) + U_{\text{вх}}(p)); \quad W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = k(Tp + 1).$$

Частотні функції:

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1); \quad u(\omega) = k; \quad v(\omega) = kT\omega;$$

$$A(\omega) = k\sqrt{T^2\omega^2 + 1}; \quad \varphi(\omega) = \arctg(T\omega);$$

$$\text{при } \omega \rightarrow \infty \quad \varphi(\omega) \rightarrow +\frac{\pi}{2}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2};$$

$$\text{при } \omega \gg 1/T \quad L_1(\omega) = 20 \lg k;$$

$$\text{при } \omega \gg 1/T \quad L_2(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg T\omega - \text{пряма з ухилом } +20 \text{ дБ/дек.}$$

АФЧХ являє собою пряму, паралельну уявній осі та перетинаючу дійсну вісь у точці $u = k$.

Частотні характеристики наведені на рис. 4.17.

Часові функції форсуючої ланки:

$$h(t) = k(T \cdot \delta(t) + 1(t)); \quad w(t) = k(T \cdot \dot{\delta}(t) + \delta(t)).$$

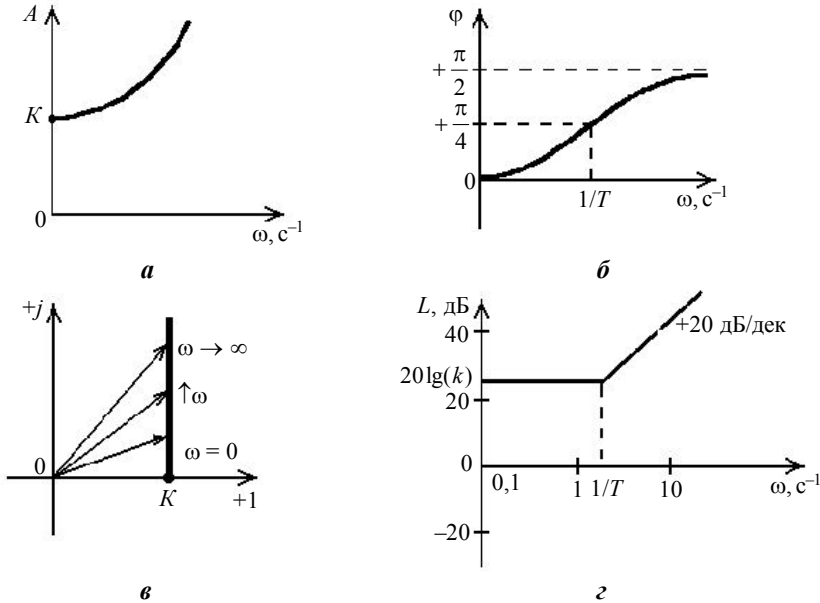


Рисунок 4.17 – Частотні характеристики форсуючої ланки:

а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФЧХ; г – ЛАЧХ

4.2.10. Форсуюча ланка другого ступеня

Ця ланка описується рівнянням

$$y(t) = k \cdot \left(T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right)$$

і має передаточну функцію

$$W(p) = k(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1); \quad 0 < \xi < 1.$$

ЛАЧХ та ЛФЧХ ланки наведено на рис. 4.18.

Форсуючі ланки першого та другого ступеня практично не реалізуються, а реальні форсуючі ланки обов'язково містять аперіодичні; наприклад, ланка, яку називають ланкою *швидкого реагування*, має передаточну функцію

$$W(p) = k \cdot \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}.$$

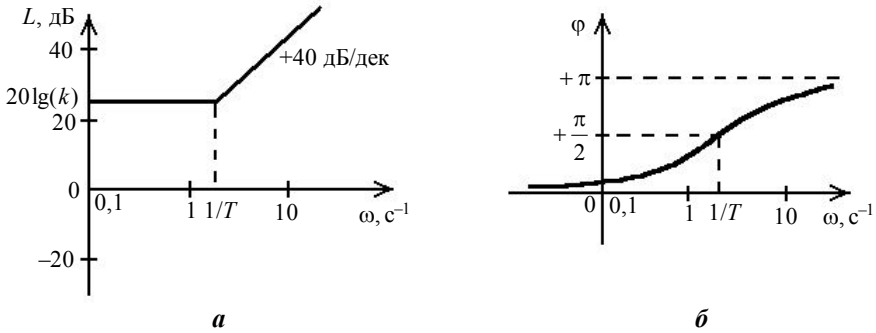


Рисунок 4.18 – Характеристики форсуючої ланки другого ступеня:

a – ЛАЧХ; *б* – ЛФЧХ

4.2.11. Ланка запізнення

Ланка запізнення описується рівнянням

$$y(t) = k \cdot x(t - \tau),$$

де k – коефіцієнт передачі; τ – час запізнення.

Використовуючи теорему запізнення (2.9), запишемо передаточну функцію ланки:

$$U_{\text{вих}}(p) = k \cdot e^{-\tau s} \cdot U_{\text{вх}}(p); \quad W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = k \cdot e^{-\tau s}.$$

Звідси частотні функції ланки:

$$W(j\omega) = k \cdot e^{-\tau j\omega}; \quad A(\omega) = k; \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

АФЧХ являє собою коло з центром у початку координат та радіусом k .

Часові функції мають такий вигляд:

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau); \quad w(t) = k \cdot \delta(t - \tau).$$

Характеристики ланки запізнення наведено на рис. 4.19.

До ланок запізнення можна віднести:

- лінії радіозв'язку (τ – час проходження сигналу);

- довгий трубопровід (τ – час розповсюдження тиску);
- транспортер (τ – час перевезення вантажу).

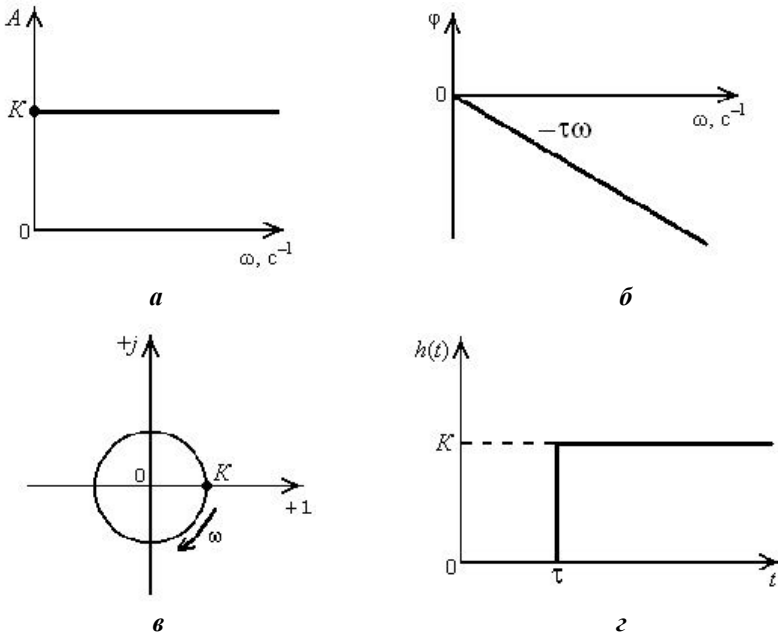


Рисунок 4.19 – Характеристики ланки запізнення:
 а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФЧХ; z – перехідна характеристика

Ланка запізнення належить до числа ланок немінімально-фазового типу.

Ланка називається немінімально-фазовою, якщо хоча б один нуль чи полюс її передаточної функції має позитивну дійсну частину. Прикладами немінімально-фазових елементарних ланок є ланки з передаточними функціями:

$$W(p) = \frac{k}{Tp - 1}; \quad W(p) = k \cdot (Tp - 1);$$

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 - 2\xi Tp + 1}; \quad W(p) = k \cdot (T^2 p^2 - 2\xi Tp + 1).$$

Для немінімально-фазової ланки характерно, що в неї зсув фази за модулем більше, ніж у мінімально-фазової ланки, що має рівноцінну з нею АЧХ.

4.3. Побудова ЛАЧХ розімкнених систем

При дослідженні та проектуванні САК зазвичай використовують АФЧХ, ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи.

Передаточні функції розімкнених САК можна перетворити до вигляду

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p),$$

де $W_i(p)$ – передаточні функції елементарних ланок.

Тоді модулі та аргументи частотних передаточних функцій системи і ланок відповідно до правила модулів та аргументів комплексних чисел пов'язані між собою співвідношеннями

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega).$$

За цими співвідношеннями можна побудувати АФЧХ розімкненої САК: розрахувати АЧХ та ФЧХ окремих ланок за відомими формулами; АЧХ системи обчислити як добуток АЧХ ланок, а ФЧХ системи обчислити як суму ФЧХ окремих ланок.

Тоді для ЛАЧХ

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega),$$

де $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$; $L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega)$ – логарифмічні амплітудні частотні функції системи та окремих ланок.

Звідси впливає алгоритм побудови асимптотичної ЛАЧХ розімкненої САК:

– обчислюють частоти спряження $\omega_i = \frac{1}{T_i}$, де T_i – сталі часу окремих ланок; обчислюють коефіцієнт підсилення розімкненої САК у дБ:

$20 \lg k$ (дБ), де $k = \prod_{i=1}^n k_i$ – коефіцієнт підсилення системи;

– відкладають величину $20 \lg k$ на частоті $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$; обчислені частоти спряження ω_i відмічають вертикальними пунктирними лініями;

– через точку з координатами $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ та $L = 20 \lg k$ проводять першу асимптоту; її проводять до першої частоти спряження ω_1 із нахилом $-v \cdot 20$ дБ/дек. Тут $-v$ – ступінь астатизму САК, що визначається як різниця між числом інтегруючих та диференціальних ланок;

– будують другу асимптоту від кінця першої асимптоти до частоти спряження ω_2 , причому її нахил змінюється на 20; -20; 40; -40 дБ/дек залежно від того, є ω_1 частотою спряження форсуючої, аперіодичної, форсуючої другого ступеня чи коливальної ланки відповідно;

– кожному подальшу асимптоту будують аналогічно другій.

Якщо будь-яка частота спряження є кратною, а її кратність дорівнює L , тобто є L однакових елементарних ланок, то зміна нахилу при цій частоті в L разів більше, ніж при відповідній простій частоті.

Розглянемо приклад.

