

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О. Г. РУДЕНКО, Ю. Г. ЗОЛОТОЙ, В. О. ЯРОШЕНКО

**Збірник завдань та методичні рекомендації
для розрахунково-графічних робіт
з динаміки матеріальної точки**

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2009

УДК 531.8(075)

Руденко О.Г., Золотой Ю.Г., Ярошенко В.О. Збірник завдань та методичні рекомендації для розрахунково-графічних робіт з динаміки матеріальної точки. – Миколаїв: НУК, 2009. – 36 с.

Кафедра теоретичної механіки

Збірник містить чотири комплекти завдань для курсової роботи з динаміки матеріальної точки, охоплює теми: пряма та обернена задачі динаміки, динаміка відносного руху точки.

Кожен комплект включає тридцять варіантів завдань, відповідних по рівню складності вимогам учбових програм, що пред'являються до курсових робіт з теоретичної механіки у вузах. Усі завдання забезпечені відповідями і докладними методичними вказівкам до їх виконання.

Рецензент канд.техн.наук О.М. Влялько

*Згідно з наказом ректора НУК № 08 від 09.01.2008
"навчально-методичні посібники, методичні вказівки
друкуються в авторській редакції" і відповідальність
за їх редагування несе автор.*

Завдання 1

ВИЗНАЧЕННЯ РІВНОДІЙНИХ СИЛ, ПРИКЛАДЕНИХ ДО МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ, ПО ЗАДАНИХ РІВНЯННЯХ РУХУ ТОЧКИ

Матеріальна точка M масою m рухається під дією рівнодіючої $\vec{F}$ сил, прикладених до неї, і описує траєкторію, параметричні рівняння якої мають вигляд

$$x = f_1(t); y = f_2(t).$$

Визначити величину і напрям рівнодійної сил, прикладених до матеріальної точки, а також величину і напрям швидкості і прискорення точки в початковий момент часу ($t_0 = 0$) і для моменту часу $t = t_1$. Побудувати траєкторію руху і показати на ній положення точки, напрям її швидкості, прискорення і рівнодійної сили для заданих моментів часу.

Необхідні дані приведені у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Номер варіанту	m , кг	x	y	t_1 , с
		м		
1	5	$4\cos t$	$2 - 2\sin t$	$\pi/4$
2	5	$2t^2 + 3$	$4t$	1
3	5	$2\cos 2t$	$4\sin t$	$\pi/2$
4	2	$2t$	$4t^2$	1
5	1	$3\cos 2t$	$4\cos 2t$	$\pi/2$
6	9	$4\sin \frac{\pi}{3}t - 3$	$2\cos \frac{\pi}{3}t$	3/2

Продовж. табл. 1.1

Номер варіанту	m , кг	x	y	t_1 , с
		М		
7	2	$2 \sin \frac{\pi}{2} t$	$2 \cos \frac{\pi}{2} t$	1/2
8	5	$2 t^2$	$-\frac{1}{3} t^3$	$\sqrt{2}$
9	$\sqrt{2}$	t^2-1	$2-t^2$	2
10	1	$2 \sin \pi t^2$	$4 \cos \pi t^2$	1
11	0,5	$2 t$	$4 t^3-2$	1
12	1	$\frac{4 t^2}{1+t^2}$	$\frac{4 t^3}{1+t^2}$	1
13	2	$-2 t-2$	$\frac{2}{t+1}$	1
14	1	$\operatorname{tg} t$	$\cos ^2 t$	$\pi / 4$
15	1	$(1+\cos t) \cos t$	$(1+\cos t) \sin t$	$\pi / 2$
16	2	$4 t-3 t^2$	$3 t$	2
17	1	t	$\sin \pi t^2$	$\sqrt{2} / 2$
18	2	$2 e^t$	e^{-t}	1
19	2	$\sin 2 t$	$\cos 2 t$	$\pi / 3$
20	1	t^2	e^{t^2}	1
21	2	t	$\frac{1}{1+t^2}$	1
22	2	t	e^{-t^2}	1
23	1	t	$-\frac{1}{2} t^2+2 t+1$	2
24	2	$t-\sin ^t$	$1-\cos t$	$(3 / 4) \pi$
25	1	$2 \cos t+2 t \sin t$	$2 \sin t-2 t \cos t$	π
26	5	$\frac{1}{2} t^3$	t^2	2
27	1	$\operatorname{tg} \frac{t}{2}$	$\sin t$	$\pi / 2$

Продовж. табл. 1.1

Номер варіанту	m , кг	x	y	t_1 , с
		М		
28	5	$2t$	$e^t \sin \frac{\pi}{2} t$	1
29	1	$4e^{-t} + 4e^t$	$2e^{-t} - 2e^t$	1
30	2	$4\sin \frac{\pi}{4} t^2 - 2$	$4\cos \frac{\pi}{4} t^2 + 3$	1

Приклад виконання завдання і методичні вказівки

Матеріальна точка M масою $m = 2$ кг рухається під дією рівнодійної $\vec{F}$ сил, прикладених до неї, і описує траєкторію, параметричні рівняння якої мають вигляд

$$x = 4 \cos^3 t \text{ м}; y = 4 \sin^3 t \text{ м.}$$

Визначити величину і напрям рівнодійної $\vec{F}$ сил, а також величину і напрям швидкості і прискорення точки в початковий момент часу ($t_0 = 0$) і для моменту часу $t_1 = \frac{\pi}{4}$ с.

Побудувати траєкторію руху і показати на ній положення точки, напрям швидкості, прискорення і рівнодійної сили для моментів часу t_0 і t_1 .

Рішення

Закон руху матеріальної точки заданий координатним способом:

$$x = 4 \cos^3 t; y = 4 \sin^3 t. \quad (1.1)$$

Виключивши з рівнянь руху (1.1) час, отримаємо рівняння траєкторії руху матеріальної точки

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3} (\cos^2 t + \sin^2 t),$$

або

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}. \quad (1.2)$$

Як видно з рівняння (1.2), траєкторією руху матеріальної точки є астроїда (вона зображена на рис.1.1).

Оскільки рух матеріальної точки заданий рівняннями в координатній формі, то заздалегідь знайдемо проекції рівнодійної на вісі декартових координат по формулах

$$F_x = ma_x; F_y = ma_y, \quad (1.3)$$

а потім величину і напрям самої рівнодійної:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \quad (1.4)$$

$$\cos(\vec{F}; \vec{i}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F}; \vec{j}) = \frac{F_y}{F}, \quad (1.5)$$

де a_x, a_y – проекції прискорення матеріальної точки на вісі декартових координат.

З рівнянь (1.1) визначимо проекції швидкості і прискорення матеріальної точки на вісі декартових координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -12 \cos^2 t \sin t; \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 12 \sin^2 t \cos t; \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = 24 \cos t \sin^2 t - 12 \cos^3 t; \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = 24 \sin t \cos^2 t - 12 \sin^3 t. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Величину і напрям швидкості і прискорення матеріальної точки визначимо по формулах

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \cos(\vec{v}; \vec{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}; \vec{j}) = \frac{v_y}{v}; \quad (1.8)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \cos(\vec{a}; \vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}; \vec{j}) = \frac{a_y}{a}. \quad (1.9)$$

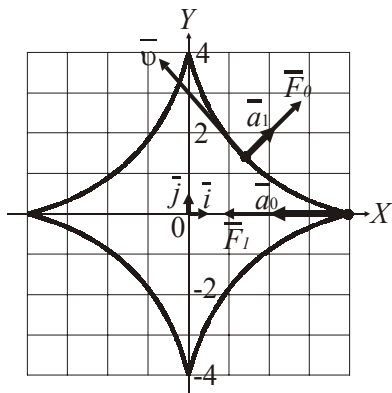


Рис. 1.1

Підставивши вирази (1.7) в (1.3), отримаємо проекції рівнодійної сили на вісі декартових координат, а по формулах (1.4) і (1.5) визначимо величину і напрям самої рівнодійної сили:

$$\begin{aligned} F_x &= 24(2\sin^2 t - \cos^2 t)\cos t; \\ F_y &= 24(2\cos^2 t - \sin^2 t)\sin t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Тоді

$$F = 24\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}. \quad (1.11)$$

Знайдемо координати точки, величину і напрям її швидкості і прискорення, величину і напрям рівнодійної сили в момент часу $t_0 = 0$ та $t_1 = \frac{\pi}{4}$ с. Для цього підставимо задані моменти часу у вирази (1.1), (1.5)–(1.11) і результати обчислень зведемо в таблицю 1.2.

