

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Л. О. ЛАТАНСЬКА, Т. А. ФАРІОНОВА

**МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ**

**Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт**

У трьох частинах

Частина 1

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв • НУК • 2019

УДК 519.8(076)

Л 27

Автори: Л. О. Латанська, канд. фіз.-мат. наук, доцент;

Т. А. Фаріонова, канд. техн. наук, доцент

Рецензент К. В. Кошкін, д-р техн. наук, професор

Рекомендовано Методичною радою НУК

Латанська Л. О.

Л27 Математичні методи дослідження операцій: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт : у 3 ч. Частина 1 / Л. О. Латанська, Т. А. Фаріонова. – Миколаїв : НУК, 2019. – 77 с.

Укладено у відповідності з робочою навчальною програмою дисципліни "Математичні методи дослідження операцій". Рекомендовано для закріплення студентами теоретичних знань та набуття практичних навичок у підготовці та виконанні лабораторних робіт з розділу "Лінійне програмування" даної дисципліни.

Призначено для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 121 "Інженерія програмного забезпечення", 122 "Комп'ютерні науки".

УДК 519.8(076)

© Латанська Л. О., Фаріонова Т. А., 2019

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2019

ВСТУП

Дисципліна "Математичні методи дослідження операцій" викладається в Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова при підготовці студентів денної та заочної форм навчання освітнього рівня "бакалавр" спеціальностей 121 "Інженерія програмного забезпечення" та 122 "Комп'ютерні науки".

Метою вивчення дисципліни є формування у студентів знань та вмінь використання сучасних методів оптимізації як особливого процесу людської діяльності щодо вибору раціонального варіанту дій.

Методичні вказівки призначені для закріплення студентами теоретичних знань та набуття практичних навичок у підготовці та виконанні лабораторних робіт з розділу "Лінійне програмування" дисципліни "Математичні методи дослідження операцій". Вони містять завдання для лабораторних робіт, стислий виклад теоретичного матеріалу за кожною темою, приклади розв'язування різнотипних задач та контрольні запитання.

При виконанні кожної лабораторної роботи рекомендується:

- засвоїти теоретичні відомості;
- розібратися з завданням та етапами виконання роботи;
- виконати запропоноване завдання та оформити звіт з роботи;
- перевірити повноту розуміння теми за допомогою контрольних запитань, розташованих у кінці кожної роботи.

Лабораторну роботу необхідно виконувати відповідно до наведених етапів виконання роботи. Звіт про лабораторну роботу оформлюється кожним студентом індивідуально. Звіт повинен містити: назву і мету роботи; завдання (постановку задачі); методику й алгоритм розв'язування задачі; результати роботи; аналіз результатів та висновки.

Лабораторна робота № 1

Тема: Розробка математичної моделі задачі лінійного програмування

Мета роботи: набуття теоретичних знань та практичних навичок побудови математичних моделей задач лінійного програмування.

Завдання

1. Підприємство випускає чотири види продукції A, B, C і D та отримує прибуток від її реалізації. Для виробництва продукції використовується сировина трьох видів – S1, S2 і S3. При заданій технології кількість сировини, необхідної для виготовлення одиниці кожного з видів продукції, та її запаси відомі. Також відомий прибуток від продажу одиниці кожного виду продукції. Вихідні дані завдання наведені в табл. 1.1.

Необхідно побудувати, згідно з варіантом, математичну модель задачі лінійного програмування на отримання максимального прибутку. Представити векторно-матричну та розгорнуту форми запису моделі задачі.

Таблиця 1.1. Вихідні дані завдання лабораторної роботи № 1

Варіант 1						Варіант 2					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	1	1	2	2	16	S1	1	5	2	3	70
S2	1	4	3	2	40	S2	1	0	2	1	32
S3	1	0	2	1	15	S3	1	2	0	1	12
Прибуток	1	2	2	3		Прибуток	2	3	4	1	

Продовж. табл. 1.1

Варіант 3						Варіант 4					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	3	5	2	4	56	S1	1	4	3	2	48
S2	1	0	4	2	20	S2	3	0	2	1	24
S3	1	3	0	1	14	S3	2	1	0	1	16
Прибуток	1	5	4	2		Прибуток	1	2	1	3	
Варіант 5						Варіант 6					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	3	8	2	6	74	S1	2	7	3	5	64
S2	2	4	1	3	32	S2	5	2	3	0	28
S3	2	3	0	4	20	S3	2	1	0	2	14
Прибуток	3	7	4	1		Прибуток	3	5	4	4	
Варіант 7						Варіант 8					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	2	3	3	1	36	S1	3	4	2	6	40
S2	1	4	0	2	24	S2	2	6	1	3	28
S3	2	1	3	1	20	S3	2	1	3	0	22
Прибуток	4	4	5	2		Прибуток	5	5	2	4	
Варіант 9						Варіант 10					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	2	8	2	0	68	S1	1	5	2	4	70
S2	1	2	1	5	28	S2	2	3	0	2	54
S3	1	0	3	6	26	S3	1	0	2	1	14
Прибуток	2	7	4	7		Прибуток	1	3	2	2	

Продовж. табл. 1.1

Варіант 11						Варіант 12					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	1	7	3	2	63	S1	1	2	3	2	76
S2	2	1	0	4	44	S2	2	1	4	0	42
S3	1	0	2	4	32	S3	1	0	2	3	16
Прибуток	2	3	1	2		Прибуток	2	3	4	1	
Варіант 13						Варіант 14					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	1	3	2	4	60	S1	3	1	4	0	24
S2	3	1	0	3	52	S2	1	2	3	2	39
S3	1	0	4	2	27	S3	1	0	5	1	44
Прибуток	1	1	6	2		Прибуток	2	2	1	4	
Варіант 15						Варіант 16					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	1	6	2	5	82	S1	1	5	4	6	75
S2	1	1	0	3	24	S2	2	1	0	5	44
S3	1	0	2	2	18	S3	1	0	3	2	16
Прибуток	2	1	2	3		Прибуток	4	3	5	1	
Варіант 17						Варіант 18					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	2	5	3	1	50	S1	1	5	3	3	63
S2	2	1	0	4	24	S2	3	2	0	4	34
S3	2	0	4	1	30	S3	1	0	3	2	16
Прибуток	4	6	2	3		Прибуток	3	4	5	2	

Продовж. табл. 1.1

Варіант 19						Варіант 20					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	1	3	2	5	48	S1	2	7	3	5	40
S2	1	2	0	2	20	S2	2	3	3	0	20
S3	1	1	4	0	18	S3	2	1	0	2	18
Прибуток	3	5	2	6		Прибуток	1	2	4	1	
Варіант 21						Варіант 22					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	3	4	0	5	42	S1	2	6	3	4	60
S2	1	3	4	1	30	S2	4	3	0	2	30
S3	3	1	2	1	24	S3	2	1	3	1	18
Прибуток	5	4	2	4		Прибуток	4	5	5	2	
Варіант 23						Варіант 24					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	2	4	3	1	50	S1	1	6	3	4	42
S2	2	3	0	2	24	S2	1	2	3	1	21
S3	2	2	4	0	20	S3	2	2	0	3	18
Прибуток	4	6	3	5		Прибуток	2	3	5	2	
Варіант 25						Варіант 26					
Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)	Сировина	Продукція				Запаси сировини (кг)
	A	B	C	D			A	B	C	D	
S1	3	9	4	3	80	S1	2	6	3	4	66
S2	2	3	0	2	30	S2	3	4	0	3	50
S3	3	1	3	2	14	S3	2	1	2	0	18
Прибуток	3	8	4	2		Прибуток	2	2	3	1	

2. Записати в канонічній (а) та стандартній (б) формах задачу лінійного програмування.

Нехай i – перша цифра номера академічної групи, j – порядковий номер студента в академічній групі (номер варіанта).

Мінімізувати $Z = ix_1 + x_2$

$$\text{при обмеженнях} \begin{cases} (i+4)x_1 + x_2 = j+1 \\ (i+1)x_1 + x_2 \geq j \\ ix_1 + x_2 \leq j \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Короткі теоретичні відомості

Основні положення лінійного програмування детально викладені в [1, 2, 3, 4, 5].

Математичне програмування – це розділ математики, який займається розробкою методів знаходження екстремальних значень функцій, на аргументи яких накладені обмеження. Функції, екстремальні значення яких необхідно знайти, називаються цільовими. Накладені обмеження називаються системою обмежень.

Лінійне програмування – це розділ математичного програмування, який вивчає методи дослідження та відшукування екстремума лінійних функцій, на аргументи яких накладені лінійні обмеження.

Математична модель задачі лінійного програмування (ЗЛП) – це сукупність математичних співвідношень, що складаються з лінійної цільової функції та лінійних обмежень на змінні.

Форми моделі задачі лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min), \quad (1.1)$$

[illegible]

де $c_j, a_{ij}, b_i \in R$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Задача лінійного програмування називається *стандартною (симетричною) ЗЛП*, якщо в задачі на $\max$ (1.1) всі обмеження в системі (1.2) мають знак " $\leq$ ", в задачі на $\min$ (1.1) всі обмеження в системі (1.2) мають знак " $\geq$ " та $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Задача лінійного програмування називається *канонічною* (основною) ЗЛП, якщо всі обмеження в системі (1.2) задані у вигляді рівнянь, всі вільні члени ≥ 0 та всі $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Зазначені вище три форми моделі ЗЛП еквівалентні в тому сенсі, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути зведена до іншої форми. Розглянемо основні правила переходу:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

то необхідно ввести допоміжну (балансову) змінну $x_{n+1} \geq 0$ для представлення обмеження-нерівності у вигляді рівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i;$$

якщо i -те обмеження має вигляд нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

то необхідно ввести допоміжну (балансову) змінну $x_{n+1} \geq 0$ для представлення обмеження-нерівності у вигляді рівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i.$$

2) *Правило переходу від рівностей до нерівностей:*

якщо i -те обмеження має вигляд рівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i,$$

то його формально можна записати у вигляді двох обмежень-нерівностей

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

3) *Правило введення умови невід'ємності змінної:*

якщо на змінну x_i не була накладена умова невід'ємності, тоді замість цієї змінної можна ввести дві невід'ємні змінні x'_i та x''_i і представити кожне входження змінної x_i у вигляді $x'_i - x''_i$. Після розв'язання отриманої задачі необхідно повернутися до старих змінних.