Побудувати ЛАЧХ розімкненої САК, передаточна функція якої має вигляд

$$W(p) = \frac{100 \cdot (p+1)}{p \cdot (10p+1) (0,01p^2 + 0,1p+1)};$$

де $k = 100$; $T_1 = 10 \text{ с}$ (аперіодична ланка); $T_2 = 1 \text{ с}$ (форсуюча ланка); $T_3 = \sqrt{0,01} = 0,1 \text{ с}$ (коливальна ланка).

Оскільки у знаменнику p у першому ступені, тобто є одна інтегруюча ланка, то система астатична першого ступеня і перша асимптота має

нахил -20 дБ/дек. У першій частоті спряження $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ с}^{-1}$ нахил змінюється на -20 дБ/дек і стає рівним -40 дБ/дек. У другій частоті спряження $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{1} = 1 \text{ с}^{-1}$ нахил змінюється на $+20$ дБ/дек і стає -20 дБ/дек. У третій частоті спряження $\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ с}^{-1}$ нахил ЛАЧХ змінюється на -40 дБ/дек і стає рівним -60 дБ/дек.

Обчислюємо $20 \lg k = 20 \lg 100 = 40$ дБ і відмічаємо цю точку на частоті $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$.

Асимптотичну ЛАЧХ розімкненої САК наведено на рис. 4.20.

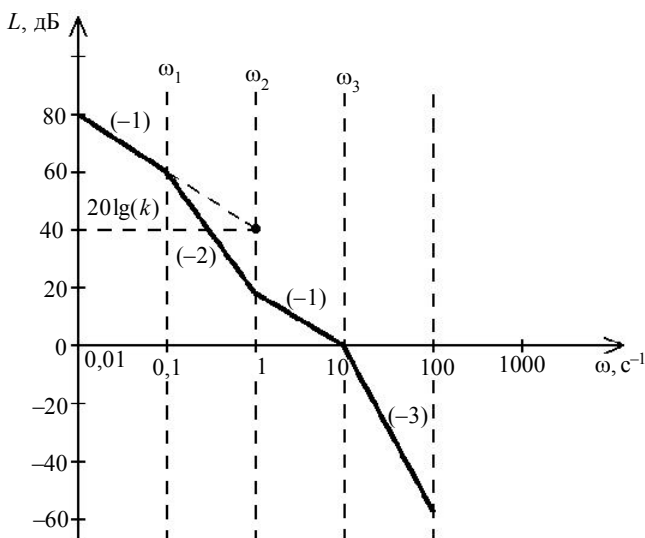


Рисунок 4.20 – Асимптотична ЛАЧХ розімкненої САК:

- | | |
|-------------------|--------------|
| (-1) – нахил ЛАЧХ | -20 дБ/дек |
| (-2) – нахил ЛАЧХ | -40 дБ/дек |
| (-3) – нахил ЛАЧХ | -60 дБ/дек |

5. СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

5.1. Поняття стійкості

На будь-яку автоматичну систему завжди діють різні зовнішні впливи, які можуть перешкоджати її нормальній роботі. Правильно спроектована система має стійко працювати при всіх зовнішніх впливах.

У найпростішому випадку під стійкістю САК будемо розуміти властивість системи повертатися у стан рівноваги після зникнення зовнішніх сил, які вивели її з цього стану.

Це поняття можна проілюструвати за допомогою системи "шар-поверхня" (рис. 5.1).

У випадку, зображеному на рис. 5.1, *а*, при будь-якому відхиленні шару від положення рівноваги (положення A_0) він буде намагатися повернутися у це положення. Цей випадок відповідає стійкій рівновазі.

У випадку, зображеному на рис. 5.1, *б*, має місце нестійка рівновага, тобто така система нестійка.

На рис. 5.1, *в* стан рівноваги стійкий лише доти, доки відхилення не вийшло за деяку межу.

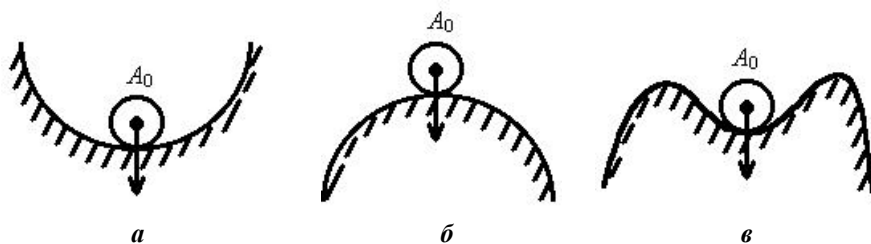


Рис. 5.1 – До поняття стійкості рівноважних положень

Якщо система описується лінійним диференціальним рівнянням, то її стійкість не залежить від величини впливів. Лінійна САК, стійка при малих впливах, буде стійкою і при великих. Нелінійні системи можуть бути стійкі при малих впливах і нестійкі при великих (див. рис. 5.1, *в*).

Тому у загальному випадку, розглядаючи нелінійні системи, вводять поняття *стійкості "у малому", "у великому" та "в цілому"*.

Система *стійка "у малому"*, якщо зазначається лише факт наявності області стійкості, але не визначаються її межі.

Систему називають *стійкою "у великому"*, коли визначено межі області стійкості, тобто визначено границі області початкових відхилень, при яких система повертається у початкове положення, і з'ясовано, що реальні початкові відхилення належать цій області.

У тому випадку, коли система повертається у початкове положення при будь-яких початкових відхиленнях, систему називають *стійкою "у цілому"*.

Зрозуміло, що система, *стійка "у цілому"*, буде *стійка "у малому"* та *"у великому"*; система, *стійка "у великому"*, буде *стійка "у малому"*.

Поняття стійкості можна розповсюдити і на більш загальний випадок – рух у незбуреному стані, наприклад рух за деякою заданою траєкторією.

Припустимо, що заданий рух при відсутності впливів має визначатися законом зміни вихідної координати $y^*(t)$. Це буде *незбурений рух*. Зовнішні впливи спричиняють відхилення дійсного руху системи від заданого. Цей дійсний рух називають *збуреним*. Він визначається координатою $y(t)$. Тоді заданий незбурений рух буде стійким, якщо після закінчення дії зовнішніх впливів збурений рух через деякий час увійде до заданої області $|y(t) - y^*(t)| \leq \xi$, де $\xi = \text{const}$ – задана величина.

5.2. Постановка задачі стійкості за О.М. Ляпуновим

Теорема О.М. Ляпунова про стійкість руху

Вперше чітке визначення стійкості дав російський учений О.М. Ляпунов у 1892 році у роботі "Загальна задача про стійкість руху".

Введемо нову змінну, що дорівнює різниці змінної $y(t)$ у збуреному та незбуреному русі: $x = y(t) - y^*(t)$. Цю змінну називають відхиленням або варіацією величини $y(t)$.

Визначення стійкості за О.М. Ляпуновим можна пояснити таким чином: стійкість незбуреного руху означає, що при достатньо малих початкових збуреннях збурений рух буде як завгодно мало відрізнятися від незбуреного руху. Якщо незбурений рух нестійкий, то збуре-

ний рух відходитиме від нього, якими б малими не були початкові відхилення.

Незбурений рух називається *асимптотично стійким*, якщо будь-який збурений рух при достатньо малих збуреннях прямує до незбуреного руху, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (5.1)$$

Зазначимо, що у результаті лінеаризації точні нелінійні диференціальні рівняння замінюються на наближені лінеаризовані рівняння, які називаються рівняннями першого наближення.

О.М. Ляпунов сформулював теореми, що дозволяють визначати стійкість нелінійних систем за їх лінеаризованими рівняннями (рівняннями першого наближення).

Теорема 1. Якщо дійсні частини всіх коренів p_i характеристичного рівняння першого наближення від'ємні, то незбурений рух асимптотично стійкий.

Теорема 2. Якщо серед коренів p_i характеристичного рівняння першого наближення є хоча б один корінь з додатною дійсною частиною, то незбурений рух нестійкий.

Якщо серед коренів p_i є хоча б один нульовий корінь, а дійсні частини решти коренів від'ємні, то це відповідає критичному випадку і, згідно з О.М. Ляпуновим, стійкість незбуреного руху в цьому випадку не може бути оцінена за рівняннями першого наближення, а потрібний розгляд точних рівнянь.

Умови стійкості лінійних систем автоматичного керування

Лінійні САК описуються лінійним диференціальним рівнянням. Розв'язок цього рівняння містить дві складові:

$$y(t) = y_z(t) + y_v(t), \quad (5.2)$$

де $y_z(t)$ – змушена складова, яка залежить від виду правої частини рівняння. Вона визначається як частинний розв'язок неоднорідного рівняння; $y_v(t)$ – вільна складова, яка визначається загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) \cdot y_v(t) = 0. \quad (5.3)$$

Звичайно в ТАК розглядається стійкість змущеної складової $y_3(t)$ перехідного процесу. Тому за незбурений рух системи беремо змущену складову $y_3(t)$. Тоді збуреним рухом буде будь-яка можлива зміна вихідної величини $y(t)$, а відхиленням – вільна складова

$$y_B(t) = y(t) - y_3(t). \quad (5.4)$$

Тоді відповідно до (5.1) система буде асимптотично стійкою, якщо протягом часу $t \rightarrow \infty$ вільна складова буде наближатися до нуля, тобто $y_B(t) \rightarrow 0$.

Отже, для того щоб з'ясувати необхідні та достатні умови стійкості, потрібно визначити, за яких умов виконується дана вимога, тобто розв'язати диференціальне рівняння (5.3).

Цей розв'язок має такий вигляд:

$$y_B(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{p_i t}, \quad (5.5)$$

де C_i – сталі інтегрування; p_i – корені характеристичного рівняння

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (5.6)$$

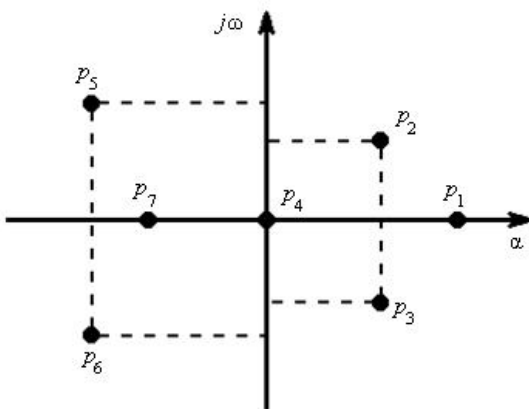


Рисунок 5.2 – Розташування коренів на комплексній площині

Корені p_i і визначатимуть характер перехідного процесу в системі. У загальному випадку $p_i = \alpha_i + j\omega_i$, тобто корені рівняння (5.6) можуть бути дійсними, комплексно-спряженими, нульовими. На комплексній площині ці корені можуть розташуватися по-різному (рис. 5.2).