Таблиця 1.2

Час t , с	Координати точки		Швидкість точки			Прискорення точки			Рівнодійна сила		
	x	y	v , м/с	$\cos(\vec{v}; \hat{i})$	$\cos(\vec{v}; \hat{j})$	a , м/с ²	$\cos(\vec{a}; \hat{i})$	$\cos(\vec{a}; \hat{j})$	F , Н	$\cos(\vec{F}; \hat{i})$	$\cos(\vec{F}; \hat{j})$
	м										
0	4	0	0	—	—	12	−1	0	24	−1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	6	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	6	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	12	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

На рис. 1.1 зображена траєкторія руху точки, показано її положення, напрям швидкості, прискорення і рівнодійної сили для заданих моментів часу.

Завдання 2

ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ЗА ДАНИМИ СИЛАМИ

Матеріальна точка M масою m рухається під дією змінної сили $\vec{F}$, заданої її проекціями F_x і F_y на вісі декартових координат.

Визначити, траєкторію руху матеріальної точки за заданих початкових умов, а також вказати положення точки в початковий момент часу ($t_0 = 0$) і у момент часу $t = t_1$. Необхідні дані приведені в табл. 2.1, в якій прийняті наступні позначення: x_0, y_0 і $\dot{x}_0, \dot{y}_0$ – координати точки і проекції її швидкості на вісі декартових координат в початковий момент часу.

Таблиця 2.1

Номер варіанту	m , кг	F_x	F_y	Початкові умови				t , с
				x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
				м		м/с		
1	2	$12 \sin t$	$16 \cos(2t)$	0	-2	-6	0	$\frac{\pi}{4}$
2	2	$4(e^{-t} + e^t)$	$8(e^{-t} - e^t)$	4	0	0	-8	1
3	4	$-\frac{16}{(1+t)^3}$	0	-2	-4	2	-4	1
4	1	$-16x$	$-16y$	2	0	0	16	$\frac{\pi}{8}$
5	2	0	$2\sqrt{1 + \dot{y}^2}$	0	1	1	0	2
6	4	$8e^{2t}$	$-8\dot{y}$	0,5	0,5	1	1	1
7	2	$4(2\sin^2 t - 7\cos^2 t)\sin t$	$4(2\cos^2 t - 7\sin^2 t)\cos t$	0	0	2	0	$\frac{\pi}{4}$
8	1	$6y$	4	0	0	0	0	2
9	1	$-\dot{x}$	4	1	0	1	0	1
10	2	$2(\sin t + t \cos t)$	$2(\cos t - t \sin t)$	0	1	0	0	π
11	m	$-m(25x + 6\dot{x})$	$-m(25y + 6\dot{y})$	2	4	0	0	$\frac{\pi}{8}$
12	4	0	$4e^{-t^2} (2t^2 - 1)$	0	0,5	2	0	1
13	2	$2e^t$	$2\dot{y} - \dot{y}^2$	1	0	1	1	2
14	2	$-4\pi \sin \frac{\pi}{4} t^2 -$ $-2\pi^2 t^2 \cos \frac{\pi}{4} t^2$	$4\pi \cos \frac{\pi}{4} t^2 -$ $-2\pi^2 t^2 \sin \frac{\pi}{4} t^2$	0	2	0	0	1
15	3	6	$9t$	2	2	0	0	2
16	m	$-k^2 mx$	$-k^2 my$	a	0	0	b	$\frac{\pi}{2k}$

Продовж. табл. 2.1

Номер варіанту	m , кг	F_x	F_y	Початкові умови				t , с
				x_0	y_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	
				м		м/с		
17	4	$4 \sin t$	$4 \cos t$	0	0	0	0	π
18	6	12	$12e^{t^2} (1+2t^2)$	0	1	0	0	1
19	1	$-4 \sin 2t$	$-\cos t$	0	1	2	0	$\frac{\pi}{4}$
20	m	$k^2 mx$	$k^2 my$	a	0	0	b	1
21	1	$16 \cos 2t$	$12 \sin 2t$	-4	0	0	-6	$\frac{\pi}{8}$
22	3	$6e^t$	$3e^{-t}$	2	1	2	-1	1
23	1	$e^t - x + 2\dot{x}$	0	0	0	0	1	2
24	6	24	$12t$	1	2	0	0	3
25	2	$-4\dot{x}$	$8e^{2t}$	-0,5	1	1	2	0,5
26	m	$-4mx$	$-16my$	2	4	0	0	$\frac{\pi}{2}$
27	9	$-4\pi^2 \sin \frac{\pi}{3} t$	$-4\pi^2 \sin \frac{\pi}{3} t$	1	1	$\frac{4\pi}{3}$	0	3
28	4	4	$-12x$	0	2	0	0	2
29	2	$2e^t$	$8e^{2t} (e^{2t} - 1)(e^{2t} + 1)^{-3}$	1	0,5	1	-0,5	1
30	1	$24(3\cos^2 t - 1)\sin t$	$24(3\sin^2 t - 1)\cos t$	0	8	0	0	$\frac{\pi}{4}$

Приклад виконання завдання і методичні вказівки

Матеріальна точка M масою $m = 3\text{ кг}$ рухається під дією змінної сили, заданої її проекціями на вісі декартових координат у вигляді

$$F_x = 12(2\cos 2t - \cos t) \text{ Н}; \quad F_y = 12(2\sin 2t - \sin t) \text{ Н}.$$

Визначити траєкторію руху точки за наступних початкових умов:

$$x_0 = 2 \text{ м}, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0.$$

Побудувати траєкторію руху і вказати на ній положення точки у момент часу $t_0 = 0$ і $t_1 = \frac{\pi}{4}$ с.

Рішення

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки мають вигляд

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x; \quad m \frac{dv_y}{dt} = F_y. \quad (2.1)$$

Тут $v_x = d_x/d_t$, $v_y = d_y/d_t$ – проекції швидкості точки на вісі декартових координат.

Після підстановки відомих величин в рівняння (2.1)

$$\frac{dv_x}{dt} = 4(2\cos 2t - \cos t); \quad \frac{dv_y}{dt} = 4(2\sin 2t - \sin t).$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$dv_x = 4(2\cos 2t - \cos t)dt; \quad dv_y = 4(2\sin 2t - \sin t)dt. \quad (2.2)$$

Проінтегруємо вирази (2.2):

$$v_x = 4\sin 2t - 4\sin t + c_1; \quad v_y = -4\cos 2t + 4\cos t + c_2. \quad (2.3)$$

Враховуючи, що $v_x = d_x/d_t$, $v_y = d_y/d_t$, отримаємо

$$\begin{aligned} x &= -2\cos 2t + 4\cos t + c_1t + c_3; \\ y &= -2\sin 2t + 4\sin t + c_2t + c_4. \end{aligned} \quad (2.4)$$

У виразах (2.3), (2.4) c_1, c_2, c_3, c_4 – постійні інтегрування, які визначаються з використанням початкових умов. Підставивши початкові умови в рівняння (2.3), (2.4), отримаємо $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

Тоді рівняння руху точки матимуть вигляд

$$x = 4 \cos t - 2 \cos 2t; \quad y = 4 \sin t - 2 \sin 2t. \quad (2.5)$$

Для визначення траєкторії руху точки з рівнянь руху (2.5) виключимо час t . Зведемо в квадрат ліві і праві частки рівнянь (2.5) і почленно їх складемо:

$$x^2 + y^2 = 16(\cos^2 t + \sin^2 t) + 4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) - 16(\cos^2 t \cos 2t + \sin t \sin 2t); \quad (2.6)$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 16(1 - \cos t).$$

Перетворимо вирази (2.5) таким чином:

$$x = 4 \cos t - 2(2 \cos^2 t - 1) = 4(1 - \cos t) \cos t + 2; \quad y = 4(1 - \cos t) \sin t.$$