4) *Правило зведення ЗЛП на максимум до ЗЛП на мінімум:* задача лінійного програмування на відшукування оптимального розв'язку, при якому досягається максимум цільової функції,

може бути зведена до ЗЛП на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (-1) .

Тобто задачі: знайти $\max Z = \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)$ і знайти $\min(-Z) = \min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n)$ мають однакові оптимальні розв'язки.

5) *Правило переходу від нерівності виду " $\leq$ " до нерівності виду " $\geq$ "*:

перехід від нерівності виду " $\leq$ " до нерівності виду " $\geq$ " і навпаки здійснюється шляхом множення вихідної нерівності на (-1) .

Визначення

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, координати якого задовольняють обмеженням задачі, називається *допустимим розв'язком* (або *планом*) ЗЛП.

Визначення

Множина всіх допустимих розв'язків ЗЛП називається *областю допустимих розв'язків*.

Визначення

Опорним розв'язком (планом) ЗЛП називається допустимий розв'язок $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо система векторів A_j в канонічній ЗЛП при $x_j > 0$ є лінійно незалежною.

Визначення

Допустимий розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при якому цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення, називається *оптимальним розв'язком* (оптимальним планом).

Форми запису задач лінійного програмування

Розгорнута форма запису

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор (матриця-стовпець) змінних};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{вектор (матриця-стовпець) вільних членів};$$

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – вектор (матриця-рядок) коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Векторна форма запису

$$Z = CX \rightarrow \max(\min),$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n \{ \leq, \geq, = \} B$$

$$X \geq 0,$$

де в системі обмежень

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Властивості розв'язків задач лінійного програмування

В основі теорії лінійного програмування лежать кілька теоретичних тверджень.

Визначення

Множина точок називається опуклою, якщо разом з будь-якими двома своїми точками вона містить і їх довільну опуклу лінійну комбінацію.

Визначення

Точка опуклої множини називається кутовою, якщо вона не може бути зображена у вигляді лінійної опуклої комбінації яких-небудь двох інших різних точок цієї множини.

Теорема 1. Множина всіх допустимих розв'язків задач лінійного програмування опукла (якщо вона не пуста).

Визначення

Непуста множина допустимих розв'язків задачі лінійного програмування називається многогранником розв'язків, а всяка кутова точка многогранника – вершиною.

Теорема 2. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Теорема 3. Кожному опорному розв'язку задачі лінійного програмування відповідає кутова точка багатогранника розв'язків. І навпаки, кожній кутовій точці багатогранника розв'язків відповідає опорний розв'язок задачі лінійного програмування.

Сформульовані теоретичні положення дозволяють зробити наступні ***висновки***:

– непорожня множина всіх допустимих розв'язків задач лінійного програмування утворює опуклий багатогранник;

– кожна вершина цього багатогранника визначає опорний розв’язок;

– в одній з вершин багатогранника розв’язків (тобто для одного з опорних планів) значення цільової функції є максимальним (мінімальним) (за умови, що функція обмежена зверху (знизу) на множині допустимих розв’язків);

– якщо максимальне значення функція приймає більш ніж в одній вершині, то це ж значення вона приймає в будь-якій точці, що є опуклою лінійною комбінацією даних вершин.

Таким чином, теореми 1–3 вказують шлях розв’язування задач лінійного програмування: замість дослідження нескінченної множини допустимих розв’язків для знаходження оптимального розв’язку необхідно досліджувати лише скінченне число кутових точок (скінченне число опорних розв’язків).

Приклад

Підприємство випускає три види продукції A , B , C та отримує прибуток від її реалізації. Для виробництва використовується сировина трьох видів $S1$, $S2$ і $S3$. При заданій технології кількість сировини, необхідної для виготовлення одиниці кожного з видів продукції, та запаси сировини відомі. Також відомий прибуток від продажу одиниці кожного виду продукції. Вихідні дані завдання наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2. Вихідні дані

Сировина	Продукція			Запаси сировини (кг)
	A	B	C	
$S1$	2	7	3	54
$S2$	5	2	3	22
$S3$	2	1	0	12
Прибуток	3	4	4	

Необхідно побудувати математичну модель задачі лінійного програмування на отримання максимального прибутку.

Представити векторно-матричну та розгорнуту форми запису моделі задачі.

Розв'язування

Для побудови математичної моделі введемо наступні позначення:

– x_A – кількість одиниць продукції виду A , x_B – кількість одиниць продукції виду B , x_C – кількість одиниць продукції виду C ($x_A, x_B, x_C \geq 0$);

– c_A – прибуток від реалізації одиниці продукції виду A , c_B – прибуток від реалізації одиниці продукції виду B , c_C – прибуток від реалізації одиниці продукції виду C ;

– b_1 – складські запаси сировини виду 1, b_2 – складські запаси сировини виду 2, b_3 – складські запаси сировини виду 3;

– a_{11} – витрати сировини виду 1 на виготовлення одиниці продукції виду A , a_{12} – витрати сировини виду 1 на виготовлення одиниці продукції виду B , a_{13} – витрати сировини виду 1 на виготовлення одиниці продукції виду C , ..., a_{33} – витрати сировини виду 3 на виготовлення одиниці продукції виду C .

Представимо математичну модель ЗЛП у векторно-матричній формі:

$Z = CX \rightarrow \max$ – цільова функція (прибуток, що максимізується)

$$AX \leq B,$$

$$X \geq 0,$$

де $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ – матриця коефіцієнтів при змін-

них x_A, x_B, x_C ;

$$X = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} - \text{вектор (матриця-стовпець) змінних;}$$

$$B = \begin{pmatrix} 54 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix} - \text{вектор (матриця-стовпець) вільних членів;}$$

$C = (3, 4, 4)$ – вектор (матриця-рядок) коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

У розгорнутій формі запису модель ЗЛП має наступний вигляд:

$$Z = 3x_A + 4x_B + 4x_C \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_A + 7x_B + 3x_C \leq 54 \\ 5x_A + 2x_B + 3x_C \leq 22 \\ 2x_A + x_B \leq 12 \end{cases}$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0 .$$

Приклад

Записати в канонічній формі таку загальну ЗЛП:

$$Z = 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 \rightarrow \max,$$

за умов

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 10, \\ -x_1 + 4x_2 \geq -6, \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування

Для запису задачі в канонічній формі необхідно:

1) додати допоміжну змінну x_4 в ліву частину першого обмеження;

2) помножити на (-1) друге обмеження та додати в ліву частину допоміжну змінну x_5 ;

3) помножити на (-1) третє обмеження.

Допоміжні змінні x_4 та x_5 не змінюють значення цільової функції.

Отримаємо наступну ЗЛП в канонічній формі

$$Z = 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 \rightarrow \max,$$

за умов

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 6, \\ -5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0.$$

Приклад

Записати в канонічній (а) та стандартній (б) формах таку задачу лінійного програмування:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max,$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 14 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq -102 \\ 4x_1 - 10x_2 \leq -12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0.$$

Розв'язування

а) В канонічній формі запису ЗЛП необхідно, щоб усі обмеження в системі були представлені у вигляді рівнянь та виконувалися умови:

$$b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

1) Помножимо друге та третє обмеження на (-1) , оскільки $b_2 < 0$ та $b_3 < 0$. Система буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 14 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 102 \\ -4x_1 + 10x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 100. \end{cases}$$

2) Для перетворення нерівностей в рівняння введемо відповідно допоміжні змінні x_4 , x_5 та x_6 для другого, третього та четвертого обмеження ($x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$). В цільову функцію Z допоміжні змінні входять з нульовими коефіцієнтами. Отже, остаточно у канонічній формі задача ЛП має вигляд:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 14 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 102 \\ -4x_1 + 10x_2 - x_5 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 = 100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

б) Оскільки, згідно із завданням, необхідно знайти максимум цільової функції Z , то для приведення ЗЛП до стандартного виду всі обмеження в системі повинні мати знак " $\leq$ " та $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$). Для цього помножимо друге та четверте обмеження на (-1) . Представимо перше рівняння $x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 14$ у вигляді двох нерівностей $x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq 14$ і $x_1 - 3x_2 - 4x_3 \geq 14$ та помножимо другу нерівність на (-1) .

Після перетворень отримуємо стандартну форму ЗЛП:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq 14 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -14 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 102 \\ 4x_1 - 10x_2 \leq -12 \\ -5x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняттю "математичне програмування".
2. Дайте визначення поняттю "лінійне програмування".
3. Назвіть форми моделей ЗЛП.
4. Який розв'язок ЗЛП називається допустимим?
5. Який розв'язок ЗЛП називається оптимальним?
6. Який розв'язок ЗЛП називається опорним?
7. Сформулюйте загальну задачу лінійного програмування.
8. Назвіть форми запису ЗЛП.
9. Яка множина точок називається опуклою?