Корені з від'ємними дійсними частинами прийнято називати *лівими*, оскільки вони лежать у лівій площині. Це p_5, p_6, p_7 .

Корені з додатними дійсними частинами називають *правими коренями* (p_1, p_2, p_3).

Неважко показати, що для виконання умови $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e(t) = 0$ необхідно, щоб дійсні частини α_i коренів p_i були від'ємними. Звідси випливають необхідні та достатні умови стійкості лінійних САК.

Для того щоб лінійна система була стійкою, необхідно та достатньо, щоб усі корені її характеристичного рівняння були лівими.

5.3. Критерії стійкості САК

Обчислення коренів просте для характеристичного рівняння першого і другого порядку. Для рівнянь третього та четвертого порядку загальні вирази для коренів громіздкі і незручні у використанні. Загальні вирази для коренів рівнянь вищих порядків не існують.

Тому важливе значення мають правила, які дозволяють визначати стійкість системи без обчислення коренів характеристичного рівняння. Ці правила називають *критеріями стійкості*.

За допомогою критеріїв стійкості можна встановити, стійка система чи ні, а також з'ясувати, як впливають на стійкість ті або інші параметри і структурні зміни у системі.

Усі критерії можуть бути розподілені на алгебраїчні та частотні.

До алгебраїчних належать критерії Рауса, Гурвиця, Лъснара–Шипара; до частотних – критерії стійкості Михайлова, Найквіста, логарифмічний критерій.

5.3.1. Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії дозволяють говорити про стійкість САК за коефіцієнтами характеристичного рівняння (5.6).

Зазначимо, що *необхідною умовою стійкості* системи будь-якого порядку є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, тобто

$$a_n > 0; \quad a_{n-1} > 0; \quad \dots; \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0. \quad (5.7)$$

Для систем першого та другого порядків необхідна умова (5.7) є і достатньою умовою стійкості.

Для систем третього і вищих порядків додатність коефіцієнтів є необхідною умовою, але недостатньою.

Критерій стійкості Гурвиця

Цей критерій був запропонований у 1895 році німецьким математиком О. Гурвицем у вигляді визначників, що складаються за коефіцієнтами характеристичного рівняння системи.

Спочатку будують головний визначник Гурвиця за таким правилом: по головній діагоналі визначника зліва направо виписують усі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_{n-1} до a_0 у напрямі зменшення індексів. Стовпці вгору від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами з індексами, що послідовно зменшуються, а стовпці вниз – коефіцієнтами з індексами, що послідовно збільшуються. Місця у визначнику, що залишилися, заповнюють нулями. Тобто визначник має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Відкреслюючи у головному визначнику Гурвиця, як показано пунктиром, діагональні мінори, отримуємо визначники Гурвиця нижчого порядку:

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Критерій стійкості Гурвиця формулюється таким чином: *для того, щоб система автоматичного управління була стійкою, необхідно та достатньо, щоб усі визначники Гурвиця були додатними.*

В останньому стовпці головного визначника Гурвиця (5.8) відрізняється від нуля лише один коефіцієнт a_0 , тому

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1}. \quad (5.10)$$

Звідси видно, що при $a_0 > 0$ для перевірки стійкості системи достатньо знайти лише визначники Гурвиця від Δ_1 до Δ_{n-1} (головний визначник Δ_n обчислювати не потрібно).

Якщо всі визначники нижчого порядку додатні, то система знаходиться на межі стійкості, коли головний визначник дорівнює нулю, тобто

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1} = 0. \quad (5.11)$$

Це можливо у двох випадках: $a_0 = 0$ або $\Delta_{n-1} = 0$.

Використовуючи критерій Гурвиця, можна за заданими параметрами системи прийняти за невідомий будь-який один параметр (наприклад, коефіцієнт підсилення) та визначити його граничне чи критичне значення, при якому система буде знаходитися на межі стійкості.

Приклад. Характеристичне рівняння системи має вигляд

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0;$$

$$a_4 = 5; \quad a_3 = 3; \quad a_2 = 6; \quad a_1 = 2; \quad a_0 = 1.$$

Усі коефіцієнти рівняння додатні. Визначник Гурвиця матиме вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 8 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 7 > 0.$$

Значить, система стійка.

Обчислимо критичне значення коефіцієнта a_0 , прийнявши його за невідомий параметр:

$$\Delta_4 = a_0 \cdot \Delta_3 = a_0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & a_0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси

$$a_0 \cdot (3 \cdot 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot a_0 \cdot 3) = 0;$$

$$a_0 \cdot (16 - 9 \cdot a_0) = 0;$$

$a_0^{\text{кр}} = 16/9$, тобто при $a_0 > 16/9$ система стає нестійкою.

Критерій стійкості Льєнара–Шипара

Даний критерій, запропонований у 1914 році П. Льєнаром та Р. Шипаром, є однією з модифікацій критерію Гурвиця. Наведемо його без доведення.

Якщо додатні всі коефіцієнти характеристичного рівняння системи, то для її стійкості необхідно та достатньо, щоб були додатними всі визначники Гурвиця з парними або непарними індексами.

Тобто, для стійкості САК необхідно та достатньо виконання таких нерівностей:

$$\begin{cases} a_n > 0, & a_{n-1} > 0, & \dots, & a_1 > 0, & a_0 > 0 \\ \Delta_1 > 0, & \Delta_3 > 0, & \Delta_5 > 0, & \dots & \dots \end{cases} \quad (5.12)$$

або

$$\begin{cases} a_n > 0, & a_{n-1} > 0, & \dots, & a_1 > 0, & a_0 > 0 \\ \Delta_2 > 0, & \Delta_4 > 0, & \Delta_6 > 0, & \dots & \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

Критерій Льєнара–Шипара потребує розкриття меншого числа визначників, ніж критерій Гурвиця, і тому зручніший для дослідження стійкості САК високого порядку.

5.3.2. Частотні критерії стійкості

Частотні критерії стійкості дозволяють говорити про стійкість САК за виглядом їх частотних характеристик. Ці критерії є графоаналітичними та отримали широке розповсюдження, оскільки вони дозволяють порівняно легко досліджувати стійкість САК високого порядку, а також мають наглядність та просту геометричну інтерпретацію.

В основі частотних критеріїв стійкості лежить наслідок із відомого принципу аргумента.

Принцип аргумента

Нехай дано поліном n -го ступеня

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (5.14)$$

Цей поліном може бути розкладений на співмножники:

$$D(p) = a_n \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n), \quad (5.15)$$

де $S_i = \alpha_i + j\omega_i$ – корені рівняння $D(p) = 0$.

На комплексній площині кожний корінь p_i зображується у вигляді вектора, проведеного з початку координат до точки p_i . Довжина цього вектора дорівнює модулю комплексного числа $|p_i|$, а кут між вектором та дійсною додатною піввіссю – аргументу числа, тобто $\text{Arg } p_i$.

Різниця $(p - p_i)$ зображується вектором, проведеним з точки p_i до довільної точки p (рис. 5.3,а). Якщо взяти випадок, коли $p = j\omega$, то отримаємо наступний вираз:

$$D(j\omega) = a_n \cdot (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (5.16)$$

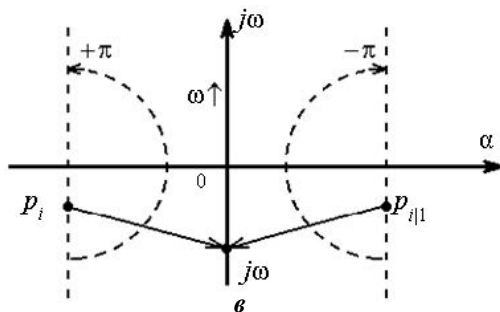
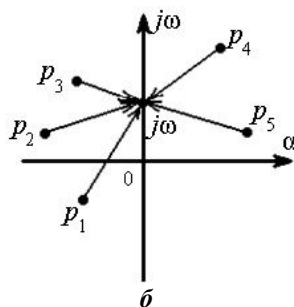
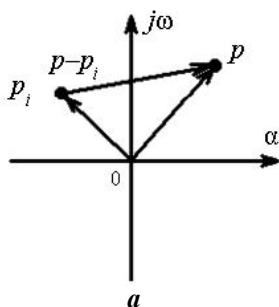


Рисунок 5.3 – До пояснення принципу аргументу

Тоді кінці векторів $(j\omega - p_i)$ знаходитимуться в одній точці на уявній осі $p = j\omega$ (рис. 5.3,б).

У виразі (5.16) $D(j\omega)$ являє собою вектор, рівний добутку елементарних векторів $(j\omega - p_i)$ та числа a_n .

Модуль цього вектора дорівнює добутку модулів елементарних векторів та a_n , а аргумент дорівнює сумі аргументів елементарних векторів.

Прийнято вважати обертання вектора проти годинникової стрілки додатним, а за годинниковою – від'ємним. Тоді при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ кожний вектор обернеться на кут π , якщо його початок, тобто корінь p_i , знаходиться зліва від уявної осі (лівий корінь), і на кут $-\pi$, якщо корінь правий (рис. 5.3,в).

Припустимо, що поліном (5.14) має m правих коренів і $(n - m)$ лівих коренів (усього коренів у полінома n -го ступеня $-n$). Тоді за зміною ω від $-\infty$ до $+\infty$ приріст аргументу вектора $D(j\omega)$, що дорівнює сумі кутів обертання векторів $(j\omega - p_i)$, дорівнює:

$$\Delta \operatorname{Arg}(D(j\omega)) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi \cdot (n - m) - \pi m = \pi \cdot (n - 2m). \quad (5.17)$$

Таким чином, *приріст аргументу $D(j\omega)$ при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює різниці між числом лівих та правих коренів рівняння $D(p) = 0$, помноженій на π .*

У цьому полягає принцип аргументу.

Якщо розглядати зміну частоти ω від 0 до $+\infty$, то зміна аргументу вектора $D(j\omega)$ буде вдвічі менша:

$$\Delta \operatorname{Arg}(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot (n - m). \quad (5.18)$$

Критерій стійкості Михайлова

Критерій, сформульований у 1938 році радянським ученим О.В. Михайловим, є геометричною інтерпретацією принципу аргументу та дозволяє судити про стійкість системи за деякою кривою, що називається кривою Михайлова.

Нехай дано характеристичне рівняння системи (5.6). Ліва частина цього рівняння називається характеристичним поліномом (5.14).