Остаточно буде

$$(x - 2)^2 + y^2 - 16(1 - \cos t)^2. \quad (2.7)$$

Використовуючи вирази (2.6) і (2.7), отримаємо рівняння траєкторії руху точки

$$(x^2 + y^2 - 4)^2 = 16[(x - 2)^2 + y^2].$$

Траєкторією руху точки являється кардіоида. На рис. 2.1 зображена траєкторія руху точки і на ній показано положення точки в початковий момент часу і у момент часу

$$t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ с.}$$

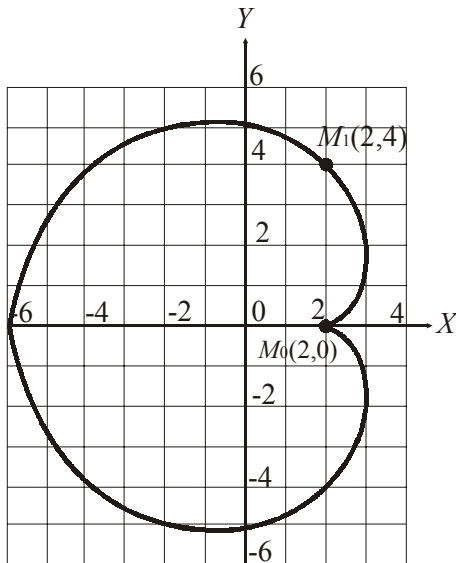


Рис. 2.1

Завдання 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Тіло починає рухатися з точки A із швидкістю v_A і в точці B отримує швидкість v_B . На ділянці BC тіло продовжує рух і потрапляє в точку C , маючи швидкість v_C (рис. 3.1–3.6).

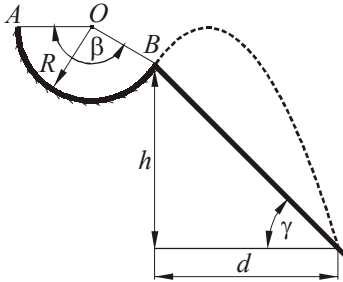


Рис. 3.1

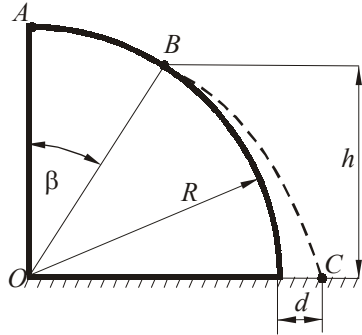


Рис. 3.2

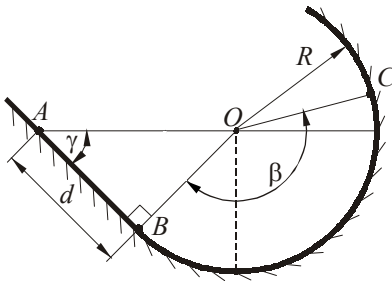


Рис. 3.3

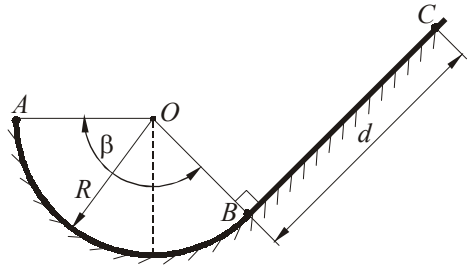


Рис. 3.4

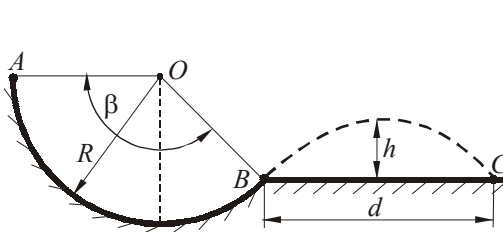


Рис. 3.5

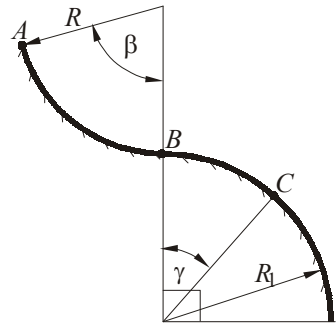


Рис. 3.6

У варіантах 1–10, 21–27 в точці B тіло відривається від поверхні і здійснює вільне падіння в точку C . У варіантах 28–30 тіло покидає поверхню BC в точці C , а у варіантах 11–17, 20 в точці C тіло зупиняється.

При русі тіла по криволінійній поверхні силами тертя знехтувати, а на прямолінійних ділянках руху коефіцієнт тертя ковзання тіла f .

При вирішенні завдань тіло прийняти за матеріальну точку, опором повітря знехтувати.

У табл.3.1 приведені відомі числові дані, а знаком питання відмічені ті величини, які необхідно визначити.

Таблиця 3.1

Номер варіанту	Номер рисунка	R	R_1	β	γ	v_A	v_B	v_C	d	h	f
		м		град		м/с		м			
1	3.1	10	—	90	60	0	?	—	?	—	—
2	3.1	20	—	120	30	10	?	—	—	?	—
3	3.1	?	—	90	45	12	?	—	40	—	—
4	3.1	5	—	60	60	?	?	—	20	—	—
5	3.1	6	—	135	30	?	?	—	-	30	—
6	3.2	10	—	?	-	2	—	—	?	—	—
7	3.2	12	—	45	-	?	—	—	?	—	—
8	3.2	?	—	30	-	10	—	—	?	—	—
9	3.2	15	—	?	-	5	—	—	?	—	—
10	3.2	12	—	-	-	?	10	—	?	—	—
11	3.3	—	—	?	45	2	?	0	4	—	0,10
12	3.3	—	—	?	30	3	4	0	4	—	?
13	3.3	—	—	150	60	?	?	0	6	—	0,15
14	3.3	—	—	?	45	4	8	0	?	—	0,30
15	3.3	—	—	?	30	?	8	0	10	—	0,25
16	3.4	10	—	120	—	5	?	0	?	—	0,10
17	3.4	1,5	—	90	—	?	?	0	10	—	0,15
18	3.4	?	—	60	—	6	12	14	?	—	0,12
19	3.4	7	—	90	—	6	?	?	7	—	0,14
20	3.4	8	—	135	—	8	?	0	12	—	?
21	3.5	6	—	120	—	6	—	—	?	?	—
22	3.5	5	—	120	—	?	?	—	10	—	—
23	3.5	3	—	?	—	?	8	—	6	—	—
24	3.5	?	—	135	—	10	12	—	-	?	—
25	3.5	?	—	?	—	6	9	—	-	3	—
26	3.5	3	—	150	—	?	8,5	—	?	—	—
27	3.5	4	—	?	—	?	8,3	—	7	—	—

Номер варіанту	Номер рисунка	R	R_1	β	γ	v_A	v_B	v_C	d	h	f
		м		град		м/с			м		
28	3.6	2	4	60	?	2	?	—	—	—	—
29	3.6	0,5	6	60	45	?	—	?	—	—	—
30	3.6	?	4	30	—	5	6	?	—	—	—

Приклад виконання завдання

Тіло починає рухатися з точки A з швидкістю v_A і в точці B набуває швидкості v_B . Потім на ділянці BC тіло продовжує рух і в точці C покидає поверхню, здійснюючи далі вільне падіння (рис. 3.7). Визначити швидкість тіла в точці C і кут γ , при якому тіло покидає поверхню, якщо $v_A = 2$ м/с, $A = 2$ м, $R = 2$ м, $R_1 = 10$ м. При русі тіла по криволінійних поверхнях силами тертя нехтувати.