10. Яка точка опуклої множини називається кутовою?
11. Дайте визначення поняттю "багатогранник розв'язків ЗЛП".
12. Сформулюйте теоретичні твердження, які лежать в основі лінійного програмування.
13. Сформулюйте властивості розв'язків задач лінійного програмування.
14. Дайте визначення поняттю "область допустимих розв'язків ЗЛП".
15. Як перейти від ЗЛП на максимум до ЗЛП на мінімум?

Лабораторна робота № 2

Тема: Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Мета роботи: набуття теоретичних знань та практичних навичок знаходження оптимального розв'язку задач лінійного програмування графічним методом.

Завдання

Розв'язати задачу лінійного програмування, згідно з варіантом, графічним методом, визначивши мінімальне та максимальне значення цільової функції (табл. 2.1).

Номер варіанта визначається за вказівкою викладача.

Таблиця 2.1. Вихідні дані для лабораторної роботи № 2

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	2	$F = 7x_1 + 6x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
3	$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \end{cases}$ $0 \leq x_1 \leq 3$ $0 \leq x_2 \leq 3$	4	$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Продовж. табл. 2.1

Номер варі- анта	Завдання	Номер варі- анта	Завдання
5	$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	6	$F = x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 8 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 80 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
7	$F = -3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	8	$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 21 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \end{cases}$ $0 \leq x_1 \leq 1$ $0 \leq x_2 \leq 1$
9	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	10	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
11	$F = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	12	$F = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$ $0 \leq x_1 \leq 3$ $0 \leq x_2 \leq 5$
13	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 27 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	14	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Продовж. табл. 2.1

Номер варі- анта	Завдання	Номер варі- анта	Завдання
15	$F = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	16	$F = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
17	$F = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	18	$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
19	$F = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	20	$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
21	$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -3 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	22	$F = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Номер варі- анта	Завдання	Номер варі- анта	Завдання
23	$F = -2x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	24	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
25	$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$ $0 \leq x_1 \leq 4$ $0 \leq x_2 \leq 6$	26	$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$ $x_1 + 3x_2 \geq 9$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Розглянемо загальну задачу лінійного програмування:
знайти $\max(\min)$ цільової функції

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

при обмеженнях

[illegible]

де $c_j, a_{ij}, b_i \in R$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Представимо геометричну інтерпретацію елементів наведеної задачі [4]:

1) *Геометрична інтерпретація обмежень*

Кожному обмеженню загальної задачі лінійного програмування, що є рівнянням, в n -вимірному просторі відповідає гіперплощина, а кожному обмеженню, що є нерівністю – гіперпівпростір, в результаті перетину яких утворюється опуклий многогранник допустимих розв'язків ЗЛП.

Таким чином, геометрично задача лінійного програмування полягає у відшуванні такої кутової точки многогранника розв'язків, у якій цільова лінійна функція набуває екстремального значення.

2) *Геометрична інтерпретація цільової функції*

Цільову функцію в n -вимірному просторі можна геометрично представити як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметру $Z = \text{const}$.

Вектор $\overline{N} = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Z}{\partial x_n} \right) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ називається градієнтом функції Z . Відомо, що градієнт показує напрям найшвидшого зростання функції. Вектор $(-\overline{N})$ показує напрям найшвидшого зменшення функції. Вектор $\overline{N} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ перпендикулярний до прямої $Z = \text{const}$ сімейства $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = Z$.

При $n = 2$ кожному обмеженню буде відповідати півплощина або пряма, системі обмежень – многокутник допустимих розв'язків, цільовій функції – сім'я паралельних прямих.

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та властивостях розв'язків задач лінійного програмування.

Обмежене використання графічного методу для задач з трьома змінними зумовлене складністю побудови многогранника розв'язків у тривимірному просторі, а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох є загальному випадку неможливе. Винятком являється випадок, коли різниця між кількістю змінних та кількістю незалежних обмежень дорівнює двом. У цьому випадку ЗЛП за допомогою методу Жордано-Гаусса приводиться до задачі з двома змінними.

Алгоритм графічного методу розв'язування задач лінійного програмування

Розглянемо двовимірну загальну задачу лінійного програмування за умови невід’ємності змінних

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{ \leq, \geq, = \} b_1, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{ \leq, \geq, = \} b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{ \leq, \geq, = \} b_m, \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 2}),$$

де $c_j, a_{ij}, b_i \in R \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2} \right)$.

Алгоритм графічного методу розв'язування наведеної задачі лінійного програмування складається з наступних кроків [6].

Перший крок. Будуємо прямі, які відповідають кожному обмеженню задачі (замінюючи знаки нерівностей на знаки рівностей), та визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню-нерівності.

Другий крок. Знаходимо многокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

Третій крок. Будуємо вектор $\overline{N} = (c_1, c_2)$, що задає напрям найшвидшого зростання значення цільової функції задачі.

Четвертий крок. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\overline{N}$.

П'ятий крок. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямку вектора $\overline{N}$ (для задачі максимізації), або в протилежному напрямку (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція набуває екстремального значення.

Шостий крок. Визначаємо координати вершини, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Отже, розв'язати ЗЛП графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

При використанні графічного методу розв'язування ЗЛП можливі наступні випадки:

- цільова функція набуває оптимального значення в одній вершині многокутника розв'язків (рис. 2.1);

- цільова функція набуває оптимального значення в будь-якій точці відрізка (рис. 2.2);

– задача лінійного програмування не має оптимального розв'язку (значення цільової функції не обмежене чи система обмежень задачі не сумісна) (рис. 2.3, 2.4);

– задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок на необмеженій області допустимих розв'язків (рис. 2.5, 2.6, 2.7).

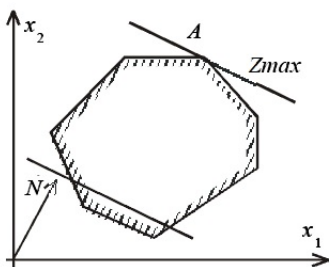


Рис. 2.1. Максимум в одній точці

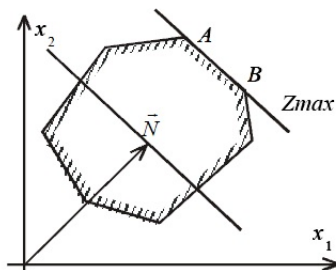


Рис. 2.2. Максимум в будь-якій точці відрізка

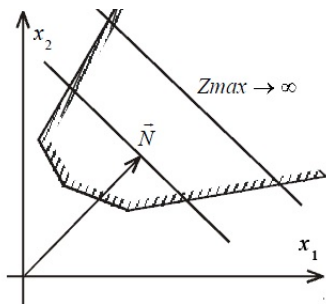


Рис. 2.3. Максимум не існує

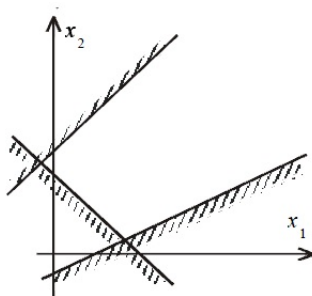


Рис. 2.4. Система не сумісна

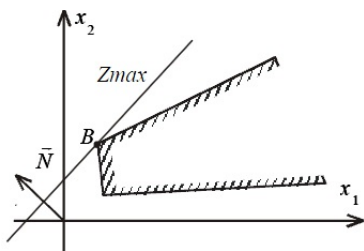


Рис. 2.5. Максимум за умови необмеженої області допустимих розв'язків

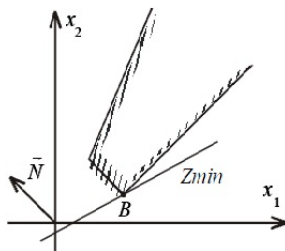


Рис. 2.6. Мінімум за умови необмеженої області допустимих розв'язків

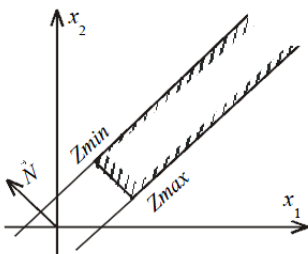


Рис. 2.7. Максимум та мінімум за умови необмеженої області допустимих розв'язків

Приклад

Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом, визначивши мінімальне та максимальне значення цільової функції

$$Z = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \max(\min)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \leq 90 & (1) \\ -1,5x_1 + 2x_2 \leq 6 & (2) \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 & (3) \\ x_1 \geq 0; & (4) \quad x_2 \geq 0 & (5) \end{cases}$$

Розв'язування

Перший крок. Пронумеруємо в системі обмежень усі співвідношення, замінимо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей, побудуємо графіки відповідних прямих та вкажемо для кожної прямої півплощину, яка відповідає вихідному обмеженню (рис. 2.8). На рис. 2.8 також укажемо номери відповідних прямих.

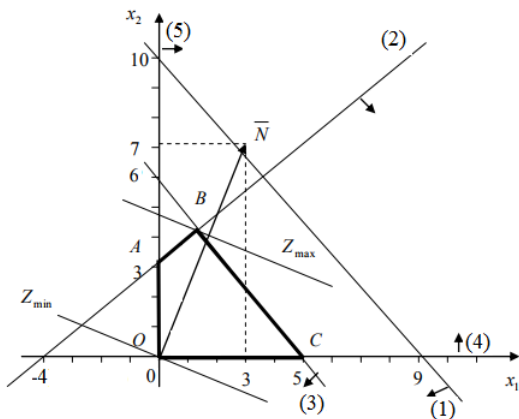


Рис. 2.8. Графічне розв'язування ЗЛП

Таким чином, кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з півплощин задовольняють нерівність, що розглядається, а іншої — ні. Щоб визначити необхідну півплощину, потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо координати точки задовольняють обмеження, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. На рис. 2.8 відповідні півплощини позначені стрілками.

Другий крок. Знаходимо многокутник розв'язків задачі лінійного програмування. У нашому прикладі це чотирикутник $OABC$.