Якщо підставити у нього уявне значення $s = j\omega$, то отримаємо комплексний поліном:

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0 = \\ &= U(\omega) + jV(\omega) = D(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}; \end{aligned} \quad (5.19)$$

де $U(\omega)$ та $V(\omega)$ – дійсна та уявна функції Михайлова;

$D(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ – модуль та аргумент вектора $D(j\omega)$.

Причому,

$$\begin{cases} U(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \\ V(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \end{cases} \quad (5.20)$$

При зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ вектор $D(j\omega)$ буде змінюватися за модулем та напрямком і описувати при цьому своїм кінцем у комплексній площині деяку криву, яку називають кривою (годографом) Михайлова.

Кут повороту вектора $D(j\omega)$ навколо початку координат при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ визначається за формулою (5.18).

Звідси кількість правих коренів полінома $D(p)$:

$$m = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot n - \Delta \operatorname{Arg}(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}}{\pi}. \quad (5.21)$$

Значить, кількість правих коренів дорівнюватиме нулю, якщо

$$\Delta \operatorname{Arg}(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot n. \quad (5.22)$$

Для стійкості системи необхідно та достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння були лівими, тобто, крім умови (5.22), має ще виконуватися умова

$$D(j\omega) \neq 0. \quad (5.23)$$

Формули (5.22) та (5.23) є математичним виразом критерію стійкості Михайлова.

Із (5.20) випливає, що при $\omega = 0$ $U(0) = a_0$; $V(0) = 0$, тобто крива Михайлова починається на дійсній півосі: $D(0) = a_0 > 0$.

Звідси випливає формулювання критерію стійкості Михайлова:

для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб крива Михайлова при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$, починаючись при $\omega = 0$ на дійсній півосі, обходила тільки проти годинникової стрілки послідовно n квадрантів (чвертей) координатної площини, де n – порядок характеристичного рівняння, ніде не перетворюючись в нуль.

Крива Михайлова для стійких систем має плавну спіральну форму, та кінець її прямує до нескінченості у квадранті, номер якого дорівнює ступеню характеристичного рівняння (рис. 5.4).

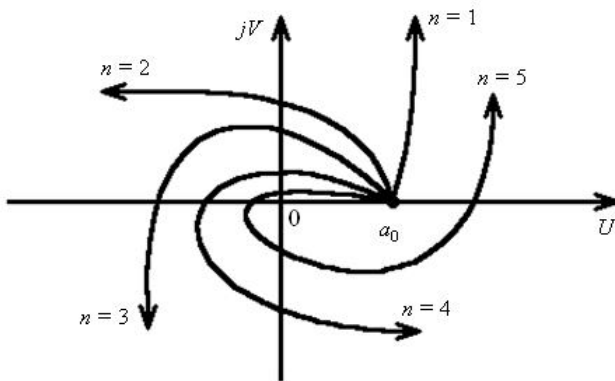


Рисунок 5.4 – Приклади кривих Михайлова для стійких САК

Кількість прямих коренів для нестійкої САК можна визначити за (5.21).

Із рис. 5.4 випливає, що крива Михайлова при послідовному проходженні квадрантів *почергово* перетинає дійсну та уявну осі. У точках перетину з дійсною віссю уявна функція Михайлова дорівнює нулю: $V(\omega) = 0$. У точках перетину з уявною віссю стає рівною нулю дійсна функція Михайлова: $U(\omega) = 0$.

$U(\omega)$ та $V(\omega)$ можуть бути зображені графічно у вигляді деяких кривих (рис. 5.5). Точки перетину цих кривих з віссю частот дають значення

коренів рівнянь

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = 0.$$

Якщо $\omega_0, \omega_2, \omega_4 \dots$ – це корені рівняння $V(\omega) = 0$, а $\omega_1, \omega_3, \omega_5 \dots$ – корені рівняння $U(\omega) = 0$, причому $\omega_0 < \omega_2 < \omega_4 < \dots$; $\omega_1 < \omega_3 < \omega_5 < \dots$, то для стійкої системи обов'язкове виконання нерівності:

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5 < \dots \quad (5.24)$$

Звідси випливає ще одне формулювання критерію стійкості Михайлова:

САК буде стійкою тоді і тільки тоді, коли дійсна $X(\omega)$ та уявна $Y(\omega)$ функції Михайлова, прирівняні до нуля, мають усі дійсні та переміжні корені, причому загальна кількість коренів дорівнює порядку n характеристичного рівняння, а при $\omega = 0$ виконуються умови $U(\omega) = a_0 > 0$; $V(\omega) > 0$.

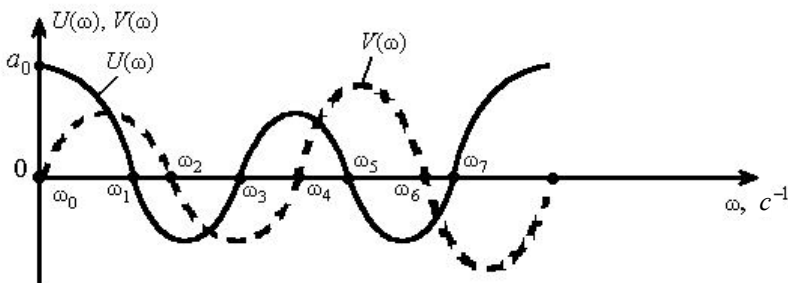


Рисунок 5.5 – Дійсна та уявна функції Михайлова

Критерій стійкості Найквіста

Цей частотний критерій стійкості, розроблений у 1932 році американським ученим Г. Найквістом, дозволяє виносити судження про стійкість замкнутої САК за виглядом АФЧХ розімкнутої системи.

Нехай передаточна функція розімкнутої системи

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Тоді комплексна передаточна функція

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}; \quad (5.25)$$

де $V(\omega)$ і $U(\omega)$ – дійсна та уявна частини КПФ; $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ – модуль і фаза КПФ.

Розглянемо допоміжну функцію

$$\Phi(p) = 1 + W(p) = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}, \quad (5.26)$$

де $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$ – характеристичний поліном замкнутої системи.

Оскільки в реальних системах ступінь полінома $R(p)$ не вище ступеня полінома $Q(p)$, тобто $m \leq n$, то ступінь чисельника і знаменника дробу (5.26) однакові та дорівнюють n .

Приймаючи $p = j\omega$, отримаємо

$$\Phi(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}. \quad (5.27)$$

Нехай характеристичне рівняння замкнутої САК $D(p) = 0$ має m правих та $(n - m)$ лівих коренів, а характеристичне рівняння розімкнутої системи $Q(p) = 0$ має L правих та $(n - L)$ лівих коренів.

При зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ зміна кута повороту вектора $\Phi(j\omega)$ за принципом аргументу (5.17) буде:

$$\begin{aligned} \Delta \text{Arg}(\Phi(j\omega)) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} &= \Delta \text{Arg}(D(j\omega)) - \Delta \text{Arg}(Q(j\omega)) = \\ &= \pi[(n - m) - m] - \pi[(n - L) - L] = 2\pi(L - m) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Для стійкості замкнутої САК необхідно і достатньо, щоб усі корені її характеристичного рівняння були лівими, тобто $m = 0$.

Тоді сумарний поворот вектора $\Phi(j\omega)$ стійкої системи навколо початку координат має бути рівним

$$\Delta \text{Arg}(\Phi(j\omega)) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = 2\pi L. \quad (5.29)$$

Зазвичай розглядають тільки додатні частоти $\omega > 0$, тоді

$$\Delta \text{Arg}(\Phi(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi L = \frac{2\pi L}{2}. \quad (5.30)$$

Отже, якщо розімкнута система є нестійкою і має L правих коренів, то замкнута система буде стійкою тоді і тільки тоді, коли АФЧХ допоміжної функції $\Phi(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ охоплює початок координат у додатному напрямку $L/2$ разів.

Із (5.27) випливає, що кількість обертів вектора $\Phi(j\omega)$ навколо початку координат дорівнює кількості обертів вектора $W(j\omega)$ навколо точки $(-1; j0)$. Звідси випливає формулювання критерію стійкості Найквіста:

якщо розімкнута САК нестійка, то для того, щоб замкнута САК була стійкою, необхідно та достатньо, аби АФЧХ розімкнутої системи $W(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ охоплювала точку $(-1; j0)$ у додатному напрямку $L/2$ разів, де L – кількість правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої САК.

На практиці зручніше користуватися наступним формулюванням критерію:

якщо розімкнута САК нестійка, то для того, щоб замкнута САК була стійкою, необхідно та достатньо, щоб різниця між кількістю додатних та від'ємних переходів АФЧХ розімкнутої САК через відрізок дійсної осі $(-\infty; -1)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ дорівнювала $L/2$, де L – кількість правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи.

Додатним переходом характеристики $W(j\omega)$ через відрізок дійсної осі $(-\infty; -1)$ при зростанні ω називається перехід зверху вниз; від'ємним – знизу вверху.

Якщо характеристика $W(j\omega)$ починається на відрізку $(-\infty; -1)$ при $\omega = 0$ чи закінчується на ньому при $\omega = \infty$, то вважають, що вона здійснює *напівперехід*.

Пояснимо це формулювання рис. 5.6.

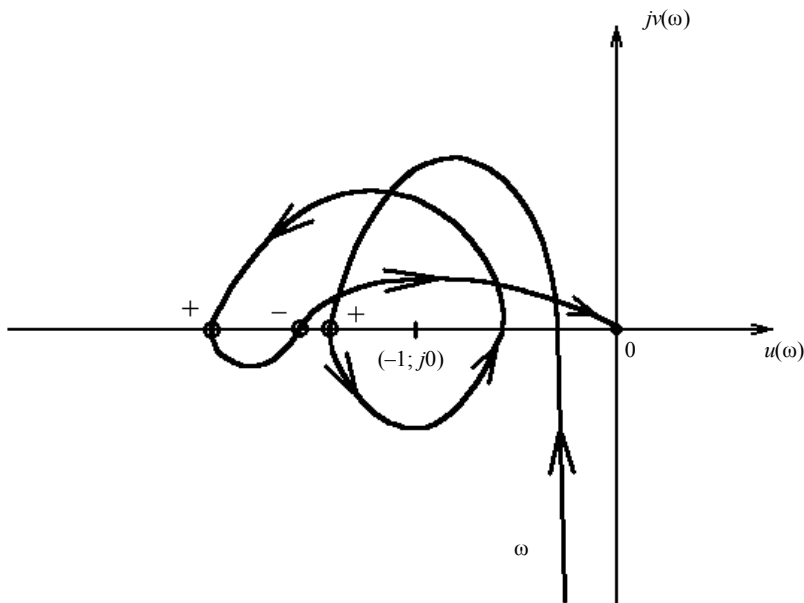


Рисунок 5.6 – Ілюстрація до формулювання критерію стійкості Найквіста

На рис. 5.6 різниця між додатними та від'ємними переходами дорівнює одиниці: $(2 - 1) = 1$. Якщо розімкнута система нестійка і $L = 2$, то замкнута САК буде стійкою.