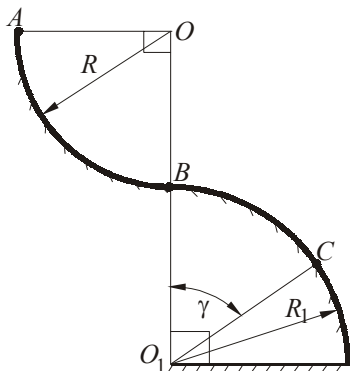


Рис. 3.7

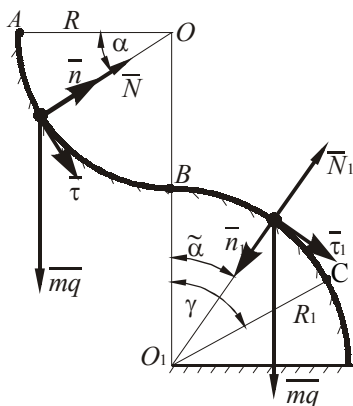


Рис. 3.8

Рішення

Прийmemo тіло за матеріальну точку. Рух тіла на ділянці AC розіб'ємо на два: рух тіла по криволінійних поверхнях AB і BC .

Розглянемо рух тіла на ділянці AB . Покажемо тіло в будь-якому проміжному положенні, що характеризується кутом α (рис. 3.8).

На тіло діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і нормальна реакція $\vec{N}$ поверхні.

Виберемо натуральну систему координат: $\vec{\tau}_1$ – одиничний орт, спрямований по дотичній до траєкторії руху в даній точці; $\vec{n}$ – одиничний орт, спрямований до центру кривизни перпендикулярно орту $\vec{\tau}$.

Запишемо основний закон динаміки матеріальної точки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (3.1)$$

Спроекуємо вираз (3.1) на натуральні вісі координат:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \cos \alpha; \quad (3.2)$$

$$m \frac{v^2}{R} = N - mg \sin \alpha. \quad (3.3)$$

Тут $\frac{dv}{dt} = a_\tau$ – дотичне прискорення точки; $\frac{v^2}{R} = a_n$ – нормальне прискорення точки.

Подамо прискорення a_τ у вигляді:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dv} = \frac{v dv}{ds},$$

де $s = R\alpha$.

Тоді $ds = R d\alpha$.

Отже
$$a_\tau = \frac{v dv}{R d\alpha}. \quad (3.4)$$

З виразу (3.2) з урахуванням (3.4) отримаємо

$$v dv = Rg \cos \alpha d\alpha.$$

Після інтегрування останнього виразу

$$v^2 = v_A^2 + 2Rg \sin \alpha.$$

Якщо тіло потрапляє в точку $B \left(\alpha = \frac{\pi}{2} \right)$, то його швидкість буде

$$v_B^2 = v_A^2 + 2Rg. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.3) в даному випадку нам не знадобилося.

Розглянемо рух тіла, на ділянці BC . Як і раніше виберемо натуральну систему координат $\vec{n}_1$ і $\vec{\tau}_1$. Розглянемо будь-яке проміжне положення тіла на ділянці BC , що характеризується кутом α .

Спроекувавши виразу (3.1) на натуральні вісі координат, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$m \frac{d\tilde{v}}{dt} = mg \sin \tilde{\alpha}; \quad (3.6)$$

$$m \frac{\tilde{v}^2}{2} = mg \cos \tilde{\alpha} - N_1. \quad (3.7)$$

З врахуванням рівнянь (3.6) і (3.4) отримаємо

$$\tilde{v}^2 = v_B^2 + 2R_1g(1 - \cos \tilde{\alpha}).$$

Якщо тіло потрапляє в точку C ($\tilde{\alpha} = \gamma$), то воно набуває швидкості

$$v_C^2 = v_B^2 + 2R_1g(1 - \cos \gamma). \quad (3.8)$$

Для визначення кута, при значенні якого тіло покидає поверхню, використовуємо рівняння (3.7).

Якщо тіло покидає поверхню в точці C ($\tilde{\alpha} = \gamma$), то $N_1 = 0$.

Тоді з (3.7) випливає

$$v_C^2 - R_1g \cos \gamma. \quad (3.9)$$

Підставивши (3.9) в (3.8), отримаємо

$$\cos \gamma = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{v_B^2}{R_1g} \right). \quad (3.10)$$

Отже, рівнянь (3.5), (3.8) і (3.10) достатньо для розв'язку цієї задачі. Після підстановки числових даних в ці рівняння отримаємо

$$\cos \gamma = 0,814; \quad v_C = 8,93 \text{ м/с}; \quad \gamma = 35^\circ 33'.$$

Завдання 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Пластина ABC обертається довкола вісі O_1Z_1 з постійною кутовою швидкістю $\omega = 4$ рад/с.

По каналу AB рухається повзун M (рис. 4.1). У початковий момент часу повзун знаходився в точці A і відносно каналу не рухався.

Варіант 1. Визначити швидкість повзуна M відносно каналу AB у момент часу $t = 0,5$ с.

Варіант 2. Визначити кориолісове прискорення у момент часу $t = 1$ с.

Варіант 3. Скільки часу знадобилося повзунові M , щоб досягти точки B ($AB = 3$ м)?

Варіант 4. Визначити тиск, спричинений повзуном в площині пластини на бічну поверхню каналу у момент часу $t = 1$ с. Маса повзуна дорівнює 2 кг.

Варіант 5. Визначити, в який момент часу тиск повзуна на бічну поверхню каналу буде перпендикулярний площині пластини.

Варіант 6. Металева кулька M масою $m = 10^{-3}$ кг вільно насаджена на гладкий діелектричний криволінійний стрижень AC (рис. 4.2). Стрижень рівномірно обертається навколо вісі $O_1 Y_1$ з кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с в однорідному вертикально орієнтованому магнітному полі з індукцією $B = 10$ Тл. По якій кривій має бути зігнутий стрижень, щоб кулька, володіючи додатнім зарядом $q = 10^{-3}$ Кл, знаходилася у відносному спокої в будь-якому місці стрижня? ($q = 10$ м/с²; на заряд, що рухається в магнітному полі, діє сила Лоренца $F_A = q(\vec{v}_a \times \vec{B})$, де $\vec{v}_a$ – абсолютна швидкість заряду).

Варіант 7. Стрижень зігнутий по кривій $xy = 16$ м² (рис. 4.3). У яких межах можна змінювати кутову швидкість обертання стрижня, щоб кулька знаходилася у відносній

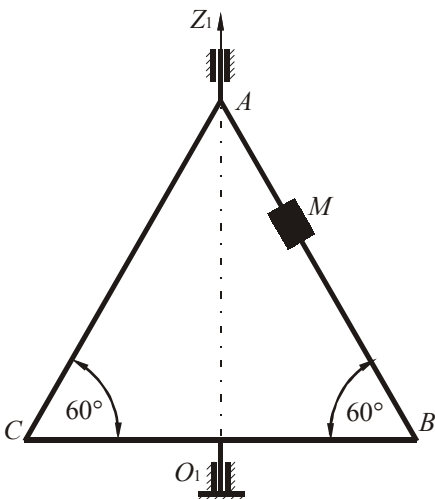


Рис. 4.1

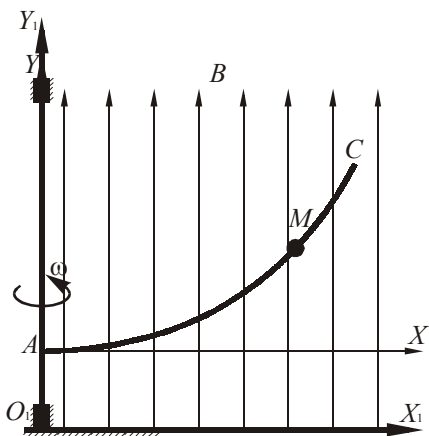


Рис. 4.2

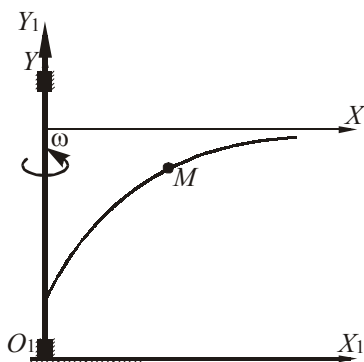


Рис. 4.3

рівновазі в точці з координатами $x = y$, якщо коефіцієнт тертя ковзання між кулькою і стрижнем $f = 0,2$?

Варіант 8. Стрижень зігнутий по кривій $y = -g/x$ м (рис. 4.3). Знайти положення відносного спокою кулі M і його тиск на стрижень в цьому положенні.

У розрахунках прийняти: $\omega = 3,46$ рад/с; $g = 9,8$ м/с²; $m = 2,07$ кг.