Третій крок. Будуємо вектор $\overline{N} = (c_1, c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі. Координатами вектора є коефіцієнти при змінних у цільовій функції. Вектор $\overline{N}$ завжди виходить із початку координат і направлений до точки з координатами $(x_1 = c_1; x_2 = c_2)$. У нашій задачі вектор $\overline{N} = (3; 7)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції Z .

Четвертий крок. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\overline{N}$. Нехай $\text{const} = 0$. Це буде пряма $3x_1 + 7x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\overline{N}$ і проходить через початок координат.

П'ятий крок. Визначимо найбільше значення цільової функції, пересуваючи пряму $3x_1 + 7x_2 = 0$ паралельно самій собі за напрямом вектора $\overline{N}$ доти, доки не визначимо вершину многокутника, яка відповідає максимальному допустимому розв'язку задачі (остання точка області допустимих розв'язків, якої торкнеться пряма). На рис. 2.8 видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та многокутника $OABC$ є точка B .

Шостий крок. Для того щоб знайти координати точки B , визначимо, перетином яких прямих є ця точка. На рис. 2.8 кожна пряма пронумерована відповідно до її розміщення у системі обмежень. Таким чином, точка B є точкою перетину прямих (2) та (3).

Запишемо відповідну систему рівнянь та знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} -1,5x_1 + 2x_2 = 6 \\ 6x_1 + 5x_2 = 30. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = \frac{20}{13}$; $x_2 = \frac{54}{13}$. Підставимо отримані координати у цільову функцію та знайдемо її максимальне значення:

$$Z_{\max} = 3 \cdot \frac{20}{13} + 7 \cdot \frac{54}{13} = 33 \frac{9}{13}.$$

Аналогічно знайдемо точку мінімуму. Пересуватимемо пряму $3x_1 + 7x_2 = 0$ паралельно самій собі проти напрямку вектора $\overline{N}$, доки не визначимо вершину многокутника, яка відповідає мінімальному розв'язку задачі (остання точка області допустимих розв'язків, якої торкнеться лінія рівнів). Із рисунку 2.8 видно, що це точка O . Її координати $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Тоді $Z_{\min} = 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0$.

Контрольні питання

1. Для розв'язування яких ЗЛП застосовують графічний метод?
2. В чому полягає геометрична інтерпретація задач лінійного програмування?
3. Скільки розв'язків може мати задача лінійного програмування?
4. Назвіть основні кроки графічного методу розв'язування задач лінійного програмування.
5. Як інтерпретується обмеження-рівняння у n -вимірному просторі змінних?

6. Як інтерпретується обмеження-нерівність у n -вимірному просторі змінних?

7. Як інтерпретується цільова функція у n -вимірному просторі змінних?

8. Що представляє собою область допустимих значень задачі лінійного програмування?

9. Чи може бути внутрішня точка області допустимих значень задачі лінійного програмування розв'язком (планом) ЗЛП?

10. Дайте визначення опуклої множини.

11. Дайте визначення поняттю "кутова точка опуклої множини"?

12. Що означає вираз "гіперплощина рівня"?

13. Який вектор показує напрямок найшвидшого зростання цільової функції?

14. Який вектор показує напрямок найшвидшого зменшення цільової функції?

15. Дайте визначення поняттю "градієнт".

Лабораторна робота № 3

Тема: Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Мета роботи: набуття теоретичних знань та практичних навичок знаходження оптимального розв'язку задач лінійного програмування симплексним методом.

Завдання

Розв'язати задачу лінійного програмування, згідно варіанту (табл. 3.1), симплексним методом, використовуючи, при необхідності, штучний базис. Номер варіанта визначається за вказівкою викладача.

Таблиця 3.1. Вихідні дані для лабораторної роботи № 3

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
1	$F = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 52 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 64 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	2	$F = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 48 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 20 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
3	$F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 11 \\ x_1 + 2x_2 \leq 33 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 21 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	4	$F = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \geq 13 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 101 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 17 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Продовж. табл. 3.1

№ варі- анта	Завдання	№ варі- анта	Завдання
5	$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ 4x_1 + 9x_2 \geq 24 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	6	$F = 7x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 92 \\ x_1 + 7x_2 \geq 77 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
7	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 157 \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 16 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	8	$F = 6x_1 + x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
9	$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53 \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	10	$F = 7x_1 + x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \geq 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 110 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 15 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
11	$F = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 6 \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 157 \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 16 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	12	$F = x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 26 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
13	$F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 37 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	14	$F = x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 17 \\ x_1 + 2x_2 \leq 34 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Продовж. табл. 3.1

№ варі- анта	Завдання	№ варі- анта	Завдання
15	$F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	16	$F = x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
17	$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 97 \\ x_1 + 7x_2 \geq 77 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	18	$F = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53 \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
19	$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	20	$F = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 26 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
21	$F = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	22	$F = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
23	$F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 17 \\ x_1 + 2x_2 \leq 34 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 17 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	24	$F = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \geq 24 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 110 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 15 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Продовж. табл. 3.1

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
25	$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 37 \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	26	$F = 7x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 97 \\ x_1 + 7x_2 \geq 77 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Короткі теоретичні відомості

Зведення загальної задачі лінійного програмування до канонічної форми

Графічний метод розв'язування ЗЛП, як правило, використовують лише для задач із двома змінними.

При більшій кількості змінних, зазвичай, використовують загальний метод розв'язування задач лінійного програмування – симплексний метод. Для застосування симплексного методу необхідно привести ЗЛП до канонічної форми (див. лабораторну роботу № 1).

Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Симплексний метод є ітераційним. Ітераційний процес завершується або при отриманні оптимального розв'язку ЗЛП, або при з'ясуванні, що його не існує.

Із властивостей розв'язків ЗЛП відомо, що якщо існує оптимальний розв'язок задачі, то він знаходиться в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Кожній такій вершині відповідає опорний розв'язок. Кожен опорний розв'язок визначається системою m лінійно-незалежних векторів, що знаходяться серед векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для відшукування

оптимального розв'язку достатньо досліджувати лише опорні розв'язки. Кількість опорних розв'язків може дорівнювати C_n^m . При великих значеннях n і m аналіз всіх опорних розв'язків потребує багато часу та ресурсів.

Симплексний метод дозволяє значно швидше знаходити оптимальний розв'язок ЗЛП, послідовно покращуючи на кожному кроці значення цільової функції за рахунок цілеспрямованого переходу від одного опорного розв'язку до іншого.

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом

Симплекс-алгоритм розв'язування ЗЛП складається з наступних кроків [3]:

Перший крок. Визначаємо початковий опорний розв'язок задачі лінійного програмування.

Другий крок. Будуємо симплексну таблицю.

Третій крок. Виконуємо перевірку опорного розв'язку на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний розв'язок є оптимальним розв'язком задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходимо до нового опорного розв'язку, або встановлюємо, що оптимального розв'язку задачі не існує.

Четвертий крок. Перехід до нового опорного розв'язку задачі здійснюємо за допомогою визначення розв'язуючого елемента та розрахунку нової симплексної таблиці.

П'ятий крок. Повторюємо дії починаючи з кроку 3.

Розглянемо докладніше кожний крок алгоритму.

Перший крок. Визначення першого опорного розв'язку:

- 1) записуємо ЗЛП у канонічній формі;
- 2) записуємо ЗЛП у векторній формі;
- 3) визначаємося з першим опорним розв'язком задачі.

За визначенням опорного розв'язку ЗЛП його утворюють m одиничних лінійно-незалежних векторів, які становлять базис m -вимірному простору (де m – кількість обмежень у ЗЛП).

На цьому кроці розв'язування задачі можливі такі випадки:

а) Після запису задачі у векторній формі в системі обмежень є необхідна кількість одиничних лінійно-незалежних векторів.

Визначені одиничні лінійно-незалежні вектори, які утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називаються базисними. Всі інші змінні називаються вільними. Вільні змінні прирівнюємо до нуля та з кожного обмеження задачі визначаємо значення базисних змінних. Так отримуємо початковий опорний розв'язок задачі лінійного програмування, який співпадає з вектором B .

б) Після запису задачі у векторній формі в системі обмежень немає необхідної кількості одиничних лінійно-незалежних векторів. Тоді для побудови першого опорного розв'язку застосовуємо метод штучного базису, який розглянемо пізніше.

Другий крок. Побудова симплексної таблиці:

1) у першому стовпчику – " i " – таблиці визначаємо кількість m базисних змінних.

2) у другому стовпчику таблиці – "Базис" – записуємо вектори A_j , що знаходяться біля базисних змінних в системі обмежень ЗЛП у векторній формі, *в тій послідовності, в якій вони розміщуються в системі обмежень задачі*.

3) у третьому стовпчику симплексної таблиці – " $C_{\text{баз}}$ " – записуємо коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі.

4) четвертий стовпчик таблиці – "Опорний план B " – містить опорний розв'язок ЗЛП.

5) у решту стовпчиків симплексної таблиці, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записуємо координати векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$ даної задачі.

Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного розв'язку на оптимальність будемо подавати у вигляді симплексної таблиці.

Третій крок. Перевірка опорного розв'язку на оптимальність згідно з наведеною далі теоремою.

Теорема (ознака оптимальності опорного розв'язку ЗЛП)

Опорний розв'язок ЗЛП $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ є оптимальним, якщо для всіх j ($j = \overline{1, n}$) виконується умова

$$Z_j - C_j \geq 0 \text{ (для задачі на max),}$$

або

$$Z_j - C_j \leq 0 \text{ (для задачі на min).}$$

Значення оцінок $Z_j - C_j$ визначаються із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів стовпчиків " $C_{\text{баз}}$ " та " A_j " мінус відповідний коефіцієнт " C_j " із цільової функції.