Якщо САК у розімкнутому стані стійка, тобто $L = 0$, то із (5.30) випливає, що $\Delta \text{Arg}(\Phi(j\omega)) = 0$, а значить – АФЧХ розімкнутої САК не повинна охоплювати точку $(-1; j0)$. Отримуємо наступне формулювання критерію:

якщо розімкнута САК стійка, то замкнута САК буде стійкою, якщо АФЧХ розімкнутої САК $W(j\omega)$ не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$.

За віддаленням АФЧХ розімкнутої САК від точки $(-1; j0)$ можна визначити запас стійкості, який характеризується двома величинами: *запасом стійкості за фазою* $\varphi_{\text{зап}}$ та *запасом стійкості за амплітудою* $A_{\text{зап}}$ (рис. 5.7).

Запас стійкості за фазою $\varphi_{\text{зап}}$ визначають як величину кута $\varphi = \pi - |\varphi(\omega_3)|$ для частоти зрізу ω_3 , за якої $|W(\omega_3)| = 1$.

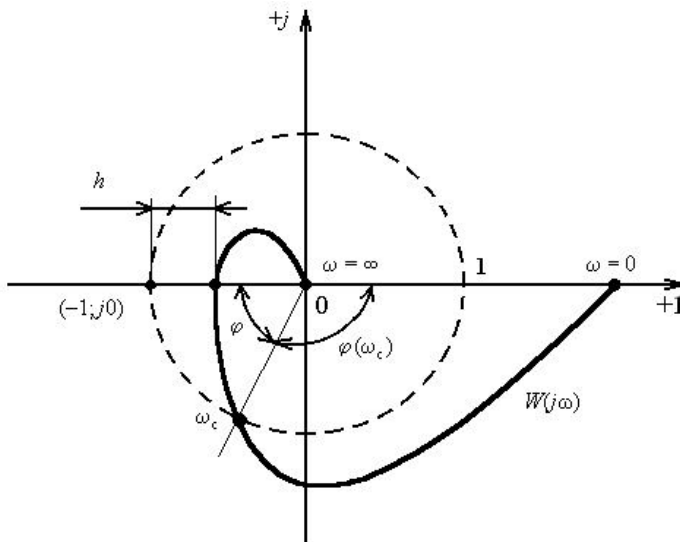


Рисунок 5.7 – Визначення запасів стійкості

Запас стійкості за амплітудою $A_{\text{зап}}$ визначають як величину відрізка осі абсцис h , що знаходиться між критичною точкою $(-1; j0)$ та АФЧХ.

При збільшенні коефіцієнта підсилення розімкнутої системи модуль АФЧХ також зростає і при деякому значенні цього коефіцієнта $K = K_{\text{гран}}$, що називається *критичним коефіцієнтом підсилення*, АФЧХ пройде через точку $(-1; j0)$, тобто $h = 0$, і система буде на межі стійкості. При $K > K_{\text{гран}}$ система буде нестійкою.

Критерій стійкості Найквіста може бути використаний у тих випадках, коли диференціальні рівняння системи (чи окремих ланок) невідомі, але експериментально визначені частотні характеристики. Крім того, критерій дозволяє зв'язати дослідження стійкості системи з наступним аналізом якості.

5.4. Аналіз стійкості за логарифмічними частотними характеристиками

В інженерній практиці широкого застосування набув аналіз стійкості САК за логарифмічними частотними характеристиками розімкнутої системи. Це пов'язано з тим, що побудова ЛЧХ розімкнутих систем простіша, ніж побудова їх АФЧХ.

Відповідно до критерію Найквіста, стійкість пов'язана із кількістю переходів АФЧХ $W(j\omega)$ через відрізок $(-\infty; -1)$ від'ємної дійсної півосі. Коли $W(j\omega)$ перетинає від'ємну дійсну піввісь, ЛФЧХ перетинає пряму $(-\pi)$.

Додатному переходу (зверху вниз) через відрізок $W(j\omega)$ характеристики відповідає перетин ЛФЧХ при $L(\omega) > 0$ прямої $(-\pi)$ знизу вверх (точка 2 на рис. 5.8), а від'ємному переходу – зверху вниз – (точка 1 на рис. 5.8).

Тоді критерій стійкості Найквіста стосовно ЛЧХ можна сформулювати таким чином:

для того, щоб САК була стійкою, необхідно і достатньо, щоб різниця між числом додатних та від'ємних переходів ЛФЧХ через пряму $(-\pi)$ на всіх ділянках, де ЛАЧХ додатна, тобто $L(\omega) > 0$, дорівнювала $L/2$ (L – кількість правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи).

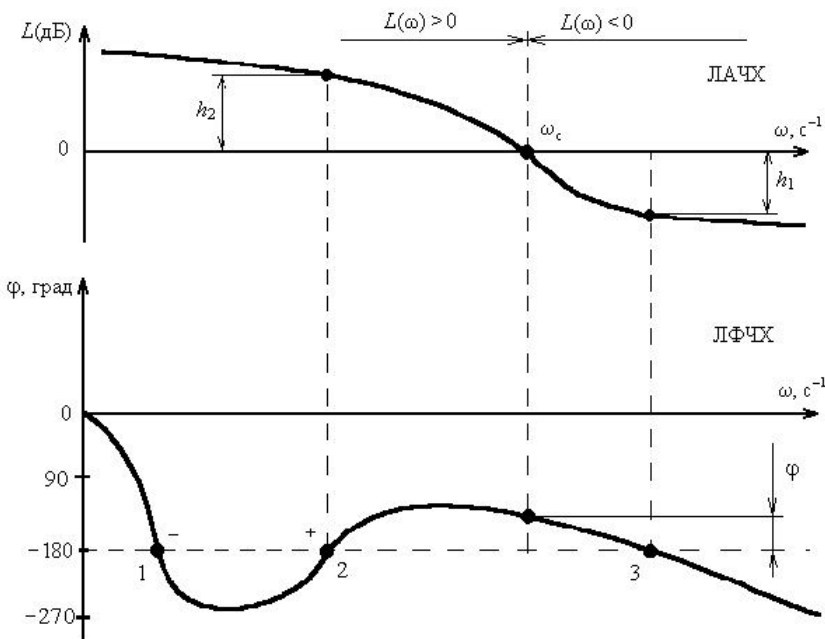


Рисунок 5.8 – Аналіз стійкості та визначення запасів стійкості за ЛЧХ розімкнутої САК

Із аналізу ЛЧХ (рис. 5.8) випливає, що різниця між кількістю додатних і від'ємних переходів ЛФЧХ через пряму $(-\pi)$ при $L(\omega) > 0$ дорівнює нулю. Значить, якщо розімкнута САК стійка ($L = 0$), то і замкнута САК буде стійкою. При цьому вона має запаси стійкості за амплітудою h_1 і h_2 та фазою $-\varphi$.

Звичайно, в добре спроектованій системі запас за фазою $\varphi_{\text{зап}} = 30 \div 60^\circ$; запас за амплітудою $A_{\text{зап}} = 10 \dots 15$ дБ.

5.5. Стійкість систем із запізненням

Системи автоматичного керування можуть включати в себе ланки запізнення, які описуються рівняннями

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (5.31)$$

де τ – стала величина, яка називається часом запізнення.

Передаточна функція ланки запізнення має вигляд (за теоремою запізнення)

$$W_{\text{зап}}(p) = e^{-\tau p}. \quad (5.32)$$

САК, що включають у себе ланку запізнення, називають системами із запізненням.

Структурні схеми системи із запізненням показані на рис. 5.9.

Передаточна функція розімкнутої системи із запізненням дорівнює

$$W_{\tau}(p) = W_{\text{зап}}(p) \cdot W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} e^{-\tau p}, \quad (5.33)$$

де $W(p) = R(p)/Q(p)$ – передаточна функція розімкнутої системи без урахування запізнення.

Якщо ланка запізнення включена у прямий ланцюг (див. рис. 5.9, *а*), то передаточна функція замкнутої системи

$$W_3(p) = \frac{W_{\tau}(p)}{1 + W_{\tau}(p)} = \frac{R(p) \cdot e^{-\tau p}}{Q(p) + R(p) \cdot e^{-\tau p}} = \frac{R_{\tau}(p)}{D_{\tau}(p)}. \quad (5.34)$$

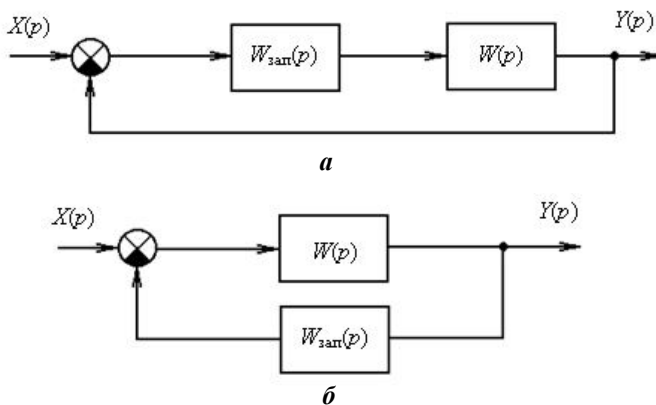


Рисунок 5.9 – Структурна схема САК з ланкою запізнення:

а – у прямому ланцюгу; *б* – у ланцюгу зворотного зв'язку

Якщо ланка запізнення знаходиться у ланцюгу зворотного зв'язку, то передаточна функція замкнутої системи

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W_{\tau}(p)} = \frac{R(p)}{Q(p) + R(p) \cdot e^{-\tau p}} = \frac{R(p)}{D_{\tau}(p)}. \quad (5.35)$$

Звідси випливає, що незалежно від місця включення ланки запізнення, характеристичне рівняння системи із запізненням має вигляд

$$D_{\tau}(p) = Q(p) + R(p) \cdot e^{-\tau p} = 0. \quad (5.36)$$

Це рівняння не є поліномом, оскільки включає в себе множник $e^{-\tau p}$, тому воно має нескінченну кількість коренів. Отже, для дослідження стійкості систем із запізненням необхідно використовувати критерії стійкості.