Варіант 9. Яку швидкість відносно стрижня в точці C ($\alpha = 90^\circ$) матиме куля M , якщо стрижень зігнутий по дузі кола

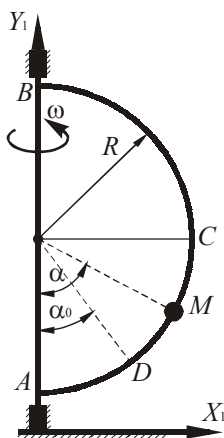


Рис. 4.4

радіусу R і обертається довкола вертикального діаметру AB з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 4.4)? Куля, яка без тертя може ковзати по стрижню, в початковий момент знаходилась в точці D ($\alpha_0 = 30^\circ$) і відносно стрижня не переміщувалась. У розрахунках прийняти: $R = 1$ м; $\omega = 5$ рад/с.

Варіант 10. Використовуючи умову варіанту 9 (див. рис. 4.4), визначити тиск, який спричиняє куля на стрижень в точці з кутом $\alpha = 60^\circ$. У розрахунках прийняти: $R = 1$ м; $\omega = 4$ рад/с; $m = 2$ кг.

Варіанти 11–12. Стрижень обертається з постійною кутовою швидкістю ω відносно вісі O_1Y_1 і складає з нею кут α . Куля M має можливість ковзати по поверхні стрижня (рис. 4.5). Коефіцієнт тертя між поверхнею кулі і стрижня $f = 0$. У початковий момент куля знаходилась в точці A і їй була надана швидкість 4 м/с уздовж стрижня.

Варіант 11. Визначити рівняння руху кулі M відносно стрижня. У розрахунках прийняти: $\omega = 4$ рад/с; $\alpha = 30^\circ$; $g = 10$ м/с².

Варіант 12. Який тиск чинить куля на стрижень, знаходячись на середині стрижня, довжина якого $AB = 2$ м. У розрахунках узяти дані варіанту II, маса кулі 2 кг.

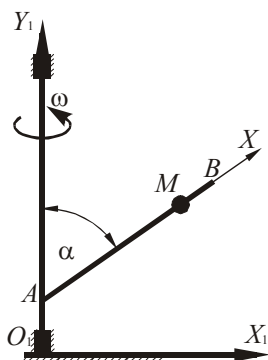


Рис. 4.5

Варіанти 13–17. Вертикальний вал O_1Z_1 з привареним до нього під кутом α прямолінійним стрижнем AB рівномірно обертається з кутовою швид-

кістю ω . На стрижні AB знаходиться повзун M масою m , до одного кінця якого (рис. 4.6) прикріплена пружина жорсткості C .

Фіксує пристрій закріпив повзун в положенні недеформованої пружини, довжина якої l . В деякий момент часу фіксує пристрій звільнив повзун M .

Варіант 13. Визначити рівняння руху повзуна відносно стрижня AB . У розрахунках прийняти: $C = 901 \text{ Н/м}$; $l = 0,2 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $m = 1 \text{ кг}$; $\omega = 2 \text{ рад/с}$.

Варіант 14. Визначити тиск, створений повзуном на стрижень у момент часу $t = \frac{\pi}{20} \text{ с}$. В розрахунках прийняти:

$m = 0,5 \text{ кг}$; $l = 0,2 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $\omega = 4 \text{ рад/с}$; $C = 202 \text{ Н/м}$.

Варіант 15. Визначити максимальне значення кориолісової сили інерції. У розрахунках прийняти: $m = 0,5 \text{ кг}$; $l = 0,2 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $\omega = 4 \text{ рад/с}$; $C = 202 \text{ Н/м}$.

Варіант 16. Визначити, при якому мінімальному значенні кутової швидкості повзун M не здійснюватиме коливального руху. Знайти рівняння руху повзуна, якщо $m = 1 \text{ кг}$; $l = 0,2 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $C = 200 \text{ Н/м}$.

Варіант 17. За який час повзун M досягає упору B ($AB = 1 \text{ м}$)? У розрахунках прийняти: $\alpha = 30^\circ$; $C = 100 \text{ Н/м}$; $m = 2 \text{ кг}$; $\omega = 20 \text{ рад/с}$; $l = 0,1 \text{ м}$.

Варіанти 18–20. Кривошипи O_1A і O_2D рівномірно обертаються навколо осей, що проходять через точки O_1 і O_2 , з кутовою швидкістю ω . У каналі AB , розташованому по діагоналі квадратної плити $ABCD$, знаходиться повзун M (рис. 4.7). У початковий момент часу повзун знаходився в точці A в стані спокою відносно плити, а кривошипи займали горизонтальне положення ($\varphi = 0$). Довжина кривошипів l .

Варіант 18. Визначити швидкість повзуна M відносно каналу AB у момент часу $t = \frac{1}{4} \text{ с}$. У розрахунках прийняти: $\omega = 4\pi \text{ рад/с}$; $l = 0,2 \text{ м}$.

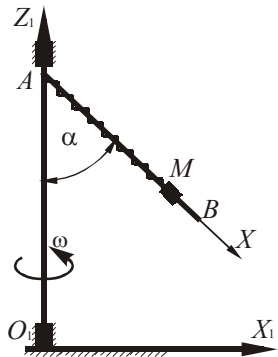


Рис. 4.6

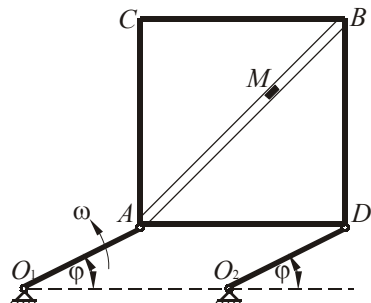


Рис. 4.7

Варіант 19. На яку відстань переміститься повзун M по каналу AB за час $0,5$ с? У розрахунках прийняти: $\omega = 2\pi$ рад/с; $l = 0,3$ м.

Варіант 20. Визначити максимальне значення тиску, створюваного повзунком на бічну стінку каналу AB . У розрахунках прийняти: $m = 2$ кг; $\omega = 5$ рад/с; $l = 0,2$ м.

Варіант 21. Кругла трубка радіусу $R = 2$ м обертається довкола вертикальної вісі згідно закону $\varphi = 2t^2$ рад/с.

У трубці знаходиться кулька M (рис. 4.8).

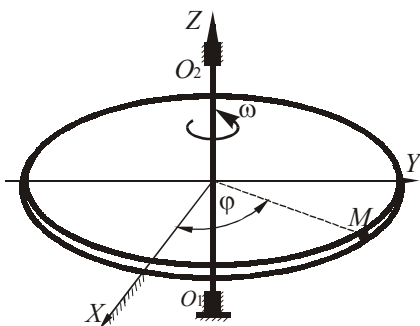


Рис. 4.8

Визначити тиск, який створює кулька на стінці трубки у момент часу $t = 1$ с, якщо в початковий момент часу кулька відносно трубки не переміщувалася. Маса кульки $m = 0,5$ кг.

Варіанти 22–23. Площина кільцевої трубки радіусу R обертається навколо вертикальної вісі O_1O_2 зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 4.9). У трубці знаходиться кулька M .

У початковий момент часу кулька знаходилася в точці A і відносно трубки не переміщувалася.

Варіант 22. Визначити величину швидкості кульки M відносно трубки в точці B .

У розрахунках прийняти: $R = 2$ м; $\omega = 3$ рад/с.

Варіант 23. Який тиск чинить кулька на стінку трубки в точці, в якій відрізок OM складає кут $\varphi = 45^\circ$ з відрізком OA . В розрахунках прийняти: $R = 1$ м; $m = 1$ кг; $\omega = 4$ рад/с.

Варіант 24. Тіло D рухається поступально з прискоренням a . На

похилій площині у каналі AB знаходиться повзун M , з'єднаний з пружиною жорсткості C . Фіксуєчий пристрій утримує повзун в положенні недеформованої пружини (рис. 4.10). Визначити рівняння руху повзуна,

якщо в початковий момент часу фіксуючий пристрій вимикається. В розрахунках прийняти: $\alpha = 60^\circ$; $a = 4 \text{ м/с}^2$; $C = 400 \text{ Н/м}$; $m = 4 \text{ кг}$.