Розраховані оцінки записуються в окремий рядок симплексної таблиці, який називається оціночним (розв'язувальним) і позначається " $m + 1$ ".

При перевірці умови оптимальності можливі такі випадки:

1) усі $Z_j - C_j$ задовольняють умову оптимальності, й тоді визначений опорний розв'язок є оптимальним;

2) не всі $Z_j - C_j$ задовольняють умову оптимальності, й тоді потрібно виконати перехід до наступного опорного розв'язку задачі.

Четвертий крок. Перехід до наступного опорного розв'язку ЗЛП.

Перехід від одного опорного розв'язку до іншого виконується заміною базису, тобто виключенням з нього деякої

змінної та введенням замість неї нової з числа вільних змінних задачі. Змінна, яка включається до нового базису, відповідає тій оцінці $Z_j - C_j$, що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок декілька, серед них вибирається **найбільша за абсолютною величиною**, і відповідна їй змінна вводиться до базису. Припустимо, що індекс зазначеної змінної $j = k$. Стовпчик симплексної таблиці з найбільшим порушенням $|Z_j - C_j|$ називається **направляючим** (розв'язуючим).

Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходимо для всіх **додатних** a_{ik} направляючого стовпчика величину $\theta = b_i / a_{ik}$ і записуємо її в останній стовпчик симплексної таблиці. Далі вибираємо **найменше** значення θ , яке вказує на змінну що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Відповідний рядок симплексної таблиці називається **направляючим** (розв'язуючим). На перетині розв'язуючого стовпчика та розв'язуючого рядка знаходиться число симплексної таблиці a_{rk} , яке називається розв'язуючим елементом. За допомогою елемента a_{rk} і методу Жордано-Гаусса розраховується нова симплексна таблиця.

П'ятий крок. Ітераційний процес повторюємо доти, доки не буде визначено оптимальний розв'язок задачі, або встановлено, що його не існує.

При застосуванні симплексного методу для розв'язування ЗЛП можливі такі випадки:

1) Якщо в оцінчному рядку останньої симплексної таблиці оцінка $Z_j - C_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що ЗЛП має альтернативний оптимальний розв'язок. Отримати його можна, вибравши розв'язуючий елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методу.

2) Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного розв'язку задачі до іншого в направляючому стовпчику немає додатних елементів a_{ik} , тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція ЗЛП є необмеженою в даній області й оптимальних розв'язків не існує.

Приклад

Використовуючи симплекс-метод знайти мінімальне значення лінійної функції $Z = 2x_1 - x_2 - 2x_3$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ -6x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розв'язування

Запишемо ЗЛП у канонічній формі

Задача в канонічній формі має наступний вигляд: знайти мінімальне значення лінійної функції $Z = 2x_1 - x_2 - 2x_3$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ -6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Представляємо ЗЛП в векторній формі

Цільова функція:

$$Z = CX \rightarrow \max(\min),$$

де

$$C = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (2; -1; -2; 0; 0; 0),$$

$$X^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6).$$

Система обмежень у векторній формі:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = B,$$

$$X \geq 0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Визначаємося з першим опорним розв'язком задачі

Одиничні вектори A_4, A_5, A_6 приймаємо за базис початкового опорного розв'язку, вільні невідомі x_1, x_2, x_3 прирівнюємо до нуля. В результаті отримаємо початковий опорний розв'язок $X_0 = (0, 0, 0, 2, 1, 4)$.

Перевіряємо опорний розв'язок на оптимальність згідно з наведеною вище теоремою.

Для перевірки складаємо першу симплексну таблицю і обчислюємо значення $Z_j - C_j$ (табл. 3.2).

Для векторів базису оцінки рівні нулю. Серед отриманих оцінок є дві додатні: $Z_2 - C_2 = 1 > 0$, $Z_3 - C_3 = 2 > 0$, що вказує на неоптимальність початкового опорного розв'язку.

Таблиця 3.2. Перша симплексна таблиця

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	2	-1	-2	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_4	0	2	2	-1	2	1	0	0	2/2
2	A_5	0	1	-6	2	-1	0	1	0	
3	A_6	0	4	4	1	1	0	0	1	4/1
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-2	1	2	0	0	0	

Переходимо до нового опорного розв'язку задачі

Серед отриманих додатних оцінок визначаємо максимальну (2) та включимо до базису вектор A_3 , якому відповідає оцінка 2. Серед елементів стовпця A_3 будемо розглядати лише додатні. Знайдемо розв'язуючий елемент, оцінивши значення $\theta = b_i / a_{ik}$ для кожного додатного значення стовпця A_3 .

Оскільки $\min\left(\frac{2}{2}; \frac{4}{1}\right) = \frac{2}{2} = 1$, то розв'язуючим елементом буде

число 2, яке стоїть на перетині рядка $i = 1$ та стовпця A_3 . Отже, вектор A_3 необхідно ввести до базису, а вектор A_4 виключити з нього. Складемо другу симплексну таблицю.

Підрахуємо нові елементи розв'язуючого рядка. Для цього старі елементи розв'язуючого рядка поділимо на розв'язуючий елемент (на 2) для того, щоб він став рівним 1. Далі за допомогою перетворень Жордано–Гаусса перетворимо всі елементи розв'язуючого стовпця крім розв'язуючого елемента в нулі. Для цього виконаємо такі перетворення: новий розв'язуючий рядок додаємо до старого другого рядка, а також до старого третього, помноженого на (-1) . Отримали другу симплексну таблицю (табл. 3.3). Новим опорним розв'язком є $X_0^{(1)} = (0, 0, 1, 0, 2, 3)$. Йому відповідає значення лінійної функції $Z = -2$.

Таблиця 3.3. Друга симплексна таблиця

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	2	-1	-2	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_4	-2	1	1	-1/2	1	1/2	0	0	
2	A_5	0	2	-5	3/2	0	1/2	1	0	2:3/2
3	A_6	0	3	3	3/2	0	-1/2	0	1	3:3/2
$m+1$	$Z_j - C_j$		-2	-4	2	0	-1	0	0	

В другій симплексній таблиці розрахуємо оціночний рядок. У рядку $m+1$ знову є додатний елемент $Z_2 - C_2 = 2 > 0$. Це означає, що новий опорний розв'язок не є оптимальним і вектор A_2 підлягає включенню в базис.

Знайдемо розв'язуючий елемент, оцінивши значення $\theta = b_i / a_{ik}$ для кожного додатного значення стовпця A_2 . Оскі-

льки $\min\left(\frac{4}{3}; \frac{6}{3}\right) = \frac{4}{3} \approx 1,33$, то розв'язуючим елементом буде

число $\frac{3}{2}$, яке стоїть на перетині рядка $i = 2$ та стовпця A_2 .

Отже вектор A_5 виключається з базису, а вектор A_2 вводиться в нього. Аналогічно до попередньої ітерації складаємо нову симплексну таблицю (табл. 3.4).

Таблиця 3.4. Третя симплексна таблиця

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	2	-1	-2	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	-2	5/3	-2/3	0	1	2/3	1/3	0	
2	A_2	-1	4/3	-10/3	1	0	1/3	2/3	0	
3	A_6	0	1	8	0	0	-1	-1	1	1/8
$m+1$	$Z_j - C_j$		-14/3	8/3	0	0	-5/3	-4/3	0	

Одержали новий опорний розв'язок $X_0^{(2)} = \left(0; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 0; 0; 1\right)$,

якому відповідає значення лінійної функції $Z = -\frac{14}{3}$.

У рядку $m + 1$ знову є додатний елемент $Z_1 - C_1 = \frac{8}{3} > 0$.

Це означає, що новий опорний розв'язок не є оптимальним, і вектор A_1 підлягає включенню в базис.

Знайдемо розв'язуючий елемент, оцінивши значення $\theta = b_i / a_{ik}$ для кожного додатного значення стовпця A_1 .

В стовпці θ буде знаходитися одне число $\frac{1}{8}$ в рядку $i = 3$, тому

що стовпець A_1 містить в цьому рядку додатне значення, а інших додатних значень у стовпці A_1 не існує. Рядок $i = 3$ буде розв'язуючим рядком. Число 8, яке стоїть на перетині рядка $i = 3$ та стовпця A_1 буде розв'язуючим елементом. Отже вектор A_6 виключається з базису, а вектор A_1 вводиться в нього.

Аналогічно до попередньої ітерації складаємо нову симплексну таблицю (табл. 3.5).

Таблиця 3.5. Четверта симплексна таблиця

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	2	-1	-2	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	-2	7/4	0	0	1	7/12	1/4	1/12	
2	A_2	-1	7/4	0	1	0	-1/12	1/4	5/12	
3	A_1	2	1/8	1	0	0	-1/8	-1/8	1/8	
$m + 1$	$Z_j - C_j$		-5	0	0	0	-4/3	-1	-1/3	

Одержали новий опорний розв'язок $X_0^{(3)} = \left(\frac{1}{8}; \frac{7}{4}; \frac{7}{4}; 0; 0; 0\right)$,

якому відповідає значення лінійної функції $Z = -5$.

Оскільки в $m + 1$ рядку четвертої ітерації всі оцінки від'ємні, то вказаний розв'язок є оптимальним. Оскільки нульові оцінки відповідають лише векторам, які входять в базис, то можна зробити висновок, що оптимальний розв'язок для даної задачі єдиний.

З геометричної точки зору симплексний процес може бути інтерпретований, як рух по сусіднім точкам многогранника розв'язків, що пов'язаний із збільшенням (зменшенням) цільової лінійної функції.