При цьому слід мати на увазі, що алгебраїчні критерії стійкості в їх звичайній формі для дослідження систем із запізненням непридатні. Крім того, для стійкості лінійних систем першого та другого ступенів із запізненням додатності коефіцієнтів характеристичного рівняння стає недостатньо.

Для дослідження стійкості систем із запізненням можна використовувати частотні критерії стійкості Михайлова та Найквіста. Останній є найбільш зручним.

Підставивши в (5.33) $p = j\omega$, запишемо частотну передаточну функцію $W_\tau(j\omega)$ розімкнутої системи із запізненням:

$$W_\tau(j\omega) = W(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} = A(\omega) \cdot e^{j\psi(\omega)} \cdot e^{-j\omega\tau} = A(\omega) \cdot e^{j\psi_\tau(\omega)}, \quad (5.37)$$

де $W(j\omega)$ – АФЧХ розімкнутої САК без врахування запізнення; $\psi_\tau(\omega) = (\psi(\omega) - \omega\tau)$ – ФЧХ розімкнутої САК із запізненням.

Звідси видно, що присутність ланки запізнення не змінює модуля $A(\omega)$ АФЧХ розімкнутої САК $W(j\omega)$, а вносить лише додатковий від'ємний фазовий зсув $\omega\tau$, пропорційний частоті. При цьому коефіцієнтом пропорційності є час запізнення τ .

Знаючи АФЧХ $W(j\omega)$ розімкнутої САК без запізнення, легко побудувати АФЧХ $W_\tau(j\omega)$ системи із запізненням. Для цього кожний модуль вектора АФЧХ $W(j\omega)$ потрібно повернути на кут $A(\omega_i)$ за годинниковою стрілкою. Тоді $W_\tau(j\omega)$ буде мати вигляд спіралі, що закручується навколо початку координат. Це "закручування" погіршує умови стійкості, оскільки вся АФЧХ наближається до точки $(-1; j0)$.

Змінюючи час запізнення τ у широких межах, можна знайти таке його значення, при якому замкнута система буде знаходитися на межі стійкості. У цьому випадку характеристика буде проходити через точку $(-1; j0)$.

Час запізнення $\tau_{кр}$ і відповідне йому значення частоти $\omega_{кр}$, при яких $W_\tau(j\omega)$ проходить через точку $(-1; j0)$, називають критичними. Для критичного випадку справедливі умови:

$$A(\omega_{кр}) = |W_\tau(j\omega_{кр})| = 1, \quad (5.38)$$

$$\psi_\tau(\omega_{кр}) = \psi(\omega_{кр}) - \omega_{кр}\tau_{кр} = -\pi. \quad (5.39)$$

Із (5.38) можна знайти спочатку $\omega_{кр}$, а потім із (5.39) знайти $\tau_{кр}$:

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{\varphi(\omega_{\text{кр}}) + \pi}{\omega_{\text{кр}}} = \frac{\arctg \frac{V(\omega_{\text{кр}})}{U(\omega_{\text{кр}})} + \pi}{\omega_{\text{кр}}} = \frac{\varphi_{\tau}(\omega_{\text{кр}})}{\omega_{\text{кр}}}; \quad (5.40)$$

де $\varphi_{\tau}(\omega_{\text{кр}}) = \pi + \arctg \frac{V(\omega_{\text{кр}})}{U(\omega_{\text{кр}})}$ – запас стійкості за фазою.

Приклад. Передаточна функція розімкнутої системи із запізненням має вигляд

$$W_{\tau}(p) = \frac{K \cdot e^{-\tau s}}{T \cdot p + 1},$$

де $K = \sqrt{2}$; $T = 5$ с.

Визначити критичний час запізнення $\tau_{\text{кр}}$.

Запишемо частотну передаточну функцію:

$$W_{\tau}(j\omega) = \frac{K \cdot e^{-\tau j\omega}}{Tj\omega + 1}.$$

За умовою (5.38) маємо:

$$|W_{\tau}(j\omega_{\text{кр}})| = \left| \frac{K}{1 + j\omega_{\text{кр}}T} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega_{\text{кр}}^2}} = 1.$$

Звідси $\omega_{\text{кр}} = 0,2$ с⁻¹.

Фазовий зсув на критичній частоті без урахування запізнення

$$\varphi(\omega_{\text{кр}}) = -\arctg(T \cdot \omega_{\text{кр}}) = -\arctg\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тоді за (5.40) шукаємо критичний час запізнення: $\tau_{\text{кр}} = 15\pi/4$ с.

Критичний час запізнення можна визначити графічно. Умова (5.38) визначається перетином $W(j\omega)$ з колом одиничного радіуса з центром

у початку координат. Точка перегину визначає одночасно $\omega_{кр}$ та кут $\varphi(\omega_{кр})$ (рис. 5.10). Тоді критичний час запізнення визначається за формулою (5.40).

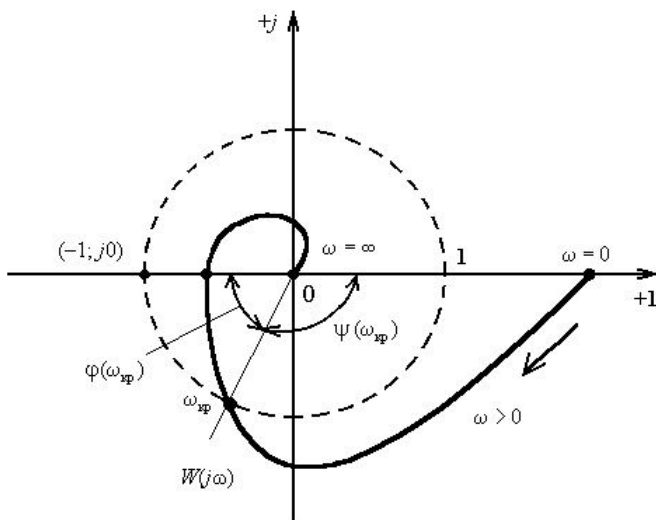


Рисунок 5.10 – Визначення критичного часу запізнення

Система автоматичного керування буде стійкою, якщо час запізнення τ менший за критичний: $\tau < \tau_{кр}$.

6. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

6.1. Показники якості керування

Для порівняльного аналізу різних систем керування необхідно мати деякі числові характеристики цих систем, що дозволяють оцінювати, яка з них буде більш ефективною. Ці числові характеристики і називають критеріями якості.

Критерії якості дозволяють дати кількісну оцінку різним системам керування і тим самим обґрунтовано підійти до вибору системи та її закону керування, що задовольняє обраному критерію якості.

Система керування характеризується різними показниками, до яких, у першу чергу, можна віднести: точність, стійкість, швидкодію, надійність, вартість, оптимальність та ін. З огляду на велику різноманітність систем і об'єктів керування, розроблено значну кількість особистих критеріїв, які так чи інакше включають у себе наведені вище показники. Між цими показниками (критеріями якості) існує тісний взаємозв'язок, тому прагнення поліпшити який-небудь показник системи керування призводить до погіршення іншого. Так, наприклад, прагнення зменшити помилку регулювання призводить до зменшення запасу стійкості та швидкодії і навпаки, або підвищення надійності системи неминуче призводить до збільшення її вартості.

Використання того чи іншого показника системи або їхніх комбінацій у вигляді критеріїв якості визначається зручністю його застосування у системах керування, а також, у відповідній мірі, традиціями.

У лінійних системах широко використовуються критерії якості перехідних процесів, які поділяються на прямі, непрямі й інтегральні.

Крім того, на основі цих критеріїв може бути обчислено ще ряд додаткових критеріїв, до яких належать:

критерії точності – використовують для оцінки якості величину помилки керування й регулювання в деяких типових режимах;

критерії запасу стійкості – встановлюють, наскільки далеко від границі стійкості перебуває система керування;

критерії швидкодії – дозволяють оцінювати час перехідних процесів у системі.

Обчислення всіх цих критеріїв ґрунтується на використанні математичного апарату теорії керування, причому найбільш часто при обчисленні критеріїв якості використовуються часові й частотні характеристики систем. За часовими характеристиками визначають прямі показники якості, за частотними характеристиками – непрямі. До непрямих показників якості належать також і кореневі критерії, що дозволяють за коренями характеристичного рівняння замкнутої системи оцінити її властивості.

Поняття критеріїв якості тісно пов'язане з поняттям критеріїв оптимальності, а в ряді випадків ці поняття збігаються.

З огляду на взаємозв'язок між різними показниками систем керування завдання вибору або проектування оптимальної системи можна розглядати як завдання на умовний екстремум. Знайти екстремум (мінімум і максимум) якого-небудь показника, наприклад вартості, за умови, що інші показники відповідають заздалегідь заданим величинам.

Оцінювання якості перехідного процесу у системі

Перехідні процеси, що виникають у системі при стрибкоподібному процесі за звичайним порядком ділять на групи (рис. 6.1).