Варіант 25. Тіло D рухається поступально з прискоренням a . У криволінійному каналі AB з радіусом кривизни R знаходиться куля M масою m . Визначити, яку відносну швидкість матиме кулю в точці B ($\varphi = 90^\circ$) (рис. 4.11) якщо в початковий момент часу вона знаходилась в точці A і відносно каналу не рухалась. Визначити положення кульки, при якій вона створює максимальний тиск на канал AB . У розрахунках прийняти: $a = 5,81 \text{ м/с}^2$; $R = 2 \text{ м}$.

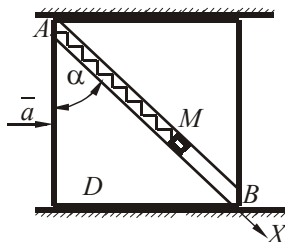


Рис. 4.10

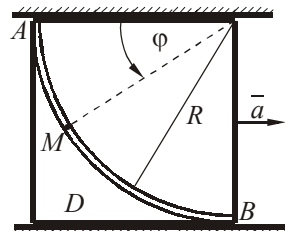


Рис. 4.11

Варіант 26. Вантаж масою m поклали на підлогу вагону і прикріпили до передньої і задньої стінок пружинами жорсткості C_1 і C_2 (рис. 4.12). Визначити рівняння відносного руху вантажу, якщо вагон почав рухатися з постійним горизонтальним прискоренням a із стану спокою.

У розрахунках прийняти: $m = 100 \text{ кг}$; $C_1 = 4 \text{ кН/м}$; $C_2 = 5 \text{ кН/м}$; $a = 4 \text{ м/с}^2$; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

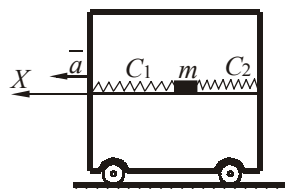


Рис. 4.12

Варіанти 27–30. Для визначення прискорення рухомого об'єкту E (судна, літака, ракети, електропоїзди і інших) можна використовувати акселерометр (рис. 4.13), основною часткою якого є вантаж B масою m , підвішений в корпусі 4 на пружинах 1, 2, 3 жорсткістю відповідно c_1 , c_2 і c_3 . Корпус акселерометра закріплено на об'єкті E , який рухається поступально з прискоренням a_e , при цьому вантаж D здійснює коливальний рух відносно корпусу акселерометра. Перо 5, зв'язане з вантажем D за допомогою важільної передачі, викреслюватиме криву коливань з амплітудою b на стрічці барабана B , що обертається.

Знайти рівняння коливального руху пера 5 відносно барабана B , а також

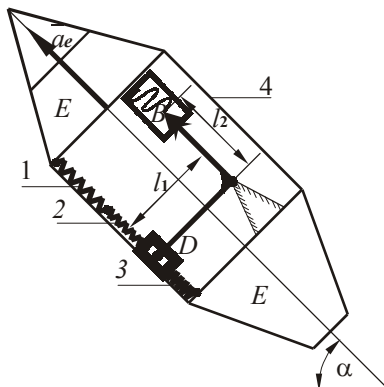


Рис. 4.13

встановити зв'язок між амплітудою b цих коливань і прискоренням a_e рухомого об'єкту.

У варіантах 27, 29 і 30 визначити також швидкість v_e об'єкту, набуту ним за час руху τ , і пройдений шлях S , якщо в початковий момент часу об'єкт мав швидкість v_{0_e} .

У початковий момент часу вантаж D знаходився у відносному спокої і при $\alpha = 0$ пружини були недеформовані, а при $\alpha \neq 0$ вантаж D знаходився в положенні статичної рівноваги.

У табл. 4.1 приведені відомі величини. Знаком питання відмічені величини, які необхідно визначити.

Таблиця 4.1

Номер варіанту	Вид руху	α , град	m , кг	c_1	c_2	c_3	$\frac{t_2}{t_1}$	b , м	$a_{2,}$ м/с ²	τ , с	v_{0_e} м/с	S , м
				Н/м								
27	Прискорення	0	0,5	100	100	50	4	10^{-3}	?	15	0	?
28	Гальмування	30	1,0	300	600	200	5	?	4	—	—	—
29	Прискорення	90	0,4	400	400	—	3	$35 \cdot 10^{-3}$	?	20	20	?
30	Прискорення	60	1,2	800	800	320	6	$35 \cdot 10^{-3}$	?	40	60	?

Приклад виконання завдання

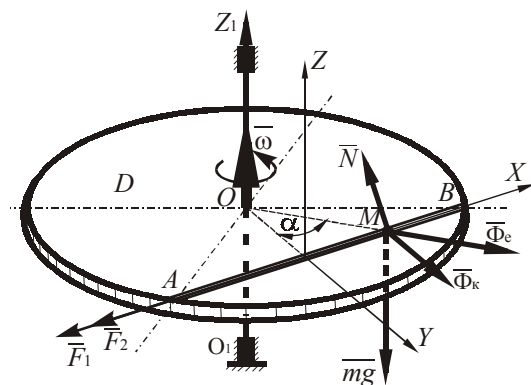


Рис. 4.14

Диск радіусом R обертається з постійною кутовою швидкістю ω довкола вісі O_1Z_1 , що проходить через центр тяжіння O диска перпендикулярно до його площини (рис. 4.14).

У каналі AB , що сполучає кінці взаємно перпендикулярних діаметрів, знаходиться повзун M масою m , сполучений з пружинами

жорсткості c_1^* і c_2^* . Інші кінці пружин закріплені в точках A і B . В початковий момент часу повзун M знаходився посередині каналу AB (у точці D), пружини були недеформовані і йому була надана швидкість v_0 уздовж каналу у напрямі до точки B . Визначити: 1) рівняння руху повзуна M по каналу AB ; 2) кориолісову силу інерції; 3) тиск, який створює повзун на стінки каналу.

Рішення

Повзун M здійснює складний рух. Рух повзуна по каналу диска – відносний рух; переносний рух – це обертання диска відносно вісі O_1Z_1 .

Нас цікавить відносний рух повзуна. Початок рухомої системи координат (див.рис. 4.14) виберемо в точці D .

Вісь X направимо уздовж каналу AB . Нехай повзун M в каналі AB займає будь-яке проміжне положення, яке характеризуватимемо координатою x . На повзун діють: сила тяжіння $m\vec{g}$, сили пружності пружини $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, реакція $\vec{N}$ стінок каналу.

Оскільки нас цікавить відносний рух повзуна, то необхідно враховувати переносну силу інерції $\vec{\Phi}_e$ і кориолісову силу інерції $\vec{\Phi}_k$, спрямовані протилежно прискоренням $\vec{a}_e^n$ і $\vec{a}_k$ (рис. 4.15).

Основний закон динаміки відносного руху повзуна має вигляд

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k. \quad (4.1)$$

Тут модулі сил мають наступні вирази:

$$\begin{aligned} F_1 &= c_1^* x; \quad \vec{F}_2 = c_2^* x; \\ \Phi_e &= m\vec{a}_e^n = m\omega^2 \vec{on}; \end{aligned}$$

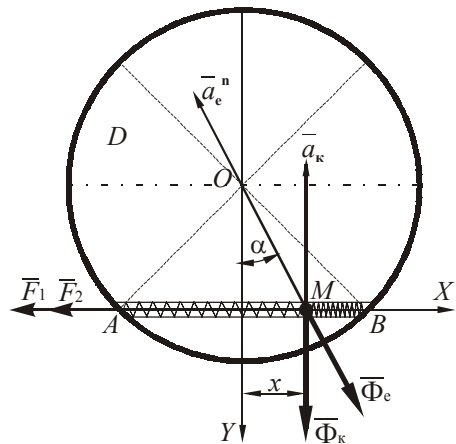


Рис. 4.15

$$\Phi_k = m\vec{a}_k = 2m\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r), \quad (4.2)$$

де $\omega_e = \omega$; $v_r = \dot{x}$; $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 1$.

1. Визначимо рівняння руху повзуна відносно каналу AB .