Вироджений розв'язок та зациклювання

Опорний розв'язок називається виродженим, якщо хоча б одна базисна змінна дорівнює нулю. Задача лінійного програмування, що має хоча б один вироджений розв'язок, називається виродженою задачею.

Вироджений розв'язок можемо отримати, коли на якось кроці при виборі розв'язуючого елемента отримано два або більше однакових мінімальних симплексних відношень у стовпці θ .

При розв'язуванні виродженої ЗЛП може мати місце так зване зациклювання. Його суть полягає в тому, що застосовуючи послідовні ітерації, можна повернутися до набору базисних і вільних змінних, які раніше зустрічалися. Для уникнення зациклювання при використанні симплексного методу можна застосовувати наступне правило [3]:

Якщо на будь-якому етапі розрахунків виникає невизначеність у виборі розв'язуючого рядка, тобто виявляється кілька однакових мінімальних відношень $\theta = b_i / a_{ik}$, то необхідно знайти відношення елементів наступного стовпчика, що не входить у базис, до ненульових елементів розв'язуючого стовпчика і визначити мінімум. Якщо при цьому знову виявляються однакові мінімальні відношення, то необхідно знайти відношення елементів наступного стовпчика, що не входить

в базис, і так повторювати доти, поки розв'язуючий рядок не визначиться однозначно.

Приклад

Розв'язати симплексним методом наступну задачу лінійного програмування:

знайти $Z = -3x_1 - x_2 \rightarrow \min$, за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 0,5x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 6. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Розв'язування

Дана ЗЛП представлена в канонічній формі. Тому для її розв'язування можна відразу застосовувати симплексний метод.

Оскільки вектори

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

є одиничні, то вибираючи їх за базис, заповнимо першу симплексну таблицю (табл. 3.6). Серед додатних оцінок $(m+1)$ -го рядка найбільшою є оцінка 3, що відповідає стовпчику A_1 . Тому перший стовпчик буде розв'язуючим.

З першої симплексної таблиці випливає, що $\theta = b_i / a_{ik}$ може приймати наступні значення:

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1; \quad \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{2}{2} = 1; \quad \frac{b_3}{a_{31}} = \frac{6}{2} = 3.$$

При цьому існує два однакові мінімальні значення $\theta = b_i / a_{ik}$, які дорівнюють 1.

Таблиця 3.6. Перша симплексна таблиця прикладу

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	2	-1	-2	0	0	θ	$\frac{a_{i2}}{a_{i1}}$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		
1	A_3	0	2	2	1/2	1	0	0	2/2 = 1	1/4
2	A_4	0	2	2	1	0	1	0	2/2 = 1	1/2
3	A_5	0	6	2	3	0	0	1	6/2 = 3	3/2
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	3	1	0	0	0		

Тому вибрати однозначно розв'язуючий рядок не можна. У зв'язку з цим застосуємо наведене вище правило для визначення розв'язуючого рядка. Для цього розглянемо відношення елементів наступного стовпчика, що не входить у базис, до елементів $a_{i1} \neq 0$:

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_{32}}{a_{31}} = \frac{3}{2}.$$

Результати обчислень таких відношень запишемо в додатковому стовпці симплексної таблиці $\frac{a_{i2}}{a_{i1}}$. Серед цих відно-

шень мінімальним є відношення $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{1}{4}$. Воно відповідає

першому рядку. Тому за розв'язуючий приймаємо саме перший рядок. А отже, вводимо в базис вектор A_1 , а вектор A_3 виводимо з базису.

Складемо другу симплексну таблицю. Для цього розділимо розв'язуючий рядок на 2 та запишемо у нову таблицю.

Помножимо на (-1) старий перший рядок і додамо до старого другого рядка. Помножимо на (-1) старий перший рядок і додамо до старого третього рядка (табл. 3.7).

Таблиця 3.7. Друга симплексна таблиця прикладу

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	-3	-1	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	A_1	-3	1	1	$1/4$	$1/2$	0	0	4
2	A_4	0	0	0	$1/2$	-1	1	0	0
3	A_5	0	4	0	$5/2$	-1	0	1	$8/5$
$m+1$	$Z_j - C_j$		-3	0	$1/4$	$-3/2$	0	0	

З другої симплексної таблиці (див. табл. 3.7) видно, що єдина додатна оцінка $1/4$ знаходиться в стовпчику A_2 . Отже, цей стовпчик буде розв'язуючим. Для вибору розв'язуючого рядка розглядаємо відношення $\theta = b_i / a_{ik}$ для додатних елементів стовпчика A_2 :

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{1}{1/4} = 4; \quad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{0}{1/2} = 0; \quad \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{4}{5/2} = 1,6.$$

Серед цих відношень мінімальне дорівнює нулю та відповідає рядку таблиці $i = 2$. Цей рядок буде розв'язуючим. Отже, вводимо в базис вектор A_2 , а вектор A_4 виводимо з базису.

Складемо третю симплексну таблицю. Для цього елементи розв'язуючого рядка табл. 3.7 помножимо на 2 та запишемо в третю таблицю; додамо до першого рядка другої таблиці старий розв'язуючий, помножений на $(-1/2)$, до третього рядка старий розв'язуючий, помножений на (-5) і також запишемо в третю таблицю.

Після таких перетворень третя симплексна таблиця набуває вигляду, що наведено в табл. 3.8.

Таблиця 3.8. Третя симплексна таблиця прикладу

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	-3	-1	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	A_1	-3	1	1	0	1	-1/2	0	
2	A_2	-1	0	0	1	-2	2	0	
3	A_5	0	4	0	0	4	-5	1	
$m + 1$	$Z_j - C_j$		-3	0	0	-1	-1/2	0	

Серед оцінок $Z_j - C_j$ в останній симплексній таблиці немає додатних. Тому опорний розв'язок $X = (1; 0; 0; 0; 4)$ буде оптимальним, а найменше значення лінійної функції $Z_{\min} = -3$.

Розв'язування задачі лінійного програмування з використанням методу штучного базису

Задану задачу лінійного програмування зводимо до канонічного вигляду. Потім записуємо отриману задачу у векторній формі. Якщо після запису ЗЛП у векторній формі в системі обмежень немає необхідної кількості одиничних лінійно-незалежних векторів, то для побудови першого опорного розв'язку такої задачі будемо використовувати метод штучного базису. В цьому випадку алгоритм розв'язування задачі буде наступним [4]:

Перший крок. Вводимо в кожне рівняння-обмеження, яке не містить "природних" базисних змінних (нехай p – кількість таких рівнянь), по одній невід'ємній змінній $x_{n+i} \geq 0 (i = \overline{1, p})$. Введені змінні будемо називати **штучними**.

Другий крок. В цільовій функції віднімаємо суму штучних змінних, помножену на як завгодно велике додатне число M (для задачі на $\max$), чи додаємо суму штучних змінних, помножену на як завгодно велике додатне число M (для задачі на $\min$).

У результаті отримаємо так звану M -задачу (розширену задачу) з наступною цільовою функцією:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} M \sum_{i=1}^p x_{n+i} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \max \\ \min \end{array} \right\}.$$

Взаємозв'язок між розв'язками початкової та розширеної задач лінійного програмування не є очевидним і визначається теоремою.

Теорема. Якщо в оптимальному розв'язку розширеної задачі штучні змінні дорівнюють нулю, то такий розв'язок є оптимальним розв'язком початкової задачі.

Третій крок. Розв'язуємо отриману задачу з використанням симплексного методу.

У симплексних таблицях замість одного оціночного рядка $m + 1$ необхідно формувати два рядки: $m + 1$ та $m + 2$. В рядок $m + 1$ записуємо частину оцінок $Z_j - C_j$ без множника M , в рядок $m + 2$ – з множником M . При цьому ознаку оптимальності перевіряємо за сумарними оцінками двох рядків. За значеннями оцінок $Z_j - C_j$ визначається змінна, яка повинна бути включена в базис.

Зауваження:

1) В процесі розв'язування M -задачі всі штучні змінні повинні бути вилучені з базису.

2) Якщо для опорного розв'язку ЗЛП всі оцінки $Z_j - C_j$ ($j = \overline{1, n}$) задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних розв'язків такої задачі не існує. Якщо M -задача не має розв'язку, то і вихідна задача нерозв'язна.

Приклад

Розв'язати наступну задачу лінійного програмування з використанням методу штучного базису:

знайти $Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$, за умов

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9, \\ x_2 + x_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Розв'язування

Зведемо ЗЛП до канонічної форми:

$$Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max,$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 - x_6 = 1. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}).$$

Представимо задачу в векторній формі:

$$Z = CX \rightarrow \max;$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = B,$$

де

$$C = (1; -2; 3; 0; 0; 0),$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів одиничними є лише вектори A_4 і A_5 . Оскільки ж у тривимірному просторі базис має складатися з трьох одиничних векторів, то ще один одиничний вектор можна дістати, ввівши в третє обмеження з коефіцієнтом $+1$ штучну змінну x_7 , якій відповідатиме одиничний

вектор $A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Тепер можна розглянути розширену задачу лінійного програмування (M -задачу):

$$Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 \rightarrow \max,$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 - x_6 + x_7 = 1. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,7}).$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_7 має в цільовій функції Z коефіцієнт $-M$ (задача на $\max$), де M – досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є змінні A_4, A_5 , x_7 решта змінних – вільні.

Початковий опорний розв'язок задачі:

$$X_0 = (0; 0; 0; 1; 9; 0; 1).$$

При цьому

$$Z_0 = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 0 - M \cdot 1 = -M.$$

Складемо першу симплексну таблицю задачі (табл. 3.9).