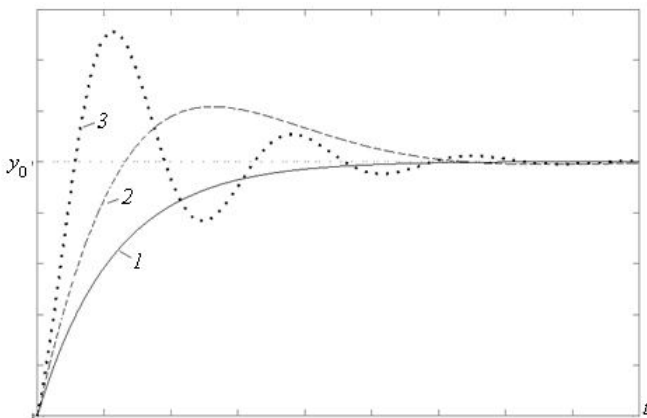


Рисунок 6.1 – Приклади перехідних процесів у стійких САК:

1 – аперіодичний перехідний процес, у якому похідна вихідної координати змінює знак один раз; 2 – монотонний перехідний процес, у якому похідна вихідної координати не змінює знак; 3 – коливальний перехідний процес; y_0 – потрібне стає значення вихідної координати системи

Оцінка якості перехідного процесу при стрибкоподібному вхідному впливі здійснюється за наступними показниками (рис. 6.2):

– $t_{п.п}$ – це такий мінімальний час, після якого вихідна регульована координата системи відповідає умові

$$\frac{y_{\max} - y_0}{y_0} \leq \Delta, \quad (6.1)$$

де Δ – допустиме відхилення вихідної координати від заданого значення y_0 , $\Delta = 0,05$ (5 %);

– стала помилка (статична точність):

$$e_{уст} = 1 - y_0, \quad (6.2)$$

якщо $e_{уст} = 0$, то система астатична;

– σ – перерегулювання – це максимальне відхилення вихідної координати від сталого значення, розрахована у відсотках:

$$\sigma = \frac{y_{\max}^1 - y_0}{y_0} 100 \% ; \quad (6.3)$$

– вид перехідного процесу (коливальний або монотонний);

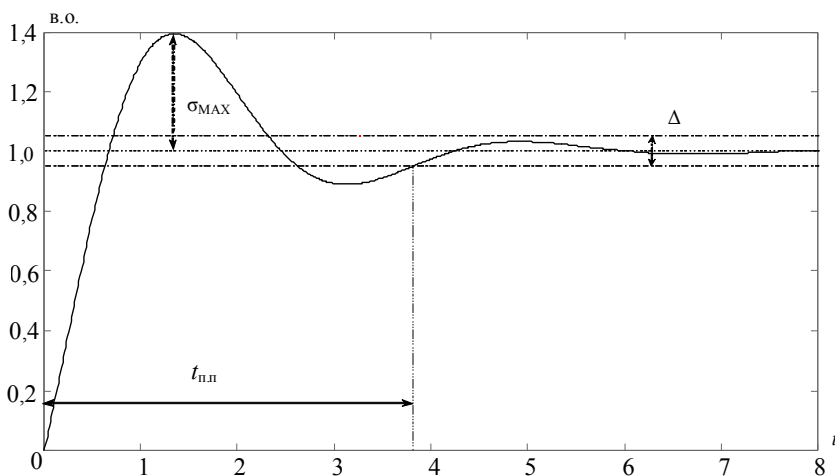


Рисунок 6.2 – Показники якості перехідного процесу

– частота власних коливань, Гц, і період, с:

$$f_k = \frac{1}{T_k};$$

– кількість коливань n .

6.2. Інтегральні оцінки якості

Стандартні (типові) показники якості зрозумілі для замовників. Виявляється, що всі чотири показники найтіснішим чином пов'язані із запасами стійкості за амплітудою і за фазою. Тому забезпечення стандартних показників якості забезпечує необхідну стійкість:

– $t_{п.п}$, $e_{уст}$, n можуть бути легко визначені, навіть аналітично;
– σ обчислюється набагато складніше ("проблема перерегулювання").

Задачу забезпечення показників можна розглянути як оптимізаційну. Однак ця задача оптимізації виявляється багатокритеріальною і з цієї причини виключно важкою для розв'язання, зокрема числового.

Наступний інтегральний показник якості (критерій) одним числовим значенням урахує всі типові показники:

$$J = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \gamma \cdot \dot{e}^2(t)] dt. \quad (6.4)$$

З використанням показника якості (6.4) можна цілком коректно підібрати коефіцієнти регулятора, при якому J є мінімальним. При цьому задача оптимізації має один критерій, але багато вимірів.

Найпростішою інтегральною оцінкою для одновірних систем може стати величина

$$J_0 = \int_0^{\infty} e(t) dt, \quad (6.5)$$

де e – помилка системи.

Очевидно, що J_0 буде тим менше, чим швидше загасає перехідний процес і чим менше величина помилки.

Незручність інтегральної оцінки виду (6.5) полягає в тому, що вона може використовуватися тільки для аперіодичних процесів. Якщо має місце коливальний процес, то використовується критерій

$$J_1 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (6.6)$$

або

$$J_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt. \quad (6.7)$$

Більш широко використовується останній критерій (6.7), названий квадратичною інтегральною оцінкою. Це обумовлено можливістю обчислення цього критерію без безпосереднього визначення $e(t)$.

Оцінка якості системи за інтегральною квадратичною оцінкою не враховує коливальність перехідного процесу. Виявляється, що перехідні процеси з різними показниками коливальності і різною тривалістю перехідних процесів можуть дати рівні значення критерію (6.7). Якщо вибирати параметри системи за мінімумом цієї оцінки, то перехідні процеси в такій системі мають високий показник коливальності.

6.3. Коефіцієнти помилок

Конкретні значення точності, безумовно, будуть залежати від виду задавального впливу. Розглянемо довільний вхідний вплив і виразимо сигнал помилки (у цьому випадку для слідкуючої системи – помилки спостереження) через передаточну функцію за помилкою і вплив, що задає. В остаточному підсумку, адже саме сигнал помилки й вимірює точність у будь-який момент часу.

Розкладемо $W(p)$ у ряд Тейлора в околі точки 0, припускаючи, що ряд Тейлора сходиться:

$$W_e(p) = W_e(0) + \left. \frac{dW_e(p)}{dp} \right|_{p=0} p + \left. \frac{d^2 W_e(p)}{dp^2} \right|_{p=0} \frac{1}{2!} p^2 + \dots \quad (6.8)$$

Припущення про збіжність ряду виконується, як і для будь-якого статичного ряду, у деякому околі точки 0, тобто за умови $|p|$ – малий:

$$e(p) = \left(\underbrace{W_e(0)}_{C_0} + \underbrace{\dot{W}_e(0)}_{C_1} p + \underbrace{\ddot{W}_e(0)}_{C_2} \cdot \frac{1}{2} p^2 + \dots \right) \cdot U^{\text{зад}}(p). \quad (6.9)$$

Коефіцієнти C_k називаються коефіцієнтами помилок. C_k є значення-ми в 0 похідних передаточної функції за помилкою й дозволяють у такий спосіб виразити поточне значення помилки через похідні впливу, що задає:

$$e(p) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i p^i \cdot U^{\text{зад}}(p) \equiv \sum_{i=0}^N C_i p^i \cdot U^{\text{зад}}(p); \quad C_k = \left. \frac{d^k W_e(p)}{dp^k} \right|_{p=0}; \quad (6.10)$$

$$e(t) = C_0 U^{\text{зад}}(t) + C_1 \dot{U}^{\text{зад}}(t) + C_2 \ddot{U}^{\text{зад}}(t) + \dots \equiv \sum_{i=0, N} C_i U^{(i)\text{зад}}(t). \quad (6.11)$$

Умова малості $|p|$ після переходу у часову область означає, що ряд буде збіжним при досить великому t .

Значення сигналу помилки пов'язане з усіма похідними вхідного сигналу.

Крім того, треба врахувати, що формули (6.8)–(6.11) справедливі лише за умови збіжності ряду, тобто для досить великого часу, іншими словами – у сталому режимі. Тож, формули (6.8)–(6.11) застосовані до статичної точності, хоча й справляють оманне враження. У формулах також відбито, що на практиці зазвичай користуються лише кінцевим відрізком ряду – до члена порядку N .

Для типових вхідних сигналів лише кінцеве число похідних не дорівнює нулю, тому замість ряду виходить кінцевий вираз. Це не означає, однак, що у випадку типових впливів питання про збіжність відпадає, тому що повинен ще сходитися ряд для передаточної функції за помилкою, а це не залежить від виду впливу, що задає.

Обчислимо тепер величину сталої помилки у випадку різних впливів.

Одиничний вплив, що задає: $U^{\text{зад}}(t) = 1(t)$;

$$e(t) = C_0. \quad (6.12)$$

З'ясуємо, від чого залежить C_0 і C_1 :

$$C_0 = W_e(0) = \frac{1}{1+W(0)} = \frac{1}{1+\kappa}; \quad C_1 = \dot{W}_e(0) = \frac{-\dot{W}(0)}{(1+W(0))^2} = \frac{1}{(1+\kappa)^2}. \quad (6.13)$$

Таким чином, збільшення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи зменшує коефіцієнти помилок C_0 і C_1 , зокрема, помилку при східчасному $U_{\text{зад}}(t)$.

Є інший спосіб зменшення C_0 і деякої кількості C_κ , якщо у розімкнутій системі є кілька інтеграторів, які при цьому можуть перебувати у будь-якому місці розімкнутої системи:

$$W_{\text{PC}}(p) = K \cdot W(p) \cdot \frac{1}{p^\kappa};$$

$$W_e(p) = \frac{1}{1+W_{\text{PC}}(p)} = \frac{1}{1+KW(p)p^{-\kappa}} = \frac{p^\kappa}{p^\kappa + KW(p)}.$$

Неважко помітити, що

$$\left. \frac{d^N}{dp^N} [W_e(p)] \right|_{p=0} \equiv 0; \quad \text{при } 0 \leq N \leq K; \quad (6.14)$$

тобто $C_0 = 0$; $C_1 = 0$; ...; $C_{K-1} = 0$.

При відсутності інтеграторів у системі $C_0 = e_{\text{уст}} = 1/(1+K)$ при $U_{\text{зад}}(t) = 1(t)$, але при надходженні на вхід лінійно-зростаючого (або більш складного) вхідного впливу $U_{\text{зад}}(t) = t(t)$ помилка $e_{\text{уст}} = C_0 t(t) + \dots$, тобто необмежено зростає.

При наявності одного інтегратора в системі $k=1$; $C_0 = 0$, $e_{\text{уст}} = 0$ при $U_{\text{зад}}(t) = 1(t)$, але при надходженні на вхід лінійно-зростаючого вхідного впливу $U_{\text{зад}}(t) = t(t)$ помилка $e_{\text{уст}} = C_1$, тобто має кінцеве значення. При більш складних впливах (наприклад, квадратичному) помилка необмежена.

За наявності двох інтеграторів у системі $k=2$; $C_0 = C_1 = 0$, $e_{\text{уст}} = 0$ при $U_{\text{зад}}(t) = 1(t)$ і при $U_{\text{зад}}(t) = t(t)$, але при надходженні на вхід

квадратично-зростаючого вхідного впливу $U_{\text{зад}}(t) = t^2(t)$ помилка $e_{\text{уст}} = C_2$, тобто має кінцеве значення. При більш складних впливах (наприклад, кубічному) помилка необмежена і т. д.

Визначення.

Якщо $C_0 = C_1 = C_{k-1} = 0$, то говорять, що система має астатизм k -го порядку. Якщо $C_0 = 0$, то говорять просто, що система має астатизм.

Додавання до складу регулятора декількох інтегральних ланок дозволяє підвищити порядок астатизму, тим самим забезпечити нульову помилку для досить складного виду вхідного впливу. Зазначимо, що інтегратори можуть бути невід'ємною властивістю елементів системи. Наприклад, передаточна функція двигуна при вихідній величині $-\varphi$ – кут повороту вала – містить інтегратор, тому що $\varphi(t) = \int \omega(t) dt$.