Спроектуємо вираз (4.1) на вісь X :

$$m\ddot{x} = -c_1^*x - c_2^*x + \Phi_e \sin \alpha.$$

Кориолісова сила інерції перпендикулярна вісі X і на цю вісь не проєктується.

Використовуючи (4.2), отримаємо

$$m\ddot{x} = -(c_1^* + c_2^*)x + m\omega^2 \cdot OM \sin \alpha;$$

але, тоді $m\ddot{x} = -(c_1^* + c_2^*)x + m\omega^2 x$; $\ddot{x} + \left(\frac{c_1^* + c_2^*}{m} - \omega^2 \right) x = 0.$

Позначимо $\kappa^2 = \frac{c_1^* + c_2^*}{m} - \omega^2.$ (4.3)

Тоді диференціальне рівняння руху повзуна має вигляд

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = 0. \quad (4.4)$$

Для рішення однорідного диференціального рівняння (4.4) складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \kappa^2 = 0. \quad (4.5)$$

Його розв'язок:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\kappa^2}. \quad (4.6)$$

Тут можливі три випадки:

а) якщо $\kappa^2 > 0$, тобто $(c_1^* + c_2^*)/m > \omega^2$ [див.(4.3)], то корені характеристичного рівняння (4.5) є уявні:

$$\lambda_1 = +ki; \lambda_2 = -ki, \text{ де } i = \sqrt{-1}.$$

Це означає, що розв'язком диференціального рівняння (4.4) є тригонометрична функція:

$$x = c_1 \cos \kappa t + c_2 \sin \kappa t, \quad (4.7)$$

де c_1, c_2 – сталі інтегрування, для визначення яких необхідно використувати початкові умови.

Відносна швидкість повзуна

$$\dot{x} = -c_1 \kappa \sin \kappa t + c_2 \kappa \cos \kappa t. \quad (4.8)$$

Початкові умови:

$$t = 0; \quad x = x_0 - 0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0 - v_0. \quad (4.9)$$

Підставимо початкові умови в (4.7) і (4.8):

$$\begin{cases} 0 = c_1; & c_1 = 0; \\ v_0 = c_2 \kappa; & c = \frac{v_0}{\kappa}. \end{cases}$$

Таким чином, рівняння руху повзуна в цьому випадку має вигляд:

$$x = \frac{v_0}{\kappa} \sin \kappa t, \quad (4.10)$$

тобто повзун здійснює гармонічні коливання;

б) якщо, $\kappa^2 = 0$ тобто $c_1^* + c_2^* / m = \omega^2$, то, з (4.6) $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Це означає, що розв'язком рівняння (4.4) є функція

$$x = c_1 t + c_2. \quad (4.11)$$

Тоді швидкість

$$\dot{x} = c_1. \quad (4.12)$$

Підставивши початкові умови (4.9) в (4.11) і (4.12), отримаємо

$$c_2 = 0; \quad c_1 = v_0.$$

Рівняння руху повзуна має вигляд

$$x = v_0 t, \quad (4.13)$$

тобто повзун рухається прямолінійно, рівномірно;

в) якщо $\kappa^2 < 0$, тобто $(c_1^* + c_2^*) / m < \omega^2$ то корені характеристичного рівняння (4.5) є дійсні і різні. Це означає, що рішенням диференціального рівняння (4.4) є функція

$$x = c_1 e^{\kappa t} + c_2 e^{-\kappa t}. \quad (4.14)$$

Швидкість

$$\dot{x} = c_1 \kappa e^{\kappa t} - c_2 \kappa e^{-\kappa t}. \quad (4.15)$$

Підставивши початкові умови (4.9) в (4.14) і (4.15), матимемо

$$c_1 = \frac{v_0}{2\kappa}; \quad c_2 = -\frac{v_0}{2\kappa}.$$

Рівняння руху повзуна має вигляд:

$$x = \frac{v_0}{2\kappa} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}). \quad (4.16)$$

2. Визначимо кориолісову силу інерції.

З формули (4.2) видно, що для визначення кориолісової сили інерції необхідно знати величину відносної швидкості v_r , яка залежно від початкових умов визначена у виразах (4.8), (4.12) або (4.15).

Слід зазначити, що відносна швидкість визначена у функції від часу. Для визначення її у функції від координати можна скористатися наступним способом:

$$\ddot{x} = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{v_r dv_r}{dx}. \quad (4.16)$$

Підставимо цей вираз прискорення повзуна в диференціальне рівняння (4.4):

$$\frac{v_r dv_r}{dx} = -\kappa^2 x;$$

$$v_r dv_r = -\kappa^2 x dx; \quad \int v_r dv_r = -\kappa^2 \int x dx;$$

$$\frac{v_r^2}{2} = -\kappa^2 \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Використавши початкові умови (4.9), отримаємо

$$c_1 = v_0^2/2.$$

Остаточно

$$v_r = \sqrt{v_0^2 - \kappa^2 x^2}. \quad (4.17)$$

Як видно з (4.17) відносна швидкість є функція від координати x . Підставивши (4.17) в (4.2), отримаємо кориолісову силу інерції у функції від координати x .

3. Визначимо тиск, який надає повзун M на диск. Спроєктуємо виразу (4.1) на вісі Y, Z :

$$\begin{cases} -N_y + \Phi_e \cos \alpha + \Phi_k = 0; \\ N_z - mg = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

З (4.18) і (4.19) знайдемо проєкції повної реакції N на вісі координат Y, Z .

$$\text{Повна реакція } N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2}.$$

Тиск Q , що надається повзуном на диск, чисельно дорівнює реакції N :
 $Q = N$.

Відповіді

До завдання 1:

Номер варіанту	F_0	F_1	Номер варіанту	F_0	F_1
	Н			Н	
1	20,00	15,80	16	2,83	16,40
2	20,00	20,00	17	4,00	1,00
3	40,00	44,70	18	4,00	1,47
4	16,00	16,00	19	1,00	1,00
5	16,00	16,00	20	2,00	2,00
6	19,74	39,48	21	2,00	6,60
7	9,87	9,87	22	10,00	31,60
8	20,00	24,50	23	8,00	2,83
9	4,00	4,00	24	8,00	1,00
10	12,60	13,10	25	3,00	2,24
11	0	12,00	26	2,00	4,00
12	12,00	12,00	27	0	1,41
13	6,28	19,70	28	15,70	33,53
14	4,48	10,90	29	12,60	23,36
15	2,00	7,00	30	8,00	13,20

До завдання 2:

Номер варіанту	Рівняння траєкторії	На інтервалі	Номер варіанту	Рівняння траєкторії	На інтервалі
1	Парабола $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$	$-6 \leq x \leq 6$	16	Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(b/k)^2} = 1$	
2	Гіпербола $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$	$4 \leq x < \infty$ $-\infty < y \leq 0$	17	Циклоїда $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$	$0 \leq x < \infty$
3	Гіпербола $xu = 8$	$-2 \leq x < 0$	18	Показова функція $y = e^x$	$0 \leq x < \infty$
4	Еліпс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$		19	$x^2 = 4y^2(1 - y^2)$	$-1 \leq x \leq 1$
5	Чіпка лінія $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$0 \leq x < \infty$	20	Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(b/k)^2} = 1$	$a \leq x < \infty$ $0 \leq x < \infty$
6	Гіпербола $y = 1 - \frac{1}{4x}$	$0,5 \leq x < \infty$	21	Еліпс $x^{2/16} + y^{2/9} = 1$	
7	Чотирипелюсткова тройнда $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < \infty$	22	Гіпербола $y = \frac{2}{x}$	$2 \leq x < \infty$
8	Парабола $y^2 = 4x$	$0 \leq x < \infty$ $0 \leq y < \infty$	23	$x = \frac{1}{2}y^2e^y$	$0 \leq x < \infty$
9	$y = 2 \ln^2(2 - x)$	$1 \leq x < 2$	24	Напівкубічна парабола $72(y - 2)^2 = (x - 1)^3$	$1 \leq x < \infty$
10	Евольвента кола $x = \sin t - t \cos t$ $y = \cos t + t \sin t$		25	Гіпербола $xu = -0,5$	$-0,5 \leq x < 0$
11	Відрізок прямої $y = 2x$		26	Парабола $y = 2x^2 - 4$	$-2 \leq x \leq 2$
12	Крива Гауса $y = \frac{1}{2}e^{-(x^{2/4})}$	$0 \leq x < \infty$	27	Еліпс $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$	