Таблиця 3.9. Перша симплексна таблиця

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-2	3	0	0	0	-M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4	0	1	1	5	0	1	0	0	0	—
2	A_5	0	9	-1	2	3	0	1	0	0	9/3
3	A_7	-M	1	0	1	1	0	0	-1	1	1/1
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	-1	2	-3	0	0	0	0	
$m+2$			-M	0	-M	-M	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного розв'язку, дістаємо $Z_0 = 0 - M$; $Z_1 - C_1 = -1 + 0 \cdot M$ і т. д. Як бачимо, значення оцінок складаються з двох частин, одна з яких містить M , а інша – просто число. Тому в рядок $m+1$ записуємо просто число, а в рядок $m+2$ – число з коефіцієнтом M .

Оцінки першого розв'язку не задовольняють умову оптимальності. Тому необхідним є перехід до нового опорного розв'язку. Для такого переходу необхідно реалізувати черговий крок алгоритму симплекс-методу. Розв'язуючим стовпцем буде третій стовпець з оцінкою $-3 - M$, оскільки це від'ємне число найбільше за модулем порушення. Друга симплексна таблиця наведена у табл. 3.10. Отриманий розв'язок не оптимальний.

Таблиця 3.10. Друга симплексна таблиця

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-2	3	0	0	0	-M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4	0	1	1	5	0	1	0	0	0	-
2	A_5	0	6	-1	-1	0	0	1	3	-3	6/3
3	A_3	3	1	0	1	1	0	0	-1	1	
$m+1$	$Z_j - C_j$		3	-1	5	0	0	0	-3	3	
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	M	

Подальше розв'язування задачі наведене у вигляді симплексних таблиць 3.11 та 3.12.

Таблиця 3.11. Третя симплексна таблиця

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-2	3	0	0	0	-M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_4	0	1	1	5	0	1	0	0	0	1/1
2	A_6	0	2	-1/3	-1/3	0	0	1/3	1	-1	
3	A_3	3	3	-1/3	2/3	1	0	1/3	0	0	
$m+1$	$Z_j - C_j$		9	-2	4	0	0	1	0	0	
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	M	

Таблиця 3.12. Четверта симплексна таблиця

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	1	-2	3	0	0	0	-M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
1	A_1	1	1	1	5	0	1	0	0	0	
2	A_6	0	7/3	0	4/3	0	1/3	1/3	1	-1	
3	A_3	3	10/3	0	7/3	1	1/3	1/3	0	0	
$m+1$	$Z_j - C_j$		11	0	14	0	2	1	0	0	
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	M	

$X^* = (1; 0; 10/3; 0; 0; 7/3; 0)$ буде оптимальним, а найбільше значення лінійної функції $Z_{\max} = 11$.

Контрольні питання

1. Як звести загальну ЗЛП до канонічної форми?
2. У чому полягає суть симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування?
3. Назвіть основні кроки алгоритму розв'язування ЗЛП симплексним методом.
4. Сформулюйте ознаку оптимальності опорного розв'язку задачі лінійного програмування.
5. Дайте визначення поняттю "вироджена ЗЛП".
6. Поняття зациклювання та правило його уникнення при застосуванні симплекс-методу.
7. Назвіть основні поняття, що пов'язані із симплексним методом (базисні та вільні змінні, розв'язуючий елемент, направляючий рядок, направляючий стовпчик тощо).
8. Як здійснюється перехід від одного опорного розв'язку до іншого?
9. У якому випадку застосовується метод штучного базису?
10. З якими знаками ("+" чи "-") штучні змінні вводяться у цільову функцію?
11. Поясніть терміни "початкова ЗЛП" та "розширена ЗЛП".
12. Яка структура симплексної таблиці?
13. Якою теоремою описується взаємозв'язок між розв'язками початкової та розширеної задачі лінійного програмування?
14. Сформулюйте загальну задачу лінійного програмування.
15. Сформулюйте канонічну ЗЛП.

Лабораторна робота №4

Тема: Двоїстість у лінійному програмуванні

Мета роботи: набуття теоретичних знань та практичних навичок розробки математичних моделей та знаходження оптимального розв'язку пари двоїстих задач лінійного програмування.

Завдання

До наведеної задачі лінійного програмування записати двоїсту (табл. 4.1). Знайти оптимальні розв'язки отриманої пари двоїстих задач. Номер варіанту визначається за вказівкою викладача.

Таблиця 4.1. Вихідні дані до лабораторної роботи № 4

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$F = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	2	$F = 10x_1 + 40x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 18 \\ x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 25 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
3	$F = 2x_1 + 4x_2 + 24x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \leq -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq -2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$	4	$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
5	$F = -x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 1 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$	6	$F = 8x_1 + 8x_2 + x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 3 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Продовж. табл. 4.1

Номер варі- анта	Завдання	Номер варі- анта	Завдання
7	$F = 14x_1 + 15x_2 - 24x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 \geq 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq -3 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	8	$F = -30x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
9	$F = -x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	10	$F = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
11	$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	12	$F = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
13	$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 11 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	14	$F = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
15	$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	16	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq -4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Продовж. табл. 4.1

Номер варі- анта	Завдання	Номер варі- анта	Завдання
17	$F = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$	18	$F = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
19	$F = -x_1 + x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	20	$F = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ 5x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
21	$F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 26 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$	22	$F = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 46 \\ 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$
23	$F = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16 \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$	24	$F = 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Продовж. табл. 4.1

Номер варі- анта	Завдання	Номер варі- анта	Завдання
25	$F = 12x_1 + 6x_2 + 10 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 \leq 12 \end{cases}$ $0 \leq x_1 \leq 4$ $0 \leq x_2 \leq 6$	26	$F = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \leq 27 \\ 7x_1 + 4x_2 \geq 46 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Короткі теоретичні відомості

Поняття двоїстості [5]

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, яку називають двоїстою по відношенню до початкової (прямої) задачі. Початкова і двоїста задачі тісно пов'язані між собою і утворюють єдину пару двоїстих задач кожному з них можна розглядати як початкову (пряму) задачу. Задача, двоїста по відношенню до двоїстої задачі, збігається з початковою.

Існує зв'язок між умовами та між розв'язками початкової та двоїстої задач. Тому, розв'язуючи ЗЛП, можна знайти розв'язок легшої з пари двоїстих задач, та, використовуючи співвідношення двоїстості, знайти розв'язок складнішої задачі.

Теорія двоїстості являється основою методів аналізу лінійних моделей на чутливість.

Нехай задача лінійного програмування (початкова) має вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Двоїста до неї задача представлена нижче:

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min$$

$$y_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}).$$

Правила побудови пари двоїстих задач [7]:

- кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень в системі прямої задачі й навпаки;
- матриця коефіцієнтів двоїстої задачі є транспонованою матрицею коефіцієнтів прямої задачі й навпаки;
- коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі є вільними членами системи обмежень прямої задачі й навпаки;
- якщо цільова функція прямої задачі на максимум, то цільова функція двоїстої – на мінімум.

Види пар двоїстих задач та їх математичні моделі [3]

Пари двоїстих задач бувають *симетричними* та *несиметричними*. У симетричних задачах обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть

набувати лише невід’ємних значень. У несиметричних задачах обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – тільки як нерівності. В цьому випадку змінні прямої задачі – невід’ємні, а змінні двоїстої – не обмежені знаком. Математичні моделі симетричних та несиметричних пар двоїстих задач наведені в табл. 4.2.

Основні теореми двоїстості

Теорія двоїстості в лінійному програмуванні базується на двох наступних теоремах [8, 9].

Теорема 1. Для пари двоїстих задач можливий один із взаємовиключаючих випадків:

1) якщо одна з пари двоїстих задач лінійного програмування має скінченне оптимальне значення, то і двоїста до неї задача теж має скінченне оптимальне значення, причому оптимальні значення цільових функцій обох задач співпадають, тобто $Z_{\max} = F_{\min}$ або $Z_{\min} = F_{\max}$;

2) якщо в прямій задачі область допустимих розв’язків не порожня, а цільова функція на ній не обмежена, то система обмежень іншої задачі несумісна.

Таблиця 4.2. Математичні моделі симетричних та несиметричних пар двоїстих задач

Симетричні	
Пряма задача	Двоїста задача
$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max;$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m});$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$	$F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min;$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n});$ $y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}).$

Продовж. табл. 4.2

Симетричні	
Пряма задача	Двоїста задача
$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min;$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m});$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$	$F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max;$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j = \overline{1, n});$ $y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}).$
Несиметричні	
Пряма задача	Двоїста задача
$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max;$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m});$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$	$F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min;$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n});$ $y_i \in (-\infty; +\infty).$
$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min;$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m});$ $x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$	$F = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max;$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j = \overline{1, n});$ $y_i \in (-\infty; +\infty).$

Нехай початкова (пряма) ЗЛП має оптимальний розв'язок X^* , який знайдений симплексним методом. Тоді оптимальний розв'язок двоїстої задачі Y^* знаходиться за формулою

$$Y^* = \overline{C}_{\text{баз}} D^{-1},$$

де $\bar{C}_{\text{баз}}$ – вектор-рядок, що утворений коефіцієнтами цільової функції початкової задачі при змінних, які є базисними в оптимальному розв’язку; D^{-1} – матриця, яка міститься в останній симплексній таблиці в тих стовпцях, де в першій таблиці знаходилася одинична матриця (базисні вектори).

Теорема 2. Для пари двоїстих задач справедливі такі твердження:

1) якщо в оптимальному розв’язку початкової задачі значення i -ої компоненти строго більше нуля, то відповідне i -те обмеження двоїстої задачі при підстановці в нього оптимального розв’язку стає рівністю;

2) якщо при підстановці оптимальному розв’язку прямої задачі в обмеження цієї ж задачі те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний їй компонент оптимальному розв’язку двоїстої задачі дорівнює нулю.