Наведене міркування одночасно показує, що не може існувати система, яка має нульову сталу помилку абсолютно для будь-якого впливу, тому що це вимагало б рівності $C_k = 0$ при всіх k . Але це може бути лише за умови, що $We(p) = 0$, проте це неможливо для реальної системи.

Повернемося до питання про збіжність функції ряду (6.8). Як будь-яка звичайна передаточна функція, $We(p)$ є дрібно-раціональною. Ряд Тейлора для такої функції завідомо сходиться в колі, всередині якого немає кореня знаменника. Тому радіус збіжності (6.8) визначається найближчим до нуля коренем характеристичного рівняння замкнутої системи. Можна оцінити радіус збіжності:

$$R = 1/|p|_{\min}. \quad (6.15)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

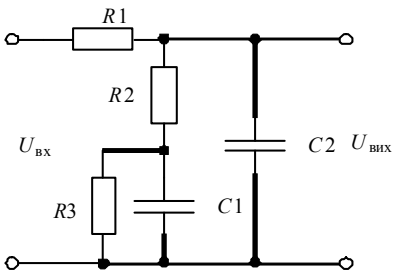
1. **Арманович, И. Г.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] / И. Г. Арманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1965.
2. **Д'Анджело, Г.** Линейные системы с переменными параметрами [Текст] / Г. Д'Анджело. – М. : Наука, 1974.
3. **Заде, Д.** Теория линейных систем [Текст] / Д. Заде, Ч. Дезоер. – М. : Наука, 1970.
4. **Зайцев, Г. Ф.** Теория автоматического управления и регулирования [Текст] / Г. Ф. Зайцев. – К. : Вища школа, 1989.
5. **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления [Текст] / Д. П. Ким. – М. : Физматлит, 2003. – Т. 1. Линейные системы. – 288 с.
6. Основы теории автоматического регулирования [Текст] / под ред. Б. К. Чемоданова. – М. : Высшая школа, 1977.
7. **Туманов, М. П.** Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления [Текст] : учеб. пособие / М. П. Туманов. – М. : МГИЭМ, 2005. – 82 с.

ДОДАТКИ

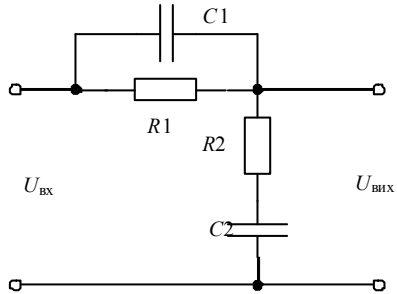
Додаток 1

Варіанти для виконання індивідуального завдання № 2

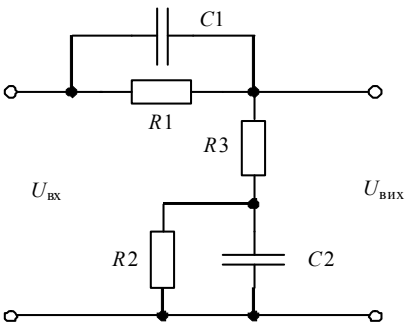
Варіант 1



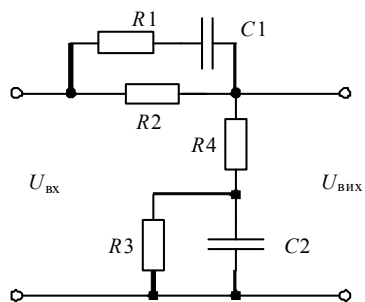
Варіант 2



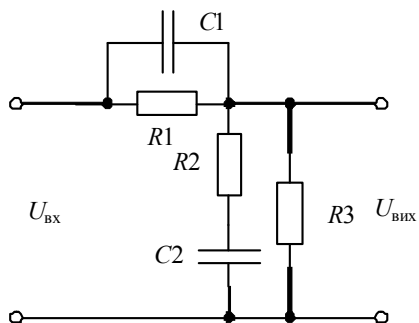
Варіант 3



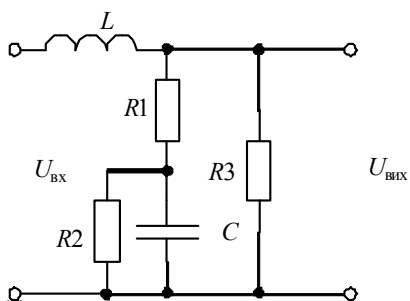
Варіант 4



Варіант 5



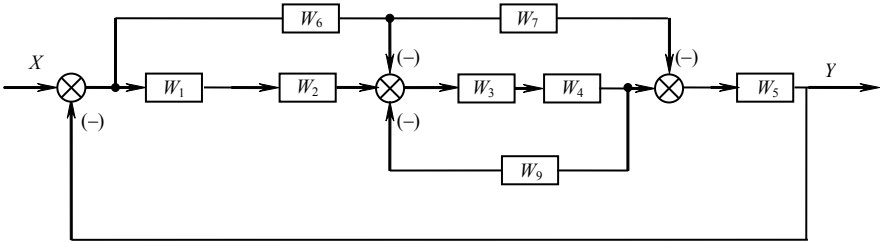
Варіант 6



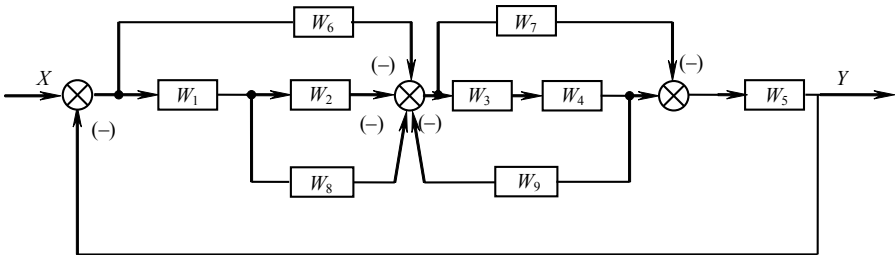
Додаток 2

Варіанти для виконання індивідуального завдання № 2

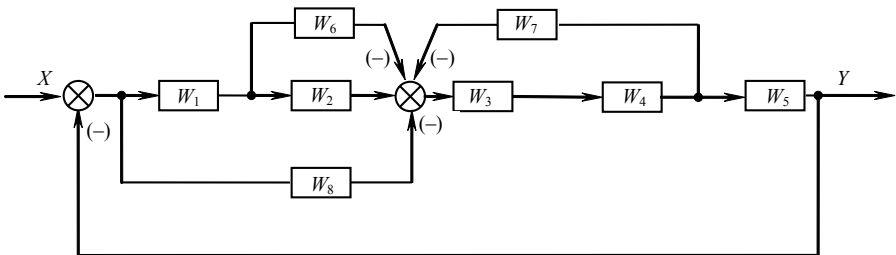
Варіант № 1



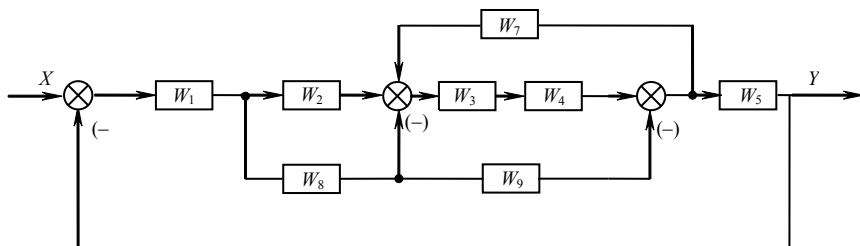
Варіант № 2



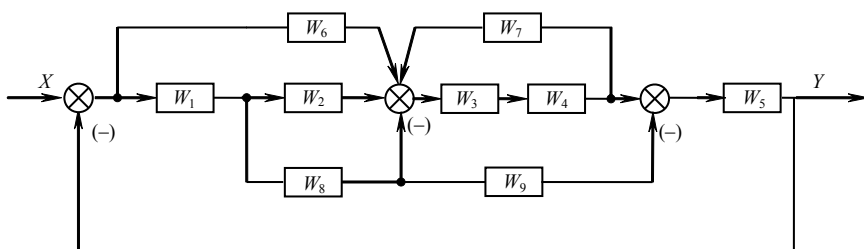
Варіант № 3



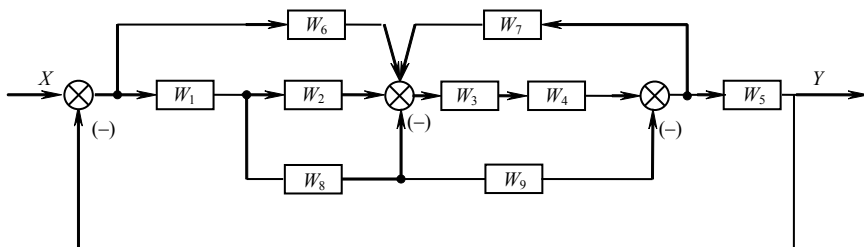
Варіант № 4



Варіант № 5



Варіант № 6



ЗМІСТ

Вступ	3
1. Формування математичних моделей елементів та систем	5
2. Методика складання диференціальних рівнянь	7
2.1. Лінеаризація та систематизація математичних моделей	7
2.2. Формалізація диференціальних рівнянь	7
2.3. Векторно-матрична форма математичних моделей	12
2.4. Перехід від векторно-матричної форми до канонічної і навпаки	13
3. Операторна форма математичних моделей. Перетворення Лапласа та їх властивості	15
3.1. Властивості перетворень Лапласа	15
3.2. Поняття передаточної функції. Властивості передаточної функції	16
3.3. Еквівалентні перетворення структурних схем	18
4. Частотні характеристики	24
4.1. Загальні положення	24
4.2. Характеристики типових структурних ланок	28
4.3. Побудова ЛАЧХ розімкнених систем	48
5. Стійкість лінійних систем автоматичного керування	51
5.1. Поняття стійкості	51
5.2. Постановка задачі стійкості за О.М. Ляпуновим	52
5.3. Критерії стійкості САК	55
5.4. Аналіз стійкості за логарифмічними частотними характеристиками	67
5.5. Стійкість систем із запізненням	69
6. Аналіз лінійних систем автоматичного керування	74
6.1. Показники якості керування	74
6.2. Інтегральні оцінки якості	77
6.3. Коефіцієнти помилок	78
Список літератури	82
Додатки	83