Продовження до завдання 2:

Номер варіанту	Рівняння траєкторії	На інтервалі	Номер варіанту	Рівняння траєкторії	На інтервалі
13	$y = \ln \frac{(1+x)^2}{4}$	$1 \leq x < \infty$	28	Парабола $y = -0,5x^2 + 2$	$0 \leq x < \infty$
14	Коло $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$		29	“Локон” Аньезі $y = \frac{1}{1+x^2}$	$1 \leq x < \infty$
15	Напівкубічна парабола $y = 2 + \frac{1}{2}(x-2)^{3/2}$	$2 \leq x < \infty$	30	Астроїда $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$	$-8 \leq x \leq 8$

До завдання 3:

Номер варіанту	Шукані вельчини	Номер варіанту	Шукані вельчини
1	$d = 69,3 \text{ м};$ $v_B = 14 \text{ м/с}$	16	$d = 16,94 \text{ м};$ $v_B = 13,96 \text{ м/с}$
2	$h = 44,8 \text{ м};$ $v_B = 20,97 \text{ м/с}$	17	$v_A = 0; v_B = 5,42 \text{ м/с}$
3	$R = 2,65 \text{ м};$ $v_B = 14 \text{ м/с}$	18	$d = 6,69 \text{ м};$ $R = 6,36 \text{ м}$
4	$v_A = 5,33 \text{ м/с};$ $v_B = 10,64 \text{ м/с}$	19	$v_B = 13,16 \text{ м/с};$ $v_C = 12,41 \text{ м/с}$
5	$v_A = 15,5 \text{ м/с};$ $v_B = 18 \text{ м/с}$	20	$f = 0,051;$ $v_B = 13,23 \text{ м/с}$
6	$d = 1,3 \text{ м};$ $\beta = 47^\circ 6'$	21	$d = 12,18 \text{ м};$ $h = 1,76 \text{ м}$
7	$d = 1,72 \text{ м};$ $v_A = 3,8 \text{ м/с}$	22	$v_A = 5,32 \text{ м/с};$ $v_B = 10,65 \text{ м/с}$
8	$d = 4,26 \text{ м};$ $R = 17 \text{ м}$	23	$v_A = 3,86 \text{ м/с};$ $\beta = 123^\circ 26'$

Продовження до завдання 3:

Номер варіанту	Шукані вельчини	Номер варіанту	Шукані вельчини
9	$d = 2,29 \text{ м};$ $\beta = 43^\circ 42'$	24	$R = 3,17 \text{ м};$ $h = 3,67 \text{ м}$
10	$d = 2,83 \text{ м};$ $v_A = 8,03 \text{ м/с}$	25	$R = 4,39 \text{ м};$ $\beta = 148^\circ 29'$
11	$v_B = 7,35 \text{ м/с};$ $\beta = 132^\circ 52'$	26	$d = 6,37 \text{ м};$ $v_A = 6,53 \text{ м/с}$
12	$f = 0,474;$ $\beta = 89^\circ 8'$	27	$v_A = 3,25 \text{ м/с};$ $\beta = 132^\circ 42'$
13	$v_A = 2,97 \text{ м/с};$ $v_B = 10,18 \text{ м/с}$	28	$v_B = 4,86 \text{ м};$ $\gamma = 29^\circ 51'$
14	$d = 4,95 \text{ м};$ $\beta = 132^\circ 18'$	29	$v_C = 6,45 \text{ м/с};$ $v_A = 8,12 \text{ м/с}$
15	$v_A = 2,9 \text{ м/с};$ $\beta = 102^\circ 29'$	30	$R = 4,18 \text{ м};$ $v_C = 5,87 \text{ м/с}$

До завдання 4:

Номер варіанту	Відповідь	Номер варіанту	Відповідь
1	$v_r = 1,26 \text{ м/с}$	16	$\omega_{\min} = 20 \text{ рад/с}$
2	$a_K = 15,38 \text{ м/с}^2$	17	$T = 0,22 \text{ с}$
3	$\tau = 1,29 \text{ с}$	18	$v_r = 1,82 \text{ м/с}$
4	$Q = 0,34 H$	19	$x = 0,22 \text{ м}$
5	$\tau = 0,99 \text{ с}$	20	$Q_{\max} = 23,87 H$
6	$y = 10x^2$	21	$N = 4,9 H$
7	$3,75 \text{ рад/с} \geq \omega \geq 1,3 \text{ рад/с}$	22	$v_{rb} = 8,29 \text{ м/с}$
8	$x = 2 \text{ м}; y = -4,9 \text{ м};$ $Q = 53,6 H$	23	$N = 48,7 H$

Продовження до завдання 4:

Номер варіанту	Відповідь	Номер варіанту	Відповідь
9	$v_{rc} = 1,33 \text{ м/с}$	24	$x = 1,44 \cdot 10^{-2} (1 - \cos 10t) \text{ м}$ (точка $x = 0$ відповідає положенню недеформо- ваної пружини)
10	$Q = 35,63 \text{ Н}$	25	$v_B = 4 \text{ м/с}; \varphi = 30^\circ 38'$
11	$x = 2,26 - 0,08e^{2t} -$ $- 2,08^{-2t} \text{ м}$	26	$x = 0,36(\cos 0,3t - 1) \text{ м}$
12	$Q = 27,4 \text{ Н}$	27	$a_e = 2 \text{ м/с}^2; v_e = 30 \text{ м/с};$ $s = 225 \text{ м}$
13	$x = 9,87 \cdot 10^{-3} (1 -$ $-\sin 30t - \cos 30t) \text{ м}$ (точка $x = 0$ відповідає положенню недеформо- ваної пружини)	28	$b = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
14	$Q_{\max} = 1,82 \text{ Н}$	29	$a_e = 6 \text{ м/с}^2; v_e = 140 \text{ м/с};$ $s = 1600 \text{ м}$
15	$\Phi_K = 1,2 \text{ Н}$	30	$a_e = 3,5 \text{ м/с}^2;$ $v_e = 200 \text{ м/с}; s = 5200 \text{ м}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бать М.І., Джанелідзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретична механіка в прикладах і завданнях. – М.: Фізматгиз, 1972. – Ч.ІІ. – 620 с.
2. Бутенін Н.В., Лунц О.А., Меркин Д.Р. Курс теоретичної механіки. – М.: Наука, 1971. – 460 с.
3. Меццєрський І.В. Збірка завдань по теоретичній механіке. – М.: Вища школа, 1971. – 447 с.
4. Збірка завдань по теоретичній механіці / Н.А. Бражниченко, В.Л. Кан, Б.Л. Мінцберг та ін. – М.: Вища школа, 1974. – 520 с.
5. Збірка завдань для курсових робіт по теоретичній механіке / А.А. Яблонський, С.С. Нореєко та ін. – М.: Вища школа, 1972. – 430 с.

ЗМІСТ

<i>Завдання 1. Визначення рівнодійних сил, прикладених до матеріальної точки, по заданих рівняннях руху точки</i>	<i>3</i>
<i>Завдання 2. Визначення траєкторії руху матеріальної точки за даними силами</i>	<i>7</i>
<i>Завдання 3. Диференціальні рівняння криволінійного руху матеріальної точки</i>	<i>12</i>
<i>Завдання 4. Дослідження відносного руху матеріальної точки</i>	<i>16</i>
<i>Відповіді</i>	<i>27</i>
<i>Список літератури</i>	<i>32</i>

Навчальне видання

РУДЕНКО Олександр Григорович
ЗОЛОТОЙ Юрій Григорович
ЯРОШЕНКО Володимир Олександрович

**Збірник завдань та методичні рекомендації
для розрахунково-графічних робіт
з динаміки матеріальної точки**

(українською мовою)

Комп'ютерна верстка *В.Г. Мазанко*
Коректор *М.О. Паненко*

Свідectво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 12.02.09. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 2,0. Обл.-вид. арк. 2,1.
Тираж 100 прим. Вид. № 32. Зам. № 145. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]