З теорем 1 і 2 випливає, що якщо розв’язати одну з взаємно двоїстих задач, тобто знайти її оптимальний розв’язок і оптимальне значення цільової функції, то можна записати оптимальний розв’язок і оптимальне значення цільової функції іншої задачі.

Приклад

Побудувати двоїсту ЗЛП до заданої

$$Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розв'язування

Згідно правил побудови пари двоїстих задач та математичних моделей пар двоїстих задач отримаємо задачу, двоїсту до початкової

$$F = 9y_1 + 5y_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ 5y_1 + y_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Приклад

Побудувати двоїсту ЗЛП до заданої

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розв'язування

Згідно правил побудови пари двоїстих задач та математичних моделей пар двоїстих задач отримаємо задачу, двоїсту до початкової

$$F = 12y_1 + 4y_2 + 18y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \in (-\infty, +\infty).$$

Приклад

Розв'язати задану задачу симплексним методом, побудувати двоїсту ЗЛП до заданої та використовуючи першу теорему двоїстості знайти розв'язок двоїстої задачі

$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язування

Розв'яжемо задачу симплексним методом. Для цього:

1) Приведемо початкову задачу до канонічної форми

$$Z = 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

2) Введемо штучні змінні. Задача набуде вигляду

$$Z = 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 1x_7 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0.$$

3) Складемо першу симплексну таблицю задачі (табл. 4.3).

Таблиця 4.3. Перша симплексна таблиця задачі прикладу

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	3	1	0	0	0	M	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_6	M	4	-2	1	-1	0	0	1	0
2	A_4	0	8	2	1	0	1	0	0	0
3	A_7	M	6	3	2	0	0	-1	0	1

4) Використаємо ітераційний процес симплексного методу.

В результаті розв'язку початкової задачі отримаємо останню симплексну табл. 4.4.

Таблиця 4.4. Остання симплексна таблиця задачі прикладу

i	Базис	$C_{\text{баз}}$	Опорний план B	3	1	0	0	0	M	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	2	-7	0	-2	0	1	2	-1
2	A_4	0	4	4	0	1	1	0	-1	0
3	A_2	l	4	-2	1	-1	0	0	1	0

З таблиці записуємо оптимальний розв'язок початкової задачі:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 4.$$

$$Z(0; 4) = 1 \cdot 4 = 4.$$

Побудуємо двоїсту ЗЛП до заданої.

$$F = 4y_1 + 8y_2 + 6y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$-y_1 \leq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad -y_3 \leq 0.$$

Використовуючи останню симплексну табл. 4.4, знайдемо оптимальний розв'язок двоїстої ЗЛП. Із першої теореми двоїстості $Y^* = \overline{C}_{\text{баз}} D^{-1}$,

де

$$\overline{C}_{\text{баз}} = (0; 0; 1),$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$Y^* = \overline{C}_{\text{баз}} D^{-1} = (0; 0; 1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (1; 0; 0).$$

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі дорівнює:

$$y_1 = 1; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 0.$$

$$F(1; 0; 0) = 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 4.$$

Приклад

Для наведеної задачі записати двоїсту ЗЛП. Розв'язати двоїсту задачу графічно, та, використовуючи другу теорему двоїстості, знайти розв'язок початкової задачі

$$Z = 90x_1 + 6x_2 + 30x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 1,5x_2 + 6x_3 \geq 3 \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Розв'язування

Побудуємо двоїсту задачу до заданої

$$F = 3y_1 + 7y_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 10y_1 + 9y_2 \leq 90 & (1) \\ -1,5y_1 + 2y_2 \leq 6 & (2) \\ 6y_1 + 5y_2 \leq 30 & (3) \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0; \quad (4) \qquad y_2 \geq 0 \quad (5).$$

Двоїста задача допускає графічний розв'язок, який представлений на рис. 4.1.

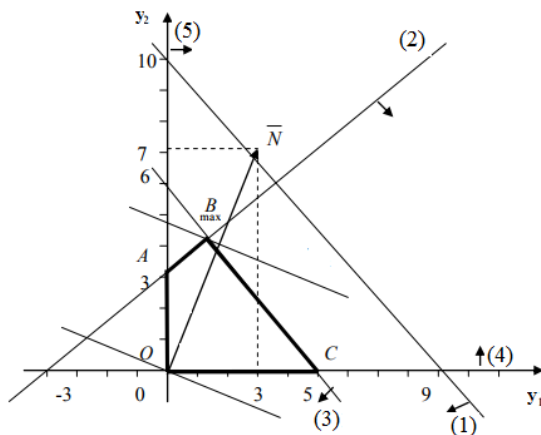


Рис. 4.1. Графічний розв'язок двоїстої задачі

Оптимальний розв'язок відповідає точці B , координати якої можна визначити шляхом розв'язування системи двох рівнянь, відповідних другій та третій прямим системи обмежень

$$\begin{cases} -1,5y_1 + 2y_2 = 6 \\ 6y_1 + 5y_2 = 30. \end{cases}$$

Звідси $y_1 = \frac{20}{13}$; $y_2 = \frac{54}{13}$. Підставимо отримані координати у цільову функцію та знайдемо її максимальне значення:

$$F_{\max} = 3 \cdot \frac{20}{13} + 7 \cdot \frac{54}{13} = 33 \frac{9}{13}.$$

Для визначення оптимального розв'язку початкової задачі використаємо другу теорему двоїстості.

1) Так як обидві компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі більші нуля, то обмеження початкової задачі на оптимальному розв'язку є рівностями.

2) Підставимо $Y_{\max}\left(\frac{20}{13}; \frac{54}{13}\right)$ в обмеження двоїстої задачі.

Отримаємо

$$\begin{cases} 10 \cdot \frac{20}{13} + 9 \cdot \frac{54}{13} < 90 \rightarrow x_1 = 0 \\ -1,5 \cdot \frac{20}{13} + 2 \cdot \frac{54}{13} = 6 \\ 6 \cdot \frac{20}{13} + 5 \cdot \frac{54}{13} = 30. \end{cases}$$

Використовуючи 1 та 2 отримаємо систему для знаходження розв'язку початкової задачі

$$\begin{cases} 10x_1 - 1,5x_2 + 6x_3 = 3 \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо оптимальний розв'язок початкової задачі

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{18}{13}; \quad x_3 = \frac{11}{13}.$$

Підставимо отримані компоненти у цільову функцію початкової задачі та знайдемо її мінімальне значення

$$Z_{\min} = 90 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{18}{13} + 30 \cdot \frac{11}{13} = 33 \frac{9}{13}.$$

Контрольні питання

1. Яким чином за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?
2. Сформулюйте симетричні пари двоїстих задач лінійного програмування.
3. Сформулюйте несиметричні пари двоїстих задач лінійного програмування.
4. Назвіть основні правила побудови двоїстих задач.
5. Сформулюйте задачу лінійного програмування та запишіть двоїсту до неї задачу.
6. Сформулюйте першу теорему двоїстості.
7. Сформулюйте другу теорему двоїстості.
8. Як пов'язані значення цільових функцій оптимальних розв'язків пари двоїстих задач?
9. Роль двоїстості у лінійному програмуванні.
10. Які ви знаєте види пар двоїстих задач?
11. Надайте економічну інтерпретацію теорії двоїстості.
12. Для розв'язання яких задач використовується теорія двоїстості?
13. Дайте визначення оптимального розв'язку ЗЛП.
14. Наведіть алгоритм графічного розв'язку ЗЛП.
15. Наведіть алгоритм розв'язку ЗЛП симплексним методом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Кремер, Н. Ш.** Исследование операций в экономике [Текст] : учеб. пособие / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М. : ЮНИТИ, 2000. – 407 с.
2. **Боровик, О. Л.** Дослідження операцій в економіці [Текст] : навч. посібник / О. Л. Боровик, Л. В. Боровик. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.
3. **Кононенко, А. І.** Математичне програмування [Текст] / А. І. Кононенко, І. С. Храповицький, Л. І. Щелкунова. – Харків : ХДТУБА, 2010. – 114 с.
4. **Ткач, Ю. М.** Оптимізаційні методи та моделі [Текст] / Ю. М. Ткач. – Чернівці : ЧДТУ, 2013. – 102 с.
5. **Вітлінський, В. В.** Математичне програмування [Текст] / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К. : КНЕУ, 2001. – 248 с.
6. **Пукальський, І. Д.** Математичне програмування [Текст] : навч.-метод. посіб. : Ч 1. / І. Д. Пукальський, І. П. Лусте. – Чернівці : Рута, 2009. – 96 с.
7. **Коробов, П. Н.** Математическое программирование и моделирование процессов [Текст] / П. Н. Коробов. – СПб : ДНК, 2003. – 376 с.
8. **Вагнер, Г.** Основы исследования операций [Текст] : в 3 т. Т. 1 / Г. Вагнер. – М. : Мир, 1972. – 337 с.
9. **Банди, Б.** Основы линейного программирования [Текст] / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1989. – 176 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Лабораторна робота № 1. Розробка математичної моделі задачі лінійного програмування	4
Лабораторна робота № 2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування	22
Лабораторна робота № 3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування	35
Лабораторна робота № 4. Двоїстість у лінійному програмуванні	59
Список використаних джерел	75

Навчальне видання

ЛАТАНСЬКА Людмила Олексіївна
ФАРІОНОВА Тетяна Анатоліївна

**МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ**

**Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт**

*У трьох частинах
Частина 1*

Редактор *С. А. Яременко*

Комп'ютерне складання та верстання *В. В. Москаленко*

Коректор *М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 4,5. Тираж 15 прим. Вид № 38. Зам. № 113.

Видавець і виготовник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

Е-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.